



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Óptica Geométrica em uma Perspectiva Matemática

Manoel Nunes do Couto Guimarães Netto

Goiânia

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** [] **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

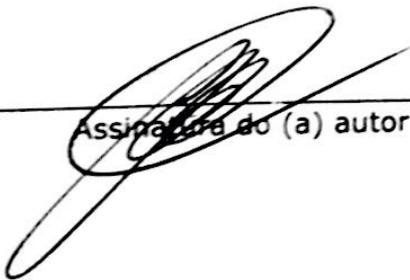
Nome completo do autor: *Manoel Nunes de Couto Guimarães Netto*

Título do trabalho: *Óptica Geométrica em uma Perspectiva Matemática*

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento **SIM** [] **NÃO**¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 06 / 10 / 2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

GUIMARÃES NETTO, MANOEL NUNES DO COUTO
Óptica Geométrica em uma Perspectiva Matemática [manuscrito] /
MANOEL NUNES DO COUTO GUIMARÃES NETTO. - 2015.
IVXC, 94 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Rogerio Queiroz Chaves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, ,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2015.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

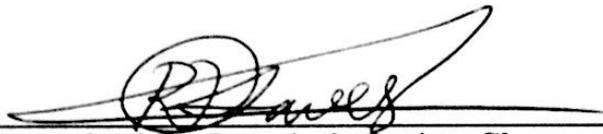
1. GEOMÉTRIA. 2. REFLEXÃO. 3. REFRAÇÃO. I. Chaves, Rogerio Queiroz, orient. II. Título.

CDU 512.7

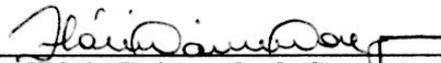
Manoel Nunes do Couto Guimarães Netto

**Óptica Geométrica em uma Perspectiva
Matemática**

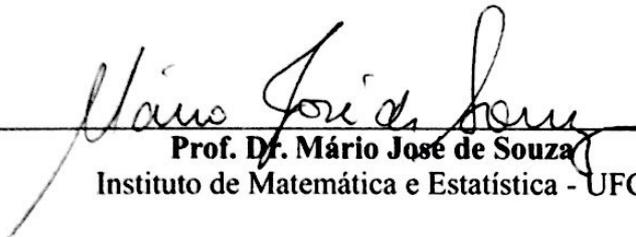
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de novembro de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro IFG-GOIÂNIA



Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Manoel Nunes do Couto Guimarães Netto graduação em Física pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás/PUC (2006). Atualmente é professor no Colégio Simbios, no Colégio Podium e professor P4 concursado pela Secretaria de Educação do Estado de Goiás lotado no Colégio Estadual Jardim América - CEJA, no qual ministro aulas de matemática. Trabalha em todas essas instituições como professor na preparação para a OBF, OBM, OBMEP e ENEM.

Dedico esse trabalho em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada. Também à minha esposa Nadja, minha filha Beatriz e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao PROFMAT pela oportunidade de participar de um programa de Pós-Graduação Stricto Sensu, à Capes pela bolsa ofertada que muito contribuiu como estímulo e reconhecimento ao tempo disponibilizado para a realização da pesquisa. Também agradeço à Secretaria de Educação do Estado de Goiás pela parceria realizada e pela licença concedida para facilitar meu desempenho no curso. Devo também meu reconhecimento pela paciência e auxílio de minha esposa Nadja, de minha tia Daura e do Professor Dr. Rogerio de Queiroz Chaves pelo seu empenho, dedicação e **grande** paciência.

Resumo

No Ensino Médio, quando se estuda a óptica geométrica, os professores de Física partem do pressuposto de que os alunos têm conhecimento e domínio dos conceitos básicos de geometria plana. Sendo assim, os livros de Física brasileiros não se prendem às demonstrações matemáticas. E esta é uma das razões pelas falhas no ensino da óptica no sistema Educacional Brasileiro. Muitas vezes essas demonstrações não são conhecidas nem mesmo pelos próprios professores, o que acreditamos ser uma das causas que dificulta o processo de ensino-aprendizagem da referida disciplina.

Para tentar melhorar a aprendizagem no ensino, da óptica geométrica, este trabalho propõe aplicações para a óptica na teoria matemática. Para que isso aconteça, esta dissertação vem detalhar conceitos básicos e explanações sobre Matemática. Em resumo, para alcançar o objetivo, os alunos devem aprender óptica geométrica sem a necessidade de decorar fórmulas.

Palavras-chave

Geometria, Reflexão, Refração.

Abstract

During high school optical geometry's studies, teachers of physics imagine that their students have complete knowledge about basic concepts of plane geometry. So, Brazilian high school physics' books do not use mathematical full explanations. Many times these explanations are not known even by the high school teachers themselves. This is one of the reasons responsible for optics' lack of teaching skills in Brazilian educational system.

To try to improve optical geometry teaching skills, this work proposes a mathematical theory applied to optics. To do that, this paper will detail basic concepts and theoretical explanations about mathematics. In resume, through our research, high school students would learn optical geometry without necessity to memorize physics' formulas.

Keywords

Geometry, Reflection, Refraction.

Lista de Figuras

1.1	Representação da Trajetória da Luz.	20
1.2	Feixes de Luz.	20
1.3	Exemplos de Feixes de Luz.	21
1.4	Representação dos Meios de Propagação da Luz.	21
1.5	Raio de Luz Incidindo Sobre a Superfície de Separação Entre Dois Meios.	23
1.6	Representação da Absorção.	23
1.7	Representação da Reflexão.	23
1.8	Representação da Refração.	24
1.9	Representação da Imagem Formada por uma Câmara Escura de Orifício.	25
1.10	Esquema de uma Câmara Escura de Orifício.	25
2.1	Representação da Reflexão de um Raio de Luz em uma Superfície. . . .	27
2.2	Possíveis Trajetórias para um Raio de Luz.	29
2.3	Modelo de Fermat para a Rota de Tempo Mínimo: partir de um ponto A, Refletir em uma Superfície Plana e atingir um ponto B.	30
2.4	Reflexão da Luz em uma Superfície.	31
2.5	Variação dos Ângulos de Incidência e Reflexão.	31
2.6	Reflexão em uma Superfície Irregular.	32
2.7	Representação de um Espelho Plano.	32

2.8	Representação dos Pontos Objetos (PO).	33
2.9	Representação dos Pontos Imagens (PI).	34
2.10	Representação de <i>POR</i> e <i>PIV</i> em um Espelho Plano.	34
2.11	Representação de um Objeto Extenso e sua Respectiva Imagem.	35
2.12	Representação de um Objeto e sua Imagem Feita por Simples Simetria.	36
2.13	Trajectoria de um Feixe de Luz Refletido por um Espelho Plano.	36
2.14	Representação do Campo Visual de um Observador.	37
2.15	Translação de Espelho Plano.	38
2.16	Rotação de Espelho Plano, para uma Incidência Inicial Perpendicular.	39
2.17	Associação de Espelhos Planos com Ângulo de 90° .	41
2.18	Elementos de uma Elipse.	42
2.19	Elementos de uma Parábola.	43
2.20	Elementos de uma Hipérbole.	44
2.21	Representação de uma Reta Tangente à Parábola.	45
2.22	Representação da Reta Tangente à Elipse.	46
2.23	Representação da Reta Tangente à Hipérbole.	47
2.24	Representação de Espelho Parabólico.	49
2.25	Representação dos Espelhos Esféricos.	50
2.26	Representação Simplificada dos Espelhos Esféricos.	51
2.27	Elementos dos Espelhos Esféricos.	51
2.28	Ângulo de Abertura de um Espelho Esférico.	52
2.29	Representação de Raios Para-Axiais.	53
2.30	Aberração Esférica.	53
2.31	Raios Incidentes Paralelos ao Eixo Principal.	55
2.32	Raios Incidentes Pelo Foco do Eixo Principal.	55

2.33 Raios Incidentes Pelo Centro de Curvatura.	56
2.34 Raios Incidentes pelo Vértice.	56
2.35 Formação de Imagem para um Objeto antes do Centro de Curvatura. . .	57
2.36 Formação de Imagem para um Objeto no Centro de Curvatura.	58
2.37 Formação de Imagem para um Objeto entre o Centro de Curvatura e o Foco.	58
2.38 Formação de Imagem para um Objeto no Foco.	58
2.39 Formação de Imagem para um Objeto entre o Foco e o Vértice.	59
2.40 Formação de Imagem para um Objeto em Frente a um Espelho Convexo.	59
2.41 Elementos dos Espelhos Esféricos.	60
2.42 Análise dos Sinais das Ordenadas.	60
2.43 Análise dos Sinais das Abscissas.	61
2.44 Representação Utilizada na Determinação da Equação de Gauss.	61
3.1 Representação dos Elementos da Refração.	64
3.2 Frente de Onda.	65
3.3 Refração da Luz indo de um Meio menos Refringente para um Meio mais Refringente.	66
3.4 Refração da Luz indo de um Meio mais Refringente para um Meio menos Refringente.	66
3.5 Refração da Luz com Incidência Normal à Superfície.	67
3.6 Representação da Refração, Reflexão Parcial e Total. Em A, B e C: Refração e Reflexão Parcial, em D: Reflexão Total.	67
3.7 Representação de um Diopetro Plano.	69
3.8 Demonstração da Equação de um Diopetro Plano.	69
3.9 Aproximação do $\text{sen } x \approx \text{tg } x \approx x$	70

3.10	Representação do Deslocamento Lateral.	71
3.11	Representação e Elementos de um Prisma Óptico.	72
3.12	Representação da Reflexão Total da Luz.	74
3.13	Representação da Fibra Óptica.	75
3.14	Lentes de Bordas Finas.	76
3.15	Lentes de Bordas Grossas.	76
3.16	Índice da Lente Maior que o do Meio.	77
3.17	Índice da Lente Menor que o do Meio.	77
3.18	Representação das Lentes.	77
3.19	Representação dos Elementos das Lentes.	78
3.20	Representação dos Raios Notáveis em Lentes Convergentes.	79
3.21	Representação dos Raios Notáveis em Lentes Divergentes.	79
3.22	Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto antes de A_o	80
3.23	Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto em A_o	80
3.24	Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto entre A_o e F_o	81
3.25	Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto no F_o	81
3.26	Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto entre F_o e O	82
3.27	Imagem Formada por uma Lente Divergente para um Objeto Real.	82
3.28	Representação dos Objetos de Estudo das Lentes.	83
3.29	Referencial de Gauss para as Lentes.	83
3.30	Dioptra Esférico.	85
3.31	Representação para a Equação de Halley.	87

3.32	Representação das Curvaturas das Lentes.	88
3.33	Representação das Curvaturas das Lentes Esféricas e Asféricas.	89

Sumário

1	Introdução à Óptica Geométrica	19
1.1	Conceitos Básicos	20
1.2	Fenômenos Luminosos	22
1.3	Princípios da Óptica Geométrica	24
2	Reflexão da Luz	27
2.0.1	Leis da Reflexão	28
2.1	Espelhos Planos	32
2.1.1	Formação de Imagens	33
2.1.2	Características da Imagem	35
2.1.3	Construção Fundamental	36
2.1.4	Campo Visual	37
2.1.5	Translação de Espelhos Planos	37
2.1.6	Rotação de um Espelho Plano	38
2.1.7	Associação de Espelhos Planos	39
2.2	Reflexão em Curvas Cônicas	41
2.2.1	Elipse	41
2.2.2	Parábola	42
2.2.3	Hipérbole	43

2.2.4	Retas Tangentes a uma Cônica	45
2.2.5	Espelhos Parabólicos	49
2.3	Espelhos Esféricos, Representação Gráfica e Elementos Geométricos . .	50
2.3.1	Condições de Nitidez de Gauss	52
2.3.2	Raios Notáveis	55
2.3.3	Determinação Gráfica das Imagens Conjugadas Pelos Espelhos Esféricos	56
2.3.4	Imagens nos Espelhos Côncavos e Espelhos Convexos	57
2.3.5	Estudo Analítico dos Espelhos Esféricos e Referencial de Gauss	59
2.3.6	Equação dos Pontos Conjugados (Equação de Gauss) e Aumento Linear Transversal	61
3	Refração da Luz	63
3.1	Refração	63
3.1.1	Elementos da Refração	63
3.1.2	Leis da Refração	64
3.1.3	O Desvio na Refração	66
3.1.4	Ângulo Limite (L) e Reflexão Total	67
3.2	Aplicações da Refração	68
3.2.1	Diopetro Plano	68
3.2.2	Lâmina de Faces Paralelas	70
3.2.3	Prismas Ópticos	72
3.2.4	Exemplos de Situações Envolvendo o Fenômeno da Reflexão Total	73
3.3	Lentes Esféricas	75
3.3.1	Tipos de Lentes	75
3.3.2	Comportamento Óptico das Lentes	76

3.3.3	Representação Esquemática de Lentes e Raios Notáveis	77
3.3.4	Construção Gráfica de Imagens	80
3.3.5	Estudo Analítico das Lentes Esféricas Delgadas	82
3.3.6	Vergência ou Convergência de uma Lente	84
3.3.7	Equação dos Fabricantes de Lentes (Equação de Halley)	85
3.4	Lentes Asféricas	88

Referências Bibliográficas	91
-----------------------------------	-----------

Introdução

O presente estudo pretende dar um novo enfoque ao ensino de Física e Matemática na educação básica, sob o ângulo da Óptica Geométrica. O objetivo principal é mostrar a importância da interdisciplinaridade neste contexto. Essa nova proposta de ensino é cobrada nas provas do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, no qual a Matemática é explorada como “Matemática e suas Tecnologias” e a Física como “Ciência da Natureza”. Assim, os professores precisam atualizar-se continuamente e, portanto, nada melhor que, se na própria faculdade o professor já aprendesse a identificar os conceitos matemáticos com ideias, fórmulas e demonstrações da Física e também o contrário: trabalhar os conceitos da Física explorando todos os aspectos da Matemática.

Normalmente no cotidiano das aulas de Física e Matemática, o professor repassa os conteúdos e as fórmulas. Com essa nova proposta de ensino, o aluno é instigado a pensar e a entender de onde surgem os conceitos, as fórmulas e como aplicá-los. Com o intuito de exemplificar esta proposta foi escolhido o conteúdo da Óptica Geométrica, conteúdo da área da Física colocado sob uma perspectiva Matemática.

No primeiro capítulo é feita uma introdução à óptica apresentando seus conceitos e princípios, entre vários assuntos é abordada, por exemplo, a Câmara Escura de Orifício, que é uma aplicação de semelhança de triângulos, conceito matemático, no qual são utilizados conceitos físicos para a explicação. Já no segundo capítulo é mostrado o fenômeno da reflexão em espelhos planos e curvos, envolvendo o Teorema de Fermat, para explicar as Leis da Reflexão. Também é abordada a aproximação dos espelhos esféricos de pequena abertura aos espelhos parabólicos. E no terceiro capítulo é apresentada a refração e as demonstrações da equação do Dioptra Plano, das Leis da Refração e da equação dos Fabricantes de Lentes.

Sendo assim, este estudo traz uma proposta de intervenção, de atualização no En-

sino de Matemática e de Física, buscando-se a correspondência entre as disciplinas, levando o professor e, conseqüentemente, o aluno a ver as disciplinas sob um novo formato, instigando-os a pensar [9].

Capítulo 1

Introdução à Óptica Geométrica

Didaticamente, pode-se dividir o estudo da óptica em duas partes. A óptica geométrica que é a parte da óptica que se dedica ao estudo descritivo das trajetórias seguidas pela luz e a óptica física que se dedica ao estudo da natureza da luz, bem como de sua interação com a matéria. Os diversos corpos que nos cercam podem ser vistos porque deles recebemos luz, que consegue sensibilizar o nosso aparelho visual. O Sol, a Lua, as estrelas, uma pessoa ou uma revista, por exemplo, enviam luz aos nossos olhos, o que nos permite enxergar. Dessa maneira é que abordamos a óptica geométrica neste trabalho, salientando a importância da geometria plana, abordando seus conceitos e leis nas demonstrações e aplicações.

No estudo da Óptica Geométrica não precisa ser levada em conta a natureza ondulatória da luz. Para isso, utilizamos o conceito de raio de luz relacionado a alguns princípios básicos que são desenvolvidos e associados ao uso da geometria plana.

1.1 Conceitos Básicos

No estudo da óptica, o primeiro conceito a ser estudado é a luz, uma forma de energia radiante que se propaga através de ondas eletromagnéticas. Ela é o agente físico que atua nos órgãos visuais, produzindo a sensação da visão. A velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas e, conseqüentemente, da luz no vácuo é geralmente representada pela letra c e tem o valor, aproximadamente, 300.000 km/s no vácuo. A luz em propagação é representada graficamente pelos raios de luz. Esses são linhas orientadas retilíneas em meios homogêneos, podendo ser curvilíneas para meios não homogêneos (Figura 1.1). As condições para cada tipo de propagação são explicadas mais adiante.

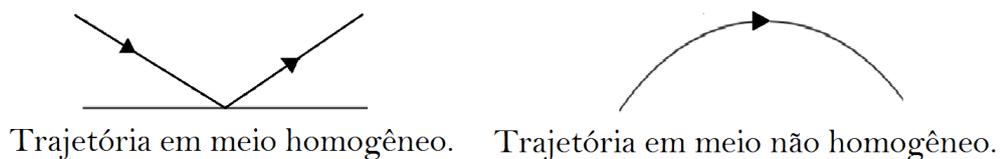


Figura 1.1: Representação da Trajetória da Luz.

Um conjunto de raios de luz é chamado de feixe ou pincel de luz, podendo ser cilíndrico, cônico convergente ou divergente (Figura 1.2).

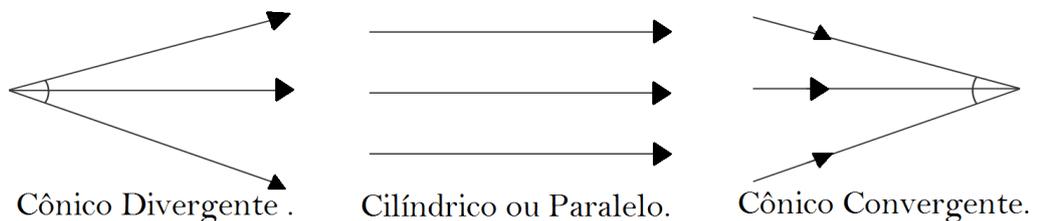


Figura 1.2: Feixes de Luz.

Os feixes cônicos divergentes são raios de luz emitidos por uma fonte pontual e se propagam em todas as direções. Por exemplo, tem-se a luz emitida pela chama de

uma vela retida em um recipiente com apenas um furo, por onde a luz pode sair. Os feixes cilíndricos ou paralelos são raios de luz que se propagam paralelamente uns aos outros, como a luz emitida por uma fonte de laser. Os cônicos convergentes são raios que convergem para um único ponto, por exemplo, a luz proveniente de uma lupa em direção ao seu foco (Figura 1.3).

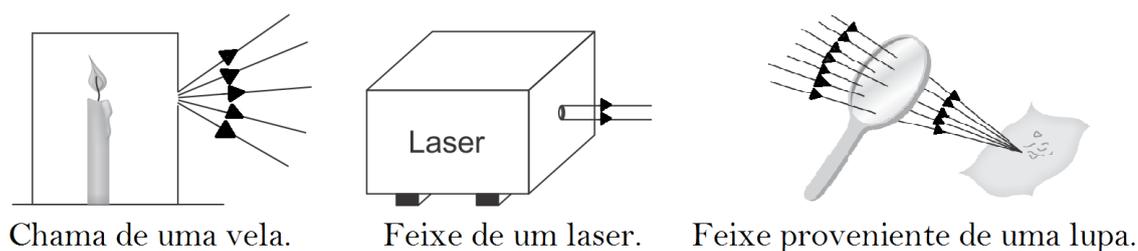


Figura 1.3: Exemplos de Feixes de Luz.

Os meios de propagação da luz são classificados como *transparentes*, *translúcidos* ou *opacos* (Figura 1.4).

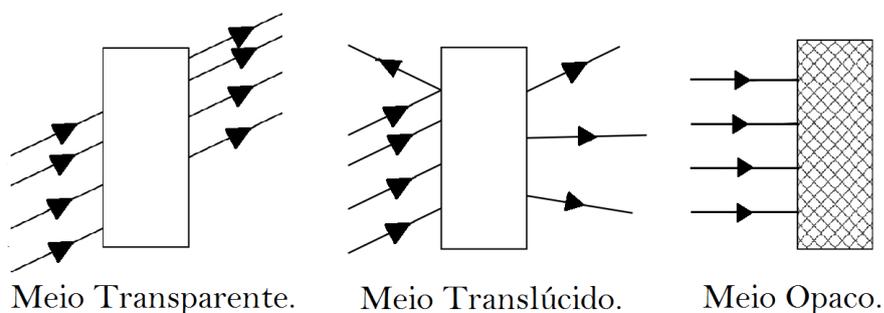


Figura 1.4: Representação dos Meios de Propagação da Luz.

Um meio é considerado transparente, quando permite a passagem da luz de forma regular e bem definida, assim como a visualização nítida de objetos através dele. Alguns exemplos de meios transparentes são o vidro plano e de boa qualidade usado em uma vitrine, uma pequena porção de água pura em equilíbrio, o ar etc.

Um meio é considerado translúcido, quando permite a passagem da luz de forma irregular e de trajetória indefinida, não se tem a visualização nítida de objetos por meio dele, alguns exemplos de meios translúcidos são o vidro leitoso usado em ambulâncias, os tijolos de vidro ou em uma porção de água em movimento etc.

Um meio é considerado opaco, quando impede totalmente a passagem da luz, não permitindo a propagação por ele. Alguns exemplos são uma parede feita de tijolos, uma chapa feita de chumbo, uma grande porção de água (meio dispersivo) etc. Elementos como a água e o plástico, dependendo da espessura, podem ser classificados como transparentes, translúcidos ou opacos.

Outra forma de classificação dos meios de propagação da luz é quanto à natureza, em que podem ser *homogêneos*, *isótopos* (isotrópicos) ou *ordinários*. Um meio é homogêneo, quando todos os seus elementos de volume apresentam as mesmas propriedades. O vácuo é um meio homogêneo por excelência. Tem-se um meio isótropo, quando as propriedades associadas a um elemento de volume independem da direção em que são medidas e os meios ordinários são meios ao mesmo tempo transparentes, homogêneos e isótopos.

1.2 Fenômenos Luminosos

Levando-se em consideração os conceitos básicos da óptica geométrica, quando um feixe de luz incide sobre a superfície que separa dois meios diferentes, verifica-se que a luz pode sofrer três fenômenos distintos: *absorção*, *reflexão* ou *refração*. A luz pode ser absorvida pela superfície, provocando um leve acréscimo em sua temperatura. A luz pode, ainda, retornar ao meio em que se propagava inicialmente, sofrendo reflexão e, se ela atravessar a superfície de separação dos meios, verifica-se o fenômeno da refração (Figura 1.5).

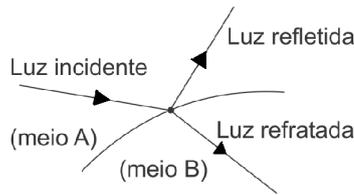


Figura 1.5: Raio de Luz Incidindo Sobre a Superfície de Separação Entre Dois Meios.

Embora os três fenômenos possam ocorrer de forma isolada ou simultânea, refração e reflexão são estudados de forma mais aprofundada em capítulos seguintes deste trabalho. Leva-se em conta agora uma explicação simplificada desses e da absorção (Figura 1.6), fenômeno que ocorre quando a luz atinge uma superfície de cor escura e sem polimento. Nesse caso, a luz é retida pela superfície, assim, quando a absorção ocorre, normalmente observa-se um aquecimento da superfície.

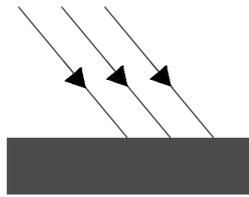


Figura 1.6: Representação da Absorção.

A reflexão ocorre quando a luz incide em uma superfície de separação entre dois meios, voltando a se propagar no meio de origem, podendo ser *regular* ou *difusa* (Figura 1.7).

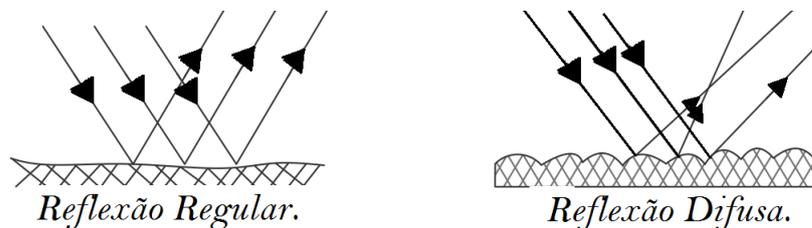


Figura 1.7: Representação da Reflexão.

E a refração é a passagem da luz de um meio material para outro. Quando a luz se propaga no ar atmosférico e atinge uma lente de óculos, passando a se propagar através deste vidro, ela sofre refração, que também pode ser *regular* ou *difusa* (Figura 1.8).

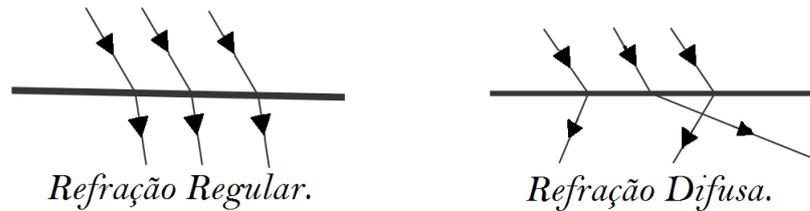


Figura 1.8: Representação da Refração.

1.3 Princípios da Óptica Geométrica

O desenvolvimento teórico da óptica geométrica baseia-se em três princípios, a saber, que, em um meio material homogêneo e transparente, a luz se propaga em linha reta (*princípio da propagação retilínea da luz*); a trajetória descrita por um raio de luz não depende do sentido de propagação (*princípio da reversibilidade da luz*); quando dois ou mais pincéis de luz encontram-se em uma determinada região, nenhuma de suas características individuais se altera, ou seja, as direções, os sentidos de propagação e as cores permanecem os mesmos (*princípio da independência da luz*).

A aplicação desses princípios associada aos conceitos da geometria plana é importante no estudo da câmara escura de orifício, que consiste em uma caixa de paredes opacas munida de um orifício em uma das faces. Assim, quando um objeto, é colocado em frente à câmara (Figura 1.9) raios de luz provenientes do objeto, atravessam o orifício e formam, na parede oposta, uma figura, chamada de imagem do objeto.

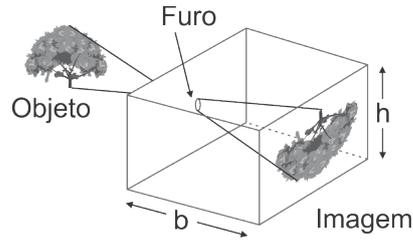


Figura 1.9: Representação da Imagem Formada por uma Câmara Escura de Orifício.

Considerando o a altura do objeto em frente ao orifício da câmara escura, utilizando o princípio da propagação retilínea e independência dos caminhos, tem-se a formação da imagem com i a altura da imagem formada no fundo da câmara escura. Designando por p e p' as distâncias do objeto e da imagem, respectivamente, à parede da câmara escura em que se encontra o orifício (Figura 1.10). A relação entre essas grandezas é obtida através da semelhança entre os triângulos $OA'B'$ e OAB , formados a partir do objeto e da imagem com o orifício da câmara escura, levando a

$$\Delta OA'B' \equiv \Delta OAB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{\text{dist}(A'B', O)}{\text{dist}(AB, O)} \Rightarrow \frac{i}{o} = \frac{p'}{p} .$$

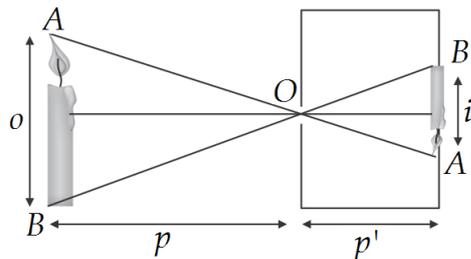


Figura 1.10: Esquema de uma Câmara Escura de Orifício.

Diante do exposto, os triângulos $OA'B'$ e OAB são semelhantes por serem formados pelas mesmas retas, terem o mesmo ângulo oposto pelo vértice, e também terem os lados opostos ao ângulo comum paralelos entre si. A seguir, estabelecemos uma abor-

dagem mais específica sobre a reflexão e refração da luz, introduzindo um tratamento matemático ao estudo da óptica geométrica.

Capítulo 2

Reflexão da Luz

Quando a luz incide na superfície de separação entre dois meios e volta a se propagar no meio de origem tem-se o fenômeno da reflexão da luz. Os elementos geométricos envolvidos na reflexão, estão representados (Figura 2.1).

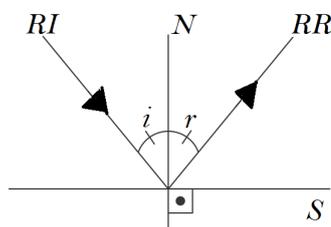


Figura 2.1: Representação da Reflexão de um Raio de Luz em uma Superfície.

Na figura anterior, RI representa o raio de luz incidente na superfície S , de separação entre os meios, N a reta normal à superfície no ponto de incidência, RR representa o raio de luz refletido pela superfície S , i é o ângulo de incidência, entre o raio incidente e a reta normal, e r é o ângulo de reflexão, entre o raio refletido e a reta normal.

Para se entender as leis que regem a reflexão é necessário o estudo do *Princípio do Tempo Mínimo* de Fermat. O matemático francês **Pierre Fermat** (1601 - 1665), em agosto de 1657, escreveu uma carta a Monsieur Cureau de la Chambre, enunciando

o seu célebre *Princípio do Tempo Mínimo*: “A natureza sempre escolhe os menores caminhos.”

Com esse princípio, Fermat caracteriza a propagação da luz:

“A trajetória seguida pela luz viajando de um ponto a outro é tal que o tempo de viagem é mínimo. Isto é, a luz percorre a trajetória mais rápida.”[8]

Dessa forma, utilizamos o Princípio de Fermat para a fundamentação das Leis da Reflexão, bem como as Leis da Refração.

2.0.1 Leis da Reflexão

O estudo da reflexão da luz baseia-se em duas leis, que podem ser enunciadas, segundo o princípio de Fermat, da seguinte forma:

1ª *Lei da Reflexão*: o raio incidente, a reta normal e o raio refletido são coplanares (ficam em um mesmo plano).

2ª *Lei da Reflexão*: a medida do ângulo de incidência em relação à reta normal é igual à medida do ângulo de reflexão.

A primeira e segunda leis da reflexão surgiram empiricamente, sendo conhecidas desde os tempos antigos pelos sábios de Alexandria. Nos trabalhos de Heron (I a.C) e Ptolomeu (II d.C) encontram-se enunciadas essas leis. Já no século XIX, com o estudo do eletromagnetismo e com a comprovação de que a luz pode ser tratada como uma onda eletromagnética foi possível demonstrar as leis da reflexão [1].

Pelo Princípio de Fermat, a luz percorre sempre o caminho que requer o menor tempo para ir de um ponto A a um ponto B . Considerando um ponto A que emite luz para um ponto B , por reflexão, sob as condições do meio de propagação *ordinário*

e a velocidade da luz sendo a mesma para todos os pontos, conseqüentemente, as trajetórias descritas pelo raio de luz incidente e refletido são retas (Figura 2.2).

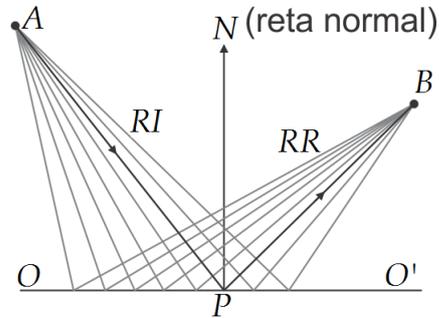


Figura 2.2: Possíveis Trajetórias para um Raio de Luz.

De fato, como a velocidade é definida pela razão entre a distância percorrida e o tempo gasto

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{v},$$

sendo a velocidade constante, tem-se $\Delta t \propto \Delta S$ (variação do tempo é proporcional a variação do espaço). Assim, o tempo de percurso é mínimo se o comprimento da trajetória for mínimo, o que no espaço Euclidiano é realizado pelos segmentos de reta.

Sendo A' o ponto simétrico de A em relação ao plano da superfície, considerando C a projeção dos pontos A e A' em OO' . Se os pontos A' , P e B estão alinhados e $\overline{AP} = \overline{A'P}$, com P um ponto da superfície OO' (Figura 2.3). Assim, tem-se d_P a distância percorrida pela luz quando descreve a trajetória APB em:

$$d_P = \overline{AP} + \overline{PB},$$

mas, como $\overline{AP} = \overline{A'P}$, conclui-se que

$$d_P = \overline{A'P} + \overline{PB}. \quad (2.1)$$

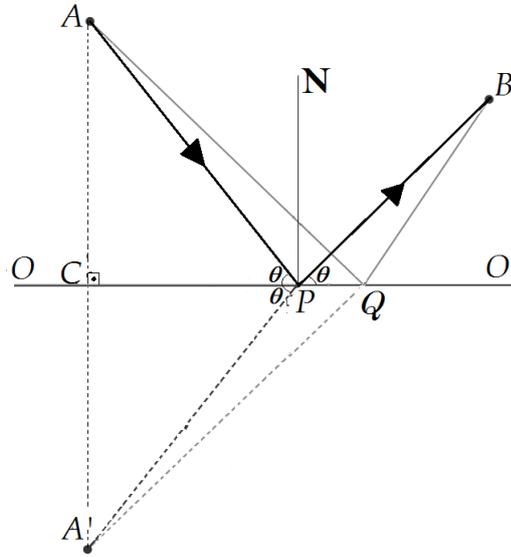


Figura 2.3: Modelo de Fermat para a Rota de Tempo Mínimo: partir de um ponto A , Refletir em uma Superfície Plana e atingir um ponto B .

Considerando agora outro ponto qualquer do espelho, como por exemplo, o ponto Q (Figura 2.3), e então calculando a distância d_Q que seria percorrida pela luz se seguisse a trajetória AQB , tem-se

$$d_Q = \overline{AQ} + \overline{QB},$$

porém, como $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$, conclui-se que

$$d_Q = \overline{A'Q} + \overline{QB}. \quad (2.2)$$

Da Geometria Plana sabe-se que, em um triângulo qualquer, a medida de um lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois. Assim, considerando o triângulo $A'BQ$, pode-se escrever

$$\overline{A'B} < \overline{A'Q} + \overline{QB} \Rightarrow \overline{A'P} + \overline{PB} < \overline{A'Q} + \overline{QB}. \quad (2.3)$$

Considerando as igualdades (2.1) e (2.2), a desigualdade (2.3) transforma-se em

$$d_P < d_Q,$$

isto é, a distância percorrida pela luz, quando atinge a superfície OO' no ponto P é mais curta que a distância em qualquer outra trajetória. Assim, conclui-se que a trajetória APB , é aquela em que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, visto que o ângulo formado por \overrightarrow{PB} e OO' é oposto pelo vértice com o ângulo formado por $\overrightarrow{A'P}$ e OO' , e que os triângulos APC e $A'PC$ são congruentes.

Dessas leis podem-se observar alguns aspectos importantes. As leis da reflexão são válidas para quaisquer tipos de superfícies, planas ou curvas, pois a reflexão ocorre de maneira localizada em um único ponto (Figura 2.4).

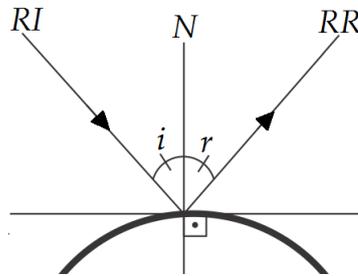


Figura 2.4: Reflexão da Luz em uma Superfície.

As leis da reflexão não dependem da cor da luz, isto é, todas as cores sofrem reflexão exatamente da mesma forma.

Os ângulos de incidência e reflexão variam no intervalo de 0° a 90° (Figura 2.5).



Figura 2.5: Variação dos Ângulos de Incidência e Reflexão.

As leis da reflexão também são obedecidas em superfícies irregulares (Figura 2.6).

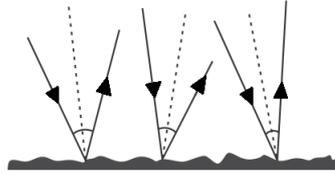


Figura 2.6: Reflexão em uma Superfície Irregular.

Continuando o presente estudo, analisa-se, agora, a reflexão da luz nos espelhos, fazendo uma abordagem dos espelhos parabólicos pouco explorados no Ensino Médio, muito embora antes faz-se necessário uma abordagem progressiva dos tipos de espelhos. Deve ser notado, também, que as definições das cônicas levam em conta conceitos matemáticos básicos, mostrando que o principal elemento para se entender a óptica geométrica é a geometria.

2.1 Espelhos Planos

O estudo da reflexão normalmente inicia-se pelos *espelhos planos*, pois eles são os mais simples sistemas ópticos de formação de imagens, sendo o único sistema óptico que é sempre *estigmático* (as imagens têm as mesmas dimensões dos objetos, sem distorção) e cujas imagens podem ser formadas por simetria em relação ao plano da superfície refletora. Costuma-se representar graficamente um espelho plano por um segmento de reta (Figura 2.7).

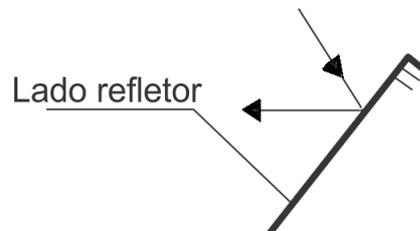


Figura 2.7: Representação de um Espelho Plano.

2.1.1 Formação de Imagens

Para o estudo da formação de imagens nos espelhos planos, vamos definir primeiro os elementos *ponto objeto* e *ponto imagem*.

Ponto objeto (PO), em relação a um sistema óptico (espelho), é o vértice do pincel de luz que chega ao sistema óptico. No caso de os raios de luz efetivamente se cruzarem no ponto objeto (raios divergentes), então o PO é dito *real* (POR). Já na hipótese de o cruzamento ocorrer com os prolongamentos dos raios de luz (raios convergentes), então o ponto objeto é dito *virtual* (POV) e, se o pincel de luz que chega ao espelho for cilíndrico (raios paralelos), o ponto objeto é dito *impróprio* (POI) (Figura 2.8).

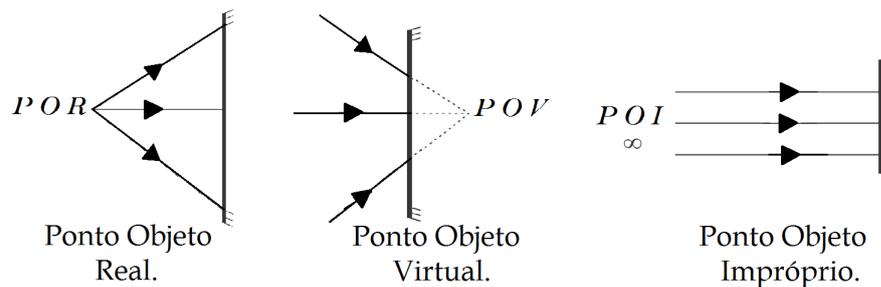


Figura 2.8: Representação dos Pontos Objetos (PO).

Um **ponto imagem** (PI), em relação a um sistema óptico, é o vértice do pincel de luz que sai do sistema óptico. No caso dos raios de luz efetivamente se cruzarem no ponto imagem (raios convergentes), então o PI é dito *real* (PIR) e, na condição do cruzamento dar-se-a com os prolongamentos dos raios de luz (raios divergentes), então o ponto imagem é chamado de *virtual* (PIV) e ainda, se o pincel de luz que sai do espelho for cilíndrico (raios paralelos), o ponto objeto será dito *impróprio* (PII) (Figura 2.9).

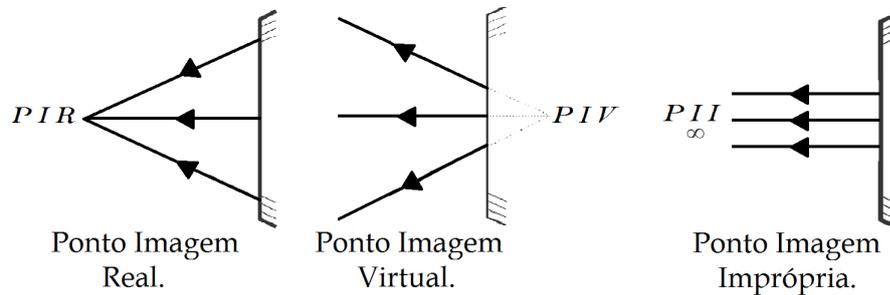


Figura 2.9: Representação dos Pontos Imagens (PI).

Assim, considerando um espelho plano E e um ponto P que emite luz, os prolongamentos de todos os raios refletidos no espelho, provenientes de P , passam por P' (imagem de P) (Figura 2.10).

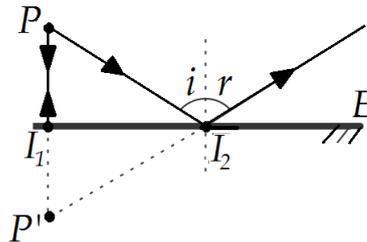


Figura 2.10: Representação de POR e PIV em um Espelho Plano.

Considerando I_1 e I_2 , dois pontos de incidência da luz no espelho, os triângulos PI_1I_2 e $P'I_1I_2$ são congruentes, pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo). Logo, $\overline{PI_1} = \overline{P'I_1}$. Portanto, conclui-se que o ponto P e o ponto P' são simétricos em relação à superfície refletora. Para um observador que recebe os raios refletidos, parece que os raios vieram de P' , isto é, o observador vê P' atrás do espelho. Diz-se que P' é um ponto imagem virtual e P é um ponto objeto real, ambos em relação ao espelho E (sistema óptico).

Considerando-se que cada corpo extenso é constituído de finitos pontos objeto, seria inviável representar a imagem ponto a ponto. Assim, pode-se formar a imagem

do corpo utilizando o processo de simetria em relação ao plano do espelho (Figura 2.11).

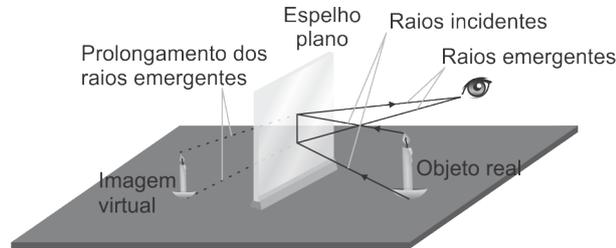


Figura 2.11: Representação de um Objeto Extenso e sua Respectiva Imagem.

Dessa forma, relativamente a um espelho plano, o objeto e a imagem têm naturezas opostas, ou seja, se o objeto é real, a imagem conjugada pelo espelho plano é virtual e vice-versa. Os objetos e as imagens reais situam-se na frente do espelho plano e os objetos e as imagens virtuais situam-se atrás do espelho plano. Sendo assim, observa-se que a imagem de um corpo extenso, conjugada pelo espelho plano, não pode ser superposta com o corpo. Então, o objeto e a imagem são figuras *enantiomorfas*, isto é, de forma contrária (direita vira esquerda e vice-versa).

2.1.2 Características da Imagem

Uma imagem formada por um espelho plano é classificada quanto aos parâmetros: natureza, posição, orientação, tamanho e forma.

Quanto à natureza, a imagem conjugada por um espelho plano é virtual se o objeto é real, real se o objeto é virtual e imprópria se o objeto é impróprio. Em relação à sua posição, pode-se dizer que a imagem formada por um espelho plano é simétrica ao objeto, em relação ao plano do espelho. A forma e o tamanho da imagem são sempre os mesmos do objeto, seu sentido (direita ou invertida, em relação ao objeto) é sempre direita em comparação ao objeto e sempre enantiomorfa, isto é, um objeto

e uma imagem têm a mesma forma e tamanho, mas não se encaixam por simples sobreposição, por causa da inversão de lados (direita, esquerda) (Figura 2.12).

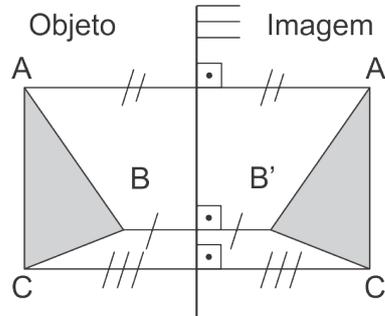


Figura 2.12: Representação de um Objeto e sua Imagem Feita por Simples Simetria.

2.1.3 Construção Fundamental

Quando um observador O visualiza um objeto F através de um espelho plano, a trajetória descrita pela luz satisfaz as leis da reflexão. Assim, para se traçar um raio de luz que vai do objeto F para o observador O , basta aplicar o conceito de simetria em relação ao plano do espelho e prolongar a reta que liga o ponto imagem F' ao observador O . O ponto onde esta reta ‘corta’ o espelho é o ponto de incidência de luz. A simetria também pode ser obtida utilizando o observador e não o objeto (Figura 2.13).

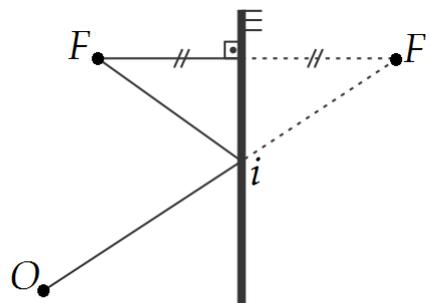


Figura 2.13: Trajetória de um Feixe de Luz Refletido por um Espelho Plano.

2.1.4 Campo Visual

Se um feixe de luz incide em um espelho plano e é refletido para um observador O , este visualiza o ponto objeto que emitiu o feixe. Dessa forma, todos os pontos contidos em uma região em frente ao espelho, e que podem ser vistos pelo observador, constituem o seu campo visual (Figura 2.14).

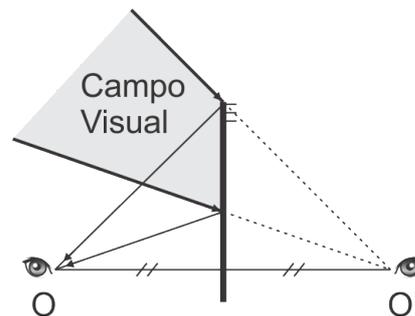


Figura 2.14: Representação do Campo Visual de um Observador.

Para uma posição O do olho do observador, define-se o campo visual do espelho plano como sendo a região do espaço que se torna visível por reflexão no espelho. Essa região pode ser encontrada utilizando a posição O do observador, que determina a posição de sua imagem O' em relação ao espelho. A região do espaço visível por reflexão é determinada ligando-se o ponto O' aos extremos do espelho e prolongando-se as semirretas assim obtidas.

2.1.5 Translação de Espelhos Planos

Ao transladar (aproximar ou afastar) um espelho plano em relação ao objeto, tem-se que a imagem também sofre um deslocamento. Um objeto que se encontra a uma distância x de um espelho plano, tem a sua imagem formada a uma mesma distância x . Afastando-se o espelho em relação ao objeto de uma distância d , a nova distância entre o espelho e o objeto é $x + d$ e da imagem ao espelho também é $x + d$. Sendo assim,

a imagem sofre um deslocamento $D = 2d$ em relação à sua posição inicial (Figura 2.15).

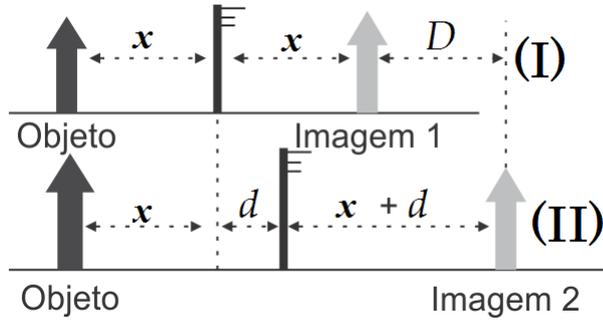


Figura 2.15: Translação de Espelho Plano.

Dividindo-se ambos os termos da equação $D = 2d$ por um intervalo de tempo tem-se a relação das velocidades da imagem em relação ao objeto e do espelho em relação ao objeto,

$$\frac{D}{\Delta t} = \frac{2d}{\Delta t} \Rightarrow v_i = 2v_e,$$

na qual v_i é a velocidade da imagem em relação ao objeto, v_e é a velocidade do espelho em relação ao objeto.

2.1.6 Rotação de um Espelho Plano

Além de se transladar um espelho plano pode-se rotacioná-lo em torno de um eixo. Ao girar um espelho plano de um ângulo α , em torno de um eixo perpendicular ao plano de incidência da luz e da reta normal, também gira-se a reta normal de um ângulo α , em relação à posição inicial.

Conseqüentemente, considerando uma incidência inicial perpendicular à superfície, o raio incidente gira de um ângulo α , em relação à normal.

E, de acordo com a 2ª lei da reflexão, o raio refletido, da mesma forma, gira um ângulo α em relação à normal, por fim o raio refletido gira em relação à posição inicial de um ângulo β (Figura 2.16). Assim, sendo α o ângulo de rotação do espelho em torno de um eixo e β o ângulo de desvio do raio refletido, tem-se $\beta = 2\alpha$.

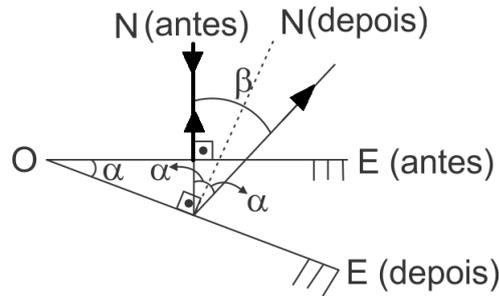


Figura 2.16: Rotação de Espelho Plano, para uma Incidência Inicial Perpendicular.

2.1.7 Associação de Espelhos Planos

Uma configuração interessante dos espelhos planos é a associação de dois espelhos para a obtenção de múltiplas imagens. Analisando-se as imagens formadas por essa associação em relação a um ângulo α entre as suas superfícies refletoras, pode-se deduzir uma equação que fornece o número de imagens formadas pelos espelhos planos.

Em alguns casos é possível calcular o número de imagens formadas por uma associação de espelhos que formam um ângulo α . Se o quociente $360^\circ/\alpha$, for um número inteiro, com α medido em graus, o número N de imagens é dado por

$$N = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1, \quad (2.4)$$

com a condição de que, se $(360^\circ/\alpha)$ for um número *ímpar*, para se obter o número N de imagens dado por (2.4), o objeto deve estar exatamente sobre o *plano bissetor do diedro* (α); e se $(360^\circ/\alpha)$ for um número *par*, o objeto pode ser colocado em qualquer posição entre os espelhos.

De fato, a expressão (2.4) pode ser justificada tomando-se por base dois espelhos planos com suas superfícies refletoras voltadas uma para a outra, a região entre essas superfícies que formam um ângulo α entre si é um diedro. Esse ângulo α , no entanto, deve ser restrito entre 0° e 180° , visto que para valores maiores que 180° as superfícies refletoras não mais estão voltadas uma para a outra, e também vão ser considerados valores de α convenientes para que a divisão seja um inteiro. Assim, o número de regiões formadas pela reflexão mútua dos espelhos planos é dado por

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} .$$

Como o objeto encontra-se em uma dessas regiões, tem-se que o número de imagens é igual ao número de regiões menos uma, que é ocupada pelo objeto. Assim,

$$N = n - 1 \Rightarrow N = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1,$$

na qual N é o número de imagens formadas pela associação dos espelhos planos e α é o ângulo entre os espelhos planos.

Por exemplo, considerando-se um ponto objeto entre dois espelhos planos, na região entre as superfícies refletoras e à distância do objeto à intersecção dos espelhos e centrada no mesmo ponto, considerando ainda a divisão $360^\circ/\alpha$, nas condições mencionadas anteriormente e supondo que $\alpha = 90^\circ$ (Figura 2.17), tem-se

$$n = \frac{360^\circ}{90^\circ} \Rightarrow n = 4.$$

Na Figura 2.17, tem-se que O é o objeto real para E_1 e E_2 , i_1 é a imagem conjugada de O , por E_1 , i_2 é a imagem conjugada de O , por E_2 , i'_1 é a imagem conjugada de i_1 , por E_2 , i'_2 é a imagem conjugada de i_2 , por E_1 .

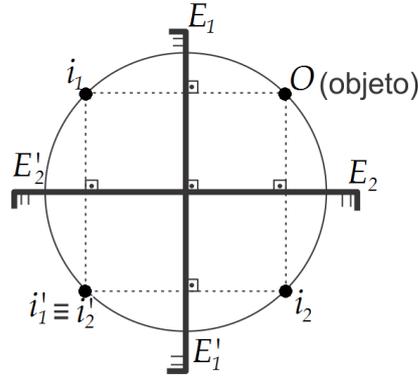


Figura 2.17: Associação de Espelhos Planos com Ângulo de 90° .

2.2 Reflexão em Curvas Cônicas

Antes de iniciar o estudo dos espelhos esféricos e suas particularidades, é conveniente compreender a reflexão nas curvas planas, cônicas, na forma de uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, devido à relação entre os focos de uma cônica e as retas tangentes. Na óptica geométrica considera-se que a luz se propaga em linha reta e radialmente a partir de uma fonte. Conseqüentemente, os raios provenientes de uma fonte muito distante podem ser considerados praticamente paralelos entre si.

2.2.1 Elipse

Uma *elipse* é o conjunto de todos os pontos de intersecção de um cone circular reto, com um plano oblíquo, em relação ao eixo do cone e que intersecte todas as geratrizes. Também pode ser definida, como o lugar geométrico dos pontos de um plano, cujas distâncias em relação a dois pontos F_1 e F_2 têm uma soma constante.

Para se obter uma equação da elipse, pode-se estabelecer a seguinte análise: dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , focos da elipse, pertencentes a um plano α , separados por uma distância igual a $2c$. Sendo $2a$ a medida do eixo maior da elipse e $2b$ a medida do eixo menor, tem-se uma elipse definida como o conjunto dos pontos de α cuja soma das

distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a > 2c$. Segundo o Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, que em notação de conjuntos, constata-se

$$\text{Elipse} = \{P \in \alpha \mid \text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a\}.$$

Ao se escolher um sistema cartesiano ortogonal, tal que o eixo x passe pelos pontos A_1 e A_2 , extremos do eixo maior da elipse e o eixo y passe pelos pontos B_1 e B_2 , extremos do eixo menor da elipse, com os focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ (Figura 2.18), pode-se deduzir uma equação reduzida da elipse que tem $P(x, y)$ como ponto genérico pela expressão

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

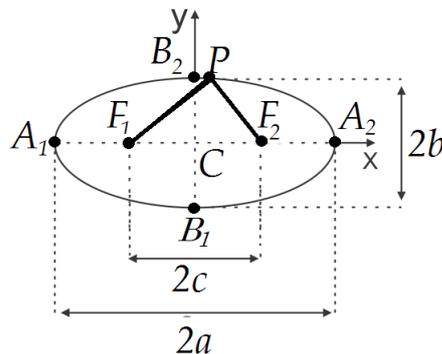


Figura 2.18: Elementos de uma Elipse.

2.2.2 Parábola

Uma *parábola* é obtida pela secção de um cone circular reto por um plano paralelo à geratriz. Outra maneira de definir é como o lugar geométrico de todos os pontos do plano que encontram-se a uma mesma distância de uma reta d e de um ponto F .

Para se obter uma equação da parábola, pode-se estabelecer a seguinte análise: dado um ponto qualquer F , foco da parábola, pertencente a um plano α , e uma reta

d , diretriz, separados por uma distância igual a p , o conjunto dos pontos de α cujas distâncias a F e a d são sempre iguais definem uma parábola. Assim, se α é o plano da parábola, em notação de conjunto,

$$\text{Parábola} = \{P \in \alpha \mid \text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)\}.$$

Ao se utilizar um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola, e com F pertencente ao eixo das ordenadas, sendo p a distância entre o foco F e a diretriz d (Figura 2.19), conclui-se que $F(0, p/2)$ e que a equação da diretriz d é $y = -p/2$. Nessas condições, pode-se deduzir uma equação reduzida da parábola que tem $P(x, y)$ como ponto genérico pela expressão

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

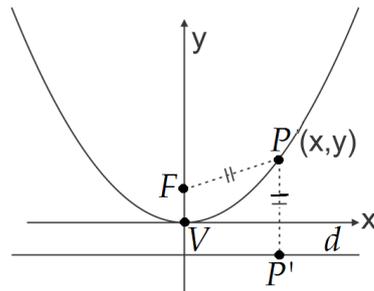


Figura 2.19: Elementos de uma Parábola.

2.2.3 Hipérbole

Ao se considerar um cone duplo, seccionado por um plano que corta as duas folhas da superfície e paralelo ao seu eixo, não passando pelo vértice, obtém-se uma hipérbole, que deve ser vista como uma única curva, constituída de dois ramos, um em cada folha do cone. Outro modo de definir a hipérbole é como o lugar geométrico dos pontos de

um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos do mesmo é constante, em valor absoluto.

A fim de se obter uma equação da hipérbole, pode-se estabelecer a seguinte análise: dados dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 , focos da hipérbole, pertencentes a um plano α e separados por uma distância igual a $2c$; sendo A_1 e A_2 os vértices da hipérbole com a distância $2a$ e O o centro da hipérbole, definida como o conjunto dos pontos $P(x, y)$ de α , em que o módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$ e com $0 < 2a < 2c$, em notação de conjuntos, conclui-se que

$$\text{Hipérbole} = \{P \in \alpha \mid |\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a\}.$$

Levando-se em conta um sistema cartesiano ortogonal, tal que o eixo x passe por A_1 e A_2 , e o eixo y seja a mediatriz de A_1A_2 e sendo $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ os focos (Figura 2.20), chama-se equação reduzida da hipérbole a expressão

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

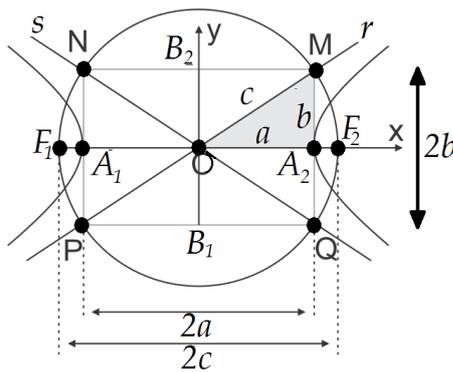


Figura 2.20: Elementos de uma Hipérbole.

2.2.4 Retas Tangentes a uma Cônica

As propriedades das retas tangentes a uma cônica são largamente aplicadas no estudo da reflexão da luz nos espelhos curvos, principalmente nos espelhos parabólicos que, por aproximação para pequenas aberturas dos espelhos esféricos, terão as mesmas propriedades destes. Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma cônica em um ponto P é que a reta toque a curva sem cortá-la, compartilhando um único ponto com a curva.

Seja P um ponto da *parábola* de foco F e diretriz d , sendo D o pé da perpendicular à reta d passando por P e t a reta bissetriz do ângulo $\angle FPD$. Tem-se que t é reta tangente à parábola no ponto P , e também a mediatriz do segmento FD (Figura 2.21).

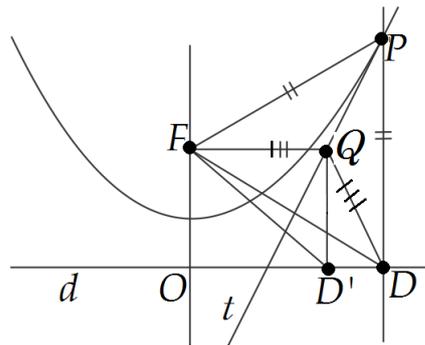


Figura 2.21: Representação de uma Reta Tangente à Parábola.

De fato, uma parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, em que a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à diretriz (pontos externos) e outra em que cada ponto tem distância ao foco menor que sua distância à diretriz (pontos internos). Sendo P um ponto da parábola, e D o pé da perpendicular à reta d passando por P , no triângulo FPD tem-se que $\overline{PF} = \overline{PD}$. Assim, a reta t , bissetriz do ângulo $\angle FPD$, é também *altura* e *mediana* do triângulo FPD , ou seja, a reta t é a mediatriz do segmento FD .

Considerando agora, Q um ponto qualquer da reta t , distinto de P , sendo D' o pé

da perpendicular à reta d , passando por Q , tem-se que $Q\widehat{D}D' < Q\widehat{D}'D$ e, portanto, $\overline{QF} = \overline{QD} > \overline{QD'}$, ou seja, Q está a uma distância maior do foco do que da diretriz. Logo, Q é um ponto da reta t externo à parábola, t tangente à parábola em P , o único ponto de intersecção entre a reta t e a parábola.

Seja P um ponto da *elipse*, de focos F_1 e F_2 , e as semirretas $\overrightarrow{F_1P}$, $\overrightarrow{F_2P}$, tais que os prolongamentos de F_1' e F_2' são pontos que se intersectam em P , externos a elipse. Se a reta t é a bissetriz do ângulo determinado pelo cruzamento das semirretas, então t é tangente à elipse no ponto P (Figura 2.22).

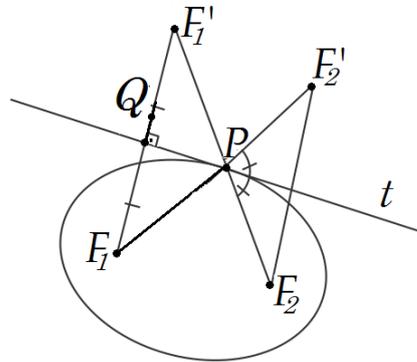


Figura 2.22: Representação da Reta Tangente à Elipse.

De fato, como a elipse é o lugar geométrico dos pontos P , tais que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, assim, como no caso da parábola, a elipse separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, em que cada ponto P encontra-se a uma distância que satisfaça a seguinte condição $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > 2a$, e outra em que cada ponto P encontra-se na seguinte distância $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} < 2a$. Logo, uma reta é tangente a uma elipse em um ponto P se, e somente se, intersectar a elipse em P . No entanto, se o ponto da reta for distinto de P , tem-se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > 2a$.

Considerando F_1' ponto da semirreta $\overrightarrow{F_1P}$, para a situação $\overline{F_1'P} = \overline{PF_1}$, tem-se que o triângulo $F_1'PF_1$ é isósceles, logo, a reta t é a mediatriz do segmento $F_1'F_1$ e considerando um ponto Q da reta t , distinto de P , tal que, $\overline{F_1Q} = \overline{QF_1}$, aplicando-se

a desigualdade triangular ao $\Delta F_1'QF_2$, tem-se

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{F_1'Q} + \overline{QF_2} > \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'P} + \overline{PF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

portanto, Q é um ponto externo à elipse e a reta t é tangente à elipse em P .

Seja P , um ponto da *hipérbole* de focos, F_1 e F_2 . Se a reta t é a bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas $\overrightarrow{PF_1}$, e $\overrightarrow{PF_2}$, então t é tangente à hipérbole em P (Figura 2.23).

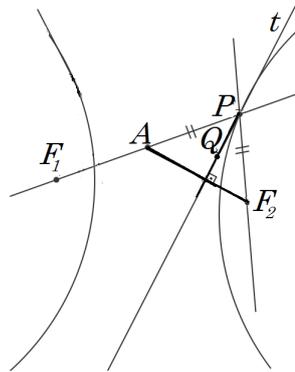


Figura 2.23: Representação da Reta Tangente à Hipérbole.

De fato, pela definição, uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem a propriedade métrica, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$. Os dois ramos da hipérbole dividem o plano em três regiões: uma região compreendida entre os dois ramos onde, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < 2a$, ou seja, $(-2a < \overline{PF_1} - \overline{PF_2} < 2a)$ e em outras duas regiões que contêm os focos de cada um dos ramos da hipérbole e cujo os pontos satisfazem a relação $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| > 2a$, ou seja, $(-2a > \overline{PF_1} - \overline{PF_2} > 2a)$.

Dessa maneira, uma reta é tangente à hipérbole em um ponto P se, e somente se, intersecta a hipérbole em P e, qualquer que seja o ponto Q da reta distinto de P , $|\overline{QF_1} -$

$|\overline{QF_2}| < 2a$. Sejam, agora, P um ponto da hipérbole, t a bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$ e Q um ponto da t , distinto de P , considerando-se um ponto A da semirreta $\overrightarrow{PF_1}$ tal que $\overline{PA} = \overline{PF_2}$, tem-se que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ e, portanto, $\overline{AF_1} = 2a$. Como o triângulo APF_2 é isósceles, a reta t é a mediatriz do segmento AF_2 e o triângulo AQF_2 também é isósceles. Em particular, tem-se $\overline{QA} = \overline{QF_2}$, e através da desigualdade triangular aplicada ao ΔQAF_1 que $\overline{QA} < \overline{QF_1} + \overline{F_1A}$ e $\overline{QF_1} < \overline{QA} + \overline{AF_1}$. Logo, tem-se

$$\overline{QA} - \overline{AF_1} < \overline{QF_1} < \overline{QA} + \overline{AF_1},$$

que fornece $-\overline{AF_1} < \overline{QF_1} - \overline{QA} < \overline{AF_1}$, ou seja, $|\overline{QF_1} - \overline{QA}| < \overline{AF_1}$. Como $\overline{QA} = \overline{QF_2}$ e $\overline{AF_1} = 2a$ obtém-se

$$|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| < 2a,$$

para todo ponto Q diferente de P . Portanto, t menos o ponto P está contida na região entre os ramos da hipérbole e conclui-se que a reta t é tangente à hipérbole em P .

Como a reflexão ocorre de maneira pontual (Figura 2.4), as leis da reflexão são válidas para quaisquer tipos de superfícies, planas ou curvas, assim, as propriedades de reflexões em curvas cônicas também são ratificadas em superfícies geradas por essas cônicas.

Utilizando-se das propriedades das retas tangentes, pode-se perceber que todos os feixes de luz ou prolongamentos dos mesmos, que passam por um foco de uma cônica, sofrem reflexão passando pelo outro foco da cônica. No caso das parábolas, quando raios de luz incidem paralelamente ao eixo de simetria da parábola, esses são refletidos na direção do foco da parábola. Alguns exemplos de aplicações de espelhos parabólicos são: antenas de recepção de sinal de TV, holofotes e faróis de carros. Nesse aspecto, serão analisados os espelhos parabólicos e o caso de pequena abertura para os espelhos esféricos que se aproximam ao espelho parabólico.

Para os espelhos elípticos, alguns exemplos de aplicação são os refletores odontológicos, os aparelhos de radioterapia e as salas de sussurros. E, para os espelhos hiperbólicos são exemplos certos tipos de telescópios refletores.

2.2.5 Espelhos Parabólicos

Nos espelhos parabólicos (Figura 2.24), a luz proveniente de uma fonte distante é refletida no foco da parábola, considerando que os raios são paralelos ao seu eixo. Dessa forma, para toda a face refletora do espelho esses raios são refletidos, passando pelo foco, minimizando as aberrações, que ocorrem, por exemplo, com os espelhos esféricos (aberrações esféricas), as quais são estudadas mais à frente.

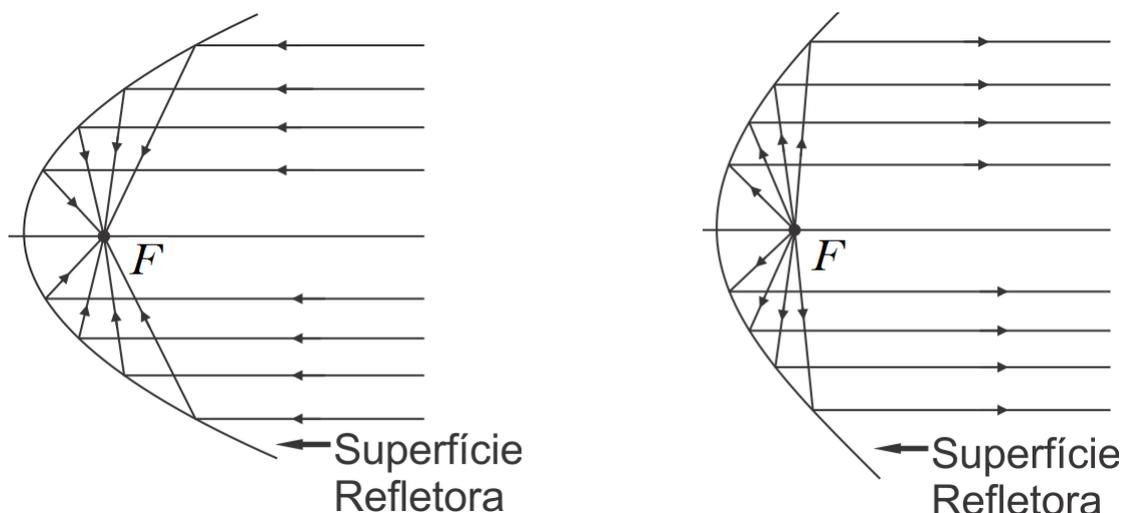


Figura 2.24: Representação de Espelho Parabólico.

Para uma escolha apropriada de eixos, tomando um sistema de coordenadas com origem no vértice da parábola e orientado positivamente no sentido de incidência da luz, a equação de uma parábola é do tipo $y = x^2/2p$, em que p é a distância do foco à diretriz, o foco fica então localizado no ponto $F(0, p/2)$, tendo assim um comprimento

focal (distância do foco ao vértice da superfície refletora) de

$$f = \frac{p}{2}.$$

No Ensino Médio, tanto o currículo quanto os professores dão mais ênfase à explicação dos espelhos esféricos (espelhos esféricos de Gauss) do que para os outros espelhos curvos. Para tanto, quando se utilizam as condições de nitidez de Gauss, aproximam-se as superfícies dos espelhos esféricos com as dos parabólicos.

2.3 Espelhos Esféricos, Representação Gráfica e Elementos Geométricos

Considerando-se uma superfície esférica seccionada por um plano (Figura 2.25) e tendo-se a superfície dividida em duas partes, cada uma denominada calota esférica, um espelho esférico é a calota esférica polida e refletora, interna ou externamente. Se a superfície refletora for a interna o espelho é chamado de *espelho côncavo* e se for a externa, de *espelho convexo* (Figura 2.26).

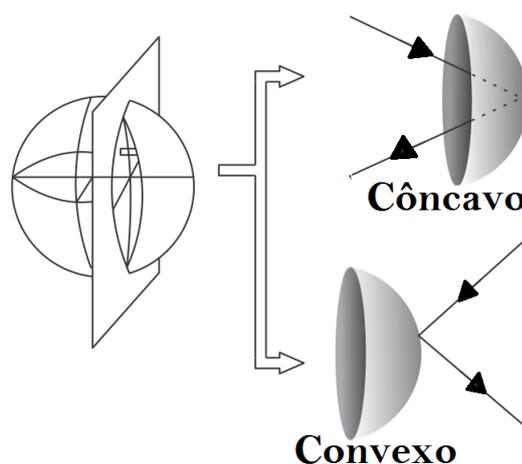


Figura 2.25: Representação dos Espelhos Esféricos.

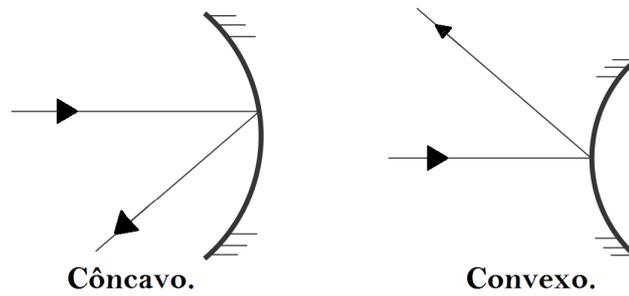


Figura 2.26: Representação Simplificada dos Espelhos Esféricos.

Para se estudar a formação de imagens pelos espelhos esféricos, é importante nomear alguns elementos geométricos que nos são úteis (Figura 2.27).

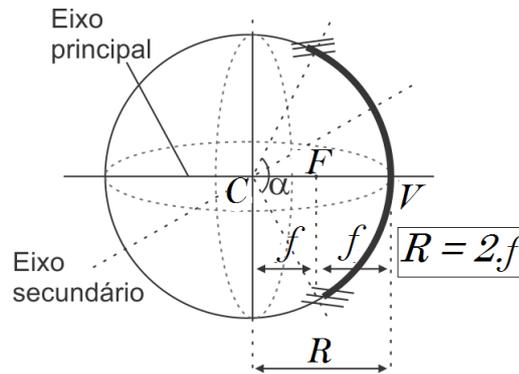


Figura 2.27: Elementos dos Espelhos Esféricos.

Todos os espelhos esféricos apresentam os elementos esquematizados na Figura 2.27, na qual C é o centro de curvatura do espelho, que é também o centro da esfera que contém o espelho; R é o raio de curvatura do espelho, sendo o raio da esfera que forma o espelho; V é o vértice do espelho ou polo da calota esférica e o ponto central da superfície refletora; F é o foco principal, sendo definido como o ponto médio entre o centro de curvatura e o vértice do espelho nas condições de nitidez de Gauss, as quais definimos na próxima seção; f é a distância focal, definida pela distância do foco ao vértice do espelho, ou seja, é a metade do raio da esfera; α é o ângulo de abertura, formado por segmentos de retas que passam por pontos diametralmente

opostos e extremos da calota e com o seu vértice no centro de curvatura do espelho; *Eixo* é qualquer reta que passa pelo centro de curvatura C , sendo classificado como eixo principal quando contém V ou eixo secundário quando não contém V .

Dos elementos tem-se que $\overline{CV} = R$, logo $R = 2f$, sendo que essa relação só é válida para os espelhos esféricos de Gauss.

2.3.1 Condições de Nitidez de Gauss

Como foi explicado anteriormente, os espelhos planos são os únicos sistemas ópticos perfeitamente estigmáticos, isto é, formam para cada ponto objeto um único ponto imagem correspondente. Todos os outros sistemas ópticos, incluindo os espelhos esféricos são, de forma geral, astigmáticos, ou seja, formam de um único ponto objeto diversos pontos imagens. Isso significa que, se o sistema é astigmático, as imagens por ele formadas não apresentam nitidez (aberrações). O matemático e óptico alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) observou que um espelho esférico forma uma imagem aproximadamente nítida, quando obedece às duas condições a seguir.

1. A abertura angular da superfície refletora deve ser pequena ($\leq 10^\circ$) (Figura 2.28).

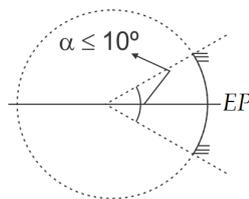


Figura 2.28: Ângulo de Abertura de um Espelho Esférico.

2. Os raios incidentes como 2ª condição que os raios sejam pouco inclinados em relação a $E.P.$ (Figura 2.29).

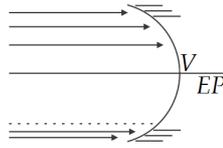


Figura 2.29: Representação de Raios Para-Axiais.

Na abordagem feita no Ensino Médio são levadas em consideração as duas condições de nitidez de Gauss, nos casos em que não são respeitadas, pelo menos uma, já se tem pequenas deformações das imagens formadas, que se agravam à medida que o ângulo de abertura aumenta. As aberrações esféricas ocorrem devido aos raios que incidem longe do eixo óptico, não são focalizados através do ponto focal do espelho esférico, levando-se, assim, a uma distorção da imagem. Dessa maneira, não se tem um ponto focal preciso para o espelho.

Quando raios de luz paralelos ao eixo principal incidem no espelho esférico são refletidos de forma a passar pelo eixo óptico. Caso os raios paralelos incidentes estejam longe do eixo, eles não são refletidos através do ponto focal. Assim, para uma análise do exposto, deve-se observar a construção da Figura 2.30, bem como o desenvolvimento matemático seguinte.

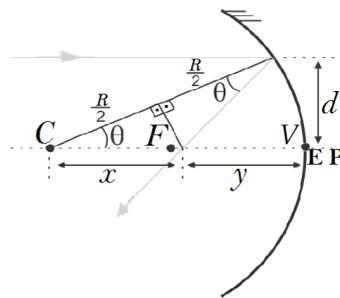


Figura 2.30: Aberração Esférica.

Considerando-se x a distância do centro de curvatura do espelho ao ponto em que o raio de luz refletido cruza-o com o eixo óptico, traçando-se uma linha perpendicular à

reta normal ao espelho no ponto de incidência formam-se dois triângulos retângulos e congruentes, com ângulos θ , lados adjacentes $R/2$ e hipotenusas x , isto quando o ponto em que o raio de luz cruza o eixo, tais que

$$\cos\theta = \frac{R/2}{x} \Rightarrow x = \frac{R}{2\cos\theta} = \frac{R}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}.$$

Assim, o valor de x expressa a distância do centro de curvatura ao ponto de interseção do raio de luz refletido com o eixo principal ($E.P.$), mostrando as possíveis posições sobre o $E.P.$ para diferentes valores do ângulo θ .

Para ângulos pequenos, $0^\circ \leq \theta \leq 5^\circ$, o valor de x se encontra em um intervalo dado por

$$\begin{aligned} \frac{R}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 0^\circ} \leq x \leq \frac{R}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 5^\circ} &\Rightarrow \frac{R}{2}\sqrt{1 + 0} \leq x \leq \frac{R}{2}\sqrt{1 + 0,00765} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{R}{2} \leq x \leq \frac{R}{2}(1,0038). \end{aligned}$$

Assim, para os raios de luz que satisfazem as condições de nitidez de Gauss tem-se

$$x \approx f \approx \frac{R}{2},$$

salientando que, quando o ângulo $\theta = 0$ o raio de luz incidente coincide com a reta normal ao espelho, voltando sobre si mesmo.

Pelo exposto, a distância x assume valores de $R/2$ a $1,0038(R/2)$, que fornece um desvio máximo de 0,38%, para a posição em que se define o foco, ponto médio entre o centro de curvatura e o vértice. Assim, por exemplo, um espelho esférico com raio de curvatura igual a 20 cm, que satisfaz as condições de nitidez de Gauss, teria um diâmetro da calota refletora de no máximo 3,50 cm (Figura 2.30), com um desvio máximo de 0,038 cm para a distância focal.

2.3.2 Raios Notáveis

Na análise dos espelhos esféricos deve-se observar os raios notáveis. Assim chamados os seguintes raios: os raios de luz que incidem paralelos ao eixo principal do espelho esférico, refletem-se numa direção que passa pelo foco (Figura 2.31); os raios que incidem passando pelo foco refletem-se paralelos ao eixo principal (Figura 2.32); os raios de luz que incidem pelo centro de curvatura refletem-se sobre si mesmos (Figura 2.33); e os raios de luz com incidência pelo vértice do espelho refletem-se simetricamente em relação ao eixo principal (Figura 2.34).

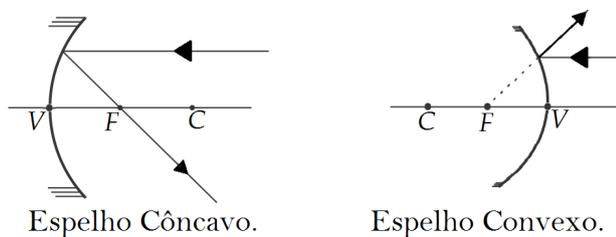


Figura 2.31: Raios Incidentes Paralelos ao Eixo Principal.

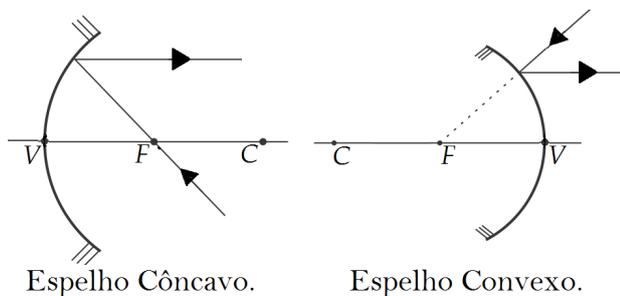


Figura 2.32: Raios Incidentes Pelo Foco do Eixo Principal.

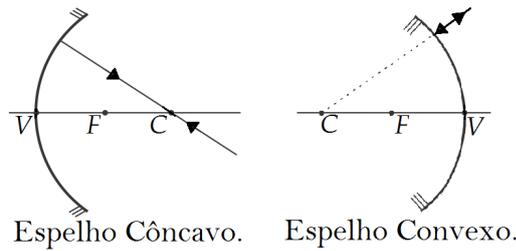


Figura 2.33: Raios Incidentes Pelo Centro de Curvatura.

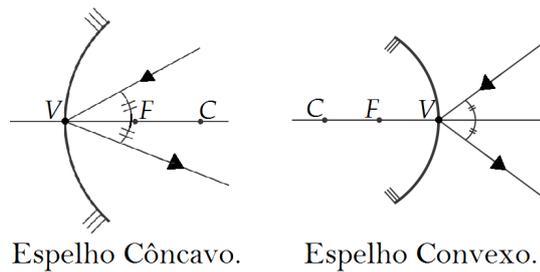


Figura 2.34: Raios Incidentes pelo Vértice.

2.3.3 Determinação Gráfica das Imagens Conjugadas Pelos Espelhos Esféricos

Utilizando-se dos raios notáveis para a determinação gráfica das imagens de um objeto, a fim de caracterizar a imagem formada pela reflexão no espelho, deve-se saber da imagem: sua natureza que pode ser real, virtual ou imprópria; sua posição que é o lugar em relação ao espelho no qual a imagem é formada; seu tamanho que é a relação entre o tamanho da imagem em comparação ao objeto, maior, menor ou igual; e por fim, a sua orientação que é a comparação entre a imagem e o objeto na situação de sofrer ou não uma inversão direita ou invertida.

Para se formar graficamente a imagem de um objeto, fornecida por um espelho esférico, inicialmente, deve-se fazer algumas simplificações. O objeto é representado por uma seta e colocado perpendicularmente sobre o eixo principal. Nessas condições, pode-se determinar a imagem do objeto, conjugada pelo espelho, traçando-se apenas

dois raios de luz que, partindo da extremidade do objeto, refletem-se e cruzam-se (ou seus prolongamentos) no ponto em que é formada a imagem dessa extremidade. O restante da imagem, representado por uma seta, é obtido ligando-se esse ponto imagem ao eixo principal perpendicularmente.

2.3.4 Imagens nos Espelhos Côncavos e Espelhos Convexos

Nos espelhos côncavos, as características das imagens formadas dependem da posição do objeto em relação ao espelho, dessa forma, abaixo seguem-se as situações de posição do objeto. O procedimento é o mesmo para todas as situações, ou seja, utilizando-se de dois raios notáveis para a formação da imagem e para a definição de suas características.

Com o objeto antes do centro de curvatura, a imagem é formada pelo cruzamento dos próprios raios refletidos (raios convergentes). Logo, a imagem é real, invertida, menor e formada entre o centro de curvatura e o foco (Figura 2.35).

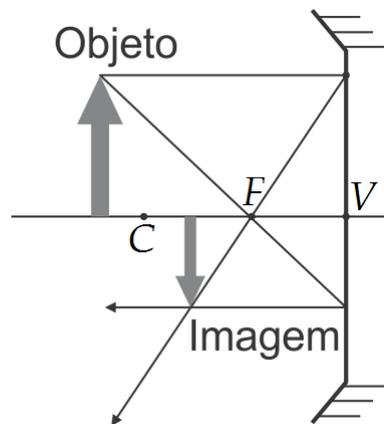


Figura 2.35: Formação de Imagem para um Objeto antes do Centro de Curvatura.

Agora com o objeto no centro de curvatura a imagem formada é constituída pelo cruzamento dos raios refletidos, sendo real, invertida, do mesmo tamanho que o objeto e formada no centro de curvatura (Figura 2.36).

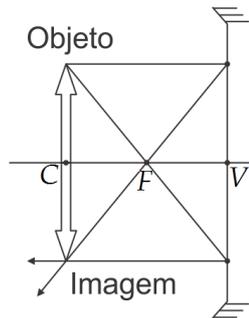


Figura 2.36: Formação de Imagem para um Objeto no Centro de Curvatura.

Já com o objeto entre o centro de curvatura e o foco a imagem é real, invertida, maior e formada antes do centro de curvatura (Figura 2.37).

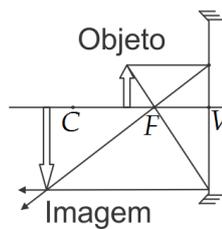


Figura 2.37: Formação de Imagem para um Objeto entre o Centro de Curvatura e o Foco.

Caso o objeto esteja sobre o foco, e como os raios refletidos são paralelos a imagem torna-se imprópria (Figura 2.38).

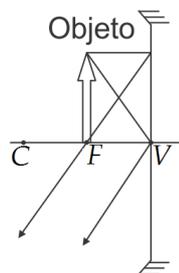


Figura 2.38: Formação de Imagem para um Objeto no Foco.

Por fim, com objeto entre o foco e o vértice a imagem é formada pelo prolongamento

dos raios refletidos (raios divergentes), assim, virtual, direita, maior e formada depois do vértice (Figura 2.39).

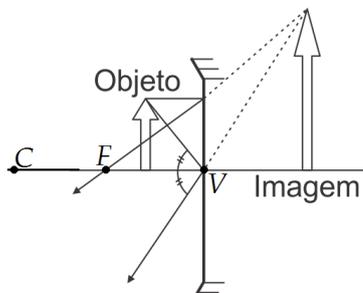


Figura 2.39: Formação de Imagem para um Objeto entre o Foco e o Vértice.

Nos espelhos convexos para qualquer posição de um objeto real, em frente a superfície refletora, o espelho fornece sempre uma imagem virtual, direita e menor do que o objeto, formada pelo prolongamento dos raios refletidos (Figura 2.40).

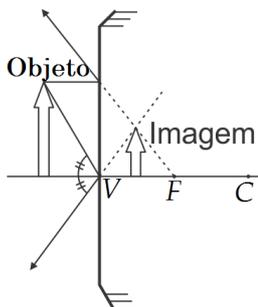


Figura 2.40: Formação de Imagem para um Objeto em Frente a um Espelho Convexo.

2.3.5 Estudo Analítico dos Espelhos Esféricos e Referencial de Gauss

Para se determinar a imagem de forma analítica, matemática, é necessário analisar os elementos dos espelhos esféricos e a equação dos pontos conjugados (equação de

Gauss), a qual é demonstrada na próxima seção. Assim, pode-se determinar todas as características das imagens conjugadas (Figura 2.41),

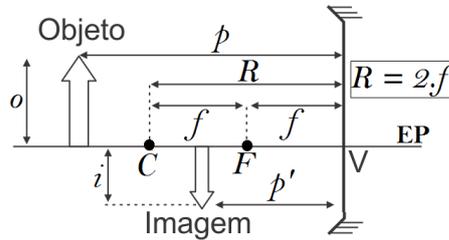


Figura 2.41: Elementos dos Espelhos Esféricos.

em que o é o tamanho (altura) do objeto; i é o tamanho (altura) da imagem; p é a distância do objeto ao espelho; p' é a distância da imagem ao espelho; f é a distância focal do espelho. Esses elementos podem assumir sinais positivos ou negativos de acordo com o Referencial de Gauss. Assim, para os sinais das ordenadas no sistema cartesiano (Figura 2.42), tem-se que é positivo para pontos acima do eixo principal (EP) e negativos para pontos abaixo do EP .

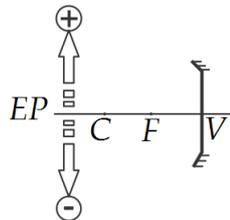


Figura 2.42: Análise dos Sinais das Ordenadas.

De maneira análoga, tem-se a convenção de sinais para as abscissas no sistema cartesiano (Figura 2.43), sendo positivo para o lado de incidência da luz. Assim, os espelhos côncavos têm foco e raio de curvatura positivos, enquanto os dos espelhos convexo são negativos.

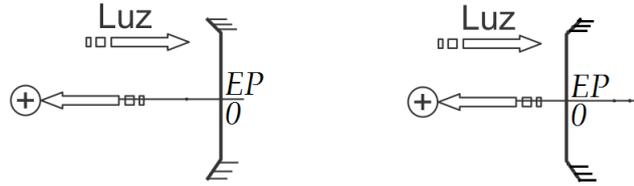


Figura 2.43: Análise dos Sinais das Abscissas.

2.3.6 Equação dos Pontos Conjugados (Equação de Gauss) e Aumento Linear Transversal

Dado um objeto AB diante de um espelho esférico e a respectiva imagem conjugada (Figura 2.44), a distância entre o objeto e o vértice do espelho é representada por p e a da imagem ao vértice por p' .

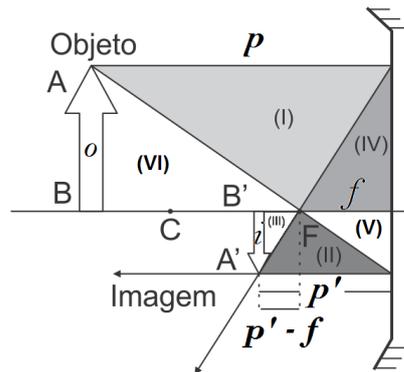


Figura 2.44: Representação Utilizada na Determinação da Equação de Gauss.

Assim, pela semelhança entre os triângulos (I) e (II), e entre os triângulos (III) e (IV), tem-se

$$\frac{o}{i} = \frac{p}{p'} = \frac{f}{p' - f} \Rightarrow pp' - pf = fp' \Rightarrow pp' = fp' + pf.$$

Dividindo todos os termos por fp' , obtemos

$$\frac{pp'}{fp'} = \frac{fp'}{fp'} + \frac{pf}{fp'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'},$$

que é a equação dos pontos conjugados por um espelho esférico (Equação de Gauss).

Além da posição relativa da imagem, faz-se necessária a análise do tamanho da imagem comparativamente ao objeto (Figura 2.44), para definir todas as características das imagens formadas. Sejam i e o as alturas da imagem e do objeto, respectivamente. Dessa forma, o aumento linear transversal é definido como a razão entre o tamanho da imagem fornecida pelo espelho e o tamanho do objeto correspondente, e, analogamente, pela semelhança dos triângulos (II) e (I), e nos triângulos (V) e (VI). Logo,

$$A = \frac{i}{o} = \frac{-p'}{p} = \frac{f}{f - p} .$$

Capítulo 3

Refração da Luz

3.1 Refração

Nesta parte do presente trabalho desenvolvemos um estudo da refração da luz, que é o fenômeno observado quando a luz passa de um material para outro com diferentes características. Por exemplo, quando a luz inicialmente se propaga no ar e atinge a superfície da água, passando a se propagar nesta, sofre refração.

3.1.1 Elementos da Refração

Conforme foi mencionado, a refração consiste na passagem da luz de um meio a outro. Sendo assim, os elementos que a constituem são: o raio de luz incidente na superfície de separação entre os meios, RI ; o raio de luz refratado que emerge no outro meio, RR ; a reta normal à superfície no ponto de incidência, N ; o ângulo de incidência, i , feito pelo raio incidente e a reta normal; e o ângulo de refração, r , formado pelo raio de luz refratado em relação à reta normal (Figura 3.1).

No estudo da refração, a propagação da luz em um meio é determinada pelo índice de refração absoluto, n , que é definido pelo quociente entre a velocidade da luz no

vácuo, c , e a velocidade da luz no material, v . Assim,

$$n = \frac{c}{v}.$$

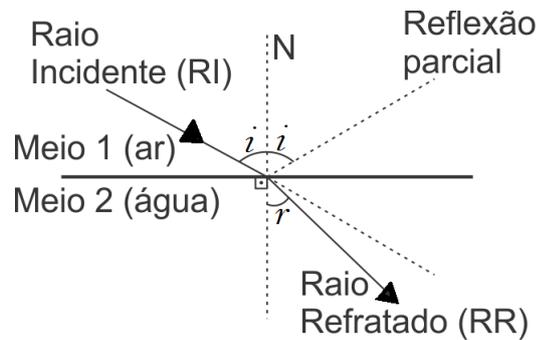


Figura 3.1: Representação dos Elementos da Refração.

3.1.2 Leis da Refração

O estudo da refração e suas aplicações sustenta-se nas duas leis da refração, a seguir.

1ª Lei da Refração: O raio de luz incidente à superfície de separação entre os meios, a reta normal e o raio de luz refratado são coplanares.

2ª Lei da Refração (Lei de Snell-Descartes): O produto do índice de refração absoluto do meio A , n_A , pelo seno do ângulo de incidência é igual ao produto do índice de refração absoluto do meio B , n_B , pelo seno do ângulo de refração

$$n_A \sen i = n_B \sen r.$$

A 2ª Lei da Refração pode ser demonstrada tanto pelo Princípio de Fermat quanto pelo Princípio de Huygens, dessa forma utilizamos o princípio de Huygens para a dedução da 2ª lei.

Huygens (Christian Huygens, físico e matemático holandês, 1629 - 1695), em 1678, para explicar a propagação da luz enunciou o seguinte princípio:

“Cada ponto de uma frente de onda comporta-se como fonte de “pequenas” ondas secundárias, que se propagam em todas as direções, com velocidade igual à da onda principal. Após um intervalo de tempo Δt , a nova posição da frente de onda é a envoltória das frentes das ondas secundárias.”[8]

Assim, a frente de onda é a fronteira de separação entre a região já atingida por um raio de luz e a região a ser atingida.

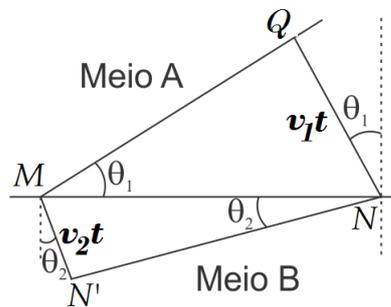


Figura 3.2: Frente de Onda.

Na figura 3.2, MQ representa uma frente de onda que vai de um meio A para um meio B , incidindo na interface de separação, sofrendo refração e se transformando na frente de onda representada pelo segmento NN' , com ângulo de refração θ_2 . Assim, pode-se observar os triângulos retângulos MQN e $NN'M$, tendo ambos o lado \overline{MN} como hipotenusa e com $\overline{QN} = v_1 t$ e $\overline{MN'} = v_2 t$, visto que $S = vt$.

Do triângulo MNQ , obtém-se

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{v_1 t}{\overline{MN}} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{v_1 t}{\text{sen } \theta_1} ,$$

e, de MNN' ,

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{v_2 t}{\overline{MN}} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{v_2 t}{\text{sen } \theta_2} .$$

Como a hipotenusa dos dois triângulos é a mesma, tem-se

$$\frac{v_1 t}{\text{sen } \theta_1} = \frac{v_2 t}{\text{sen } \theta_2} \Rightarrow v_2 \text{sen } \theta_1 = v_1 \text{sen } \theta_2 .$$

Utilizando a definição do índice de refração absoluto $n = c/v \Rightarrow v = c/n$,

$$v_2 \sin \theta_1 = v_1 \sin \theta_2 \Rightarrow \frac{c}{n_B} \sin \theta_1 = \frac{c}{n_A} \sin \theta_2 \Rightarrow n_A \sin \theta_1 = n_B \sin \theta_2,$$

conforme queríamos demonstrar.

3.1.3 O Desvio na Refração

Quando ocorre a refração, a luz pode sofrer desvio em sua trajetória, possibilitando a ocorrência de três casos. O primeiro, quando a luz monocromática passa de um meio menos refringente (menor índice de refração absoluto) para um mais refringente (Figura 3.3), com um ângulo de incidência diferente de zero.

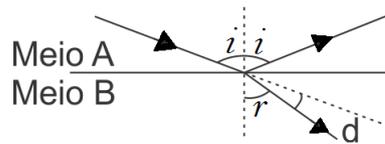


Figura 3.3: Refração da Luz indo de um Meio menos Refringente para um Meio mais Refringente.

O segundo, quando a luz vai do meio mais refringente para o menos refringente (Figura 3.4), com um ângulo de incidência diferente de zero.

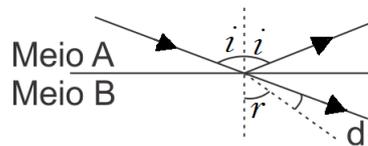


Figura 3.4: Refração da Luz indo de um Meio mais Refringente para um Meio menos Refringente.

E, por fim, o terceiro quando a luz incide perpendicularmente à superfície de separação (Figura 3.5), ângulo de incidência igual a zero.

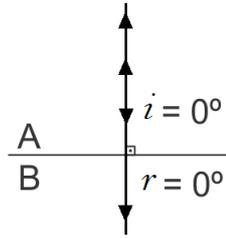


Figura 3.5: Refração da Luz com Incidência Normal à Superfície.

3.1.4 Ângulo Limite (L) e Reflexão Total

Como foi visto na Figura 3.4, quando a luz se propaga em um meio mais refringente e atinge a fronteira com um meio menos refringente, pode ocorrer refração e reflexão parcial, sendo que a refração ocorre com afastamento do raio de luz em relação à reta normal. À medida que aumenta o ângulo de incidência, o ângulo de refração também aumenta, satisfazendo a 2ª Lei da Refração, até um ângulo crítico (limite) L , a partir do qual a luz não sofre mais refração.

Assim, se o ângulo de incidência for menor ou igual ao ângulo limite ($i \leq L$), que é o maior ângulo que permite a luz passar de um meio mais refringente para um meio menos refringente, a luz sofre refração e reflexão parcial, como nos pontos A , B e C (Figura 3.6).

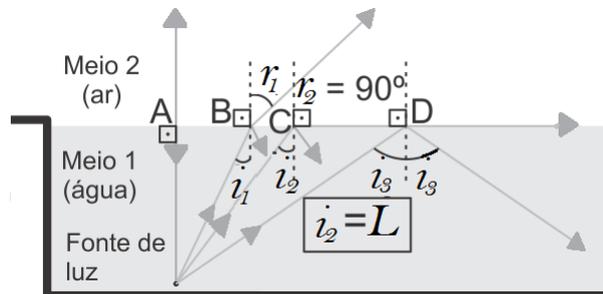


Figura 3.6: Representação da Refração, Reflexão Parcial e Total. Em A , B e C : Refração e Reflexão Parcial, em D : Reflexão Total.

Quando a incidência ocorre com um ângulo maior que o limite ($i > L$) tem-se o fenômeno da reflexão total, que consiste em toda luz voltar a se propagar no meio de origem. Como o ângulo limite ocorre quando a luz vai de um meio mais refringente para um menos refringente, logo, ela permanece no interior do material de maior índice de refração. E quando a luz se propaga no meio menos refringente e atinge a fronteira de separação com o meio de maior índice, sempre ocorre refração e reflexão parcial (Figura 3.3), para qualquer ângulo de incidência i .

O ângulo limite pode ser calculado pela Lei de Snell-Descartes no caso de refração limite, ou seja, quando a luz refratada emerge tangenciando a superfície de separação entre os meios (Figura 3.6). Logo,

$$n_1 \sen i = n_2 \sen r \Rightarrow n_1 \sen L = n_2 \sen 90^\circ \Rightarrow \sen L = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{\text{menor}}}{n_{\text{maior}}} .$$

3.2 Aplicações da Refração

Algumas aplicações das propriedades da refração estão no estudo de dióptros planos, nas lâminas de faces paralelas, nos prismas e nas lentes, as quais são analisadas a seguir.

3.2.1 Dióptro Plano

Um dióptro é um sistema formado por dois materiais opticamente diferentes, separados por uma superfície transparente. Dependendo da forma da superfície de separação, o dióptro é plano ou curvo. Assim, a análise dos dióptros é mostrada para ângulos pequenos de incidência e refração, nos seguintes casos: objeto real colocado no interior da água (mais refringente) para um observador no ar (menos refringente), e o de um objeto real colocado no ar para um observador na água (Figura 3.7).

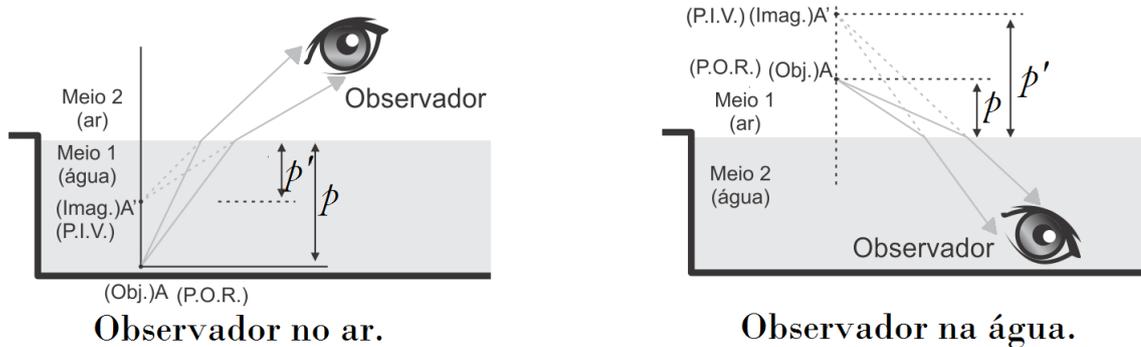


Figura 3.7: Representação de um Dioptro Plano.

Ao se observar um objeto pela interface de dois meios, ele é visto em uma posição aparente, determinada pela equação do dioptro plano. Neste caso, considere um objeto real colocado na água e um observador no ar, visualizando esse objeto, praticamente na vertical, através de um ângulo pequeno, menor que 10° , em relação à normal. Considerando a Figura 3.8, e aplicando a Lei de Snell-Descartes, tem-se

$$n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r .$$

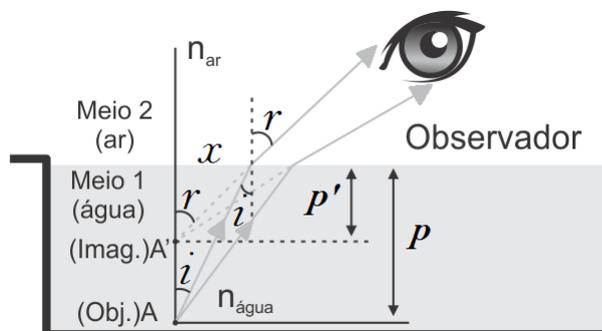


Figura 3.8: Demonstração da Equação de um Dioptro Plano.

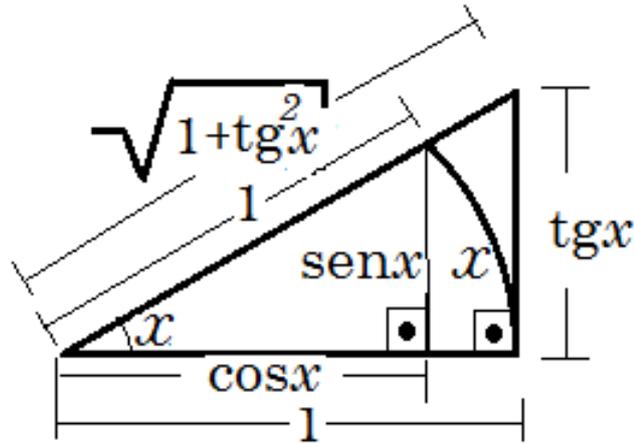


Figura 3.9: Aproximação do $\text{sen } x \approx \text{tg } x \approx x$.

Utilizando-se uma aproximação do $\text{sen } x$ pela $\text{tg } x$ como representado na Figura 3.9.

E considerando i e r pequenos,

$$n_1 \text{tg } i = n_2 \text{tg } r \Rightarrow n_1 \frac{x}{p} = n_2 \frac{x}{p'} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{n_2}{n_1},$$

em que p é a distância entre o objeto e a superfície do dioptro, p' é a distância entre a imagem e a superfície do dioptro, n_2 é o índice de refração do meio para o qual a luz vai, e n_1 é o índice de refração do meio de onde a luz vem.

3.2.2 Lâmina de Faces Paralelas

Uma lâmina de faces paralelas é um sistema óptico constituído por, pelo menos, dois materiais opticamente diferentes separados por duas superfícies planas e paralelas, com isso a luz ao passar pela lâmina tem duas refrações. Ao ocorrer as refrações a luz tem um deslocamento lateral d (Figura 3.10), que pode ser calculado por

$$d = \frac{e \text{sen}(i - r)}{\cos r},$$

caso se utilize dois meios materiais.

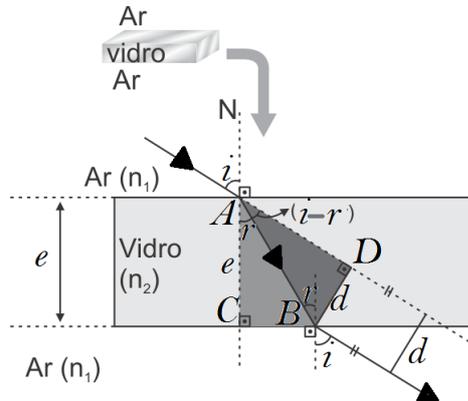


Figura 3.10: Representação do Deslocamento Lateral.

O deslocamento lateral d sofrido por um raio de luz ao atravessar uma lâmina de vidro de faces paralelas e espessura e , imersa no ar (Figura 3.10), é determinado pelas relações trigonométricas dos triângulos ABC e ABD . Assim, tem-se no ΔABC

$$\cos r = \frac{e}{AB} \Rightarrow AB = \frac{e}{\cos r}, \quad (3.1)$$

no ΔABD tem-se

$$\text{sen}(i - r) = \frac{d}{AB} \Rightarrow AB = \frac{d}{\text{sen}(i - r)}. \quad (3.2)$$

Igualando (3.1) com (3.2), tem-se

$$\frac{d}{\text{sen}(i - r)} = \frac{e}{\cos r} \Rightarrow d = \frac{e \text{sen}(i - r)}{\cos r},$$

em que i é o ângulo de incidência na primeira face e r é o ângulo de refração na primeira face.

Assim, pode-se perceber que o estudo das lâminas de faces paralelas é uma aplicação direta dos conceitos da Matemática e que os conteúdos da Física estão presentes nos processos de refração nas faces e na determinação dos ângulos de incidência i e de refração r . Caso se utilize três meios materiais os raios incidentes e emergentes não são paralelos.

3.2.3 Prismas Ópticos

Um outro caso de refração em lâminas ocorre quando a luz passa por duas faces planas não paralelas, o que é conhecido como prisma óptico. Nesta peça (Figura 3.11), os elementos são analisados na sua relação com o desvio da luz ao passar pelo meio. Os prismas ópticos têm várias aplicações, tais como, a dispersão da luz ao atravessá-los, o fenômeno de reflexão total, ou até mesmo para mudar a direção de propagação da luz.

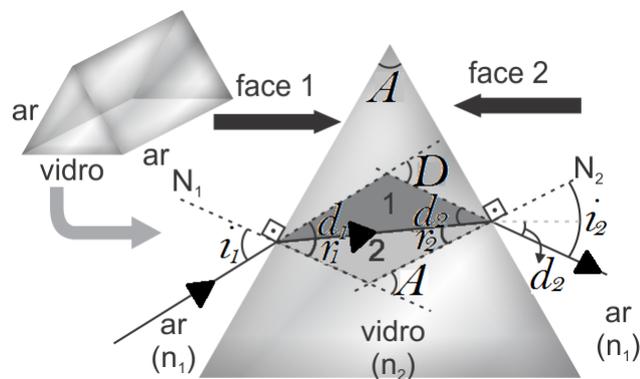


Figura 3.11: Representação e Elementos de um Prisma Óptico.

Na Figura 3.11, A é o ângulo de abertura, de formação ou de refringência; i_1 é o ângulo de incidência na primeira face; r_1 é o ângulo de refração na primeira face; d_1 é o ângulo de desvio na primeira face; r_2 é o ângulo de incidência na segunda face; i_2 é o ângulo de refração na segunda face ou ângulo de emergência na segunda face; d_2 é o ângulo de desvio na segunda face e D é o desvio total.

Assim, pode-se relacionar, na primeira face, que $i_1 = r_1 + d_1$ (opostos pelo vértice) e, na segunda face, que $i_2 = r_2 + d_2$ (opostos pelo vértice). No triângulo 1 tem-se $D = d_1 + d_2$ (teorema do ângulo externo) e no triângulo 2 tem-se $A = r_1 + r_2$ (teorema do ângulo externo). Somando as duas primeiras expressões e substituindo a terceira e quarta no resultado, tem-se

$$i_1 + i_2 = (r_1 + r_2) + (d_1 + d_2) \Rightarrow i_1 + i_2 = A + D \Rightarrow D = i_1 + i_2 - A.$$

O ângulo i_2 é determinado através da aplicação da lei de Snell-Descartes nas faces 1 e 2, e depende dos índices de refração dos meios, além do ângulo de incidência, i_1 e do ângulo de abertura do prisma, A . Dessa forma, na primeira face,

$$n_1 \operatorname{sen} i_1 = n_2 \operatorname{sen} r_1 \Rightarrow r_1 = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{n_1 \operatorname{sen} i_1}{n_2} \right), \quad (3.3)$$

$$A = r_1 + r_2 \Rightarrow r_2 = A - r_1. \quad (3.4)$$

Na segunda face, substituindo 3.3 em 3.4:

$$r_2 = A - \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{n_1 \operatorname{sen} i_1}{n_2} \right), \quad (3.5)$$

aplicando agora a lei de Snell-Descartes,

$$n_2 \operatorname{sen} r_2 = n_1 \operatorname{sen} i_2 \Rightarrow \operatorname{sen} i_2 = \frac{n_2 \operatorname{sen} r_2}{n_1}, \quad (3.6)$$

substituindo 3.5 em 3.6 tem-se:

$$\operatorname{sen} i_2 = \frac{n_2 \operatorname{sen} \left[A - \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{n_1 \operatorname{sen} i_1}{n_2} \right) \right]}{n_1}, \quad (3.7)$$

aplicando o seno da diferença em 3.7 e depois utilizando a relação trigonométrica fundamental tem-se a seguinte relação para $\operatorname{sen} i_2$:

$$\operatorname{sen} i_2 = \operatorname{sen} A \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \operatorname{sen}^2 i_1} - \operatorname{sen} i_1 \cos A.$$

3.2.4 Exemplos de Situações Envolvendo o Fenômeno da Reflexão Total

Miragens

O ar, como mau condutor de calor, frequentemente nas proximidades do solo tem temperaturas sensivelmente diferentes das temperaturas das camadas superiores. Dessa

forma, nas regiões de clima quente, as camadas de ar vizinhas ao solo apresentam-se quentes em relação às camadas mais altas. Como, para um mesmo material, o índice de refração e a densidade são proporcionais, a camada de ar próxima ao solo, sendo mais quente (menos densa) é menos refringente (menor índice de refração).

Assim, a luz, ao se propagar em direção a essas camadas, vai sofrendo desvios sucessivos até atingir o ângulo limite e, a partir daí, passa a sofrer reflexão total. A luz refletida que chega aos olhos do observador dá a sensação de uma imagem invertida, que é chamada de miragem. Este fenômeno pode ocorrer tanto em climas quentes quanto frios (Figura 3.12).

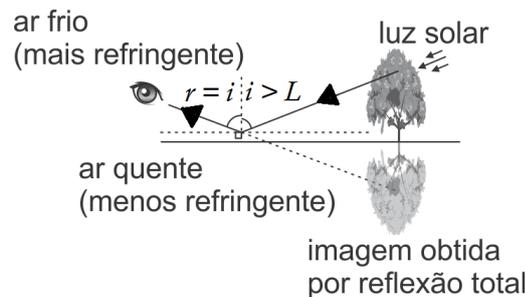


Figura 3.12: Representação da Reflexão Total da Luz.

Fibras Ópticas

Nas fibras ópticas, o fenômeno da reflexão total é utilizado para que a luz acompanhe finíssimas fibras de vidro que executam curvas. Essas fibras, reunidas em feixes de diâmetro apreciável, canalizam a luz por longas distâncias, mesmo quando o percurso é sinuoso. A canalização é conseguida por reflexão total do filete de luz que penetra na fibra, com inclinação pequena em relação ao eixo desta, e atinge as paredes que a separam do ar (meio menos refringente que o vidro) com ângulo de incidência superior ao ângulo limite (Figura 3.13).

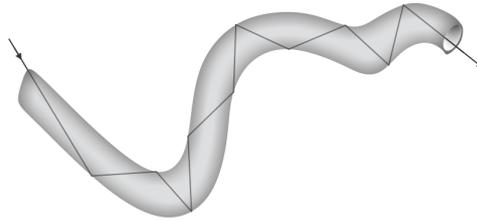


Figura 3.13: Representação da Fibra Óptica.

3.3 Lentes Esféricas

Lentes esféricas são sistemas ópticos nos quais predomina a refração. Elas contêm pelo menos um dioptra esférico e podem ser convergentes (positivas) ou divergentes (negativas), dependendo da relação entre o índice de refração da lente com o do meio e da geometria das lentes. Dessa forma, as imagens são construídas por refração da luz nas superfícies.

No estudo das lentes são consideradas as delgadas, em que a espessura é desprezível tanto comparada aos raios de curvatura das faces da lente quanto às distâncias relativas às bordas. Outro aspecto importante está relacionado com as lentes asféricas (não-esféricas), que também podem ser chamadas de asféricas e que conseguem eliminar as aberrações e produzir imagens com uma maior qualidade.

Nessa parte do estudo discorreremos inicialmente sobre as lentes delgadas, elementos formadores, comportamento óptico, representações e aplicações e, posteriormente, a respeito das aberrações esféricas e acerca das lentes asféricas.

3.3.1 Tipos de Lentes

As lentes podem ser de bordas finas ou grossas. As finas são aquelas cujas extremidades são mais finas que o meio, podendo ser *biconvexas*, *plano-convexas* ou *côncavo-convexas* (Figura 3.14).

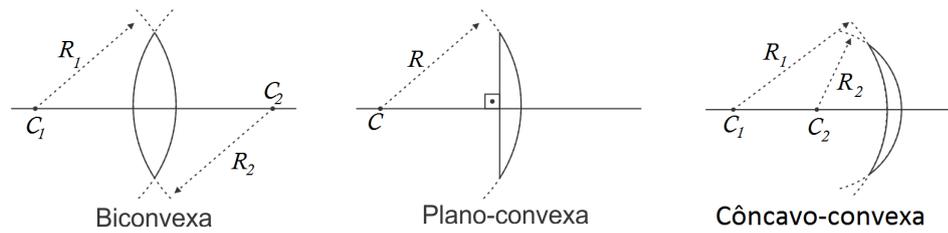


Figura 3.14: Lentes de Bordas Finas.

As lentes de bordas grossas são aquelas em que as extremidades são mais espessas que o meio, podendo ser *bicôncavas*, *plano-côncavas* ou *convexo-côncavas* (Figura 3.15).

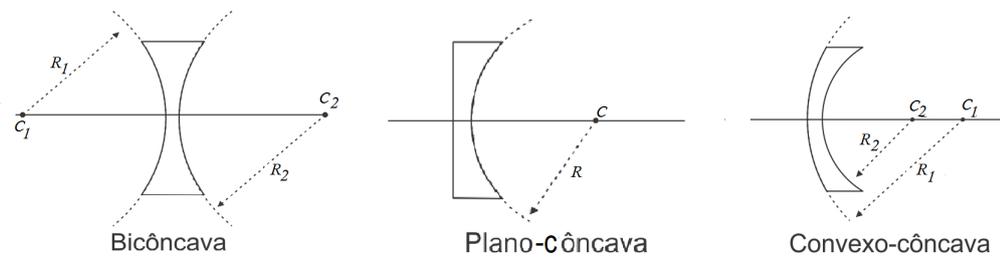


Figura 3.15: Lentes de Bordas Grossas.

Os raios das esferas que contém as faces das lentes são chamados *raios de curvatura* e a reta que contém os centros de curvatura C é denominada *eixo principal* da lente. O nome da lente é definido pela curvatura das faces, sendo o primeiro nome da face de maior raio e o segundo da face de menor raio.

3.3.2 Comportamento Óptico das Lentes

O comportamento óptico de uma lente depende de sua geometria (bordas finas ou grossas) e do material de que é feita a lente com relação ao meio. Assim, quando as lentes são feitas de material com índice de refração maior, *mais refringente*, que o meio (lentes feitas de vidro imersas no ar), tem-se que as de bordas finas são convergentes e as de bordas grossas são divergentes (Figura 3.16).

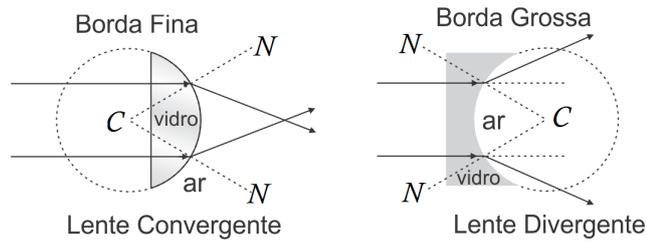


Figura 3.16: Índice da Lente Maior que o do Meio.

No caso das lentes de material menos refringente que o meio, (lentes feitas de ar imersas no vidro), tem-se que as de bordas finas são divergentes e as de bordas grossas são convergentes (Figura 3.17).

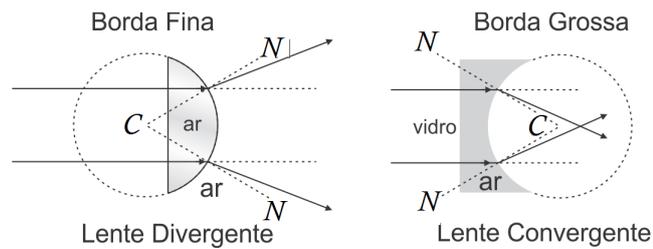


Figura 3.17: Índice da Lente Menor que o do Meio.

3.3.3 Representação Esquemática de Lentes e Raios Notáveis

As lentes são representadas esquematicamente em termos da sua vergência (convergentes ou divergentes) (Figura 3.18).

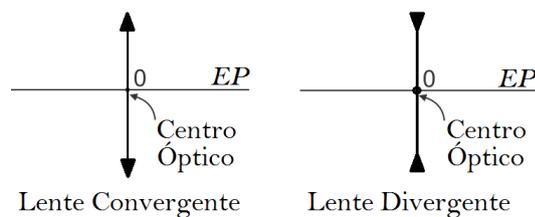


Figura 3.18: Representação das Lentes.

Assim, como nos espelhos esféricos, devem-se entender alguns elementos importantes para o estudo analítico e gráfico das lentes.

Tanto para as lentes convergentes como para as divergentes, os objetos de estudo são os mesmos, mudando apenas a orientação do referencial, sendo O o centro óptico, que é o centro da lente, ou seja, o ponto médio dos vértices das faces da lente; F_i o foco principal imagem, que é definido pelos raios de luz incidentes e paralelos ao $E.P.$ e ao serem refratados saem por um único ponto, F_i , (propriedade das retas tangentes); F_o o foco principal objeto, que é definido pela propriedade da reversibilidade, ou seja, os raios que incidem por um ponto, F_o , saem paralelos ao $E.P.$; f as distâncias dos focos ao centro óptico (distância focal) são calculadas pela equação dos fabricantes de lentes (equação de Halley).

Sendo ainda considerados os pontos antiprincipal objeto A_o e antiprincipal imagem A_i , definidos pelos raios de luz incidentes na lente que ao passar por um determinado ponto do $E.P.$, A_o , serão refratados para um ponto, A_i , também do $E.P.$, e equidistantes do centro óptico. Suas posições em relação ao centro óptico podem ser calculadas como o dobro da posição F_o e F_i (definidos logo adiante, subitem 3.3.7 Equação dos Fabricantes de Lentes), respectivamente, e também pode se fazer uma analogia ao centro de curvatura dos espelhos esféricos (Figura 3.19).

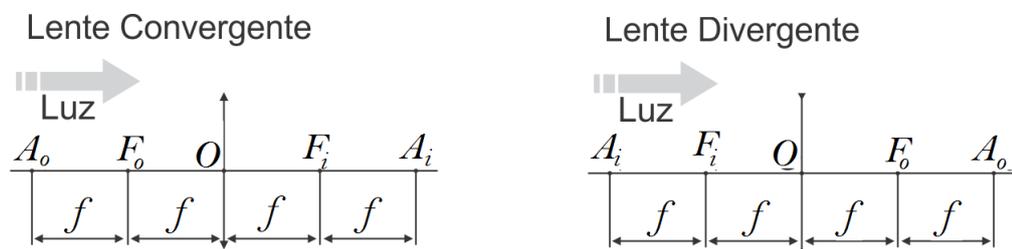


Figura 3.19: Representação dos Elementos das Lentes.

Para se construir as imagens na representação das lentes, devem-se utilizar, assim

como nos espelhos esféricos, os raios notáveis. Dentre eles, para as lentes convergentes, tem-se os raios de luz que entram paralelos ao eixo principal e saem passando pelo foco imagem; raios de luz que entram pelo foco objeto e saem paralelos ao eixo principal; raios de luz que entram pelo centro óptico e atravessam sem sofrer desvio; e os raios de luz que entram pelo ponto antiprincipal objeto saem passando pelo ponto antiprincipal imagem (Figura 3.20).

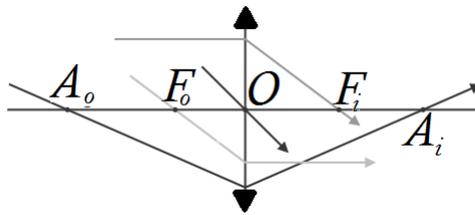


Figura 3.20: Representação dos Raios Notáveis em Lentes Convergentes.

Nas lentes divergentes, os raios de luz que entram paralelamente ao eixo principal saem com os seus prolongamentos passando pelo foco imagem; os raios de luz em que os prolongamentos entram pelo foco objeto saem paralelamente ao eixo principal; os raios de luz que entram pelo centro óptico atravessam sem sofrer desvio; os feixes de luz em que os prolongamentos entram pelo ponto antiprincipal objeto saem com os seus prolongamentos passando pelo ponto antiprincipal imagem (Figura 3.21).

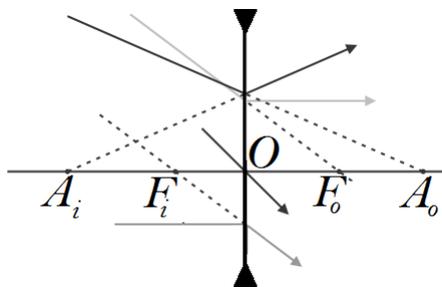


Figura 3.21: Representação dos Raios Notáveis em Lentes Divergentes.

3.3.4 Construção Gráfica de Imagens

Utilizando os raios notáveis e os elementos das lentes podem-se construir graficamente as imagens tanto nas lentes convergentes, como nas divergentes. Tem-se cinco casos de formação de imagem para as lentes convergentes e um único caso para lentes divergentes.

Quando um objeto é colocado antes do ponto antiprincipal objeto, aplicando-se os raios notáveis tem-se que a imagem formada é real (*PIR*), invertida, menor e formada entre o foco imagem e o ponto antiprincipal imagem (Figura 3.22). Exemplos de situações em que isso ocorre são a lente objetiva de uma câmera fotográfica e o olho humano.

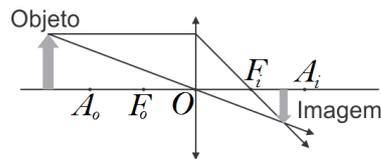


Figura 3.22: Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto antes de A_o .

Mas se um objeto é colocado no ponto antiprincipal objeto, aplicando-se os raios notáveis tem-se que a imagem formada é real (*PIR*), invertida, de igual tamanho e formada no ponto antiprincipal imagem (Figura 3.23). Um exemplo disso ocorre em algumas fotocopiadoras.

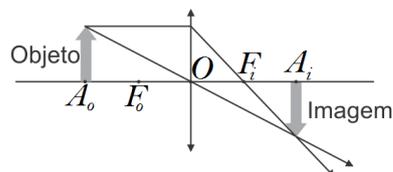


Figura 3.23: Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto em A_o .

E no caso do objeto ser colocado entre o ponto antiprincipal objeto e o foco objeto, aplicando-se os raios notáveis temos uma imagem formada que é real (*PIR*), invertida, maior e formada depois do ponto antiprincipal imagem (Figura 3.24). Alguns exemplos são os projetores de slides ou de filmes.

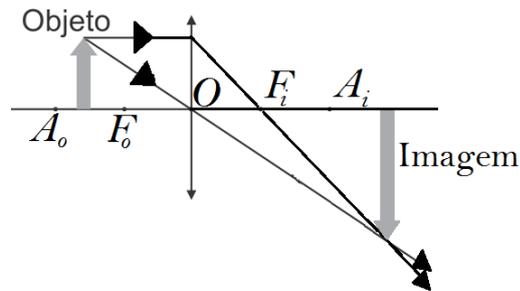


Figura 3.24: Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto entre A_o e F_o .

E quando o objeto é colocado no foco objeto, aplicando-se os raios notáveis tem-se que a imagem formada é imprópria (*PII*) (Figura 3.25). Um exemplo são os holofotes.

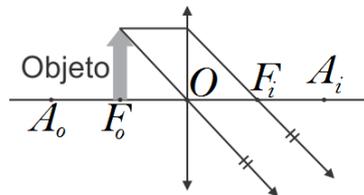


Figura 3.25: Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto no F_o .

Contudo se o objeto for colocado entre o foco objeto e o centro óptico, aplicando-se os raios notáveis ter-se-á que a imagem formada é virtual (*PIV*), direita, maior e formada antes do objeto (Figura 3.26). Um exemplo desse tipo de imagem são as lentes corretivas da hipermetropia.

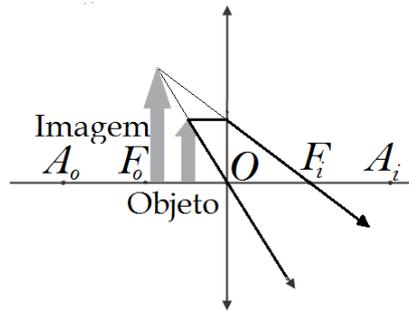


Figura 3.26: Imagem Formada por uma Lente Convergente para um Objeto entre F_o e O .

Nas lentes divergentes, para qualquer posição em que o objeto real for colocado, a imagem é sempre virtual (*PIV*), direita, menor e formada entre o foco imagem e o centro óptico (Figura 3.27). Um exemplo são as lentes para correção da miopia.

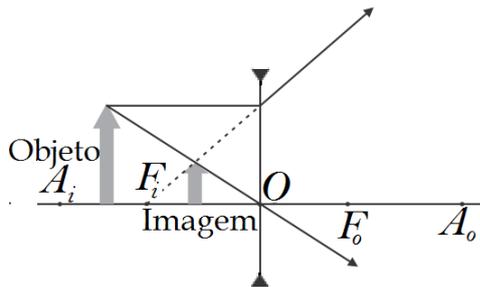


Figura 3.27: Imagem Formada por uma Lente Divergente para um Objeto Real.

Para objetos virtuais valem as mesmas considerações, sendo que as imagens que eram virtuais passam a ser reais e vice-versa.

3.3.5 Estudo Analítico das Lentes Esféricas Delgadas

O estudo analítico das lentes delgadas é semelhante ao dos espelhos esféricos, sendo que se deve lembrar que as lentes têm dois focos, um objeto e o outro imagem. O referencial das abscissas é positivo para os objetos do lado de incidência da luz e para

as imagens é positivo para o lado da luz emergente. Os elementos de estudo são o o tamanho do objeto, i o tamanho da imagem, p a distância do objeto à lente, p' a distância da imagem à lente e f a distância focal da lente (Figura 3.28).

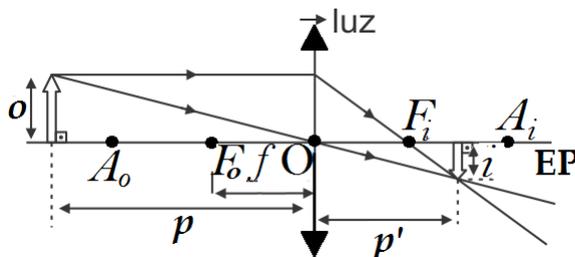


Figura 3.28: Representação dos Objetos de Estudo das Lentes.

Os elementos são classificados de acordo com o Referencial de Gauss (Figura 3.29), que tem origem no centro óptico da lente, com $o > 0$ e $i > 0$ acima do eixo principal (EP), $o < 0$ e $i < 0$ abaixo do EP ; $f > 0$ para lentes convergentes e $f < 0$ para as divergentes. Para objetos e imagens na região de incidência da luz $p > 0$ e $p' < 0$, respectivamente, enquanto que, para objetos e imagens na região da luz emergente $p < 0$ e $p' > 0$, respectivamente.

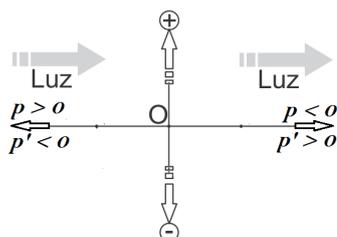


Figura 3.29: Referencial de Gauss para as Lentes.

Para as lentes, assim como nos espelhos esféricos, tem-se a equação dos pontos conjugados (Equação de Gauss) e a equação do aumento linear transversal (A), mudando apenas o referencial. Logo, são omitidas nesta parte do estudo as suas demonstrações. Portanto, se f é a distância focal da lente, p é a distância do objeto à lente, e p' é a

distância da imagem à lente, tem-se

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

e o aumento linear transversal é dado por

$$A = \frac{i}{o} = \frac{-p'}{p} = \frac{f}{f-p},$$

em que i é o tamanho da imagem formada pela lente, o é o tamanho do objeto.

Do estudo analítico tem-se que, quando $A > 0$, a imagem é direita ($o > 0$ e $i > 0$ ou $o < 0$ e $i < 0$), quando $A < 0$ a imagem é invertida ($o > 0$ e $i < 0$ ou $o < 0$ e $i > 0$), quando $|A| > 1$ a imagem é maior que objeto, quando $|A| < 1$ a imagem é menor que objeto; quando $|A| = 1$ a imagem tem o mesmo tamanho do objeto.

3.3.6 Vergência ou Convergência de uma Lente

A vergência de uma lente é uma grandeza física definida como o inverso da distância focal dessa lente, ou seja,

$$V = \frac{1}{f}.$$

Levando-se em consideração a convenção de sinais adotada para as lentes esféricas delgadas, para as lentes convergentes é válida a relação $f > 0$ e $V > 0$, e para as lentes divergentes $f < 0$ e $V < 0$.

A distância focal f de uma lente, que é definida pela Equação de Halley (próxima seção), é expressa em unidades de comprimento, logo a sua vergência é medida com o inverso do metro, ou m^{-1} , unidade que recebe o nome de dioptria (em símbolo di). A unidade dioptria é conhecida popularmente como grau da lente, ou seja, $1 di = 1 m^{-1} = 1$ grau.

3.3.7 Equação dos Fabricantes de Lentes (Equação de Halley)

No estudo das lentes um dos pontos importantes é a determinação dos focos da lente e, para isso, utiliza-se da equação dos fabricantes de lentes (Equação de Halley), que deduzimos a seguir. Um dioptro é constituído pelos meios transparentes 1 e 2, de índices absolutos de refração n_1 e n_2 , respectivamente, separados pela superfície esférica Σ com centro de curvatura C e raio R . Para um objeto pontual P situado a uma distância p do ponto V , o dioptro conjuga uma imagem, também pontual, P' , situada a uma distância p' de V (Figura 3.30).

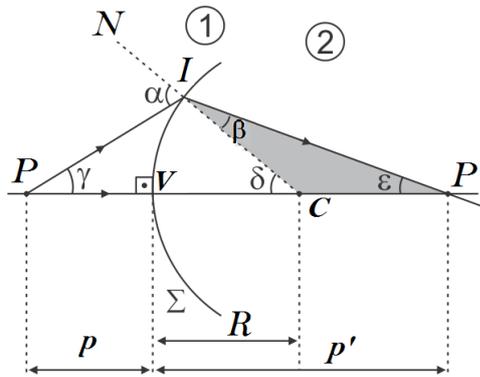


Figura 3.30: Dioptro Esférico.

Estabelecendo uma relação entre n_1 , n_2 , p , p' e R , aplicando-se a Lei de Snell-Descartes à refração do raio luminoso incidente no ponto I , tem-se

$$n_1 \operatorname{sen} \alpha = n_2 \operatorname{sen} \beta.$$

Admitindo-se que os raios de luz incidente e emergente sejam pouco inclinados em relação à reta determinada por P e P' , de forma que os ângulos α e β sejam pequenos, menores que 5° e expressando os ângulos em radianos, podem-se utilizar as aproximações

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \beta,$$

conforme a Figura 3.9, em que x é próximo de zero e em radianos. Com isso, a lei de Snell-Descartes pode ser aproximada para

$$n_1 \alpha = n_2 \beta. \quad (3.8)$$

No triângulo PCI , α é ângulo externo, de forma que

$$\alpha = \gamma + \delta. \quad (3.9)$$

No triângulo CIP' , δ é o ângulo externo, o que leva a

$$\delta = \beta + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \beta = \delta - \varepsilon. \quad (3.10)$$

Substituindo-se (3.9) e (3.10) em (3.8), obtém-se

$$n_1 (\gamma + \delta) = n_2 (\delta - \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad n_1 \gamma + n_1 \delta = n_2 \delta - n_2 \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n_1 \gamma + n_2 \varepsilon = (n_2 - n_1) \delta. \quad (3.11)$$

Para ângulos pequenos valem também as aproximações (Figura 3.9),

$$\gamma \approx \text{tg } \gamma = \frac{\overline{IV}}{p}, \quad \varepsilon \approx \text{tg } \varepsilon = \frac{\overline{IV}}{p'} \quad \text{e} \quad \delta \approx \text{tg } \delta = \frac{\overline{IV}}{R}. \quad (3.12)$$

Substituindo-se os valores de (3.12) na equação (3.11), obtém-se a equação do dióptro esférico, em que

$$n_1 \frac{\overline{IV}}{p} + n_2 \frac{\overline{IV}}{p'} = (n_2 - n_1) \frac{\overline{IV}}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (3.13)$$

Agora, para a situação de uma lente biconvexa de faces esféricas \sum_1 e \sum_2 com raios de curvatura, respectivamente, iguais a R_1 e R_2 (Figura 3.31), fabricada com um material de índice de refração absoluto n_L e imersa em um meio de índice de refração absoluto n_m , que usaremos para determinar a Equação dos Fabricantes de Lente. O índice de refração da lente em relação ao meio externo será igual a $n_{L,m}$, definido como

$$n_{L,m} = \frac{n_L}{n_m}.$$

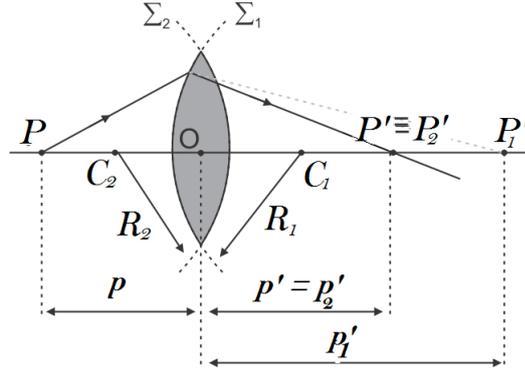


Figura 3.31: Representação para a Equação de Halley.

Para um objeto pontual P , colocado a uma distância p do centro óptico O da lente, forma-se uma imagem final P' situada a uma distância p' de O . Sendo ainda P_1' PIR da primeira face, P_2' PIR da segunda face e R_1 e R_2 os raios de curvatura das duas faces, primeira e segunda, respectivamente.

Aplicando-se a equação do dioptra esférico (3.13) à face Σ_1 , tem-se

$$\frac{n_m}{p} + \frac{n_L}{p'_1} = \frac{n_L - n_m}{R_1}. \quad (3.14)$$

A imagem real gerada pela face Σ_1 comporta-se como objeto virtual em relação à face Σ_2 . Aplicando-se a essa face, também, a equação (3.13), tem-se

$$-\frac{n_L}{p'_1} + \frac{n_m}{p'_2} = \frac{n_L - n_m}{R_2}. \quad (3.15)$$

Somando-se (3.14) com (3.15) e observando-se que $p'_2 = p'$, obtém-se

$$\frac{n_m}{p} + \frac{n_m}{p'} = (n_L - n_m) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.16)$$

Dividindo-se todos os termos da equação (3.15) por n_m , decorre que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \left(\frac{n_L}{n_m} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.17)$$

E, pela Equação de Gauss, o lado esquerdo pode ser substituído por $1/f$, obtendo-se, finalmente, a *Equação dos Fabricantes de Lentes (Equação de Halley)*

$$V = \frac{1}{f} = (n_{L,m} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.18)$$

Na expressão (3.18), utiliza-se a seguinte convenção de sinais associados ao Referencial de Gauss. Quando a face é convexa, associa-se um sinal positivo ao raio de curvatura, e quando a face é côncava associa-se um sinal negativo ao raio de curvatura, já a superfície plana pode ser considerada de raio de curvatura tendendo ao infinito, e neste caso adota-se $1/R = 0$ (Figura 3.32). Essa convenção de sinais juntamente com os índices de refração da lente e meio é que determinam se a lente é convergente ou divergente.

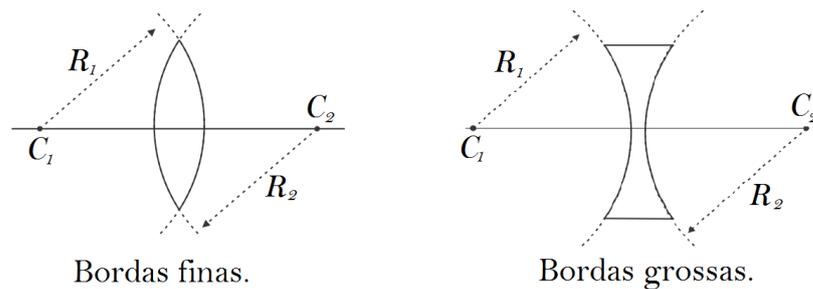


Figura 3.32: Representação das Curvaturas das Lentes.

A equação (3.18) foi desenvolvida considerando a espessura da lente pequena comparada com as dimensões envolvidas na situação problema, como os raios de curvatura e as distâncias do objeto e da imagem à lente, evitando, dessa forma, as aberrações monocromáticas.

3.4 Lentes Asféricas

Em toda lente existem aberrações, desvios indesejados dos raios de luz, percebidos principalmente nas deformações das imagens. Agora, considere um usuário de óculos

com lentes corretivas, essas aberrações são mais sensíveis quando se olha pela proximidade da borda da lente, e para raios de luz com incidência maior que 5° em relação ao eixo principal.

Outra situação ocorre quando, ao tentar visualizar um objeto que se encontra fora de seu campo de visão, o usuário se vê obrigado a virar a cabeça para obter nitidez, enquanto muitas vezes bastaria uma simples movimentação dos olhos. É o que ocorre, por exemplo, quando se baixam os olhos para visualizar algo que está no chão, sem que seja necessário baixar a cabeça.

O objetivo das lentes asféricas é justamente reduzir ou eliminar estas aberrações. Ao ampliar o campo de visão, permite-se um maior conforto. O desenvolvimento das lentes asféricas é feito para cada situação problema (Figura 3.33).

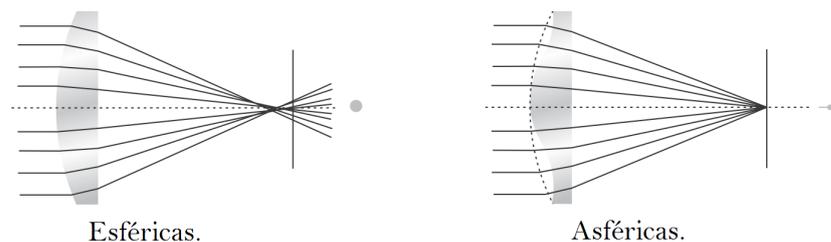


Figura 3.33: Representação das Curvaturas das Lentes Esféricas e Asféricas.

Considerações Finais

Neste trabalho foi mostrado a importância de se ter uma interdisciplinariedade entre as disciplinas de Física e Matemática, para isso foi escolhido e utilizado como exemplo o conteúdo da Óptica Geométrica. Dessa maneira foi observado que a Óptica Geométrica tem seu alicerce na geometria, que é uma peça fundamental para o desenvolvimento dos fenômenos ópticos, ou seja, o ensino dessa parte da Física deve andar lado a lado com a Matemática, havendo assim, uma maior compreensão e aprendizagem dos conceitos

físicos.

No decorrer do estudo quando se tratou da propagação retilínea da luz utilizando-se da geometria, houve uma verificação dos fenômenos físicos. E através dos Princípios de Fermat e de Huygens, nas demonstrações das propriedades da reflexão e refração, foi possível analisar a formação de imagens em espelhos, por reflexão e em dióptros, por refração.

Na Introdução do trabalho foi apresentada uma proposta de intervenção e atualização nos ensinamentos de Matemática e Física, abordando o conteúdo da Óptica Geométrica. E com o intuito de exemplificar essa nova proposta foi aplicado o conteúdo dos capítulos e tópicos desenvolvidos ao longo desse trabalho, durante o ano, nas turmas de segunda série do Ensino Médio.

Como resultado dessa aplicação, notou-se, ao término da explanação, um rendimento maior, tanto em termos de nota quanto de absorção de conhecimento, criando um maior envolvimento e interação entre as áreas do conhecimento dos estudantes, visto que, com essa abordagem, as fundamentações e especificidades foram contempladas por meio do conteúdo da Óptica Geométrica. Dessa maneira, podem ser comprovadas a importância e a necessidade de se inovar as maneiras de se aprender e ensinar.

Referências Bibliográficas

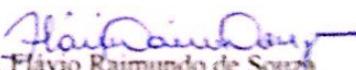
- [1] TEIXEIRA, MARIANE MENDES., *Lentes, Brasil Escola*, Disponível em <http://www.brasilecola.com/fisica/lentes-1.htm>>. Acesso em 11 de janeiro de 2015.
- [2] BARTHEM, RICARDO, *Temas Atuais de Física: A Luz.*, Editora Livraria da Física Sociedade Brasileira de Física, 1 ed. São Paulo / 2005, pp. 114.
- [3] IEZZI, GELSON, *Geometria Analítica*, Atual, Fundamentos da Matemática Elementar, volume 7/ 2005, pp. 168-197.
- [4] HALLIDAY, DAVID , ET., *Fundamentos de Física*, LTC, volume 4 / Sexta Edição, pp. 29-50.
- [5] RAMALHO JUNIOR, FRANCISCO, *Os Fundamento da física*, Moderna, 9 ed. rev. e ampl./ 2007 , pp. 217-374.
- [6] VILLAS BÔAS, NEWTON, *Tópicos de Física, 2 : termologia, ondulatória e óptica*, Saraiva, 18. ed. reform. e ampl., 2007, pp. 277-430.
- [7] ANDRADE, ROBERTO., *Revista Brasileira de Física*, vol. 35 no. 1. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172013000100028script=sci-arttext>>. Acesso em 12 de janeiro de 2015.

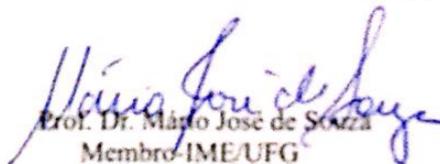
- [8] CALÇADA, CAIO SÉRGIO., *Física Clássica, 3: óptica ondas* Atual, 2. 4 reimpressão, 2001, pp. 59.
- [9] CARLOS, JAIRO GONÇALVES., *Interdisciplinaridade no Ensino Médio: desafios e potencialidades* Programas de Pós-graduação da CAPES. 2006.
- [10] WINTERLE, PAULO, *Vetores e Geometria Analítica* Pearson Education do Brasil, 2000, pp. 177-211.



Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Manoel Nunes do Couto Guimarães Netto - Aos vinte e sete dias do mês de novembro do ano de dois mil e quinze (27/11/2015), às 16:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves - Orientador, Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza e Prof. Dr. Mário José de Souza, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na sala B-15 do IESA, procederem a avaliação da defesa intitulada: "**Óptica Geométrica em uma Perspectiva Matemática**", em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Manoel Nunes do Couto Guimarães Netto discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:30 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.


Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves
Presidente-IME/UFG


Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro - IFG- GOIÂNIA


Prof. Dr. Mário José de Souza
Membro-IME/UFG