



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA**  
**E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

**DOUGLAS DANIEL**

**MODELAGEM POR POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO**

**CAMPINAS**  
**2016**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

**DOUGLAS DANIEL**

## **MODELAGEM POR POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

**Orientadora: Sueli Irene Rodrigues Costa**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DOUGLAS DANIEL, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. SUELI IRENE RODRIGUES COSTA.

**CAMPINAS  
2016**

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

D222m Daniel, Douglas, 1991-  
Modelagem por polinômios no ensino médio / Douglas Daniel. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Sueli Irene Rodrigues Costa.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Polinômios. 2. Modelagem matemática. 3. GeoGebra (Programa de computador). 4. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues, 1949-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Polynomial modeling in high school

**Palavras-chave em inglês:**

Polynomials

Mathematical modeling

GeoGebra (Computer program)

Mathematics (High school) - Study and teaching

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestre

**Banca examinadora:**

Sueli Irene Rodrigues Costa [Orientador]

Claudina Izepe Rodrigues

Rogério Monteiro Siqueira

**Data de defesa:** 31-08-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 31 de agosto de 2016  
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA**

**Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES**

**Prof(a). Dr(a). ROGERIO MONTEIRO DE SIQUEIRA**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros  
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

# Dedicatória

*Dedico este trabalho à minha mãe, Inês Afonso Daniel (in memoriam), que tinha o sonho de um melhor futuro para mim.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha irmã Valéria Daniel Cordeiro, e ao meu cunhado Júlio César F. Cordeiro, que me apoiaram no momento em que mais precisei.

À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Sueli I. R. Costa, pela orientação no sentido amplo e pelas sugestões e correções que enriqueceram este trabalho.

Aos professores que compuseram a banca examinadora deste mestrado, Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Claudina Izepe Rodrigues e Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira, pela grande ajuda com suas ótimas observações e correções.

À comissão de pós-graduação do IMECC e a todos os professores que ajudaram a implantar esse programa de mestrado na Unicamp.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À Fernanda da Silva Carneiro, por estar ao meu lado sempre que necessário e me apoiar nos momentos de dificuldade.

Ao meu irmão Fábio Daniel, que sempre me incentivou a estudar para ter um futuro melhor.

À toda equipe do Cursinho Comunitário Pimentas, que me mostrou que o mundo e os meus sonhos são bem maiores do que eu imaginava.

À Prof. Lenilda Siqueira Torres, por me fazer perceber que eu poderia ser mais do que a sociedade esperava de mim, e por ser um dos maiores exemplos de profissional que tive a honra de conhecer.

A todos os meus amigos que torceram e vibraram com cada vitória conquistada no decorrer deste mestrado.

À direção e coordenação da E.E. Prof. Aníbal de Freitas, que sempre apoiam minhas ideias, por mais trabalhosas que sejam.

Aos professores da E.E. Prof. Aníbal de Freitas, que sempre contribuem na realização dos projetos, em especial à Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Laura Ramos de Freitas e ao Prof. Elias Luzia Salvador que abraçaram o projeto dos aeromodelos com entusiasmo.

Aos meus alunos e ex-alunos, que fazem do meu trabalho um lugar de alegria e aprendizagem.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste mestrado.

## Resumo

Esta dissertação concentra-se em duas abordagens de modelagem por polinômios, cada uma relacionada à uma aplicação e envolvendo o uso de recursos computacionais. A primeira foi trabalhada com alunos do ensino médio e tem relação com as disciplinas de física e química. Trata-se da construção de um foguete (aeromodelo), seu lançamento e a modelagem de sua trajetória através de uma função polinomial de segundo grau. A segunda é a modelagem no computador de uma superfície de revolução através do estudo de polinômios e matrizes de rotação. Nas duas abordagens os alunos têm contato com diversos assuntos aprendidos no ensino médio e os tópicos de matemática envolvidos contemplam sistemas de equações lineares, matrizes, funções polinomiais, trigonometria, equações paramétricas e geometria analítica. Um dos propósitos deste trabalho é disponibilizar material para abordagem em sala de aula e em projetos a serem desenvolvidos pelos alunos do ensino médio e de disciplinas introdutórias da licenciatura em matemática. Os programas computacionais utilizados são o GeoGebra, para cálculos algébricos e simulações e o Winplot, para a plotagem das superfícies, ambos de acesso livre.

**Palavras-chave:** Polinômio, modelagem polinomial, matrizes de rotação, ensino através de projetos.

## Abstract

This dissertation focus on two polynomial modeling approaches each one related to one application and involving computational resources. The first one was proposed to high school students and is also related to the physics and chemistry disciplines. It deals with the construction and launch the of a rocket (aircraft model) and its trajectory described by a second degree polynomial. The second is the modeling in the computer of a surface of revolution through the study of polynomials and rotation matrices. In these two approaches the students have contact with several subjects learned in the high school and the mathematics topics involved include systems of linear equations, matrices, polynomial functions, trigonometry, parametric equations and analytic geometry. One of the purposes of these work is to provide accessible material to be used in classroom and for student projects in the high school or introductory disciplines of undergraduate courses for teachers. The computational software used are GeoGebra, for algebraic calculations and simulations and WinPlot, for surface plotting, both of open access.

**Keywords:** Polynomials, polynomial modeling, rotation matrices, student research projects.

# Lista de Ilustrações

1.1	Triângulo Retângulo . . . . .	17
1.2	Círculo Trigonométrico . . . . .	19
1.3	Arco associado ao número $l$ . . . . .	19
1.4	Arco associado ao número $l > 2\pi$ . . . . .	19
1.5	Arco associado ao número $l < 0$ . . . . .	19
1.6	Senos e cossenos no círculo trigonométrico . . . . .	19
1.7	Soma de Arcos . . . . .	20
1.8	Representação da tela de um radar . . . . .	22
1.9	Arco associado ao número $x$ . . . . .	22
1.10	Representação Geométrica do Exemplo 1.3.7 . . . . .	32
1.11	Representação Geométrica do Exemplo 1.3.8 . . . . .	32
1.12	Representação Geométrica do Exemplo 1.3.9 . . . . .	33
1.13	Rep. Geo. do Ex. 1.3.10: Três planos distintos se interseccionando em um ponto	36
1.14	Rep. Geo. do Ex. 1.3.11: três planos coincidentes . . . . .	36
1.15	Rep. Geo. do Ex. 1.3.12: dois planos coincidentes e um terceiro paralelo . . . . .	37
1.16	Rep. Geo. do Ex. 1.3.13: dois planos coincidentes e um terceiro concorrente . . . . .	37
1.17	Rep. Geo. do Ex. 1.3.14: três planos paralelos . . . . .	38
1.18	Rep. Geo. do Ex. 1.3.15: dois planos paralelos e um terceiro os intersecta estes segundo retas paralelas . . . . .	39
1.19	Rep. Geo. do Ex. 1.3.16: três planos distintos se interseccionando em uma única reta . . . . .	39
1.20	Rep. Geo. do Ex. 1.3.17: três planos distintos se interseccionando em três retas paralelas . . . . .	40
1.21	Solução do Sistema . . . . .	41
1.22	Solução do Problema . . . . .	41
1.23	Definição de Limite . . . . .	47
1.24	Concavidade voltada para cima . . . . .	54
1.25	Concavidade voltada para baixo . . . . .	54
1.26	Gráfico da função $f(x) = x^3 - x$ . . . . .	54
1.27	Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 8$ . . . . .	55
2.1	Pontos $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	66
2.2	Polinômio $P_1(x)$ . . . . .	66
2.3	Pontos $A$ , $B$ , $C$ e $D$ . . . . .	67
2.4	Polinômio $P_2(x)$ . . . . .	67
2.5	Pontos alinhados . . . . .	68
2.6	Gráfico de uma função polinomial de primeiro grau $a > 0$ . . . . .	69

2.7	Gráfico de uma função polinomial de primeiro grau $a < 0$	69
2.8	Parábola com concavidade voltada para cima ( $a > 0$ )	71
2.9	Parábola com concavidade voltada para baixo ( $a < 0$ )	71
2.10	Concavidade da Parábola se fechando conforme aumentamos o valor de $a$	72
2.11	Papel do coeficiente $b$ na equação polinomial de 2º grau	72
2.12	Papel do coeficiente $c$ na equação polinomial de 2º grau	73
2.13	Três raízes reais distintas	74
2.14	Duas raízes reais iguais e uma distinta	75
2.15	Três raízes reais coincidentes com um ponto crítico	75
2.16	Uma raiz real e dois pontos críticos	76
2.17	Uma raiz real e um ponto crítico	76
2.18	Uma raiz real e nenhum ponto crítico	77
2.19	Quatro raízes reais distintas	79
2.20	Funções polinomiais de 4º grau com três raízes reais	80
2.21	Funções polinomiais de 4º grau com duas raízes reais	81
2.22	Uma raiz real	81
2.23	Triângulo da questão 3	82
2.24	Terreno da questão 6	83
2.25	Janelas das questões 8 e 9	83
3.1	Materiais para a construção do aeromodelo	85
3.2	Base do foguete	85
3.3	Foguete	85
3.4	Ângulo de lançamento	86
3.5	Trajectoria do aeromodelo	88
3.6	Lançamento à uma altura $h$ acima do solo	90
3.7	Lançamento à uma altura $h$ abaixo do solo	90
3.8	Altura $h$ em que o “solo” não é atingido	92
3.9	Lançamento com o “alvo” muito alto, mesmo problema de se passar um muro	92
3.10	Vista dos fundos da escola	95
3.11	Vista da escola pelo terreno	95
3.12	Dia do lançamento em 2016	95
3.13	Lançamento 2015	95
3.14	Aeromodelo em pleno voo	96
3.15	Medida da distância horizontal	96
3.16	Representação gráfica de uma “parábola” como constou de alguns relatórios	99
3.17	Lançamento oblíquo	101
3.18	Aplicativo do GeoGebra sobre o lançamento no futebol americano	101
3.19	Superfície de Revolução plotada utilizando o GeoGebra	102
3.20	Superfície de Revolução plotada utilizando o Winplot	102
3.21	Rotação de um ângulo $\theta$	103
3.22	Ponto $A$ no espaço	104
3.23	Rotação de um ângulo $\theta$ em torno do eixo $x$	105
3.24	Taça de vidro, uma superfície de revolução	106
3.25	Eixo de rotação sobre o eixo $x$	107
3.26	Borda da Taça	107

3.27	Taça de vidro, uma superfície de revolução . . . . .	108
3.28	Habilitando a Janela CAS . . . . .	109
3.29	Digitando a matriz aumentada . . . . .	109
3.30	Matriz escalonada com a solução do sistema . . . . .	109
3.31	Curva gerada pelos polinômios . . . . .	111
3.32	Polinômio passando pelos 10 pontos . . . . .	112
3.33	Abrindo a Janela de Visualização 3D . . . . .	113
3.34	Campo Entrada . . . . .	114
3.35	Polinômio $p_1$ . . . . .	114
3.36	Controle Deslizante . . . . .	114
3.37	Janela de Diálogo Controle Deslizante . . . . .	115
3.38	Criando a animação que gera a superfície de revolução . . . . .	115
3.39	Superfície de revolução do polinômio $p_1$ . . . . .	116
3.40	Superfície de revolução do polinômio $p_1$ antes da rotação . . . . .	116
3.41	Superfície de revolução do polinômio $p_1$ após a rotação . . . . .	117
3.42	Interface do Winplot . . . . .	117
3.43	Inserindo a equação da superfície de revolução no Winplot . . . . .	118
3.44	$p_1$ rotacionado no Winplot . . . . .	118
3.45	Taça plotada usando o Winplot . . . . .	119
3.46	Determinando $p'(5)$ e $p'(8)$ com o papel milimetrado . . . . .	120
3.47	Determinando $p'(11)$ e $p'(14)$ com o papel milimetrado . . . . .	121
3.48	Spline cúbica passando pelos pontos E, F, G, H e I. . . . .	121

# Lista de Tabelas

1.1	Preços dos produtos 1, 2 e 3 nas lojas A, B e C . . . . .	24
1.2	Notas dos alunos Ana, Beto e Carol em cada disciplina . . . . .	24
1.3	Quantidade de salgados feitos no sábado . . . . .	26
1.4	Quantidade de salgados feitos no domingo . . . . .	26
1.5	Quantidade de salgados feitos no fim de semana . . . . .	26
1.6	Tabela de resultados dos jogos . . . . .	27
1.7	Pontuação de acordo com o resultado . . . . .	28
1.8	Pontuação de cada time . . . . .	28
1.9	Preços dos Salgados . . . . .	28
1.10	Quantias gastas e recebidas por Valéria . . . . .	29
1.11	Quantidade de caixas que cada caminhão transporta . . . . .	41
2.1	Produto dos polinômios $P$ e $Q$ . . . . .	59
3.1	Distâncias horizontais atingidas pelos aerodelos nos terceiros anos A, B e C .	98
3.2	Distâncias horizontais de alguns grupos . . . . .	99
3.3	Velocidades de lançamento . . . . .	100
3.4	Tempos de voo dos aerodelos de alguns grupos . . . . .	100

# Sumário

Dedicatória

Agradecimentos

Introdução	15
<b>1 Preliminares</b>	<b>17</b>
1.1 Trigonometria	17
1.1.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	17
1.1.2 Círculo Trigonométrico	18
1.1.3 Funções Trigonométricas	19
1.1.4 Soma de Arcos	20
1.1.5 Coordenadas Polares	21
1.2 Matrizes	23
1.2.1 Definição	23
1.2.2 Diagonais de uma Matriz	25
1.2.3 Soma de Matrizes	25
1.2.4 Produto de Matrizes	27
1.3 Sistemas Lineares e Métodos de Resolução	29
1.3.1 Equações Lineares	29
1.3.2 Sistemas Lineares	29
1.3.3 Solução de um Sistema Linear	30
1.4 Determinantes	42
1.4.1 Definição de Determinante	42
1.4.2 Teorema de Cramer	43
1.5 Matriz de Vandermonde	44
1.6 Limites, Derivadas e Retas Tangentes	46
1.6.1 Limites	46
1.6.2 Tangentes e Derivadas	51
<b>2 Polinômios</b>	<b>56</b>
2.1 Polinômio	56
2.1.1 Valor Numérico	56
2.1.2 Igualdade de Polinômios	57
2.2 Operações com Polinômios	57
2.2.1 Adição	57
2.2.2 Subtração	58

2.2.3	Multiplicação . . . . .	58
2.2.4	Divisão . . . . .	59
2.3	Teorema do Resto e Teorema de D'Alembert . . . . .	61
2.4	Equações Polinomiais . . . . .	61
2.5	Como Determinar um Polinômio a Partir de Alguns de Seus Valores (Interpolação)	65
2.6	Análise Gráfica de Funções Polinomiais . . . . .	67
2.6.1	Função Polinomial de 1º Grau . . . . .	67
2.6.2	Função Polinomial de 2º Grau . . . . .	69
2.6.3	Função Polinomial de 3º Grau . . . . .	73
2.6.4	Função Polinomial de 4º Grau . . . . .	77
2.7	Problemas de Otimização “modelados” por Polinômios . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Modelagem Polinomial</b>	<b>84</b>
3.1	Foguete/Aeromodelo . . . . .	84
3.1.1	Polinômio Modelador . . . . .	85
3.1.2	Alcance Máximo . . . . .	87
3.1.3	Alcance Máximo (caso geral) . . . . .	90
3.1.4	O desenvolvimento desta atividade realizado na E. E. Prof. Aníbal de Freitas, Campinas-SP . . . . .	95
3.1.5	Estimativa da Velocidade e do Tempo de Lançamento . . . . .	99
3.2	Modelagem de Superfícies de Revolução . . . . .	101
3.2.1	Matriz de Rotação . . . . .	103
3.2.2	Proposta de Atividade . . . . .	106
3.2.3	Função Spline Cúbica . . . . .	119
3.3	Considerações Finais . . . . .	123
	<b>Referências</b>	<b>124</b>
<b>A</b>	<b>Contexto histórico do início do ensino de matemática no Brasil e sua relação com os projetos de aeromodelos</b>	<b>126</b>

# Introdução

Constantemente os professores do ensino médio deparam-se com uma questão profundamente inquietante feita pelos alunos: “onde vou usar isso?”. Muitas dessas vezes nem mesmo o próprio professor sabe as aplicações do tema, ou ainda, explica porém, sem recursos para que o aluno acredite em suas palavras, por não conseguir mostrar de forma acessível as aplicações do assunto. Vivemos num ambiente escolar onde estamos presos a uma quantidade muito grande de conteúdos para ensinar e revisar em pouquíssimo tempo, pois é o que os programas e os vestibulares cobram. E o entender em profundidade e vendo relações e aplicações dos assuntos desenvolvidos, que deveria ser sempre priorizado na formação dos alunos, acaba sendo substituído pela “metodologia decoreba” visando apenas as provas do vestibular e o ENEM.

Esta dissertação apresenta duas propostas de atividades de modelagem polinomial inseridas em projetos a serem desenvolvidos pelos alunos. Tais projetos propõem aplicações diferentes do tema polinômios e visam levar os alunos a perceber que um conteúdo, ensinado num âmbito bastante formal, tem conexões com outras áreas e aplicações diversas.

Estas atividades podem ser consideradas dentro do contexto do ensino através de projetos ([1], [2]), onde o foco na sala de aula muda do professor para o aluno, e da memorização para a aprendizagem. Pautam-se também por nossa prática de procurar aproximar o que é colocado por P. Abrantes em [1]: *“as atividades de aprendizagem devem ter significado e interesse para os alunos no momento em que se desenvolvem, e não justificadas apenas pela sua alegada relevância para estudos futuros”*.

A primeira atividade envolve o lançamento de um aeromodelo em forma de foguete, e foi proposta aos alunos do ensino médio da Escola Prof. Aníbal de Freitas, envolvendo também os professores de física e química, gerando a oportunidade de cooperação com outras disciplinas e a aprendizagem cooperativa, uma das importantes características que aparecem no trabalho de projetos. Já a segunda, pode ser trabalhada como uma pequena introdução à computação gráfica. Nela os alunos são estimulados a desenhar, com o auxílio do computador, a superfície de revolução de um objeto real.

As atividades propostas têm como principal ferramenta o uso de polinômios. Porém, abrangem diversos conteúdos do ensino médio, o que auxilia o professor a responder os questionamentos dos alunos sobre as aplicações. Os tópicos de matemática utilizados, além de polinômios, incluem: trigonometria, coordenadas polares, matrizes, sistemas lineares, determinantes e até uma pequena abordagem intuitiva de limites e derivadas.

Por serem atividades que requerem muitos assuntos, dividimos a dissertação em três capítulos. No capítulo 1, revisamos alguns pré-requisitos para trabalhar as atividades. Estes incluem funções trigonométricas; como escrever um ponto no plano em coordenadas polares; a definição, soma e produto de matrizes; o método de escalonamento para resolução de sistemas lineares; a definição e propriedades de determinantes e, em particular, o determinante da matriz de Vandermonde; e conceitos introdutórios de limites e derivadas.

No capítulo 2 apresentamos uma revisão mais aprofundada de polinômios e suas propriedades, incluindo operações, alguns teoremas que permitem escrever o polinômio em forma fatorada, como determinar um polinômio a partir de alguns de seus valores e a análise das representações gráficas de funções polinomiais de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus. Na última subseção selecionamos uma lista de problemas de otimização que podem ser utilizados pelo professor numa abordagem preliminar de “modelagem polinomial” que envolvem polinômios de 2º e 3º graus.

No capítulo 3, apresentamos as atividades propostas em duas seções. Na primeira trabalhamos a atividade interdisciplinar do aeromodelo (envolvendo as disciplinas de matemática, física e química do ensino médio). A motivação inicial surgiu quando tomamos conhecimento de um desafio proposto na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) ([23]). Nela partimos do modelo físico do polinômio que descreve a trajetória de um foguete e analisamos inicialmente qual deve ser o ângulo para que o alcance horizontal seja máximo, inclusive em casos onde a altura de lançamento não é a mesma que a da chegada. Descrevemos como esta atividade foi aplicada com os alunos da Escola Estadual Professor Aníbal de Freitas, e apresentamos outros problemas que podem ser trabalhados tais como estimativa, com as equações encontradas, de qual é a velocidade de lançamento de alguns dos foguetes, o tempo em que estes ficaram no ar e também como atingir um alvo dentro de certos parâmetros.

Na segunda atividade vemos como modelar a superfície de revolução de um objeto real pela rotação do gráfico de um polinômio. Assim podemos reproduzir graficamente no computador, um copo, ou uma taça, ou qualquer superfície que seja obtida através da rotação de uma curva. Nesta seção, partimos da curva obtida da projeção do objeto físico no papel, que deve ser aproximada por trechos de gráficos de polinômios de 2º e 3º graus. Através da matriz de rotação os alunos poderão obter a parametrização dos trechos de superfície que comporão no computador a reprodução do objeto real que se propuseram a modelar. Detalhamos com o exemplo de uma taça de vidro como isto pode ser feito de várias formas, e mostramos como a implementação computacional pode ser feita nos programas GeoGebra [10] e Winplot [31]. Finalizamos analisando que podemos ter outros métodos mais sofisticados, como o da spline cúbica, para modelar a curva de uma superfície de revolução onde temos uma curva “suave” e sem bicos nos pontos de junção. Neste processo, a cada dois pontos da curva original, ajustamos um polinômio de terceiro grau cujo gráfico tenha as mesmas tangentes da curva projetada no papel milimetrado.

No apêndice incluímos um pequeno texto que discorre brevemente sobre a inserção do tema da primeira atividade no contexto histórico do ensino de matemática no Brasil ([26], [30]). Destacamos que o primeiro livro didático de matemática escrito no Brasil de que se tem relato aborda o tema de trajetória de projéteis, o que está estritamente relacionado com a atividade do lançamento dos aeromodelos aqui proposta.

# Capítulo 1

## Preliminares

Para os estudos das duas atividades propostas no capítulo 3, naturalmente são necessários vários pré-requisitos. Neste primeiro capítulo apresentamos uma breve revisão desses assuntos, que incluem trigonometria, matrizes, sistemas lineares e determinantes. São temas abordados ao longo do ensino médio e, como revisão, em cursos superiores nas áreas de exatas e engenharias. Além disso, temos também o intuito de fixar notação.

Abordaremos também alguns tópicos especiais como a matriz de Vandermonde e uma abordagem intuitiva dos conceitos de limites e derivadas, necessários ao desenvolvimento dos projetos propostos no capítulo 3.

As principais referências utilizadas na redação deste capítulo foram [18], [17], [14], [15], [13], [12], [4], [21], [19], [29] e [25].

### 1.1 Trigonometria

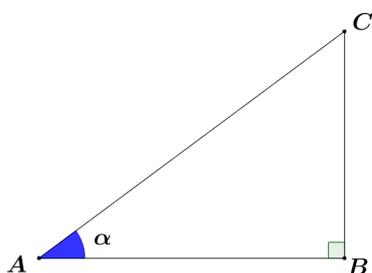
Em nossas atividades utilizaremos alguns conceitos de trigonometria ([15], [5]). Na primeira atividade estes são fundamentais para determinar o ângulo de lançamento de um projétil, e na segunda quando utilizamos a matriz de rotação e modelagem da curva que gera a superfície de revolução.

Frisamos, pela experiência, a importância de que estes conteúdos sejam retomados com os alunos antes das atividades propostas.

Ao longo do texto, a menos de menção em contrário, os ângulos estarão sendo considerados em radianos.

#### 1.1.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Considerando o triângulo retângulo  $ABC$ , com ângulo reto em  $B$ , temos:



- Segmento  $\overline{AB}$ : Cateto adjacente (ao ângulo  $\alpha$ )
- Segmento  $\overline{BC}$ : Cateto oposto (ao ângulo  $\alpha$ )
- Segmento  $\overline{AC}$ : Hipotenusa

Figura 1.1: Triângulo Retângulo

Considerando as medidas  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, definimos:

a. O seno do ângulo  $\alpha$ , como a razão entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa:

$$\text{sen}(\alpha) := \frac{BC}{AC}$$

b. O cosseno do ângulo  $\alpha$ , como a razão entre as medidas do cateto adjacente e da hipotenusa:

$$\text{cos}(\alpha) := \frac{AB}{AC}$$

c. A tangente do ângulo  $\alpha$ , como a razão entre as medidas dos catetos oposto e adjacente (caso  $AB \neq 0$ ):

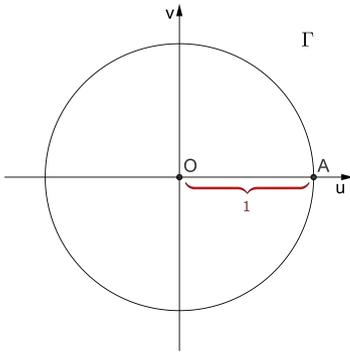
$$\text{tan}(\alpha) := \frac{BC}{AB}$$

As razões seno, cosseno e tangente dependem apenas na medida de  $\alpha$ , e não dos comprimentos envolvidos, o que pode ser justificado utilizando-se semelhança de triângulos ([5]). Logo, estão definidos o seno, cosseno e tangente de um ângulo no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}[$ . Porém é necessário estender essa noção para os arcos correspondentes à estes ângulos, para podermos falar de seno, cosseno e tangente de um número real ([15]).

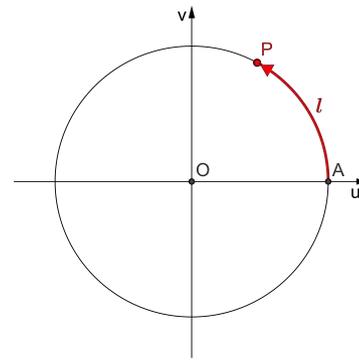
### 1.1.2 Círculo Trigonométrico

Tomemos sobre um plano cartesiano o sistema cartesiano ortogonal  $uOv$ . Consideremos a circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r = 1$ . Nota-se que o comprimento dessa circunferência é  $2\pi$ , já que o seu raio é 1 ([20]). Definimos como origem do círculo trigonométrico o ponto  $A$  dado pela intersecção da parte positiva do eixo das abscissas (eixo  $u$ ) com a circunferência. Agora associamos cada número real  $l$  ( $0 \leq l < 2\pi$ ) a um único ponto  $P$  da circunferência, de modo que:

1. Se  $l = 0$ , então  $P=A$ ;
2. Se  $l > 0$ , então realizamos a partir de  $A$ , um percurso de comprimento  $l$ , no sentido anti-horário, e marcamos  $P$  como o ponto final do percurso, determinando o arco  $\widehat{AOP}$  de comprimento  $l$ . Aqui precisamos deixar claro que a medida angular de um arco em radianos,  $\alpha$ , é igual à medida de seu ângulo central, ou seja, não depende da medida do raio da circunferência, já o seu comprimento  $l$  depende e é dado por  $l = \alpha \cdot r$ , relacionando assim, o ângulo  $\alpha$  e o comprimento do arco  $l$ .

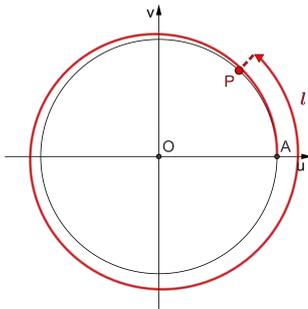


**Figura 1.2:** Círculo Trigonométrico

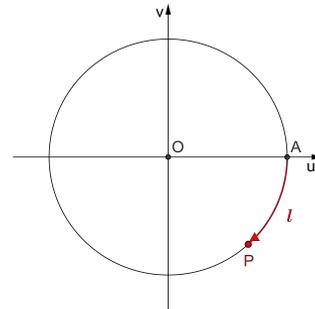


**Figura 1.3:** Arco associado ao número  $l$

Mas no caso do círculo trigonométrico  $r = 1$  e portanto, para cada  $l \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ , associamos um ponto  $P$  do círculo trigonométrico cujo comprimento do arco coincide com o ângulo em radianos. Podemos expandir essa definição para qualquer número real se considerarmos que podemos, com este comprimento, passar mais de uma vez pela origem do círculo trigonométrico dando mais de uma volta, e também considerando que o ponto pode se deslocar no sentido horário, associando os números negativos aos arcos assim construídos.



**Figura 1.4:** Arco associado ao número  $l > 2\pi$



**Figura 1.5:** Arco associado ao número  $l < 0$

### 1.1.3 Funções Trigonômicas

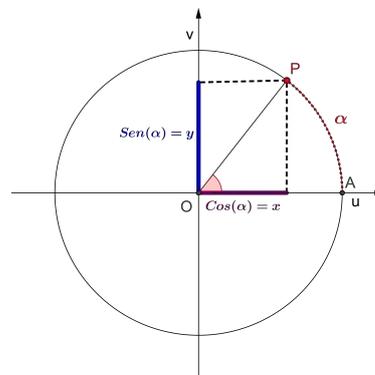
Agora, estendemos as definições de seno, cosseno e tangente para qualquer número real  $\alpha$  de acordo com a seguinte definição:

Consideremos  $P = (x, y)$  o ponto do círculo trigonométrico associado ao ângulo  $\alpha$ . Nestas condições definimos:

$$\text{sen}(\alpha) = y \quad (1.1.1)$$

$$\text{cos}(\alpha) = x \quad (1.1.2)$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{y}{x}, \text{ se } x \neq 0 \quad (1.1.3)$$



**Figura 1.6:** Seno e cosseno no círculo trigonométrico

É importante aqui observar para o aluno que a tangente não está definida para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  ou no ângulo estendido  $\alpha = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$  onde  $k \in \mathbb{Z}$

### 1.1.4 Soma de Arcos

Revisamos a seguir as expressões para calcular o seno e cosseno da soma  $(a + b)$  e da diferença  $(a - b)$  de dois arcos  $a$  e  $b$  ([15]).

Seja  $A$  a origem do círculo trigonométrico e  $P$ ,  $Q$  e  $R$  os pontos do círculo trigonométrico associados aos números  $a$ ,  $a + b$  e  $-b$ , respectivamente.

As coordenadas desses pontos são dadas por:

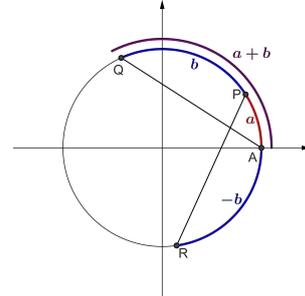


Figura 1.7: Soma de Arcos

$$A = (1, 0) \quad P = (\cos(a), \sin(a)) \quad Q = (\cos(a + b), \sin(a + b)) \quad R = (\cos(b), -\sin(b))$$

Os arcos  $\widehat{APQ}$  e  $\widehat{RAP}$  possuem a mesma medida  $a + b$  e, conseqüentemente, as cordas  $\overline{AQ}$  e  $\overline{PR}$  também têm medidas iguais. Deste modo podemos afirmar que a distância entre  $A$  e  $Q$  é igual à distância entre  $P$  e  $R$ .

Utilizando a expressão da distância entre dois pontos (Teorema de Pitágoras) e desenvolvendo as expressões, temos:

$$\begin{aligned} d_{AQ} &= \sqrt{(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2} \\ d_{AQ} &= \sqrt{(1 - \cos(a + b))^2 + (0 - \sin(a + b))^2} \\ d_{AQ} &= \sqrt{1 - 2 \cdot \cos(a + b) + \cos^2(a + b) + \sin^2(a + b)} \\ d_{AQ} &= \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(a + b)} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} d_{PR} &= \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2} \\ d_{PR} &= \sqrt{(\cos(a) - \cos(b))^2 + (\sin(a) - (-\sin(b)))^2} \\ d_{PR} &= \sqrt{\cos^2(a) - 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) + \cos^2(b) + \sin^2(a) + 2 \cdot \sin(a) \cdot \sin(b) + \sin^2(b)} \\ d_{PR} &= \sqrt{1 + 1 + 2 \cdot \sin(a) \cdot \sin(b) - 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b)} \\ d_{PR} &= \sqrt{2 + 2 \cdot \sin(a) \cdot \sin(b) - 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b)} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Sabendo que a equação 1.1.4 deve ser igual à equação 1.1.5, obtemos:

$$\begin{aligned}
d_{AQ} &= d_{PR} \Rightarrow \\
d_{AQ}^2 &= d_{PR}^2 \Rightarrow \\
2 - 2 \cdot \cos(a + b) &= 2 + 2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) - 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) \Rightarrow \\
\cos(a + b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Fazendo  $a - b$  como  $a + (-b)$  na equação 1.1.6 verificamos que

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) \tag{1.1.7}$$

Ainda, sabendo que  $\operatorname{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  (como pode ser visto em [15]), temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a + b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] \\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]
\end{aligned}$$

E pela equação 1.1.7 verificamos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a + b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \operatorname{sen}(b) \\
&= \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a)
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

O que nos leva (fazendo  $a - b$  como  $a + (-b)$  na equação 1.1.8) também à equação:

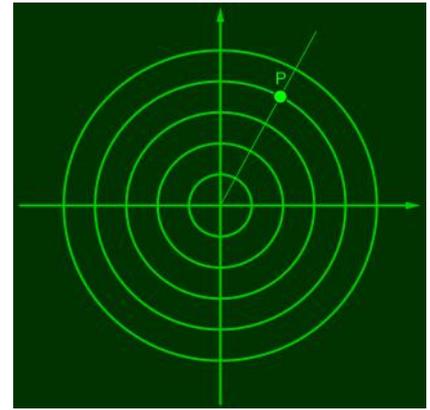
$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a) \tag{1.1.9}$$

As equações 1.1.6, 1.1.7, 1.1.8 e 1.1.9 são chamadas, respectivamente, de cosseno da soma, cosseno da diferença, seno da soma e seno da diferença.

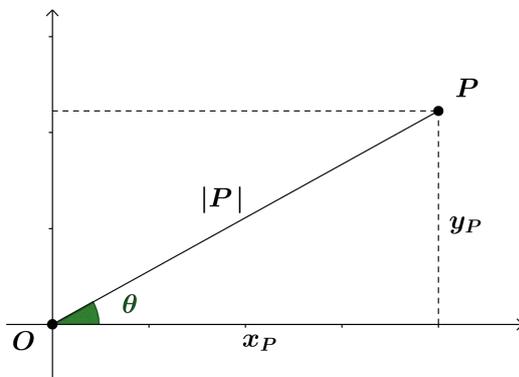
### 1.1.5 Coordenadas Polares

Precisamos de outra forma de localizar um ponto no plano cartesiano, diferente das coordenadas cartesianas onde representamos um ponto  $P$  pelas suas projeções nos eixos das abscissas e das ordenadas,  $P = (x_P, y_P)$ .

A chamada *forma polar* usa os conceitos de trigonometria para escrever esse mesmo ponto  $P$  em função de sua distância à origem (que denotaremos por  $|P|$ ) e do ângulo  $\theta$  que o segmento  $\overline{OP}$  faz com a parte positiva do eixo das abscissas (quando partimos deste eixo e consideramos o sentido anti-horário). Pode-se aqui observar com os alunos que esta forma de se representar um ponto é utilizada, por exemplo, nos radares de uso militar.



**Figura 1.8:** Representação da tela de um radar



**Figura 1.9:** Arco associado ao número x

Dado o ponto  $P = (x_P, y_P)$ , usando o Teorema de Pitágoras, temos que o tamanho do segmento  $\overline{OP}$ , que também chamamos de módulo de  $P$  e denotamos por  $|P|$  é dado por:

$$|P| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad (1.1.10)$$

Uma vez que a distância do ponto  $P$  à origem já está bem definida, ainda nos resta determinar o ângulo  $\theta$ . Verificamos que:

$$\cos(\theta) = \frac{x_P}{|P|} \quad (1.1.11)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y_P}{|P|} \quad (1.1.12)$$

Isolando  $x_P$  e  $y_P$  nas equações 1.1.11 e 1.1.12 obtemos:

$$x_P = |P| \cdot \cos(\theta) \quad (1.1.13)$$

$$y_P = |P| \cdot \text{sen}(\theta) \quad (1.1.14)$$

Ou seja, podemos escrever o ponto  $P$  em coordenadas polares da seguinte forma:

$$P = (|P| \cdot \cos(\theta), |P| \cdot \text{sen}(\theta)) \quad (1.1.15)$$

**Exemplo 1.1.1.** Tomemos o ponto  $P_1 = (2, 2)$  Pela equação 1.1.10, temos que:

$$|P_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Já pelas equações 1.1.11 e 1.1.12, temos que:

$$\cos(\theta_1) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \text{sen}(\theta_1) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O ângulo que nos fornece esses valores para seno e cosseno é  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  o que nos permite escrever o ponto  $P_1$  como:

$$P_1 = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

**Exemplo 1.1.2.** Dado  $P_3 = (-1, \sqrt{3})$ , pelas equações 1.1.10, 1.1.11 e 1.1.12, temos que:

$$|P_3| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \quad \cos(\theta_3) = \frac{-1}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}(\theta_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

O ângulo que nos dá esses valores para seno e cosseno é  $\theta_3 = \frac{2\pi}{3}$  rad, logo:

$$P_3 = 2 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

**Exemplo 1.1.3.** Dado  $P_4 = (1, 2)$ , pelas equações 1.1.10, 1.1.11 e 1.1.12, temos que:

$$|P_4| = \sqrt{(1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \cos(\theta_4) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad e \quad \operatorname{sen}(\theta_4) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Esses valores de seno e cosseno não são valores de ângulo notáveis ([15]). Nestes casos, calculamos a tangente (com a equação 1.1.3) e utilizamos sua função inversa - arcotangente ([14] e [15]):

$$\tan(\theta_4) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_4 = \arctan \left( \frac{1}{2} \right) \approx 0,46 \text{ rad}$$

Portanto, escrevemos  $P_4 \approx \sqrt{5} (\cos(0,46), \operatorname{sen}(0,46))$ .

## 1.2 Matrizes

### 1.2.1 Definição

Dados dois números,  $m$  e  $n$ , naturais e não nulos, chama-se matriz de ordem  $m$  por  $n$  (e indica-se  $m \times n$ ) toda tabela  $M$  formada por  $m \cdot n$  elementos distribuídos em  $m$  linhas e  $n$  colunas. Estes elementos podem ser, por exemplo, números reais, números complexos ou funções.

**Exemplo 1.2.1.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1.2.2.**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1.2.3.**

$$C = \begin{bmatrix} \cos(x) & \pi & \sqrt{2} \\ x^2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & x^3 - 2 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}$$

As matrizes servem para organizar dados que podem ser postos na forma de tabela, como nos exemplos a seguir:

**Exemplo 1.2.4.** *A tabela abaixo mostra os preços dos produtos 1, 2 e 3 nas Lojas A, B e C, e a matriz associada:*

**Tabela 1.1:** Preços dos produtos 1, 2 e 3 nas lojas A, B e C

<i>Preços(R\$)</i>	<b>Produto 1</b>	<b>Produto 2</b>	<b>Produto 3</b>
<b>Loja A</b>	14,00	5,35	2,50
<b>Loja B</b>	13,50	6,00	2,25
<b>Loja C</b>	12,00	6,15	2,75

 $\Rightarrow$ 

$$\begin{bmatrix} 14,00 & 5,35 & 2,50 \\ 13,50 & 6,00 & 2,25 \\ 12,00 & 6,15 & 2,75 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1.2.5.** *A tabela a seguir mostra a nota de três alunos nas disciplinas de Artes, Biologia, Física e Geografia, e a matriz associada:*

**Tabela 1.2:** Notas dos alunos Ana, Beto e Carol em cada disciplina

<i>Notas</i>	<b>Artes</b>	<b>Biologia</b>	<b>Física</b>	<b>Geografia</b>
<b>Ana</b>	10	8	6	9
<b>Beto</b>	7	4	9	6
<b>Carol</b>	5	6	10	5

 $\Rightarrow$ 

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Representamos uma matriz  $m \times n$  por:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para localizar um elemento em uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está

**Exemplo 1.2.6.** Na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \\ -1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

O elemento 10 está na linha 1 e na coluna 1, então denotamos  $a_{11} = 10$

O elemento  $-4$  está na linha 2 e na coluna 3, então denotamos  $a_{23} = -4$

O elemento 8 está na linha 3 e na coluna 2, então denotamos  $a_{32} = 8$

Dizemos que duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  são *iguais* se, e somente se, possuem a mesma ordem (mesmo número de linhas e mesmo número de colunas) e, além disso, se todos os seus termos correspondentes são iguais, ou seja:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \text{e para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

## 1.2.2 Diagonais de uma Matriz

Quando temos uma *matriz quadrada de ordem  $n$* , ou seja, uma matriz cujo número de colunas é igual ao de linhas ( $m = n$ ), podemos definir duas diagonais denominadas **diagonal principal** e **diagonal secundária**.

Os elementos que compõem a diagonal principal são dados pelo conjunto ordenado

$$P = \{a_{ij} | i = j, i = 1, 2, \dots, n\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$$

Já os elementos que compõem a diagonal secundária são dados por:

$$S = \{a_{ij} | i + j = n + 1, i = 1, 2, \dots, n\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}\}$$

**Exemplo 1.2.7.** Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \\ -1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$  Os elementos de sua diagonal principal compõem o conjunto  $P = \{10, 6, 7\}$  e os de sua diagonal secundária compõem o conjunto  $S = \{-1, 6, 3\}$

## 1.2.3 Soma de Matrizes

A soma de duas matrizes é definida apenas para matrizes de mesma ordem, isto é, para matrizes que possuem o mesmo número de linhas e também o mesmo número de colunas. Para somar duas matrizes  $A$  e  $B$  basta somarmos cada elemento de  $A$  com os elementos de  $B$  que ocupam a mesma posição.

**Definição 1.2.8** (Soma). Dadas duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , chama-se **soma  $A+B$**  a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq m \quad \text{e } 1 \leq j \leq n$$

**Exemplo 1.2.9.** *Sejam as Matrizes A e B:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & -10 \\ -5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

A soma  $A + B$  é dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 10 & -5 + 2 & 3 + (-3) \\ 4 + 2 & 3 + 9 & -1 + (-10) \\ 1 + (-5) & 0 + 8 & 6 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 0 \\ 6 & 12 & -11 \\ -4 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

### Interpretação da Soma

Nos exemplos a seguir ilustramos como a soma de matrizes está associada a tabelas com as mesmas características.

**Exemplo 1.2.10.** *Valéria trabalha vendendo salgados de quatro tipos: coxinha, quibe, bolinha de queijo e empadinhas, todos eles podendo ser feitos nos tamanhos mini, normal e grande. As tabelas a seguir mostram a quantidade de salgados que ela fez de cada tipo no sábado e no domingo, respectivamente:*

**Tabela 1.3:** Quantidade de salgados feitos no sábado

Qtd. Sáb.	Mini	Normal	Grande
Coxinha	60	30	10
Quibe	25	12	5
Bol. Queijo	100	40	15
Empadinha	30	10	0

**Tabela 1.4:** Quantidade de salgados feitos no domingo

Qtd. Dom.	Mini	Normal	Grande
Coxinha	200	50	13
Quibe	125	23	10
Bol. Queijo	80	10	10
Empadinha	120	15	15

Estas duas tabelas correspondem, respectivamente, às matrizes  $S$  e  $D$ :

$$S = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 10 \\ 25 & 12 & 5 \\ 100 & 40 & 15 \\ 30 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 200 & 50 & 13 \\ 125 & 23 & 10 \\ 80 & 10 & 10 \\ 120 & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

que, somadas, nos dão a quantidade de cada salgado feito por Valéria no fim de semana ( $F$ ), que também podemos reescrever como uma tabela:

**Tabela 1.5:** Quantidade de salgados feitos no fim de semana

$$F = S + D = \begin{bmatrix} 260 & 80 & 23 \\ 150 & 35 & 15 \\ 180 & 50 & 25 \\ 150 & 25 & 15 \end{bmatrix}$$

Qtd. Fim de Sem.	Mini	Normal	Grande
Coxinha	260	80	23
Quibe	150	35	15
Bol. Queijo	180	50	25
Empadinha	150	25	15

### 1.2.4 Produto de Matrizes

O produto de matrizes é definido de forma diferente da ideia utilizada na soma. Para matrizes  $A$  e  $B$  tais que o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda. O produto é definido a seguir.

**Definição 1.2.11** (Produto). *Dadas duas matrizes  $A = (a_{ik})_{m \times n}$  e  $B = (b_{kj})_{n \times p}$ , chama-se **produto  $A \cdot B$**  à matriz  $C = (c_{ij})_{m \times p}$  tal que:*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq m \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq n.$$

**Exemplo 1.2.12.** *Sejam as Matrizes  $A$  e  $B$ :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

O produto  $A \cdot B$  é dado por:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-5) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 9 + (-3) \cdot 4 \\ 0 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 8 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

### Interpretação do Produto

A soma de matrizes é definida simplesmente somando-se os respectivos elementos de cada matriz. Por que o produto de matrizes não segue a mesma ideia? Quando somamos, estamos juntando elementos que possuem as mesmas características. Já o produto serve para poder operar elementos compatíveis, que possuem características diferentes, produzindo um outro tipo de tabela. Os exemplos a seguir procuram ilustrar como isto é feito.

**Exemplo 1.2.13.** *Num determinado campeonato obteve-se o seguinte resultado:*

**Tabela 1.6:** Tabela de resultados dos jogos

	Vitória	Empate	Derrota
Time A	3	1	0
Time B	1	1	2
Time C	1	2	1
Time D	0	1	3
Time E	2	1	1

$$\implies J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Pelo regulamento do campeonato vale a seguinte tabela para as pontuações:*

*Fazendo o produto  $C = J \cdot P$  conseguimos determinar qual é a pontuação (e consequentemente a classificação) de cada time ao final dos jogos:*

$$C = J \cdot P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

**Tabela 1.7:** Pontuação de acordo com o resultado

<b>Vitória</b>	3 pontos
<b>Empate</b>	1 ponto
<b>Derrota</b>	0 ponto

 $\implies P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 

A matriz  $C$  é obtida multiplicando-se a quantidade de jogos vencidos, empatados e perdidos de cada time por suas respectivas pontuações. Desta forma, ela representa o total de pontos de cada time ao final do campeonato, e pode ser representada na forma de uma tabela:

**Tabela 1.8:** Pontuação de cada time

	<b>Total de Pontos</b>
<b>Time A</b>	10
<b>Time B</b>	4
<b>Time C</b>	5
<b>Time D</b>	1
<b>Time E</b>	7

De forma simples determinamos que os times terminaram o campeonato na seguinte ordem (crescente): A, E, C, B e D.

**Exemplo 1.2.14.** Vamos supor que Valéria (Exemplo 1.2.10) tenha tido um custo na produção de cada salgado e que, ao vendê-los, tenha um lucro um pouco maior do que seu custo. Vamos representar esses valores na tabela a seguir:

**Tabela 1.9:** Preços dos Salgados

	<b>Preço de custo</b>	<b>Preço de venda</b>
<b>Mini</b>	R\$ 1,00	R\$ 1,50
<b>Normal</b>	R\$ 3,00	R\$ 3,50
<b>Grande</b>	R\$ 4,00	R\$ 5,00

Esta tabela pode ser representada pela matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,50 \\ 3,00 & 3,50 \\ 4,00 & 5,00 \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto  $T = F \cdot P$  (onde  $F$  é a matriz do exemplo 1.2.10 e representa a quantidade de salgados de cada tipo que Valéria fez no fim de semana) estaremos multiplicando cada tipo de salgado pelos seus respectivos valores de custo (na primeira coluna) e de venda (na segunda coluna), determinando o valor gasto e recebido com a produção de cada tipo de salgado:

$$T = F \cdot P = \begin{bmatrix} 260 & 80 & 23 \\ 150 & 35 & 15 \\ 180 & 50 & 25 \\ 150 & 25 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,00 & 1,50 \\ 3,00 & 3,50 \\ 4,00 & 5,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 592,00 & 785,00 \\ 315,00 & 422,50 \\ 430,00 & 570,00 \\ 285,00 & 387,50 \end{bmatrix}$$

A matriz  $T$  nos fornece na primeira coluna o total gasto por Valéria com coxinhas, quibes, bolinhas de queijo e empadinhas, respectivamente. Já a segunda coluna nos fornece o total ganho na venda dos mesmos salgados. Podemos representar essa matriz na forma de uma tabela:

**Tabela 1.10:** Quantias gastas e recebidas por Valéria

	valor gasto	valor recebido
<b>Coxinha</b>	R\$ 592,00	R\$ 785,00
<b>Quibe</b>	R\$ 315,00	R\$ 422,50
<b>Bol. Queijo</b>	R\$ 430,00	R\$ 570,00
<b>Empadinha</b>	R\$ 285,00	R\$ 387,50

No exemplo 1.2.13 multiplicamos quantidade de vitórias pela pontuação dada pela vitória (fizemos o mesmo com os empates e as derrotas). Já no exemplo 1.2.14, multiplicamos quantidade de salgados pelos seus respectivos preços. Em ambos os exemplos, multiplicamos valores que representavam coisas diferentes, porém, que eram compatíveis. Outras aplicações das operações com matrizes podem ser encontradas, por exemplo, em [4] e [28].

A seguir incluímos a importante associação entre matrizes e resolução de sistemas de equações lineares.

## 1.3 Sistemas Lineares e Métodos de Resolução

Também iremos trabalhar com sistemas de equações lineares nas atividades do Capítulo 3. Por conta disto, resumimos aqui os principais conceitos envolvidos.

### 1.3.1 Equações Lineares

Uma equação linear em  $n$  variáveis  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Em que  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , e  $b$  são constantes reais, e  $b$  é o termo independente.

**Exemplo 1.3.1.**  $2x + 3y - 2z = 4$  é uma equação linear de três variáveis  $(x, y, z)$ .

**Exemplo 1.3.2.**  $10x - 3 = 47$  é uma equação linear de uma variável  $(x)$ .

**Exemplo 1.3.3.**  $-x + y = 0$  é uma equação linear de duas variáveis  $(x$  e  $y)$ . Como  $b = 0$  dizemos que esta equação é homogênea.

### 1.3.2 Sistemas Lineares

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares. Ou seja:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Alguns exemplos de sistemas lineares são:

**Exemplo 1.3.4.** Sistema com 2 equações e 2 incógnitas:

$$\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

**Exemplo 1.3.5.** Sistema com 2 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} -2x - 4y + z = 2 \\ x + 3y - 3z = 8 \end{cases}$$

**Exemplo 1.3.6.** Sistema com 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

### 1.3.3 Solução de um Sistema Linear

Resolver um sistema linear significa encontrar o conjunto de valores que satisfaçam todas as equações do sistema simultaneamente, ou seja, encontrar valores para as variáveis que, quando substituídos em cada equação do sistema, tornem esta equação uma igualdade verdadeira. Destacamos aqui os sistemas de duas equações e duas variáveis, e os sistemas com três equações e três variáveis que são os mais abordados no ensino médio ([4]).

É da maior importância na discussão destes sistemas com os alunos a sua interpretação geométrica, pois sua visualização permite compreender e aceitar as propriedades algébricas. Parte-se aqui do fato que num sistema de equações de duas variáveis, cada equação representa uma reta no plano e, no caso de três variáveis, cada equação representa um plano no espaço ([4], [28]).

#### Solução de um S.L. com duas incógnitas – Método da Adição

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 & \text{(I)} \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 & \text{(II)} \end{cases}$$

O método da adição segue um algoritmo que cancela uma das variáveis, reduzindo o sistema a uma equação com apenas uma incógnita. Assim, basta resolver a equação para encontrar o valor da variável e substituí-la no sistema para obtenção da outra variável.

O algoritmo funciona executando-se os seguintes passos (que são justificados pelos axiomas *I*, *II* e *III* dos Elementos de Euclides [3]):

- i. Multiplicar a equação (I) por  $a_{21}$ , gerando a equação (III)

ii. Multiplicar a equação (II) por  $-a_{11}$ , gerando a equação (IV)

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a_{21} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_2 = b_1 \cdot a_{21} & \text{(III)} \\ -a_{11} \cdot a_{21} \cdot x_1 - a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_2 = -b_2 \cdot a_{11} & \text{(IV)} \end{cases}$$

iii. Somar as equações (III) e (IV), gerando a equação (V)

$$(a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) x_2 = b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11} \quad \text{(V)}$$

iv. Em (V), isolar, quando possível, a variável  $x_2$  e substituir seu valor em uma das equações anteriores para determinar o valor de  $x_1$ .

$$x_2 = \frac{b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11}}{a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}}$$

**Observação:** A partir da equação (V), obtida no passo *iii.*, observamos as seguintes possibilidades:

- Se  $a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$  dizemos que o sistema é **possível e determinado**, o que significa que o sistema possui uma única solução.
- Se  $a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = 0$  e  $b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11} \neq 0$ , dizemos que o sistema é **impossível**, ou seja, não tem solução.
- Se  $a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = 0$  e  $b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11} = 0$ , dizemos que o sistema é **possível e indeterminado**, ou seja, possui infinitas soluções.

Vamos ver alguns exemplos que ilustram cada caso, juntamente com suas interpretações gráficas:

**Exemplo 1.3.7.**

$$\begin{cases} x + 2y = 7 & \text{(I)} \\ 2x - 4y = -2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (I) por 2, e a equação (II) por  $-1$ :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 14 & \text{(III)} \\ -2x + 4y = 2 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Somamos as equações (III) e (IV):

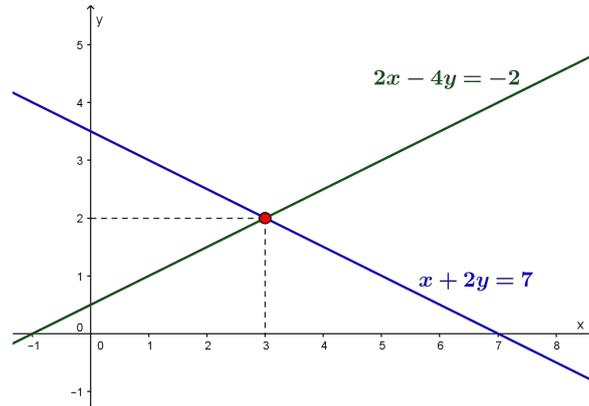
$$8y = 16 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Substituímos  $y = 2$  na equação (I):

$$x + 2y = 7 \quad \Rightarrow \quad x + 2 \cdot 2 = 7 \quad \Rightarrow \quad x + 4 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Portanto temos o par  $(x, y) = (3, 2)$  como solução do sistema.

Geometricamente, as equações do Exemplo 1.3.7 determinam no plano duas retas. O ponto onde elas se encontram é a solução do sistema:



**Figura 1.10:** Representação Geométrica do Exemplo 1.3.7

**Exemplo 1.3.8.**

$$\begin{cases} x + 2y = -8 & (I) \\ -x - 2y = 10 & (II) \end{cases}$$

*Multiplicamos a equação (I) por  $-1$ , e a equação (II) por  $-1$ :*

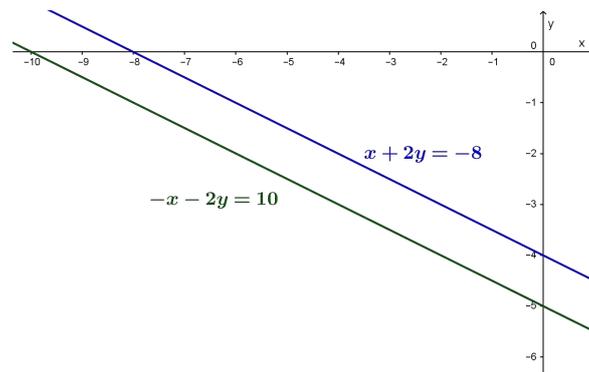
$$\begin{cases} -x - 2y = 8 & (III) \\ x + 2y = -10 & (IV) \end{cases}$$

*Somamos as equações (III) e (IV):*

$$0 = -2$$

*Isso é um absurdo, logo o sistema não tem solução.*

*Geometricamente, as equações do Exemplo 1.3.8 determinam no plano duas retas paralelas. Não há nenhum ponto onde elas se encontram:*



**Figura 1.11:** Representação Geométrica do Exemplo 1.3.8

**Exemplo 1.3.9.**

$$\begin{cases} x - y = 5 & (I) \\ 2x - 2y = 10 & (II) \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (I) por 2, e a equação (II) por  $-1$ :

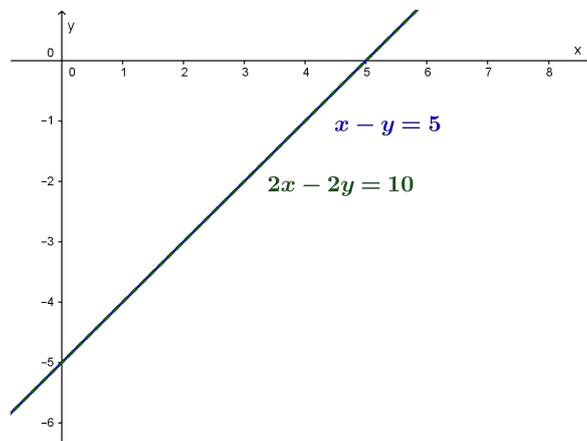
$$\begin{cases} 2x - 2y = 10 & (III) \\ -2x + 2y = -10 & (IV) \end{cases}$$

Somamos as equações (III) e (IV):

$$0 = 0$$

O que é verdade para quaisquer valores de  $x$  e  $y$ .

Logo o sistema tem infinitas soluções. Ambas as equações deste exemplo determinam no plano cartesiano a mesma reta,  $y = x - 5$ .



**Figura 1.12:** Representação Geométrica do Exemplo 1.3.9

### Solução de um S.L. com três incógnitas - Método do Escalonamento

Temos uma relação entre sistemas e matrizes que facilita o processo de triangularização (escalonamento ou eliminação de Gauss). Porém, propomos explicar o algoritmo separadamente desse tema para entender o que está acontecendo. O método de escalonamento leva em consideração o raciocínio do aluno (ao procurar que linha e por qual valor ele deve multiplicar, quais linhas deve somar, etc.). Isso faz com que ele pense além de apenas decorar um método e aplicá-lo mecanicamente. Resumimos este método a seguir.

Dado um sistema com três equações:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 & \text{(I)} \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 & \text{(II)} \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 & \text{(III)} \end{cases}$$

Nosso objetivo é deixá-lo, se possível, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{1} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 = d_1 & \text{(I)} \\ \mathbf{0} \cdot x_1 + \mathbf{1} \cdot x_2 + c_{23} \cdot x_3 = d_2 & \text{(II)} \\ \mathbf{0} \cdot x_1 + \mathbf{0} \cdot x_2 + \mathbf{1} \cdot x_3 = d_3 & \text{(III)} \end{cases}$$

Os elementos do sistema neste caso, estão em forma de escada: O coeficiente não nulo da equação é chamado de pivô. O pivô da primeira linha é um, e os coeficientes que estão abaixo do pivô são iguais a zero. O pivô da segunda linha também é um, e o coeficiente abaixo do pivô é zero, e por fim, o pivô da terceira linha é um.

O processo para deixar o sistema dessa forma utiliza as seguintes etapas:

- i. Colocar como 1ª equação aquela que tenha 1 como coeficiente da 1ª incógnita. Caso não haja nenhuma equação assim, dividir membro a membro aquela que está como 1ª equação pelo coeficiente da 1ª incógnita.
- ii. Nas demais equações, obter zero como coeficiente da primeira incógnita (caso já não seja), somando cada uma delas com o produto da 1ª equação pelo oposto do coeficiente da primeira incógnita.
- iii. Repetir os itens *i* e *ii*, substituindo neles 1ª por 2ª, e depois 2ª por 3ª.
- iv. Resolver a 3ª equação, substituir o valor dessa variável na 2ª equação e resolvê-la e substituir os valores encontrados na 1ª e resolvê-la.

Os sistemas com 3 equações lineares apresentam essencialmente 8 tipos de situação geométrica. Exemplificamos a seguir cada caso utilizando o método a partir dos sistemas lineares. No primeiro deles também mostramos sua associação com matrizes.

**Exemplo 1.3.10.** *Dado o sistema*

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

*Vamos resolvê-lo utilizando o método descrito acima:*

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 & \text{Para transformar o coeficiente de } x \text{ em } 1 \text{ na } 1^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (\frac{1}{2}) \cdot (1^{\text{a}}) \\ -x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + y + 2z = 5 & \text{Para transformar o coeficiente de } x \text{ em } -1 \text{ na } 3^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-\frac{1}{2}) \cdot (3^{\text{a}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ -x + 2y + 2z = 3 & \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 2^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (2^{\text{a}}) + (1^{\text{a}}) \\ -x - \frac{1}{2}y - z = -\frac{5}{2} & \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 3^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (3^{\text{a}}) + (1^{\text{a}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{5}{2}z = \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = -2 & \text{Para zerar o coeficiente de } y \text{ na } 3^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (3^{\text{a}}) + (\frac{3}{2})(2^{\text{a}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{5}{2}z = \frac{7}{2} \\ \frac{13}{4}z = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Para transformar o coeficiente de  $x$  em 1 na 1ª equação fazemos:  $(\frac{4}{13}) \cdot (3^a)$

$$\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{5}{2}z = \frac{7}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Substituindo o valor de  $z$  na primeira e na segunda equação determinamos a solução do sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Agora, vamos resolver o mesmo sistema utilizando o método de escalonamento diretamente na matriz (como é usual), associando-o à sua matriz aumentada.

Podemos escrever o sistema na forma matricial da seguinte maneira:

$$AX = B \iff \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Que pode ser escrito de forma reduzida, utilizando a matriz aumentada do sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Agora executamos o método do escalonamento às linhas da matriz aumentada ([4], [28]).

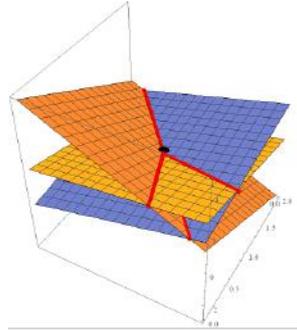
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot L_1 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot L_3 \end{array} \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} \cdot L_2 \end{array} \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & \frac{13}{4} \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{4}{13} \cdot L_3 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \iff \begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{5}{2}z = \frac{7}{2} \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

A solução deste sistema nos mostra que ele é um sistema possível e determinado (SPD). Todas as variáveis estão unicamente determinadas.

Geometricamente temos três planos distintos se interseccionando em um único ponto:



**Figura 1.13:** Rep. Geo. do Ex. 1.3.10: Três planos distintos se interseccionando em um ponto

**Exemplo 1.3.11.**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 2^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-2) \cdot (1^{\text{a}}) + (2^{\text{a}}) \\ \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 3^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-3) \cdot (1^{\text{a}}) + (3^{\text{a}}) \end{array}$$

Assim obtemos:

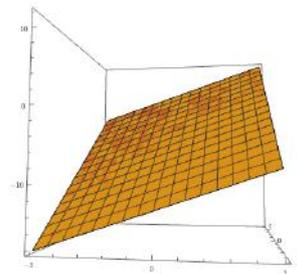
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

A segunda e terceira equações são anuladas. Isso nos dá duas variáveis dependentes de  $x$ :

$$x = 3 - 2y + z$$

Logo o sistema é possível e indeterminado (SPI) e tem dois graus de liberdade (duas variáveis são livres e a terceira depende destas duas).

Sua representação geométrica é dada por três planos coincidentes no espaço:



**Figura 1.14:** Rep. Geo. do Ex. 1.3.11: três planos coincidentes

**Exemplo 1.3.12.**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 2^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-2) \cdot (1^{\text{a}}) + (2^{\text{a}}) \\ \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 3^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-3) \cdot (1^{\text{a}}) + (3^{\text{a}}) \end{array}$$

Assim obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 0 = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

A segunda equação é satisfeita para quaisquer  $x$ ,  $y$  e  $z$  e a terceira apresenta uma inconsistência.  
Logo o Sistema é Impossível (SI)  
Sua representação geométrica nos dá dois planos coincidentes e um terceiro paralelo:

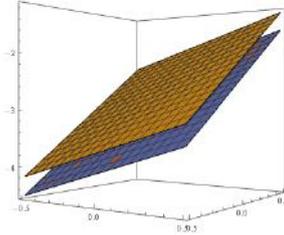


Figura 1.15: Rep. Geo. do Ex. 1.3.12: dois planos coincidentes e um terceiro paralelo

### Exemplo 1.3.13.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 2^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-2) \cdot (1^{\text{a}}) + (2^{\text{a}}) \\ \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 3^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-3) \cdot (1^{\text{a}}) + (3^{\text{a}}) \end{array}$$

Assim obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 0 = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

A segunda equação é anulada e a terceira substituída na primeira gera uma equação com uma variável dependente:

$$x + 2y - 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3 - 2y \text{ ou ainda, } (x, y, z) = (3, 0, 0) + y(-2, 1, 0)$$

Logo o sistema é possível e indeterminado (SPI) com um grau de liberdade e a solução está associada à uma reta no espaço.

Geometricamente temos dois planos coincidentes e um terceiro concorrente:

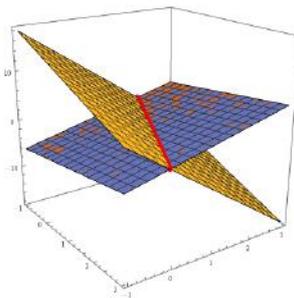


Figura 1.16: Rep. Geo. do Ex. 1.3.13: dois planos coincidentes e um terceiro concorrente

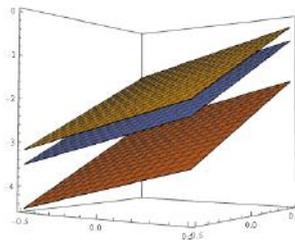
**Exemplo 1.3.14.**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 6y - 3z = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 2^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-2) \cdot (1^{\text{a}}) + (2^{\text{a}}) \\ \text{Para zerar o coeficiente de } x \text{ na } 3^{\text{a}} \text{ equação fazemos: } (-3) \cdot (1^{\text{a}}) + (3^{\text{a}}) \end{array}$$

Assim obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 0 = -2 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

A segunda e terceira equações são inconsistências. Sistema é Impossível (SI)  
Geometricamente temos três planos paralelos.



**Figura 1.17:** Rep. Geo. do Ex. 1.3.14: três planos paralelos

**Exemplo 1.3.15.**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \\ 3x + 6y - 2z = 12 \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 0 = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ao escalonar a segunda equação usando a primeira geramos uma inconsistência, o que nos diz que os planos relativos às equações 1 e 2 são paralelos. Isolando  $z$  e igualando as equações 1 e 3, determinamos a equação da intersecção entre os dois planos:

$$x + 2y - 3 = \frac{1}{2}(3x + 6y - 12) \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 2y.$$

Substituindo este resultado na equação 1, encontramos  $z = 3$

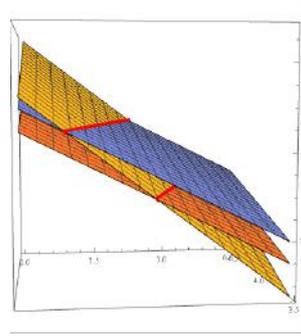
Da mesma forma, isolando  $z$  e igualando as equações 2 e 3, determinamos a equação da intersecção entre os planos:

$$\frac{1}{2}(2x + 4y - 5) = \frac{1}{2}(3x + 6y - 12) \quad \Rightarrow \quad x = 7 - 2y.$$

Substituindo este resultado na equação 2, encontramos  $z = \frac{9}{2}$

O sistema é impossível (SI)

Geometricamente temos dois planos paralelos e um terceiro os intersecta segundo retas paralelas.



**Figura 1.18:** Rep. Geo. do Ex. 1.3.15: dois planos paralelos e um terceiro os intersecta estes segundo retas paralelas

**Exemplo 1.3.16.**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 4z = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

A terceira equação é anulada. Isolando  $z$  na segunda temos a equação:

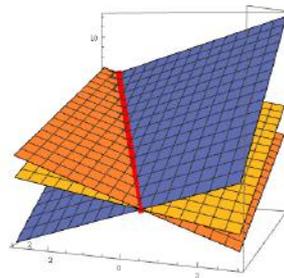
$$z = -1 - 3y$$

Substituindo o valor de  $z$  na primeira equação e isolando  $x$  temos:

$$x + y + (-1 - 3y) = 1 \implies x = 2 + 2y$$

Ou seja, temos duas equações com uma variável. O sistema é possível e indeterminado (SPI) com um grau de liberdade.

Geometricamente temos três planos distintos se interseccionando em uma única reta:  $(x, y, z) = (2, 0, -1) + y(2, 1, -3)$



**Figura 1.19:** Rep. Geo. do Ex. 1.3.16: três planos distintos se interseccionando em uma única reta

**Exemplo 1.3.17.**

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = \frac{-1}{2} \\ 0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A terceira equação é inconsistente, o que nos leva à um Sistema Impossível (SI). Fazendo as intersecções entre eq.1 e eq.2, eq.1 e eq.3, e eq.2 e eq.3 obtemos as equações das retas que são intersecção dos planos, dois a dois

$$-2x - y + 3 = -x - y + 1 \implies z = -y - 1 \implies x = 2$$

$$\text{reta}_1 : (x, y, z) = (2, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

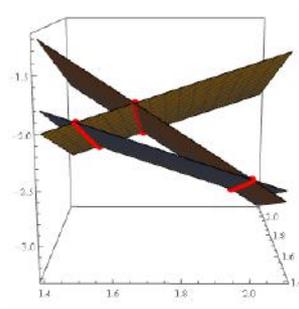
$$-2x - y + 3 = x - y - 2 \implies z = -y - \frac{1}{3} \implies x = \frac{5}{3}$$

$$\text{reta}_2 : (x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) + y(0, 1, -1)$$

$$-x - y + 1 = x - y - 2 \implies z = -y - \frac{1}{2} \implies x = \frac{3}{2}$$

$$\text{reta}_3 : (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) + y\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

Geometricamente temos três planos distintos interseccionando-se dois a dois em três retas paralelas.



**Figura 1.20:** Rep. Geo. do Ex. 1.3.17: três planos distintos se interseccionando em três retas paralelas

Com esses exemplos, abordamos todos os casos possíveis de soluções de sistemas com três variáveis. Para um estudo mais detalhado ver [28] e [4].

Agora iremos verificar um problema interessante onde temos um sistema com infinitas soluções, que porém, na prática, são finitas as soluções([6]).

**Exemplo 1.3.18.** Uma empresa possui três tipos de caminhão, (I), (II) e (III) que transportam três tipos de caixa, A, B e C de acordo com a tabela a seguir e sua matriz associada, T:

**Tabela 1.11:** Quantidade de caixas que cada caminhão transporta

	(I)	(II)	(III)
A	100	50	0
B	30	30	30
C	230	130	30

 $\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 100 & 50 & 0 \\ 30 & 30 & 30 \\ 230 & 130 & 30 \end{bmatrix}$ 

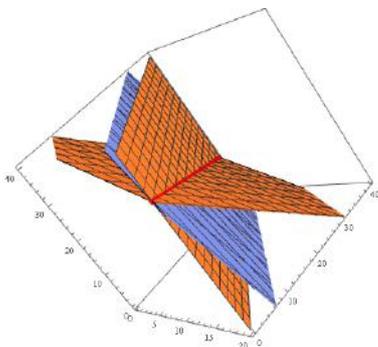
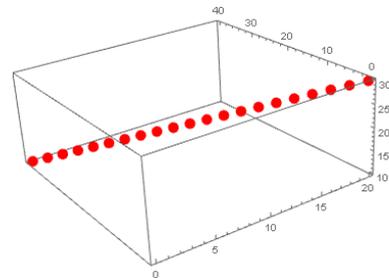
Queremos saber quantos caminhões do tipo (I), do tipo (II) e do tipo (III) são necessários para realizar o transporte de 2000 caixas do tipo A, 1500 caixas do tipo B e 5500 caixas do tipo C. Para isso chamemos a quantidade de caminhões do tipo (I) de  $x$ , a quantidade de caminhões do tipo (II) de  $y$ , e a quantidade de caminhões do tipo (III) de  $z$ . Assim teremos a igualdade de matrizes seguinte, equivalente ao sistema ao lado:

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 0 \\ 30 & 30 & 30 \\ 230 & 130 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 5500 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 100x + 50y & = 2000 \\ 30x + 30y + 30z & = 1500 \\ 230x + 130y + 30z & = 5500 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, anulamos uma das equações e vemos que ele é um sistema possível e indeterminado como o do exemplo 1.3.16.

A solução genérica desse sistema é dada por  $(x, y, z) = (t - 10, 60 - 2t, t)$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Porém, apesar de termos infinitas soluções, o problema nos restringe a soluções inteiras não negativas, o que nos fornece apenas 21 pontos da forma  $(x, y, z) = (t - 10, 60 - 2t, t)$  com  $t \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

As soluções do sistema e do problema podem ser representadas graficamente da seguinte forma:

**Figura 1.21:** Solução do Sistema**Figura 1.22:** Solução do Problema

## 1.4 Determinantes

Apesar dos sistemas de equações lineares e métodos de resolução já serem encontrados nos *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática* (texto de autor desconhecido datado provavelmente do século 111 a.C.) e algumas noções ligadas a determinantes já serem conhecidas na China, o conceito de determinantes apareceu formalmente pela primeira vez apenas em 1683 num trabalho do japonês Seki Kowa (1642-1708) que chegou à essa noção para o caso de duas equações estudando os trabalhos chineses. Já no Ocidente temos os estudos de determinantes por grandes nomes como Leibniz (1646-1716) e Cramer (1704-1752) ([4], [8]).

Os determinantes aparecem antes mesmo do conceito de matrizes, se relacionando aos sistemas de equações lineares e suas soluções, o que explica seu nome, já que ele serve para determinar se um sistema possui solução única (SPD).

Atualmente nas escolas, os determinantes são ensinados após os tópicos de matrizes sendo um número associado a uma matriz quadrada de acordo com algumas regras. A sua relação com sistemas lineares aparece depois com o teorema de Cramer (ou regra de Cramer, como aparece em alguns livros didáticos) que nos será útil para mostrar que o sistema associado à Matriz de Vandermonde possui sempre solução.

### 1.4.1 Definição de Determinante

Caso tenhamos uma matriz de ordem  $n$ , definimos o seu determinante da seguinte forma:

**Se  $n=1$ :**

O seu determinante é o próprio termo  $a_{11}$  da matriz. Ou seja:

$$A = [a_{11}] \quad \Rightarrow \quad \text{Det}(A) = a_{11}$$

**Exemplo 1.4.1.**

$$A = [-8] \quad \Rightarrow \quad \text{Det}(A) = -8$$

**Se  $n=2$ :**

O determinante é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Det}(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

**Exemplo 1.4.2.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Det}(A) = 2 \cdot 9 - 4 \cdot 3 = 18 - 12 = 6$$

Para definir o determinante num caso geral precisamos da definição de cofator:

**Definição 1.4.3** (Cofator). *O cofator de um elemento  $a_{ij}$  de uma matriz quadrada é o resultado do produto de  $(-1)^{i+j}$  pelo determinante  $D_{ij}$  obtido pela eliminação da linha e da coluna do elemento  $a_{ij}$ . Esse determinante  $D_{ij}$  é denominado **menor complementar**.*

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

**Exemplo 1.4.4.** Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ , vamos calcular alguns de seus cofatores a seguir:

i. Cofator do elemento  $a_{11}$ :

$$\text{cof}(a_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = 1 \cdot (0 - (-6)) = 6$$

ii. Cofator do elemento  $a_{21}$ :

$$\text{cof}(a_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \text{Det} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = (-1) \cdot (8 - 3) = -5$$

Agora temos os elementos para definir o caso onde a matriz possui ordem  $n \geq 2$ :

$$\text{Seja } A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ definimos :}$$

$$\text{Det}(A_{n \times n}) = a_{11} \cdot \text{cof}(a_{11}) + a_{21} \cdot \text{cof}(a_{21}) + a_{31} \cdot \text{cof}(a_{31}) + \dots + a_{n1} \cdot \text{cof}(a_{n1})$$

Ou seja, o determinante de uma matriz de ordem  $n \geq 2$  é a soma dos produtos dos elementos da primeira coluna pelos respectivos cofatores (repare que essa definição engloba o caso onde  $n = 2$ ).

**Teorema 1.4.5** (Teorema de Laplace). *O determinante de uma matriz  $A$ , de ordem ( $n \geq 2$ ), é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.*

$$\text{Det}(A_{n \times n}) = a_{i1} \cdot \text{cof}(a_{i1}) + a_{i2} \cdot \text{cof}(a_{i2}) + a_{i3} \cdot \text{cof}(a_{i3}) + \dots + a_{in} \cdot \text{cof}(a_{in}), \quad \text{para algum } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

A sua demonstração pode ser encontrada em [28].

## 1.4.2 Teorema de Cramer

Considerando  $S$  um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, associamos a esse sistema a matriz  $A$ , quadrada, determinada pelos coeficientes das equações de  $S$ .

**Exemplo 1.4.6.** Dada o sistema abaixo, temos ao seu lado sua matriz associada:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_1 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

**Teorema 1.4.7** (Teorema de Cramer). *Seja  $S$  um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas e sua matriz associada  $A$ , tal que  $\text{Det}(A) = D$ . Se  $D \neq 0$  então o sistema será possível e terá solução única  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , tal que*

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

em que  $D_i$  é o determinante da matriz obtida de  $A$  substituindo-se a  $i$ -ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

A demonstração deste teorema ([4] e [13]) segue como consequência do cálculo da matriz inversa, que por sua vez, só existe quando o determinante da matriz é diferente de 0.

Desta forma, o teorema de Cramer associa as soluções dos sistemas de equações lineares, às matrizes e aos determinantes, mostrando a importância do cálculo de determinantes para a resolução de sistemas lineares.

Computacionalmente, o teorema de Cramer é considerado ineficiente para se determinar as soluções de um sistema de equações lineares já que para uma matriz de ordem  $n$ , o número de operações realizadas é  $(n+1)(n!n-1)$ , que é maior que  $n^2n!$ . Exemplificando, num sistema com 10 equações, seriam necessárias mais de 360 mil operações, enquanto no método de escalonamento esse número seria menor que 14 mil [4].

## 1.5 Matriz de Vandermonde

Considerando os números  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , para  $n \geq 2$ , a matriz:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \dots & c_1^{n-2} & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \dots & c_2^{n-2} & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_n & \dots & c_n^{n-2} & c_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

é conhecida como **Matriz de Vandermonde**, em homenagem ao matemático francês Alexandre-Théophile Vandermonde que escreveu “Mémoire sur l’élimination” (1772), sobre fundamentos da teoria dos determinantes.

**Teorema 1.5.1.** *O Determinante da Matriz de Vandermonde é dado por*

$$\text{Det}(V) = \prod_{i < j} (c_j - c_i)$$

Essa notação nos diz que o determinante é dado pelo produto de todas as diferenças entre os números  $c_i$  e  $c_j$  tais que  $c_i$  está localizado abaixo de  $c_j$  na matriz de Vandermonde.

**Demonstração.** *Para realizar a demonstração são necessários algumas propriedades que assumiremos como verdadeiras ([28]):*

1. *Dada uma matriz  $A$ , o determinante da matriz transposta  $A^T$  é igual ao determinante de  $A$ ;*
2. *Somar um múltiplo de uma coluna (reciprocamente linha) em outra coluna (reciprocamente linha) não altera o determinante;*

3. Se todas as entradas de uma coluna (ou linha) forem multiplicadas por um fator  $k$ , então o determinante da matriz ficará multiplicado por este fator.

A demonstração do teorema segue o Princípio da Indução ([14]) sobre a ordem da matriz. Além disso, vamos provar o resultado para a matriz transposta  $V^T$  que, de acordo com a Propriedade 1., é igual ao determinante de  $V$ .

**Para  $n=2$  temos:**

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

E, pela definição de determinantes vista na seção 1.4 temos que

$$\text{Det}(V) = c_2 - c_1$$

Agora iremos supor que a afirmação seja válida para  $n = k$  e iremos provar que ela vale também para  $n = k + 1$ :

**Para  $n=k+1$  queremos calcular**

$$\text{Det}(V_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{k+1} \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^k & c_2^k & \cdots & c_{k+1}^k \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira coluna por  $-1$  e somando em todas as outras colunas, teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_2 - c_1 & \cdots & c_{k+1} - c_1 \\ c_1^2 & c_2^2 - c_1^2 & \cdots & c_{k+1}^2 - c_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^k & c_2^k - c_1^k & \cdots & c_{k+1}^k - c_1^k \end{vmatrix}$$

Agora, nosso objetivo é zerar todos os termos abaixo do 1. Para isso, a linha  $l$  será trocada pela linha  $l$  menos  $c_1$  vezes a linha  $l - 1$ , ou seja,  $l \leftarrow l - c_1(l - 1)$ , faremos isso para todas as linhas a partir da segunda e ficaremos com

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 - c_1 & \cdots & c_{k+1} - c_1 \\ 0 & c_2^2 - c_2 c_1 & \cdots & c_{k+1}^2 - c_{k+1} c_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2^k - c_2^{k-1} c_1 & \cdots & c_{k+1}^k - c_{k+1}^{k-1} c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 - c_1 & \cdots & c_{k+1} - c_1 \\ 0 & c_2(c_2 - c_1) & \cdots & c_{k+1}(c_{k+1} - c_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2^{k-1}(c_2 - c_1) & \cdots & c_{k+1}^{k-1}(c_{k+1} - c_1) \end{vmatrix}$$

Agora usamos a propriedade 3., podemos colocar os  $(c_i - c_1)$  em evidência, obtendo

$$(c_2 - c_1) \cdot (c_3 - c_1) \cdots (c_{k+1} - c_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & c_2 & \cdots & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2^{k-1} & \cdots & c_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}$$

Utilizando a definição de determinante por cofatores completamos a nossa demonstração pois

$$\text{Det}(V_{k+1}) = (c_2 - c_1) \cdot (c_3 - c_1) \cdots (c_{k+1} - c_1) \cdot (a_{11} \cdot \text{cof}(a_{11}) + a_{12} \cdot \text{cof}(a_{12}) + \cdots + a_{1n} \cdot \text{cof}(a_{1n}))$$

Ou seja,

$$\text{Det}(V_{k+1}) = (c_2 - c_1) \cdot (c_3 - c_1) \cdots (c_{k+1} - c_1) \cdot (1 \cdot \text{Det}(V_k) - 0 + 0 - \dots + 0) = \prod_{i < j} (c_j - c_i)$$

.

**Corolário 1.5.2.** Se  $c_i \neq c_j$  para todo  $i$  e  $j$ , então,  $\text{Det}(V) \neq 0$

**Demonstração.** Pelo teorema anterior vimos que

$$\text{Det}(V) = \prod_{i < j} (c_j - c_i)$$

Por outro lado, um produto só é 0 se pelo menos um de seus termos for nulo. Como  $c_i \neq c_j$  para todo  $i$  e  $j$  por hipótese, fica verificado.

## 1.6 Uma abordagem intuitiva de limites e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função

Para o cálculo do polinômio que modela a trajetória do aeromodelo usaremos a ideia de limite. Já a derivada nos auxiliará na concepção de retas tangentes, conceito que será abordado nas duas atividades propostas neste trabalho. Os conceitos trabalhados nessa seção não serão abordados de forma extensa, portanto são recomendadas as referências [19], [29] e [25] para maior aprofundamento no tema.

### 1.6.1 Limites

Naturalmente, como ocorreu na história, a noção intuitiva de limite de uma função deve proceder sua definição formal, e a “visualização” da ideia através de gráficos deve ser explorada.

Não é difícil argumentar, por exemplo, que para a função  $f(x) = 3x + 1$  quando  $x$  se aproxima do valor 3, por valores maiores ou menores que 3, a função se aproxima de 10. Um pouco menos direto é ver que, por exemplo, para  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ , quando  $x$  se aproxima de 2, o “limite” ou “tendência” de  $f(x)$  é 4, ou que para  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ , para  $x$  tendendo a zero, o “limite” é 1.

Deve ficar ao critério do professor do ensino médio, o quanto caminhar em direção ao conceito formal de limite e suas propriedades que resumimos a seguir. Como abordaremos apenas funções polinomiais nas atividades propostas, acreditamos que uma abordagem inicial mais intuitiva também será suficiente e uma motivação para um estudo mais aprofundado posteriormente.

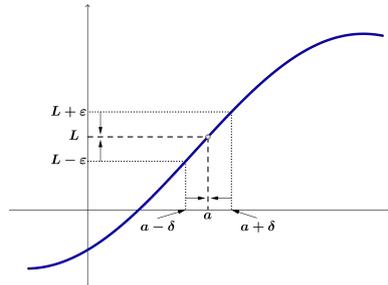
**Definição 1.6.1.** *Seja  $f(x)$  uma função definida em algum intervalo aberto que contenha  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ . Então dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é igual a  $L$ , e escrevemos*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

se, para todo número  $\varepsilon > 0$  houver um número  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } a - \delta < x < a + \delta, x \neq a \quad \text{então} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Isso significa que o valor da função quando chegamos próximo de  $a$  (tanto quanto quisermos) fica cada vez mais próximo de  $L$ . A figura 1.23 ilustra isso:



**Figura 1.23:** Definição de Limite

As funções que estudaremos são funções polinomiais que são contínuas, ou seja, o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  existe e é o próprio  $f(a)$  ([19], [29], [25]). Em outras palavras:

$$f \text{ contínua em } p \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (1.6.1)$$

As propriedades a seguir válidas para limites ([29]) são bastante intuitivas:

- i)  $\lim_{x \rightarrow a} k = k$  (O limite de uma constante é a própria constante)
- ii)  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$
- iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = N$ , então:

- iv)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = M + N = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- v)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = M - N = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- vi)  $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = kM = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = M \cdot N = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{M}{N} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ desde que } N \neq 0$$

$$\text{Exemplo 1.6.2. } \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 30) = \lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 30 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 30 = 5 \cdot 2^3 - 30 = 10$$

Também podemos ter casos onde a função cresce ou decresce infinitamente quando fazemos  $x$  tender a algum ponto específico. Assim é necessária a definição de limite infinito:

**Definição 1.6.3.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ . Então dizemos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

*se e somente se, para todo número positivo  $M$  existe um número positivo  $\delta$  tal que*

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então } f(x) > M$$

**Definição 1.6.4.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ . Então dizemos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

*se e somente se, para todo número positivo  $M$  existe um número positivo  $\delta$  tal que*

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então } f(x) < -M$$

**Exemplo 1.6.5.** *Vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$*

*Seja  $M$  um número positivo dado. Queremos encontrar um número  $\delta$  tal que*

$$\text{se } 0 < |x| < \delta \quad \text{então } \frac{1}{x^2} > M$$

*Mas*

$$\frac{1}{x^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

*Assim escolhemos  $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$  e se  $0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ , então  $\frac{1}{x^2} > M$ . Isto mostra que*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Por fim, ainda é necessário definir os limites quando os valores de  $x$  crescem infinitamente ou decrescem infinitamente, ou seja,  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ , respectivamente.

**Definição 1.6.6.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(a, \infty)$ . Então, dizer que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

*significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número correspondente  $N$  tal que*

$$\text{se } x > N \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

**Definição 1.6.7.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(-\infty, a)$ . Então dizer que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

*significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número correspondente  $N$  tal que*

$$\text{se } x < N \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

O último caso é quando temos um limite infinito no infinito:

**Definição 1.6.8.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(a, \infty)$ . Então dizer que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

*significa que para todo número positivo  $M$  existe um número positivo correspondente  $N$  tal que*

$$\text{se } x > N \quad \text{então} \quad f(x) > M$$

**Definição 1.6.9.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(a, \infty)$ . Então dizer que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

*significa que para todo número negativo  $M$  existe um número positivo correspondente  $N$  tal que*

$$\text{se } x > N \quad \text{então} \quad f(x) < M$$

**Definição 1.6.10.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(-\infty, a)$ . Então dizer que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

*significa que para todo número positivo  $M$  existe um número negativo correspondente  $N$  tal que*

$$\text{se } x < N \quad \text{então} \quad f(x) > M$$

**Definição 1.6.11.** *Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(-\infty, a)$ . Então dizer que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

*significa que para todo número negativo  $M$  existe um número negativo correspondente  $N$  tal que*

$$\text{se } x < N \quad \text{então } f(x) < M$$

**Exemplo 1.6.12.** *Seja  $f(x) = x^2$ , temos que:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

*De fato, dado  $M$ , tomamos  $N = \sqrt{M}$ , assim temos  $x > N \Rightarrow x^2 > N^2 = M$ .  
E também que:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

*Dado  $M$ , tomamos  $N = \sqrt{M}$ , assim temos  $x < -N \Rightarrow x^2 > N^2 = M$ .*

**Exemplo 1.6.13.** *Seja  $f(x) = x^3$ , temos que:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

*De fato, dado  $M$ , tomamos  $N = \sqrt[3]{M}$ , assim temos  $x > N \Rightarrow x^3 > N^3 = M$ .  
E também que:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

*Dado  $M$ , tomamos  $N = \sqrt[3]{M}$ , assim temos  $x < -N \Rightarrow x^3 < -N^3 = -M$ .*

No caso geral, **para  $a > 0$**  temos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \infty$ , se  $n$  for par.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = \infty$ , se  $n$  for par.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = -\infty$ , se  $n$  for ímpar.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = -\infty$ , se  $n$  for ímpar.

E **para  $a < 0$**  temos:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = -\infty$ , se  $n$  for par.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = -\infty$ , se  $n$  for par.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \infty$ , se  $n$  for ímpar.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = \infty$ , se  $n$  for ímpar.

**Teorema 1.6.14.** *Seja a função polinomial  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ . Então:*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

*Ou seja, o limite quando  $x \rightarrow -\infty$  ou quando  $x \rightarrow +\infty$  só depende do termo de maior grau.*

**Demonstração.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) &= \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right). \end{aligned}$$

*Mas:*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{a_{n-1}}{x} \right) = \dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{a_2}{x^{n-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{a_1}{x^{n-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{a_0}{x^n} \right) = 0.$$

*Logo,*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

Com esses resultados, podemos avaliar como uma função polinomial se comporta quando o valor de  $x$  tende a infinito ou menos infinito.

## 1.6.2 Tangentes e Derivadas

Vamos agora usar limites para analisar retas tangentes ao gráfico de uma função  $y = f(x)$  em um ponto dado  $P = (a, f(a))$ . Consideramos um ponto próximo,  $Q = (x, f(x))$ , onde  $x \neq a$ . A inclinação da reta secante  $\overline{PQ}$  é dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Agora fazemos o ponto  $Q$  se aproximar de  $P$  ao longo do gráfico de  $f$ , ao obrigar  $x \rightarrow a$ . Se  $m_{PQ}$  tender a um número  $m$ , então definimos a *reta tangente*  $t$  como a reta que passa por  $P$  e tem inclinação  $m$ .

**Definição 1.6.15.** *A **reta tangente** à curva  $y = f(x)$  em um ponto  $P = (a, f(a))$  é a reta passando por  $P$  com inclinação*

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (1.6.2)$$

*desde que esse limite exista.*

A definição da inclinação da reta tangente é justamente a definição de derivada da função  $f$  em um ponto  $a$ . Que também pode ser vista da seguinte forma:

**Definição 1.6.16.** *A **derivada de uma função  $f$  em um número  $a$** , denotada por  $f'(a)$ , é*

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (1.6.3)$$

*se o limite existir.*

**Exemplo 1.6.17.** Seja  $f(x) = c$  uma função constante, vamos calcular sua derivada pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Portanto, a derivada de uma função constante é igual a zero.

**Exemplo 1.6.18.** Seja  $f(x) = cx$ , vamos calcular sua derivada pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - cx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch}{h} = c$$

Portanto, a derivada da função  $f(x) = cx$  é igual a  $c$ .

**Exemplo 1.6.19.** Seja  $f(x) = x^n$ , vamos calcular sua derivada pela definição, usando o fato de que  $x^n + a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \dots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função  $f(x) = x^n$  é igual a  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

Essa regra é conhecida como regra do tombo, já que o expoente parece “cair” multiplicando, e no novo expoente temos o antigo menos uma unidade.

O nosso interesse é em calcular derivadas de funções polinomiais. Para isso, seguem-se algumas propriedades.

Se  $f$  e  $g$  forem deriváveis em  $a$  e seja  $k$  uma constante. Então as funções  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $kf$ ,  $f \cdot g$  e  $\frac{f}{g}$  (neste último caso, se  $g(a) \neq 0$ ) são deriváveis<sup>1</sup> em  $a$  e têm-se:

i)  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii)  $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

iii)  $(kf)'(a) = kf'(a)$

iv)  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

---

<sup>1</sup>Dizemos que uma função é derivável em  $a$ , quando existe a derivada em  $a$

$$v) \left( \frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Com essas propriedades e com a definição, podemos mostrar que, dado um polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

sua derivada é dada por:

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \quad (1.6.4)$$

**Exemplo 1.6.20.** Seja  $P(x) = ax + b$  calculando  $P'(x)$  temos:

$$P'(x) = (ax)' + (b)' = a$$

**Exemplo 1.6.21.** Seja  $P(x) = ax^2 + bx + c$  calculando  $P'(x)$  temos:

$$P'(x) = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = 2ax + b$$

**Exemplo 1.6.22.** Seja  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  calculando  $P'(x)$  temos:

$$P'(x) = (ax^3)' + (bx^2)' + (cx)' + (d)' = 3ax^2 + 2bx + c$$

**Exemplo 1.6.23.** Seja  $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  calculando  $P'(x)$  temos:

$$P'(x) = (ax^4)' + (bx^3)' + (cx^2)' + (dx)' + (e)' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Voltando à ideia de que a derivada é a inclinação da reta tangente à função no ponto  $a$  calculado, podemos tirar mais uma propriedade disto, sempre que tivermos  $f'(a) = 0$  significa que a reta tangente é paralela ao eixo  $x$ , e chamamos  $a$  de **ponto crítico**. Neste caso, se  $f(a) \geq f(x)$  quando  $x$  está próximo de  $a$ , chamamos  $f(a)$  de **máximo local** da função. Por outro lado, se  $f(a) \leq f(x)$  quando  $x$  está próximo de  $a$ , chamamos  $f(a)$  de **mínimo local** da função. O sinal da derivada fornece informações sobre o gráfico da função ([29], [25]). Se  $f'(x) > 0$  em um intervalo  $[a, b]$ , a função  $f$  é **crenascente** neste intervalo. De forma análoga, se  $f'(x) < 0$  em um intervalo  $[a, b]$ , a função  $f$  é **decrenascente** neste. Como consequência, num ponto de máximo ou de mínimo local, a derivada se anula.

Assim como a derivada nos fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um determinado ponto, derivando a função novamente num intervalo  $I$  que contém aquele ponto, temos mais uma informação: a concavidade da função.



Figura 1.24: Concavidade voltada para cima

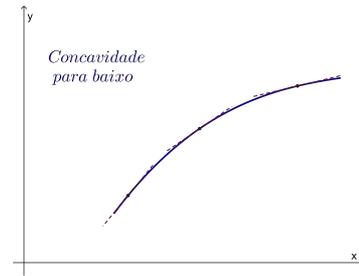


Figura 1.25: Concavidade voltada para baixo

Explicitamos isto com as seguintes propriedades:

- Prop. 1. Se  $P''(x) > 0$  para todo  $x$  num intervalo  $I$ , então essa função tem concavidade voltada para cima nesse intervalo.
- Prop. 2. Se  $P''(x) < 0$  para todo  $x$  num intervalo  $I$ , então essa função é côncava para baixo nesse intervalo.

**Exemplo 1.6.24.** Seja a função  $f(x) = x^3 - x$

Temos que suas raízes são  $-1, 0$  e  $1$

E, derivando temos  $f'(x) = 3x^2 - 1$

Se igualarmos a derivada a 0 teremos os pontos críticos da função  $f$ , ou seja:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \in \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Portanto temos uma função com três raízes e dois pontos críticos. A função  $f$  é crescente até  $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$  onde sua derivada é 0, depois passa a decrescer até  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  onde, novamente, sua derivada se anula, e logo após passa a ser crescente novamente. Veja a figura:

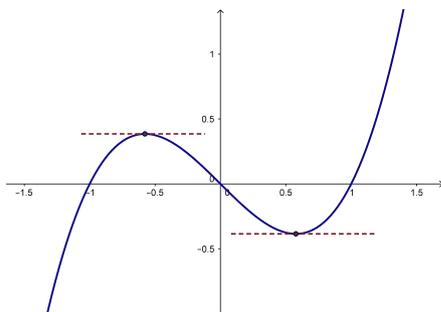


Figura 1.26: Gráfico da função  $f(x) = x^3 - x$

Nota-se que as informações retiradas da função ajudam a definir como será seu gráfico pois suas raízes são  $\{-1, 0, 1\}$ , e, além disso,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Isso, junto com as informações das derivadas, determinam o seu máximo local  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$  e mínimo local  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ . Usando a derivada segunda podemos ver também que  $(0, 0)$  é um ponto de inflexão.

**Exemplo 1.6.25.** Seja a função  $f(x) = x^2 - 2x - 8$

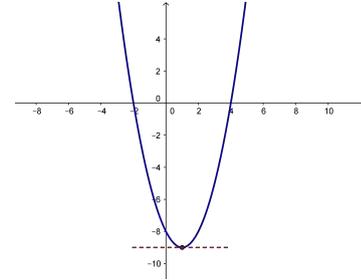
Temos que suas raízes são  $-2$  e  $4$

E, derivando temos  $f'(x) = 2x - 2$ . Derivada essa que igualamos a 0 e obtemos os pontos críticos da função  $f$ , ou seja:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Portanto temos uma função com duas raízes e um ponto crítico. A função  $f$  é decrescente até  $x = 1$  onde sua derivada é 0, depois passa a ser crescente. Veja a figura:

Novamente, nota-se que as informações retiradas da função ajudam a definir como será seu gráfico pois suas raízes são  $-2, 4$ , e, além disso  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ . Isso, junto com as informações das derivadas, determinam o seu mínimo local  $(1, -9)$



**Figura 1.27:** Gráfico da função  $f(x) = x^2 - 2x - 8$

# Capítulo 2

## Polinômios

Este capítulo dedica-se a uma revisão um pouco mais embasada de conceitos relacionados a polinômios que serão fundamentais na abordagem feita no Capítulo 3, onde são propostas as atividades de modelagem desta dissertação. Apenas serão ressaltados os pontos relevantes ao desenvolvimento das atividades. Naturalmente são muitas as referências sobre este tópico com abordagem mais ampla que podem ser usadas pelo professor. Citamos as referências [18], [13] e [21] utilizadas nesta redação.

### 2.1 Polinômio

Dada a sequência de números reais  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  consideremos a função  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

A função  $P$  é denominada **função polinomial** ou **polinômio** associado à sequência dada. Se  $a_n \neq 0$  dizemos que  $P$  tem **grau**  $n$  e indicamos por  $gr(P) = n$ . Os números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  são denominados **coeficientes**, o número  $a_n$  é chamado **coeficiente dominante**, e as parcelas  $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$  são chamadas **termos** do polinômio  $P$ .

#### 2.1.1 Valor Numérico

Obtemos o valor numérico de um polinômio  $P(x)$  para um número  $x = k$  quando substituímos a variável  $x$  pelo número  $k$  e efetuamos as operações indicadas. Simbolizamos este valor numérico por  $P(k)$ . Se  $P(k) = 0$ , dizemos que  $k$  é **raiz** do polinômio  $P$ .

**Exemplo 2.1.1.** *Seja  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$*

*Para  $x = 1$  temos:*

$$P(1) = (1)^3 - 3 \cdot (1)^2 - 10 \cdot (1) + 24 = 12$$

*Logo, o valor numérico de  $P$  para  $x = 1$  é 12, ou seja,  $P(1) = 12$*

Ainda com  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$   
 Para  $x = 2$  temos:

$$P(2) = (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 10 \cdot (2) + 24 = 0$$

Logo, o valor numérico de  $P$  para  $x = 2$  é 0, ou seja,  $P(2) = 0$ . Neste caso, dizemos que **2 é raiz de  $P$** .

## 2.1.2 Igualdade de Polinômios

Dados os polinômios

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad e \\ Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Temos:

$$P(x) = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Ou seja, dois polinômios  $P$  e  $Q$  são iguais se, e somente se, tiverem o mesmo grau e os coeficientes de termos correspondentes forem iguais.

## 2.2 Operações com Polinômios

### 2.2.1 Adição

Dados dois polinômios de grau menor ou igual a  $n$ :

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad e \\ Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^n b_i x^i \end{aligned}$$

Chamamos de **soma** de  $P$  com  $Q$  o polinômio

$$(P + Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Ou seja

$$(P + Q)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i$$

**Exemplo 2.2.1.** Seja  $P(x) = x^2 + 5x - 12$  e  $Q(x) = 3x^2 + 2x + 7$   
 A soma  $P + Q$  é dada por

$$(P + Q)(x) = (1 + 3)x^2 + (5 + 2)x + (-12 + 7) = 4x^2 + 7x - 5$$

Observamos que os polinômios a serem somados não precisam ser do mesmo grau:

**Exemplo 2.2.2.** Seja  $P(x) = x^2 + 3x + 4$  e  $Q(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

Temos então:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0x^4 + 0x^3 + x^2 + 3x + 4 \\ Q(x) &= x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 5 \end{aligned}$$

A soma  $P + Q$  é dada por

$$(P + Q)(x) = (0 + 1)x^4 + (0 + 0)x^3 + (1 + 3)x^2 + (3 + 0)x + (4 + 5) = x^4 + 4x^2 + 3x + 9$$

## 2.2.2 Subtração

Dados dois polinômios

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad e \\ Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^n b_i x^i \end{aligned}$$

A **diferença** de  $P$  com  $Q$  é definida como

$$(P - Q)(x) = (a_n + (-b_n))x^n + (a_{n-1} + (-b_{n-1}))x^{n-1} + \dots + (a_2 + (-b_2))x^2 + (a_1 + (-b_1))x + (a_0 + (-b_0))$$

Ou seja

$$(P - Q)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) x^i$$

**Exemplo 2.2.3.** Seja  $P(x) = x^2 + 5x - 12$  e  $Q(x) = 3x^2 + 2x + 7$

A diferença  $P - Q$  é dada por

$$(P - Q)(x) = (1 + (-3))x^2 + (5 + (-2))x + (-12 + (-7)) = -2x^2 + 3x - 19$$

## 2.2.3 Multiplicação

Dados dois polinômios

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad e \\ Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^n b_i x^i \end{aligned}$$

O **produto** entre  $P$  e  $Q$  é dado multiplicando-se cada termo de  $P$  por todos os termos de  $Q$ , ou seja

$$(PQ)(x) = c_{m+n} x^{m+n} + c_{m+n-1} x^{m+n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0, \text{ onde}$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

**Exemplo 2.2.4.** Seja  $P(x) = x^2 + 3x + 4$  e  $Q(x) = x^4 + 3x^2 + 5$   
O produto  $PQ$  é dado por:

$$\begin{aligned}(PQ)(x) &= (x^2 + 3x + 4)(x^4 + 3x^2 + 5) \\ &= x^2(x^4 + 3x^2 + 5) + 3x(x^4 + 3x^2 + 5) + 4(x^4 + 3x^2 + 5) \\ &= (x^6 + 3x^4 + 5x^2) + (3x^5 + 9x^3 + 15x) + (4x^4 + 12x^2 + 20) \\ &= x^6 + 3x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 15x + 20\end{aligned}$$

Esse produto também pode ser feito de forma prática se utilizarmos uma tabela onde, na primeira linha, colocamos os termos do polinômio  $P$  e, na primeira coluna, os termos do polinômio  $Q$  depois vamos preenchendo os espaços pelos produtos dos termos que estão nas linhas com os termos que estão nas colunas:

**Tabela 2.1:** Produto dos polinômios  $P$  e  $Q$

	$x^2$	$3x$	$4$
$x^4$	$x^6$	$3x^5$	$4x^4$
$3x^2$	$3x^4$	$9x^3$	$12x^2$
$5$	$5x^2$	$15x$	$20$

Agora basta somar os termos de mesmo expoente, o que nos leva à mesma resposta:

$$(PQ)(x) = x^6 + 3x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 15x + 20$$

## 2.2.4 Divisão

Dados dois polinômios  $A$  (dividendo) e  $B \neq 0$  (divisor), dividir  $A$  por  $B$  é determinar dois outros polinômios  $Q$  (quociente) e  $R$  (resto) de modo que se verifiquem as seguintes condições:

- I.  $A = B \cdot Q + R$
- II.  $gr(R) < gr(B)$  (ou  $R = 0$ , caso em que a divisão é chamada exata)

Como pode ser visto em [12], os polinômios  $Q$  e  $R$  existem e são únicos. Agora veremos como determiná-los utilizando o método da chave.

O processo é equivalente ao da divisão de números inteiros, por exemplo, quando queremos dividir 59 por 4:

$$\begin{array}{r} 59 \quad | \quad 4 \\ -4 \quad | \quad 14 \\ \hline 19 \\ -16 \\ \hline 3 \end{array}$$

Temos que a divisão de 59 por 4 tem quociente 14 e resto 3, ou seja  $59 = 4 \cdot 14 + 3$

Com os polinômios a ideia será exatamente esta. Colocamos o polinômio divisor na chave (com os expoentes de ordem maior antes dos de ordem menor) e, cada termo do dividendo funciona no papel das centenas, dezenas e unidades, etc. Vamos ver um exemplo:

**Exemplo 2.2.5.** Vamos dividir  $A(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$  por  $B(x) = x - 3$ .  
Primeiro colocamos os polinômios em ordem, do maior expoente para o menor.

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 \end{array} \right.$$

Em seguida, começamos dividindo o termo mais à esquerda. Devemos encontrar um polinômio que, multiplicado por  $x$ , resulte em  $x^3$ . Fazemos  $\frac{x^3}{x} = x^2$ , portanto  $x^2$  será o valor que irá embaixo da chave e devemos efetuar o produto  $x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2$ . Esse valor será subtraído do nosso dividendo.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 \end{array} \right. \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline 5x^2 - 5x + 1 \end{array}$$

Agora repetimos o processo procurando um polinômio que, multiplicado por  $x$ , resulte em  $5x^2$ . Fazemos  $\frac{5x^2}{x} = 5x$ , portanto  $5x$  será o valor que irá embaixo da chave ao lado de  $x^2$  e devemos efetuar o produto  $5x(x - 3) = 5x^2 - 15x$ . Esse valor será subtraído do nosso dividendo.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 + 5x \end{array} \right. \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline 5x^2 - 5x + 1 \\ -5x^2 + 15x \\ \hline 10x + 1 \end{array}$$

O grau do resto ainda não é menor que o grau do divisor, portanto devemos repetir o processo mais uma vez. Procuramos um polinômio que, multiplicado por  $x$ , resulte em  $10x$ . Fazemos  $\frac{10x}{x} = 10$ , portanto  $10$  será o valor que irá embaixo da chave ao lado de  $5x$  e devemos efetuar o produto  $10(x - 3) = 10x - 30$ . Esse valor será subtraído do nosso dividendo.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 + 5x + 10 \end{array} \right. \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline 5x^2 - 5x + 1 \\ -5x^2 + 15x \\ \hline 10x + 1 \\ -10x + 30 \\ \hline 31 \end{array}$$

Agora o grau do resto é menor que o grau do divisor, o que indica que nossa divisão acabou. Nosso quociente é  $Q(x) = x^2 + 5x + 10$  e o resto é  $R(x) = 31$ . E assim temos:

$$A(x) = B(x) \cdot (x^2 + 5x + 10) + 31$$

Com este exemplo, completamos as quatro operações e agora iremos abordar alguns teoremas importantes para o desenvolvimento do trabalho.

## 2.3 Teorema do Resto e Teorema de D'Alembert

**Teorema 2.3.1** (Teorema do Resto). *O resto da divisão de um polinômio  $P$  por  $x - a$  é igual ao valor numérico de  $P$  em  $a$ .*

**Demonstração.** *De acordo com a definição de divisão, temos que:*

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R(x),$$

onde  $Q(x)$  e  $R(x)$  são, respectivamente, o quociente e o resto. Como  $x - a$  tem grau 1, o resto  $R(x)$  ou é nulo, ou tem grau igual a zero. Em ambos os casos  $R(x)$  é um polinômio constante. Calculemos os valores dos polinômios a partir da igualdade acima em  $x = a$ :

$$P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R(a) \quad \Rightarrow \quad P(a) = R(a)$$

Mas  $R(x)$  é constante para todo  $x$  (inclusive para  $x = a$ ), então, o resto é igual a  $P(a)$ , o que completa nossa demonstração.

**Teorema 2.3.2** (Teorema de D'Alembert). *Um polinômio  $P$  é divisível por  $x - a$  se, e somente se,  $a$  é raiz de  $P$ .*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) *Se  $P$  é divisível por  $x - a$  temos:*

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - a)$$

Fazendo  $x = a$ , temos que  $P(a) = Q(a) \cdot (a - a) = 0$  Logo  $a$  é raiz.

Por outro lado, se  $a$  é raiz de  $P$ , ou seja,  $P(a) = 0$ , pelo Teorema do Resto temos que  $R(x) = 0$  o que, na definição de divisão nos dá

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R(x) = Q(x) \cdot (x - a) + 0$$

Portanto,  $P$  é divisível por  $x - a$ , o que completa a demonstração.

## 2.4 Equações Polinomiais

**Definição 2.4.1.** *Uma equação polinomial com coeficientes reais é uma equação da forma  $P(x) = 0$ , em que:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

*é um polinômio de grau  $n$ , sendo  $n \geq 1$  e cuja incógnita  $x$  pode assumir um valor qualquer em  $\mathbb{C}$ , onde  $\mathbb{C}$  é o conjunto dos números complexos.*

**Exemplo 2.4.2.** *São equações polinomiais os seguintes exemplos:*

i)  $2x + 3 = 0$

ii)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

iii)  $x^6 - 2 = 0$

$$iv) -3x^4 + 6x^3 - 9x^2 + x - 15 = 0$$

Nas equações polinomiais procuramos encontrar suas *raízes*, ou seja, determinar os valores que, substituídos na equação, a tornam verdadeira.

**Teorema 2.4.3** (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio  $P$  de grau  $n \geq 1$  admite ao menos uma raiz complexa.*

Para uma demonstração deste teorema ver [16]

**Teorema 2.4.4** (Teorema da Decomposição). *Todo polinômio  $P$  de grau  $n \geq 1$*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad \text{com} \quad a_n \neq 0$$

*pode ser decomposto em  $n$  fatores do primeiro grau, isto é:*

$$P(x) = a_n (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$$

*em que  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  são as raízes de  $P$ , complexas ou não. Com exceção da ordem dos fatores, essa decomposição é única.*

**Demonstração.** 1<sup>o</sup>) **Existência:**

- a) Sendo  $P$  um polinômio de grau  $n \geq 1$ , podemos aplicar o Teorema 2.4.3 e  $P$  tem ao menos uma raiz  $r_1$ . Assim,  $P(r_1) = 0$  e, de acordo com o Teorema 2.3.2,  $P$  é divisível por  $x - r_1$ :

$$P(x) = (x - r_1) \cdot Q_1(x) \quad (2.4.1)$$

em que  $Q_1$  é um polinômio de grau  $n - 1$  e coeficiente dominante  $a_n$ . Se  $n = 1$ , então  $n - 1 = 0$  e  $Q_1$  é um polinômio constante; portanto,  $Q_1(x) = a_n$  e  $P(x) = a_n \cdot (x - r_1)$ .

- b) Se  $n \geq 2$  então  $n - 1 \geq 1$  e o Teorema 2.4.3 é aplicável ao polinômio  $Q_1$ , ou seja,  $Q_1$  tem ao menos uma raiz  $r_2$ . Assim,  $Q_1(r_2) = 0$  e  $Q_1$  é divisível por  $x - r_2$ :

$$Q_1(x) = (x - r_2) \cdot Q_2(x) \quad (2.4.2)$$

Substituindo 2.4.2 em 2.4.1 temos:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot Q_2(x)$$

em que  $Q_2$  é um polinômio de grau  $n - 2$  e coeficiente dominante  $a_n$ . Se  $n = 2$ , ou seja,  $n - 2 = 0$ , então  $Q_2(x) = a_n$  e

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

- c) Após  $n$  aplicações sucessivas do Teorema 2.4.3 chegamos na igualdade:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n) \cdot Q_n$$

em que  $Q_n$  tem grau  $n - n = 0$  e coeficiente dominante  $a_n$ ; portanto,  $Q_n(x) = a_n$  e

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$$

2º) **Unicidade:** Vamos supor que  $P$  admita duas decomposições:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdots (x - r_n) \\ P(x) &= a'_m \cdot (x - r'_1) \cdot (x - r'_2) \cdot (x - r'_3) \cdots (x - r'_m) \end{aligned}$$

Supondo reduzidos e ordenados os dois segundos membros, temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_n S_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_n S_0 \\ P(x) &= a'_m x^m + a'_m S_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a'_m S_0, \end{aligned}$$

onde  $S_i$  é a soma dos coeficientes dos termos de grau  $i$ .

Mas pela definição de igualdade de polinômios temos, obrigatoriamente:

$$n = m \quad e \quad a_n = a'_m$$

Assim, ficamos com a igualdade:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdots (x - r_n) = (x - r'_1) \cdot (x - r'_2) \cdot (x - r'_3) \cdots (x - r'_m) \quad (2.4.3)$$

Atribuindo a  $x$  o valor de  $r_1$ , temos:

$$0 = (r_1 - r'_1) \cdot (r_1 - r'_2) \cdot (r_1 - r'_3) \cdots (r_1 - r'_m)$$

e, se o produto é nulo, um dos fatores  $r_1 - r'_i$  é nulo; sem perda de generalidade, podemos colocar  $r_1 - r'_1$ . A igualdade 2.4.3 se transforma em:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdots (x - r_n) = (x - r_1) \cdot (x - r'_2) \cdot (x - r'_3) \cdots (x - r'_m)$$

e, dividindo ambos os membros por  $x - r_1$ :

$$(x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdots (x - r_n) = (x - r'_2) \cdot (x - r'_3) \cdots (x - r'_m)$$

Repetindo-se o processo realizado com  $x = r_1$  para os demais, teremos  $r_j = r'_j$  para todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

As igualdades  $m = n$ ,  $a'_m = a_n$ ,  $r'_1 = r_1$ ,  $r'_2 = r_2$ ,  $r'_3 = r_3, \dots, r'_n = r_n$  são a prova da unicidade da decomposição, o que conclui nossa demonstração.

Os teoremas 2.4.3 e 2.4.4 juntos nos dizem que toda equação polinomial de grau  $n \geq 1$  admite exatamente  $n$  raízes complexas. Além disso, os teoremas 2.3.1, 2.3.2, 2.4.3 e 2.4.4 podem auxiliar a determinar as raízes de um polinômio através da fatoração em polinômios de grau menor. Pelo teorema 2.4.3 sabemos que  $P$  possui  $n$  raízes, já os teoremas 2.3.1 e 2.3.2 nos dizem que, substituindo  $x$  em  $P$  por um valor  $a$  de tal forma que  $P(a) = 0$ , podemos dividir o polinômio  $P$  por  $x - a$  obtendo um polinômio  $P_1$  onde  $gr(P) > gr(P_1)$ , assim, vamos obtendo polinômios de grau menor, até encontrarmos as  $n$  raízes, onde finalmente podemos escrever o polinômio na sua forma fatorada utilizando o teorema 2.4.4. Para isto temos que partir de valores que são raízes em cada estágio, o que de modo geral é difícil<sup>1</sup>.

Um resultado que pode ser útil na fatoração de polinômios é o teorema das raízes racionais ([12]) que diz que, se uma equação polinomial  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional  $\frac{p}{q}$ , em que  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+^*$  e  $p$  e  $q$  são primos entre si, então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .

Vejamos um exemplo de fatoração:

<sup>1</sup>Só existem fórmulas de determinação explícitas de raízes para polinômios de grau até 4.

**Exemplo 2.4.5.** *Seja o polinômio*

$$P(x) = 2x^4 - 30x^2 - 20x + 48$$

*Queremos determinar suas raízes e escrevê-lo na sua forma fatorada. Observamos inicialmente que  $x = 1$  é uma raiz do polinômio:*

$$P(1) = 2(1)^4 - 30(1)^2 - 20(1) + 48 = 0$$

*Portanto podemos dividir  $P$  por  $x - 1$ :*

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 30x^2 - 20x + 48 & x - 1 \\ -2x^4 + 2x^3 & 2x^3 + 2x^2 - 28x - 48 \\ \hline +2x^3 - 30x^2 - 20x + 48 & \\ -2x^3 + 2x^2 & \\ \hline -28x^2 - 20x + 48 & \\ +28x^2 - 28x & \\ \hline -48x + 48 & \\ +48x - 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

*Assim, temos:*

$$P(x) = (x - 1) \cdot P_1(x)$$

*Onde*

$$P_1(x) = 2x^3 + 2x^2 - 28x - 48$$

*Agora repetimos o processo com  $P_1(x)$ . Fazendo  $x = -2$ , obtemos:*

$$P_1(-2) = 2(-2)^3 + 2(-2)^2 - 28(-2) - 48 = 0$$

*Portanto  $-2$  é raiz de  $P_1$  e podemos dividir  $P_1$  por  $x + 2$ :*

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 2x^2 - 28x - 48 & x + 2 \\ -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 2x - 24 \\ \hline -2x^2 - 28x - 48 & \\ +2x^2 + 4x & \\ \hline -24x - 48 & \\ +24x + 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

*Assim, temos:*

$$P_1(x) = (x + 2) \cdot P_2(x)$$

*Onde*

$$P_2(x) = 2x^2 - 2x - 24$$

*Repetimos o processo com  $P_2$ . Fazendo  $x = -3$ , obtemos:*

$$P_2(-3) = 2(-3)^2 - 2(-3) - 24 = 0$$

*Portanto  $-3$  é raiz de  $P_2$  e podemos dividir  $P_2$  por  $x + 3$  (note que não é mais necessário realizar este processo pois já chegamos em um polinômio de grau 2 cujas raízes podem ser*



$$A = \begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^2 & x_{n+1} & 1. \end{bmatrix}$$

Pelo teorema 1.5.1, seu determinante é diferente de zero. Logo, pelo teorema 1.4.7, o sistema possui solução única.

Os coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  são determinados, portanto, encontrando-se a solução do sistema acima.

**Exemplo 2.5.2.** Dados três pontos,  $A = (3, 2)$ ,  $B = (4, 0)$  e  $C = (6, 2)$ , vamos determinar o polinômio  $P_1$  de grau menor ou igual a 2 que passa por estes pontos.

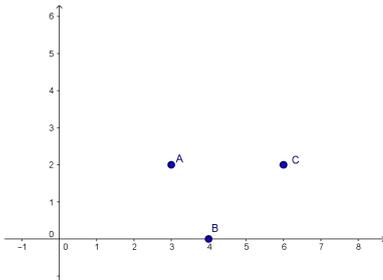
Se  $P_1$  tem grau menor ou igual a 2, então ele é da forma  $P_1(x) = ax^2 + bx + c$

Substituindo os pontos na equação acima temos o sistema:

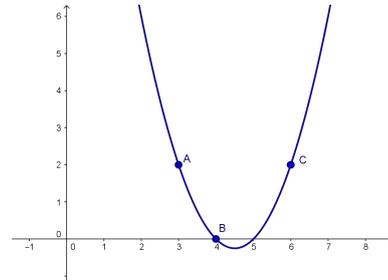
$$\begin{cases} 3^2a+3b+c=2 \\ 4^2a+4b+c=0 \\ 6^2a+6b+c=2 \end{cases} \implies \begin{cases} 9a+3b+c=2 \\ 16a+4b+c=0 \\ 36a+6b+c=2 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos  $(a, b, c) = (1, -9, 20)$ . Logo o polinômio  $P_1$  é dado por:

$$P_1(x) = x^2 - 9x + 20$$



**Figura 2.1:** Pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$



**Figura 2.2:** Polinômio  $P_1(x)$

No exemplo, tomamos três pontos e determinamos um polinômio de grau 2. Mas o teorema 2.5.1 nos diz que existe um polinômio de grau até  $n$ , ou seja, pode haver casos em que encontraremos um polinômio de grau menor.

Pelo teorema 1.4.7, sabemos que os coeficientes do polinômio serão determinados pela razão de dois determinantes ( $\alpha_i = \frac{D_i}{D}$ ). Como queremos determinar um polinômio de grau  $n$ , ele terá  $n + 1$  coeficientes ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ ). Portanto, podemos escrever o polinômio  $P$  da forma:

$$P(x) = \left(\frac{D_1}{D}\right)x^n + \left(\frac{D_2}{D}\right)x^{n-1} + \cdots + \left(\frac{D_{n-1}}{D}\right)x^2 + \left(\frac{D_n}{D}\right)x + \left(\frac{D_{n+1}}{D}\right).$$

Desta forma, para termos um polinômio de grau menor que  $n$ , devemos ter  $D_1 = 0$ . Além disso, se tivermos  $D_i = 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, k \leq n\}$  e  $D_i \neq 0$  para  $i = k + 1$ , então o polinômio modelador terá grau igual  $n - k$ . Para  $k = n + 1$  temos o polinômio nulo.

**Exemplo 2.5.3.** Dados quatro pontos,  $A = (1, 1)$ ,  $B = (3, 2)$ ,  $C = (5, 3)$  e  $D = (9, 5)$ , vamos determinar o polinômio  $P$  de grau menor ou igual a 3 que passa por estes pontos.

Se  $P_2$  tem grau menor ou igual a 3, então ele é da forma  $P_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Substituindo os pontos na equação acima temos o sistema:

$$\begin{cases} 1^3a+1^2b+1c+d=1 \\ 3^3a+3^2b+3c+d=2 \\ 5^3a+5^2b+5c+d=3 \\ 9^3a+9^2b+9c+d=5 \end{cases} = \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 2 \\ 125a + 25b + 5c + d = 3 \\ 729a + 81b + 9c + d = 5 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos  $(a, b, c, d) = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Logo o polinômio  $P_2$  é um polinômio de grau 1, dado por:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

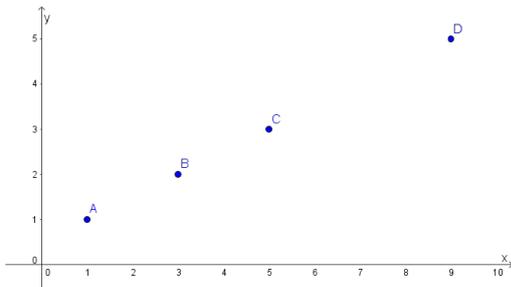


Figura 2.3: Pontos A, B, C e D

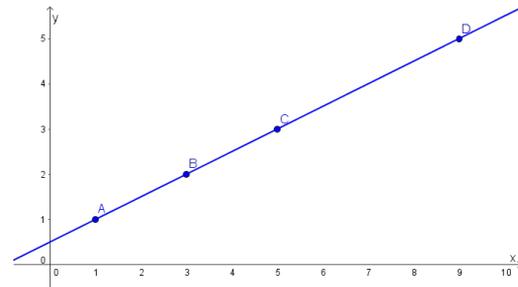


Figura 2.4: Polinômio  $P_2(x)$

## 2.6 Análise Gráfica de Funções Polinomiais

Nessa seção, estudamos o gráfico de funções polinomiais de primeiro, segundo, terceiro e quarto grau. Uma atividade muito produtiva é, ao discutir os tópicos aqui colocados, explorar com os alunos muitos exemplos no GeoGebra.

### 2.6.1 Função Polinomial de 1º Grau

Uma função polinomial de primeiro grau pode ser escrita como:

$$P(x) = ax + b,$$

em que  $a$  e  $b$  são seus coeficientes. Podemos representar seus pontos no plano na forma

$$(x, y) = (x, ax + b)$$

Se  $a = 0$ , temos uma função constante. O seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas que intersecciona o eixo das ordenadas no ponto  $b$ . O estudo a seguir considera o caso em que  $a \neq 0$ .

Fazendo  $x = 0$ , obtemos  $P(0) = b$ , ou seja,  $(0, b)$  é o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo  $y$ . De forma semelhante, fazendo  $P(x) = 0$ , obtemos:

$$0 = ax + b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b}{a}.$$

Ou seja, temos uma raiz real quando  $x = \frac{-b}{a}$ , portanto,  $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$  é o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo  $x$ .

## Representação Gráfica

Considerando-se os pontos  $A = (x_1, ax_1 + b)$ ,  $B = (x_2, ax_2 + b)$  e  $C = (x_3, ax_3 + b)$  com  $x_1 < x_2 < x_3$

Vamos calcular a distância entre  $A$  e  $B$  ( $d(A, B)$ ), a distância entre  $B$  e  $C$  ( $d(B, C)$ ), e entre  $A$  e  $C$  ( $d(A, C)$ ):

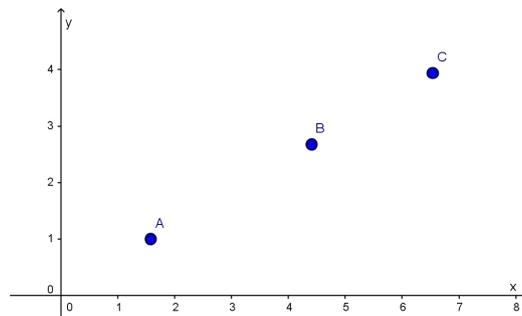
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - (ax_1 + b))^2} = (x_2 - x_1) \sqrt{1 + a^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 + b - (ax_2 + b))^2} = (x_3 - x_2) \sqrt{1 + a^2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - (ax_1 + b))^2} = (x_3 - x_1) \sqrt{1 + a^2}$$

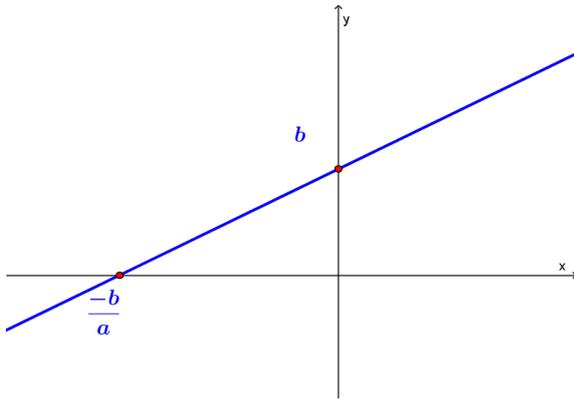
Daí segue-se que:

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$$

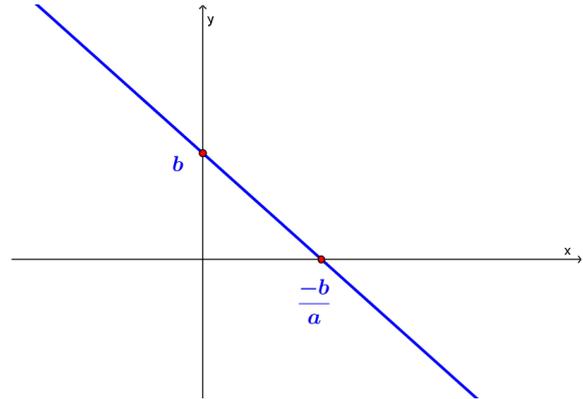


**Figura 2.5:** Pontos alinhados

Isso nos mostra que os pontos estão alinhados, pois se não estivessem, o termo da direita seria maior que o da esquerda (desigualdade triangular). Conseqüentemente, o gráfico de uma equação polinomial de primeiro grau é uma reta.



**Figura 2.6:** Gráfico de uma função polinomial de primeiro grau  $a > 0$



**Figura 2.7:** Gráfico de uma função polinomial de primeiro grau  $a < 0$

O coeficiente angular desta reta será então  $a = \frac{b}{\left(\frac{b}{a}\right)}$

Observamos que o gráfico de uma equação polinomial de primeiro grau pode ser analisado segundo sua equação na forma reduzida ou em sua forma fatorada.

$$P(x) = ax + b \quad (2.6.1) \quad P(x) = a \left( x + \frac{b}{a} \right) \quad (2.6.2)$$

Sua forma reduzida nos dá sua inclinação (coeficiente  $a$ ) e o ponto onde ela intersecta o eixo  $y$  (coeficiente  $b$ ). Já sua forma fatorada nos dá sua inclinação (coeficiente  $a$ ) e o ponto onde ela intersecta o eixo  $x$ , ou seja, sua raiz  $\left(\frac{-b}{a}\right)$ .

### 2.6.2 Função Polinomial de 2º Grau

Uma função polinomial de segundo grau pode ser escrita como:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (2.6.3)$$

Onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são seus coeficientes. Podemos representar seus pontos no plano na forma

$$(x, y) = \left( x, ax^2 + bx + c \right)$$

Notemos que fazendo  $x = 0$ , obtemos  $P(0) = c$ , ou seja,  $(0, c)$  é o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo  $y$ .

Para determinar suas raízes, devemos fazer  $P(x) = 0$ :

$$P(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

Tomando  $a$  como fator comum, temos:

$$a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0.$$

Completando o quadrado:

$$a \left( x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right) = 0.$$

Agora, usando a identidade  $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ :

$$a \left( \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right) = 0.$$

Distribuindo novamente o  $a$ :

$$a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0.$$

O que nos leva a:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Temos assim:

- i. Para  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , duas raízes reais distintas:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- ii. Para  $\Delta = 0$ , uma única raiz:  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- iii. Para  $\Delta < 0$  as raízes são complexas.

O gráfico de  $P(x)$  interseccionará o eixo das abscissas duas vezes no caso *i.*, uma no caso *ii.* (tangencia), e nenhuma no caso *iii.*

Além disto, pelas propriedades 1 e 2, da página 54, podemos concluir que, se  $a > 0$ , a parábola possui concavidade voltada para cima e, se  $a < 0$ , sua concavidade é voltada para baixo.

## Representação Gráfica

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola, sua demonstração pode ser vista em [18]. Ou seja, possui apenas um ponto crítico que é encontrado igualando sua derivada a 0:

$$P'(x) = 2ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Este ponto substituído na equação 2.6.3 nos retorna  $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ . Ou seja, a função possui o ponto crítico (que coincide com o vértice da parábola) nas coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

O que nos interessa mostrar é o que acontece com a parábola quando mudamos os seus coeficientes. Para isso iremos considerar primeiramente o polinômio  $P$  em sua forma reduzida:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

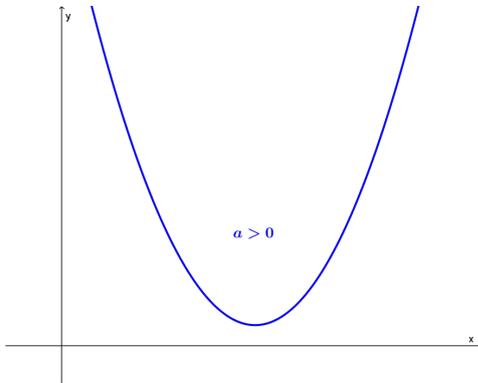
Se  $a > 0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$$

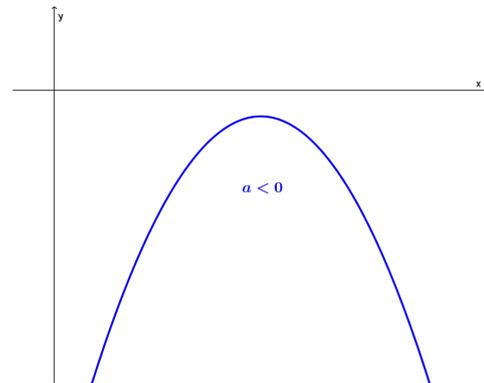
Se  $a < 0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

Sendo assim, se  $a > 0$  a parábola possui concavidade voltada para cima e, se  $a < 0$ , sua concavidade é voltada para baixo.

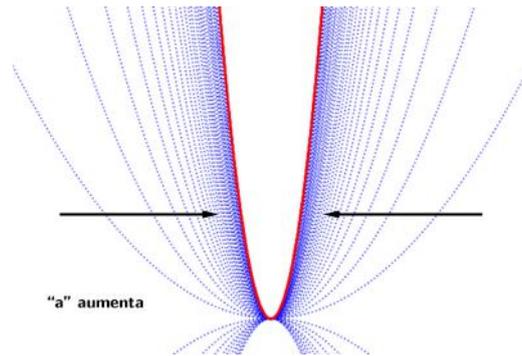


**Figura 2.8:** Parábola com concavidade voltada para cima ( $a > 0$ )



**Figura 2.9:** Parábola com concavidade voltada para baixo ( $a < 0$ )

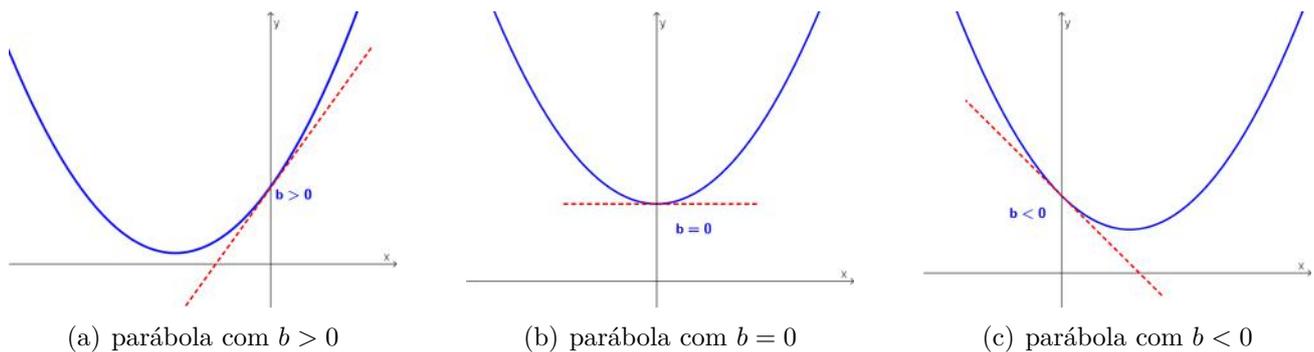
Além disto, como vemos nos cursos de cálculo e foi resumido em 1.6.2, temos que  $P'(x) = 2ax + b$ , teremos que (quando  $a > 0$ ) a função é decrescente para  $x < -\frac{b}{2a}$  e crescente para  $x > -\frac{b}{2a}$  ( $x = -\frac{b}{2a}$  é ponto de mínimo local). Se fizermos segunda a derivada dessa função, teremos  $P''(x) = 2a$ . A função  $P''(x)$  nos fala também o quão rapidamente a inclinação da reta tangente está mudando e, como ela depende somente do coeficiente  $a$ . Isso nos mostra que a abertura da parábola depende apenas de  $a$ . Quanto maior é  $|a|$ , mais “fechada” é a parábola e, quanto mais próximo de 0 é o  $|a|$ , mais “aberta” é a parábola.



**Figura 2.10:** Concavidade da Parábola se fechando conforme aumentamos o valor de  $a$

Ainda olhando para  $P'(x) = 2ax + b$ , isolando  $b$  ficamos com  $b = P'(x) - 2ax$  e, fazendo  $x = 0$  temos  $b = P'(0)$ .

Portanto o coeficiente  $b$  nos fala o que acontece com a derivada, ou seja, com a inclinação da reta tangente quando a parábola intersecta o eixo  $y$ . Em outras palavras, se  $b > 0$  a função  $P$  é crescente em  $x = 0$ , se  $b = 0$  o vértice da parábola se encontra no eixo  $y$  e, se  $b < 0$  a função  $P$  é decrescente em  $x = 0$ . Além disso, quanto maior o valor de  $b$ , maior a taxa de crescimento da função em  $x = 0$  e, quanto menor o  $b$ , menor a taxa de crescimento em  $x = 0$ .



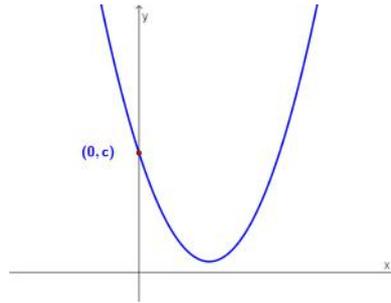
**Figura 2.11:** Papel do coeficiente  $b$  na equação polinomial de 2º grau

Agora resta-nos analisar o coeficiente  $c$ .

Fazendo  $x = 0$ , vemos que

$$P(0) = a0^2 + b0 + c = c$$

Portanto, o coeficiente  $c$  é o ponto onde o gráfico da função  $f$  intersecta o eixo  $y$ .



**Figura 2.12:** Papel do coeficiente  $c$  na equação polinomial de 2º grau

Estudamos assim, o efeito geométrico de cada coeficiente da função polinomial de segundo grau. Nos estudos de funções polinomiais de grau maior do que dois a análise geométrica de seus coeficientes se torna complicado<sup>3</sup>. O que faremos a partir de agora é ver como pode ser o gráfico de funções polinomiais de graus 3 e 4 com a análise de cada caso possível.

### 2.6.3 Função Polinomial de 3º Grau

Uma função polinomial de terceiro grau pode ser escrita como:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Estudando o comportamento da função  $P$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow \infty$  vemos que ela só depende do valor de seu coeficiente dominante  $a$ . Assim:

1. Se  $a < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$$

2. Se  $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$$

Assumindo continuidade, isso nos garante que a função polinomial de terceiro grau sempre possui ao menos uma raiz real  $x_0$ . Usando então a fatoração  $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$ , concluímos pela seção anterior que, dependendo do polinômio de segundo grau  $Q(x)$ ,  $P(x)$  pode ter uma, duas, ou três raízes reais distintas.

Além disso, o estudo das suas derivadas nos dão alguns resultados importantes também. Fazendo a primeira e segunda derivadas, temos:

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{e} \quad P''(x) = 6ax + 2b$$

Como vemos em cálculo e resumimos em 1.6.2, impomos  $P'(x) = 0$  para encontrar seus pontos críticos. Verificamos que a função possui pontos críticos nos valores

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \quad \text{se } b^2 - 3ac \geq 0$$

<sup>3</sup>Seu coeficiente dominante sempre nos dirá quão rápido a função cresce ou decresce e o seu termo independente sempre nos dirá o ponto onde a função intersecta o eixo  $y$

Aqui se  $b^2 - 3ac > 0$  a função possuirá dois pontos críticos, quando  $b^2 - 3ac = 0$  a função possui um ponto crítico e, quando  $b^2 - 3ac < 0$  não possui ponto crítico. Seu ponto de inflexão<sup>4</sup> ocorre quando o sinal da derivada segunda muda, ou seja

$$x = \frac{-b}{3a}$$

O coeficiente  $a$  nos diz quão rápido a função cresce ou decresce, o sinal de  $b$  nos diz sobre sua concavidade (para cima ou para baixo) no ponto  $x = 0$ , o coeficiente  $c$  nos fala a taxa de crescimento ou decrescimento da função no ponto  $x = 0$  e o coeficiente  $d$  nos diz em que ponto a função intersecta o eixo  $y$ .

Vamos exemplificar cada caso (onde  $a > 0$ , os casos onde  $a < 0$  são similares) que pode ocorrer para uma função polinomial de grau 3.

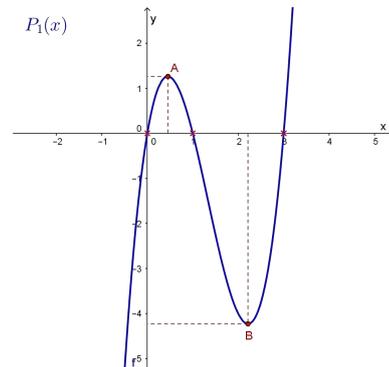
**Exemplo 2.6.1.** (*Três raízes reais distintas*) Seja

$$P_1(x) = 2x(x - 1)(x - 3) = 2x^3 - 8x^2 + 6x$$

Derivando a função  $P_1$  e igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos:

$$P_1'(x) = 6x^2 - 16x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Substituindo esses valores em  $P_1$  encontramos os pontos  $A = \left( \frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \frac{28\sqrt{7} - 40}{27} \right)$  e  $B = \left( \frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \frac{-28\sqrt{7} - 40}{27} \right)$ . Assim, verificamos que  $A$  é um máximo local e  $B$  é um mínimo local. Com essas informações podemos traçar o gráfico da função  $P_1$ .



**Figura 2.13:** Três raízes reais distintas

**Exemplo 2.6.2.** (*Duas raízes reais iguais e uma distinta*) Seja

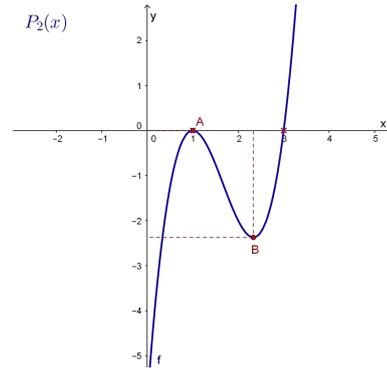
$$P_2(x) = 2(x - 1)(x - 1)(x - 3) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$$

Derivando a função  $P_2$  e igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos:

$$P_2'(x) = 6x^2 - 20x + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20 \pm 8}{12}$$

<sup>4</sup>O ponto de inflexão do gráfico de uma função é o ponto onde a sua concavidade muda, ele é calculado observando-se o sinal da derivada de segunda ordem da função.

Substituindo esses valores em  $P_1$ , encontramos os pontos  $A = (1, 0)$  e  $B = \left(\frac{7}{3}, \frac{-64}{27}\right)$ . Assim, verificamos que  $A$  é um máximo local (que coincide com uma das raízes) e  $B$  é um mínimo local. Com essas informações podemos traçar o gráfico da função  $P_2$ .



**Figura 2.14:** Duas raízes reais iguais e uma distinta

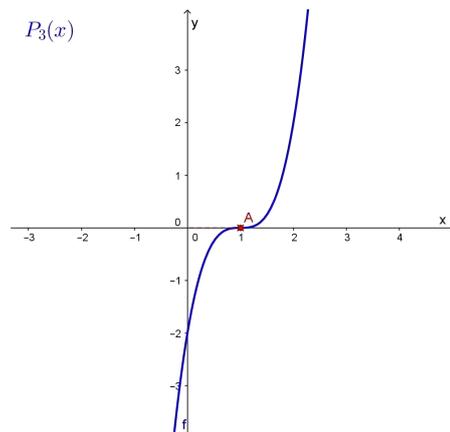
**Exemplo 2.6.3.** (Três raízes reais coincidentes com um ponto crítico) Seja

$$P_3(x) = 2(x - 1)(x - 1)(x - 1) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$$

Derivando a função  $P_3$  e igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos:

$$P_3'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Como só encontramos um valor para  $x$ , o ponto  $A = (1, 0)$  é um ponto crítico e a função não possui máximos ou mínimos locais. Com essas informações podemos traçar o gráfico da função  $P_3$ .



**Figura 2.15:** Três raízes reais coincidentes com um ponto crítico

Agora já abordamos todos os casos cujas raízes são todas reais. Pelas Relações de Girard ([12]), é possível mostrar que com três raízes iguais só temos o caso em que  $b^2 = 3ac$ , ou seja, o caso em que temos um ponto crítico. Temos mais três casos onde temos uma raiz real e duas raízes complexas. No primeiro deles temos dois pontos críticos, no segundo apenas um, e no terceiro, nenhum ponto crítico.

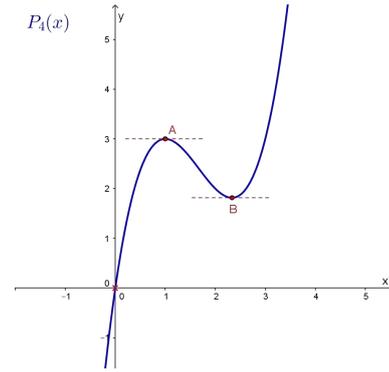
**Exemplo 2.6.4.** (Uma raiz real e dois pontos críticos) Seja

$$P_4(x) = x(x^2 - 5x + 7) = x^3 - 5x^2 + 7x$$

Na sua forma fatorada podemos ver que  $x = 0$  é raiz de  $P_4$ . Derivando a função  $P_4$  e igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos:

$$P_4'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10 \pm 4}{6}$$

Substituindo esses valores em  $P_4$  encontramos os pontos  $A = (1, 3)$  e  $B = \left(\frac{7}{3}, \frac{49}{27}\right)$ . Assim, verificamos que  $A$  é um máximo local e  $B$  é um mínimo local. Com essas informações traçamos o gráfico da função  $P_4$ .



**Figura 2.16:** Uma raiz real e dois pontos críticos

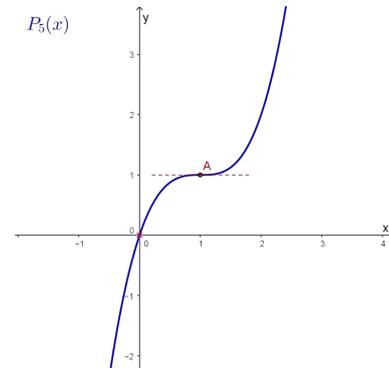
**Exemplo 2.6.5.** (Uma raiz real e um ponto crítico) Seja

$$P_5(x) = x(x^2 - 3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

Na sua forma fatorada podemos ver que  $x = 0$  é raiz de  $P_5$ . Derivando a função  $P_5$  e igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos:

$$P_5'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Como só encontramos um valor para  $x$ , o ponto  $A = (1, 1)$  é um ponto crítico e a função não possui máximos ou mínimos locais. Com essas informações traçamos o gráfico da função  $P_5$ .



**Figura 2.17:** Uma raiz real e um ponto crítico

**Exemplo 2.6.6.** (Uma raiz real e nenhum ponto crítico) Seja

$$P_6(x) = x(x^2 - 3x + 4) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

Na sua forma fatorada podemos ver que  $x = 0$  é raiz de  $P_6$ . Derivando a função  $P_6$  e igualando a 0 não obtemos nenhum valor real como ponto crítico, portanto não temos pontos onde a derivada se anula. Como não encontramos nenhum valor como ponto crítico esse é o caso onde é mais difícil esboçar o gráfico.

Lembrando da segunda derivada, temos  $P''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ . Substituindo esse valor em  $P_6$  encontramos o ponto  $A = (1, 2)$ , que é o ponto onde a função deixa de ser côncava para baixo e passa a ser côncava para cima. Com essas informações traçamos o gráfico da função  $P_5$ .

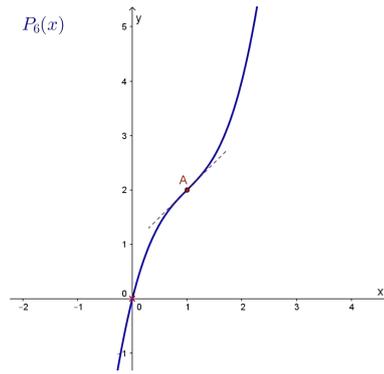


Figura 2.18: Uma raiz real e nenhum ponto crítico

### 2.6.4 Função Polinomial de 4º Grau

Uma função polinomial de quarto grau pode ser escrita como:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

em que  $a, b, c, d$  e  $e$  são seus coeficientes.

Utilizando os resultados das seções 2.3 e 2.4 observamos que se  $P(x)$  possuir quatro raízes reais, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4), \quad (2.6.4)$$

em que  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  são as raízes reais do polinômio  $P$

Estudando o comportamento da função  $P$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow \infty$  vemos que ela só depende do valor de seu coeficiente dominante  $a$ . Assim:

1. Se  $a < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$$

2. Se  $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$$

Fazendo a primeira derivada temos

$$P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Vemos que a derivada é um polinômio de grau 3 que pode ter 1, 2 ou 3 raízes reais, o que significa que o polinômio  $P$  pode ter 1, 2 ou 3 pontos críticos.

Analisando o crescimento e decrescimento da função  $P$  quando  $P'$  tem 1, 2 ou 3 raízes reais e  $a > 0$ , teremos o seguinte:

1. Com 3 raízes, a função  $P$  decresce até um ponto crítico, depois desse ponto ela cresce até chegar no segundo ponto crítico, depois decresce novamente até chegar no terceiro e, por fim, ela cresce novamente. Portanto temos dois mínimos locais e um máximo local (no caso em que  $a < 0$  teremos dois máximos e um mínimo local).
2. Com 2 raízes temos dois casos, um deles onde a raiz com multiplicidade 2 é menor que a outra raiz e o outro em que ela é maior.

- a. Quando a raiz que tem multiplicidade 2 é menor que a outra raiz, a função  $P$  começa decrescente, passa o primeiro ponto crítico (que será um ponto de inflexão), continua decrescendo até o segundo ponto crítico (que será um ponto de mínimo local) e depois passa a crescer.
- b. Quando a raiz que tem multiplicidade 2 é maior que a outra raiz, a função  $P$  decresce até o primeiro ponto crítico (que será um ponto de mínimo local), depois passa a crescer, passa pelo segundo ponto crítico (que será um ponto de inflexão) e continua a crescer.

Em ambos os casos temos um mínimo local (no caso em que  $a < 0$  teremos um máximo local).

3. Com uma raiz, a função  $P$  começa decrescente, passa pelo ponto crítico e se torna crescente. Portanto, temos apenas um mínimo local (no caso em que  $a < 0$  teremos um máximo local).

Fazendo a segunda derivada obtemos

$$P''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

A segunda derivada é um polinômio de grau 2 e pode, portanto, ter 0, 1 ou 2 raízes, o que faz com que  $P$  tenha a mesma quantidade de pontos de inflexão. A abscissa  $x$  desses pontos é dada por

$$x = \frac{-6b \pm \sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a} = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a}$$

Aqui, reparamos que se  $9b^2 - 24ac > 0$ , a função  $P$  possui dois pontos de inflexão; quando  $9b^2 - 24ac = 0$ , possui um ponto de inflexão; e quando  $9b^2 - 24ac < 0$  não possui nenhum.

Com isso, vamos aos exemplos que abordam cada caso. Novamente vamos exemplificar primordialmente os casos onde  $a > 0$  (com exceção do último exemplo), os casos onde  $a < 0$  são similares. Vamos nos restringir aos casos que só possuem raízes reais. Os casos que possuem raízes complexas são obtidos fazendo uma translação vertical no gráfico.

**Exemplo 2.6.7.** *(Quatro raízes reais distintas)*

Seja

$$P_1(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

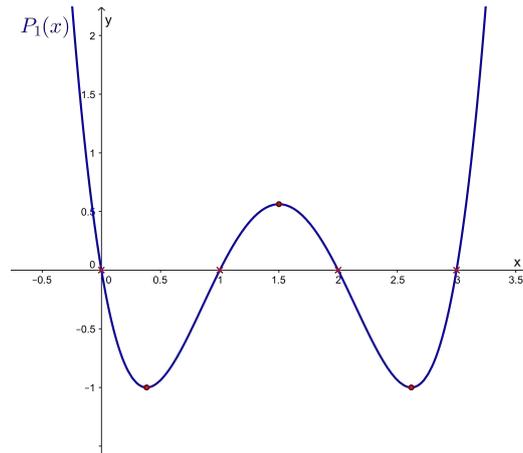
Derivando a função  $P_1$  e igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos, temos:

$$P_1'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{5} + 3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right\}$$

Derivando novamente e igualando a 0 encontramos seus pontos de inflexão:

$$P_1''(x) = 12x^2 - 36x + 22 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{15} + 9}{6}, \frac{\sqrt{15} + 9}{6} \right\}$$

Esboçando o seu gráfico temos:



**Figura 2.19:** Quatro raízes reais distintas

Podemos observar que, quando os valores de  $x$  tendem a infinito e menos infinito, a função cresce indefinidamente.

*Observação:* Analisando o gráfico de  $P_1(x)$  observamos que se tomarmos, por exemplo, o polinômio  $f(x) = P_1(x) + 2$  (translação vertical de 2),  $f(x)$  não terá nenhuma raiz real.

**Exemplo 2.6.8.** (*Três raízes reais*)

Sejam

$$P_2(x) = x^2(x-1)(x-2) \quad P_3(x) = x(x-1)^2(x-2) \quad e \quad P_4(x) = x(x-1)(x-2)^2$$

Esses três casos possuem três raízes, sendo uma delas com multiplicidade 2. No caso de  $P_2$  a raiz que possui multiplicidade 2 é a menor delas, no caso de  $P_3$  é a do meio e, no caso da  $P_4$ , a maior. Como os três casos são similares os abordaremos no mesmo exemplo.

Derivando as funções  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  e as igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos, respectivamente:

$$P_2'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{17}+9}{8}, 0, \frac{\sqrt{17}+9}{8} \right\}$$

$$P_3'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 10x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{2}+2}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right\}$$

$$P_4'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 16x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{17}+7}{8}, \frac{\sqrt{17}+7}{8}, 2 \right\}$$

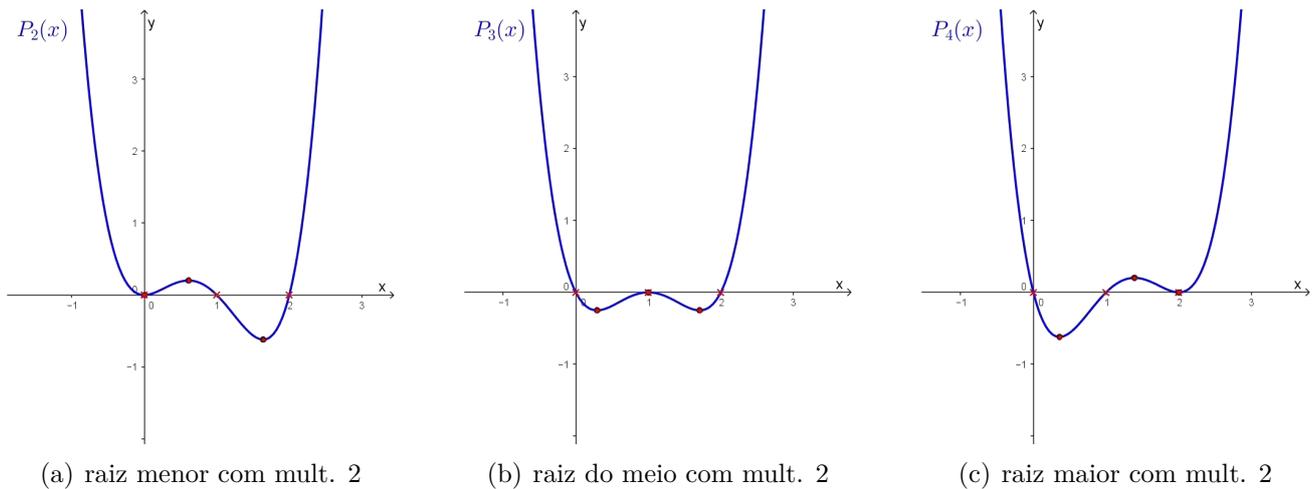
Derivando novamente e igualando a 0 encontramos seus pontos de inflexão:

$$P_2''(x) = 12x^2 - 18x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{33}+9}{12}, \frac{\sqrt{33}+9}{12} \right\}$$

$$P_3''(x) = 12x^2 - 24x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{6}+6}{6}, \frac{\sqrt{6}+6}{6} \right\}$$

$$P_4''(x) = 12x^2 - 30x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{-\sqrt{33}+15}{12}, \frac{\sqrt{33}+15}{12} \right\}$$

Esboçando os gráficos temos:



**Figura 2.20:** Funções polinomiais de 4º grau com três raízes reais

**Exemplo 2.6.9.** (Duas raízes reais)

Sejam

$$P_5(x) = x^2(x-2)^2 \quad P_6(x) = x^3(x-2) \quad e \quad P_7(x) = x(x-2)^3$$

Esses três casos possuem duas raízes.  $P_6$  possui duas raízes com multiplicidade 2;  $P_6$  e  $P_7$  possuem uma raiz com multiplicidade 1 e a outra com multiplicidade 3, sendo que em  $P_6$  a raiz com multiplicidade 3 é a menor e em  $P_7$  é a maior. Como os três casos são similares os abordaremos no mesmo exemplo.

Derivando as funções  $P_5$ ,  $P_6$  e  $P_7$  e as igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos, respectivamente:

$$P_5'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0, 1, 2\}$$

$$P_6'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$$

$$P_7'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$$

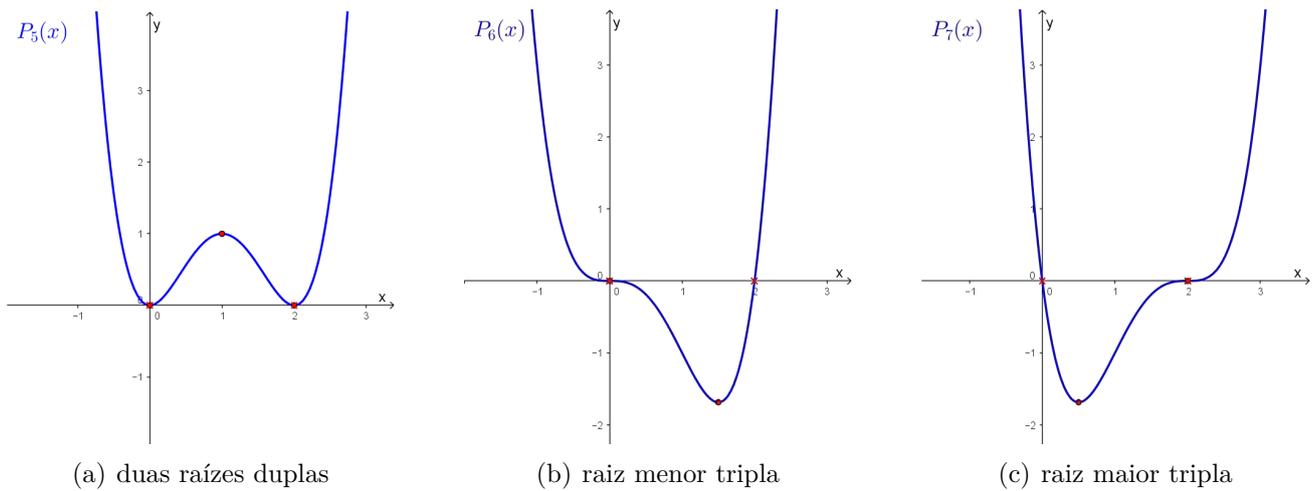
Derivando novamente e igualando a 0 encontramos seus pontos de inflexão:

$$P_5''(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{\frac{-\sqrt{3}+3}{3}, \frac{\sqrt{3}+3}{3}\right\}$$

$$P_6''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0, 1\}$$

$$P_7''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{1, 2\}$$

Esboçando os gráficos temos:



**Figura 2.21:** Funções polinomiais de 4º grau com duas raízes reais

**Exemplo 2.6.10.** (Uma raiz real com multiplicidade 4)

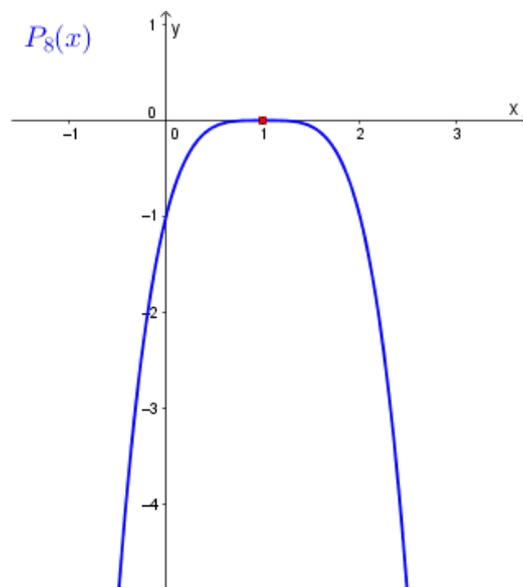
Seja

$$P_8(x) = -(x - 1)^4 = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$$

Derivando a função  $P_8$  e igualando a 0 para encontrar seus pontos críticos temos:

$$P_8'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Esboçando o seu gráfico temos:



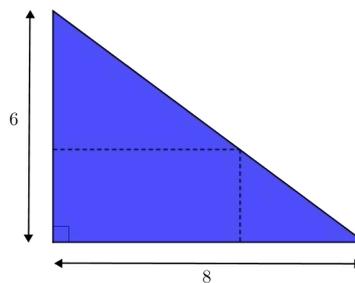
**Figura 2.22:** Uma raiz real

Com estes exemplos concluímos as ferramentas necessárias para explorar as atividades propostas no terceiro capítulo, bem como para trabalhar outros problemas de aplicação de polinômios como os que listamos a seguir na última seção deste capítulo.

## 2.7 Problemas de Otimização “modelados” por Polinômios

Selecionamos a seguir alguns problemas conhecidos que podem se “modelados” por polinômios de segundo e terceiro graus. Trabalhar problemas como estes com os alunos pode ser uma interessante “abordagem introdutória” às atividades propostas no capítulo 3 que envolvem mais pré-requisitos. Na discussão e resolução destes, muitos temas deste capítulo podem ser aprofundados.

1. (UFPE) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra  $R\$200,00$  por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de  $R\$4,00$  por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados o preço de cada passagem será  $R\$240,00$ ). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo?
2. Fernanda tem uma fábrica de sorvetes. Ela vende, em média, 300 caixas de picolés por  $R\$20,00$  cada. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía  $R\$1,00$  no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ela deve cobrar pela caixa para que sua receita seja máxima?
3. É dada uma folha de cartolina como na figura abaixo. Cortando a folha da linha pontilhada resultará um retângulo. Determine as medidas desse retângulo sabendo que a área é máxima.



**Figura 2.23:** Triângulo da questão 3

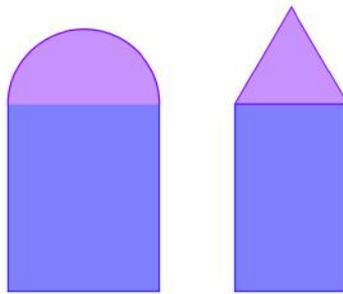
4. Um agricultor possui 600 metros de arame para cercar um terreno retangular e também dividi-lo em duas partes, com uma cerca paralela a um dos lados. Uma dessas partes tem a forma de um quadrado. Quais devem ser as dimensões do terreno para que a área cercada seja máxima?
5. Daniel possui  $120m$  de cerca para formar dois canteiros, um no formato de um hexágono regular e o outro no formato de um quadrado. Qual deve ser o perímetro do quadrado para que a soma das áreas seja mínima?

6. (UFF - RJ) Num terreno retangular com  $104m^2$  de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo  $9m \times 4m$ , contornado por uma calçada de largura  $L$ . Calcule o valor de  $L$ .



**Figura 2.24:** Terreno da questão 6

7. Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar  $400m$  de tela de arame, de modo a produzir a área máxima. Qual é o quociente de um lado pelo outro?
8. Você precisa fazer uma janela que possua um perímetro de  $10m$ . Esta janela deve ter o formato de um retângulo com um semi-círculo em seu topo (janela em arco romano). Que medidas determinam a janela de maior área?
9. Nas mesmas condições do exercício anterior, determine as medidas da janela com o formato de um retângulo com um triângulo equilátero em seu topo.



**Figura 2.25:** Janelas das questões 8 e 9

10. Ao retirar uma “fatia” de um disco de raio  $r$  é possível formar um cone. Que fatia deve ser retirada para se obter o cone de maior volume? Qual é esse volume? Qual a proporção entre o raio e a altura desse cone?
11. De uma folha de papelão retangular de  $20cm \times 30cm$  devem ser retirados os quatro “cantos” para formar uma caixa sem tampa. Qual deve ser o lado dos quadrados retirados para que o volume desta caixa seja o máximo possível?

## Capítulo 3

# Modelagem Polinomial

Neste capítulo propomos duas atividades a serem desenvolvidos por alunos do terceiro ano do ensino médio ou em disciplinas iniciais dos cursos de licenciatura em matemática. Ambas trabalham conteúdos estudados nestes cursos e visam contribuir de forma significativa na aprendizagem dos alunos, por mostrar aplicações da matemática, e proporcionar uma visão diferenciada dos motivos para se aprender tais conteúdos.

Nas seções a seguir apresentamos a descrição e o desenvolvimento do conteúdo matemático destas atividades que podem ser também trabalhados pelos professores em sala de aula. Estas propostas devem ser desenvolvidas de acordo com o grau de facilidade que os alunos possuem com a disciplina. Por exemplo, na seção 3.1.2 a matemática desenvolvida pode, de um modo geral, ser trabalhada em sala de aula do ensino médio. Já a seção 3.1.3 pode ser entendida como um complemento para o professor e, devido ao grau de dificuldade e de mais conceitos de cálculo diferencial envolvidos, é mais adequada para ser trabalhada na fase introdutória do ensino superior, ou em grupos especiais do ensino médio.

### 3.1 Foguete/Aeromodelo

Esta primeira atividade de modelagem matemática proposta constitui-se de duas partes: a construção e lançamento de um aeromodelo no formato de um foguete feito com garrafa PET; e a elaboração de um relatório onde o estudo de sua trajetória é realizado detalhadamente. A motivação inicial se deu ao tomar conhecimento da Mostra Brasileira de Foguetes (MOBFOG) é parte da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) ([23])

O trabalho foi proposto aos alunos do terceiro ano do ensino médio no momento em que a matéria de polinômios estava sendo estudada, o que os auxiliou na fixação dos conteúdos abordados. É uma atividade que necessita de outros temas estudados no ensino médio, e estimula o aluno a revisar assuntos como trigonometria, polinômios, funções, etc.

A construção do aeromodelo é simples e pode ser vista tanto no YouTube ([22]) quanto no site da OBA ([23]). Os materiais utilizados são também acessíveis: garrafas PET, tubos e conexões de PVC, válvula de pneu de bicicleta, bexigas, presilhas de náilon, etc.

Nosso objetivo principal com esta atividade é trabalhar os conteúdos de matemática envolvidos no experimento, o que pode ser explorado junto com os alunos em sala de aula para que o relatório de atividades seja bem escrito e detalhado.

Uma das metas é a de determinar qual é o polinômio do segundo grau que modela a trajetória do foguete, assumindo aqui as leis da física, com algumas simplificações como desconsiderar o



**Figura 3.1:** Materiais para a construção do aeromodelo

atrito do ar. Procuramos assim a função polinomial que nos fornece a altura em que ele se encontra quando se desloca horizontalmente uma determinada distância. Também exploramos qual é o ângulo em que deve ocorrer o lançamento para que a distância atingida seja máxima, inclusive em casos onde o ponto de lançamento está a uma altura diferente do ponto de chegada. E, por fim, fazemos uma análise dos dados coletados no desenvolvimento dessa atividade quando a aplicamos na E.E. Prof. Aníbal de Freitas em Campinas-SP, e pudemos inferir algumas conclusões de acordo com as distâncias alcançadas pelos foguetes dos alunos.



**Figura 3.2:** Base do foguete



**Figura 3.3:** Foguete

### 3.1.1 Polinômio Modelador

Um polinômio da forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.1.1)$$

É um polinômio de grau 2 e, segundo o teorema da decomposição 2.4.4, se suas raízes são  $x_1$  e

$x_2$ , pode ser escrito na forma:

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (3.1.2)$$

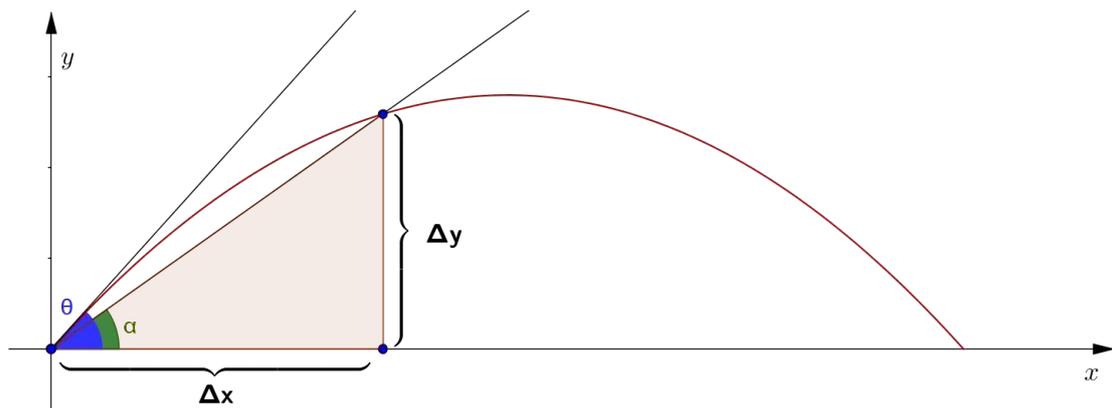
A equação 3.1.1 é representada geometricamente por uma parábola e, na análise dos coeficientes, temos que  $a$  é um número negativo (a parábola tem concavidade voltada para baixo). Para definir qual deve ser o coeficiente  $a$ , precisamos utilizar um pouco do cálculo de limites como visto em 1.6, porém, esse cálculo é simples. Vamos considerar a equação 3.1.2 onde o ponto  $x_1$  é o ponto de origem e  $x_2$  é o ponto de chegada do aeromodelo, sendo assim:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = d$$

Logo, nossa equação 3.1.2 fica da seguinte forma:

$$p(x) = ax(x - d) \quad (3.1.3)$$

Agora só nos resta definir quem é o coeficiente  $a$ . Vamos considerar a seguinte imagem:



**Figura 3.4:** Ângulo de lançamento

Consideremos inicialmente a reta secante passando pela origem e por um ponto da parábola próximo

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax(x - d) - 0}{x - 0} = a(x - d)$$

Quando  $x \rightarrow 0$  temos a ideia intuitiva de que o coeficiente angular da reta secante tende para o da reta tangente (aqui foi usada a ideia de limites, de forma intuitiva), logo:

$$\tan(\alpha) \rightarrow -ad = \tan(\theta).$$

Isolando o  $a$ , temos

$$a = -\frac{\tan(\theta)}{d}.$$

Portanto nossa equação fica da forma:

$$p(x) = -\frac{\tan(\theta)}{d}x(x - d), \quad (3.1.4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de lançamento e  $d$  é a distância horizontal atingida pelo aeromodelo. Este desenvolvimento pode ser realizado conjuntamente com os alunos desde que eles estejam com os assuntos necessários revisados pois abordamos diversos conteúdos trabalhados no ensino médio que podem ter sido esquecidos por alguns alunos. Isto também pode ser trabalhado em disciplinas iniciais dos cursos de graduação como uma forma de revisão.

O polinômio da equação 3.1.4 fornece-nos a altura em função da distância em que o aeromodelo se encontra e, com isso, podemos calcular sua altura máxima que será dada quando  $x$  atinge metade da distância total. Esse resultado vêm da expressão para o vértice da parábola (como visto no Capítulo 2) e também pode ser estudado com os alunos. Ou seja

$$h_{m\acute{a}x} = p\left(\frac{d}{2}\right) = -\frac{\tan(\theta)}{d} \cdot \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - d\right)$$

Que, simplificando, é dada por:

$$h_{m\acute{a}x} = \frac{d \cdot \tan(\theta)}{4} \quad (3.1.5)$$

Agora, para discutir o alcance horizontal máximo que o foguete pode atingir, vamos relembrar um pouco de física <sup>1</sup>.

### 3.1.2 Alcance Máximo

Vamos considerar o nosso aeromodelo como apenas um ponto (o seu centro de massa), assim podemos analisar sua trajetória como a de um projétil.

Além disso consideraremos sua trajetória em duas dimensões, ou seja, o caminho que o foguete percorre está contido em um plano vertical.

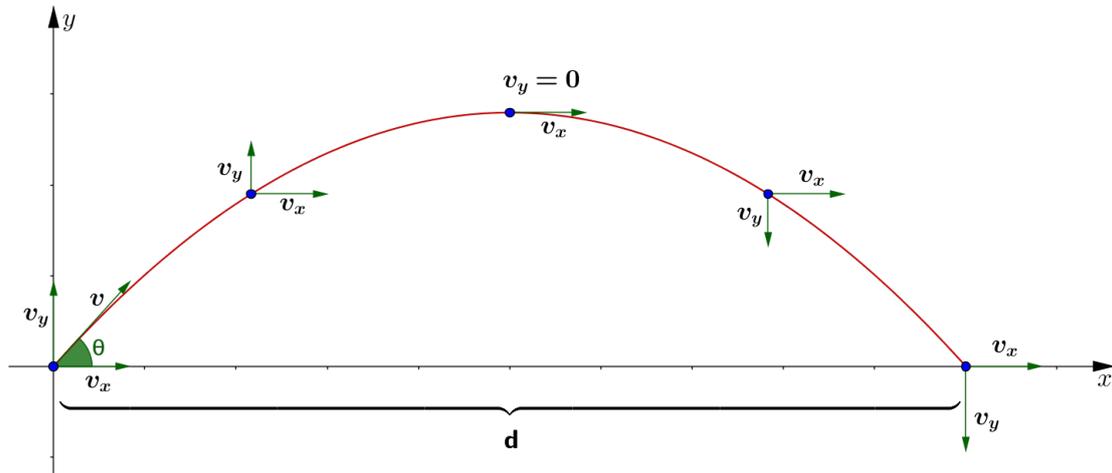
Consideremos  $v$  um vetor velocidade, que indica a velocidade inicial de nosso projétil.

Esse vetor tem uma componente horizontal e outra vertical. Então escreveremos

$$v = (v_x, v_y)$$

---

<sup>1</sup>Também pode ser necessária uma revisão já que os conteúdos de mecânica são vistos no primeiro ano do ensino médio.



**Figura 3.5:** Trajetória do aeromodelo

Na sua componente horizontal o movimento é uniforme já que não sofre aceleração (velocidade constante). Já na sua componente vertical temos a ação da gravidade  $g \approx 9,81m.s^{-2}$ .

Consideraremos o eixo vertical com sentido positivo para cima, portanto a aceleração da gravidade será negativa, uma vez que ela puxa o objeto para baixo. Portanto a sua posição, vertical e horizontal  $(x, y)$ , supondo que o aeromodelo partirá da origem do plano cartesiano, será dada pelas leis físicas:

*Posição horizontal (em metros) no movimento retilíneo uniforme em função do tempo (s):*

$$x = v_x \cdot t \quad (3.1.6)$$

*Posição vertical (em metros) no movimento uniformemente variado em função do tempo (s):*

$$y = v_y t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad (3.1.7)$$

Supondo  $v_x \neq 0$  (caso contrário teríamos um lançamento vertical que não é a proposta deste trabalho), na equação 3.1.6 temos

$$t = \frac{x}{v_x},$$

substituindo  $t$  na equação 3.1.7, temos:

$$y = v_y \cdot \left(\frac{x}{v_x}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_x}\right)^2$$

$$y = v_y \cdot \frac{x}{v_x} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_x^2}$$

$$y = x \left( \frac{v_y}{v_x} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{v_x^2} \right)$$

Como temos um produto neste polinômio do segundo grau, sabemos que suas raízes acontecem quando um das duas parcelas é zero, logo temos

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{v_y}{v_x} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{v_x^2} = 0.$$

Podemos descartar a primeira opção pois  $x = 0$  indica a posição de lançamento do projétil, estamos interessados na posição de chegada, portanto, consideramos a segunda opção, logo:

$$\frac{v_y}{v_x} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{v_x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{v_x^2} = \frac{v_y}{v_x}$$

Isolando  $x$ , temos:

$$x = \frac{2 \cdot v_x \cdot v_y}{g} \tag{3.1.8}$$

Logo, a posição que o projétil pode atingir depende apenas das componentes vertical e horizontal do vetor velocidade.

Aqui surgem duas perguntas naturais a serem discutidas com os alunos. Supondo um “impulso” ou tamanho do vetor inicial fixo (em consequência da pressão do ar dentro do aeromodelo), *como o ângulo de lançamento pode afetar o alcance horizontal atingido na queda do foguete?* Naturalmente, se direcionarmos o foguete na vertical ( $v_x = 0$ ) esta distância será zero. Em consequência dessa pergunta a questão é então *para qual ângulo  $\theta$  da plataforma de lançamento obtemos a maior distância possível?*

Considerando o par ordenado das componentes do vetor velocidade,  $v = (v_x, v_y)$ , em coordenadas polares, como visto na seção 1.1.5. Temos:

$$(v_x, v_y) = (v_0 \cdot \cos(\theta), v_0 \cdot \sin(\theta)) \quad \text{onde} \quad v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Substituindo esta notação na equação 3.1.8, temos:

$$x = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{g}$$

Rearranjando os termos:

$$x = \frac{v_0^2}{g} (2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta))$$

Que é equivalente (como visto na seção 1.1.4) a:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\theta)$$

Como queremos encontrar o valor de  $\theta$  para o qual  $x$  é máximo, precisamos que  $\sin(2\theta) = 1$ , portanto:

$$x_{\max} \Rightarrow \sin(2\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Assim provamos que, quando o terreno é horizontal, ou seja, quando o ponto de lançamento está na mesma altura que o ponto de chegada, o ângulo que possibilita o alcance máximo do projétil é o de  $\frac{\pi}{4}$  rad (45 graus) e, nesse caso, temos então

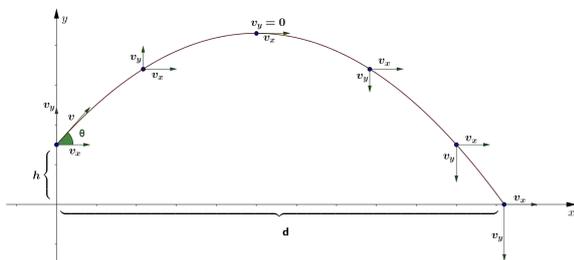
$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad (3.1.9)$$

A seguir mostraremos como determinar o ângulo máximo e o alcance máximo quando as posições de lançamento e de chegada estão em alturas diferentes.

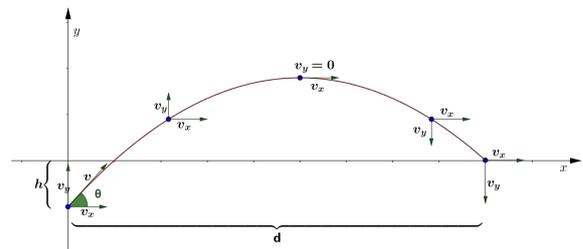
### 3.1.3 Alcance Máximo (caso geral)

Consideremos agora o caso mais geral onde uma altura  $h$  será considerada no ponto de lançamento. Poderemos ter esse  $h$  como um número positivo (figura 3.6) ou negativo (figura 3.7).

Como será visto no desenvolvimento a seguir a dedução da expressão para o ângulo de alcance máximo no caso geral ([24]) é bem mais complexa e envolve técnicas de cálculo diferencial. Esta seção é colocada como um aprofundamento para o professor do ensino médio e também como possível sugestão para se trabalhar em disciplinas introdutórias da licenciatura.



**Figura 3.6:** Lançamento à uma altura  $h$  acima do solo



**Figura 3.7:** Lançamento à uma altura  $h$  abaixo do solo

Novamente, pelas leis físicas de movimento, temos:

*Posição horizontal (em metros) no movimento retilíneo uniforme em função do tempo (s):*

$$x = v_x \cdot t \quad (3.1.10)$$

*Posição vertical (em metros) no movimento uniformemente variado em função do tempo (s):*

$$y = h + v_y t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad (3.1.11)$$

Na discussão a seguir vamos considerar novamente um vetor inicial  $v = (v_x, v_y)$  com tamanho fixo  $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Supondo  $v_x \neq 0$ , na equação 3.1.10 temos:

$$t = \frac{x}{v_x},$$

Substituindo  $t$  na equação 3.1.11, temos:

$$y = -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_x}\right)^2 + v_y \cdot \left(\frac{x}{v_x}\right) + h,$$

o que, reorganizando, nos fornece o seguinte polinômio de segundo grau em  $x$ :

$$y = \left(-\frac{g}{2 \cdot v_x^2}\right) \cdot x^2 + \left(\frac{v_y}{v_x}\right) \cdot x + h.$$

Como queremos o ponto de chegada, temos  $y = 0$ , que resulta em:

$$x = -\frac{v_x^2}{g} \cdot \left(\frac{-v_y}{v_x} \pm \sqrt{\left(\frac{v_y}{v_x}\right)^2 + \frac{4gh}{2v_x^2}}\right) \quad (3.1.12)$$

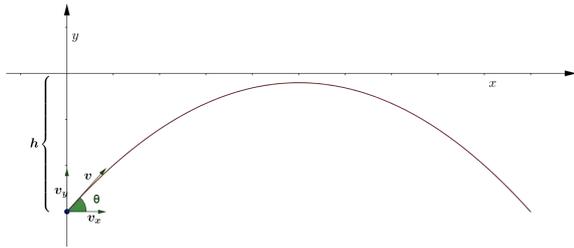
Aqui devemos fazer uma observação importante. Esta equação só tem solução no caso em que:

$$\left(\frac{v_y}{v_x}\right)^2 + \frac{2gh}{v_x^2} \geq 0$$

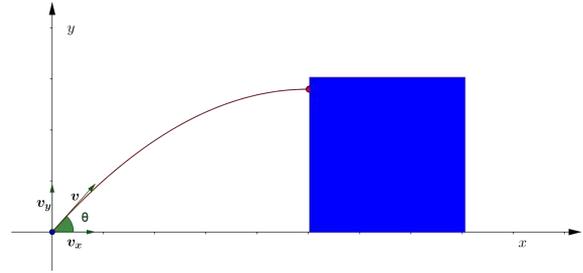
Ou seja, só tem solução para quando

$$h \geq \frac{-v_y^2}{2g}$$

Isso significa que, caso tenhamos um lançamento de um lugar muito baixo, não conseguiremos atingir a altura mínima do “solo”. Esse problema é equivalente ao problema de se atingir um alvo que está localizado em uma altura maior que a altura do lançamento. Se não obtivermos uma velocidade vertical grande o suficiente, a altura não é alcançada e o “alvo” não é atingido. Outro problema equivalente é o de se ter um muro que deve ser ultrapassado antes de se atingir o alvo.



**Figura 3.8:** Altura  $h$  em que o “solo” não é atingido



**Figura 3.9:** Lançamento com o “alvo” muito alto, mesmo problema de se passar um muro

Continuando com o desenvolvimento para encontrar o ângulo que nos dará o alcance máximo, reorganizamos a equação 3.1.12 retirando o  $v_x^2$  de dentro da raiz, o que nos leva a:

$$x = \frac{v_x}{g} \cdot (v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}). \quad (3.1.13)$$

Novamente, sabendo que:

$$(v_x, v_y) = (v_0 \cdot \cos \theta, v_0 \cdot \sin \theta). \quad (3.1.14)$$

Substituindo na equação 3.1.13:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0}{g} \cdot \cos \theta \cdot (v_0 \cdot \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta + 2gh}) \quad \Rightarrow \\ x &= \frac{v_0}{g} \cdot \cos \theta \cdot \left( v_0 \cdot \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \left( \sin^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2} \right)} \right) \quad \Rightarrow \\ x &= \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos \theta \cdot (\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + k}) \quad \text{Onde } k = \frac{2gh}{v_0^2}. \quad (3.1.15) \end{aligned}$$

Como queremos encontrar  $x_{\text{máx}}$ , usando cálculo diferencial (ver [29], [25]), sabemos que devemos derivar e igualar a zero (ponto crítico). Assim:

$$x_{\text{máx}} \Leftrightarrow \frac{dx}{d\theta} = 0, \quad \text{ou seja,}$$

quando:

$$-\sin^2 \theta - \sin \theta \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + k} + \cos^2 \theta + \frac{2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{2 \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + k}} = 0.$$

Desenvolvendo, temos:

$$(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sqrt{\sin^2 \theta + k} + \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = k \cdot \sin \theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + k} = \frac{k \cdot \operatorname{sen}\theta}{(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + k} = \frac{k \cdot \operatorname{sen}\theta}{(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)} - \operatorname{sen}\theta.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + k = \left( \frac{k \cdot \operatorname{sen}\theta}{(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)} - \operatorname{sen}\theta \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + k = \frac{k^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)^2} - \frac{2 \cdot k \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)} + \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{k \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)^2} - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)}{(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)^2 = k \cdot \operatorname{sen}^2\theta - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 4 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + 4 \cdot \operatorname{sen}^4\theta = k \cdot \operatorname{sen}^2\theta - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + 4 \cdot \operatorname{sen}^4\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (k + 2) \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{k + 2} \tag{3.1.16}$$

E, pela identidade  $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , temos que:

$$\cos^2\theta = \frac{k + 1}{k + 2} \tag{3.1.17}$$

Dados 3.1.16 e 3.1.17, temos que:

$$\tan^2\theta = \frac{1}{k + 1}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{k + 1}}$$

E lembrando que  $k = \frac{2gh}{v_0^2}$ , temos que:

$$\tan \theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \quad (3.1.18)$$

Sendo assim, o ângulo  $\theta_*$  que nos dá o maior alcance quando não estamos necessariamente na mesma altura em que o ponto de chegada é dado por:

$$\theta_* = \arctan \left( \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \right) \quad (3.1.19)$$

Como pode ser observado, para  $h = 0$  temos que  $\theta_* = \frac{\pi}{4}$ , como deduzido na seção 3.1.2. As equações 3.1.16 e 3.1.17 também mostram que:

$$\text{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{k+2}} \quad (3.1.20)$$

$$\text{cos} \theta = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}} \quad (3.1.21)$$

Substituindo na equação 3.1.15 obtemos:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}} \left( \frac{1}{\sqrt{k+2}} + \sqrt{\frac{1}{k+2} + k} \right) \Rightarrow$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}} \left( \frac{1}{\sqrt{k+2}} + \frac{\sqrt{(k+1)^2}}{\sqrt{k+2}} \right) \Rightarrow$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}} \left( \frac{k+2}{\sqrt{k+2}} \right) \Rightarrow$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sqrt{k+1}$$

Como  $k = \frac{2gh}{v_0^2}$ , temos que:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0}{g} \cdot \sqrt{2gh + v_0^2} \quad (3.1.22)$$

Novamente vemos que, para  $h = 0$ , temos o valor do alcance máximo  $x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}$ , como vimos na seção 3.1.2.

### 3.1.4 O desenvolvimento desta atividade realizado na E. E. Prof. Aníbal de Freitas, Campinas-SP

A atividade de construir e lançar os foguetes foi trabalhada pelo mestrando com seus alunos de três salas do terceiro ano do ensino médio da E. E. Prof. Aníbal de Freitas, em Campinas, nos anos de 2015 e 2016.

Na escrita dessa dissertação os relatórios dos alunos da turma de 2016 ainda não haviam sido entregues, portanto os dados utilizados neste trabalho são de 2015.

A direção e coordenação da escola apoiaram bastante o projeto. Os professores, principalmente a professora Laura Ramos de Freitas (de física) e o professor Elias Luzia Salvador (de química), abraçaram a ideia e auxiliaram na execução da atividade em ambos os anos.



**Figura 3.10:** Vista dos fundos da escola



**Figura 3.11:** Vista da escola pelo terreno

Após passar todo o conteúdo de polinômios, foi dada uma aula explicando como o projeto seria realizado. Nessa aula, e posteriormente pela internet, foram dadas as instruções de como construir os aeromodelos e as bases de lançamento, assim como dicas para que não houvesse problemas no dia do lançamento.

Os alunos organizaram-se em grupos de 5 ou 6. Cada grupo construiu seu aeromodelo e, no dia marcado, com autorização da direção da escola, dirigimo-nos à um terreno ao lado da escola onde teríamos um espaço amplo para os lançamentos.



**Figura 3.12:** Dia do lançamento em 2016



**Figura 3.13:** Lançamento 2015

Lá no terreno todos os grupos tiveram a oportunidade de lançar os seus aeromodelos e, a cada lançamento, nós íamos até o local da queda e medíamos a distância horizontal atingida

pelo foguete (essa medida foi feita com um barbante, previamente medido e marcado com uma trena).



**Figura 3.14:** Aeromodelo em pleno voo



**Figura 3.15:** Medida da distância horizontal

Esse dia foi bem cansativo, porém o cansaço compensou ao ver que os alunos se dedicaram ao realizar a atividade, e o que era o objetivo - trazer para eles algo prático e instigante - foi realizado. Os alunos de outros anos ficaram curiosos olhando das janelas e querendo chegar logo ao terceiro ano para poder lançar foguetes. Esta repercussão naturalmente deixou o professor muito animado com o projeto.

Voltando à sala de aula, os dados obtidos com os lançamentos foram revistos e, confirmando que todos haviam anotado certo as distâncias, foi passado o relatório que deveria ser entregue no bimestre seguinte. Nesse relatório eles deveriam explicar o experimento e seguir o roteiro respondendo as perguntas a seguir, que estão separadas por matéria:

- GERAL

1. Qual o material utilizado na construção do aeromodelo?
2. Descreva as observações e instruções da construção.
3. Quais foram as dificuldades na construção?
4. Quais eram as condições do tempo no dia do lançamento?
5. Duas partes influenciaram muito a aerodinâmica do aeromodelo, o seu bico, com um pequeno peso na frente, e suas asas. Sem uma dessas duas, haveria problemas no lançamento. Explique os motivos dessas afirmações.
6. Faça uma autoavaliação do processo construção-lançamento.
7. Observações do grupo (opcional).

- MATEMÁTICA

1. Qual foi, ou quais foram, as distâncias horizontais atingidas pelo aeromodelo?
2. Como ficou o polinômio que modela a trajetória?
3. Quais fatores foram desconsiderados no cálculo da trajetória?

4. Qual a altura máxima atingida? (essa medida é estimada utilizando o polinômio que modela a trajetória visto na seção 3.1.1)
5. A distância atingida poderia ter sido maior? Justifique.
6. Quais fatores prejudicaram o lançamento?

- QUÍMICA

1. O componente principal do vinagre é o ácido acético. Qual é o valor esperado para o pH do vinagre? Explique.
2. O bicarbonato de sódio ( $NaHCO_3$ ) reage com ácido acético ( $CH_3COOH$ ) produzindo ácido carbônico ( $H_2CO_3$ ) e acetato de sódio ( $CH_3COO^-Na^+$ ). Escreva a equação química balanceada da reação.
3. Qual é a origem do gás que atua como propelente no lançamento do foguete?
4. Escreva a equação de ionização do ácido acético. Este ácido é fraco ou forte? Explique.
5. Calcule as massas molares dos compostos envolvidos na reação do exercício 2. Dados:  $C = 12g/mol$ ,  $O = 16g/mol$ ,  $Na = 23g/mol$   $H = 1g/mol$ .
6. O acetato de sódio é um ácido ou base? Explique.

- FÍSICA

1. Qual o princípio físico que faz o foguete voar?
2. Desprezando a resistência do ar, que tipo de movimento ocorre na horizontal? Qual função descreve esse movimento? Ela corresponde a um polinômio de que grau?
3. Qual a trajetória que o foguete descreve no tempo na vertical? Qual equação descreve essa trajetória? Ela corresponde a um polinômio de que grau?
4. Qual o valor da velocidade vertical no ponto mais alto da trajetória?
5. A velocidade final com que o foguete atinge o chão é maior, menor ou igual a velocidade inicial?
6. Mostre que o maior alcance ocorre para o ângulo de 45 graus.

A princípio, o trabalho era apenas de matemática, no entanto, o projeto chamou a atenção dos professores de física e química e a proposta de um trabalho interdisciplinar surgiu. Participaram desta atividade a Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Laura Ramos de Freitas (Física) e o Prof. Elias Luzia Salvador (Química). Na parte de física, os alunos puderam rever conteúdos ensinados no primeiro ano do ensino médio que envolvem o lançamento de projéteis e o movimento uniformemente variado. Em química, eles trabalharam com balanceamento e reações químicas (conteúdo do terceiro ano do ensino médio) já que o combustível para o foguete pode ser feito por uma reação entre bicarbonato de sódio e vinagre.

A orientação para os lançamentos, depois da discussão do item 3.1.2 desenvolvida em classe com os alunos, foi de que todos os grupos construíssem uma base com um ângulo de  $45^\circ$  ( $\frac{\pi}{4}$  rad) para que os foguetes atingissem a distância máxima. A tabela mostra quais foram as distâncias atingidas por cada grupo:

**Tabela 3.1:** Distâncias horizontais atingidas pelos aeromodelos nos terceiros anos A, B e C

3 <sup>o</sup> A		3 <sup>o</sup> B		3 <sup>o</sup> C	
Grupo	Distância (m)	Grupo	Distância (m)	Grupo	Distância (m)
1	58,30	1	59,90	1	76,60
2	38,70	2	60,70	2	59,00
3	54,30	3	24,30	3	70,80
4	38,70	4	22,00	4	59,90
5	35,00	5	102,60	5	96,70
6	40,30	6	91,00	6	29,00
7	52,50	7	67,80	7	45,40

O esperado no relatório era que os alunos pudessem desenvolver o polinômio que modela a trajetória com os dados obtidos na atividade prática. Todas as perguntas feitas em matemática estão relacionadas com o entendimento do trajeto realizado pelo aeromodelo, desde perceber que a curva que ele descreve é uma parábola, que a altura máxima será obtida calculando as coordenadas do vértice desta parábola, e que pode-se determinar a curva através de um polinômio de segundo grau.

Ao explicar como deveria ser calculado o polinômio que modela a trajetória, fazendo todo o desenvolvimento da seção 3.1.1 com os alunos, foi percebido que alguns deles tiveram muita dificuldade em entender alguns passos (principalmente o que aborda o conceito do limite). Foi notado que, uma revisão de trigonometria antes de começar o desenvolvimento do polinômio era necessária. Desta forma, cada etapa do desenvolvimento poderia ser entendida com mais facilidade.

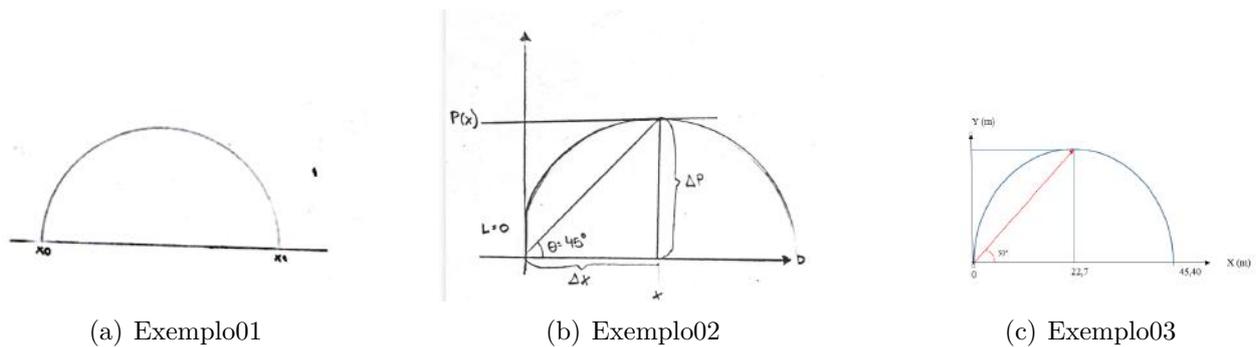
Na prática, apesar de alguns problemas técnicos nos lançamentos (como canos mal vedados que diminuía a pressão com a qual o foguete saíria da base), todos os grupos conseguiram realizar os lançamentos<sup>2</sup>.

Os relatórios foram entregues e, em grande parte tiveram alguns problemas. Percebi que os alunos não sabiam como redigir um relatório pois nunca haviam feito um. Por outro lado, quando constatadas essas dificuldades, foi possível ajudá-los a saná-las, mesmo com pouco tempo disponível.

A maioria dos grupos conseguiu desenvolver corretamente a expressão do polinômio com os seus próprios dados e fizeram corretamente os cálculos da altura máxima. Erros conceituais apareceram na hora em que eles tentaram representar a trajetória fazendo o gráfico da parábola, que na verdade se parecia mais com um semicírculo. Estes erros foram citados posteriormente e as dúvidas foram tiradas, destacando particularmente o coeficiente angular da tangente da parábola no lançamento. Por ser um polinômio, não há nenhum ponto onde a reta tangente é vertical, e esse argumento foi explicado aos alunos.

---

<sup>2</sup>É recomendado que professor esteja equipado com os materiais para que os alunos possam fazer reparos no dia do lançamento, caso necessário.



**Figura 3.16:** Representação gráfica de uma “parábola” como constou de alguns relatórios

Os valores obtidos no dia do lançamento e relatados nos trabalhos dos alunos estavam de acordo com o esperado, mostrando que, no geral, a atividade foi entendida. O ponto alto a ser destacado é o real envolvimento deles na atividade e a percepção de como os conceitos que eles aprendem podem ser empregados na compreensão dos fenômenos. Tudo isso retrata muito bem os preceitos do ensino através de projetos e do ensino investigativo.

### 3.1.5 Estimativa da Velocidade e do Tempo de Lançamento

Os ângulos de lançamento foram todos iguais ( $45^\circ$ ), tendo em vista a discussão sobre o ângulo de maior alcance, e podemos concluir que a força exercida em cada foguete para o seu lançamento foi diferente já que eles atingiram distâncias diferentes. Isso se deu pois cada grupo lançou o foguete com uma quantidade diferente de pressão, alguns com apenas a pressão do ar gerada por uma bomba de encher pneus, outros com a pressão do gás carbônico resultado da reação entre o vinagre e o bicarbonato de sódio. Há também os casos onde aconteceram vazamentos durante o lançamento dos foguetes pois o sistema base-foguete não estava muito bem vedado, facilitando a perda de pressão e, conseqüentemente, levando alguns foguetes a atingirem distâncias mais curtas.

A seguir apresentamos alguns cálculos para tentar estimar a velocidade escalar e o tempo de lançamento de alguns dos grupos. Para estes cálculos iremos utilizar os dados da tabela seguinte que incluem alguns grupos mencionados na tabela 3.1 e a média de todos os lançamentos.

**Tabela 3.2:** Distâncias horizontais de alguns grupos

Grupo	Distância (m)
A	22,00
B	59,90
C	70,80
D	102,60
Média	56,36

Vamos assumir em todos os casos que a altura inicial é igual a 0, portanto utilizaremos a equação 3.1.9:

$$x_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2}{g}$$

Usando  $g = 9,8m/s^2$  e arredondando os valores para duas casas decimais, temos a seguinte tabela:

**Tabela 3.3:** Velocidades de lançamento

Grupo	Velocidade (m/s)	Velocidade (km/h)
A	14,68	52,85
B	24,27	87,37
C	26,34	94,82
D	31,71	114,16
Média	23,59	84,60

Agora, para calcular o tempo de voo de cada foguete usaremos a equação 3.1.14. Como sabemos que  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , temos que

$$v_x = v_0 \cdot \cos(45^\circ) \Rightarrow v_x = \frac{v_0 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Agora substituindo esse resultado na equação 3.1.10 temos

$$x = v_x \cdot t \Rightarrow t = \frac{x\sqrt{2}}{v_0} \quad (3.1.23)$$

Ao substituir os dados obtidos nas tabelas anteriores, podemos determinar o tempo de voo de cada um dos experimentos:

**Tabela 3.4:** Tempos de voo dos aeromodelos de alguns grupos

Grupo	Tempo de voo (s)
A	2,12
B	3,49
C	3,80
D	4,58
Média	3,39

Mostramos assim diversos aspectos que podem ser explorados com uma atividade que leva os alunos para fora da sala de aula e os mostra que o que eles aprendem na escola é útil e pode ser divertido.

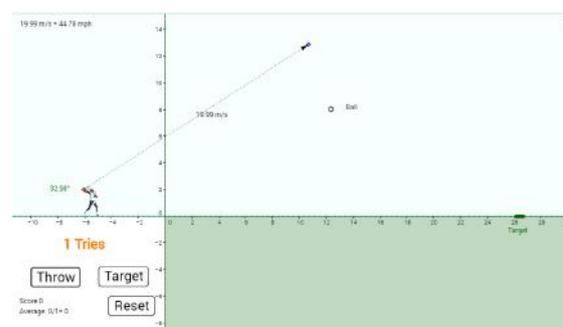
Um outro problema muito interessante que pode ser proposto é o de, sabendo a velocidade escalar inicial, calcular qual será o ângulo de lançamento que permite acertar um alvo a uma distância fixada (menor do que a máxima). Este problema pode ser implementado utilizando-se o GeoGebra [10], dando novamente um aspecto prático e de investigação.

Os mesmos conteúdos que foram abordados com o lançamento de um aeromodelo podem ser trabalhados com quaisquer objetos atirados num lançamento oblíquo como, por exemplo: o arremesso de uma bola de basquete, que envolve o problema com alturas de lançamento e chegada diferentes; o arremesso de dardos, discos e pesos, que podem ser trabalhados em épocas de olimpíadas juntamente com o professor de educação física; ou até a trajetória da bala de uma catapulta, onde pode-se fazer um modelo em escala com os alunos.

Dois exemplos de atividade com a utilização do GeoGebra são o lançamento oblíquo, e o lançamento no futebol americano que podem ser vistos, respectivamente em [11] e [9]



**Figura 3.17:** Lançamento oblíquo



**Figura 3.18:** Aplicativo do GeoGebra sobre o lançamento no futebol americano

A seguir veremos outra aplicação dos conteúdos do ensino médio numa proposta de atividade que envolve programas computacionais. Esta atividade pode ser trabalhada tanto em disciplinas iniciais dos cursos de graduação quanto no ensino médio, no qual sugere-se novamente uma revisão dos conceitos já introduzidos.

## 3.2 Modelagem de Superfícies de Revolução

O projeto a ser desenvolvido pelos alunos nesta seção baseia-se em atividades realizadas na disciplina MA742 - Tópicos Especiais de ensino de Matemática II, ministrada pela Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Sueli I. R. Costa no primeiro semestre de 2011, no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, na Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Um aprofundamento desta atividade, relacionado com conceitos de áreas, volumes e centro de massa, foi aplicado em turmas de cálculo de várias variáveis e pode ser visto em [7].

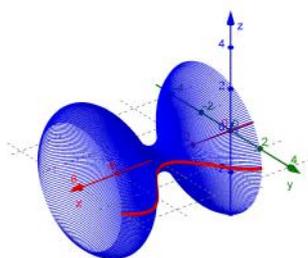
Nesta proposta de atividade a meta será incorporar as tecnologias à modelagem polinomial abordando os assuntos vistos nos capítulos 1 e 2. O objetivo é o de reproduzir no computador um objeto físico real (que é um sólido de revolução) da forma mais aproximada possível. Este trabalho propicia novamente ao aluno observar como os conceitos de matemática que ele vê no

ensino médio ou início da universidade são aplicados por exemplo em simulações computacionais e também em desenvolvimentos recentes como as chamadas impressoras 3D. A modelagem é feita a partir do gráfico de um polinômio (ou mais) que será a curva geratriz, e depois, a rotação deste em torno de um eixo gerando uma superfície. Essa superfície é denominada **superfície de revolução**<sup>3</sup> pois é gerada através da rotação de uma curva plana em torno de um eixo. Tal rotação é realizada utilizando uma matriz denominada **matriz de rotação** que detalhamos mais adiante.

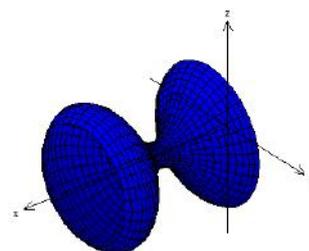
Para a modelagem, propomos o uso de dois programas computacionais:

1. GeoGebra ([10]): Utilizado para realizar os cálculos do polinômio que será a curva geratriz, e do produto da matriz desse polinômio com a matriz de rotação; também o utilizaremos para plotar o gráfico da superfície de revolução.
2. Winplot ([31]): Utilizado para plotar o gráfico da superfície de revolução (o Winplot é bem mais simples de se utilizar que o GeoGebra neste contexto, por isso explicamos também como utilizá-lo).

Ambos os programas são de distribuição gratuita e podem ser facilmente instalados nos computadores das escolas ou dos próprios alunos.<sup>4</sup>



**Figura 3.19:** Superfície de Revolução plotada utilizando o GeoGebra



**Figura 3.20:** Superfície de Revolução plotada utilizando o Winplot

<sup>3</sup>A região cercada pela superfície de revolução é denominada sólido de revolução.

<sup>4</sup>Os programas podem ser encontrados em:

Geogebra: <http://www.geogebra.org/>

Winplot: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>.

### 3.2.1 Matriz de Rotação

Resumimos a seguir os conceitos envolvendo matriz de rotação.

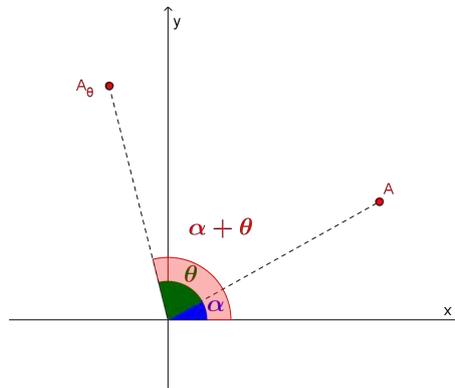
#### Rotação no Plano

Dado um ponto  $A = (x, y)$  no plano  $xOy$  vamos escrevê-lo na sua forma polar

$$A = (x, y) = \rho (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{onde} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Queremos rotacionar esse ponto num ângulo  $\theta$ , ou seja, queremos que esse ponto  $A$  se transforme num ponto

$$A_\theta = (x_\theta, y_\theta) = \rho (\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta))$$



**Figura 3.21:** Rotação de um ângulo  $\theta$

Escrevendo as coordenadas desses pontos como entradas de uma matriz  $2 \times 1$  temos

$$A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_\theta = \begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$

Utilizando a soma de arcos vista na seção 1.1.4, temos que

$$A_\theta = \rho \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ \cos(\alpha) \sin(\theta) + \sin(\alpha) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Agora, lembrando o produto de matrizes visto na seção 1.2.4, vemos que

$$A_\theta = \begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ \cos(\alpha) \sin(\theta) + \sin(\alpha) \cos(\theta) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Portanto

$$A_\theta = R_\theta \cdot A \quad \text{onde} \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Ou seja, concluímos que a matriz  $R_\theta$ , quando multiplicada por  $A$ , efetua uma rotação de um ângulo  $\theta$  no senti anti-horário, e chamamos  $R_\theta$  de matriz de rotação (na linguagem de álgebra linear  $R_\theta$  está associada à transformação linear  $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que é uma rotação).

Chamamos a matriz  $R_\theta$  de Matriz de Rotação a um ângulo  $\theta$ .

É preciso notar que essa matriz rotaciona o ponto num ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário. Para rotacioná-lo no sentido horário basta trocar  $\theta$  por  $-\theta$ .

Agora vamos ver como rotacionar um ponto do espaço.

### Rotação no Espaço

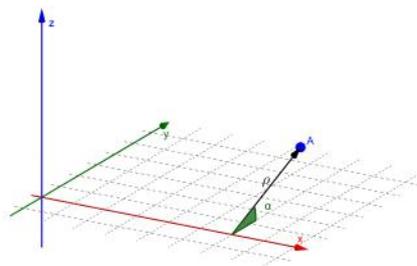
Quando estamos no plano sempre fazemos a rotação em torno da origem porém, no espaço, esta deve ser feita em torno de um eixo. Consideramos a seguir rotações ao redor dos eixos coordenados do espaço. As matrizes que estão associadas a rotações em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , são respectivamente

$$R_{\theta x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad R_{\theta y} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad R_{\theta z} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostremos a matriz de rotação em torno do eixo  $x$  (os outros casos são similares). Para isso primeiramente notamos que quando estamos fazendo a rotação em torno de um eixo a coordenada do ponto nesse eixo não muda.

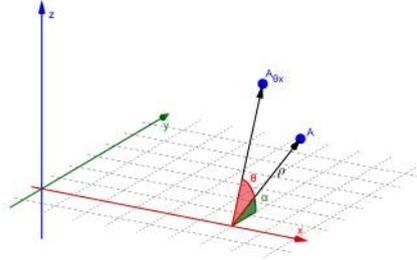
Dado o ponto  $A = (x, y, z) = (x, \rho \cdot \cos(\alpha), \rho \cdot \text{sen}(\alpha))$  do espaço, onde  $\alpha$  é o ângulo que o vetor projeção  $(y, z)$  faz com o eixo  $y$  no plano  $yOz$ , escrevemos  $A$  na forma coluna da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} x \\ \rho \cdot \cos(\alpha) \\ \rho \cdot \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix}$$



**Figura 3.22:** Ponto  $A$  no espaço

Queremos rotacionar este ponto em torno do eixo  $x$  por um ângulo  $\theta$  (no sentido anti-horário quando consideramos a projeção em  $yOz$ ).



**Figura 3.23:** Rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $x$

Podemos ver pela Figura 3.23 que as novas coordenadas serão dadas pela matriz

$$A_{\theta x} = \begin{bmatrix} x \\ \rho \cdot \cos(\alpha + \theta) \\ \rho \cdot \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$

Mas

$$A_{\theta x} = \begin{bmatrix} x \\ \rho \cdot \cos(\alpha + \theta) \\ \rho \cdot \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \rho \cdot (\cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta)) \\ \rho \cdot (\cos(\alpha) \sin(\theta) + \sin(\alpha) \cos(\theta)) \end{bmatrix}$$

Da mesma forma como fizemos antes, vemos que:

$$A_{\theta x} = \begin{bmatrix} x \\ \rho \cdot (\cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta)) \\ \rho \cdot (\cos(\alpha) \sin(\theta) + \sin(\alpha) \cos(\theta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \rho \cdot \cos(\alpha) \\ \rho \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Portanto

$$A_{\theta x} = R_{\theta x} \cdot A \quad \text{onde} \quad R_{\theta x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

Agora sabemos como rotacionar pontos no espaço e, com essa ferramenta, podemos rotacionar todos os pontos do gráfico de uma função num determinado intervalo, o que faremos a seguir, porém sem deixar o ângulo  $\theta$  fixo, o que nos permitirá fazer a volta completa em torno do eixo e deixar o rastro do ponto por todo esse caminho. Com isto apresentamos a descrição de uma superfície de revolução na forma paramétrica, o que possibilita sua implementação nos programas computacionais.

### 3.2.2 Proposta de Atividade

Essa atividade pode ser desenvolvida em vários níveis de dificuldade já que quase tudo pode ser feito pelo próprio software, portanto é necessário que o professor tenha em mente quais são os conceitos que ele quer valorizar na aplicação da atividade.

O nosso objetivo será descrever na forma paramétrica alguma superfície de revolução de um objeto real, como uma garrafa ou uma taça, e passá-la para o computador, ou seja, fazer um modelo computacional de algo do dia-a-dia.

Como comentamos, atualmente utiliza-se deste tipo de modelagem, num nível muito mais avançado, em computação gráfica, filmes, e até na indústria (impressoras 3D). Queremos mostrar com a atividade um pouco dessa aplicação da matemática num nível que pode ser acompanhado por alunos do ensino médio ou alunos que estão no começo de sua graduação.

O material necessário será um sólido de revolução, papel milimetrado, caneta, e um computador com o GeoGebra e o Winplot instalados.

Em diversos pontos da atividade o professor pode escolher a melhor forma para executá-lo. Ele pode pedir que o aluno faça todos os cálculos à mão, mas é importante observar que o GeoGebra possui várias funções que podem facilitar muito o processo.

Para poder mostrar como a atividade pode ser realizada utilizaremos uma taça de vidro:



**Figura 3.24:** Taça de vidro, uma superfície de revolução

No papel milimetrado desenharemos um plano cartesiano  $xy$  e, em seguida, colocamos a taça deitada com o seu eixo de revolução sobre o eixo  $x$  desenhado no papel milimetrado.



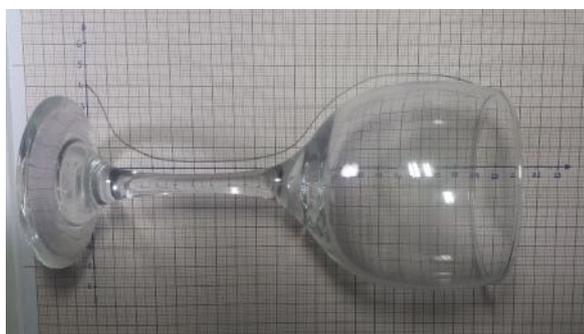
(a) vista de cima



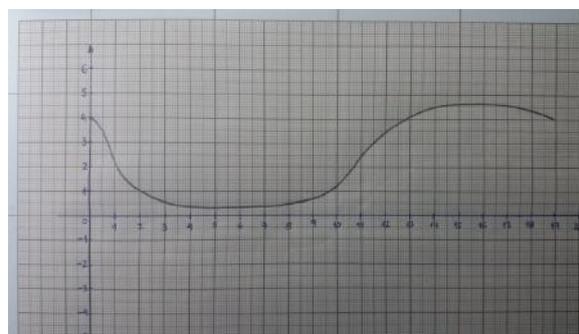
(b) vista inclinada

**Figura 3.25:** Eixo de rotação sobre o eixo  $x$ 

Agora desenhamos a borda da taça no papel milimetrado seguindo a curva da superfície de revolução. Consideramos que essa curva não tem nenhum intervalo onde temos duas imagens para um único valor de  $x$ , ou seja, traçando retas verticais no papel nenhuma pode intersectar o desenho da curva em mais de um ponto. Isso é importante para que a curva seja modelada por trechos de gráficos de funções (polinômios). Ainda é possível realizar a atividade caso isto ocorra, mas precisaríamos descrever a curva parametricamente.



(a) Exemplo com a taça



(b) Exemplo sem a taça

**Figura 3.26:** Borda da Taça

Após estes passos, temos que escolher alguns pontos na curva desenhada que servirão para determinar o(s) polinômio(s) que ajusta(m) (modelam) esta curva. No nosso exemplo escolhemos os pontos  $A = (0; 4)$ ,  $B = (1; 2, 3)$ ,  $C = (2; 1)$ ,  $D = (3; 0, 5)$ ,  $E = (5; 0, 3)$ ,  $F = (8; 0, 5)$ ,  $G = (10; 1, 2)$ ,  $H = (11; 2, 5)$ ,  $I = (14; 4, 5)$  e  $J = (19; 4)$ .

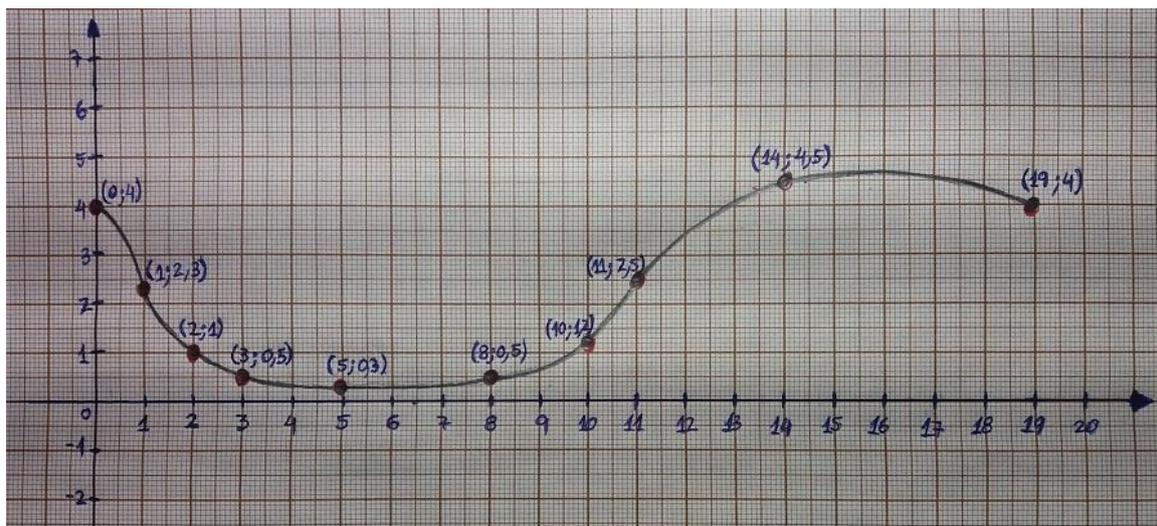


Figura 3.27: Taça de vidro, uma superfície de revolução

O próximo passo é considerar estes pontos e modelar a curva por polinômios que passam por eles, como na seção 2.5.

Essa parte da atividade é importante para que os alunos possam analisar quantos pontos eles usarão para modelar a curva por polinômios. Temos situações onde o ajuste por polinômios pode não ser bom<sup>5</sup>. Por exemplo quando tentamos ajustar a curva por um único polinômio. Neste caso, se consideramos poucos pontos dificilmente o gráfico do polinômio de grau baixo fará as curvas necessárias e mesmo se considerarmos um número grande  $k$  de pontos, o gráfico do polinômio de grau  $k - 1$  que passa por estes pontos poderá ter um comportamento muito diferente da curva fora dos pontos. Uma abordagem eficiente é tomarmos um número razoável de pontos e procurarmos ajustar cada trecho da curva contendo até quatro pontos por polinômios de grau até 3. Como fazemos no nosso exemplo. É muito interessante trabalhar com os alunos discutindo as observações acima.

Primeiramente consideramos os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ <sup>6</sup>, e vamos modelar a primeira parte da curva por um polinômio de grau menor ou igual a 3. Essa escolha foi feita pois nesse intervalo temos uma inflexão na curva.

$$p_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Substituindo as coordenadas dos pontos nessa equação temos o sistema:

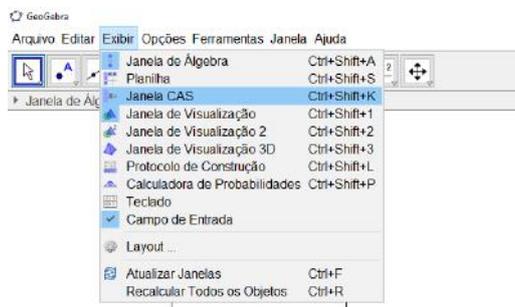
$$\begin{cases} a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 4 \\ a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 2,3 \\ a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 1 \\ a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) + d = 0,5 \end{cases}$$

A solução desse sistema fornece-nos os valores  $a = \frac{1}{15}$ ,  $b = 0$ ,  $c = -\frac{53}{30}$  e  $d = 4$

<sup>5</sup>É interessante que os alunos possam realizar esta etapa também no GeoGebra para poder estudar o número de pontos que torna a modelagem conveniente.

<sup>6</sup>Foram escolhidos 4 pontos, pois nota-se ao visualizar a curva, que há um ponto de inflexão entre os pontos  $A$  e  $C$ .

Aqui abrimos um parêntese para mostrar um dos pontos que podem ser feitos com o GeoGebra. O professor pode pedir que o aluno resolva os vários sistemas lineares que aparecerão para determinar os coeficientes dos polinômios em cada ponto ou, se o foco não for esse na aula, pode pedir que o aluno resolva o sistema pelo GeoGebra. Isso é feito utilizando a janela CAS.



**Figura 3.28:** Habilitando a Janela CAS

No campo 1 digitamos a matriz aumentada do sistema, fazemos isso colocando chaves  $\{\}$  e dentro delas inserindo cada linha (também dentro de chaves) separando os elementos por vírgulas. Depois disso apertamos Enter.

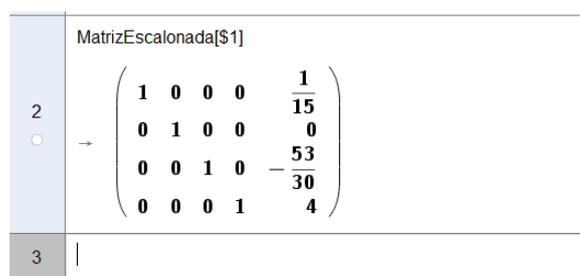
Por exemplo, para criar a matriz aumentada do nosso sistema digitamos

$$\{\{0, 0, 0, 1, 4\}, \{1, 1, 1, 1, 2.3\}, \{8, 4, 2, 1, 1\}, \{27, 9, 3, 1, 0.5\}\}$$



**Figura 3.29:** Digitando a matriz aumentada

No campo 2 Digitamos o comando [MatrizEscalonada](#) [ $\$1$ ] e apertamos Enter. A matriz seguinte nos dará na última coluna os valores das variáveis em ordem



**Figura 3.30:** Matriz escalonada com a solução do sistema

Assim temos o nosso primeiro polinômio que está definido no intervalo  $[0, 3]$ :

$$p_1(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{53}{30}x + 4$$

Agora tomamos os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ . Observamos que agora são só três pontos<sup>7</sup> e iremos modelar o próximo intervalo por um polinômio de grau menor ou igual a 2

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

Substituindo as coordenadas dos pontos nessa equação temos o sistema:

$$\begin{cases} a(3)^2 + b(3) + c = 0,5 \\ a(5)^2 + b(5) + c = 0,3 \\ a(8)^2 + b(8) + c = 0,5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos  $a = \frac{1}{30}$ ,  $b = -\frac{11}{30}$  e  $c = \frac{13}{10}$ , logo temos o polinômio

$$p_2(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{11}{30}x + \frac{13}{10},$$

que será representado no intervalo  $[3, 8]$ .

Para os pontos  $F$ ,  $G$  e  $H$  determinaremos o nosso terceiro polinômio de grau menor ou igual a 2

$$p_3(x) = ax^2 + bx + c$$

Substituindo as coordenadas dos pontos nessa equação temos o sistema:

$$\begin{cases} a(8)^2 + b(8) + c = 0,5 \\ a(10)^2 + b(10) + c = 1,2 \\ a(11)^2 + b(11) + c = 2,5 \end{cases}$$

A solução desse sistema fornece-nos os valores  $a = \frac{19}{60}$ ,  $b = -\frac{107}{20}$  e  $c = \frac{691}{30}$  dando-nos o polinômio

$$p_3(x) = \frac{19}{60}x^2 - \frac{107}{20}x + \frac{691}{30}$$

Esse polinômio será tomado apenas no intervalo  $[8, 11]$ .

Por fim, para os pontos  $H$ ,  $I$  e  $J$  construímos nosso último polinômio, também de grau menor ou igual a 2

$$p_4(x) = ax^2 + bx + c$$

Substituindo as coordenadas dos pontos nessa equação temos o sistema:

$$\begin{cases} a(11)^2 + b(11) + c = 2,5 \\ a(14)^2 + b(14) + c = 4,5 \\ a(19)^2 + b(19) + c = 4 \end{cases}$$

---

<sup>7</sup>A escolha de apenas três pontos é feita devido à verificação de que a curva entre estes pontos não tem pontos de inflexão.

A solução desse sistema fornece-nos os valores  $a = -\frac{23}{240}$ ,  $b = \frac{49}{16}$  e  $c = -\frac{2351}{120}$  dando-nos o polinômio

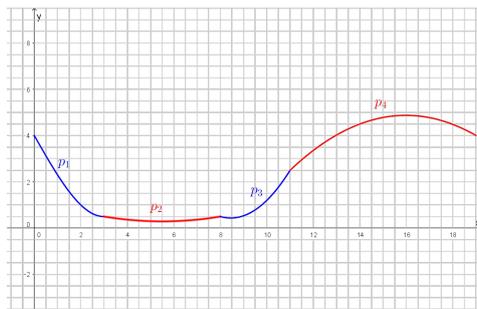
$$p_4(x) = -\frac{23}{240}x^2 + \frac{49}{16}x - \frac{2351}{120}$$

no intervalo  $[11, 19]$ .

Traçando cada gráfico no GeoGebra utilizando o comando

Função [ $\langle$  Função  $\rangle$ ,  $\langle$  Valor de x Inicial  $\rangle$ ,  $\langle$  Valor de x Final  $\rangle$ ]

verificamos que a curva formada aproxima-se bem do desenho da borda da nossa taça. Ajustes podem ser realizados e quanto menor o intervalo entre os pontos, mais a curva se aproximará da original. Por outro lado, do ponto de vista computacional, vários intervalos pequenos gerando vários polinômios significam muito tempo e muita memória, então a melhor opção é escolher adequadamente os pontos para termos a curva o mais próximo possível com um número pequeno de pontos.

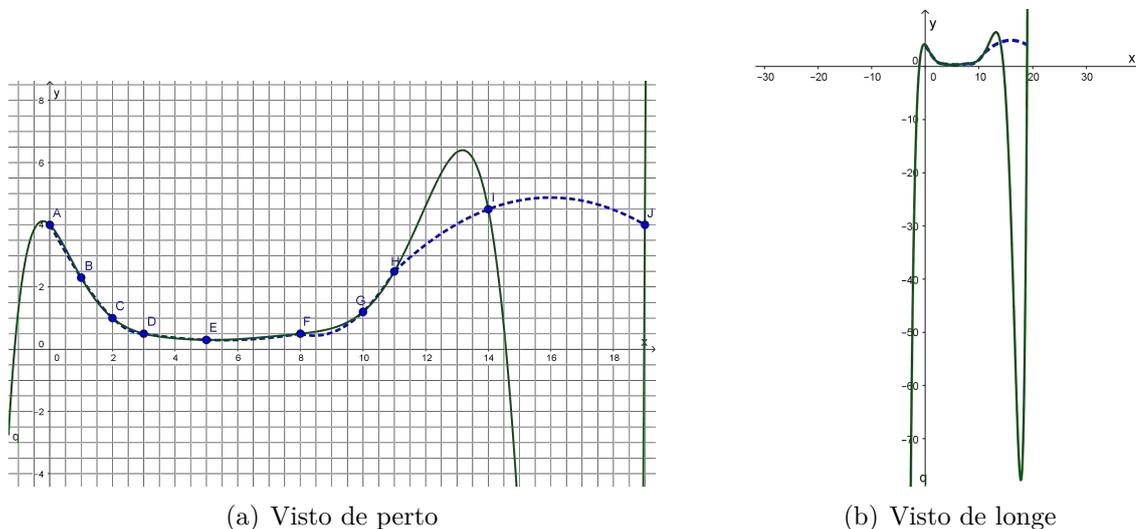


**Figura 3.31:** Curva gerada pelos polinômios

Poderíamos também tomar um polinômio de grau maior passando por muitos pontos, porém, ao fazer isso, perdemos o controle de como esse polinômio se comporta entre os pontos. Tomando os dez pontos do nosso exemplo, podemos modelar nossa curva por um polinômio de grau menor ou igual a nove. Isso é, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} a(0)^9 + b(0)^8 + c(0)^7 + d(0)^6 + e(0)^5 + f(0)^4 + g(0)^3 + h(0)^2 + i(0) + j = 4 \\ a(1)^9 + b(1)^8 + c(1)^7 + d(1)^6 + e(1)^5 + f(1)^4 + g(1)^3 + h(1)^2 + i(1) + j = 2,3 \\ a(2)^9 + b(2)^8 + c(2)^7 + d(2)^6 + e(2)^5 + f(2)^4 + g(2)^3 + h(2)^2 + i(2) + j = 1 \\ a(3)^9 + b(3)^8 + c(3)^7 + d(3)^6 + e(3)^5 + f(3)^4 + g(3)^3 + h(3)^2 + i(3) + j = 0,5 \\ a(5)^9 + b(5)^8 + c(5)^7 + d(5)^6 + e(5)^5 + f(5)^4 + g(5)^3 + h(5)^2 + i(5) + j = 0,3 \\ a(8)^9 + b(8)^8 + c(8)^7 + d(8)^6 + e(8)^5 + f(8)^4 + g(8)^3 + h(8)^2 + i(8) + j = 0,5 \\ a(10)^9 + b(10)^8 + c(10)^7 + d(10)^6 + e(10)^5 + f(10)^4 + g(10)^3 + h(10)^2 + i(10) + j = 1,2 \\ a(11)^9 + b(11)^8 + c(11)^7 + d(11)^6 + e(11)^5 + f(11)^4 + g(11)^3 + h(11)^2 + i(11) + j = 2,5 \\ a(14)^9 + b(14)^8 + c(14)^7 + d(14)^6 + e(14)^5 + f(14)^4 + g(14)^3 + h(14)^2 + i(14) + j = 4,5 \\ a(19)^9 + b(19)^8 + c(19)^7 + d(19)^6 + e(19)^5 + f(19)^4 + g(19)^3 + h(19)^2 + i(19) + j = 4 \end{cases}$$

Que gera a figura abaixo, onde a curva tracejada é o gráfico do ajuste por polinômios feito por partes enquanto a curva contínua é o gráfico do polinômio de grau nove passando por todos os pontos



**Figura 3.32:** Polinômio passando pelos 10 pontos

Também pode-se encontrar esses polinômios utilizando no GeoGebra o comando

Polinômio [< Lista de Pontos >]

Com esse comando basta selecionar os pontos onde você quer que o polinômio passe que o GeoGebra realiza todos os cálculos (novamente cabe ao professor determinar qual o propósito da atividade e como aplicá-la. Nesse caso, teremos tudo feito de forma implícita e pode não ser tão interessante do ponto de vista matemático).

Agora, aplicaremos uma rotação em cada uma dessas curvas gerando a taça. Para isso utilizaremos matrizes de rotação vistas na seção 3.2.1, mais especificamente a matriz  $R_{\theta_x}$ .

Para cada ângulo que determinarmos para  $\theta$  a curva irá ser rotacionada por esse ângulo. Porém, queremos que a curva passe por todos os ângulos  $\theta$  (de 0 a  $2\pi$ ). Logo, faremos com que o ângulo  $\theta$  seja um parâmetro que chamaremos de  $u$ .

Nesse momento poderemos escolher qual software usaremos para rotacionar a curva: o GeoGebra ou o Winplot.

No GeoGebra essa parte da atividade vai requerer muito processamento computacional e o computador poderá ficar bem lento.

De qualquer forma teremos primeiramente que descrever parametricamente cada trecho da superfície gerada pela rotação do gráfico de um polinômio. Usaremos os parâmetros  $t$  para o polinômio e  $u$  para o ângulo de rotação.

Para rotacionar o gráfico do polinômio teremos que escrevê-lo no plano  $xOy$  em uma matriz coluna para poder multiplicá-lo pela matriz de rotação, então teremos:

$$P_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ p_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

O parâmetro  $t$  será usado apenas em um intervalo, digamos

$$[x_0, x_1]$$

Agora multiplicamos a matriz de rotação por  $P_1$  para obter as coordenadas na nossa superfície de revolução:

$$S_1 = R_{ux} \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(u) & -\sin(u) \\ 0 & \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ p_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ p_1(t) \cdot \cos(u) \\ p_1(t) \cdot \sin(u) \end{bmatrix}$$

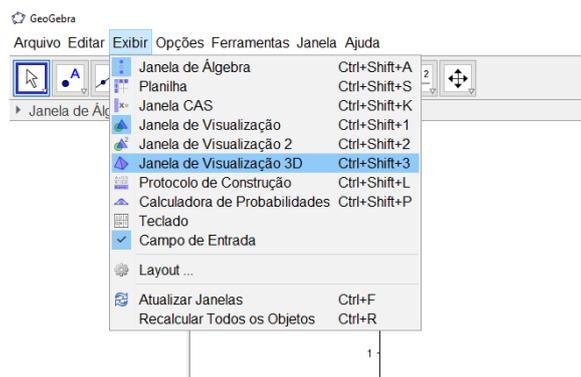
Assim obtemos a superfície de rotação dada de forma paramétrica:

$$(x, y, z) = (t, p_1(t) \cdot \cos(u), p_1(t) \cdot \sin(u)) \quad \text{onde } t \in [x_0, x_1] \quad \text{e } u \in [0, 2\pi]$$

No nosso exemplo temos, no primeiro trecho da curva

$$p_1(t) = \frac{1}{15}t^3 - \frac{53}{30}t + 4$$

E nosso  $t$  varia de 0 à 3. No GeoGebra faremos esse exemplo. Primeiro devemos abrir a Janela de Visualização 3D:



**Figura 3.33:** Abrindo a Janela de Visualização 3D

No campo **Entrada** localizado na parte inferior do programa iremos digitar quem é o polinômio  $p_1$  usando o comando

Função [**< Função >**, **< Valor de x inicial >**, **< Valor de x Final >**]

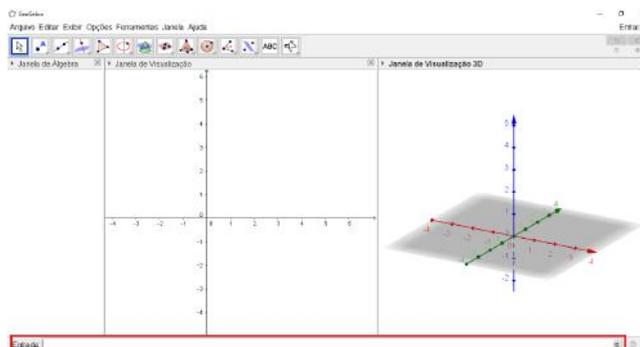


Figura 3.34: Campo Entrada

Ou seja, ali digitaremos a seguinte linha<sup>8</sup>:

$$p_{-}\{1\} = \text{Função } [1/15 x^3 - 53/30 x + 4, 0, 3]$$

Após isso o polinômio  $p_1$  irá aparecer nas três Janelas (Álgebra, de Visualização e, de Visualização 3D):

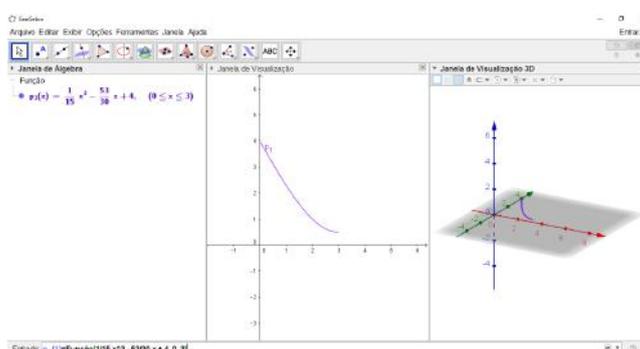


Figura 3.35: Polinômio  $p_1$

Agora devemos criar um **Controle Deslizante** que servirá como o parâmetro para o ângulo  $\theta$ . Fazemos isso selecionando a Janela de Visualização e, logo após, a ferramenta **Controle Deslizante**<sup>9</sup>.

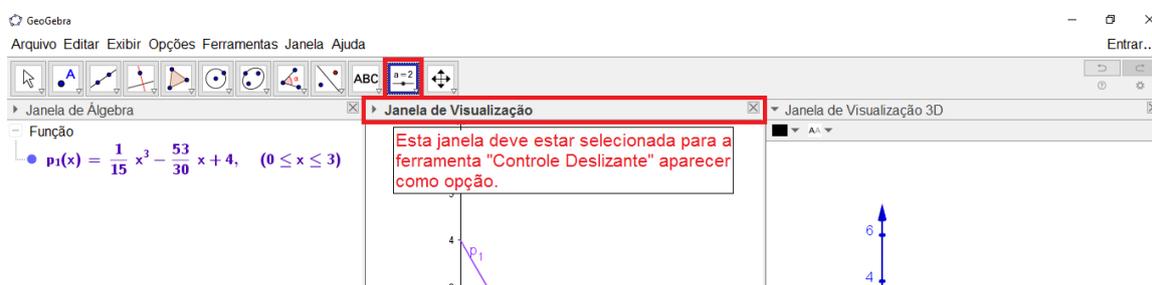
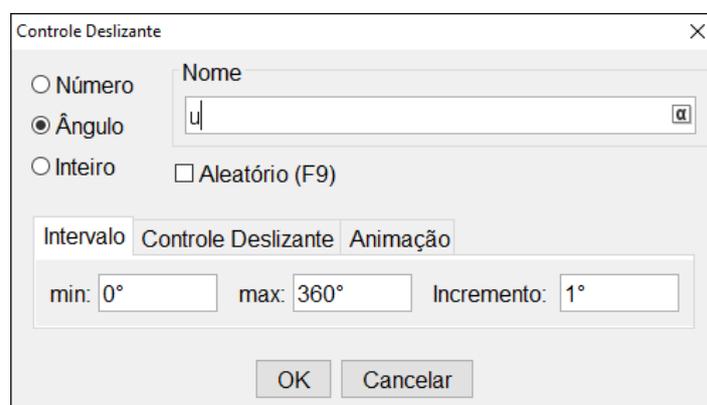


Figura 3.36: Controle Deslizante

<sup>8</sup>Colocamos um espaço entre o denominador da fração e o  $x$ . Para o GeoGebra isto significa que  $x$  está multiplicando a fração. Outra opção é escrever a fração entre parênteses

<sup>9</sup>Se não for a Janela de Visualização que estiver selecionada essa ferramenta não irá aparecer.

Ao clicar na tela da Janela de Visualização uma caixa de diálogo se abrirá e nela irão aparecer diversas opções. Selecionaremos as opções “Ângulo”;  $u$  em “Nome”;  $0^\circ$  em “min”;  $360^\circ$  em “max”; e  $1^\circ$  em “Incremento”.

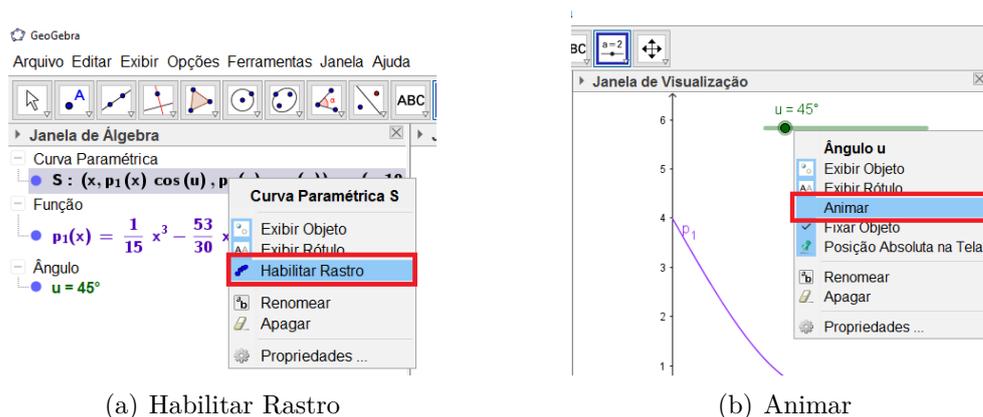


**Figura 3.37:** Janela de Diálogo Controle Deslizante

Agora temos que escrever as coordenadas do resultado do nosso produto de matrizes  $S$  no campo de entrada. Assim digitamos

$$\text{Curva} [(x, p\_1(x) * \cos(u), p\_1(x) * \sin(u)), x, 0, 3]$$

E apertamos **Enter**. Na Janela de Visualização 3D irá aparecer a curva rotacionada. Agora basta clicarmos com o botão direito do mouse na Janela Álgebra e selecionar a opção “Habilitar Rastro” e, logo após, na Janela de Visualização clicar com o botão direito sobre o controle deslizante e selecionar a opção “Animar”.

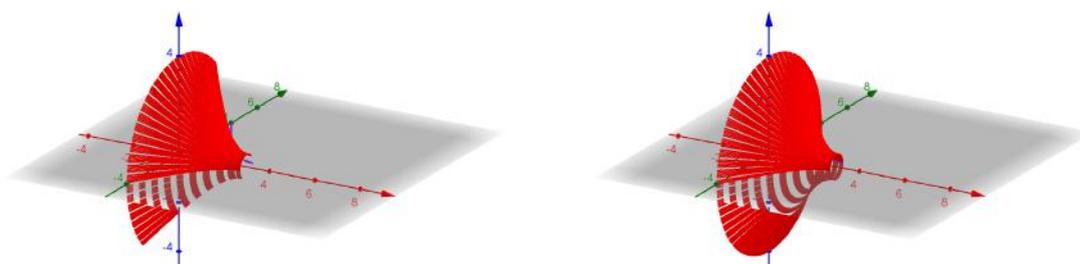


(a) Habilitar Rastro

(b) Animar

**Figura 3.38:** Criando a animação que gera a superfície de revolução

Fazendo isso, nossa curva irá girar na Janela de Visualização 3D formando a primeira parte da nossa superfície de revolução.

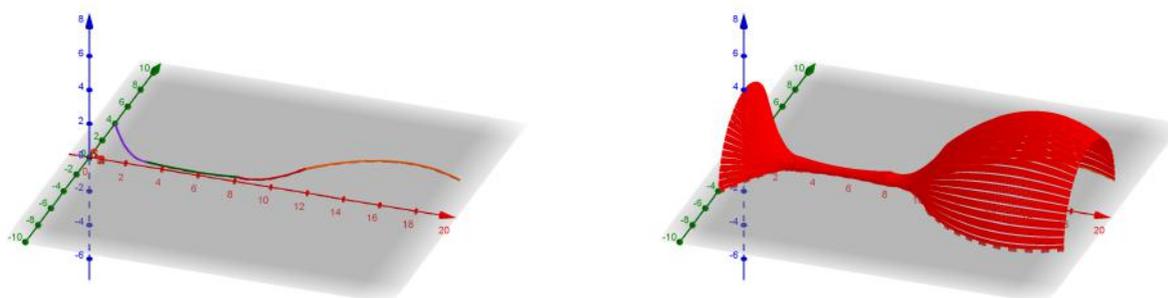


(a) Parâmetro  $u$  se movendo para criar a superfície

(b) Primeira parte feita

**Figura 3.39:** Superfície de revolução do polinômio  $p_1$

Feito o primeiro passo, repetimos para os outros polinômios com a vantagem de já termos criado o controle deslizante. Após terminado, podemos ir na Janela de Visualização 3D e retirar os eixos para ter uma visão mais real da superfície.



(a) Curva da superfície antes da rotação

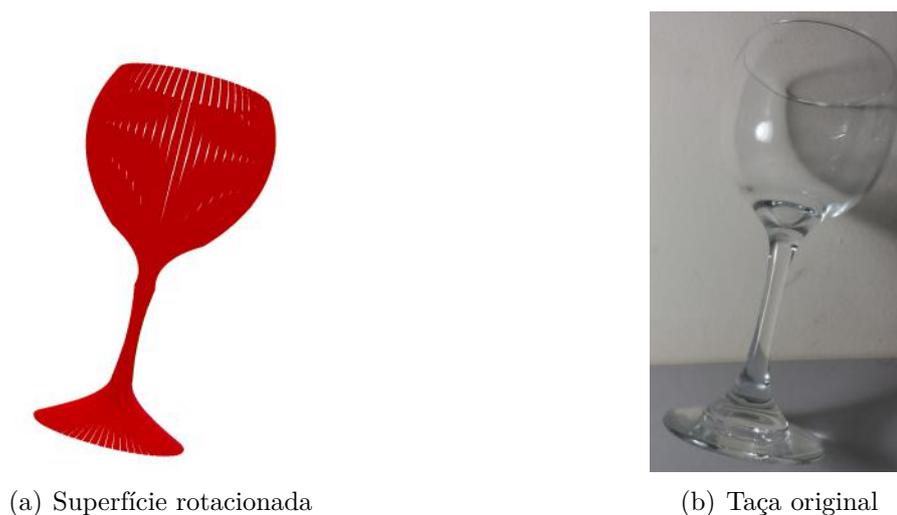
(b) Superfície parcialmente rotacionada

**Figura 3.40:** Superfície de revolução do polinômio  $p_1$  antes da rotação

Da forma como fizemos no Geogebra a figura ficou “vazada” no fundo. Para completá-la podemos acrescentar um disco com as coordenadas:

$$(x, y, z) = (0, t \cdot \cos(u), t \cdot \sin(u)),$$

com  $t$  variando entre 0 e o ponto onde a taça ou o objeto toca o eixo  $y$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ .

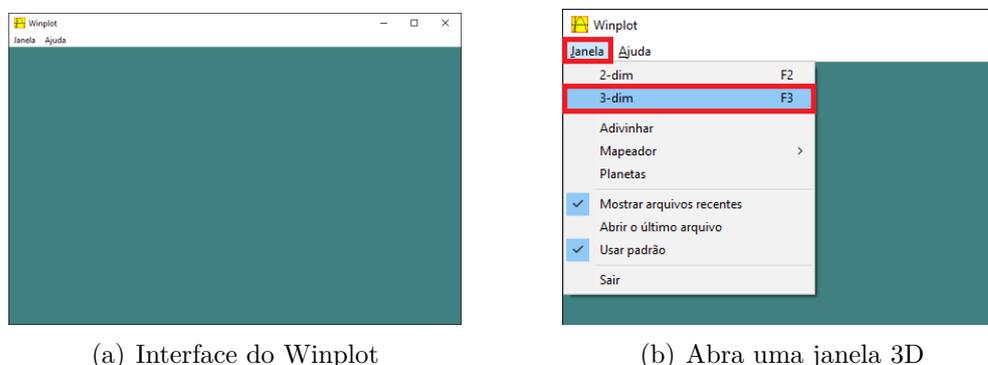


**Figura 3.41:** Superfície de revolução do polinômio  $p_1$  após a rotação

Agora faremos o desenho da taça também pelo Winplot<sup>10</sup>. Lembrando que as coordenadas de cada intervalo serão dadas pelo polinômio daquele intervalo multiplicado pela matriz de rotação, temos que as coordenadas sempre serão dadas por

$$(x, y, z) = (t, p(t) \cdot \cos(u), p(t) \cdot \sin(u))$$

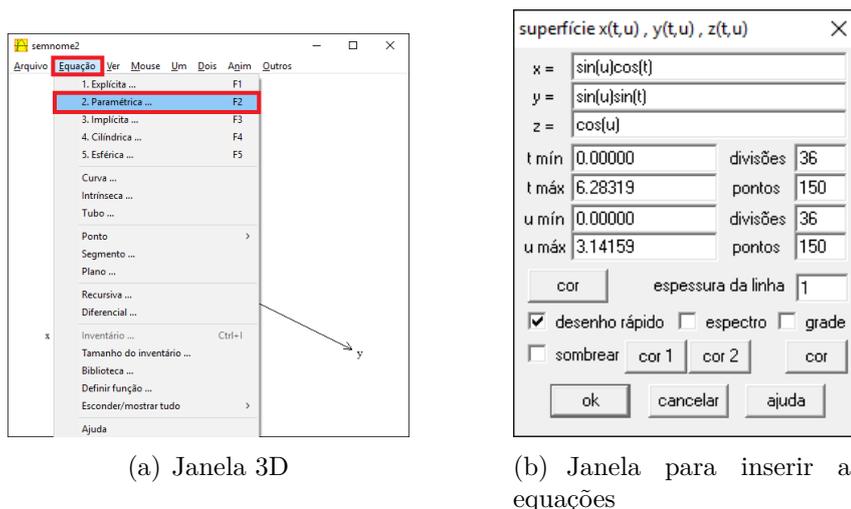
Ao abrir o Winplot, clicamos na opção “Janela” e em seguida, em “3-dim”. Com isso uma nova janela se abrirá.



**Figura 3.42:** Interface do Winplot

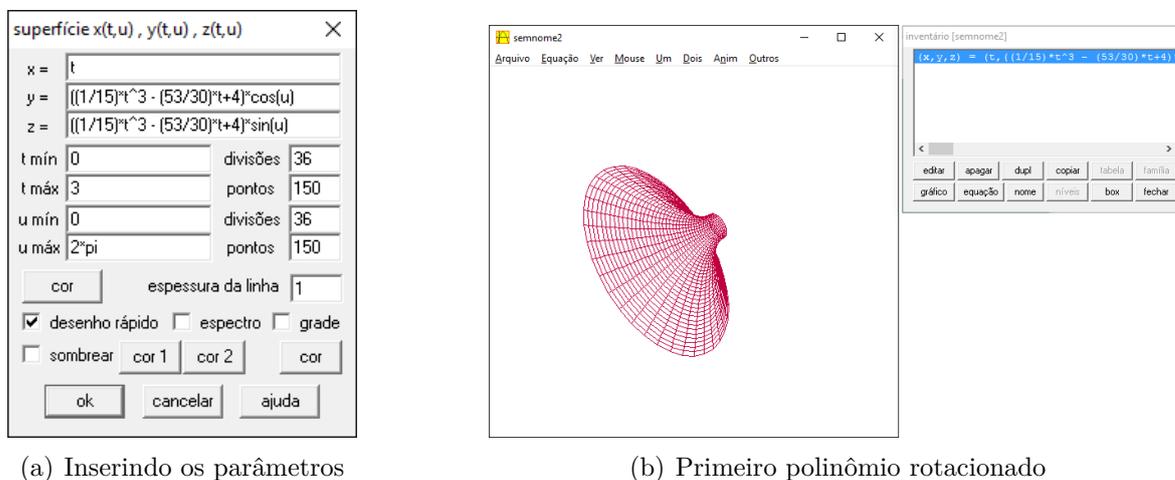
Na nova janela que se abrirá clicamos em “Equação” e, em seguida, em “2.Paramétrica...”. Outra caixa de diálogo irá se abrir e nela poderemos colocar as coordenadas da nossa superfície de revolução.

<sup>10</sup>também pode ser utilizado o comando “Superfície” no GeoGebra, que faz o modelo da mesma forma que o Winplot. No entanto, o método que descrevemos possibilita ao aluno visualizar o processo de rotação acontecendo.



**Figura 3.43:** Inserindo a equação da superfície de revolução no Winplot

Considerando novamente o polinômio  $p_1$  que modela o primeiro trecho, preencheremos os campos da seguinte forma: no campo  $x$  colocaremos  $t$ ; no campo  $y$  colocaremos  $((1/15) * t^3 - (53/30) * t + 4) * \cos(u)$ ; no campo  $z$  colocaremos  $((1/15) * t^3 - (53/30) * t + 4) * \sin(u)$ ; no campo  $t$  *mín* colocaremos  $0$ . no campo  $t$  *máx* colocaremos  $3$ ; no campo  $u$  *mín* colocaremos  $0$ ; e no campo  $u$  *máx* colocaremos  $2 * \pi$ . Não vamos mexer nos outros campos por enquanto. Apertamos *enter* e geramos a primeira parte da nossa superfície.



**Figura 3.44:**  $p_1$  rotacionado no Winplot

Para os demais polinômios repetimos o processo e o Winplot encarrega-se de colocá-los todos na mesma janela.

Após acrescentar todos os trechos, podemos selecionar a opção “editar” e mudar as cores e outras opções que havíamos deixado de lado no processo de construção.

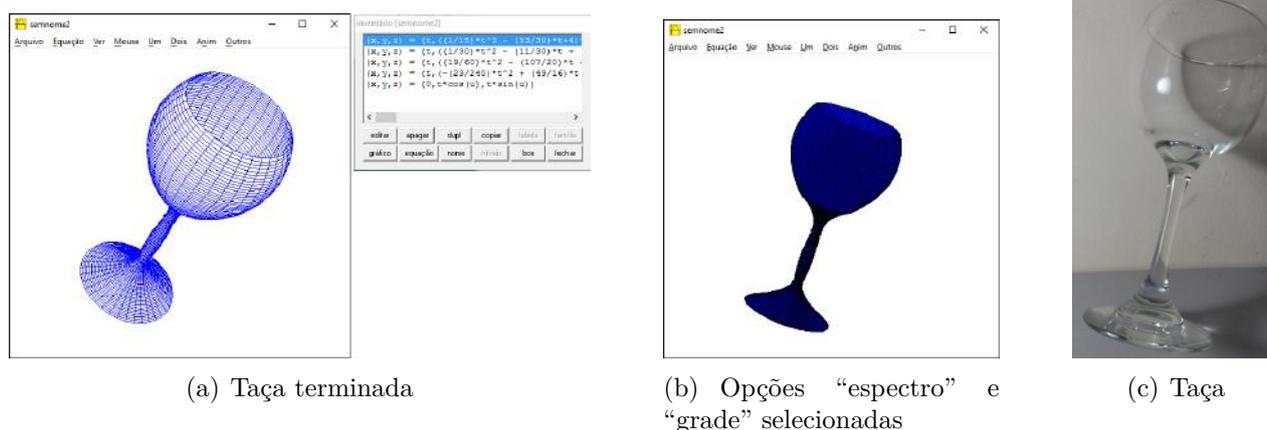


Figura 3.45: Taça plotada usando o Winplot

Como podemos ver, tanto no caso do GeoGebra quanto no do Winplot, a taça não ficou perfeitamente modelada, embora sejam boas aproximações. Nos pontos onde houve a junção dos polinômios tivemos alguns “bicos”. Uma forma de aperfeiçoar o modelamento é, além de exigir que as funções passem pelos pontos como fizemos neste exemplo, elas também tenham derivadas iguais nos pontos de junção. Isso torna a curva “suave” e retira o problema dos bicos. Uma abordagem que contempla este aspecto é a modelagem chamada **spline cúbica** que ajusta polinômios de 3º grau a cada dois pontos. A seguir vamos ver como podemos utilizá-la. Para um estudo mais aprofundado é recomendada a referência [27].

### 3.2.3 Função Spline Cúbica

A spline cúbica é uma forma de interpolação que leva em consideração os pontos e suas derivadas. Nos livros de cálculo numérico ela aparece como um método iterativo para se encontrar o valor da função que é ajustado em um determinado ponto intermediário. Aqui veremos como determinar um conjunto de polinômios que modelam uma curva utilizando o processo da spline cúbica.

Tomemos, por exemplo, os pontos  $E = (5; 0, 3)$ ,  $F = (8; 0, 5)$ ,  $G = (10; 1, 2)$ ,  $H = (11; 2, 5)$  e  $I = (14; 4, 5)$ , do exemplo anterior.

A cada par de pontos iremos criar um polinômio interpolador de grau menor ou igual a 3. Nas interpolações anteriores tomávamos quatro pontos para gerar um polinômio de grau menor ou igual a 3, agora tomaremos apenas dois pontos e cada um deles nos fornecerá duas informações, as coordenadas do ponto e a derivada do polinômio nesse ponto, que é dada pela declividade da curva a ser ajustada naquele ponto.

Portanto, temos duas equações para cada ponto:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{e} \quad p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Para os pontos  $E = (5; 0, 3)$  e  $F = (8; 0, 5)$  assumimos os valores  $p'(5) = 0$  e  $p'(8) = 0$ , 15 obtidos ao observar a declividade das retas tangentes à curva nestes dois pontos com o auxílio do papel milimetrado.

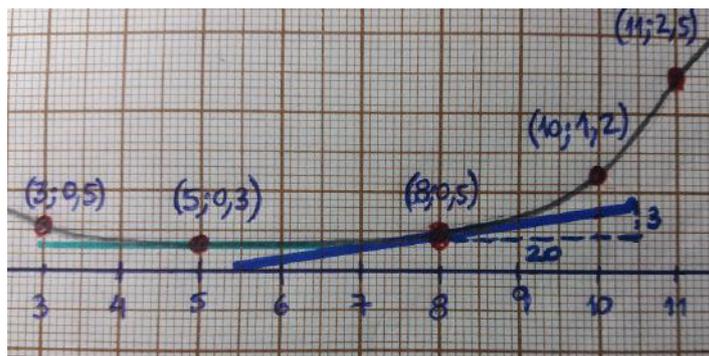


Figura 3.46: Determinando  $p'(5)$  e  $p'(8)$  com o papel milimetrado

Com esses valores temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a(5)^3 + b(5)^2 + c(5) + d = 0,3 \\ 3a(5)^2 + 2b(5) + c = 0 \\ a(8)^3 + b(8)^2 + c(8) + d = 0,5 \\ 3a(8)^2 + 2b(8) + c = 0,15 \end{cases}$$

Resolvendo-o temos os valores  $a = -\frac{1}{2340}$ ,  $b = \frac{43}{1170}$ ,  $c = -\frac{833}{2340}$  e  $d = \frac{1421}{1170}$  que nos fornecem o polinômio

$$p_1(x) = -\frac{1}{2340}x^3 + \frac{43}{1170}x^2 - \frac{833}{2340}x + \frac{1421}{1170}$$

Que será o nosso polinômio no intervalo  $[5, 8]$

Agora tomaremos os pontos  $F = (8; 0,5)$  e  $G = (10; 1,2)$ , lembrando que  $p'(8) = 0,15$  e observando a declividade da reta tangente à curva em  $G$ , tomamos  $p'(10) = 1$ . Temos então o sistema:

$$\begin{cases} a(8)^3 + b(8)^2 + c(8) + d = 0,5 \\ 3a(8)^2 + 2b(8) + c = 0,15 \\ a(10)^3 + b(10)^2 + c(10) + d = 1,2 \\ 3a(10)^2 + 2b(10) + c = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-o temos os valores  $a = \frac{9}{80}$ ,  $b = -\frac{113}{40}$ ,  $c = \frac{95}{4}$  e  $d = -\frac{663}{10}$  que nos fornecem o polinômio

$$p_2(x) = \frac{9}{80}x^3 - \frac{113}{40}x^2 + \frac{95}{4}x - \frac{663}{10}$$

no intervalo  $[8, 10]$ .

Repetindo o processo para os pontos  $G$  e  $H$ ; e  $H$  e  $I$ , e considerando  $p'(11) = 1,2$  e  $p'(14) = 0,4$  dados pelas retas tangentes:

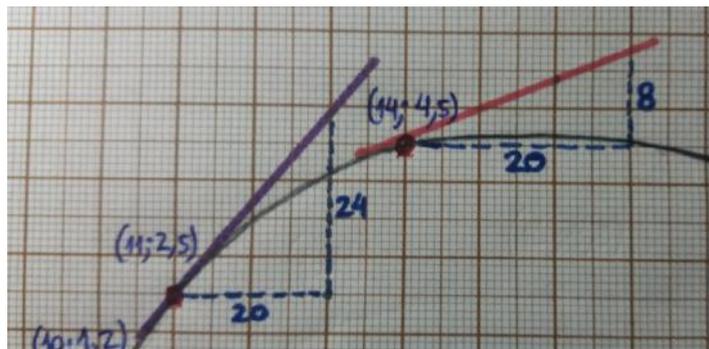


Figura 3.47: Determinando  $p'(11)$  e  $p'(14)$  com o papel milimetrado

Obtemos, respectivamente, os polinômios:

$$p_2(x) = -\frac{2}{5}x^3 + \frac{127}{10}x^2 - 133x + \frac{2306}{5} \quad \text{e} \quad p_4(x) = \frac{4}{135}x^3 - \frac{56}{45}x^2 + \frac{802}{45}x - \frac{22249}{270},$$

que serão considerados nos intervalos  $[10, 11]$  e  $[11, 14]$ , respectivamente.

Traçando os gráficos dos polinômios podemos ver que a curva dada pela justaposição é “suave” e sem “bicos”.

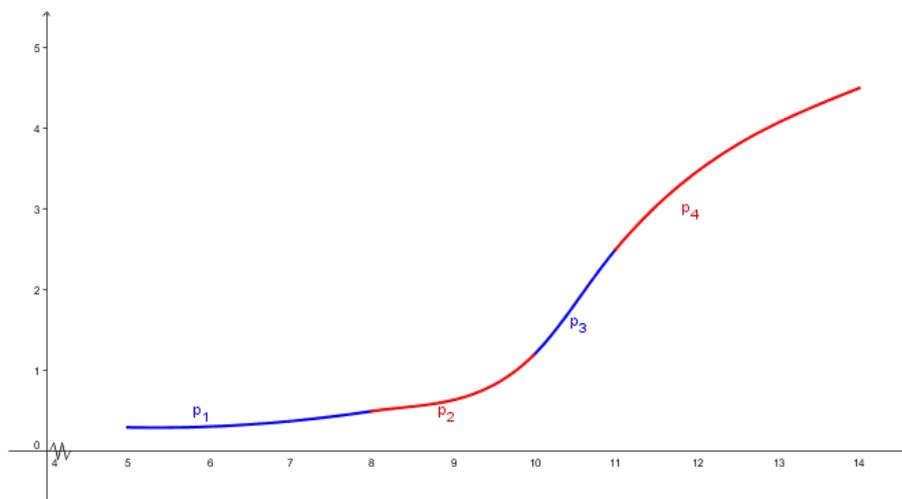


Figura 3.48: Spline cúbica passando pelos pontos E, F, G, H e I.

Também precisamos mostrar que, assim como o ajuste por polinômios visto na seção 2.5, sempre existirá uma função spline cúbica interpoladora, nas condições consideradas.

**Teorema 3.2.1.** *Dados os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , tais que  $x_1 \neq x_2$ , sempre é possível determinar de forma única uma função spline cúbica que passa por esses pontos, ou seja, um polinômio de grau menor ou igual a 3 cujo gráfico passa por esses pontos e cuja derivada em  $x_1$  e  $x_2$  tenha os valores fixados.*

**Demonstração.** Considerando inicialmente os pontos  $(0, \bar{y}_1)$  e  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ , onde  $\bar{x}_2 \neq 0$ , vamos mostrar que a função spline  $g$  em que o gráfico passa por esses pontos é determinada de forma única.

Para um polinômio do 3º grau  $g(x) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d}$ , sua derivada  $g'$  é dada por  $g'(x) = 3\tilde{a}x^2 + 2\tilde{b}x + \tilde{c}$ . As condições a serem impostas são:  $g(0) = \bar{y}_1$ ,  $g(\bar{x}_2) = \bar{y}_2$ ,  $g'(0) = k_1$  e  $g'(\bar{x}_2) = k_2$ , e queremos mostrar que o sistema abaixo sempre terá solução.

$$\begin{cases} \tilde{a}(0)^3 + \tilde{b}(0)^2 + \tilde{c}(0) + \tilde{d} = \bar{y}_1 \\ 3\tilde{a}(0)^2 + 2\tilde{b}(0) + \tilde{c} = k_1 \\ \tilde{a}(\bar{x}_2)^3 + \tilde{b}(\bar{x}_2)^2 + \tilde{c}(\bar{x}_2) + \tilde{d} = \bar{y}_2 \\ 3\tilde{a}(\bar{x}_2)^2 + 2\tilde{b}(\bar{x}_2) + \tilde{c} = k_2 \end{cases}$$

O sistema tem como matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{y}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k_1 \\ \bar{x}_2^3 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2 & 1 & \bar{y}_2 \\ 3\bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 & 1 & 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Escalonando esta matriz, chegamos à uma matriz reduzida que nos dá a solução do sistema<sup>11</sup>

$$(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}) = \left( \frac{2\bar{y}_1 + \bar{x}_2 \cdot k_1 + \bar{x}_2 \cdot k_2 - 2\bar{y}_2}{\bar{x}_2^3}, \frac{-3\bar{y}_1 - 2\bar{x}_2 \cdot k_1 - \bar{x}_2 \cdot k_2 + 3\bar{y}_2}{\bar{x}_2^2}, k_1, \bar{y}_1 \right)$$

Portanto, sempre é possível encontrar tal polinômio  $g$  desde que  $\bar{x}_2 \neq 0$

Dados agora dois pontos genéricos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , com  $x_1 \neq x_2$ , queremos mostrar que sempre existe um polinômio  $f$  de grau menor ou igual a 3 tal que  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$ ,  $f'(x_1) = k_1$  e  $f'(x_2) = k_2$  ( $k_1$  e  $k_2$  quaisquer).

Tomamos  $\bar{x}_2 = x_2 - x_1$ ,  $y_1 = \bar{y}_1$  e  $y_2 = \bar{y}_2$ , e consideramos  $g$  tal que  $g(0) = \bar{y}_1$ ,  $g(\bar{x}_2) = \bar{y}_2$ ,  $g'(0) = k_1$  e  $g'(\bar{x}_2) = k_2$ , como na etapa anterior.

Para  $f(x) = g(x - x_1)$  (translação horizontal) temos o polinômio de grau menor ou igual a 3 desejado, pois

$$\begin{aligned} f(x_1) &= g(0) = y_1 & f(x_2) &= g(x_2 - x_1) = g(\bar{x}_2) = y_2 \\ f'(x_1) &= g'(0) = k_1 & f'(x_2) &= g'(x_2 - x_1) = g'(\bar{x}_2) = k_2 \end{aligned}$$

Ou seja, fazendo uma translação horizontal de  $g$ , obtemos  $f$ . Como  $g$  sempre possui solução quando  $\bar{x}_2 \neq 0$ , da mesma forma,  $f$  sempre possui solução quando  $x_1 \neq x_2$ .

Assim, podemos utilizar splines cúbicas para modelar nossa curva que gerará a superfície de revolução deixando o resultado mais sofisticado. A única ressalva é que se faz necessário uma aproximação maior ao conceito de derivada e pode não ser tão vantajoso assim abordar essa parte com os alunos de ensino médio, voltando-se mais para uma atividade a ser realizada com alunos no início dos cursos de graduação.

<sup>11</sup>Esse processo de escalonamento pode ser também executado na Janela CAS do GeoGebra.

### 3.3 Considerações Finais

A atividade dos aeromodelos trouxe uma nova perspectiva da prática aos alunos, levando-os para fora da sala de aula e fazendo-os trabalhar em grupo, em um projeto que envolveu diferentes disciplinas. Os resultados esperados foram alcançados e os problemas encontrados serviram de base para que a atividade fosse melhor trabalhada no ano seguinte. Foi possível comunicar aos alunos erros previstos (que haviam ocorrido no ano anterior) para que eles pudessem se empenhar em não cometer os mesmos erros. A perspectiva é de que a aplicação e realização da atividade possa ser melhor desenvolvida a cada ano.

A atividade da superfície de revolução, por requerer uma base um pouco maior dos conteúdos matemáticos, não foi aplicada em sala de aula. Isso se deu, principalmente, devido à falta de tempo, já que os alunos dos terceiros anos realizam, fora do horário escolar, outras atividades como cursos técnicos, trabalhos e atividades relacionadas aos diversos PIBIDs<sup>12</sup> de que a escola participa.

É uma atividade em que o uso de computadores se faz necessário, o que pode ser outro problema dependendo da escola em que for proposto, já que muitas escolas não possuem sala de informática. Porém, pode trazer uma percepção muito maior aos alunos de como os assuntos matemáticos, que eles veem de forma separada no ensino médio, estão relacionados. A perspectiva futura é de que nos próximos anos esta atividade possa começar a ser trabalhada com os alunos do primeiro ano do ensino médio durante o período de aula, assim, o tempo disponível pode fazer com que sua execução seja aplicável com todos os alunos, em vez de ser aplicada apenas com um grupo específico.

Um dos propulsores ao se elaborar estas atividades foi o fato do contexto escolar atual mostrar alunos cada vez mais impacientes com os conteúdos passados em sala de aula. A era dos computadores e da internet trouxe consigo a facilidade da pesquisa em qualquer assunto desejado, com milhares de vídeo-aulas e apostilas online, fazendo com que a aula se torne muitas vezes massante. Neste aspecto, as atividades visam também a inserção de recursos computacionais no contexto escolar, além da abordagem prática que, em conjunto, propõem trazer métodos interessantes para se trabalhar o conteúdo de polinômios, fazendo com que o aluno fuja um pouco do imediatismo gerado pela internet.

---

<sup>12</sup>O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) é um programa que oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de graduação que se dediquem ao estágio nas escolas públicas e que, quando graduados, se comprometam com o exercício do magistério na rede pública.

## Referências

- [1] Paulo Abrantes. *O Trabalho de Projecto e a Aprendizagem da Matemática*. Atas da III Conferência Ibero-Americana de Educação Matemática, 1994.
- [2] J. C. Barbosa. *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. Reunião Anual da ANPED, 24, 2001.
- [3] Irineu Bicudo. *Os Elementos de Euclides, tradução e introdução Irineu Bicudo*. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- [4] Jose Luiz Boldrini et al. *Álgebra linear*. Harper & Row do Brasil, 1984.
- [5] Manfredo Perdigão do Carmo. *Trigonometria - Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [6] Sueli I. R. Costa. *Notas de Aula*. 2011.
- [7] Sueli I. R. Costa. “O Método” de Arquimedes : História, Tecnologia e Projetos de Investigação para Alunos de Cálculo. In: Luis Mariano de Carvalho. (Org.). *História e Tecnologia em Educação Matemática*. Rio de Janeiro: Livraria Ciência Moderna, 2007.
- [8] Howard Whitley Eves. *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 1995.
- [9] GeoGebra. *Football Throw*. Ed. por John Golden. 2015. URL: <https://www.geogebra.org/m/hZxyqRNN> (acesso em 15/08/2016).
- [10] GeoGebra. 2001. URL: <http://www.geogebra.org/>.
- [11] GeoGebra. *Oblique throw*. Ed. por Jaruska László. 2016. URL: <https://www.geogebra.org/m/pWTYAM8X> (acesso em 15/08/2016).
- [12] Gelson Iezzi. *Fundamentos da Matemática Elementar, 6 : complexos, polinômios, equações*. Vol. 6. São Paulo: Atual, 2013.
- [13] Gelson Iezzi e Samuel HAZZAN. *Fundamentos da Matemática Elementar, 4 : sequências, matrizes, determinantes e sistemas*. Vol. 4. São Paulo: Atual, 2013.
- [14] Gelson Iezzi e Carlos MURAKAMI. *Fundamentos da Matemática Elementar, 1 : conjuntos, funções*. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2013.
- [15] Gelson Iezzi e Carlos MURAKAMI. *Fundamentos da Matemática Elementar, 3 : trigonometria*. Vol. 3. São Paulo: Atual, 2013.
- [16] Vitail José Rocha. *Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra*. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
- [17] Elon Lages Lima et al. *Matemática do Ensino médio*. Vol. 3. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

- [18] Elon Lages Lima et al. *Matemática do Ensino médio*. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [19] Antonio Caminha Muniz Neto. *Fundamentos de Cálculo*. SBM, 2015.
- [20] Antonio Caminha Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana*. Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [21] Antonio Caminha Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios*. Vol. 6. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [22] OBA. *Construção de Foguete*. Maio de 2014. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=JNFAAksb008> (acesso em 15/08/2016).
- [23] OBA. *Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica*. URL: <http://www.oba.org.br/> (acesso em 15/08/2016).
- [24] Universidad del Pais Vasco. *Alcance máximo en el plano horizontal*. URL: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/parabolico/alcance/alcance.htm> (acesso em 15/08/2016).
- [25] E. D. Penney Jr e C. H. Edwards. *Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1*. Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1997.
- [26] Teresa Cristina Carvalho Piva. “O Brigadeiro Alpoim: Um expoente do ensino técnico no Brasil colonial”. Em: *História da Ciência e Ensino: construindo interfaces*. ISSN 2178-2911 12 (2015), pp. 54–69.
- [27] Márcia A. Gomes Ruggiero. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Pioneira Thomson Learning, 1996.
- [28] Reginaldo J Santos. *Vetores e Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2012.
- [29] James Stewart. *Cálculo, vol. 1*. Pioneira Thomson Learning, 2001.
- [30] Wagner Rodrigues Valente. *Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930*. Vol. 103. Annablume, 1999.
- [31] *Winplot*. 1985. URL: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>.

## Apêndice A

# Contexto histórico do início do ensino de matemática no Brasil e sua relação com os projetos de aeromodelos

A atividade dos aeromodelos está fortemente relacionada com o estudo do lançamento de projéteis, o que pode nos levar até o século XVII com Galileu Galilei e sua física de projéteis. Restringindo-nos apenas ao Brasil nesse contexto (ver [26], [30]), temos o nome de José Fernandes Pinto Alpoim, ou Brigadeiro Alpoim, um militar português que veio para o Brasil no século XVIII a mando de D. João V, em 1739, com o objetivo de fortalecer a segurança da Colônia e de ministrar aulas de matemática, ciências e de técnicas de fortificação no Terço de Artilharia do Rio de Janeiro.

Como professor, além de ensinar a técnica da artilharia, também deixou registrados esses ensinamentos através de dois livros que, apesar de terem uma matemática bastante elementar, cujo foco era servir de instrumento para a artilharia, podem ser considerados os dois primeiros livros didáticos de matemática do país: **Exame de Artilheiros**, de 1744, e **Exame de Bombeiros**, de 1748.

O Exame de Artilheiros dividi-se em três tratados: Tratado de Aritmética, Tratado de Geometria e Tratado de Artilharia. O primeiro aborda unidades de grandeza, as quatro operações, frações e regra de três; no segundo subdividido em duas partes apresenta algumas regras e mostra propriedades específicas. No tratado de artilharia é explicado o que é a artilharia, seus instrumentos e a utilização dos mesmos.

Já o Exame de Bombeiros, não tão conhecido quanto o primeiro, é dirigido aos Bombeiros da época, ou seja, aos homens que “deitavam” bombas.

O segundo livro também dividido em Tratados onde foi separado de forma didática os temas abordados. No primeiro tratado são apresentadas, assim como no primeiro livro, as definições de elementos primitivos de geometria, é ensinado como se utilizar um transferidor, as operações com ângulos, a construção e classificação de diversos triângulos e as propriedades do triângulo retângulo. Alpoim também apresenta a parábola, explicando o que é uma linha parabólica.

No segundo tratado, ele apresenta regras de trigonometria e ensina a utilização do Pantômetro, um instrumento de precisão indispensável na topografia e arquitetura militar da época.

No terceiro e quarto tratados ele aborda a Longimetria e a Altimetria, onde usa a trigonometria de forma prática para calcular as medidas das distâncias existentes entre o morteiro e o alvo, e ensina, por meio de exercícios, como melhorar a mira quando os alvos ou morteiros são

levantados por cima do plano horizontal.

Nos tratados seguintes explica o diversos tipos de canhões e como preparar a pólvora. Especialmente no quinto tratado, Alpoim mostra os diferentes alcances das balas de acordo com o tipo de câmara do morteiro e explica os defeitos que podem ocorrer.

Apesar de seus livros serem dotados de uma sequência didática onde apenas introduzia a definição, a explicação e, em seguida, um exemplo numérico e possuem pouca notação matemática, podemos ver que, provavelmente, sua obra contribuiu para o estudo do lançamento de projéteis por parte dos militares brasileiros.

Vemos que os tratados III e IV do Exame de Bombeiros, em especial, possuem uma grande relação com a primeira atividade aqui proposta e podemos concluir que, assim como o Brigadeiro Alpoim, estamos estudando com os alunos as ciências da Longimetria e Altimetria.