

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

James Jansen Pinho de Barros

*Além da Geometria*

O Tangram como Ferramenta Didática para a  
Matemática do Ensino Fundamental

Rio de Janeiro

2016

James Jansen Pinho de Barros

*Além da Geometria*

O Tangram como Ferramenta Didática para a  
Matemática do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Programa de Pós-graduação em Matemática  
PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a ob-  
tenção do grau de MESTRE em Matemática.

**Orientador: Michel Cambrinha de Paula**

**Doutor em Matemática - UNIRIO**

Rio de Janeiro

2016

Barros, James Jansen

Além da Geometria / James Jansen Barros - 2016

73.p

1. Matemática 2. Ensino de Matemática. I.Título.

CDU 025.432s729c

James Jansen Pinho de Barros

*Além da Geometria*

O Tangram como Ferramenta Didática para a  
Matemática do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao  
Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-  
MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção  
do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 18 de fevereiro de 2016.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Michel Cambrinha de Paula

Doutor em Matemática - UNIRIO

---

Fábio Luiz Borges Simas

Doutor em Matemática - UNIRIO

---

Leonardo Tadeu Silvaes Martins

Doutor em Matemática - UFF

*Aos meus pais, Jades de Barros (falecido em 2001) e Cleonice Maria de Pinho, aos meus irmãos Jades de Barros Junior e José Joaquim Pinho de Barros e à minha noiva Juliana Angelo Martins de Oliveira.*

## Resumo

O presente trabalho é o resultado de pesquisas acerca da utilização do quebra-cabeça conhecido como Tangram como material didático, sobretudo no que tange à abordagem do ensino de conceitos fundamentais nas aulas de matemática na educação básica. Nele, possibilitamos ao professor sugestões de atividades que englobam conceitos matemáticos, tais como ângulos, áreas, perímetro, números racionais, números irracionais, teorema de Pitágoras, entre outros.

Apresentamos, no final, atividades desenvolvidas com alunos do 7º e do 8º anos, do segundo segmento do Ensino Fundamental da Escola Municipal Cientista Mário Kröeff, do Rio de Janeiro, comprovando, na prática, a versatilidade deste material em concordância com a evolução da aprendizagem dos alunos apresentada nas aulas de matemática.

**Palavras-chave:** Tangram, Ensino de Matemática, Material Didático, Aprendizagem.

## Abstract

The present work is the result of some research about the use of the puzzle known as Tangram as a didactic tool, especially regarding fundamental mathematical concepts to students of basic education. We suggest, to the teacher, some activities involving concepts as angles, area, perimeter, rational and irrational numbers, the Pythagorean Theorem, etc.

We present, at the end, activities developed with students of 7th and 8th grades of Escola Municipal Cientista Mário Kröeff, in Rio de Janeiro, verifying in practice, the versatility of this puzzle in accord with the evolution observed in the learning process of the students in mathematic's classes.

**Keywords:** Tangram, Mathematics Teaching, didatic puzzle, Learning.

## Agradecimentos

Ao Deus uno e trino, que me abençoa todos os dias, me dando inteligência, força, saúde e fé para superar todas as dificuldades do dia-a-dia, ajudando-me a concretizar meus projetos.

À Nossa Senhora, por ser minha Mãe e Intercessora e me carregar em Seu colo.

À UNIRIO, por ser uma excelente instituição de ensino. Aos professores desta universidade, que além de me oportunizarem o conhecimento, foram verdadeiros companheiros, cooperando sempre para que alcançasse o êxito. Fábio Simas, José Cal Neto, Silas Fantin, Ronaldo Busse, Gladson Antunes, Leonardo Silvaes, Fábio XP, Luiz Amâncio e Michel Cambrainha.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Michel Cambrainha de Paula, pelo excelente profissional que é, por todo seu suporte e incentivo, fazendo-me acreditar no sucesso deste trabalho, principalmente nos momentos de extremo cansaço e dificuldade.

À minha mãe, Cleonice, por todo seu amor e carinho, que batalhou para formar a mim e aos meus irmãos, nos auxiliando na construção dos nossos sonhos, crendo sempre que éramos capazes, que nunca nos deixou faltar nada, mesmo nas adversidades. Por ser uma verdadeira heroína, a minha heroína.

Ao meu pai, Jardes (*in memoriam*), por ser amigo e companheiro meu e dos meus irmãos, por ser o melhor pai que eu poderia ter, que mesmo com sua debilitação física, caminhava conosco até a escola e nos levava para casa de volta e ainda nos auxiliava nas lições escolares. Por toda educação que nos proporcionou, juntamente com minha mãe.

Aos meus irmãos José Joaquim e Jardes, por todos os momentos de lazer que construímos juntos, por toda sua amizade, carinho e esperança depositadas em mim. Enfim, por serem meus irmãos queridos.

Aos meus amigos Elaine, Igor, Aline, Thiago, Cassia, Diogo, Débora, Wellington, Daniel Cunha, João Paulo, Wesley, Leonardo, Marcelo, Dulci, Wagner, Ana Carolina, Ricardo, Aparecida, Márcia Sanches, Carla, Roque Rafael, David, Cristina, Diego, Marinalva, Inês, Elias, Rodrigo, Diego Dias, Priscila, Fatima (minha eterna Tia Fatinha,



professora de matemática), Ana Paula, Daniel Mororó, Emanuel, Robson, Ana Tereza, Denise, Wellington, Mariana e Tiago Monteiro por todo incentivo que me foi dado durante o mestrado.

Ao meu grande amigo Marcos, que é praticamente um irmão, desde a graduação, onde sempre, com muita humildade, nos socorremos através dos árduos estudos e de diversos conselhos, estendo sempre a mão um para o outro.

Ao meu amigo Raphael, que foi o grande responsável por eu cursar o PROF-MAT, onde nos auxiliamos na preparação para o exame de acesso ao mesmo. Sei que chegará a vez dele!

Aos meus colegas deste mestrado, principalmente a minha amiga Monica, uma grande companheira, com quem troquei experiências, auxílios e desabafos durante o curso.

À minha noiva, futura esposa e amor da minha vida Juliana, que, sem dúvida alguma é a grande responsável por eu chegar até esta etapa da minha vida. Por me fazer sempre acreditar no meu potencial quando eu mesmo não acreditava, me incentivando em todos os momentos, por aturar minhas reclamações, por sempre me estender a mão, por me chamar a atenção nas minhas inconstâncias, por dizer que tudo daria certo, por compartilhar minhas felicidades e vitórias e me consolar nas derrotas, por estar presente onde quer que eu fosse.

Aos meus queridos sobrinhos Mayara, William, Mateus e Accacio.

Aos que me sustentaram com suas orações, principalmente a amiga Elaine, meus cunhados Eliane, Valéria e Adilio e meus concunhados Paulinho, Reinaldo e Paola.

*“A educação é o grande motor de desenvolvimento pessoal. É através dela que a filha de um camponês pode se tornar uma médica, que o filho de um mineiro pode se tornar o diretor da mina, que uma criança de peões de fazenda pode se tornar o presidente de um país.”*

*(Nelson Mandela)*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Tangram: Origem e Tipos</b>	<b>13</b>
2.1	Breve história . . . . .	13
2.2	Alguns dos Variados Tipos de Tangram . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Áreas e Ângulos</b>	<b>19</b>
3.1	Áreas . . . . .	19
3.2	Ângulos . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Números Racionais</b>	<b>32</b>
4.1	Razões entre as figuras . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Números Irracionais</b>	<b>43</b>
5.1	Analisando as peças do Tangram . . . . .	43
5.2	Incomensurabilidade e Irracionalidade . . . . .	47
5.3	Semelhança entre as peças . . . . .	50
5.4	Perímetros . . . . .	52
5.5	Duas construções impossíveis . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Sugestão de Atividades e Comentários</b>	<b>56</b>
6.1	Conclusões sobre as Atividades . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>61</b>
<b>8</b>	<b>Apêndice A</b>	<b>63</b>

**9 Apêndice B**

**68**

**10 Apêndice C**

**73**

# 1 Introdução

É de comum acordo que a Matemática está presente ao nosso redor, desde assuntos mais simplórios a outros mais complexos. No entanto, surgem sempre aquelas frases de (d)efeito tais como: “Para que vou utilizar isso?”, “Isso não irá acrescentar nada em minha vida”, “Matemática é chata, é muito difícil”, “Não consigo!” entre outras pejorativas em relação à Matemática. Há esse mito preestabelecido e preconceituoso contra a Matemática de que esta é “o terror das disciplinas” ou de que se Matemática fosse legal não se chamaria “MAtemática” e sim “BOAtemática”.

Outro questionamento que se faz necessário é a abordagem excessiva dos conteúdos de Álgebra em detrimento ao ensino de Geometria. Falas curiosas de alguns dos meus alunos me perturbam quando se referem a esses dois ramos: “Professor, hoje é aula de Matemática ‘normal’ ou é aula de usar régua”? Ficou bem claro o que para eles é a Matemática dita normal.

Em muitos livros, estes aparecem apenas nos últimos capítulos. O professor que trabalha com esse tipo de material, de forma sequencial, e que dificilmente cumpre o vasto conteúdo nele prescrito, não consegue transmitir ricos conteúdos aos seus alunos.

Ainda sobre o ensino de Geometria, muitos autores de livros se preocupam por resumirem os assuntos trabalhados apenas em aplicações de fórmulas ou expressões, mesmo demonstrando-as, tornando estes assuntos cada vez mais algébricos. Defendemos uma interação cada vez maior desses ramos da Matemática, no entanto, o pensamento geométrico não pode ser deixado de lado.

Sob essa perspectiva, entendemos que as formas geométricas devem figurar no pensamento lógico, dedutivo e abstrato do estudante. Segundo Piaget (1995), a criança começa a formalizar o seu conhecimento através de uma experimentação concreta e ativa dos objetos. De acordo com essa teoria, para Piaget (1995), existem dois tipos de experiência: a física e a lógico-Matemática. Ou seja, a criança primeiramente experimenta os objetos, conhece as suas formas, por meio de visualização e manuseio, para somente depois, com maior grau de abstração e maturidade, conhecer as propriedades neles existentes. Piaget ainda defende que para haver a aprendizagem, é necessária uma interação

entre os dois tipos de experiência.

Em concordância com as teorias piagetianas, sob esse aspecto, tomamos como objeto de nosso estudo, o quebra-cabeça milenar chinês, denominado Tangram. Este jogo proporciona ao aluno uma aprendizagem de determinados conteúdos e conceitos matemáticos, sobretudo geométricos, de forma lúdica, atrativa, agradável e diversificada.

Ainda sob a ótica de se trabalhar com a utilização de recursos didáticos para formalizar o pensamento matemático, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997) fazem as seguintes corroborações:

“recursos matemáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais, têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base para a formalização Matemática” (PCN, 1997, p.19).

A priori, recomendamos que este objeto seja trabalhado, visando aos alunos o reconhecimento das formas geométricas de cada peça, a construção de figuras, uma noção adequada de espaço, o desenvolvimento das habilidades de visualização, motoras e o despertar da criatividade. A posteriori, já com a familiarização das peças do jogo, é importante que se aproveite toda riqueza de conteúdos contida em cada uma das peças. Podem ser trabalhados conceitos de simetria, ângulos, perímetro, área, semelhança, fração e até mesmo números irracionais!

No 2º capítulo, será feito um breve relato sobre a lenda que originou o Tangram chinês tradicional e a sua expansão para o Ocidente a partir de meados do séc XIX, o que possibilitou também a formação de outros tipos de Tangram. Descreveremos as figuras geométricas que o compõem e exemplificaremos algumas figuras que por elas podem ser formadas.

No 3º capítulo, descreveremos em um primeiro momento todo processo de construção das peças do Tangram. Em seguida, estudaremos alguns conteúdos geométricos de vital importância como ângulos, soma dos ângulos internos e áreas.

O 4º capítulo será destinado às frações e novamente ao conceito de área. Ou seja, abordaremos os números racionais no Tangram. As áreas de cada uma das peças do quebra-cabeça serão obtidas por meio de uma comparação, analisando as partes e o todo. Verificaremos qual peça do Tangram é a mais adequada para se tomar como unidade de área.

No 5º capítulo, estudaremos a incomensurabilidade existente entre alguns segmentos de reta que formam as peças do jogo. Será dado um enfoque maior aos números irracionais. Veremos como surgiu esse conjunto numérico há cerca de 2500 anos e que essa descoberta de Pitágoras gerou enorme espanto na época e a sua conseqüente contribuição. Apresentaremos também os conceitos de semelhança e perímetro e o interessante fato da impossibilidade da construção de um quadrado e de um triângulo com 6 peças do Tangram.

No 6º capítulo, apresentaremos atividades aplicadas em sala de aula com o uso do Tangram tradicional. É evidente que outras atividades podem e devem ser aplicadas para a exploração desse rico material. Além disso, explicitaremos os objetivos das mesmas e apresentaremos de uma forma geral o progresso e a interação dos alunos com o objeto de estudo.

Depois disso tudo, faremos as considerações finais e exibiremos três seções de Apêndices que enriquecem bastante nossa pesquisa.

De acordo com Vygotsky (1989), “as atividades realizadas em grupo, de forma conjunta, oferecem enormes vantagens, que não estão disponíveis em ambientes de aprendizagem individualizada”. Nesse sentido, priorizamos que as atividades fossem realizadas ao menos em dupla. Defendemos que as atividades em grupo facilitam o desenvolvimento cognitivo e conseqüentemente a aprendizagem do estudante.

Este pensamento está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998):

“Assim, trabalhar coletivamente, por sua vez, favorece o desenvolvimento de capacidades como: perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso; saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro; discutir as dúvidas, supor que as soluções dos outros podem fazer sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias; incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.” (PCN, 1998, p.39)

Faremos ainda um apêndice (Apêndice A), apresentando diversos tipos de tangram, sejam eles triangulares, retangulares, circulares, entre outras formas. Isto nos mostra que qualquer pessoa, se desejar, pode construir o seu próprio tangram.

Desejamos que este seja um trabalho demasiadamente proveitoso a todos os

---

leitores e que a aplicabilidade do tangram como material de apoio no ensino de Matemática produza enormes frutos tanto para professores quanto para estudantes.



## 2 Tangram: Origem e Tipos

Neste capítulo, conheceremos o Tangram e apresentaremos alguns relatos de suas possíveis origens. Também contaremos como esse jogo se expandiu para diversos países, possibilitando a criação de diversificados tipos desse quebra-cabeça.

### 2.1 Breve história

O Tangram é uma espécie de quebra-cabeça milenar, oriundo da China. Seu conteúdo é formado por sete figuras geométricas que, justapostas, compõem um quadrado. Tais peças desse quebra-cabeça são: 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo.

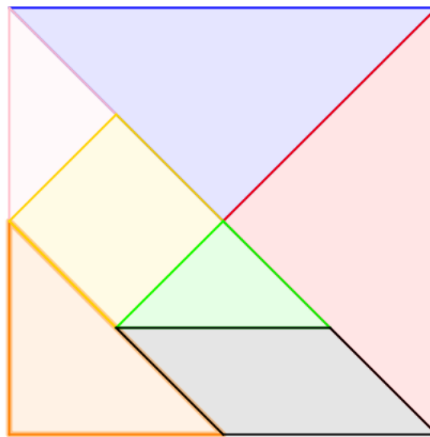


Figura 2.1: Tangram tradicional chinês

No decorrer do século XIX, este jogo foi trazido para o Ocidente, ganhando bastante notoriedade. Prova disso, é que, em 1818, sua fama se espalhava por toda a América e por alguns países europeus, tais como Alemanha, Áustria, França e Itália.

A origem da palavra Tangram é desconhecida. Há algumas especulações acerca deste assunto. Uma delas parece estar relacionada à Dinastia T'ang (618 - 906), uma das mais influentes dinastias da história chinesa. Para se ter uma ideia de sua importância, em alguns dialetos do sul da China, a tradução da palavra T'ang é o vocábulo "chinês".

E a parte final, gram, significa algo desenhado ou representado como um diagrama. Daí, Tangram seria um "diagrama chinês" ou mesmo um "quebra-cabeça chinês". Uma outra possível origem da palavra está relacionada a "Tchi Tchiao Pan", cuja tradução seria "Sete Peças da Sabedoria" ou "Sete Peças da Argúcia".

Há uma curiosa lenda sobre um sábio chinês, chamado Tan, que deveria levar ao imperador uma placa de jade, cujo formato era de um quadrado. Contudo, tal placa caiu no chão quando o sábio Tan tropeçou e partiu-se em sete pedaços geometricamente perfeitos. Ao tentar remontá-la, Tan obteve diversos formatos, após muitas tentativas, o que, de certa forma, acabou tornando-se para ele uma diversão. Quando, enfim, conseguiu remendar o quadrado, levou-o ao imperador. Os sete pedaços representariam as sete virtudes chinesas: Criatividade, Humildade, Paciência, Perfeição, Perseverança, Sabedoria e União.

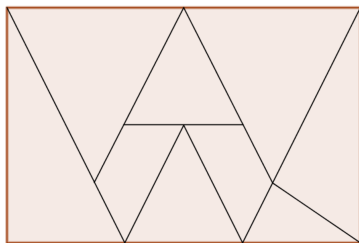
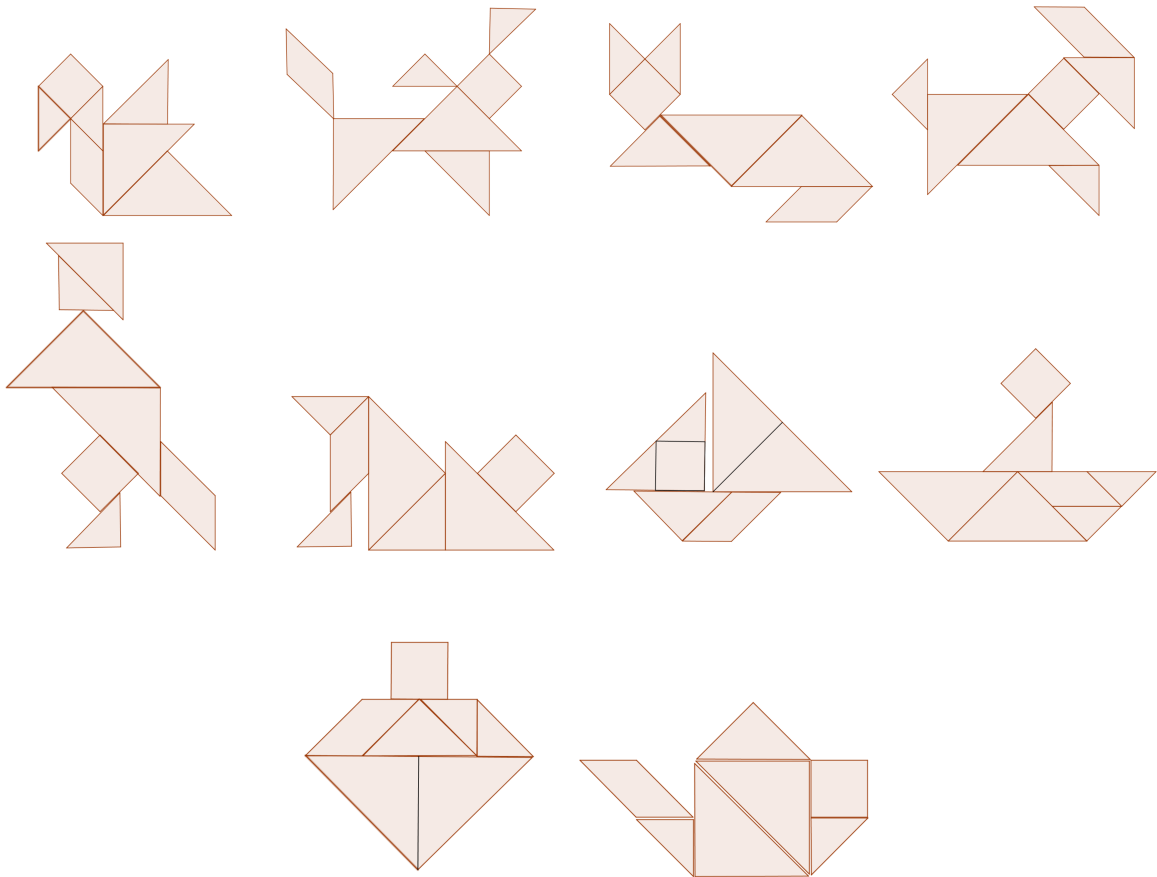
Tan popularizou o jogo ao mostrar a seus amigos as figuras que conseguira montar e presenteou-os posteriormente com o mesmo.

Além do quadrado, com as sete peças, podemos formar mais de 1700 figuras, entre as quais, pessoas, animais, objetos, plantas, letras do nosso alfabeto, algarismos, figuras geométricas, entre outras. Veja algumas delas:

## 2.2 Alguns dos Variados Tipos de Tangram

Hoje em dia, diversas escolas, em várias partes do mundo, adotam o tangram como recurso de apoio às atividades propostas em sala de aula. Com isso, diversificados tipos de tangram foram criados. Apresentaremos alguns aqui neste capítulo e outros no Apêndice A.

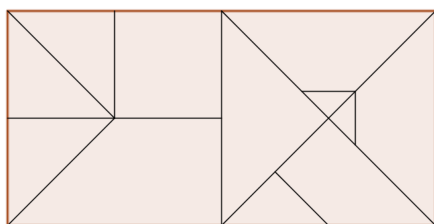
### Tangram de 9 Peças



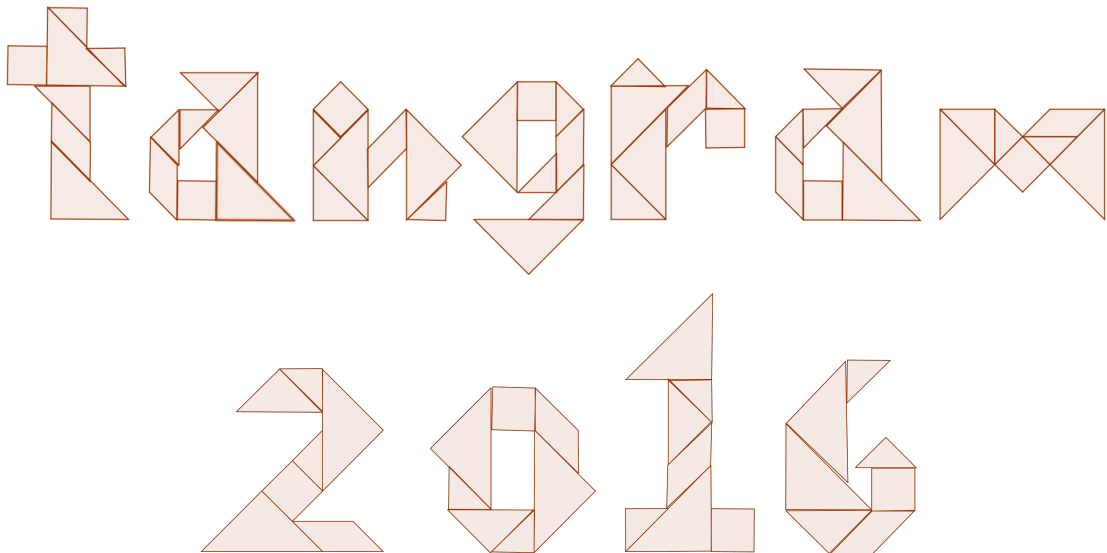
do tangram de 9 peças.

O Tangram de 9 peças é um quebra-cabeça surgido no século XIX, dentre as quais, sete são triângulos, de variadas formas, e duas são trapézios congruentes. Esse quebra-cabeça é formado a partir de um retângulo. Temos na figura a seguir, uma reprodução

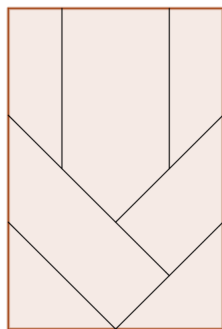
### Tangram Russo de 12 Peças



O tangram russo é um quebra-cabeça formado por doze peças, das quais uma é quadrado, duas são trapézios retângulos, duas são trapézios isósceles congruentes e sete são triângulos retângulos isósceles, que apresentam quatro formatos diferentes.

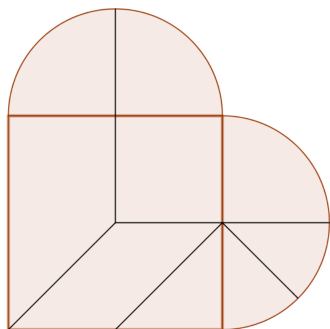


### Tangram Retangular de 7 Peças



Conforme o nome já nos diz, trata-se de um quebra-cabeça contendo 7 peças, que, justapostas, compõem um retângulo. As peças são dois triângulos retângulos isósceles e congruentes, quatro trapézios retângulos, dos quais dois são congruentes e um pentágono que possui três ângulos internos retos.

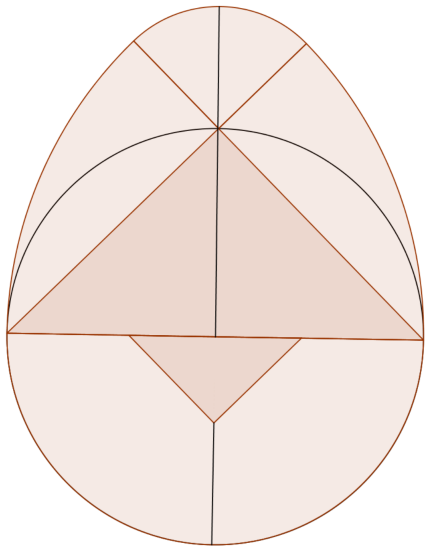
### Tangram "Coração Partido" ou Cardio Tangram



O tangram "Coração Partido" é um quebra-cabeça formado por 8 peças, sendo quatro quadrantes de círculo congruentes, um quadrado, um triângulo retângulo isósceles, um paralelogramo e um trapézio retângulo. Unindo todas as peças, podemos formar um coração. Usando régua e compasso, em um papel quadriculado, podemos construir as peças desse tangram.

Além disso, importantes questões sobre áreas e perímetro podem ser abordadas pelos professores com a utilização deste tangram.

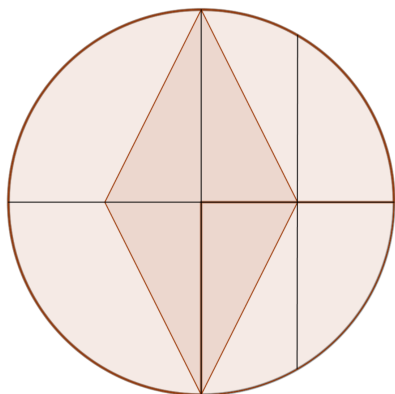
## Tangram Oval



O tangram oval é um quebra-cabeça formado por 9 peças. Este tangram também é conhecido como Ovo Mágico ou Ovo de Colombo. Suas peças são dois triângulos curvos, dois triângulos retângulos curvos, dois triângulos retângulos isósceles grandes, um triângulo retângulo isósceles pequeno e dois trapézios curvos. Em 1879, os irmãos Otto e Gustav Lilienthal, pioneiros da aviação, reproduziram blocos de pedra manuais, conhecidos como pedras de Anker. Seu material era composto de areia de

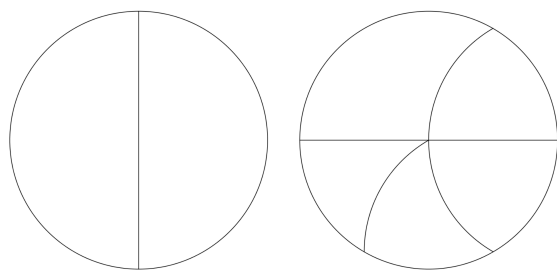
quartzo, gesso e azeite de linhaça. Posteriormente, Friedrich Richer, em 1890, lançou uma linha de quebra-cabeças feitos com essas pedras de Anker, que combinavam-se formando figuras. Uma delas foi o Ovo de Colombo, surgindo em 1893. O interessante é que muitas das figuras nascidas desse ovo são figuras de aves.

## Tangram Círculo Partido



O tangram Círculo Partido é um quebra-cabeça formado por 10 peças que constituem um círculo. O manuseio dessas peças conduz o aluno a dominar alguns conceitos tais como áreas e simetria entre figuras que não são todas exatamente polígonos com os quais estão habituadas a trabalhar, bem como explorar a imaginação criando figuras com bordas circulares.

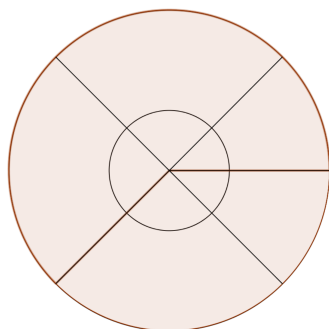
## Tangram Dois Círculos Partidos



O tangram dois círculos partidos é um tipo de quebra-cabeça formado a partir de dois círculos. Sua construção se dá com o uso de régua e compasso. Ao todo, são 7 peças que fazem parte desse tangram, sendo dois semicírculos e cinco triângulos curvos. Com a observação atenta das mesmas, pode-se

levar o aluno ao conhecimento de simetria e à noção de área. Segue uma imagem deste tangram.

## Tangram Circular



Mais um tipo de quebra-cabeça originário de um círculo. Este tangram contém 9 peças, uma a menos em relação ao primeiro tangram circular apresentado. Com este quebra-cabeça pode-se trabalhar os conceitos de setor circular, ângulo inscrito na circunferência, frações, entre outros.

## 3 Áreas e Ângulos

Este capítulo será dedicado ao Tangram tradicional chinês. Mostraremos a construção de cada peça deste quebra-cabeça, por meio de dobraduras e recortes, e abordaremos alguns conceitos matemáticos como ângulos, perímetro e área.

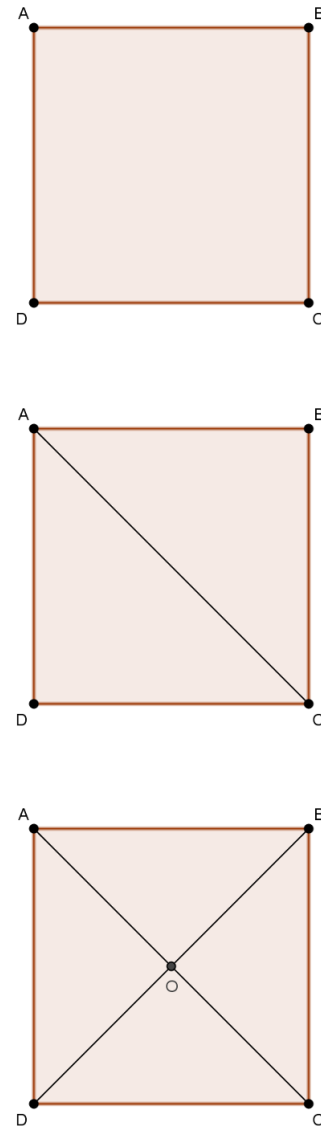
### 3.1 Áreas

Considere um quadrado  $ABCD$ . Começaremos o processo de construção das peças do Tangram. Para tal, recorte este quadrado e dobre-o por uma de suas diagonais. Que seja  $AC$ , sem perda de generalidade.

Note que, pelo caso de congruência  $LLL$ , os triângulos  $ABC$  e  $ADC$  são congruentes. De fato, temos  $\overline{AB} = \overline{AD}$ ,  $\overline{BC} = \overline{DC}$  e  $AC$  é comum aos dois triângulos. Cada diagonal de um quadrado é um eixo de simetria dessa figura. Além disso, como  $\overline{AB} = \overline{BC}$  e  $\overline{AD} = \overline{DC}$ , esses triângulos são isósceles. Como os ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle BCD$  são retos, concluímos que os ângulos  $\angle BAC$ ,  $\angle ACB$ ,  $\angle CAD$  e  $\angle DCA$  são congruentes e iguais a  $45^\circ$ . Isto é, a diagonal  $AC$  do quadrado é bissetriz dos ângulos retos  $\angle BAD$  e  $\angle BCD$ . Em seguida, dobre o quadrado pela diagonal  $BD$ . O ponto  $O$  de interseção das diagonais é o centro do quadrado. Aqui estamos usando o fato de que as diagonais de um paralelogramo cortam-se no meio.

Recorte o quadrado pela diagonal  $AC$ . Logo após, recorte o triângulo  $ABC$  pelo segmento de reta  $OB$ .

Temos então, dois triângulos retângulos congruentes  $AOB$  e  $BOC$ . De fato,  $\overline{AB} =$



$\overline{BC}$ , pois são lados do mesmo quadrado,  $\overline{OA} = \overline{OC}$ , pois  $O$  é ponto médio desses dois segmentos, e  $OB$  é comum aos dois triângulos. Logo, pelo caso *LLL*, os triângulos  $AOB$  e  $BOC$  são congruentes. Estas são as duas primeiras peças do Tangram, as quais denominamos **triângulos grandes**.

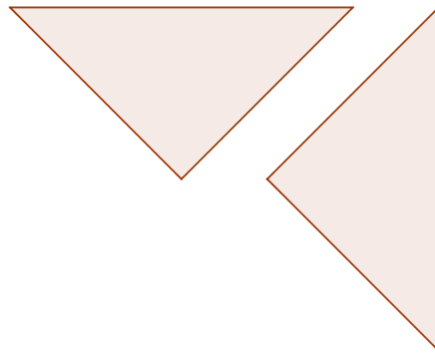


Figura 3.1: Triângulos grandes

Considere o triângulo  $ACD$ , da seguinte figura. Sejam  $E, F$  e  $G$ , respectivamente, os pontos médios dos segmentos de reta  $AD, OD$  e  $CD$ .

Sendo assim, o segmento  $EG$  é base média de  $ADC$ . Por semelhança, temos que os lados do triângulo  $DEG$  medem metade dos respectivos lados do triângulo  $DAC$ . Daí,

$$\text{área}(DEG) = \frac{1}{4} \text{área}(DAC).$$

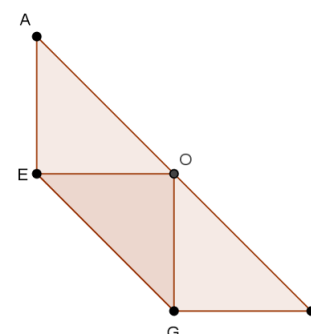
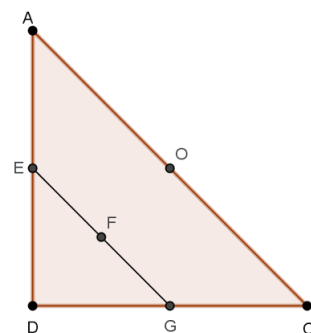
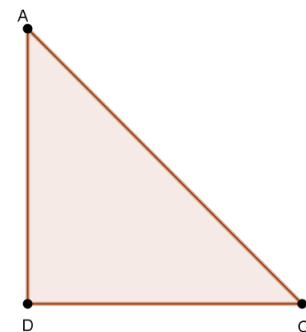
Contudo,  $\text{área}(DAC) = 2 \cdot \text{área}(AOB) = 2 \cdot \text{área}(BOC)$ . Por conseguinte,

$$\text{área}(DEG) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \text{área}(AOB) = \frac{1}{2} \cdot \text{área}(AOB)$$

e também  $\text{área}(DEG) = \frac{1}{2} \cdot \text{área}(BOC)$ .

Dobrando o triângulo, fazendo  $D$  coincidir com  $O$ , teremos a figura ao lado:

Recorte o triângulo  $DEG$ . Esta é a terceira peça do Tangram e é chamada de **triângulo**





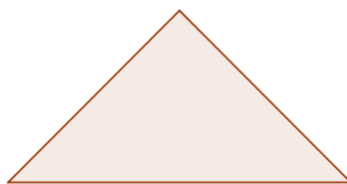
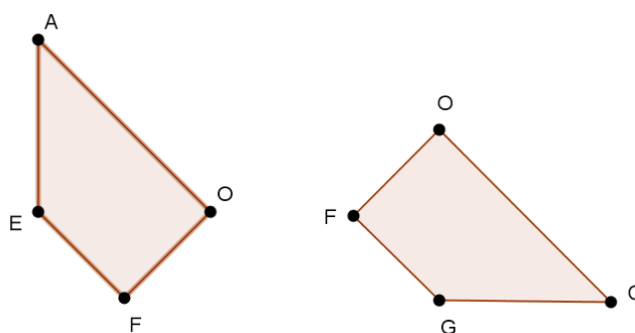
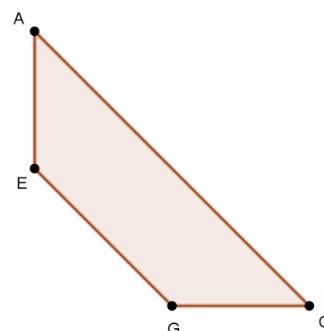


Figura 3.2: Triângulo Médio

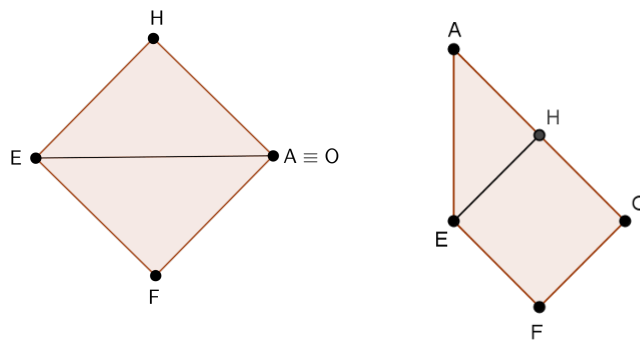
médio.

Considere agora o trapézio  $GEAC$ . Dobre-o, fazendo com que os pontos  $A$  e  $C$  coincidam. O mesmo deve acontecer com os pontos  $E$  e  $G$ . Dessa forma, o segmento  $OF$  divide o trapézio citado em dois trapézios retângulos e congruentes:  $AOFE$  e  $COFG$ . Tais trapézios assim o são, pois têm lados e ângulos respectivamente congruentes.



Dobre o trapézio  $AOFE$ , fazendo com que coincidam os pontos  $A$  e  $O$ . Temos portanto,  $H$ , ponto médio do segmento  $OA$ . O segmento  $EH$  é altura deste trapézio, pois, como os pontos  $A$  e  $O$  irão coincidir e os lados  $EF$  e  $AO$  são paralelos, o segmento  $EH$  será paralelo a  $OF$ , que é a altura do trapézio.

Recorte a figura através deste segmento. Obtemos daí o triângulo retângulo isósceles  $AHE$  e o quadrado  $OHEF$ . Essas são mais duas peças do Tangram, as quais chamamos

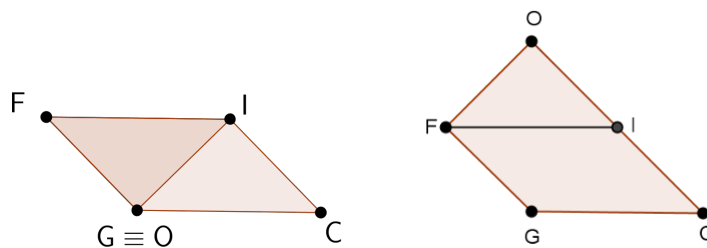


de triângulo pequeno e quadrado.



Figura 3.3: Triângulo Pequeno e Quadrado

Agora, tome o trapézio  $COFG$ . Dobre-o de forma que os pontos  $O$  e  $G$  coincidam. Voltando novamente a figura para a posição original, obtemos o segmento de reta  $IF$ , tal que  $I$  é ponto médio de  $OC$ .



Podemos observar que este trapézio pode ser dividido em duas outras figuras: um outro triângulo isósceles pequeno,  $OIF$ , congruente a  $AHE$  e o paralelogramo  $ICGF$ , que são as duas últimas peças do Tangram.

Remontando o quadrado, pela justaposição das sete peças, temos a seguinte



Figura 3.4: Triângulo Pequeno e Paralelogramo

figura:

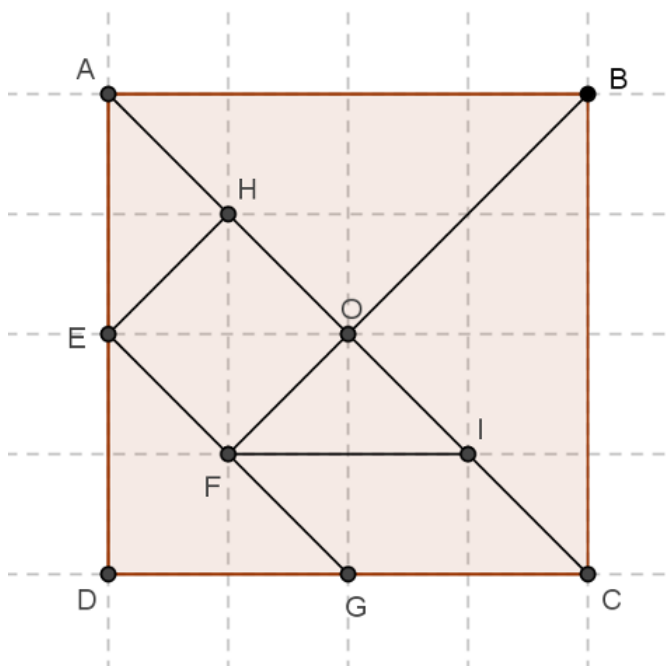


Figura 3.5: As 7 peças justapostas compondo um quadrado

Já demonstramos que a área do triângulo médio equivale à metade da área de um triângulo grande. Faremos a seguir as relações entre as áreas das demais figuras.

Tome um triângulo pequeno e o triângulo médio. Vale ressaltar que o quadriculado, como na figura acima, é um importantíssimo aliado para que sejam demonstradas as relações entre as áreas das peças. Se sobrepusermos o triângulo pequeno ao médio, podemos conjecturar que a área do segundo é o dobro da área do primeiro. Por construção, os segmentos  $AE$  e  $DE$  são congruentes. Tome o outro triângulo pequeno. Justapondo os dois triângulos pequenos, pelos segmentos  $HE$  e  $OF$ , obtemos um triângulo retângulo congruente ao triângulo médio. Portanto, a área do triângulo médio é, de fato, o dobro da área de um triângulo pequeno. Consequentemente, a área de um triângulo grande é 4 vezes a área de um triângulo pequeno.

Durante a construção do quebra-cabeça, pudemos observar que o trapézio  $AOFE$  foi dividido em duas figuras, o triângulo  $AHE$  e o quadrado  $EFOH$ , onde coincidimos os pontos  $O$  e  $A$ . Desse modo, o segmento  $OE$ , que é congruente a  $AE$ , é diagonal deste quadrado. Portanto, podemos concluir que a área de um triângulo pequeno representa metade da área do quadrado. Isto é, a área do quadrado é igual à área do triângulo médio e metade da área do triângulo grande.

De forma análoga, o trapézio  $COFG$  foi dobrado de modo que  $O$  e  $G$  coincidissem. Assim,  $OI$  tem a mesma medida que  $OF$ , que é a altura do trapézio em questão. Logo, após o recorte do triângulo pequeno e do paralelogramo, temos que a área do primeiro é metade da área do segundo.

Curiosamente, constatamos que a área do paralelogramo é igual à área do quadrado e também é igual à área do triângulo médio. Este fato traduz que o tangram nos mostra que figuras completamente heterogêneas podem vir a ter a mesma área (!), a saber, a área do paralelogramo é o dobro da área de um triângulo pequeno e metade da área de um triângulo grande.

Faz-se necessário abrirmos um parêntese aqui. Ao compararmos as áreas do triângulo pequeno e do quadrado, por exemplo, verificamos que a área do primeiro representa metade da área do segundo. Com o Tangram, a pessoa que o estiver manipulando pode entender o verdadeiro sentido da fórmula da área de um triângulo (exaustivamente apresentada pelos professores e decorada pelos alunos como ) como metade da área de um quadrado, desde que estas figuras tenham bases com medidas iguais e alturas congruentes.

Concluindo, temos:

Área de um \ é igual à area de	Triângulo Pequeno	Triângulo Médio	Quadrado	Paralelogramo
Triângulo Médio	2	1	1	1
Quadrado	2	1	1	1
Paralelogramo	2	1	1	1
Triângulo Grande	4	2	2	2

## 3.2 Ângulos

Observaremos, a seguir, os ângulos internos de cada peça do jogo. Os triângulos são todos retângulos e isósceles. Ou seja, todos eles possuem um ângulo interno de  $90^\circ$  e dois ângulos iguais a  $45^\circ$ . O quadrado, obviamente, possui todos os ângulos iguais a  $90^\circ$ . De um trapézio retângulo, obtivemos um triângulo médio e um paralelogramo, as duas últimas peças da construção. Há dois ângulos internos retos e um outro par de ângulos suplementares nessa figura.

Como o segmento de reta  $IF$  dividiu o ângulo  $\angle OFG$  em dois ângulos congruentes, temos que  $IF$  é bissetriz desse ângulo. Logo, dois dos ângulos internos do paralelogramo medem  $45^\circ$  e os outros dois medem  $135^\circ$ .

Um tipo de atividade muito interessante é a utilização do tangram para a verificação da conhecida fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, que é dada por  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ , onde  $n$  é o número de lados do polígono. Faremos a seguir algumas sugestões para tais atividades, ao final do capítulo o leitor encontrará algumas possíveis soluções para as montagens:

**Atividade 3.2.1.** *Construa um triângulo com a quantidade de peças especificada em cada item e em seguida obtenha a soma dos ângulos internos:*

- (a) duas peças;
- (b) três peças;
- (c) quatro peças;
- (d) cinco peças;
- (e) sete peças.

Podemos observar que sempre chegamos a um triângulo retângulo isósceles, e portanto a soma das medidas de seus ângulos é sempre  $45^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , conforme veremos nas ilustrações mais a frente.

Note que não foi pedida a construção do triângulo com 6 peças do jogo. No capítulo 5, mostraremos a impossibilidade de se construir um triângulo com esse número de peças. Vamos à próxima atividade!

**Atividade 3.2.2.** *Construa a maior quantidade de quadriláteros convexos que você conseguir utilizando a quantidade de peças indicada e em seguida obtenha a soma dos ângulos internos em cada caso:*

(a) duas peças;

(b) três peças;

(c) quatro peças;

(d) cinco peças;

(e) seis peças;

(f) sete peças.

Um quadrado é um quadrilátero regular, ou seja, os quatro lados são congruentes e os ângulos são todos iguais a  $90^\circ$ . Portanto, é trivial que a soma das medidas desses ângulos é  $360^\circ$ . Para os outros quadriláteros não é tão óbvio, mas é possível demonstrar que somente podemos construir vértices com os seguintes ângulos:  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ . Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as quantidades de ângulos de  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ , respectivamente. Temos que  $0 \leq x < 4$ ,  $0 \leq y \leq 4$ ,  $0 \leq z < 3$  e que

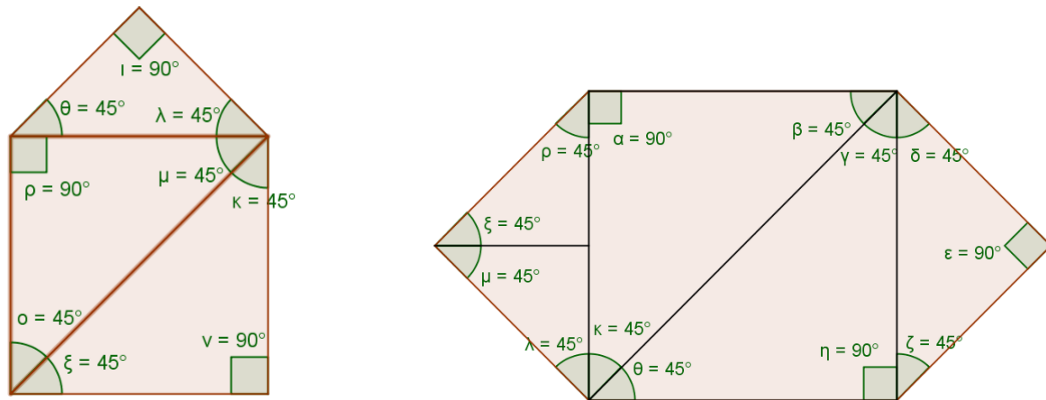
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 45x + 90y + 135z = 360 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações, chegamos a  $x = z$  e  $y = 4 - 2x$ , o que nos leva às seguintes possibilidades para o terno ordenado  $(x, y, z)$ :  $(0, 4, 0)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(2, 0, 2)$ . O caso  $(0, 4, 0)$  corresponde a todos os possíveis quadrados, o caso  $(2, 0, 2)$  é o dos paralelogramos e trapézio isósceles, e o caso  $(1, 2, 1)$  contém o trapézio retângulo e um quadrilátero onde os dois ângulos retos não são consecutivos.

Assim como na construção dos triângulos, discutiremos mais a frente a impossibilidade de se construir um quadrado com 6 peças do tangram.

**Atividade 3.2.3.** *Construa os seguintes polígonos, determine a soma dos seus ângulos internos e compare com a fórmula  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .*

(a) um pentágono, utilizando dois triângulos grandes e um médio;



(b) um hexágono, utilizando dois triângulos grandes, dois pequenos e um médio;

A soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono deve ser  $540^\circ = (5 - 2) \cdot 180^\circ$  e a do hexágono  $720^\circ = (6 - 2) \cdot 180^\circ$ .

O leitor, se desejar, poderá verificar que essa expressão é válida para qualquer  $n$  natural maior que ou igual a 3. Apresentaremos apenas duas figuras de polígonos convexos e não convexos formados por mais de um tangram e as medidas de seus ângulos internos.

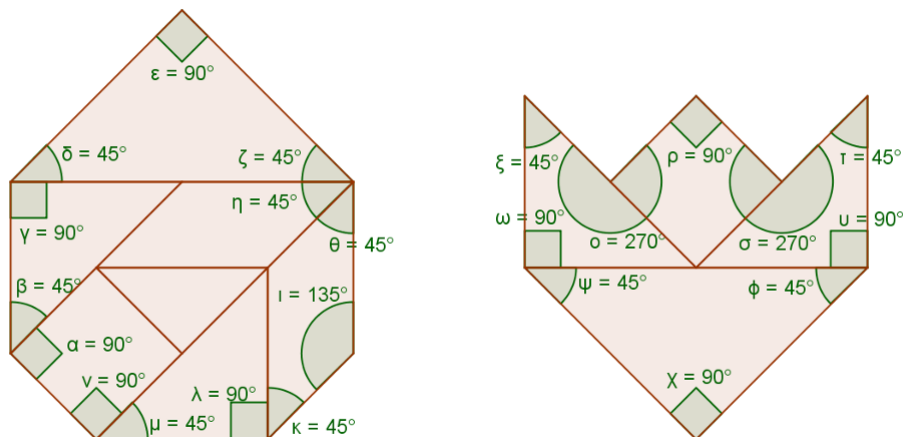


Figura 3.6: Heptágono convexo e Octógono não convexo.

Nas atividades anteriores, apenas verificamos a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono para alguns casos particulares utilizando as peças do tangram. Vamos agora apresentar uma justificativa dessa fórmula, utilizando dobraduras. Para tal, considere um triângulo genérico  $ABC$ .

Dobre-o, fazendo com que o ponto  $A$  coincida com o segmento  $BC$  e que a dobra seja paralela a  $BC$  (basta fazer o ponto  $A$  coincidir com o pé da altura reativa ao lado  $BC$ ).

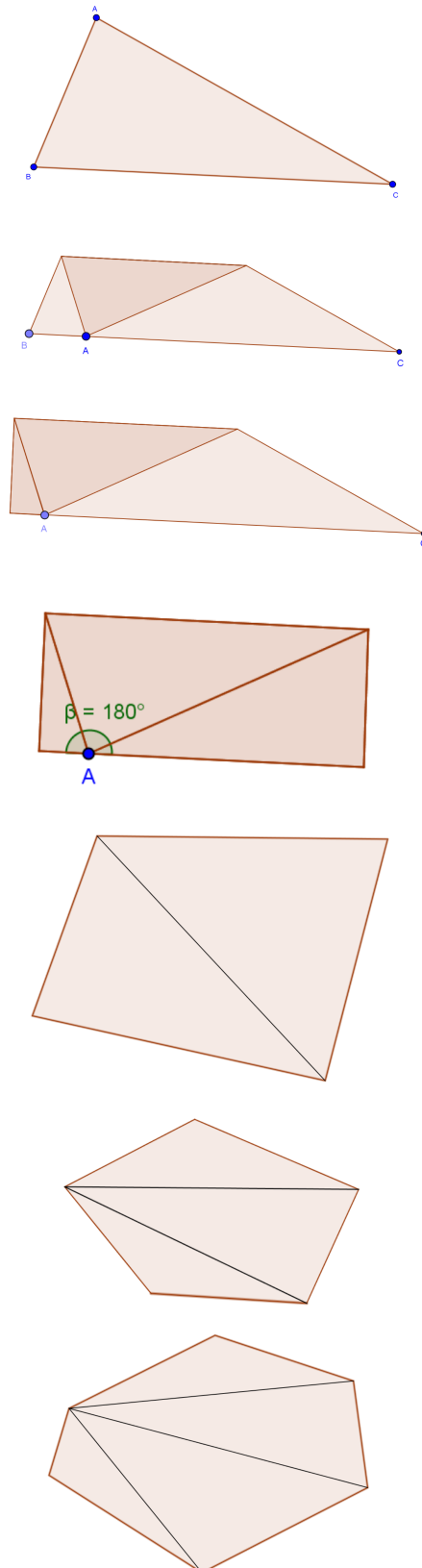
Em seguida, dobre a figura, fazendo com que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  coincidam. Veja as seguintes etapas.

Portanto, acabamos de mostrar, utilizando dobradura, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

Agora, tome um quadrilátero e trace uma de suas diagonais, conforme a figura. Podemos observar que a diagonal divide o quadrilátero em dois triângulos. Portanto, a soma dos ângulos internos será  $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ .

Considere agora um pentágono e todas as suas diagonais partindo de um único vértice. Temos três triângulos justapostos. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ .

Analisando um hexágono e as diagonais partindo de um único vértice, visualizamos quatro triângulos justapostos, ou seja, a soma das medidas dos ângulos internos é  $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ . Podemos conjecturar que o número de lados de cada polígono em questão é duas unidades maior que o número de triângulos formados. Provaremos, definitivamente, a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono,





dada por  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$  onde  $n$  é o número de lados do mesmo, para  $n$  natural a partir de 3.

Para  $n = 3$  verifica-se tranquilamente, pois  $(3-2) \cdot 180^\circ = 1 \cdot 180^\circ = 180^\circ$ , que é, de fato, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Suponha que vale a fórmula para  $n = k$  (HIPÓTESE DE INDUÇÃO). Provemos que vale para  $n = k + 1$ . Seja  $\mathcal{P} = A_1A_2 \dots A_{k+1}$  um polígono de  $k + 1$  lados e trace todas as diagonais partindo de  $A_1$ . Podemos afirmar que  $\mathcal{P} = A_1A_3 \dots A_{k+1} \cup A_1A_2A_3$ . Mas  $A_1A_3 \dots A_{k+1}$  é um polígono de  $k$  lados e  $A_1A_2A_3$  é um triângulo. Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + 180^\circ \\ &= (k - 2) \cdot 180^\circ + 180^\circ \\ &= [(k + 1) - 2] \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Logo, para todo natural  $n \geq 3$  vale a fórmula da soma dos ângulos internos:  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .

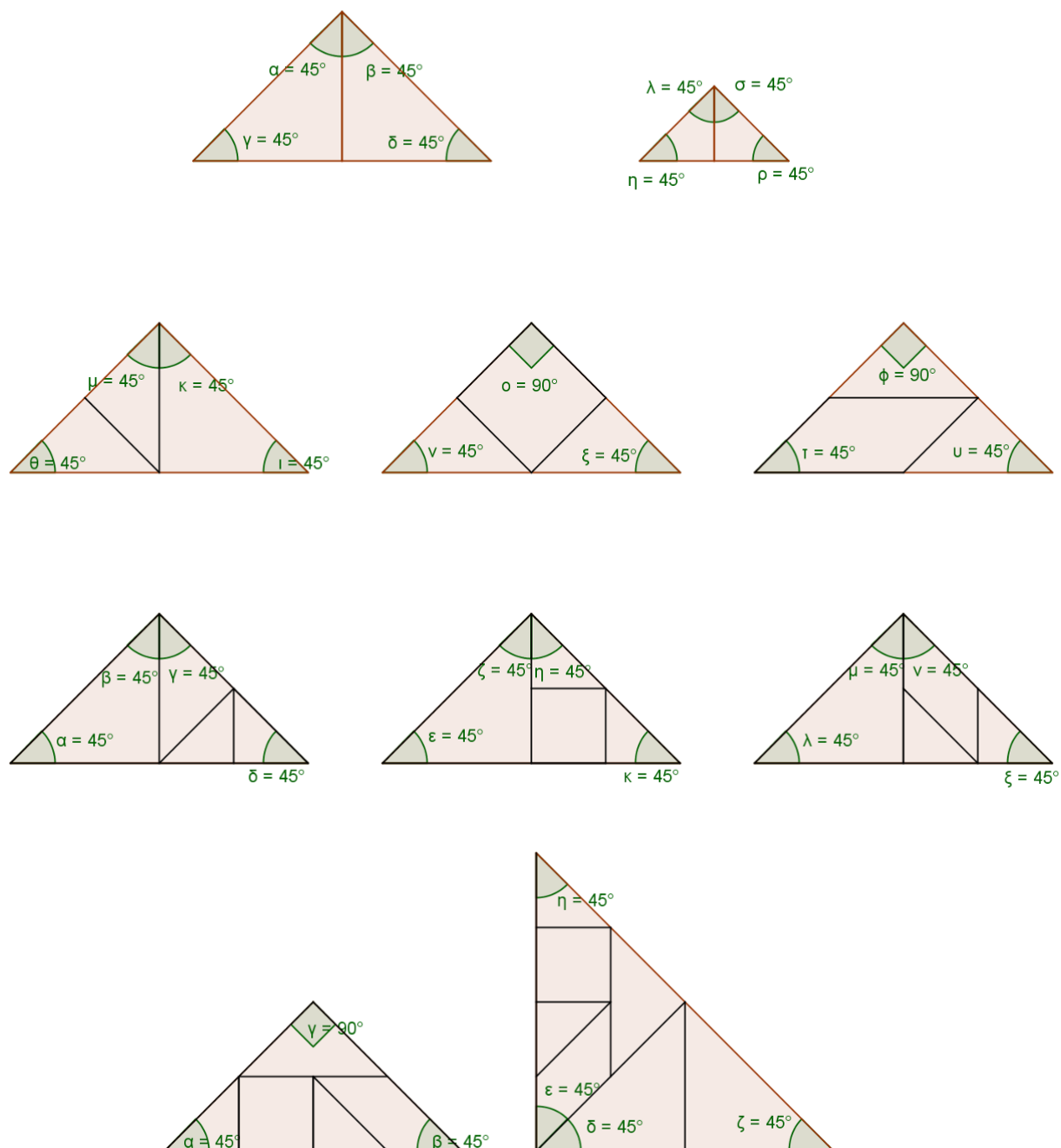


Figura 3.7: Algumas soluções da atividade 3.2.1

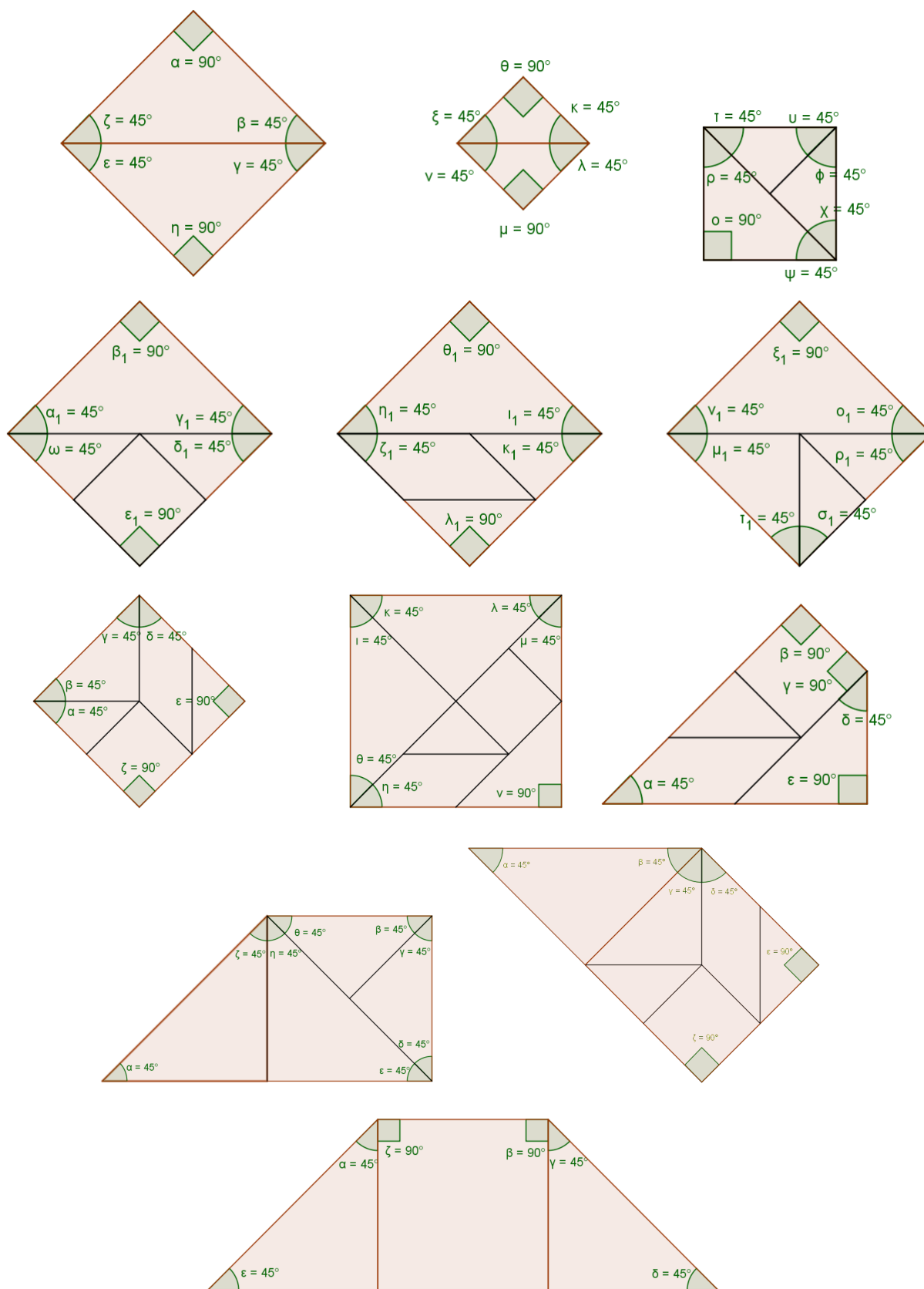


Figura 3.8: Algumas soluções da Atividade 3.2.2

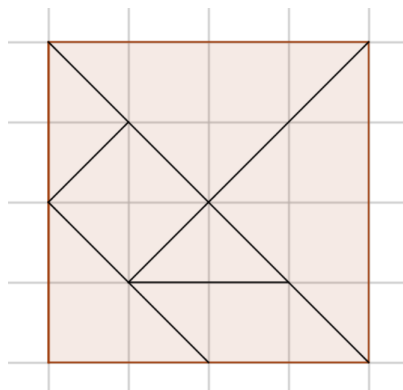
## 4 Números Racionais

Neste capítulo, iremos relacionar os conceitos de fração e área com as peças do Tangram. Vamos observar que a razão entre as áreas de duas peças distintas do Tangram é um número racional, bem como a razão de cada uma das partes pelo todo.

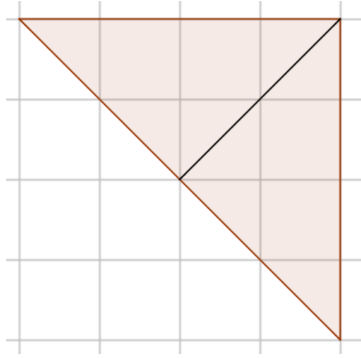
Inicialmente, utilizaremos uma malha quadriculada e tomaremos cada quadrado dessa malha como a unidade para comparar as áreas de duas peças distintas e depois cada peça será considerada a unidade de área. Estabeleceremos qual peça será a mais viável para que seja considerada a unidade de área. Além disso, na parte final deste, aferiremos as razões de semelhança entre os triângulos do tangram.

Um número é racional quando pode ser representado sob a forma  $\frac{a}{b}$ , onde  $a$  e  $b$  são números inteiros e  $b \neq 0$ . Veremos que as razões entre as áreas de cada peça são sempre representadas dessa maneira, assim como a razão entre a área de uma determinada peça e a área do quadrado original.

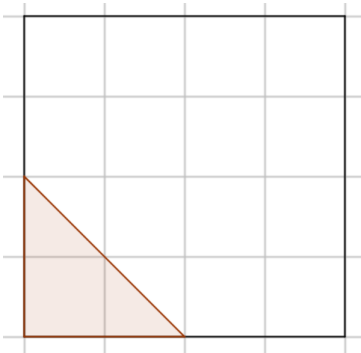
Considere, no tangram tradicional, o quadrado formado pelas sete peças em uma malha quadriculada, conforme segue a figura.



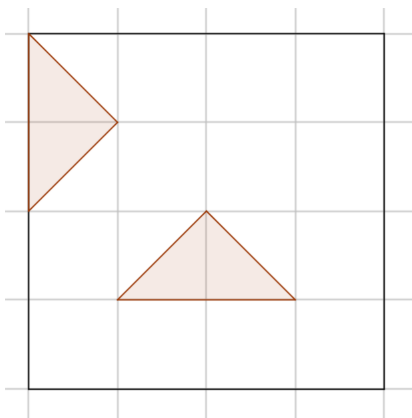
Tomemos cada quadrado dessa malha como a unidade. Perceba que alguns desses quadrados são cortados ao meio através de sua diagonal. Uma a uma, analisaremos as áreas de cada peça do tangram em relação à área do quadrado formado pelas sete peças. O quadrado original é formado por 16 quadrados de área igual à unidade. Dizemos então que a área deste quadrado é de 16 *u.A.* (16 unidades de área). Começaremos a análise pelo triângulo grande.



Os dois triângulos grandes têm juntos 8 quadrados unitários, ou seja, a metade da quantidade do quadrado original. Como polígonos congruentes possuem a mesma área (axiomas de área – Ver p. 206 do livro de Geometria – Coleção PROFMAT), cada triângulo grande possui área  $4u.A$ . Além disso, a razão entre área de um triângulo grande e do quadrado original é  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ . Isto é, no quadrado original cabem exatamente quatro triângulos grandes justapostos. Uma ideia interessante é pensar que, como dois triângulos grandes formam metade do quadrado original, um deles apenas formaria metade da metade, ou seja,  $\frac{1}{4}$  do quadrado original. Tome agora o triângulo médio.



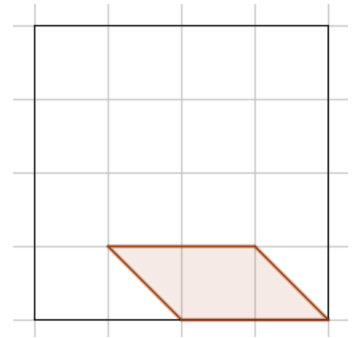
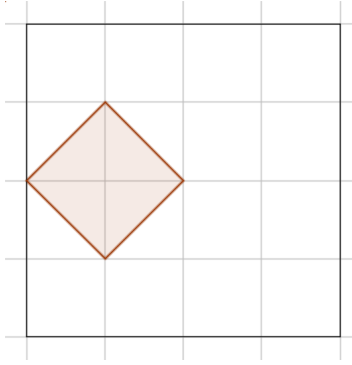
A área do triângulo médio é  $1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 u.A$ . Comparando com o quadrado formado pelas sete peças, a razão entre a área sombreada e a do quadrado é  $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ . Isto quer dizer que o quadrado pode ser formado por 8 triângulos médios.



Analisaremos as áreas dos triângulos pequenos. A área de cada um desses triângulos é  $2 \times \frac{1}{2} = 1 u.A$ . Portanto, a área de cada triângulo pequeno equivale a  $\frac{1}{16}$  da área do quadrado formado pelas sete peças.

Estes resultados corroboram o que foi estudado no capítulo anterior: que a área do triângulo pequeno é metade da área do triângulo médio, que por sua vez é metade da área do triângulo grande.

Falta obter a área do quadrado e do paralelogramo. Considere o quadrado sombreado a seguir.



A área do quadrado sombreado é  $4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ u.A.}$ , ou seja, a razão entre a área do quadrado sombreado e a área total é  $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ .

Por fim, tome o paralelogramo. Vamos comparar a área deste com a do quadrado original.

A área do paralelogramo é  $1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ u.A.}$ , também equivalendo a  $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$  da área do quadrado formado pelas sete peças.

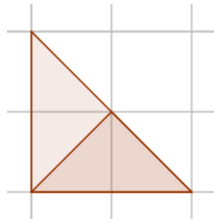
Com isso, ratificamos o que foi visto no capítulo anterior: as áreas do quadrado, do paralelogramo e do triângulo médio são as mesmas.

Verificando a área total do quadrado formado pelas sete peças, temos  $2 \times 4 + 2 + 2 \times 1 + 2 + 2 = 8 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16 \text{ u.A.}$  Em termos de fração, obedecendo às razões encontradas, obtemos:  $2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Esta última igualdade considera o quadrado formado pelas sete peças como o inteiro e a área de cada peça do Tangram como frações do inteiro.

A próxima etapa é estabelecer um comparativo entre as áreas de duas peças distintas do Tangram, fazendo a sobreposição de uma à outra, utilizando o quadriculado.

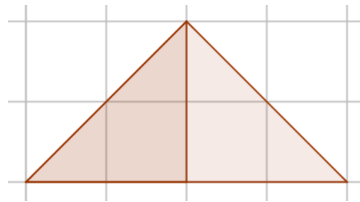
## 4.1 Razões entre as figuras

- TRIÂNGULO PEQUENO e TRIÂNGULO MÉDIO



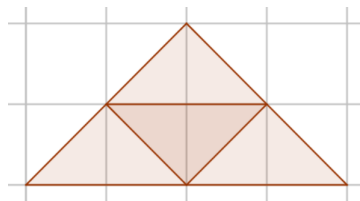
Nesta figura, podemos observar que o triângulo pequeno ocupa metade do espaço preenchido por um triângulo médio, ou seja, dois triângulos pequenos são necessários para que se preencha um triângulo médio. Portanto, a razão entre as áreas de um triângulo pequeno e de um triângulo médio é  $\frac{1}{2}$ .

- TRIÂNGULO MÉDIO e TRIÂNGULO GRANDE



Nesta figura, fica evidente que dois triângulos médios são necessários para preencher o triângulo grande. Nesse sentido, a área de um triângulo médio é  $\frac{1}{2}$  da área do triângulo grande.

- TRIÂNGULO PEQUENO e TRIÂNGULO GRANDE

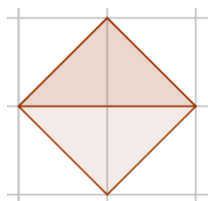


Ao analisarmos a figura acima, observamos que quatro triângulos pequenos preenchem um triângulo grande. Logo, a razão entre as áreas dos triângulos pequeno e grande é  $\frac{1}{4}$ . Este resultado já era esperado com as duas análises feitas anteriormente,

pois se dois triângulos pequenos preenchem um triângulo médio e dois médios recobrem um grande, são necessários  $2 \times 2 = 4$  triângulos pequenos para recobrirem um grande.

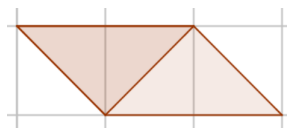
Uma curiosidade: o triângulo pequeno é o triângulo medial do grande, pois seus vértices são pontos médios dos lados do triângulo grande.

- TRIÂNGULO PEQUENO e QUADRADO



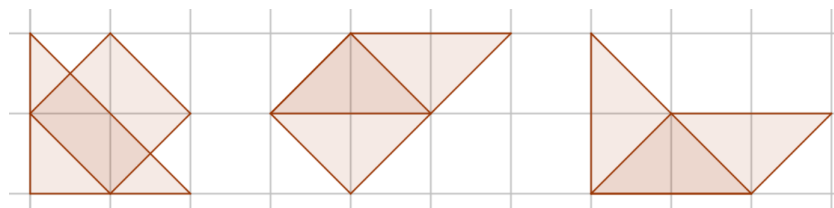
Pela figura, podemos notar que dois triângulos pequenos preenchem completamente o quadrado. Assim sendo, a área do triângulo pequeno equivale à  $\frac{1}{2}$  da área do quadrado.

- TRIÂNGULO PEQUENO e PARALELOGRAMO



Assim como no caso anterior, podemos ver que o triângulo pequeno preenche metade do espaço preenchido pelo paralelogramo. Logo, a razão entre as áreas do triângulo pequeno e do paralelogramo é  $\frac{1}{2}$ .

- TRIÂNGULO MÉDIO, QUADRADO e PARALELOGRAMO

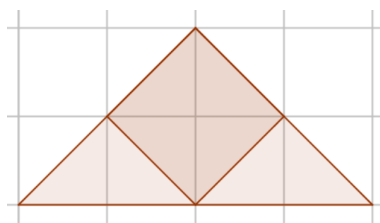


A sobreposição dessas figuras, duas a duas, não é a maneira mais exequível de se comparar as áreas das mesmas, conforme veremos pela figura a seguir.



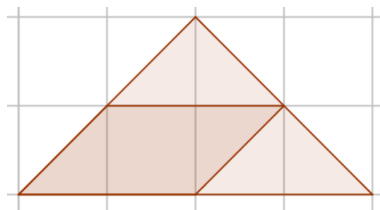
Todavia, ao traçarmos uma análise das razões da área do triângulo pequeno para o triângulo médio, para o quadrado ou para o paralelogramo, encontramos sempre o resultado  $\frac{1}{2}$ . Em vista disso, podemos concluir que a área do triângulo médio é igual à área do quadrado e à área do paralelogramo. Desse modo, a razão entre as áreas dessas figuras, duas a duas, é sempre 1. Confirmando o que já foi observado, vemos aqui que duas figuras distintas podem ter a mesma área, por mais espantoso que possa ser a alguém incipiente em Matemática.

- QUADRADO e TRIÂNGULO GRANDE



Sabemos que o quadrado pode ser fracionado em dois triângulos pequenos e que o triângulo grande pode ser particionado em quatro triângulos pequenos. Logo, a razão da área do quadrado para a área do triângulo grande é  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Podemos pensar que, como a área do triângulo médio, que é igual à área do quadrado, é metade da área do triângulo grande, consequentemente, a área do quadrado também será metade da área do triângulo grande.

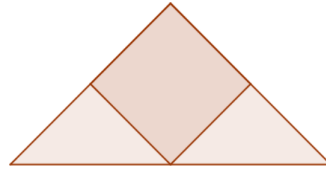
- PARALELOGRAMO e TRIÂNGULO GRANDE



Este caso é análogo ao anterior. O paralelogramo pode ser particionado em dois triângulos pequenos. Portanto, a razão entre as áreas do paralelogramo e do triângulo grande é  $\frac{2}{4}$ , ou seja,  $\frac{1}{2}$ . Assim como o quadrado, o paralelogramo tem área igual a do triângulo médio. Por conseguinte, a área do paralelogramo é metade da área do triângulo grande.

Alguns erros comuns, que poderiam ser evitados, acontecem com um pouco de desatenção. Vejamos alguns deles:

- 1) A razão entre as áreas do quadrado e do triângulo grande é  $\frac{1}{3}$ , pois o quadrado ocupa apenas 1 espaço de um total de 3 como na figura.



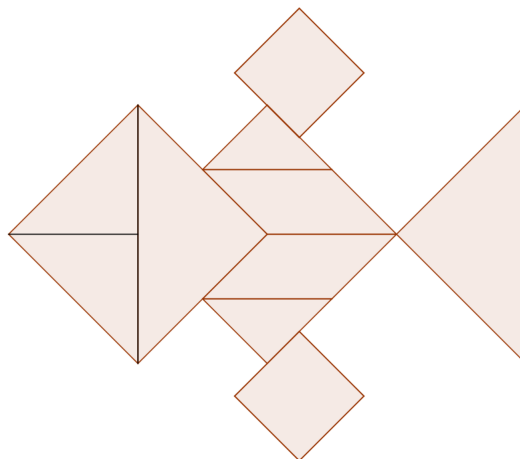
- 2) A área de um triângulo grande equivale a  $\frac{1}{7}$  da área do quadrado formado pelas sete peças.

No primeiro caso, há um erro conceitual de fração. Pois a figura não foi dividida em 3 partes iguais (nesse caso, em partes de mesma área). Se tivéssemos dividido a figura em três partes de mesma área e tomássemos uma delas, aí sim seria  $\frac{1}{3}$  a razão da área menor para a total.

No segundo, além desse erro conceitual, há uma confusão em termos de quantidade, pois foi selecionada uma de um total de sete peças. Numericamente falando, foi escolhido  $\frac{1}{7}$  das peças, mas o quadrado não foi dividido em 7 peças de mesma área. Conforme vimos, a área do triângulo grande equivale a  $\frac{1}{4}$  da área do quadrado original.

Nossa próxima tarefa é adotar cada uma das peças do tangram como unidade de área e concluir qual delas é a mais adequada para se tomar como tal. Começamos a investigação pelo triângulo pequeno.

**Atividade 4.1.1.** *Determine a área da seguinte figura, tomando como unidade o triângulo pequeno.*



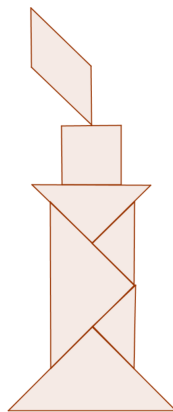
**Solução:** Nesta figura há dois triângulos grandes, dois médios, dois pequenos, dois quadrados e dois paralelogramos. Portanto, a área da figura é  $2 \times 4 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8 + 4 + 2 + 4 + 4 = 22$  triângulos pequenos. Ou seja, para a seguinte figura são necessários 22 triângulos pequenos.

Tomando como unidade o triângulo pequeno, temos as seguintes áreas.

Peça do Tangram	Área
Triângulo Grande	4
Triângulo Médio	2
Triângulo Pequeno	1
Quadrado	2
Paralelogramo	2

Ou seja, o triângulo pequeno cabe sempre uma quantidade inteira de vezes em qualquer outra figura. A próxima figura que tomaremos como unidade de área é o quadrado. Lembrando que não é necessário tomar como unidade de área também o paralelogramo e o triângulo médio por possuírem áreas iguais a do quadrado.

**Atividade 4.1.2.** Dada a figura a seguir, determine a sua área, tomando como unidade o quadrado.



**Solução:** Nesta figura, temos exatamente as sete peças do tangram. Tomando como unidade de área a peça do quadrado, a área da figura é  $2 \times 2 + 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 1 + 1 = 8$  quadrados (8 u.A.). Portanto, são necessários o equivalente a 8 quadrados para construir essa figura.

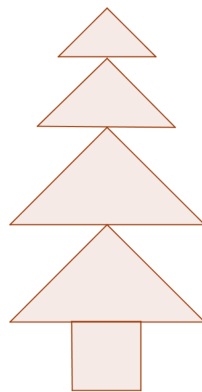
Vale ressaltar que a figura anterior (de 22 triângulos pequenos de área) pode ser construída, utilizando o equivalente a 11 quadrados. Tomando como unidade de área o quadrado, temos as seguintes áreas para as peças do tangram, conforme a tabela a seguir.

Peça do Tangram	Área
Triângulo Grande	2
Triângulo Médio	1
Triângulo Pequeno	$\frac{1}{2}$
Quadrado	2
Paralelogramo	2

Considere agora o triângulo grande como unidade de área. Obviamente, por ser a maior das peças do tangram, a sobreposição da mesma às demais não se faz adequada.

Pelo que foi observado, temos que a área de um triângulo pequeno é  $\frac{1}{4}$  da área do grande e as áreas do quadrado, do paralelogramo e do triângulo médio equivalem à metade da área do triângulo grande. Sendo assim, a área do quadrado formado pelas sete peças, tomando o triângulo grande como unidade de área é  $2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 2 + 3/2 + \frac{1}{2} = 2 + 2 = 4 u.A.$ , ou seja, necessitamos de 4 triângulos grandes para preencher o quadrado formado pelas 7 peças.

**Atividade 4.1.3.** *Utilizando o triângulo grande como unidade de área, calcule a área da seguinte figura.*



Solução: A figura anterior possui dois triângulos grandes, um médio, um pequeno e um quadrado. Portanto, a área é  $2 \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{4}$  triângulos grandes.

Adotando o triângulo grande como unidade de área, temos as seguintes áreas para as peças do tangram.

Peça do Tangram	Área
Triângulo Grande	1
Triângulo Médio	$\frac{1}{2}$
Triângulo Pequeno	$\frac{1}{4}$
Quadrado	$\frac{1}{2}$
Paralelogramo	$\frac{1}{2}$

Se a unidade de área tomada como referência fosse o quadrado, então a área seria  $2 \times (3\frac{1}{4}) = 6\frac{1}{2}$  quadrados. Note que novamente a área está representada na forma de fração.

Essas atividades nos mostram, portanto, que o triângulo pequeno é a peça ideal para se tomar como referência de unidade de área, pois, entre todas as peças, é a única que cabe uma quantidade inteira de vezes em todas as outras.

Soa estranho dizer que na figura anterior cabem 3 triângulos grandes e  $\frac{1}{4}$  de um triângulo grande e mais ainda 6 quadrados mais “meio quadrado”.

Não estamos dizendo que outras peças não sejam úteis para se obter áreas de figuras. Dependendo do que se pretende medir, uma peça é mais adequada do que outra. Por exemplo, ao medir o comprimento de uma estrada, o ideal é que isso seja dado em quilômetros. Já o comprimento de uma sala de aula e o de uma folha de papel, respectivamente, em metros e em centímetros.

Temos, portanto, o seguinte quadro demonstrativo no qual apresentamos a razão  $\frac{A}{B}$  entre as áreas de cada peça do tangram.

O próximo capítulo será dedicado ao estudo dos números irracionais. Apresentaremos este conjunto numérico através da ideia de incomensurabilidade entre segmentos de reta.

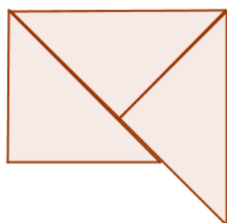
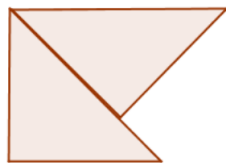
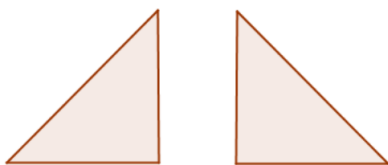
A \ B	Triângulo Grande	Triângulo Médio	Triângulo Pequeno	Quadrado	Paralelogramo
Triângulo Grande	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Triângulo Médio	2	1	$\frac{1}{2}$	1	1
Triângulo Pequeno	4	2	1	2	2
Quadrado	2	1	$\frac{1}{2}$	1	1
Paralelogramo	2	1	$\frac{1}{2}$	1	1

## 5 Números Irracionais

O presente capítulo é destinado à abordagem dos números irracionais. Veremos como este conjunto numérico está diretamente relacionado à noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, em especial entre alguns dos lados das peças. Também calcularemos o perímetro das mesmas, verificando a semelhança entre os triângulos do Tangram, provaremos a impossibilidade de se construir um quadrado e um triângulo com apenas 6 peças do quebra-cabeça e mostraremos na Seção 5.2 aplicações do Teorema de Pitágoras. Um enfoque maior será dado a esse matemático grego no Apêndice B com os “Tangrans” pitagóricos.

Dizemos que dois segmentos de reta são *comensuráveis* quando existe uma subunidade de medida que cabe um número inteiro de vezes nesses dois segmentos. Do contrário, tais segmentos são *incomensuráveis*. Nesse sentido, é comum do ser humano, com seu conhecimento empírico, imaginar que, dados dois segmentos de reta quaisquer, por maior ou menor que sejam, são sempre comensuráveis. Contudo, verificaremos, através das peças do Tangram, a incomensurabilidade de alguns segmentos.

### 5.1 Analisando as peças do Tangram



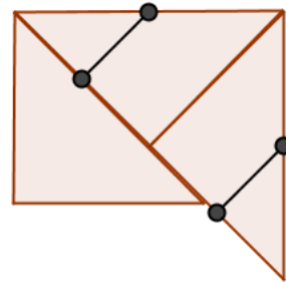
Considere dois triângulos pequenos. Analogamente poderíamos considerar dois triângulos grandes.

É possível mostrar que o cateto e a hipotenusa dos triângulos pequenos (que são retângulos isósceles) são segmentos de reta incomensuráveis. Vamos tentar verificar justapondo essas peças ao longo desses dois segmentos: como o cateto é menor do que a hipotenusa, falta um segmento para aquele completar esta. Agora, se juntarmos mais um triângulo pequeno, con-

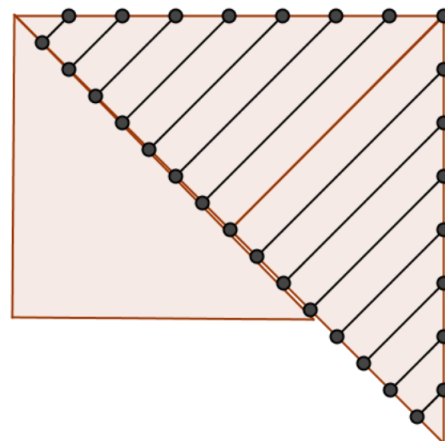
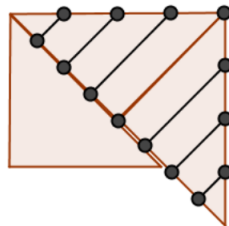
forme a figura seguinte, a soma das medidas dos dois catetos irá ultrapassar a medida da hipotenusa.

*Observação.* Nem precisaríamos desenhar tal figura para comprovar isso, basta observar o teorema da desigualdade triangular (em todo triângulo, a medida de um lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados).

Voltando ao caso anterior, marquem o ponto médio de um dos catetos e façamos uma dobradura ou um recorte através desse ponto, de modo que o segmento formado pela marcação da dobradura ou do recorte faça um ângulo de  $90^\circ$  com esse cateto.



Acoplando vários destes segmentos e sobrepondo-os à hipotenusa, verificamos que não há um submúltiplo comum entre eles. O mesmo ocorreria se dividíssemos o cateto em 3, 4, 5 ou qualquer quantidade inteira de partes. Observe mais dois casos:



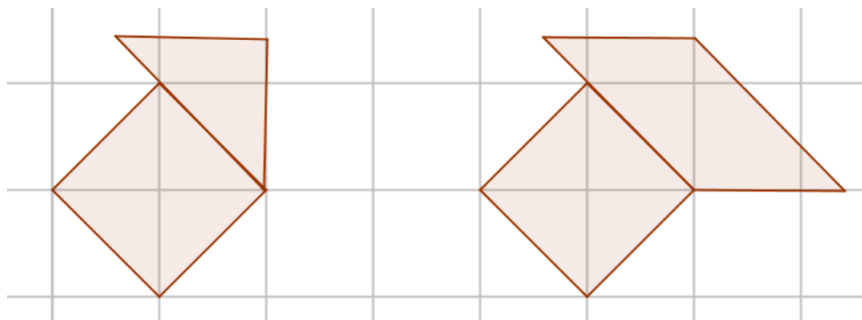
Na verdade, utilizando régua e compasso (ou até mesmo softwares de geometria) para dividir os segmentos de reta em partes iguais, por menores que sejam essas partes, nunca será possível obter um submúltiplo comum entre o cateto e a hipotenusa



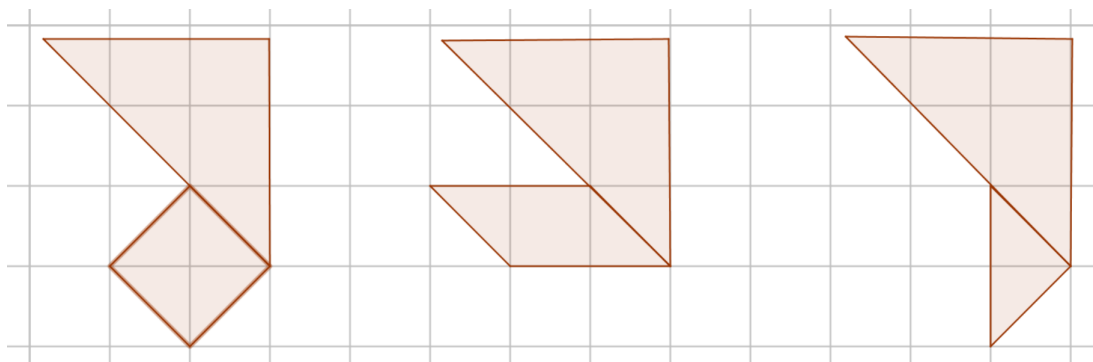
deste triângulo pois esses segmentos de reta são incomensuráveis.

Perceba que este é um fato que apenas com recortes ou dobraduras não conseguimos demonstrar, porque não é possível cobrirmos todos os casos. Para demonstrar este fato precisamos de um argumento matemático que garanta a impossibilidade de encontrarmos um submúltiplo comum para os dois segmentos. Contudo, esse tipo de abordagem apresenta aos estudantes a noção de incomensurabilidade, tal qual ela surgiu para os gregos.

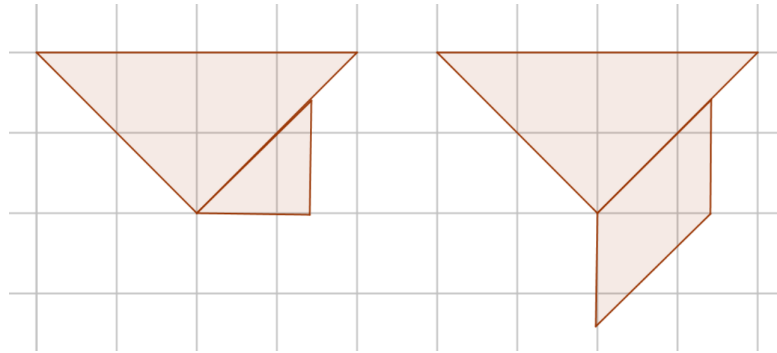
Podemos adotar o mesmo procedimento para o triângulo pequeno, o quadrado e o paralelogramo, pois, por um lado, a medida do lado do quadrado é igual à do cateto do triângulo pequeno e igual ao menor lado do paralelogramo. Em contrapartida, são iguais as medidas da hipotenusa do triângulo pequeno e do maior do lado do paralelogramo. Logo, verifica-se a incomensurabilidade entre os segmentos de reta justapostos da figura a seguir.



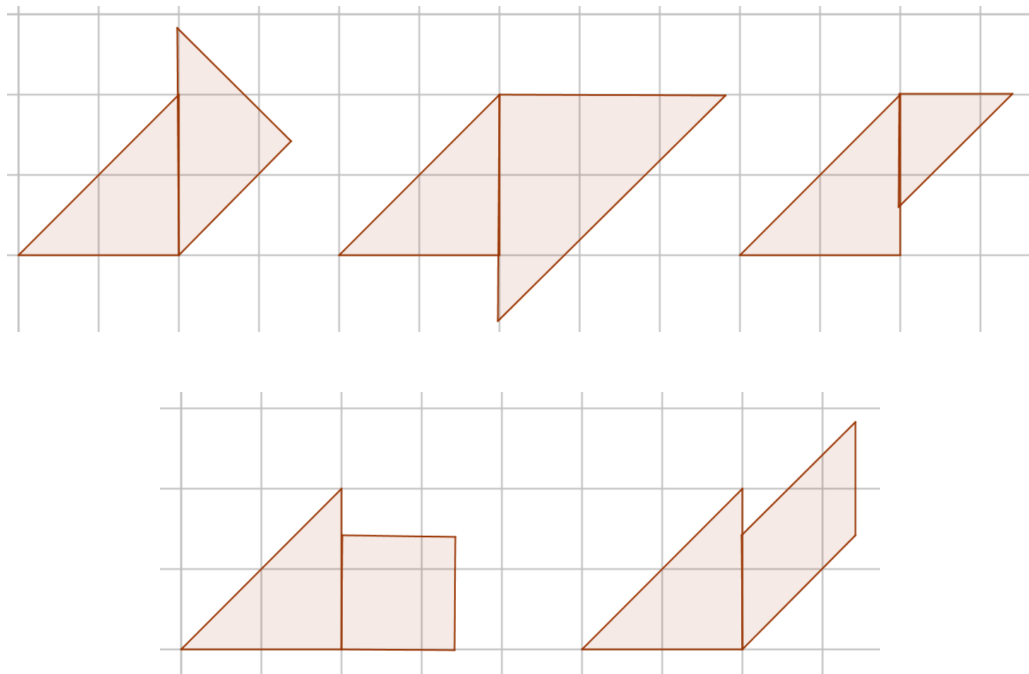
Observamos no capítulo anterior a semelhança entre os triângulos do Tangram. Portanto, os lados correspondentes são múltiplos. Além disso, os lados do triângulo grande medem o dobro dos respectivos lados do triângulo pequeno. Nessa perspectiva (o produto entre um número racional e um número irracional é um número irracional), observa-se a incomensurabilidade entre a hipotenusa do triângulo grande e o lado do quadrado, o cateto do triângulo pequeno e o lado menor do paralelogramo.



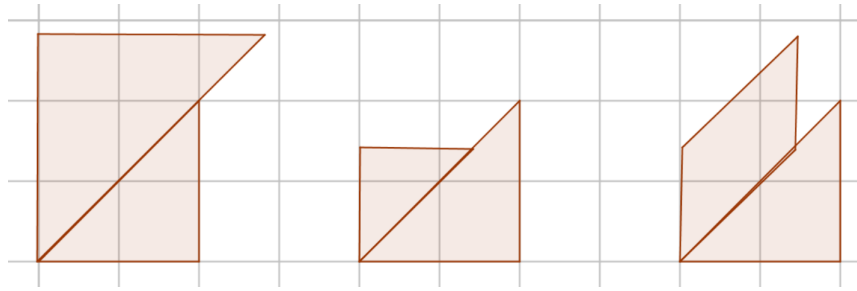
Do mesmo modo, são incomensuráveis os catetos do triângulo grande com hipotenusa do triângulo pequeno e com maior lado do paralelogramo.



Observando a construção do Tangram, nota-se que o cateto do triângulo médio mede metade da hipotenusa do triângulo grande. Portanto, os catetos do triângulo médio são incomensuráveis com a hipotenusa do mesmo, com os catetos dos outros dois triângulos, com o menor lado do paralelogramo e com o lado do quadrado.

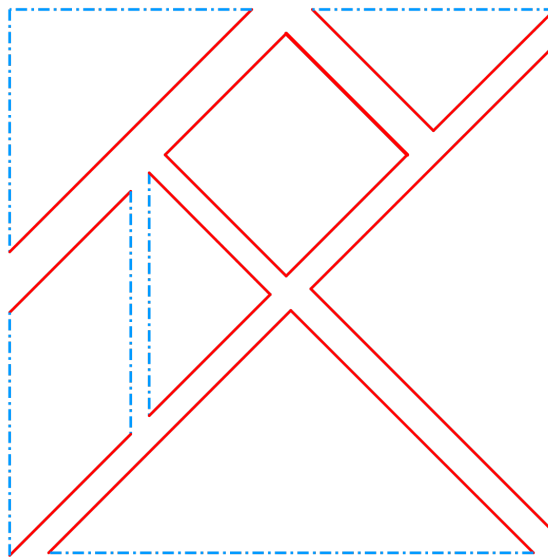


Por sua vez, a hipotenusa do triângulo médio é incomensurável com os catetos do mesmo, como vimos há pouco, com a hipotenusa dos outros dois triângulos e com o lado maior do paralelogramo.



Verificamos desse modo, a incomensurabilidade entre alguns lados que formam as peças do Tangram.

Uma boa proposta de atividade, antes de apresentar quais segmentos são comensuráveis é pedir que os estudantes identifiquem, após conhecerem o conceito, colorindo da mesma cor os lados das peças que são comensuráveis. Ele deve obter uma figura mais ou menos como essa:



## 5.2 Incomensurabilidade e Irracionalidade

Sabemos que, dentro do universo de números reais, todo número que não é racional é chamado de irracional. Apresentamos no capítulo anterior a definição de número racional como qualquer número que pode ser representado sob a forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador não nulo. Sob essa ótica, um número é irracional quando é impossível de ser representado dessa maneira.

Contudo, essa definição para números irracionais é um tanto superficial em

um primeiro contato. Recorremos, então, à Geometria para mostrarmos que a noção de número irracional está intimamente ligada à noção de incomensurabilidade de segmentos de reta.

Tome, inicialmente, um segmento de reta, o qual designaremos por  $u$ . Tal segmento será considerado como unidade de medida.

Não estaremos falando aqui sobre instrumentos de medição como régua, fita métrica, trena, entre outros. Podemos utilizar alguns simples objetos à nossa volta como instrumentos de medida. Utilizaremos, inclusive, mais tarde os lados das peças do tangram como unidades de medida.

Enfim, após tomar o segmento  $u$  como unidade de medida, considere um segmento de reta  $AB$ . Para determinar a medida deste segmento verificaremos quantas vezes o segmento  $u$  cabe em  $AB$  (sendo  $AB$  maior do que ou congruente a  $u$ ).

Se  $AB$  for congruente a  $u$ , temos  $\overline{AB} = 1u$ .

Se conseguirmos um ponto  $C$  no segmento  $AB$ , fora das extremidades, de forma que  $AC$  e  $BC$  sejam ambos congruentes a  $u$ , então  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} = 1u + 1u = 2u$ . Isto é,  $u$  cabe duas vezes em  $AB$ .

De maneira geral, dizemos que o segmento tem comprimento  $n$  inteiro e positivo, quando conseguimos  $n-1$  pontos distintos em  $AB$  e distintos também das extremidades, de modo que os segmentos sejam todos congruentes a  $u$ .

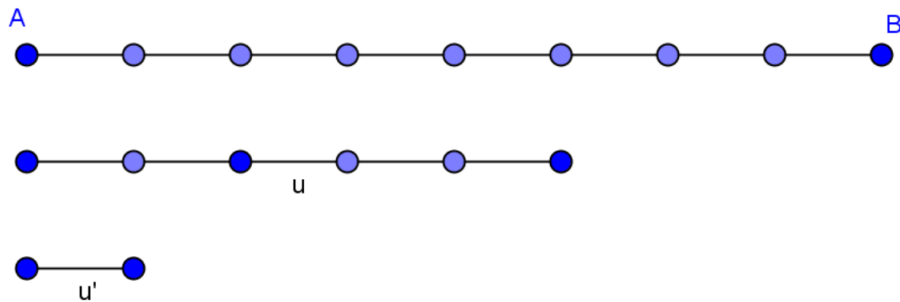
E se o segmento  $AB$  não contiver o segmento  $u$  um número inteiro de vezes? Como obteremos a medida de  $AB$ ?

Considere então um segmento de reta  $AB$  tal que  $u$  não cabe um número inteiro de vezes em  $AB$ . Temos então dois casos a considerar:

**Caso 1.** O primeiro caso quando é possível tomar um segmento de reta  $u'$ , menor do que  $u$ , que caiba um número inteiro de vezes em  $AB$  e em  $u$ . Por exemplo, assumamos que  $u'$  cabe  $n$  vezes em  $u$  e  $m$  vezes em  $AB$ . Temos, desse modo,  $\overline{AB} = mu'$  e  $u = nu'$ , ou seja,  $u' = \frac{u}{n}$  e, por conseguinte,  $\overline{AB} = \frac{m}{n}u$ . Dizemos, neste caso que os segmentos  $AB$  e  $u$  possuem um submúltiplo comum  $u'$ . Neste caso dizemos que os segmentos  $AB$  e  $u$  são **comensuráveis**.

No exemplo a seguir, o segmento  $u'$  cabe 5 vezes em  $u$  e 8 vezes em  $AB$ . Portanto,

$$\overline{AB} = \frac{8}{5}u.$$



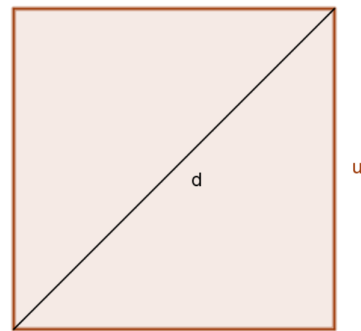
**Caso 2.** O segundo caso, é o complementar do primeiro, quando não é possível encontrar o tal segmento  $u'$ , submúltiplo comum dos dois segmentos. Neste caso dizemos que os segmentos  $AB$  e  $u$  são **incomensuráveis**.

No sentido das definições acima, quando dois segmentos de reta são comensuráveis a razão entre os mesmos é um número racional positivo. Porém, Pitágoras e seus discípulos, há mais de 2500 anos, descobriram que, dados dois segmentos de reta, há casos em que eles são incomensuráveis. Ao se desenhar um quadrado pode-se verificar que lado e a diagonal do mesmo são incomensuráveis.

Tome um quadrado de lado  $u$ .

Seja  $d$  a medida da diagonal.

Suponhamos que as medidas de  $u$  e  $d$  sejam ambas inteiras e, além disso, que a fração  $\frac{d}{u}$  seja irredutível. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:



$$d^2 = 2u^2 \tag{5.1}$$

Como  $2u^2$  é um número par, temos que, pela igualdade,  $d^2$  também é um número par, e daí podemos concluir que  $d$  é um número inteiro par. Seja  $d = 2k$ , onde  $k$  é um número inteiro. Substituindo em (5.1), temos  $(2k)^2 = 2u^2$ , ou seja,  $2k^2 = u^2$ . Temos, desse modo, que  $u^2$  é par e, conseqüentemente,  $u$  é par. Mas este fato contradiz a hipótese de que a fração é irredutível. Concluimos, então, que não podemos escrever a

razão  $\frac{d}{u}$  como um número racional. Portanto, o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis. No Apêndice C a este trabalho apresentamos uma prova puramente geométrica da incomensurabilidade desses segmentos.

A demonstração deste fato gerou enorme espanto na época! Pois os gregos sempre supunham em suas demonstrações que dois segmentos de reta quaisquer admitiam uma unidade de comprimento comum. Portanto, havia uma falha na estrutura lógica da Geometria Euclidiana e o Teorema de Pitágoras surgiu para corrigir tal falha. Eles conseguiram provar que o lado do quadrado e a diagonal do mesmo não podem ser medidos com a mesma unidade (uma quantidade inteira de vezes), ou dito em linguagem mais atual, os dois segmentos não podem ser representados ambos por números racionais. Leia as páginas 2 e 3 do livro *Números: Racionais e Irracionais*, Ed. SBM, de Ivan Niven, Rio de Janeiro, 2012.

Nesse sentido, se o lado de um quadrado tiver uma medida racional, a diagonal do mesmo terá uma medida representada por um número irracional (e vice-versa). Consideraremos agora, a medida do lado do quadrado (peça do Tangram) como e obteremos o perímetro de cada peça. Que fique claro que pode ser um número racional ou irracional.

### 5.3 Semelhança entre as peças

De acordo com a obra *Medida e Forma em Geometria*, de Elon Lages Lima, p. 39, 4ªed., temos:

Sejam  $F$  e  $F'$  figuras, do plano ou do espaço, e  $r$  um número real positivo. Diz-se que  $F$  e  $F'$  são semelhantes, com razão de semelhança  $r$ , quando existe uma correspondência biunívoca  $\sigma : F \rightarrow F'$ , entre os pontos de  $F$  e os pontos de  $F'$ , com a seguinte propriedade:

Se  $X, Y$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $X' = \sigma(X)$  e  $Y' = \sigma(Y)$  são os seus correspondentes em  $F'$ , então  $\overline{X'Y'} = r\overline{XY}$ .

A correspondência biunívoca  $\sigma$ , com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante  $r$ , chama-se uma semelhança de razão  $r$  entre  $F$  e  $F'$ .

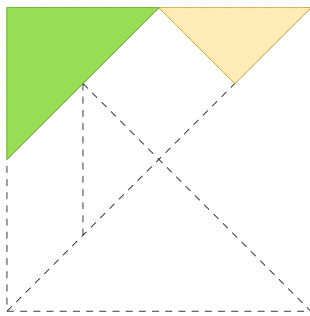
Particularizando, dois polígonos serão semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal maneira que os ângulos em vértices correspondentes são iguais e os lados correspondentes são proporcionais. Para o caso de triângulos é conhecido que para serem semelhantes basta que os três ângulos sejam

iguais (caso AAA) ou os três lados sejam proporcionais (caso LLL), ou ainda dois lados correspondentes proporcionais formando o mesmo ângulo (caso LAL).

Assim, não é complicado ver que os triângulos do Tangram são todos semelhantes. Com relação aos ângulos internos, vimos que, nos três triângulos (pequeno, médio e grande), dois ângulos medem  $45^\circ$  e um mede  $90^\circ$ . Portanto, eles são semelhantes pelo caso AAA. Discutiremos a razão de semelhança analisando as medidas dos lados de cada peça.

Vamos estabelecer a seguinte notação: chamaremos de  $c_p$  o cateto do triângulo pequeno e  $h_p$  a sua hipotenusa,  $c_m$  e  $h_m$  o cateto e a hipotenusa do triângulo médio, respectivamente e finalmente  $c_g$  e  $h_g$  para o triângulo grande.

Vamos começar com um triângulo pequeno e um triângulo médio.



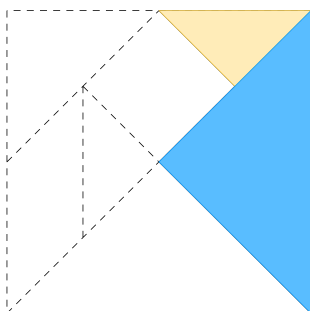
Seja  $c_p = \ell$  a medida do cateto do triângulo pequeno. Pelo Teorema de Pitágoras, temos  $h_p^2 = 2\ell^2$ , e então  $h_p = \ell\sqrt{2}$ .

Pela construção das peças, a hipotenusa do triângulo pequeno tem a mesma medida que o cateto do triângulo médio, ou seja,  $\ell\sqrt{2}$ . Seja  $h_m$  a hipotenusa do triângulo médio. Por Pitágoras, temos  $h_m^2 = 2(\ell\sqrt{2})^2$ , e então  $h_m = 2\ell$ . (Isso poderia ter sido deduzido da construção:  $h_m$  é o dobro do lado do quadrado, que por sua vez é igual a  $c_p = \ell$ ).

Calculando as razões entre os catetos do pequeno e do médio e entre a hipotenusa do pequeno e a do médio, temos:

$$\frac{c_p}{c_m} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{h_p}{h_m} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2\ell} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sendo assim a razão de semelhança entre os triângulos pequeno e médio é  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



Agora, entre o triângulo pequeno e o grande, o processo é um pouco mais simples. Pela própria construção podemos afirmar que tanto a hipotenusa do triângulo grande é o dobro da hipotenusa do pequeno, quanto o cateto grande é o

dobro do pequeno, isto é,  $c_g = 2c_p = 2\ell$  e  $h_g = 2h_p = 2\ell\sqrt{2}$ . Sendo assim, temos que a razão de semelhança entre o triângulo pequeno e o triângulo grande é  $\frac{c_p}{c_g} = \frac{h_p}{h_g} = \frac{1}{2}$ .

Por transitividade, os triângulos médio e grande também são semelhantes. A razão de semelhança pode ser calculada de maneira análoga a que fizemos para os outros dois casos, mas também pode ser obtida assim:

$$\frac{c_m}{c_g} = \frac{c_p}{c_g} \cdot \frac{c_m}{c_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Temos, portanto, o seguinte quadro demonstrativo no qual apresentamos a razão de semelhança  $\frac{A}{B}$  entre os triângulos do Tangram.

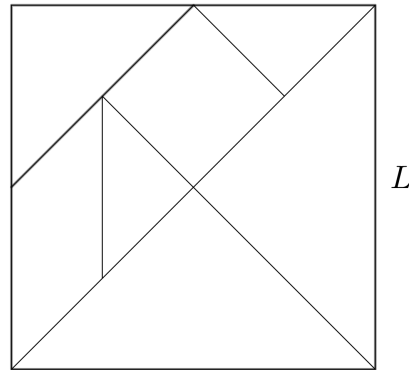
A B	Triângulo Pequeno	Triângulo Médio	Triângulo Grande
Triângulo Pequeno	1	$\sqrt{2}$	2
Triângulo Médio	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$
Triângulo Grande	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

## 5.4 Perímetros

Se estamos interessados em calcular os perímetros das peças do Tangram, podemos abordar o assunto de duas maneiras. Uma envolvendo medições aproximadas com o auxílio de uma régua, mais adequada às séries iniciais (como o sexto ou o sétimo anos do Ensino Fundamental), onde pode-se aproveitar para falar da existência de números que não podem ser representados com uma quantidade finita de casas decimais e outra abordagem usando os números irracionais (como fizemos na seção anterior), mais adequada ao conteúdo recomendado para o nono ano do Ensino Fundamental. Para a primeira abordagem, é conveniente considerar medidas aproximadas com duas casas decimais (um algarismo duvidoso), então para efeito de cálculos, pode-se considerar a aproximação  $\sqrt{2} \simeq 1,41$ . É interessante também recortar o quadrado original com o lado múltiplo de quatro, para evitar maior propagação de erros nas contas. Embora seja possível fazer as contas sem dividir por quatro, o estudante pode produzir uma solução na qual ele precise dividir por quatro.



Considere que o quadrado original tenha lado  $L$ . Vamos determinar o perímetro de cada uma das peças do tangram, em função de  $L$ .



**Triângulo Grande.** Por construção, podemos notar que a hipotenusa do triângulo grande é o lado do quadrado original. Cada um dos outros dois lados possuem medida igual à metade da diagonal do quadrado. Daí, os dois catetos somados devem medir o mesmo que a diagonal do quadrado,  $L\sqrt{2}$ . Logo, o perímetro do triângulo grande mede  $L + L\sqrt{2}$ .

**Triângulo Médio.** Os catetos do triângulo médio medem metade do lado do quadrado, ou seja,  $\frac{L}{2}$  cada um. Sendo assim, a hipotenusa mede  $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ . Por conseguinte, o perímetro aproximado do triângulo médio é  $L + \frac{L\sqrt{2}}{2}$ .

**Triângulo Pequeno.** Observando os triângulos pequenos, podemos verificar que as medidas dos seus catetos são metade das medidas dos catetos dos triângulos grandes. Podemos concluir, assim, que a soma das medidas dos dois catetos deve ser igual a  $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ . A medida aproximada da hipotenusa é  $\frac{L}{2}$ . Portanto, o perímetro de cada triângulo pequeno é  $\frac{L + L\sqrt{2}}{2}$ .

**Quadrado.** Os lados do quadrado possuem medida exatamente igual à medida dos catetos do triângulo pequeno, ou seja, somando os quatro lados do quadrado obtemos a mesma medida da diagonal do quadrado original. Daí, o perímetro do quadrado é  $L\sqrt{2}$ .

**Paralelogramo.** Temos dois lados iguais à metade do quadrado original e dois lados cuja medida é igual à metade da hipotenusa do triângulo médio. Ou seja, o perímetro do paralelogramo é  $L + \frac{L\sqrt{2}}{2}$ .

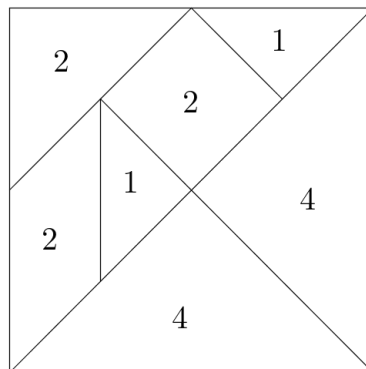
Para estudantes com um pouco mais de idade e maturidade, é importante que utilizem as ferramentas que têm sobre números irracionais, Teorema de Pitágoras e alguns outros conceitos geométricos, como distância entre dois pontos para calcular o perímetro de cada peça, obtenham as devidas aproximações para números racionais e tracem um comparativo sobre os resultados encontrados.

Uma outra proposta para a segunda abordagem é pedir que os alunos desenhem, para cada peça do Tangram um segmento cujo comprimento seja igual ao perímetro da peça. E em seguida questionar se esse tal segmento é ou não comensurável com o lado do quadrado original. Depois de fazermos as contas, é fácil responder que nenhum deles será comensurável com o lado, mas esse fato não é tão óbvio à primeira vista.

## 5.5 Duas construções impossíveis

Mostraremos a impossibilidade de se construir um quadrado e um triângulo com seis peças do tangram. Essa motivação surge de tentativas sem sucesso por parte de quem manuseia as peças, e é um fato geral que pode ser demonstrado.

Suponha que escolhemos o triângulo pequeno como a nossa unidade de área. Sendo assim as áreas das sete peças do Tangram são as seguintes:  $(1,1,2,2,2,4,4)$ .



A pergunta então que devemos fazer é: Qual é a área de uma figura com seis peças? Embora essa pergunta tenha mais de uma resposta, podemos ter uma estimativa das possíveis áreas. Escolher 6 peças do Tangram é equivalente a escolher 6 números dentre os que foram listados acima.

A figura com menor área será aquela obtida deixando de lado um 4 (isto é, um triângulo grande). Assim, a menor área possível será:  $1+1+2+2+2+4=12$ . Já a maior

área possível será obtida não escolhendo um 1 (isto é, um triângulo pequeno), o que nos dá  $1+2+2+2+4+4=15$ . Qualquer outra escolha ficará entre esses dois valores.

Se chamarmos de  $\mathcal{A}$  a área da tal figura com 6 peças, podemos afirmar que  $\mathcal{A} \in \{12, 13, 14, 15\}$ .

Agora, suponha que uma tal figura é um quadrado. Como a área do quadrado é igual ao quadrado do seu lado, significa que os possíveis lados para esse quadrado serão  $\sqrt{12}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{14}$  e  $\sqrt{15}$ . Mas nenhum desses números pode ser obtido justapondo os lados das peças do Tangram.

Para o triângulo o raciocínio é análogo. Já argumentamos anteriormente, via ângulos, que só é possível construirmos, usando as peças do Tangram, triângulos retângulos isósceles. Então, suponha que temos um triângulo formado com seis peças do Tangram cujo cateto mede  $b$ . A área da figura será  $\mathcal{A} = \frac{b^2}{2}$ . Ou seja, os possíveis valores para  $b$  são  $\sqrt{24}$ ,  $\sqrt{26}$ ,  $\sqrt{28}$  e  $\sqrt{30}$ . Da mesma maneira, nenhum desses números pode ser obtido justapondo os lados das peças do Tangram.

## 6 Sugestão de Atividades e Comentários

As atividades que seguem foram trabalhadas em 6 turmas do Ensino Fundamental, das quais 4 são do 7º ano e duas do 8º ano, da Escola Municipal Cientista Mário Kröeff. As mesmas foram propostas durante um período de três semanas entre os meses de outubro e novembro de 2015. Ao final de cada aula era pedida a elaboração de um relatório com, no mínimo, 10 linhas para ser entregue naquele momento ou na aula seguinte. As atividades foram consideradas para a composição das médias dos alunos no 4º bimestre, bem como o empenho na realização das tarefas.

Podemos destacar como objetivo geral da atividade a apresentação de uma abordagem diferenciada a alunos do 2º segmento do Ensino Fundamental, acerca de alguns conteúdos de Matemática, que propicie uma aprendizagem de maneira lúdica, dinâmica e diversificada. Como objetivos específicos, temos:

- Experimentar durante as aulas atividades com a utilização do tangram, buscando modificar minha própria vivência em sala de aula, o que engloba, sobretudo, a relação ensino-aprendizagem;
- Analisar os resultados obtidos, bem como verificar a compreensão dos alunos sobre os conteúdos apresentados, através de sua comunicação oral e escrita;

Primeiramente os alunos foram organizados em duplas ou trios e receberam um papel-cartão colorido cada, no formato de um quadrado com 10 cm de lado. Em seguida, foram orientados na construção das peças do Tangram, através de dobradura e recorte, utilizando régua ou tesoura.

Após a confecção das peças, foi contado aos alunos um breve relato sobre a lenda do Tangram e algumas de suas utilidades. Para explorar a criatividade dos mesmos e com o intuito de fazê-los conhecer as peças, foi sugerido a eles que fizessem o maior número possível de figuras. Em um momento foi entregue uma folha com sombras de figuras para que as mesmas fossem reproduzidas com a justaposição das peças.

Ao fim dessa atividade os alunos tiveram que montar o quadrado com as sete peças com o objetivo de relembrar todo o processo de construção das peças. Depois de

reconhecerem as peças do jogo, foram aplicadas e mediadas as atividades como seguem.

**Atividade 1.** Relacione as áreas das seguintes peças (7º e 8º anos):

- a) Triângulo médio e Triângulo grande;
- b) Triângulo pequeno e Triângulo médio;
- c) Triângulo pequeno e Triângulo grande;
- d) Triângulo pequeno e Quadrado;
- e) Triângulo médio e Quadrado;
- f) Quadrado e Triângulo grande;
- g) Triângulo pequeno e Paralelogramo;
- h) Paralelogramo e Triângulo médio;
- i) Paralelogramo e Triângulo grande;
- j) Quadrado e Paralelogramo;
- k) Forme o quadrado com as sete peças do Tangram. É correto afirmar que a área do triângulo grande, por exemplo, corresponde a  $1/7$  da área total do quadrado formado pelas sete peças? Justifique.

**Atividade 2.** Utilizando um transferidor, determine as medidas de todos os ângulos internos de cada peça do Tangram. (7º e 8º ano)

**Atividade 3.** Determine a soma das medidas dos ângulos internos observadas na questão anterior. O que você pode perceber através dos resultados obtidos? (7º e 8º ano)

**Atividade 4.** Monte um quadrilátero qualquer, utilizando algumas peças do jogo. Verifique a soma dos ângulos. Esse resultado confirma o que foi observado na questão anterior? (7º e 8º ano)

**Atividade 5.** Construa um pentágono e um hexágono com as peças do tangram e verifique a soma das medidas de seus ângulos internos. (8º ano)

**Atividade 6.** Generalize os resultados encontrados a partir da terceira questão para um polígono de  $n$  lados. (8º ano)

**Atividade 7.** Calcule o perímetro aproximado de cada peça do tangram. Quais figuram têm o mesmo perímetro? (7º e 8º ano)

**Atividade 8.** Note que, no exercício anterior, não conseguimos obter de forma exata algumas medidas dos lados de determinadas peças. Explique o fato que justifica isso. (8º ano)

As imagens a seguir apresentam os alunos realizando as atividades com o Tangram.



Como já foi escrito anteriormente, antes de serem aplicadas as atividades os estudantes participaram de todo o processo de construção das peças do Tangram e as manipularam conforme sua criatividade. O reconhecimento das peças, das formas geométricas de cada figura é essencial para que os alunos desenvolvam habilidades de visualização, comparem as diversas formas, analisem as suas características, tenham percepção espacial e explorem a criatividade, de maneira bastante lúdica e agradável. O objetivo de remontar o quadrado foi a memorização de todo o procedimento de construção das peças,

além dos outros fins citados.

Na atividade 1, os conceitos trabalhados foram o de área e fração. O intuito desta era de fazer com os alunos observassem diversas maneiras de sobreposição entre as figuras, porém, no máximo, uma delas era adequada. Com isso, pode ser verificado que se uma figura for transladada ou rotacionada através de um ponto ou de um eixo, a área não sofre alteração e a figura permanece com o mesmo formato. Além disso, em alguns itens, a sobreposição não era a maneira mais adequada para se concluir as razões entre as áreas das figuras, mas sim o que chamamos de transitividade. Por exemplo, tomando três figuras  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , se a área de  $X$  é igual à área de  $Y$  e a área de  $Y$  é igual à área de  $Z$ , então as áreas de  $X$  e  $Z$  são iguais!

A atividade 2 foi a base para as demais atividades sobre ângulos. Apresentou também o objetivo de verificar se os estudantes sabem manusear o transferidor para obterem medidas de ângulos. Na atividade 3, o estudante verificaria que os triângulos e os quadriláteros do tangram têm soma dos ângulos internos, respectivamente, iguais a  $180^\circ$  e  $360^\circ$ . Mas seria essa uma particularidade somente desses triângulos e desses quadriláteros? A atividade 4 mostraria que não. Para esses dois polígonos, a análise é feita no capítulo 2 e verifica que não é simplesmente um caso particular.

A atividades 5 apresenta primeiramente a construção dos polígonos pentágono e hexágono. O intento foi de obter as somas das medidas dos ângulos desses dois polígonos e verificar que ambos cumprem a generalização da fórmula da soma dos ângulos internos para um polígono de  $n$  lados, apresentada na atividade 6.

Na atividade 7, objetivo principal foi trabalhar o conceito de perímetro de uma figura geométrica plana. Além disso, as aproximações das medidas foram utilizadas para que os alunos dominem as operações com números decimais, essenciais para sua vida, seja no cotidiano escolar ou fora dele. Ao realizar essas operações, observaria que o triângulo médio e o paralelogramo possuem o mesmo perímetro.

Mesmo com toda polêmica e dificuldade da atividade 7 (por exemplo, devo considerar o perímetro de uma figura como 24,1 cm ou 24,2 cm?), os alunos consideraram a atividade 8 a mais complicada. Como falar de incomensurabilidade e Teorema de Pitágoras para estudantes do 8º ano, por exemplo? No entanto, eles já “conhecem” os números irracionais. Se os números irracionais surgem do conceito de incomensurabilidade de segmentos de reta, através da descoberta de Pitágoras, não faz o menor sentido que

o importante Teorema seja apresentado aos estudantes somente a partir do 9º ano. O (árduo) trabalho de mostrar aos alunos a descoberta dos números irracionais foi feito, sem dizer que “o conjunto dos números reais era a união disjunta dos elementos dos dois conjuntos: números racionais e números irracionais”.

## 6.1 Conclusões sobre as Atividades

De uma forma geral, os estudantes conseguiram atingir os objetivos propostos em cada atividade. Uma aluna apresentou um aplicativo de celular que serve para montar diversas figuras usando as peças do Tangram. O interesse da maioria foi tamanho que muitos instalaram em seus celulares esse aplicativo e conseguiram obter prazer e entretenimento brincando de Matemática. Os relatórios produzidos pelos alunos apresentaram índices altíssimos de aprovação do jogo e das atividades. Alguns disseram jamais imaginar aprender Matemática dessa maneira.

O objetivo de desmitificar o tangram como um mero quebra-cabeça que tem por finalidade montar figuras também foi concluído com êxito. Alguns conteúdos ministrados durante o ano puderam ser revistos através da aplicabilidade e da riqueza de informações contidas nessas sete peças. Alguns alunos que apresentavam dificuldades e vinham obtendo resultados abaixo da média, demonstraram criatividade ao resolverem as tarefas e habilidades de raciocínio jamais observadas.

O pensamento crítico também foi despertado, o que consideramos como o fruto mais importante da aplicação das atividades. A maioria dos estudantes disse ser essa a melhor forma de absorver os conteúdos, através da prática, do tato, do convívio com o objeto de estudo, corroborando as ideias piagetianas.



## 7 Considerações Finais

Experiências como essa nos fazem refletir e até repensar nossa prática em sala de aula. Obviamente não devemos excluir, de maneira irresponsável e brusca, o modelo tradicional (que também é importante!), contudo estas e outras atividades mais concretas e lúdicas podem ser cada vez mais inseridas e aprimoradas em sala de aula, visando que o estudante desperte sempre o pensamento lógico e crítico existente na Matemática e que essa ciência tão maravilhosa seja dinâmica, prazerosa e desafiadora para todos os agentes nela envolvidos, quebrando tabus, rótulos e ideias pré-concebidas acerca da mesma.

## Referências Bibliográficas

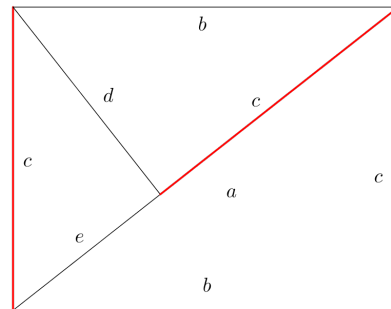
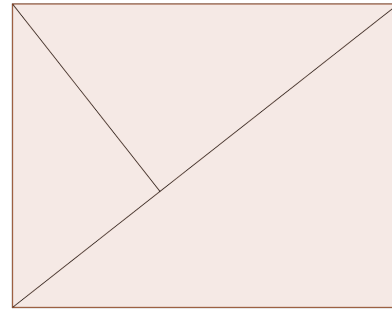
- [1] Ministério da Educação do BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*, Vol. Matemática, MEC/SEF, Brasília, 1997.
- [2] ———, *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*, Vol. Matemática, MEC/SEF, Brasília, 1998.
- [3] Ana Maria Martensen Roland KALEFF, Dulce Monteiro REI, and Simone dos Santos GARCIA, *Quebra-Cabeças Geométricos e Formas Planas*, EdUFF, 3<sup>a</sup> ed.
- [4] Elon Lages LIMA, *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*, Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de Matemática, 4<sup>a</sup> ed, Rio de Janeiro, 2006.
- [5] Antonio Caminha Muniz NETO, *Geometria*, Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROF-MAT, 1<sup>a</sup> ed, Rio de Janeiro, 2013.
- [6] Ivan NIVEN, *Números: Racionais e Irracionais*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1<sup>a</sup> ed, Rio de Janeiro, 2012.
- [7] Cíntia Maria Basso DOS SANTOS, Janete Tonello MARQUES, Maria Janete Boff Reis MEIRA, and Renata Cordeiro DE JESUS, *A Ludicidade no Trabalho com a Matemática*, <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAJlkAG/ludicidadematematica>.
- [8] Eliane Reame DE SOUZA, Maria Ignez de Souza Vieira DINIZ, Rosa Monteiro PAULO, and Fusako Hori OCHI, *A Matemática das Sete Peças do Tangram*, Ed IME-USP, São Paulo, 2008.
- [9] Kênia Bomtempo DE SOUZA, *Piaget e a Construção de Conceitos Geométricos*, Vol. 1, Nº 9, Temporis[ação], Universidade Estadual de Goiás, 2007.
- [10] <http://fabiopestanaramos.blogspot.com.br/>, *Para entender a História: A importância da ludicidade no ensino da Matemática nas séries iniciais*.
- [11] <http://www.somatematica.com.br>, *Os PCN e o Ensino Fundamental em Matemática: Um Avanço ou um Retrocesso?*.

## 8 Apêndice A

### OUTROS TIPOS DE TANGRAM

#### Tangram Mínimo de Brügner

É um quebra-cabeça que contém apenas 3 peças, sendo todas elas triângulos retângulos semelhantes. Este tangram é uma importantíssima ferramenta para se demonstrar as relações métricas em triângulos retângulos. Recebe este nome em homenagem ao matemático alemão Georg Brügner, que, em 1984, estudou sobre as propriedades dessas peças. Podem ser formadas dezenas de figuras com estas peças.



Por semelhança, temos:  $\frac{c+e}{b} = \frac{b}{c}$ , ou seja,  $b^2 = c(c+e)$  (\*)

Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:  $(c+e)^2 = b^2 + c^2$

Substituindo em (\*) e elevando ao quadrado, chegamos a:

$$b^4 = c^2(b^2 + c^2)$$

$$b^4 - b^2c^2 - c^4 = 0$$

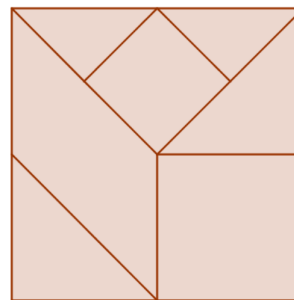
Dividindo a equação acima por  $c^4$ , tem-se:

$$\frac{b^4}{c^4} - \frac{b^2}{c^2} - 1 = 0$$

Ou seja,  $\frac{b^2}{c^2}$  é raiz positiva da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ , isto é,  $\frac{b^2}{c^2}$  é o número de ouro  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . No Tangram Mínimo de Brügner a razão entre os lados do retângulo é igual a  $\sqrt{\phi}$ . Pode-se mostrar ainda que  $\frac{c}{e} = \phi$ .

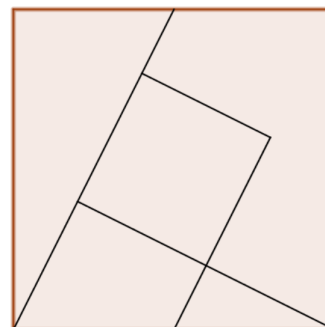
## Tangram de Fletcher

O Tangram de Fletcher é um quebra-cabeça composto por 7 peças, tal qual o tradicional tangram chinês. Contudo, as peças não são todas iguais a do tangram clássico. Temos nesse jogo dois quadrados de tamanhos diferentes, quatro triângulos retângulos isósceles, sendo dois pares congruentes, e um paralelogramo. Pela semelhança com o tangram tradicional, podem ser realizadas diversas atividades envolvendo o conceito de área, perímetro, semelhança e congruência de figuras. Ele também é considerado um Tangram Pitagórico.



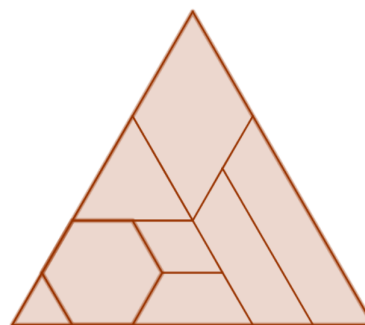
## Tangram de Lloyd

O Tangram de Lloyd é um quebra-cabeça composto por 5 peças, das quais temos um quadrado, dois triângulos retângulos distintos, um trapézio e um hexágono não convexo. Essas peças compõem um quadrado. Também é conhecido como Tangram Trapezoidal, pois suas peças, justapostas, compõem um trapézioide. Sua origem deveu-se a Sam Lloyd (1841-1911), inventor de muitos outros jogos de quebra-cabeça. Em 1914, seu filho, Sam Lloyd Jr. publicou um livro que é uma coleção de problemas e quebra-cabeças concebidos por seu pai. Tal obra recebeu o título *Sam Lloyd's Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums*.



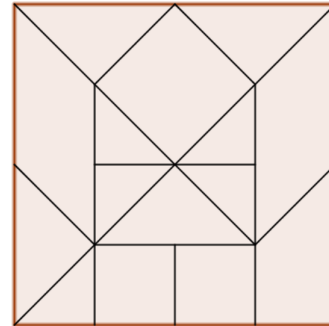
## Tangram Triangular de 8 Peças

Este tangram, conforme o próprio nome, é formado por 8 peças que constituem um triângulo. Duas delas são triângulos semelhantes, temos dois paralelogramos losângos, três trapézios e um hexágono. Segue uma imagem deste tangram.



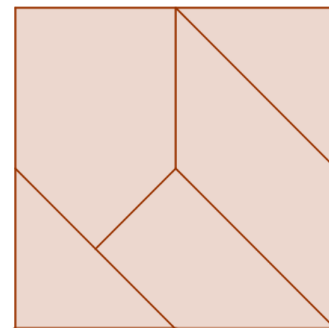
## Tangram Quadrangular de 15 Peças

É um quebra-cabeça contendo 15 peças, que formam um quadrado. Nove são triângulos semelhantes (um grupo com quatro congruentes e outro com cinco congruentes entre si), três são quadrados (dois de mesma área), duas são paralelogramos congruentes e uma é um trapézio retângulo.



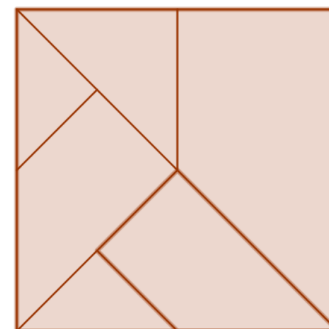
## Tangram de Regulus

Tangram composto por apenas 5 peças, das quais duas são triangulares, uma é um trapézio retângulo, uma é um paralelogramo e a última é um pentágono. Ssegue uma representação do Tangram de Regulus.



## Cocogram

É um tangram composto por 6 peças, das quais três são triângulos retângulos semelhantes (dois deles congruentes) e três trapézios retângulos (dois congruentes).



## Mais tipos de Tangram

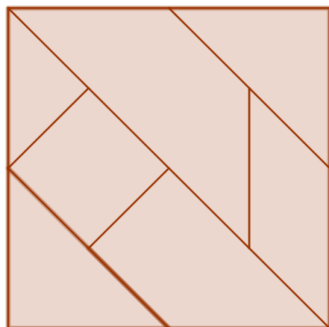


Figura 8.1: Chie-no Ita

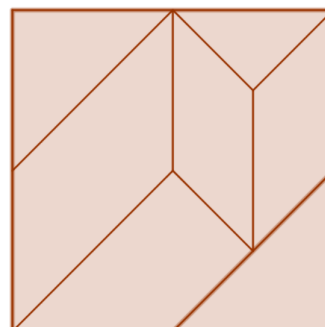


Figura 8.2: Heptex

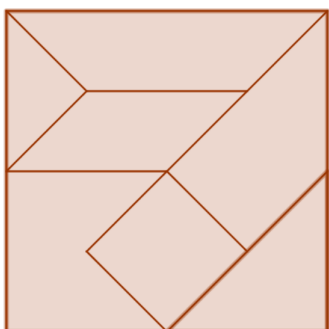


Figura 8.3: Revathi

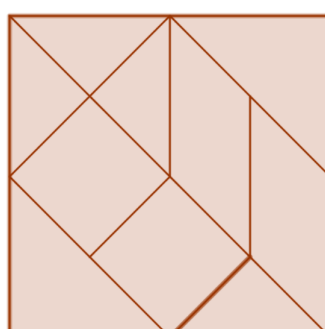


Figura 8.4: Diabolos

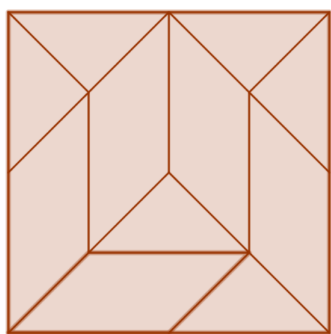


Figura 8.5: Bitans

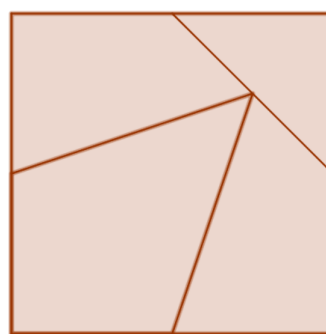


Figura 8.6: Tangram de 4 peças

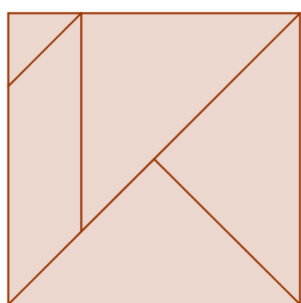


Figura 8.7: Tangram de 5 peças

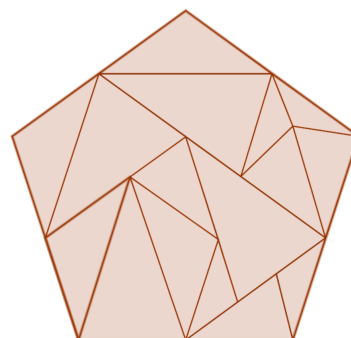


Figura 8.8: Tangram Pentagonal

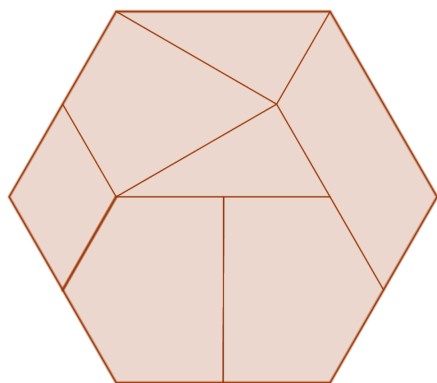


Figura 8.9: Tangram Hexagonal

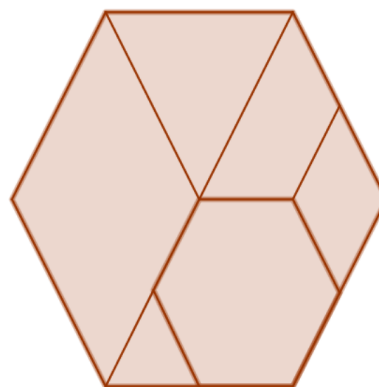


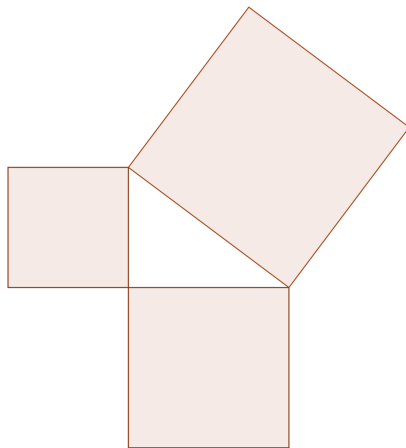
Figura 8.10: Hexagram

## 9 Apêndice B

### TANGRANS PITAGÓRICOS

Apresentaremos a seguir um tipo de Tangram que homenageia um grande matemático da nossa história: Pitágoras. Esses quebra-cabeças são chamados de Tangrans Pitagóricos ou Tangrans de Pitágoras. Suas peças são formadas especificamente para a demonstração/verificação do Teorema do Pitágoras. É de suma importância que o professor verifique juntamente com os alunos, através da experimentação das peças, o cerne desse Teorema. Vejamos alguns casos.

#### Tangram Pitagórico I



Em uma cartolina ou folha de papel-cartão, desenhe um triângulo retângulo escaleno. Em seguida, desenhe quadrados cujos lados têm medida igual à medida dos lados desse triângulo e justaponha-os aos mesmos, conforme a figura a seguir.

Justaponha ao quadrado maior um quadrado a ele congruente através da hipotenusa do triângulo retângulo, de acordo com a figura abaixo. Com isso,

os quadrados menores foram cortados, como podemos observar, em cinco figuras: três triângulos retângulos de tamanhos diferentes, um trapézio retângulo e um trapezoide. A demonstração do Teorema de Pitágoras é vista na figura da direita. A área do quadrado maior (formado por todas as peças) é igual à soma das áreas dos quadrados menores.



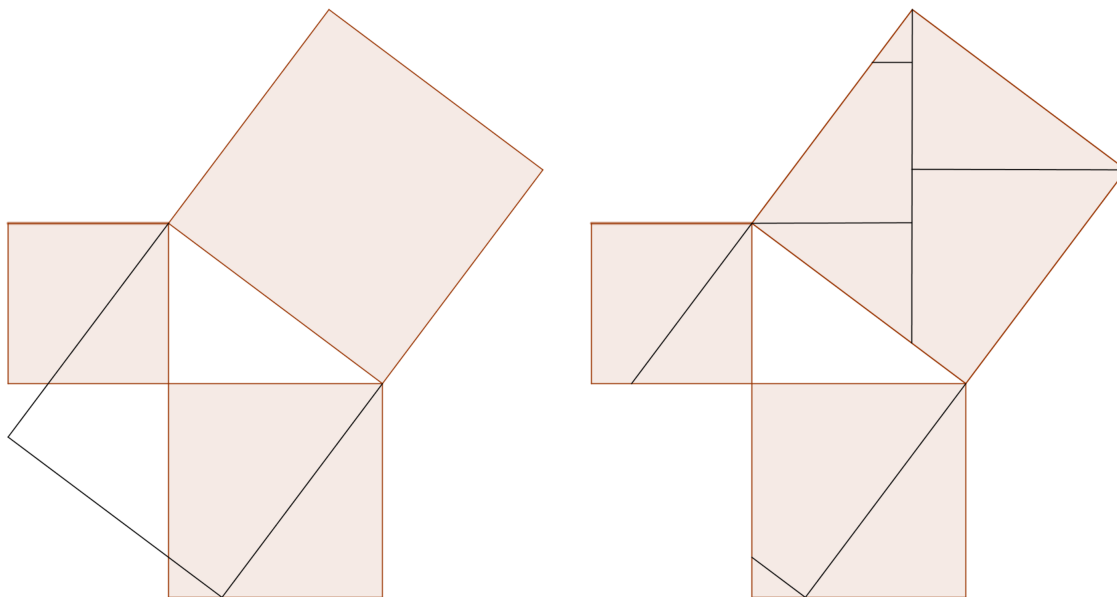


Figura 9.1: Demonstração do Teorema de Pitágoras via Tangram Pitagórico I

## Tangram Pitagórico II

Desenhe um triângulo retângulo escaleno. Em seguida, marque os pontos médios dos catetos. A partir desses pontos médios, trace segmentos de reta de medida igual a dos catetos correspondentes. Esses segmentos serão as alturas dos triângulos isósceles justapostos aos catetos do triângulo retângulo. Recorte esses dois triângulos através das alturas. Estão obtidas as peças. Nas figuras que seguem temos demonstrações muito interessantes do

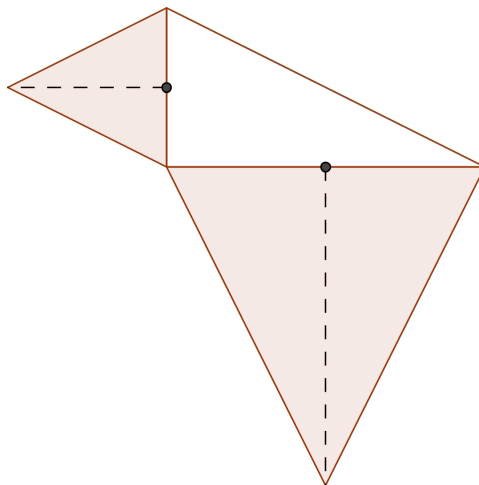


Figura 9.2: Tangram Pitagórico II

teorema de Pitágoras, com as peças formando triângulos, paralelogramos e retângulos. Elas na verdade provam uma generalização do Teorema de Pitágoras, e que de fato é

equivalente à ele, que afirma que se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

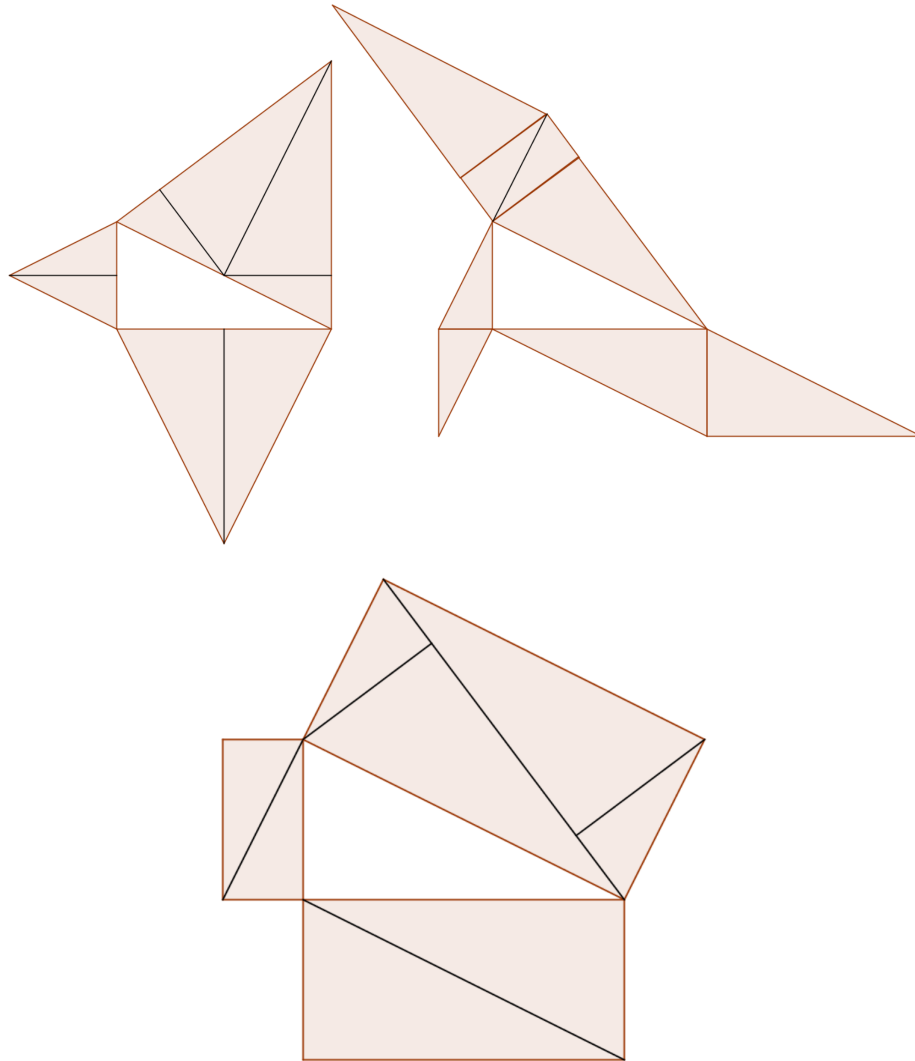


Figura 9.3: Demonstração do Teorema de Pitágoras via Tangram Pitagórico II

### Outros Tangrans Pitagóricos

Vejamos outros exemplos de Tangrans Pitagóricos. O primeiro é formado por 8 triângulos retângulos isósceles congruentes. Sua base de construção é um triângulo retângulo isósceles. O segundo é formado por quatro retângulos congruentes e um quadrado e o terceiro possui quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado.

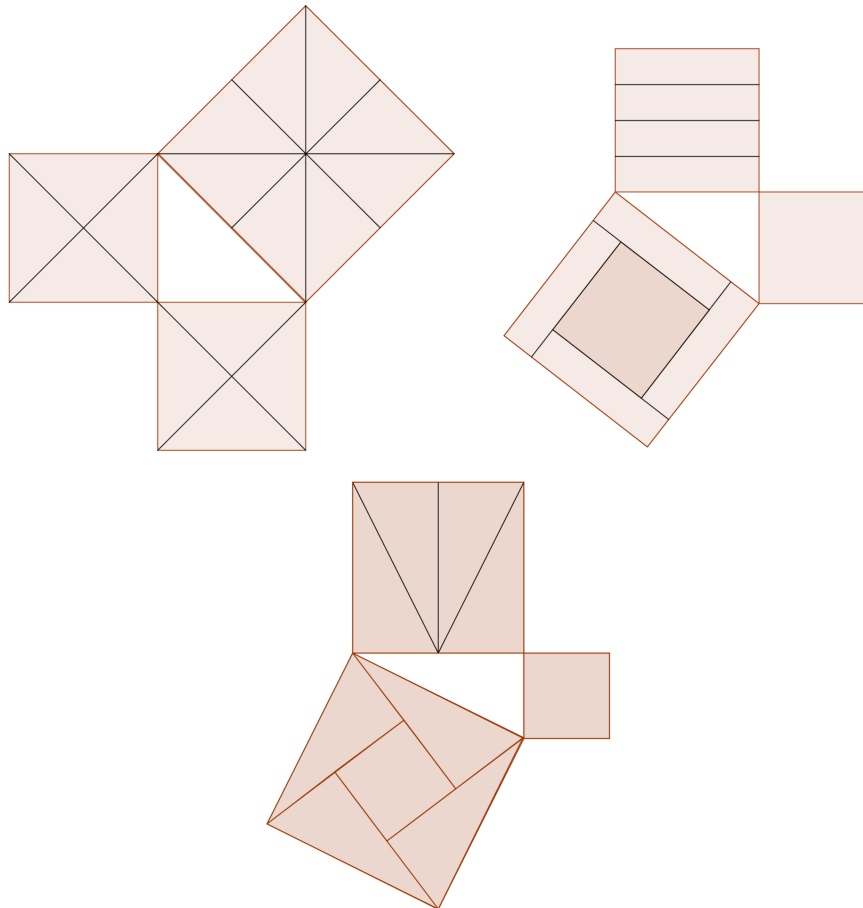
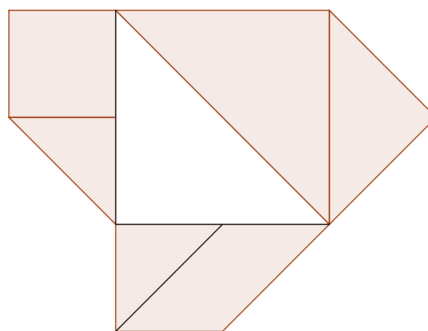


Figura 9.4: Outros Tangrans Pitagóricos

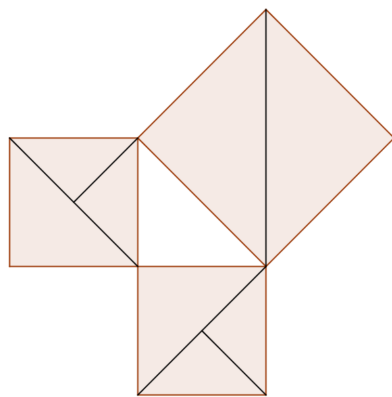
A próxima demonstração do Teorema de Pitágoras se dará através da utilização das peças do Tangram tradicional. Para tal, tome um triângulo grande. De acordo com a figura seguinte, justaponha à hipotenusa o outro triângulo grande e o triângulo médio. A um dos catetos do triângulo grande, justaponha o quadrado e um triângulo pequeno e ao outro cateto, o outro triângulo pequeno e o paralelogramo.



Sem perda de generalidade, tomando o triângulo pequeno como unidade de área, a área das figuras justapostas à hipotenusa é  $4 + 2 = 6$  unidades de área. Já a das figuras justapostas a cada um dos catetos é  $2 + 1 = 3$ . Ou seja, a área das figuras

justapostas à hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras justapostas aos catetos, o que corrobora o teorema.

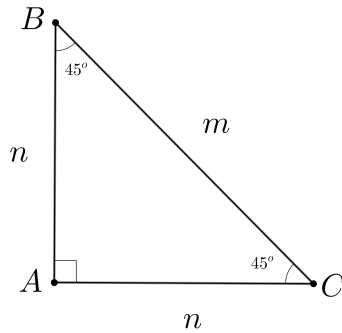
Temos a seguir outro exemplo de demonstração do Teorema de Pitágoras com peças do tangram tradicional. Neste caso, usamos peças de dois Tangrams tradicionais.



Tomando um triângulo retângulo isósceles, congruente ao triângulo médio, como base, temos que a área de dois triângulos grandes é igual à soma das áreas de dois triângulos médios e quatro triângulos pequenos. De fato, tomando o triângulo pequeno como unidade de área, temos: Área de dois triângulos grandes =  $4 + 4 = 8$  unidades de área e Área de dois triângulos médios + Área de quatro triângulos pequenos =  $2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$  unidades de área. Há muitos outros Tangrams que nos possibilitam demonstrar o Teorema de Pitágoras. Não são apenas estes. Para não tornar demasiadamente cansativo ao leitor, encerramos aqui a explanação sobre esse tipo de Tangram.

## 10 Apêndice C

### INCOMENSURABILIDADE NO TRIÂNGULO RETÂNGULO ISÓSCELES

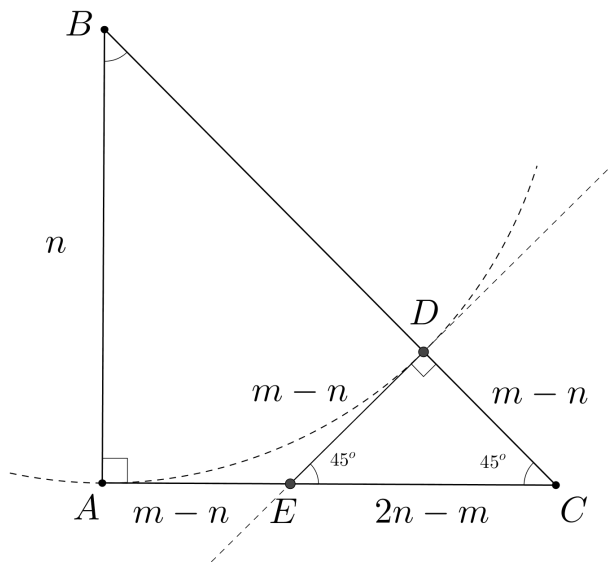


Considere um triângulo retângulo isósceles

$ABC$ , como na figura ao lado, e suponha que seus lados sejam comensuráveis, isto é, que existe um segmento de tamanho  $\ell$  que cabe uma quantidade inteira  $n$  de vezes no cateto e uma quantidade inteira  $m$  de vezes na hipotenusa. Se colocamos o segmento de tamanho menor  $\ell$  como sendo nossa unidade de medida, podemos afirmar que os lados do triângulo

medem  $\overline{AB} = \overline{AC} = n$  e  $\overline{BC} = m$ . Podemos ainda supor que os inteiros positivos  $n$  e  $m$  são os menores possíveis; caso não sejam, basta trocar o triângulo por outro semelhante a ele com lados menores. Nesse caso, a razão  $\frac{m}{n}$  se mantém constante, e  $ABC$  é o menor triângulo possível com lados inteiros nessa razão (é o mesmo que pedir que  $\text{mdc}(m, n) = 1$ ).

Observe que  $m > n$ , pois a hipotenusa é o maior lado do triângulo e que, pela desigualdade triangular,  $m < 2n$ . Façamos o seguinte: com centro em  $B$ , tracemos uma circunferência de raio  $n$ . Ela passará pelo ponto  $A$  e encontrará o lado  $BC$  no ponto  $D$ , de forma que  $\overline{DC} = m - n$ , uma vez que  $BD$  é raio da circunferência.



Desenhando uma perpendicular à  $BC$ , por  $D$ , ela encontrará o lado  $AC$  em  $E$ . Note que o triângulo retângulo  $EDC$  é isósceles, logo,  $\overline{DE} = m - n$ . Os segmentos  $ED$  e  $EA$  são tangentes à circunferência, logo têm a mesma medida (isso pode ser visto também notando que os triângulos  $ABE$  e

$DBE$  são congruentes), ou seja,  $\overline{AE} = m - n$  e então  $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = 2n - m$ .

Conseguimos assim, um triângulo  $EDC$  de lados inteiros estritamente menores que os do triângulo  $ABC$ , semelhante a ele. Mas isto é um absurdo, uma vez que escolhemos  $m$  e  $n$  como os menores possíveis com essa propriedade.

Perceba que o fato de existirem triângulos como esses, semelhantes, é equivalente à dizer que

$$\frac{2n - m}{m - n} = \frac{m}{n}$$

O que por sua vez é o mesmo que  $m^2 = 2n^2$ , ou seja,  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ . Portanto desse argumento podemos extrair que não existe nenhum número racional cujo quadrado seja igual a 2, ou dito de outra maneira,  $\sqrt{2}$  não é um número racional. De fato, usando o Teorema de Pitágoras poderíamos ter afirmado que  $m = n\sqrt{2}$ . De certa forma esse argumento, então, dá uma prova do Teorema de Pitágoras, não só no caso isósceles, mas pode ser adaptado para o caso de um triângulo retângulo qualquer.