Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Estudo das Relações

Por

Lúcia Pereira dos Santos Gomes
Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Abril de 2013

Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Lúcia Pereira dos Santos Gomes

Estudo das Relações

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT

Orientador: Prof^{o}. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo

São Cristóvão - Sergipe
Abril de 2013

Gomes, Lúcia Pereira dos Santos
G633e Estudo das relações / Lúcia Pereira dos Santos Gomes; orientador Kalasas Vasconcelos de Araújo. – São Cristóvão, 2013.
36 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Álgebra. 2. Funções (Matemática). 3. Relações binárias. 4. Topologia. I. Araújo, Kalasas Vasconcelos de, orient. II. Título

CDU 519.17

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe ,como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Estudo das Relações

por

Lúcia Pereira dos Santos Gomes

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo - UFS
Orientador

Prof. Dr. Cláudio Tadeu Cristino - UFRPE
Primeiro Examinador

André Vinicius Santos Doria

Prof. Dr. André Vinícius Santos Doria - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 13 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedicatória

Aos meus pais, **João e Maria**,

meu esposo, **Jamisson**,

aos meus filhos, **Letícia e Lucas**.

Agradecimentos

- A Deus pois sem ele eu não teria forças para essa longa jornada, pois o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele.
- Aos meus pais, pelo amor incondicional e incentivo. Pelos bons conselhos e por acreditarem e sentirem orgulho de mim. Pelos momentos em que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me fazendo acreditar que nada é impossível.
- Ao meu esposo, Jamisson, pelo seu amor, companheirismo e confiança.
- Aos meus filhos Letícia e Lucas pelo carinho e pela compreensão nos momentos em que a dedicação aos estudos foi exclusiva. Muito obrigada meus amores.
- Ao professor Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo, por sua orientação
- A cada um de meus irmãos: Antonio, Josefa e Fábio. Meus grandes companheiros! Obrigada por acreditarem no meu trabalho.
- Aos grandes amigos encontrados, Elisabete, Welington, José Hélio, Luis Anselmo, Marcele, Evani, Edvaldo, Elton Jones, Elson, César Augusto, Ávido Sadote, Carlos Alberto, André, Sérgio, Davi, Gilvan e Márcio;
- Aos professores, Cláudio Tadeu Cristino e André Vinícius Santos Doria, que compuseram a banca examinadora;
- A todos os professores do PROFMAT, pela paciência, dedicação e ensinamentos disponibilizados nas aulas, cada um de forma especial contribuiu para a conclusão desse trabalho e consequentemente para minha formação profissional.
- Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Resumo

O objetivo desta monografia é fazer um estudo detalhado sobre relações. Para tanto, forneceremos algumas definições. Para o desenvolvimento deste foram abordados temas como relações binárias, relações de equivalência e relações de ordem. No desenvolvimento deste veremos formas de representar as relações dando destaque a representação na forma de Grafos. E finalizamos o trabalho com a Ordenação Topológica na conclusão de algumas tarefas de um projeto.

Palavras Chaves: Relações Binária, de Equivalência e de Ordem.

Abstract

The purpose of this monograph is to make a detailed study about studying of relations. So, we will provide some definitions. Developing this Themes like binary relations, equivalence relations and order relations. At the same we will show ways to represent relations highlighting the representation in the form of graphs. And we will finish the job with Topological Ordering in completing some tasks of a project.

Key words: Relations: Binary, Equivalence and Order.

Sumário

Introdução

Esta monografia tem por objetivo principal fazer uma abordagem do estudo das relações mostrando que o mesmo pode ser aplicado no Ensino Médio, pois no desenvolvimento deste trabalho procuramos utilizar uma linguagem mais simples. E para a sua compreensão se faz necessário que o leitor já tenha prévio conhecimento de conceitos básicos de pares ordenados, produto cartesiano e matrizes.

O trabalho foi dividido em três capítulos.

O primeiro capítulo contém definições de Relações algumas classificações com destaque para as relações binárias, relações em um conjunto, relações na forma de funções, suas propriedades e formas de representá-las: como a forma matricial e o uso de grafos.

No segundo capítulo, fizemos um estudo das relações de equivalência, já que a mesma pode ser relacioanda com algums conteúdos que são abordados no Ensino Fundamental, como na semelhança de triângulos, na Geometria Euclidiana com o paralelismo entre retas e no estudo da Aritmética nas congruências módulo m. E finalizando definimos as classes de equivalência.

O último capítulo, contém a parte essencial desta monografia, descreve a relação de ordem fazendo o estudo da ordem parcial dando suas definições, suas respresentação através do Diagrama de Hasse, descrevendo o que é um reticulado e a importância da ordenação topológica no desenvolvimento de um projeto com a ordem total das tarefas a serem executadas na conclusão de um projeto.

Capítulo 1

Relações

No dia a dia nos deparamos com várias situações “em que uma coisa depende da outra” ou “está em função de outra”, também é comum abrirmos jornais ou revistas e encontramos gráficos sobre os mais variados assuntos, mostrando a dependência entre os fatores de estudo, essa dependência existente entre duas grandezas é conhecida como Relação.

Ao relacionarmos espaço em função do tempo, número do sapato em função do tamanho dos pés, intensidade da fotossíntese realizada por uma planta em função da intensidade de luz a que ela é exposta ou pessoa em função da impressão digital, percebemos quão importantes são os conceitos de funções para compreendermos as relações entre os fenômenos físicos, biológicos, sociais...

As relações estão presentes no nosso cotidiano, sejam no vínculo familiar, nas relações de amizade, na Matemática, na Ciência da Computação, etc.

Na Matemática, estudamos as relações na Teoria dos Conjuntos, na Lógica, Relações Binárias, Ternárias, Quaternárias, mais geralmente nas n-árias. Neste trabalho iremos destacar o estudo das Relações Binárias.

1.1 Produto Cartesiano

Sejam A e B dois cojuntos não vazios. Denominamos *Produto cartesiano* de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento petence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B \quad = \quad \{(x, y) \mid \quad x \in A \quad e \quad y \in B\}$$

O símbolo $A \times B$ lê-se"A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

Exemplo 1.1.1 *Se* $A = \{0, 2, 4\}$ *e* $B = \{0, 2\}$*, temos que*

$A \times B = \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (4,0), (4,2)\}$ *e*

$B \times A = \{(0,0), (0,2), (0,4), (2,0), (2,2), (2,4)\}$

Observação 1

1. *Se* $A \neq B$*, então* $A \times B \neq B \times A$*, isto é, o produto de dois conjuntos não são comutativos.*
2. *Se* $A \times B$ *são conjuntos finitos com* m *e* n *elementos respectivamente, então* $A \times B$ *poussui* $m \cdot n$ *elementos.*
3. *Se* A *ou* B *for infinito e nenhum deles for vazio, então* $A \times B$ *será infinito.*

1.2 Relações Binárias

Sejam dois conjuntos, A e B, não vazios, chamamos de *relação binária* R de A em B, qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, isto é,

$$R \subset \{(a, b) \in A \times B \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

O conjunto A é " denominado comumente como" o conjunto de partida e B "também comumente denominado como" conjunto de chegada de R.

Um par ordenado $(a, b) \in A \times B$ satisfaz a relação R quando $(a, b) \in R$, neste caso usa-se a notação aRb. Se $(a, b) \notin R$ escreve-se $a \not R b$.

Exemplo 1.2.1 *Considere os conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{2, 3, 5, 6\}$*. Vamos considerar uma relação binária* R *de* $A \times B$*, em que* a *divide* b*. Podemos representar essa relação em símbolos do seguinte modo:*

$$R = \{(a, b) \in AB \mid a \text{ divide } b\}$$

Os pares que satisfazem essa relação são:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$$

Exemplo 1.2.2 *Seja E o conjunto dos estados do Brasil e C o conjunto das cidades brasileiras. Seja R a relação de E para C tal que, dados $x \in E$ e $y \in C$, x está R-relacionado com y se e só se o estado x contém a cidade y. Deste modo, os pares (Sergipe, Aracaju) e (Alagoas, Arapiraca) pertencem à relação R, enquanto que o par (Rio de Janeiro, Santos) não pertence a R.*

Exemplo 1.2.3 *Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$, considere a relação R de $A \times B$ definida por $aRb \iff a + b = 4$.*

Os pares dessa relação são $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ e eles estão representados graficamente através do diagrama de Venn na figura 1.1.

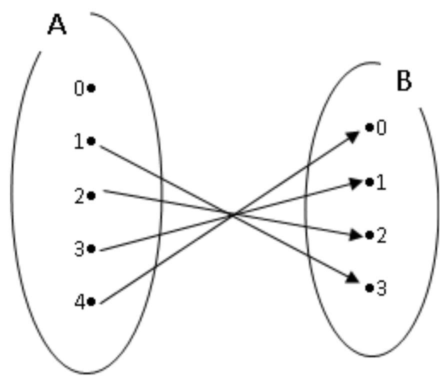


Figura 1.1: Diagrama de Venn

1.3 Funções

Definimos uma função de A em B por uma Relação Binária f de A em B tal que para todo $a \in A$, existe um único $b \in B$ tal que afb. Em símbolos,

$$\forall\ a \in A,\ \exists!\ b \in B \to afb$$

Se afb então se escreve $f(a) = b$ e dizemos que b é imagem de a por f.

Podemos representar uma função através de uma equação, de um gráfico, uma tabela de associação e pelo diagrama de Venn.

O domínio ($domf$) e o contradomínio ($cdomf$) de uma função f, no sentido já conhecido, coincidem com o domínio e contradomínio de f considerada como uma relação. Portanto, dada uma função $f : A \to B$, temos $domf = A$ e $cdomf = \{y \in B \mid \exists x \in A(y = f(x))\}$.

Exemplo 1.3.1 *Dados os conjuntos* $A = \{0, 1, 2\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$*, determinada pela relação* $R = \{(a, b) \in A \times B \mid b = a^2\}$*. Os pares ordenados de* R *que satisfazem essa relação são* $(0, 0)$*,* $(1, 1)$*,* $(2, 4)$ *e como todo elemento do conjunto* A *possui um único correspondende em* B *então essa relação representa uma função.*

Exemplo 1.3.2 *É comum encontrarmos em algumas padarias tabelas que trazem o preço a pagar de acordo com a quantidade de pão que será comprada. Ver Tabela 1.1. Analisando a tabela, observamos que existe uma dependência (relação) entre o valor a pagar e a quantidade de pão e para qualquer quantidade o valor é único, então vimos que este modelo de tabela representa uma função.*

Quantidade de pão	Valor a pagar (em R$)
1	0,30
2	0,60
3	0,90
4	1,20
5	1,50
6	1,80
7	2,10
8	2,40
9	2,70
10	3,00

Tabela 1.1: Representação de uma função

Exemplo 1.3.3 *A relação* R *representada na figura 1.1 não é uma função, já que para* $0 \in A$ *não existe* $b \in B \mid 0 + b = 4$

Observação 2 *Se* $A = B$*, um relação de* A *em* B *é simplesmente uma relação em* A*.*

Exemplo 1.3.4 *Quantas relações existem em um conjunto com* n *elementos?*

Uma relação em um conjunto A *é um subconjunto* $A \times A$*. Sabemos de* $A \times A$ *contém* n^2 *elementos. Então um conjunto com* m *elementos possui* 2^m *subconjuntos e existem* 2^{m^2} *subconjuntos de* $A \times A$*. Logo existem* 2^{n^2} *relações em um conjunto com* n *elementos. Por exemplo no conjunto* $\{1, 2, 3\}$*, existem* $2^{3^2} = 2^9 = 512$ *relações.*

Exemplo 1.3.5 *Seja $A = B$ conjunto $\{1, 2, 3\}$. Quais pares estão na relação $R = \{(a, b) \mid a \leq b\}$.*

Como (a, b) estão em R se, e somente se, a e b forem inteiros positivos e $a \leq b$, vemos que $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$. Os pares dessa relação estão representados graficamente a seguir:

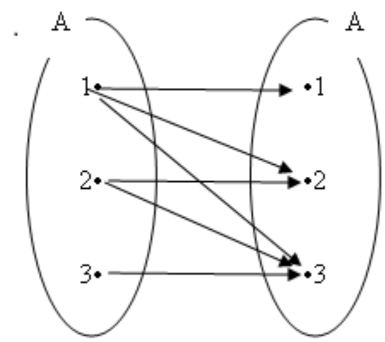


Figura 1.2: Diagrama de uma relação

1.4 Propriedades das Relações em um Conjunto

Uma relação R sobre o conjunto A pode ser classificada como:

- Reflexiva: quando para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$ ou xRx.
- Simétrica: quando para quaisquer x, $y \in A$, se xRy então yRx.
- Antissimétrica: quando para quaisquer x, $y \in A$, se xRy e yRx então $x = y$.
- Transitiva: quando para quaisquer x, y, $z \in A$, se xRy e yRz então xRz.

Exemplo 1.4.1 *Consideremos a relação $=$ (igualdade) sobre os inteiros.*

A relação $=$ é reflexiva, pois qualquer inteiro é igual a si mesmo, é simétrica, se temos $x = y$, então $y = x$, e transitiva, pois se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$.

Exemplo 1.4.2 *Consideremos a relação $\leq$ (menor do que ou igual a) sobre os inteiros.*

Note que $\leq$ é reflexiva pois para qualquer inteiro x, é verdade que $x \leq x$. É também transitiva pois se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$. Não é simétrica, pois isso implicaria em $x \leq y \Longrightarrow y \leq x$. Mas, $\leq$ é antissimétrica, pois sabemos que se $x \leq y$ e $y \leq x$, devemos ter que $x = y$.

1.5 Representação

Podemos representar uma relação entre conjuntos finitos de várias formas. Além de representar as relações explicitando propriedades dos pares ordenados ou listando todos os pares, também é possível representar relações usando:

- Matricial.

- Grafos direcionados (digrafos).

Aqui nós iremos destacar o uso de matrizes e o uso de grafos.

1.5.1 Matricial: Matriz zero-um

Sejam A e B conjuntos finitos não-vazios e seja R uma relação de $A \times B$, onde $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$, onde $1 \leqslant i \leqslant m$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$ onde $1 \leqslant j \leqslant n$. A relação R de A em B pode ser representada por uma matriz da relação do seguinte modo:

- o número de linhas m é o número de elementos de A;
- o número de colunas n é o número de elementos de B;
- Cada uma da a_{ij} posições da matriz possui um valor lógico associado, e por simplificação visual costuma-se usar os valores 0 e 1 para representar os valores lógicos verdadeiro e falso respectivamente:

$$M_R[i,j] = \begin{cases} 1, & se \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0, & se \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Exemplo 1.5.1 *Seja* $A = \{0, 2, 4\}$ *e* $B = \{0, 1, 2\}$ *e* $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a = 2b\}$.

Os pares da relação são $R = \{(0, 0), (2, 1), (4, 2)\}$.

Usando uma matriz para representar a relação acima, temos:

	0	1	2
0	V	F	F
2	F	V	F
4	F	F	V

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.5.2 *Sejam* $A = \{1, 3, 5\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$*.Então os pares ordenados da relação* R*, representada pela matriz são:*

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como R *consiste nos pares* (a_i, b_j) *com* $m_{ij} = 1$*, segue que*

$$R = \{(1, 1), (3, 0), (3, 2), (3, 3), (5, 0), (5, 3)\}$$

.

Observação 3 *Propriedades das relações usando matrizes.*

A matriz de uma relação em um conjunto que é uma matriz quadrada, pode ser usada para determinar se a relação tem determinadas propriedades. Asssim:

- R *é reflexiva se todos os elementos na diagonal principal de* M_R *forem iguais a 1.*
- R *é simétrica se* $M_R = (M_R)^t$.
- R *é antissimétrica se* $m_{ij} = 1$ *com* $i \neq j$*, então* $m_{ji} = 0$.

Exemplo 1.5.3 *Considere a relação* R *representada pela matriz abaixo:*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Essa relação é reflexiva pois todos os elementos da diagonal dessa matriz são iguais a 1. Como M_R *é simétrica, segue que* R *é simétrica. É fácil ver que* R *não é anti-simétrica, pois* $m_{12} = 1$ *e* $m_{21} = 1$.

1.5.2 Grafos

As relações em A podem ser representadas por grafos dirigidos, em que cada elemento do conjunto é representado por um ponto e cada par ordenado é representado usando um arco com sua direção indicada por uma flecha. Usamos essa represetação quando os conjuntos são finitos.

Definição 1.5.4 *Um grafo orientado é uma conjunto V de vértices (ou nós) junto com um conjunto E de pares ordenados de elementos V chamados de arestas (ou arcos). O vértice a é chamado de vértice inicial de uma aresta* (a, b) *e o vértice b é chamado de vértice final da aresta.*

Exemplo 1.5.5 *O grafo orientado da relação:*

$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$, *no conjunto* $\{1, 2, 3, 4\}$ *está representado na figura 1.3.*

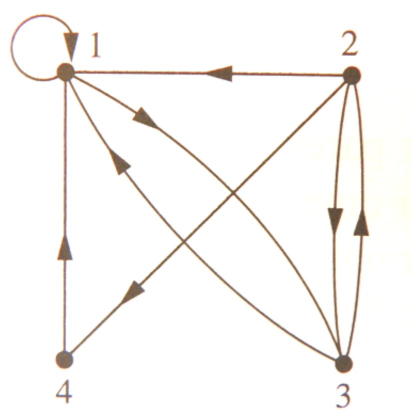


Figura 1.3: Grafo da relação R no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

Exemplo 1.5.6 *Seja* $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *e a relação binária R em A definida como:*

$$\forall x, y \in A, xRy, x \mid y$$

. *O grafo dirigido da relação R, estã representado na figura 1.4.*

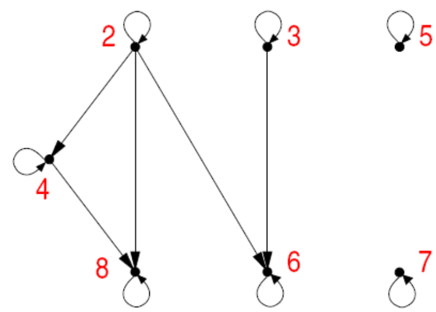


Figura 1.4: Grafo da relação $x \mid y$

Exemplo 1.5.7 *Os pares ordenados das relações representadas pelos grafos orientados nas Figuras 1.5, 1.6 e 1.7, são:*

a) $\{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(c,c),(c,a),(d,d),(d,a)\}$

b) $\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,a),(b,c),(c,c)\}$

c) $\{(1,3),(1,4),(2,2),(2,1),(2,3),(3,3),(3,1),(4,1),(4,3)\}$

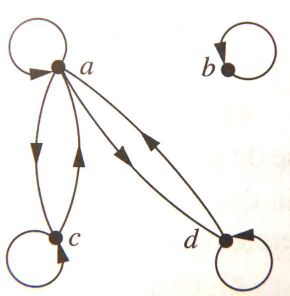


Figura 1.5: (a)

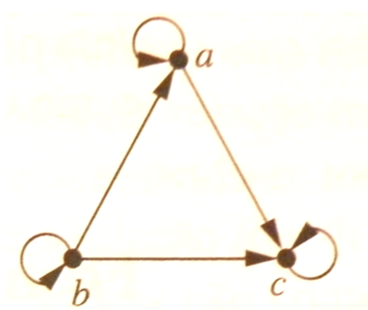


Figura 1.6: (b)

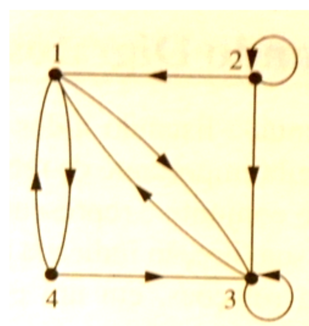


Figura 1.7: (c)

Observação 4 *Através de um grafo orientado podemos analisar se uma relação possui determinadas propriedades. Por exemplo:*

- *Reflexiva, se existir um laço em todo vértice do grafo orientado, de modo que todo par* (x,x) *ocorra na relação.*
- *Simétrica, se para cada aresta entre vértices distintos em seu digrafo existir uma aresta no sentido oposto, de modo que* (y,x) *apareça na relação toda vez que* (x,y) *aparecer.*

- *Antissimétrica, se nunca existir duas arestas em sentidos opostos entre dois vértices distintos.*

- *Transitiva, se sempre que existir uma aresta de x para y e uma aresta de um vértice y para um vértice z, existir uma aresta de x para z (formando um triângulo em que cada lado é uma aresta orientada com a direção correta).*

Exemplo 1.5.8 *Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação binária R definida como: $R = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$. Podemos vericar que R é reflexiva, pois existe um laço para cada nó do grafo o que significa que cada elemento de A está relacionado consigo mesmo. É simétrica, pois para cada aresta de "ida" existe uma aresta de "volta". E não é transitiva, já que temos $1R0$ e $0R3$ mas não temos $1R3$, o que implica na não transitividade.*

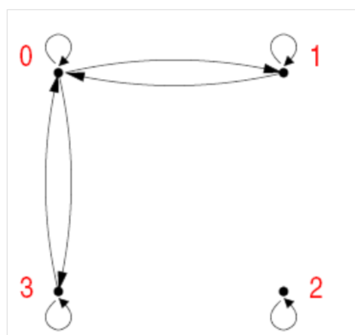


Figura 1.8: Grafo da relação R do exemplo acima

Capítulo 2

Relações de Equivalência

Dizemos que R é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Isto é, diz-se que um subconjunto R de $A \times A$ define uma relação de equivalência sobre A, se satisfaz as seguintes condições:

1. $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

2. $(a, b) \in R$ implica que, $(b, a) \in R$.

3. $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ então $(a, c) \in R$.

Ao invés de falar de subconjuntos de $A \times A$ podemos falar de uma relação binária R (relação entre dois elementos de A) sobre o próprio A, definindo que b esta relacionado com a se $(a, b) \in R$. Quando uma relação R em um conjunto A for uma relação de equivalência, adotaremos, em geral, a notação $\sim$ em vez de R.

Exemplo 2.0.9 *Seja π um plano e sejam as retas $r, s \in \pi$. Define-se:*

$r//s$ se $r = s$ ou se $r \bigcap s = \emptyset$. E representa uma relação de equivalência.

Exemplo 2.0.10 *Seja R a relação definida no conjunto dos números reais por $(x, y) \in R$ se, e somente se, $\mid x \mid = \mid y \mid$. Para todo número real x temos que xRx, pois $\mid x \mid = \mid x \mid$, garantindo que R é reflexiva. Se xRy então $\mid x \mid = \mid y \mid$ e segue que yRx pois $\mid y \mid = \mid x \mid$, provando que R é uma relação simétrica. Se aRb e bRc, então $\mid a \mid = \mid b \mid$ e $\mid b \mid = \mid c \mid$, então $\mid a \mid = \mid c \mid$, ou seja aRc, logo R é transitiva. Concluímos que R é uma relação de equivalência.*

Exemplo 2.0.11 *A semelhança de triângulos é uma relação de equivalência. Pois, se temos a, b e c três triângulos semelhantes quaisquer, então verificam as três condições:*

1. *a é semelhante com a. (reflexiva)*
2. *Se a é semelhante com b, então b é semelhante com a. (simétrica)*
3. *Se a é semelhante com b, e b é semelhante com c, então a é semelhante com c. (transitiva)*

Uma relação de equivalência em um conjunto é um tipo de conceito matemático que está muito próximo de uma relação de igualdade. Vejamos um exemplo disso:

Exemplo 2.0.12 *Seja a relação em Q definida por $a \mid b \equiv c \mid d$ se, e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$ (o produto dos meios é igual ao produto dos extremos em uma proporção). Pode-se verificar que é uma relação de equivalência. Temos que $2 \mid 3 \equiv 6 \mid 9$ mas muitas vezes afirmamos que $2 \mid 3 = 6 \mid 9$.*

Definição 2.0.13 ***Congruência Módulo n***

Seja n um inteiro positivo. Dizemos que os inteiros x e y são ***congruentes módulo n*** *se $n \mid (x - y)$ e representamos por $x \equiv y \pmod n$. Ou resumindo, $x \equiv y \pmod n$ se e somente se, x e y diferem por um múltiplo de n.*

Teorema 2.0.14 *Seja n um inteiro positivo. A relação "congruente mod n" é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.*

Demonstração: Seja n um inteiro possitivo e denotaremos por $\equiv$ a congruência mod n. Devemos mostrar que $\equiv$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

- $\equiv$ é reflexiva. Seja x um inteiro qualquer. Como $0 \cdot n = 0$, temos que $n \mid 0$, que podemos escrever como $n \mid x - x$. Portanto, $x \equiv x$. Assim $\equiv$ é reflexiva.
- $\equiv$ é simétrica. Sejam x e y inteiros e suponhamos $x \equiv y$. Isto significa que $n \mid (x - y)$, logo existe um inteiro k tal que $(x-y) = kn$, então $(y-x) = (-k)n$. E assim $n \mid (y-x)$. Portanto, $x \equiv y$, logo $\equiv$ é simétrica.

- $\equiv$ é tansitiva. Sejam x, y e z inteiros e suponhamos que $x \equiv y$ e que $y \equiv z$ então $x \equiv z$. Portanto $n \mid (x-y)$ e $n \mid (y-z)$, então temos que $(x-y) = tn$ e $(y-z) = sn$, com t e s inteiros, logo $(x-z) = (x-y)+(y-z) = tn+sn = n(t+s)$, então $(x-z) = n(t+s)$ onde $(t+s)$ são inteiros, daí concluímos que $n \mid (x-z)$ e $(x \equiv z)$. Logo $\equiv$ é transitiva.

$\square$

Exemplo 2.0.15 *Seja $A = \mathbb{Z}$. Considere em $A = \mathbb{Z}$ a relação binária R que consiste na diferença de dois inteiros ser um múltiplo de 3 (Congruência módulo 3).*

Esta relação é de equivalência pelo seguinte:

- *$a \in A$; $a \equiv a$ mod 3, isto é $a - a = 0 = 3k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, logo é múltiplo de 3.(reflexiva)*
- *$a \equiv b$ mod 3, isto é $a - b = 3r$ o que podemos escrever $b - a = 3(-r)$ para algum $r \in \mathbb{N}$ logo, $b - a$ é múltiplo de 3, assim $b \equiv a$ mod 3 .(simétrica)*
- *$a \equiv b$ mod 3 , isto é $a - b = 3t$ para algum $t \in \mathbb{N}$ e de $b \equiv c$ mod 3, segue que $b - c = 3s$ para algum $s \in \mathbb{N}$, logo $a - c = (a-b) + (b-c) = 3(t+s) \Rightarrow a - c = 3(t+s)$ para algum $t + s \in \mathbb{N}$, logo $a - c$ é múltiplo de 3 e, $a \equiv c$ mod 3 .(transitiva)*

2.1 Classe de Equivalência

Se R é uma relação de equivalência em A e $a \in A$, chamamos classe de equivalência de a por intermédio de R ao conjunto de todos os elementos de A que estão relacionados com a. A classe de a denotamos por [a] e se lê "classe de equivalência de a", definida pela relação R.

Em forma simbólica: $[a] = \{x \in A \mid xRa\}$

Exemplo 2.1.1 *Seja R a relação definida pelos inteiros $x \equiv b$ mod 4; isto é "x é congruente com y módulo 4".*

Temos que R é uma relação de equivalência, e como todo inteiro podemos expressar na forma $x = 4q + r$ onde $0 \leq r < 4$ existem quatro classes $[0], [1], [2]e[3]$; estas classes são:

- $[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$

- $[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$

- $[2] = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$

- $[3] = \{..., -5, -3, 3, 7, 11, ...\}$

Exemplo 2.1.2 *Seja A o conjunto dos estudantes da UFS que estão fazendo apenas um curso, e seja R a relação em A que consiste nos pares (x, y), em que x e y são estudantes que fazem o mesmo curso. Então R é uma relação de equivalência. E R divide todos os estudantes em A em uma coleção disjunta de subconjuntos, em que cada subconjunto contém os alunos que fazem um curso específico. Por exemplo, um subconjunto que contém todos os estudantes que fazem Matemática, um outro que contém os estudantes de Física. Então todos esses subconjuntos são classes de equivalência.*

Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O Teorema abaixo mostra que as classes de equivalência de dois elementos de A ou são idênticas ou são disjuntas.

Teorema 2.1.3 *Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Estas afirmações para elementos a e b de A são equivalentes:*

(i) aRb *(ii)* $[a] = [b]$ *(iii)* $[a] \cap [b] \neq \varnothing$

Demonstração: Vamos primeiro mostrar que (i) implica (ii). Suponha que aRb. Vamos demonstrar que $[a] = [b]$ mostrando que $[a] \subseteq [b]$ e $[b] \subseteq [a]$. Suponha que $c \in [a]$. Então, aRc. Como aRb e R é simética, sabemos que bRa. Além disso, como R é transitiva e bRa e aRc, segue que bRc. Portanto, $c \in [b]$. isto mostra que $[a] \subseteq [b]$. A demonstração de que $[b] \subseteq [a]$ é análoga.

Segunda, vamos mostrar que (ii) implica (iii). Suponha que $[a] = [b]$. Segue que $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, pois $[a]$ é não vazia (pois $a \in [a]$, uma vez que R é reflexiva).

A seguir, vamos mostrar que (iii) implica (i). Suponha que $[a] \cap [b] \neq \varnothing$. Então, existe um elemento c, com $c \in [a]$ e $c \in [b]$. Ou melhor, aRc e bRc. Pela propriedade simétrica, cRb. Então, por transitividade, como aRc e cRb, temos aRb.

Como (i) implica (ii), (ii) implica (iii) e (iii) implica (i), as três afirmações, (i), (ii) e (iii), são equivalentes.

$\square$

2.1.1 Colagem Matemática

Uma importante e útil aplicação de relações de equivalência é o que se pode chamar de "colagem". Podemos também usar classes de equivalência para cortar e colar objetos geométricos como podemos ver nos seguintes exemplos.

1. Considere o intervalo $I = [0, 1]$ da linha real. Podemos pensar nisso como um pedaço de corda. Se fôssemos colar as duas pontas da corda, obteríamos um pequeno "loop" ou círculo de corda.

Para fazer isso matematicamente, precisamos consideram uma relação S de equivalência em I na qual todos os pontos, exceto 0 e 1 deverão ser identificados, ou seja, deverão formar uma classe de equivalência. Podemos fazer isto do seguinte modo: xSy se $x = y$, ou, se $x = 0$ e $y = 1$, ou $x = 1$ e $y = 0$. Então I/S são as classes de equivalência de I, sobre a relação S e I/S é um loop.

2. **Faixa de Möbius**. A faixa de Möbius é feita tomando uma tira e papel, colando as duas extremidades após efetuar meia volta numa delas, e gravando as extremidades em conjunto. Tal figura assim contruída é curiosa, pois possui apenas um lado (e não dois) e é não orientável. Para definir uma tira de Möbius matematicamente, vamos escolher um pedaço retangular do plano real, por exemplo, $[0, 1] \times [0, 1]$, isto é, todos os pontos com as duas coordenadas entre 0 e 1 (inclusive). Vamos chamar este pedaço (trecho) de I^2 da superfície $2D$. Podemos definir várias relações de equivalência em I, assim, podemos fazer a colagem de maneiras diferentes. Em primeiro lugar, definimos R, onde $(x, y)R(p, q)$ se:

- $(x, y) = (p, q)$ ou
- $y = q$, $x = 0$, e $p = 1$, ou
- $y = q$, $x = 1$, e $p = 0$.

Em seguida, o conjunto de classes de equivalência I^2/R é em geral igual a I^2, exceto se tivessemos colado as margens esquerda e direita do I^2. Portanto, teremos um tubo. Da mesma forma, se colarmos também o topo de I^2 para o fundo, vamos ter um toro. Se juntarmos todos os pontos da borda de I^2 em um ponto, teremos uma esfera. Poderiamos fazer com que a relação Q em que $(x, y)Q(p, q)$ se e só se

- $(x, y) = (p, q)$ ou
- x, y, p e q são provenientes do conjunto $\{0, 1\}$

- $y = q$, $x = 1$, e $p = 0$.

Agora, montamos a seguinte relação de equivalência:

- $(x, y) = (p, q)$ ou
- $y = 1 - q$, $x = 0$, e $p = 1$, ou
- $y = 1 - q$, $x = 1$, e $p = 0$.

Esta fusão de pontos nas margens esquerda e direita, atribui a uma aresta de cabeça para baixo. Ou, visto de outra maneira, colocando uma meia volta para a faixa de superfície antes de colar as extremidades. Quando unirmos para criar pontos de equivalência em I^2/T, teremos uma faixa Möbius.

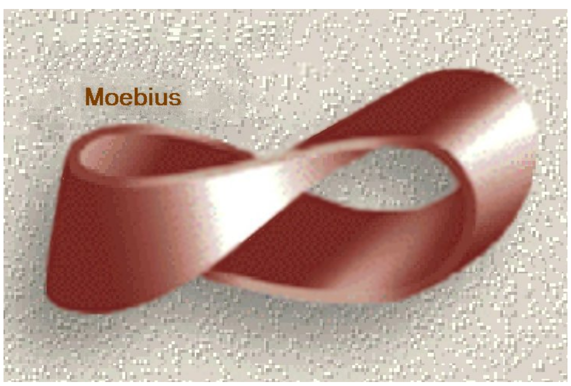


Figura 2.1: Faixa de Möbius

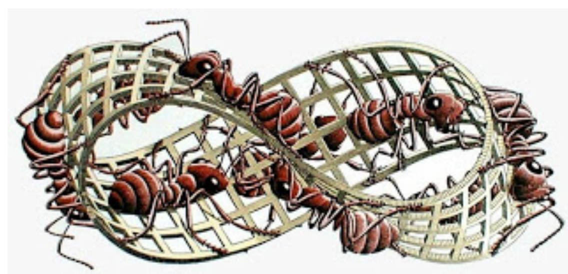


Figura 2.2: Faixa de Möbius representada pelo artista holandês Mauritus Cornelis Escher (1898-1972)

Capítulo 3

Relação de Ordem

Podemos pensar em uma relação de ordem quando lembramos de uma fila de caixa de um banco, na relação "menor ou igual", no "Grid de largada" de uma corrida de Fórmula 1, nos números naturais, etc.

3.1 Ordem parcial

Uma relação binária R sobre um conjunto S é denominada uma relação de Ordem Parcial se e somente se ela for reflexiva, antissimétrica e transitiva.

E chamamos de conjunto parcialmente ordenado (ou poset) um conjunto S no qual está definido uma ordenação parcial R. Os elementos de S são chamados de elementos do Poset e representado por (S, R) ou por $\preccurlyeq$. Um poset é um par $(S, \preccurlyeq)$ em que S é um conjunto e $\preccurlyeq$ uma relação de ordem parcial em S.

Quando um conjunto parcialmente ordenado $(S, \preccurlyeq)$ é dito conjunto totalmente ordenado, se quaisquer que sejam x e y de S temos $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

Exemplo 3.1.1 *A relação "maior que ou igual a"* $(\geq)$ *é um poset, pois ela é reflexiva, antissimétrica e transitiva, como foi mostrado no Exemplo 1.4.1.*

Exemplo 3.1.2 *A relação de divisibilidade no conjunto dos inteiros positivos é um poset. Como* $a \mid a$ *sempre que* a *for um inteiro positivo, então temos que a relação "divide" é reflexiva. É antissimétrica, pois sendo* a *e* b *inteiros positivos, se* $a \mid b$ *e* $b \mid a$*, então temos* *que $a = b$. E é transitiva, pois supondo que $a \mid b$ e que $b \mid c$, então, existem inteiros positivos p e q, tal que $b = ap$ e $c = bq$, daí concluímos que $c = a(pq)$, logo concluímos que $a \mid c$. Donde concluímos que $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um poset. Lembrando que $\mathbb{Z}^+$ representa o conjunto dos inteiros positivos.*

Exemplo 3.1.3 *Seja R a relação no conjunto das pessoas tal que xRy se x e y forem pessoas e se x for mais velha do que y, temos que R não é um poset. A relação R é antissimétrica pois se uma pessoa x for mais velha do que uma pessoa y, então y não é mais velha do que x, isto é, xRy então $yR|x.R$ é transitiva porque se uma pessoa x for mais velha do que uma pessoa y e y for mais velha do que uma pessoa z, então x é mais velha do que z, isto é, xRy e yRx então xRz. Mas R não é reflexiva, pois nenhuma pessoa é mais velha do que si mesma, isto é, $xR|x$ para qualquer pessoa x. Daí segue que R não é um poset.*

Exemplo 3.1.4 *A relação de inclusão, $(\subseteq)$ é um ordenamento parcial sobre o conjunto $P(S)$ (partes do conjunto S). Consideremos dois conjuntos A e B, ambos subconjuntos de S,então temos que $\subseteq$ é reflexiva, pois $A \subseteq A$. É $\subseteq$ antissimétrica pois se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, isso implica que $A = B$. E finalmente, $\subseteq$ é transitiva, pois se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implica que $A \subseteq C$. Portanto $(P(S), \subseteq)$ é um poset.*

3.2 Ordem Lexicográfica

Em um dicionários as palavras aparecem em ordem alfabética, ou lexicogáfica, essa ordem baseia-se na ordem alfabética das letras no alfabeto. Esse é uma caso especial, demonstraremos agora como essa sequência pode ser aplicada em qualquer poset.

Para começar, vamos mostrar como construir uma ordem parcial no produto cartesiano de dois posets, $(A_1, \preceq_1)$ e $(A_2, \preceq_2)$. A ordem lexicográfica $\preceq$ em $A_1 \times A_2$ é definida especificando que um par é menor que um segundo par se o primeiro elemento do primeiro par for menor do que o primeiro elemento do segundo par, ou se os primeiros elementos forem iguais, mas o segundo elemento deste par for menor do que o segundo elemento do segundo par (em A_2). Em símbolos,

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2) := \begin{cases} a_1 \prec b_1, & ou \quad se \\ a_1 = b_1 & e \quad a_2 \prec b_2 \end{cases}$$

Exemplo 3.2.1 *No poset $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \preceq)$, tem-se $(4, 7) \prec (5, 3)$, $(4, 9) \prec (5, 7)$ e $(5, 7) \prec (5, 9)$ sua ordem lexicográfica construída a partir da relação $\leq$ usual em $\mathbb{Z}$.*

Exemplo 3.2.2 *Seja $\mathbb{P}$ o conjunto das palavras da lingua portuguesa e $(\mathbb{P}, \prec)$ a ordem lexicográfica em $\mathbb{P}$, induzida pela sequência das letras do alfabeto. Considere:*

a) rio, riacho, rico, ricaço, rimar, riqueza.

b) material, matemática, maternal, matriz, matraca, mata.

Segundo tal ordem tem-se:

a) riacho $<$ ricaço $<$ rico $<$ rimar $<$ rio $<$ riqueza.

b) mata $<$ matemática $<$ material $<$ maternal $<$ matraca $<$ matriz.

3.3 Diagrama de Hasse

Uma relação de ordem parcial definida num conjunto finito, representa-se graficamente por um **Diagrama de Hasse**. É um grafo não dirigido que se obtém por simplificação do grafo da relação removendo todos os laços e todos os ramos que podem ser deduzidos pela transitividade da relação.

Em um diagrama de Hasse, cada elemento de um conjunto finito A é representado por um ponto (vértice) do diagrama.

- Conjuntos munidos de uma relação de ordem são uma relação e portanto pode-se desenhar seu digrafo.
- No entanto, muitas arestas não precisam estar presentes em virtude das propriedades da relação de ordem (reflexiva e transitiva).
- Para simplificar a representação, retira-se de seus digrafos as arestas que sempre devem estar presentes.
- As estruturas obtidas desta forma são chamadas de DIAGRAMAS DE HASSE da relação de ordem.

Exemplo 3.3.1 *Seja $A = \{1, 2, 3, 9, 18\}$ e considere a relação D "divide" no conjunto como: $\forall a, b \in A, a/b \Longleftrightarrow b = a.k$; para algum inteiro k:*

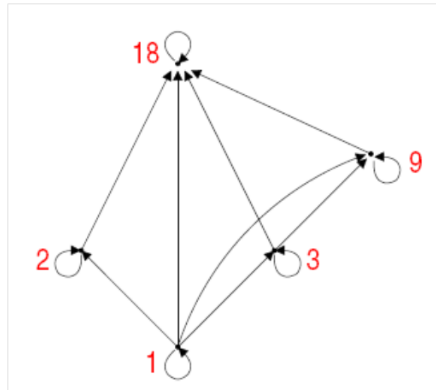


Figura 3.1: Grafo da relação $(A, |)$

O grafo dirigido da relação D está representado na Figura 3.1.

Note que na Figura 3.1:

- Existe um laço ("loop") em cada vértice;

- Todas as arestas possuem direção;

- Toda vez que há uma aresta de um vértice para um segundo e de um segundo para um terceiro, então há uma aresta do primeiro vértice para o terceiro vértice.

É possível estabelecer um algorítmo para obter o Diagrama de Hasse. Para isso elimine:

1. Os laços em todos os vértices;
2. Todas as arestas que existem por causa da propriedade de transitividade;
3. A direção em todas as arestas.

3.3.1 Elementos Maximais e Minimais

Seja $P = (X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $x \in X$ é maximal se na existir qualquer $b \in X$ com $x < b$. O elemento x é chamado minimal se não existir qualquer $a \in X$ com $a < x$.

Usando o diagrama de Hasse podemos identificar facilmente os elementos maximais e minimais de um poset, eles são os elementos "de baixo" e "de cima" no diagrama.

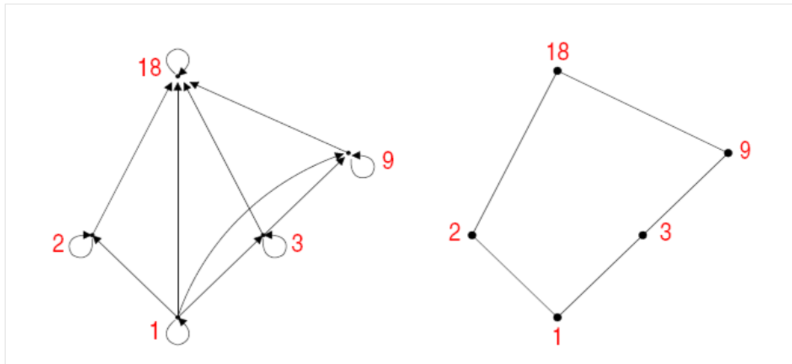


Figura 3.2: Grafo da relação $(A, |)$ e seu Diagrama de Hasse

Quando existir um elemento em um poset e ele for maior que todos os outros elementos, esse elemento é máximo (ou maior elemento), isto é, dizemos que x é máximo se, para todo $a \in X$, temos $a \leq x$. E caso o maior elemento exista ele é único.

Do mesmo modo, um elemento é mínimo (ou menor elemento) se ele for menor do que todos os outros elementos no poset, isto é, dizemos que x é mínimo, se para todo $b \in X$, temos $x \leq b$, e ele será único, caso exista.

Exemplo 3.3.2 *Na Figura 3.3, á esquerda temos o diagrama de Hasse da relação divide no conjunto dos divisores de 16. E à direita temos o diagrama de Hasse dos divisores de 30.*

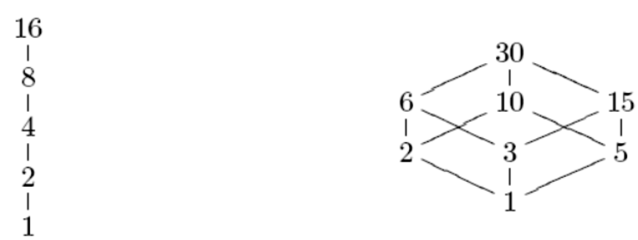


Figura 3.3: Diagrama de Hasse: À esquerda divisores de 16 e à direita divisores de 30

Exemplo 3.3.3 *Considere o conjunto* $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ *e a relação* $|$ *(divide), a relação* $R = (\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ *é um poset.O diagrama de Hasse para este poset nos mostra que 12, 20 e 25 são elementos maximais e 2 e 5 são os elementos minimais. Ver figura 3.4*

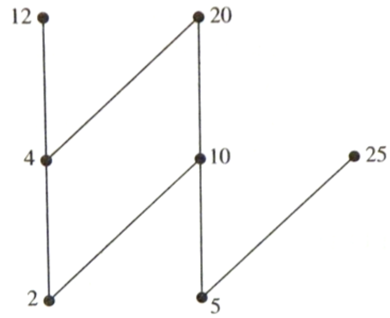
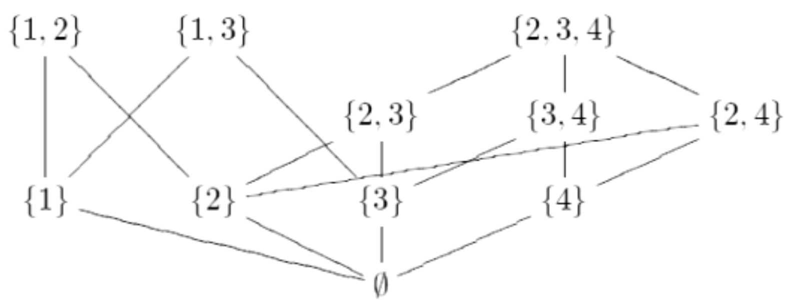


Figura 3.4: Diagrama de Hasse de um Poset

Exemplo 3.3.4 *O diagrama de Hasse seguinte representa o conjunto parcialmente ordenado* $(A, \subseteq)$ *para* $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$*:*



Os elementos $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ e $\{2,3,4\}$ dizem-se **elementos maximais**. O elemento $\varnothing$ diz-se **mínimo**.

Observação 5 *Limitante superior e limitante inferior*

Quando um elemento for "maior que ou igual" a todos os elementos de um subconjunto A de um poset $(S, \preceq)$ esse elemento é chamado de *limitante superior* de A. Se um elemento x for um limitante superior e for menor do que qualquer outro limitante superior de A esse elemento é chamado de **menor limitante superior**.

Do mesmo modo, quando existir um elemento que seja "menor que ou igual" a todos os elementos em A, ele é chamado de *limitante inferior*.S e y for um limitante inferior de A que é maior do que qualquer outro limitante inferior de A esse elemento é chamado de **maior limitante superior**

3.4 Reticulado

Um poset no qual cada par de elementos possui um maior limitante superior e um menor limitante inferior é chamado de **reticulado**.

Os *Reticulados* possuem propriedades especiais e são usadas em muitas aplica-ções diferentes, como modelos de fluxo de informações e possuem importante papel na álgebra booleana.

Exemplo 3.4.1 *O poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ *é um reticulado. Para verificar consideremos a e b dois inteiros positivos. O menor limitante superior e o maior limitante inferior desses dois inteiros são o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum desses inteiros, respectivamente. Daí segue que este poset é um reticulado.*

Exemplo 3.4.2 *O conjunto parcialmente ordenado por divisibilidade* $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ *não é um reticulado, pois os elementos 2 e 3 não possuem limitantes superiores em* $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$*, já que não existe elemento em* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *que é divisível por 2 e também por 3, assim, eles também não possuem um menor limitante superior.*

Já o conjunto parcialmente ordenado por divisibilidade $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ *é um reticulado visto que cada 2 elementos do conjunto possuem tanto um menor limitante superior como um maior limitante inferior.*

3.5 Ordenação Topológica

Algumas vezes para a conclusão de um projeto o mesmo é dividido em tarefas, onde algumas delas só podem ser executadas somente depois que outras forem concluídas. Para solucionar este problema, montamos uma ordem parcial no conjunto das tarefas de modo que se $x \prec y$ se e somente se, x e y forem tarefas em que a tarefa x tem que ser executada antes da tarefa y. Dessa forma, ordens parcial e diagrama de Hasse são maneiras naturais de se representar problemas na ordenação de tarefas, então concluímos que para construir um planejamento para um projeto, precisamos produzir uma ordem para todas as tarefas, de modo que elas sejam compatíveis com esta ordem parcial.

Por exemplo as tarefas para se construir uma casa possuem apenas uma ordem parcial, porque nem todos os elementos vêm necessariamente um antes ou depois do outro. Assim: a fundação deve ser feita antes de tudo. Então entre a fundação e a pintura há uma ordem:

fundação < pintura, mas entre a pintura e a colocação do piso, não há uma ordem fixa. Com isso, há várias ordem possíveis em que uma casa pode ser montada. A tarefa deste é, dada uma ordem parcial de tarefas, exibir uma das possíveis seqüências para execução das tarefas.

Então vamos defirnir que: uma ordem total $\preceq$ é denominada compatível com a ordem parcial R se $x \preceq y$ sempre que xRy, construir uma ordem total compatível a partir de uma ordem parcial que é denominada **ordenação topológica**.

Para começar precisaremos utilizar o Lema a seguir:

Lema 3.5.1 *Todo poset não vazio finito $(S, \preceq)$ tem, pelo menos, um elemento minimal.*

Demonstração: Escolha um elemento a_0 de S. Se a_0 não for minimal, então existe um elemento a_1, com $a_1 \prec a_0$. Se a_1 não for minimal, existe um elemento a_{n+1}, com $a_{n+1} \prec a_n$. Como existe apenas um número finito de elementos no poset, este processo deve terminar com um elemento minimal a_n.

$\square$

Exemplo 3.5.2 *Encontre uma ordem total compatível para o poset* $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}), |)$

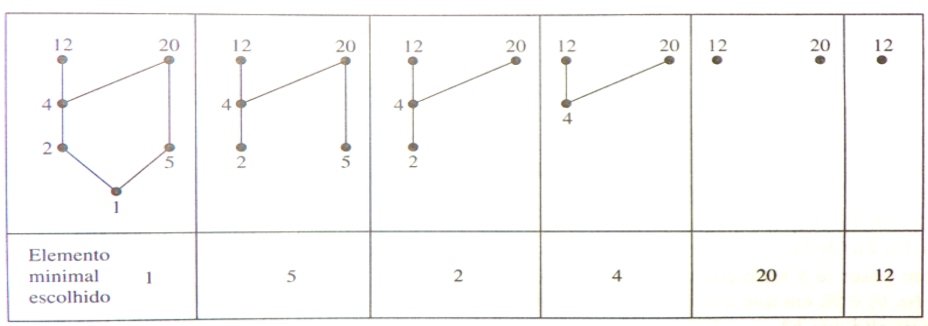


Figura 3.5: Uma Ordenação Topológica de $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\})$

O primeiro passo é escolher um elemento minimal, neste caso é o 1, pois é o único elemento minimal. Agora vamos escolher um elemento minimal de $(\{2, 4, 5, 12, 20\}, |)$, *podemos escolher um entre os dois elementos minimais deste poset, 2 e 5, vamos escolher o 5. Agora temos* $\{2, 4, 12, 20\}$, *o único elemento minimal deste poset é o 2, em seguida escolhemos o 4 que é o único elemento do poset* $(\{4, 12, 20\}, |)$. *Finalmente temos o 12 e o 20 que são os elemento minimais de* $(\{12, 20\}, |)$, *escolhemos o 20, e resultando o 12 como o último elemento. Produzindo a ordem total* $1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20 \prec 12$. *Ver Figura 3.5.*

Exemplo 3.5.3 *Planeje as tarefas necessárias para construir uma casa, especificno sua ordem, se o diagrama de Hasse que represernta essas tarefas é como mostra a Figura 3.6.*

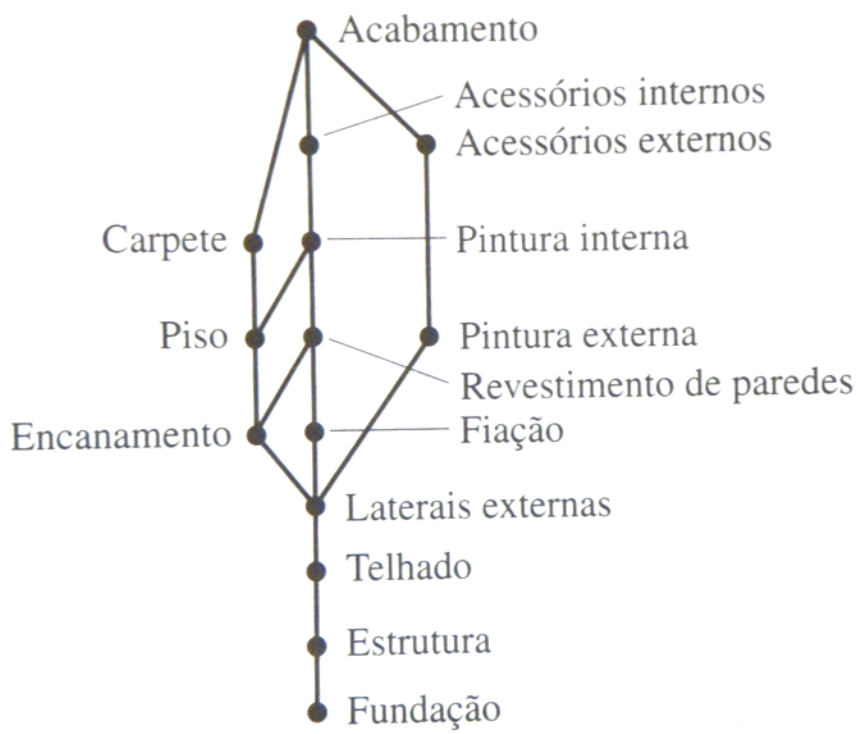


Figura 3.6: Tarefas da construção de uma casa

Uma ordem das tarefas para a construção de uma casa pode ser: Fundação ≺ Estrutura ≺ Tehado ≺ Laterais externas ≺ Encanamento ≺ Fiação ≺ Revestimento das paredes ≺ Piso ≺ Pintura externa ≺ Pintura interna ≺ Carpete ≺ Acessórios internos ≺ Acessórios externos ≺ Acabamento.

Exemplo 3.5.4 *Planeje as tarefas necessárias para preparar uma refeição chinesa especificando sua ordem. O diagrama de Hasse que representa essas tarefas é mostrado na Figura 3.7.*

Uma ordem das tarefas para o preparo da refeição pode ser: Achar a receita ≺ Comprar frutos do mar ≺ Comprar artigos de mercearia ≺ Limpar os peixes ≺ Lavar os mariscos ≺ Cortar o gengibre e o alho ≺ Lavar os vegetais ≺ Cozinhar o arroz ≺ Cortar os peixes ≺ Cortar as castanhas ≺ Fazer as guarnições ≺ Cozinhar ≺ Arrumar os pratos ≺ Servir.

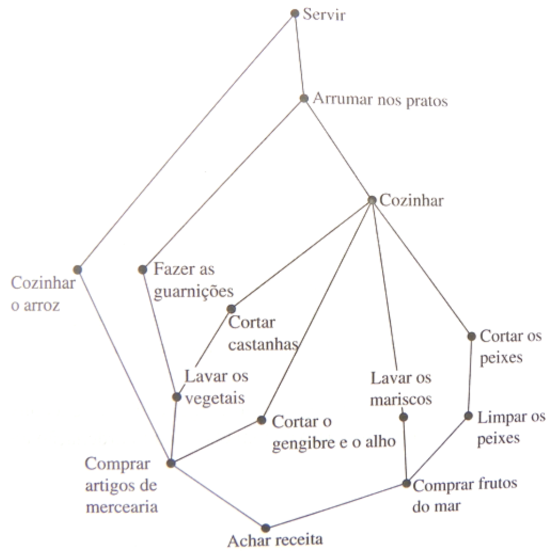


Figura 3.7: Tarefas do preparo de uma refeição chinesa

Exemplo 3.5.5 *Planeje as tarefas necessárias de um projeto de sofware se o diagrama de Hasse para as tarefas do projeto é como mostrado na Figura 3.8.*

Uma ordem das tarefas para a construção do software são: Determinar as necessidades do usuário $\prec$ Escrever os requisitos funcionais $\prec$ Desenvolver os requisitos do sistema $\prec$ Escrever documentação $\prec$ Desenvolver módulo A $\prec$ Desenvolver módulo B $\prec$ Desenvolver módulo C $\prec$ Integrar os móulos $\prec$ Montar locais de teste $\prec$ Teste α $\prec$ Teste β $\prec$ Acabamento.

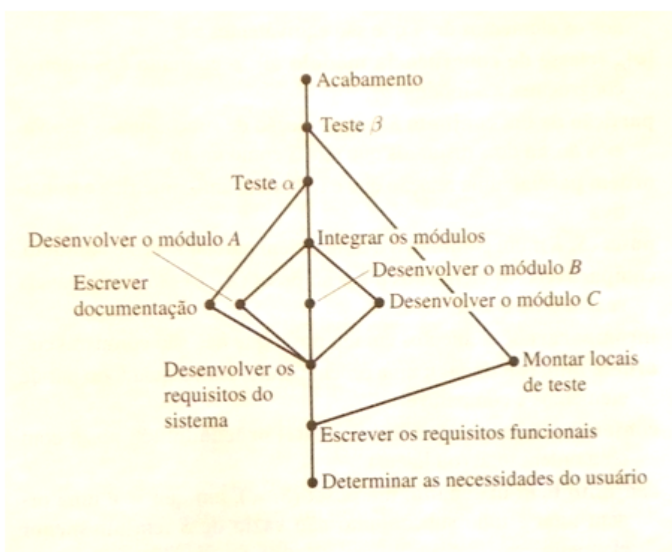


Figura 3.8: Tarefas para um projeto de um software

Referências Bibliográficas

[1] ROSEN, Kenneth H. *Matemática Discreta e suas Aplicações*;[Tradução João Giudice].– São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

[2] SCHEINERMAN, Edward R. *Matemática Discreta: Uma Introdução*. –São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

[3] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar: conjuntos, funções*. –São Paulo: Atual, 2009.

[4] PINEDO, Christian Quintana, *Fundamentos da Matemática.* – Tocantis: Universidade Federal do Tocantins. Campus de Araguaína, Curso de Ciências - Habilitação plena em Matemática, 2007.

[5] SILVA, Antônio de Andrade e *Números, Relações e Criptografia*. Paraíba: Universidade Federal da Paraíba.

[6] LOUREIRO,Antonio Alfredo Ferreira *Relações.* Disponível em: < http://www.dcc.ufmg.br/ loureiro> Acesso em 03 de janeiro de 2013.