Universidade Federal de Sergipe

Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Antônio Sérgio de Souza Barreto

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: APLICAÇÕES EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

Itabaiana-SE

2015

Antônio Sérgio de Souza Barreto

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: APLICAÇÕES EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal de Sergipe, câmpus Itabaiana, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Éder Mateus de Souza

Itabaiana-SE

2015

Aos meus avós, Edgar, Ildefonso e Durvalina (in memorian), e Dona Lourdes; meus pais, Antônio e Jossiete; minha família, Andréa e Ana Clara.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, matriz geratriz do universo.

Aos meus avós, Seu ”Degar”, Seu ”Defonso”e Dona Durvalina, todos na eternidade, e Dona ”Lurde”pelos princípios fundamentados desde o início.

Aos meus pais, ”Tonho de Defonso”e ”Josiete”, pela lição de vida, caráter, perseverança, apoio incondicional e confiança em todos e quaisquer momentos.

A Andréa, pelo companheirismo e paciência, compreendendo minhas ausências, motivando-me na tristeza, fraqueza e desânimo, e por não deixar de acreditar.

A Ana Clara, razão de sempre lutar e jamais desistir.

A Monsenhor José de Souza Santos, pelo exemplo de grandeza na humildade.

Ao Professor de Matemática Jorge de Araújo Santos, pela semente plantada.

Ao meu compadre, José Silva, pela teimosia de inscrever-me no processo de seleção do PROFMAT. Se não fosse assim, não chegaria a tal.

Aos meus chefes, Edson do Amor e Demerson Requião, gestores do Banco do Nordeste, pela compreensão e irrestrito apoio.

Ao Excelentíssimo Senhor Prefeito Municipal de Tobias Barreto, Adilson de Jesus Santos, e o então Excelentíssimo Senhor Secretário Municipal de Educação, Ivan Carlos de Macedo, pela oportunidade concedida para realização desse projeto.

Aos meus irmãos, amigos e demais familiares, por estarem nas orações e torcida para o êxito de mais esse desafio.

Aos meus companheiros, amigos e cúmplices da turma 2013 do PROF-

MAT (Airton, André, Ataniel, Claudemir, Cleidinaldo, Dayane, John, Josinaldo, Robson baiano, Robson sergipano, Salomão, Sílvio, Valdir e Victor), pela oportunidade de estarmos juntos. Um por todos, todos por um.

Aos demais, que direta e indiretamente, fazem parte da trajetória.

A meu orientador, Prof. Dr. Éder Mateus de Souza, pelo apoio, compreensão, ensinamentos, sugestões e dicas que foram repassados na orientação deste trabalho e nas disciplinas que lecionou.

Ao Prof. Dr. Allyson dos Santos Oliveira, pela ajuda no LaTeX.

A todos os professores que tive a honra e prazer de conviver, quando ao dividirem seus conhecimentos e experiências, multiplicaram o desejo de querer mais.

Antônio Sérgio de Souza Barreto

"Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes".

Carta de Isaac Newton a Robert Hooke

RESUMO

A proposta deste trabalho é mostrar que os cálculos, teoricamente, restritos ao mundo financeiro, fazem partem do cotidiano da vida de todos nós, ajudando na tomada de decisões quanto a aplicações financeiras, investimentos, amortizações de empréstimos e/ou financiamentos, o crédito imobiliário e veicular, além de planos de previdência ou aposentadoria.

Pois muitas vezes, a falta de conhecimento faz com que se pague mais encargos às instituições de crédito que, frequentemente, camuflam a taxa de juros, sem falar na possibilidade de concessão de desconto no momento de uma compra à vista, ao invés de parcelar no cartão de crédito ou crediário.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Educação Financeira. Sistemas Dinâmicos Discretos.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to show that the calculations theoretically restricted to the financial world, do leave the everyday life of all of us, helping in making decisions on investments, investments, loan repayments and / or financing, real estate loans and vehicle, as well as pension plans or retirement.

Because often the lack of knowledge makes them pay more charges to credit institutions that often camouflage the interest rate, not to mention the possibility of discount at the time of granting a cash purchase, rather than piecemeal credit card or payment plan.

Keywords: Financial Math. Financial education. Discrete Dynamical Systems.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

As equações são usadas frequentemente para calcular valores de funções formando assim um conjunto de valores, descrevendo a evolução de determinado fenômeno, sendo aplicado em várias áreas do conhecimento, como a Matemática Pura, Análise Estatística, Computação, Engenharia, Sistemas Dinâmicos, Biologia, Geografia, Física e outros campos.

Na Economia, a variável tempo pode não fluir continuamente, mas se apresentar de maneira discreta, ou seja, as grandezas envolvidas são medidas em instantes isolados (de hora em hora, dia após dia, mês em mês, etc.), formando assim uma sequência de valores que descrevem a evolução do fenômeno em estudo. Para eventos como estes, utilizaremos a teoria dos chamados sistemas discretos, norteados por Kelly & Peterson.

No cotidiano de sala de aula, as perguntas "pra que serve isso?"ou "onde eu vou usar matemática na minha vida?"surgem a todo momento. Umas das mais próximas aplicações no dia-a-dia é a Matemática Financeira.

Apresentaremos propostas didaticas de como utilizar os conceitos e desenvolver a ideia de Educação Financeira, familiarizando-os na Educação Básica, através de exemplos do cotidiano envolvendo Matemática Financeira (aplicações, investimentos, amortização, financiamento imobiliário e veicular, plano de aposentadoria e previdência), justo no momento em que o assunto toma conta dos noticiários, onde as famílias brasileiras apresentam elevado grau de endividamento, além do alto índice de mortalidade das micro e pequenas empresas no Brasil, por muito vezes decorrentes do desconhecimento de lidar com cálculos financeiros.

Capítulo 2

Motivação e Formulação de Problema

Partiremos de exemplos onde o tempo é discreto. De grosso modo, uma equação discreta é uma sequência de números que se definem de forma recursiva.

Imaginemos que, em 01/junho/1994, lançamento oficial do Plano Real, um indivíduo fizesse uma aplicação financeira, capitalizada anualmente a uma taxa de 10%.

Descreveremos a evolução do saldo, denotado por $s = s(t)$, em função do tempo t, levando-se em consideração que não haverá novos aportes ou depósitos, nem alteração na taxa inicialmente contratada.

Seja $s(0)$ o valor inicialmente aplicado ($t = 0$).

Passado o primeiro ano, teremos:

$$s(1) = s(0) + 0,1.s(0)$$

No segundo ano,

$$s(2) = s(1) + 0,1.s(1)$$

No terceiro,

$$s(3) = s(2) + 0,1s(2).$$

Intuitivamente,

$$s(t) = s(t-1) + 0,1.s(t-1), t = 1,2,3,... \tag{2.1}$$

No intuito de generalizarmos em função do valor inicial, temos:

$$s(1) = s(0) + 0,1.s(0) = (1+0,1).s(0)$$

$$s(2) = s(1) + 0,1.s(1) = (1,1).s(1) = (1,1).(1,1).s(0) = (1,1)^2.s(0)$$

$$s(3) = s(2) + 0,1.s(2) = (1,1).s(2) = (1,1).(1,1)^2.s(0) = (1,1)^3.s(0)$$

Logo,

$$s(t) = (1,1)^t.s(0) \tag{2.2}$$

Utilizando a equação (2.2), qual seria o montante acumulado até 01/junho/2015, sabendo que R$ 100 foi a aplicação inicial?

Resolução:

$$s(21) = (1,1)^{21}.100$$

$$s(21) = 740,02$$

Após 21 anos, o indivíduo teria acumulado R$ $740,02$.

A equação (2.1) é classificada como equação discreta de primeira ordem, que pode ser expressa por:

$$s(t+1) = f(s(t)) \tag{2.3}$$

onde f é uma função conhecida.

Seja t_0 um valor qualquer, de (2.1) geramos a seguinte sequência de valores t_0, $f(t_0)$, $f(f(t_0))$, $f(f(f(t_0)))$,... de forma cômoda, temos $f^2(t_0)$ $= f(f(t_0))$, $f^3(t_0) = f(f(f(t_0)))$ e assim sucessivamente, lembrando que $f^0(t_0) = t_0$.

Sendo $s(n) = f_n(t)$, temos:

$$s(n+1) = f_{n+1}(t_0) = f(f_n(t_0)) = f(s(n)).$$

Essas iterações de t_0 ao valor $f(t_0)$ são um exemplo de sistema dinâmico discreto.

Capítulo 3

Operador Diferencial

A maioria dos cálculos envolvidos na solução de análise e de equações podem ser simplificadas pela utilização do cálculo de diferenças, um conjunto de ferramentas matemáticas bastante semelhante ao cálculo diferencial.

De forma sutil, examinaremos os pontos mais importantes, tendo uma visão geral das técnicas disponíveis e observar as diferenças e semelhanças entre a diferença e cálculo diferencial. Assim como o operador diferencial desempenha o papel central no cálculo diferencial, o operador diferença é o componente básico de cálculos que envolvem diferenças finitas.

Definição 3.1. Seja y(t) uma função de uma variável real ou complexa t. O "operador de diferença" Δ é definido por

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t).$$

Costumeiramente, vamos tomar o domínio de y para ser um conjunto de inteiros consecutivos tais como os números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. No entanto, às vezes é útil escolher um conjunto contínuo de valores t, tais como o intervalo $[0, \infty)$ ou o plano complexo como o domínio.

Considere uma operação de diferença, digamos, $y(s+h) - y(s)$, com

$h > 0$. Seja $y(t) = z(th)$.

Logo,

$$\begin{aligned} z(s+h) - z(s) &= z(th+h) - z(th) \\ &= y(t+1) - y(t) \\ &= \Delta y(t) \end{aligned}$$

Definição 3.2. O "operador de deslocamento" E é definido por

$$Ey(t) = y(t+1).$$

Se I indica o operador identidade $Iy(t) = y(t)$ então temos

$$\Delta = E - I.$$

A composição dos operadores I e E têm as mesmas propriedades que a multiplicação de números. As propriedades fundamentais de Δ são dadas no teorema abaixo:

Teorema 3.1.

(a) $\Delta^m(\Delta^n y(t)) = \Delta^{m+n} y(t)$, para todos m e n naturais.

(b) $\Delta(y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t)$.

(c) $\Delta(ky(t)) = k\Delta y(t)$, sendo k uma constante.

(d) $\Delta(y(t)z(t)) = y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t)$

(e) $\Delta\left(\frac{y(t)}{z(t)}\right) =$

$$\frac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}$$

Demonstração. Considere a regra do produto (d).

$$\begin{aligned}\Delta\ (\text{y(t)z(t)}) &= y(t+1)z(t+1) - y(t)z(t) \\ &= y(t+1)z(t+1) - y(t)z(t+1) \\ &\quad +y(t)z(t+1) - y(t)z(t) \\ &= \Delta y(t)Ez(t) + y(t)\Delta z(t)\end{aligned}$$

As fórmulas no teorema anterior assemelham a regra da soma, a regra do produto, e a regra do quociente do cálculo diferencial. No entanto, note que o aparecimento do operador deslocar em partes (d) e (e).

Além das fórmulas gerais para calcular diferenças, será necessária uma coleção de fórmulas para diferenças de funções particulares. A seguir, algumas funções básicas:

Teorema 3.2. Seja a uma constante, temos:

(a) $\Delta a^t = (a-1)a^t$

(b) $\Delta \sin at = 2\sin\frac{a}{2}\cos a(t+\frac{1}{2})$

(c) $\Delta \cos at = -2\sin\frac{a}{2}\sin a(t+\frac{1}{2})$

(d) $\Delta \log at = log(1+\frac{1}{t})$

(e) $\Delta \log\Gamma(t) = \log t$, seja $\log t$ um logaritmo qualquer de um número positivo t.

Demonstração

(a)

$$\begin{aligned}\Delta a^t &= a^{t+1} - a^t \\ &= a.a^t - a^t \\ &= (a-1).a^t\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Delta \sin at &= \sin[a(t+1)] - \sin at \\ &= \sin(at+a) - \sin at \\ &= 2\sin\left(\frac{at+a-at}{2}\right)\cos\left(\frac{at+a+at}{2}\right) \end{aligned}$$

$= 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(at+\frac{a}{2}\right)$

$= 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left[a\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]$

(c)

$$\begin{aligned} \Delta \cos at &= \cos[a(t+1)] - \cos at \\ &= -2\sin\left(\frac{at+a-at}{2}\right)\sin\left(\frac{at+a+at}{2}\right) \end{aligned}$$

$=-2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(at+\frac{a}{2}\right)$

$=-2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left[a(t+\frac{1}{2})\right]$

(d)

$$\begin{aligned} \Delta \log at &= \log[a(t+1)] - \log at \\ &= \log\left(\frac{at+a}{at}\right) \end{aligned}$$

$=\log\left(1+\frac{1}{t}\right)$

(e)

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma(t) &= \log\Gamma(t+1) - \log\Gamma(t) \\ &= \log\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)}\end{aligned}$$

$= \log t$

É facilmente verificado que todas as fórmulas do Teorema 3.2 continuam a ser válidos se uma constante "nova"é introduzida na variável t.

Por exemplo,

$$\Delta a^{t+k} = (a-1)a^{t+k}$$

Agora as fórmulas em teoremas 3.1 e 3.2 podem ser utilizadas em combinação para encontrar as diferenças de expressões mais complicadas.

Uma das mais básicas fórmulas específicas no cálculo diferencial é a força da regra:

$$\frac{d}{dt}$$

t$^n = nt^{n-1}$

Infelizmente, a diferença de potência é complicada e, consequentemente, não muito utilizada:

$$\begin{aligned}\Delta_t t^n &= (t+1)^n - t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k - t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}t^k\end{aligned}$$

3.1 Equações Discretas de Primeira Ordem

Seja a equação de diferença linear dada por:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n) \tag{3.-6}$$

onde $f(n)$ e $g(n)$ são funções de $\mathbb{Z}_0^+ \to$Ref(n)$\neq 0$, $\vee n \geq n_0 \geq 0$.

Considere a equação homogênea ($g(n) = 0$) associada à equação (3.1), isto é,

$$x_{n+1} = f(n)x_n$$

.

Para um determinado valor inicial x_{n_0}, n$\geq n_0 \geq 0$, pode-se determinar o valor de x_n, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ da equação (3.4), através do processo iterativo descrito em (3.5). Assim,

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} &= f(n_0)x_{n_0} \\ x_{n_0+2} &= f(n_0+1)x_{n_0+1} = f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} \\ x_{n_0+3} &= f(n_0+2)x_{n_0+2} = f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} \end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$x_n = f(n-1)f(n-2)...f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} = \prod_{i=n_0}^{n-1} f(i)x_{n_0}$$

Aplicando o processo iterativo à equação (3.3), também pode-se determinar o valor de x_n para um determinado valor inicial x_{n_0}. Logo,

$$x_{n_0+1} = f(n_0) + g(n_0)$$

$$\begin{aligned} x_{n_0+2} &= f(n_0+1)x_{n_0+1} + g(n_0+1) = f(n_0+1)[f(n_0)x_{n_0} + g(n_0)] + g(n_0+1) \\ &= f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n_0+3} &= f(n_0+2)x_{n_0+2} + g(n_0+2) = f(n_0+2)[f(n_0+1)f(n_0)x_0 + f(n_0+1) \\
&\quad + g(n_0) + g(n_0) + 1] + g(n_0+2) \\
&= f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+2)f(n_0+1)g(n_0) \\
&\quad + f(n_0+2)g(n_0+1) + g(n_0+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n_0+4} &= f(n_0+3)f(n_0+2)f(n_0+1)f(n_0)x_{n_0} + f(n_0+3)f(n_0+2)f(n_0+1)g(n_0) \\
&\quad + f(n_0+3)f(n_0+2)g(n_0+1) + f(n_0+3)g(n_0+2) + g(n_0+3) \\
&= \prod_{i=n_0}^{3} f(i)x_{n0} + \sum_{k=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{3} f(i)\right]g(k)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$x_n = \prod_{i=n_0}^{n-1} f(i)x_{n0} + \sum_{k=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1} f(i)\right]g(k)$$

Indutivamente,

$$x_{n+1} = \prod_{i=n_0}^{n} f(i)x_{n0} + \sum_{k=n_0}^{n}\left[\prod_{i=k+1}^{n} f(i)\right]g(k)$$

Quando f é constante, diz-se que se tem uma equação de diferenças linear de 1ª ordem com coeficientes constantes. Iremos estudar especificamente o caso em que a função g é constante, isto é, a equação toma a forma

$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad (3.\text{-}20)$$

onde a e b são constantes com $a \neq 0$.

Se $a = 1$, vem

$$x_n = x_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} 1 = x_0 + bn$$

e para $a \neq 1$, tem-se

$$x_n = a^n x_0 + ba^{n-1}\frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}}$$

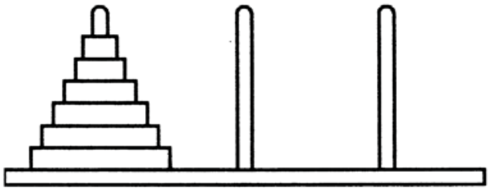
$=a^n x_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}$

Logo a solução para (3.2) é

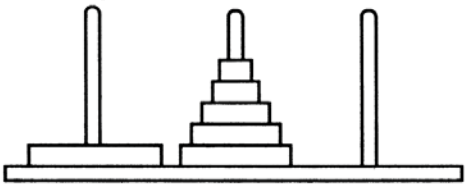
$$x_n = \left\{ a^n x_0 + b\frac{a^n-1}{a-1} \quad \text{se } a \neq 1; x_0 + bn \text{ se } a = 1. \right.$$

Alguns exemplos que ilustram suas aplicações:

1) (Problema da Torre de Hanói) A Torre de Hanói consiste numa base contendo três pinos, em um dos quais estão dispostos n discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo, conforme figura 1.1.



] [Uma posição intermediária]



[Posição inicial dos pinos

O problema é passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação, com o menor número de movimentos para conseguir transferir todos os discos do 1° para o 3°. Podemos encontrar a solução para esse problema, basta descobrir uma relação entre $y(n+1)$ e $y(n)$. Suponha que há $n+1$ discos para serem transferidos. Uma etapa intermediaria essencial a solução é mostrada na figura 1.2. Note que exatamente $y(n)$ movimentos são necessários para obter o arranjo desde que o número mínimo de movimentos necessários para mover n discos do pino 1 para o pino 2 é o mesmo número mínimo de movimentos para mover os discos do pino 1 para o pino 3. Agora um único movimento coloca o maior anel no pino 3 e $y(n)$ são necessários para levar os outros n discos do pino 2 para o pino 3. Logo, somos levados a equação diferença:

$$y(n+1) = y(n) + 1 + y(n)$$

$$y(n+1) = 2y(n) + 1$$

A solução para $y(1) = 1$ é

$$y(t) = 2^t - 1$$

2) Suponha que uma pessoa faça uma aplicação financeira a uma taxa de 5% capitalizada anualmente. Vamos descrever a evolução do saldo que será denotada por $s = s(n)$, em função do tempo n, tomando como hipóteses: (1) não acontecerão novos depósitos, permanecendo fixo o capital inicial e (2) a taxa de capitalização não será revisada ao longo dos anos, permanecendo fixa. Seja $s(0)$ o valor aplicado no instante inicial ($n = 0$). Decorrido o primeiro ano, ou seja, quando $n = 1$ temos

$$s(1) = s(0) + 0,05s(0)$$

Ao final do segundo ano, ou seja, quando $n = 2$ o novo saldo será

$$s(2) = s(1) + 0,05s(1)$$

Para o terceiro ano

$$s(3) = s(2) + 0,05s(2)$$

De forma indutiva, temos:

$$s(n) = s(n-1) + 0,05s(n-1) = 1,05s(n-1); \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

3) Suponha-se que é feito um depósito de R\$ 200 no fim de cada mês num banco. Sabendo que a taxa de juro é de $1,0\%$ ao mês e que inicialmente houve um depósito de R\$ 500, qual a quantidade acumulada ao fim de 20 meses?

Solução: Seja q_n a quantidade acumulada ao fim de n períodos. A quantidade acumulada no fim do período $(n+1)$ é igual à quantidade acumulada no período n com o juro ganho neste período mais o depósito efetuado. A seguinte equação traduz o que se acabou de descrever

$$q_{n+1} = (1 + 0,01)q_n + 200$$

De (3.3), temos que é a resposta é:

$$q_n = 500.1,01^n + 200\frac{1,01^n - 1}{1,01 - 1}$$

$$q_{20} = 500.1,01^{20} + 200\frac{1,01^{20} - 1}{1,01 - 1}$$

$$q_{20} = 5.013,90$$

Assim, ao final de 20 meses a quantia acumulada é de R\$ $5.013,90$.

Capítulo 4

Matemática Financeira

4.1 Capitalização Composta

Consiste em os juros produzidos num período serão acrescidos ao capital inicial e, no período seguinte, também produzirão juros, o chamado juros sobre juros.

Vejamos um exemplo:

José tomou um empréstimo de R\$ $1.000,00$ a uma taxa de 5% ao mês. No primeiro mês, a dívida será de R\$ $1.050,00$ (acréscimo de juros $= 0,05.1000 = 50$). Passado mais um mês, o total da obrigação será de R\$ $1.102,50$ (juros $= 0,05.1050 = 52,50$).

Obs.: Percebe-se que o resultado não é o que muitos esperam, pois pensam que 5% ao mês geram 10% em dois meses, se a capitalização fosse simples. Porém, no exemplo acima, os juros são de $10,25\%$.

Imagine a diferença gerada, utilizando uma taxa maior por um longo período.

4.2 Montante

Na capitalização composta, o montante acumulado, sob uma taxa i, após n períodos, a partir de um capital inicial C, é:

$$M = C(1 + i)^n$$

A fórmula fica demonstrada conforme equação (2.2).

Segue, abaixo, alguns exemplos:

a) Maria contrai um empréstimo de R\$ 500,00 a juros de 8% ao mês. Quanto estará devendo Maria depois de 3 meses?

$$M = 500(1 + 0,08)^3$$

$$M \approx 629,86$$

b) Após 4 trimestres, um investimento terá produzido um montante de R\$ 6.312,40. Qual o capital aplicado, sabendo-se que é capitalizado a 6% ao trimestre?

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$$C = \frac{6312,40}{(1 + 0,06)^4}$$

$$C \approx 5000$$

c) Apliquei R\$ 800,00 e retirei R\$ 1.216,70 após 3 semestres. Qual a taxa de rendimento de minha aplicação?

$$M = C(1+i)^n$$

$$1216,7 = 800(1+i)^3$$

$$(1+i)^3 = \frac{1216,7}{800}$$

$$1 + i = \sqrt[3]{1,520875}$$

$$1 + i = 1,15$$

$$i = 15\%\ (ao\ semestre)$$

d) Por quanto tempo foi aplicado um capital de R\$ $10.000,00$ para que fosse gerado um montante de R\$ $14.802,44$, sob uma taxa de 4% ao mês?

$$M = C(1+i)^n$$

$$14802,44 = 10000(1+0,04)^n$$

$$1,480244 = 1,04^n$$

$$n = \frac{log1,480244}{log1,04}$$

$$n \approx 10\ meses$$

4.3 Equivalência de Capitais

Para se decidir entre comprar à vista ou à prazo, precisamos comparar valores, e para que isto ocorra, as quantias devem se referir ao mesmo tempo. Logo devemos trazer o montante (valor futuro) para o tempo atual considerado que o dinheiro estivesse aplicado a uma taxa i. Como o montante é o produto do capital inicial C pelo fator $(1+i)^n$, e fazendo a inversão, dizemos que o capital inicial (valor presente) é o quociente do montante por $(1+i)^n$.

Vejamos a seguinte situação:

Uma concessionária propõe o pagamento de um veículo em duas formas: 3 prestações mensais de R\$ $19.000,00$ ou 6 prestações mensais de R\$ $10.000,00$. Em ambos os casos, a primeira parcela é paga no ato da compra. Qual a forma mais econômica, se o dinheiro pode ser aplicado a uma taxa de 5% ao mês?

Para determinarmos a melhor opção, vamos trazer o dinheiro para o presente:

1ª opção:

$$C = 19000 + \frac{19000}{1,05}$$

$+$

$$\frac{19000}{1,05^2}$$

$\approx 54.328,80$

2ª opção:

$$C = 10000 + \frac{10000}{1,05}$$

$+$

$$\frac{10000}{1,05^2}$$

$+$

$$\frac{10000}{1,05^3}$$

$+$

$$\frac{10000}{1,05^4}$$

$+$

$$\frac{10000}{1,05^5}$$

$\approx 53.294,77$

Como na 2ª opção o valor presente é menor, logo é a melhor opção.

A Matemática realiza um trabalho social, uma vez que forma a capacidade crítica em suas decisões, como por exemplo, no âmbito financeiro.

4.4 Amortização

É um processo no qual uma dívida é liquidada através de pagamentos periódicos (normalmente mensais).

Sabemos que a equivalência de capitais é o somatório de cada parcela trazida para o presente, ou seja:

$$C = \frac{P}{(1+i)}$$

$+$

$$\frac{P}{(1+i)^2}$$

$+ \ldots +$

$$\frac{P}{(1+i)^n}$$

Podemos observar que a equivalência torna-se mais pratica quando consideramos como a soma dos termos de uma P.G. (progressão geométrica), de razão q, ou seja:

$$S_n = \frac{a_1(q^n 1)}{q-1}$$

Logo,

$$C = \frac{P}{(1+i)}$$

.

$$\frac{[(1+i)^{-1}]^n - 1}{(1+i)^{-1}}$$

=P.

$$\frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

=P.

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

(4.1)

Exemplos: Qual o valor à vista referente ao pagamento de 5 prestações mensais de R\$ $4.000,00$, sabendo-se que a taxa é 3% ao mês?

$$C = 4000.\left[\frac{1-(1+0,03)^{-5}}{0,03}\right] \approx 18.318,83$$

4.5 Plano de aposentadoria ou previdência

Torna-se prudente um indivíduo planejar seu futuro. Uma alternativa são planos de aposentadoria que consistem numa poupança com resgate único a longo prazo, sendo feitos pagamentos periódicos, geralmente mensais.

Utilizando a equação (3.3) e substituindo em (3.4), temos:

$$C = \frac{P.[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$\frac{M}{(1+i)^n}$$

$$=$$

$$\frac{P.[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$M = \frac{P.[(1+i)^{-n}-1]}{i}$$

Exemplo: Pedro desejar comprar um sítio para curtir sua aposentadoria. Ele programou-se a fazer depósitos mensais de R$ 200 durante 30 anos. Qual o montante acumulado para realização de seu sonho, quando Pedro se aposentar, sabendo que o dinheiro está sob uma taxa de $0,5\%$ ao mês?

$$M = 200.\left[\frac{(1+0,005)^{360}-1]}{0,005}\right.$$

$$\left.\right] \approx 200.403,01$$

4.6 Amortização, Empréstimos e Financiamentos

Quando se paga parceladamente uma dívida, para cada pagamento (prestação) realizado, a parcela é composta pelos juros e por parte da dívida, que é amortizada (abatida).

Quando essa dívida não tem finalidade expressa, temos um emrréstimo, por exemplo os empréstimos consignados; Quando há uma destinação específica, fala-se em financiamento, assim como os financiamentos imobiliário e veicular.

No Brasil, os empréstimos e financiamentos de veículos são usuamente calculados pelo Sistema Francês de Amortização, conhecido como Tabela Price (???? - Embora francês, o sistema foi desenvolvido pelo economista inglês Richard Price ????), em que consiste por prestações fixas, constantes.

Teorema 4.1. No sistema francês de amortização, sendo n o número de pagamentos, i a taxa de juros, A_k a parcela de amortização, J_k os juros pagos, P_k a prestação e D_k saldo devedor, temos:

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$S_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$J_k = iD_{k-1}$$

$$A_k = D_k - J_k$$

Demonstração: A primeira fórmula é, simplesmente, a equação (4.1) e as duas últimas são óbvias. Quanto à segunda fórmula, observe que D_k é o saldo devedor, postecipamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos a P_k. Portanto, novamente pela equação (4.1), temos:

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

.

Substituindo o valor de P_k, obteremos a segunda fórmula.

Vejamos algumas aplicações:

a) Seu João, aposentado, deseja comprar um televisor novo que custa R\$ $4.000,00$. Como não dispõe dessa quantia, dirigiu-se ao banco e solicitou um empréstimo consignado. Eis a condição: juros de $3,99\%$ ao mês, para um prazo de 5 anos. Qual a quantia descontada em seu benefício?

$$P = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

=4000

$$\frac{0,0399}{1-(1,0399)^{-60}}$$

=176,47

b) Qual a prestação de um financiamento veicular no valor de R\$ $30.000,00$, para 36 meses, admitindo-se juros de $1,5\%$ ao mês?

$$P = 30000 \frac{0,015}{1-(1,015)^{-36}}$$

=1.084,57

Total pago: R$

$$39.044,52$$

c) Utilizando o exemplo anterior, qual a prestação para 24 meses?

$$P = 30000\frac{0,015}{1-(1,015)^{-24}}$$

=1.497,72

Total pago: R$ $35.945,28$

No primeiro exemplo, percebe-se que o montante pago $(176, 47.60 = 10.580, 20)$ é quase o triplo do dinheiro emprestado. No segundo, com a diminuição do prazo, paga-se quase R$ $3.100,00$ a menos de juros.

Para se financiar um imóvel, o sistema utilizado para é Sistema de Amortização Constante (SAC), como o próprio nome diz, as amortizações são iguais. Diferencia-se da Tabela Price, pelo fato da prestação ser descrescente, em progressão aritmética (P.A.).

Teorema 4.2. No SAC, sendo n o número de pagamentos, i a taxa de juros, A_k a parcela de amortização, J_k os juros pagos, P_k a prestação e D_k saldo devedor, temos:

$$A_k = \frac{S_0}{n}$$

$$D_k = \frac{n-k}{n}$$

S$_0$

$$J_k = iD_{k-1}$$

$$P_k = A_k + J_k$$

Demonstração: Se a dívida S_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é a

$$A_k = \frac{S_0}{n}$$

.

O saldo devedor, após k amortizações, é

$$D_k = D_0 - k\frac{S_0}{n}$$

=

$$\frac{n-k}{n}D_0$$

.

As duas últimas são óbvias.

Como o SAC forma uma sequência de termos em P.A., para se calcular o montante pago, tomamos a fórmula da soma, ou seja,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

.

Segue, abaixo, alguns exemplos:

a) Uma dívida de R\$ $1.000,00$ é paga, com juros de 6% ao mês, em 10 meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização.

Resolução: Como as amortizações A_k são iguais, cada amortização será de $1/10$ da dívida inicial. Logo a planilha será:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	1000
1	160	100	60	900
2	154	100	54	800
3	148	100	48	700
4	142	100	42	600
5	136	100	36	500
6	130	100	30	400
7	124	100	24	300
8	118	100	18	200
9	112	100	12	100
10	106	100	6	-

Para encontrar o montante pago, fazemos:

$$S_{10} = \frac{(160 + 106).10}{2}$$

=1.330

b) João planejar financiar um apartamento de R\$ $180.000, 00$, pagando juros de 1% ao mês, durante 30anos. Quanto terá pago ao final do financiamento?

Resolução: Inicialmente, façamos a tabela de amortização, considerando 360 amortizações:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	180000
1	2300	500	1800	179500
2	2295	500	1795	179000
3	2290	500	1790	178500
4	2285	500	1785	178000
5	2280	500	1780	177500
...	...	...	...	...

Sabendo-se que a última prestação é $P_{360} = 550$, pois trata-se de uma P.A. de razão 5. O montante pago será de

$$S_{360} = \frac{(2300 + 550).360}{2}$$

=513000.

c) Seguindo o exemplo acima, se João reduzisse o prazo para 25 anos, quanto pagaria?

Resolução: Tratando de 300 amortizações, temos:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	180000
1	2400	600	1800	179400
2	2394	600	1794	178800
3	2388	600	1788	178200
4	2382	600	1782	177600
5	2376	600	1776	177000
...	...	...	...	...

Tendo a última prestação como $P_{300} = 660$. O montante pago será de

$$S_{300} = \frac{(2400 + 660).300}{2}$$

=455000.

Capítulo 5

Considerações Finais

Aos exemplos desenvolvidos problematizam questões financeiras sobre compra à vista x compra a prazo, e mensuram aplicações financeiras, financiamento de veículos e imóveis, prazo para pagamento.

Situações como essas, apresentadas nos exemplos, estão presentes na vida de todas as pessoas e que costumam deixar dúvidas diante de decisões de compras, de escolhas sobre o plano ou oferta mais conveniente e para a tomada da melhor decisão, é importante considerar elementos como taxa de juros e disponibilidade do comprador.

Para uma conclusão viável e de melhor opção sob o ponto de vista econômico, usamos conceitos da Matemática Financeira, como fator de correção, valor do dinheiro no tempo (valor presente e valor futuro), amortização, que são desconhecidos e induzem a erros na condução da Educação Financeira.

As decisões que envolvem compras ou investimentos estão apoiadas no fato do valor que o dinheiro terá ou teve em outra data, levando em conta a taxa de juros que incide sobre os valores aplicados.

É oportuno situar que o uso do crédito, seja no uso do cartão de crédito e/ou crediário (o famoso carnê), acesso a empréstimos consignados, tem crescido constantemente devido a oferta e facilidades para adquirí-lo ou contratá-los. Contudo, as informações quanto à forma de uso ainda não são claras para os consumidores, pois se tem a taxa de juros como uma das mais altas, principalmente no Brasil, e essa realidade deixam muitas dúvidas para os consumidores, como a utilização do crédito rotativo, pagamento do valor mínimo, acúmulo de prestações, carência, além de juros exorbitantes.

Os conhecimentos adquiridos nesses exemplos servirão de alerta e conscientização do uso do crédito.

Utilizar o crédito, sem os conhecimentos básicos da Matemática Financeira pode comprometer de sobremaneira o orçamento familiar e principalmente pode se transformar em um grande problema para o consumidor, que não souber controlar os gastos com pagamentos efetuados. Neste contexto, metas e objetivos financeiros somente podem ser atingidos com planejamento, equilíbrio de receitas e despesas, poupança (fundo de reserva) para concretização de um sonho (ou desejo) e até emergências, evitando comprar por impulso e usar somente quando necessário.

Esses conhecimentos podem ser adquiridos na Educação Financeira, propostos nesse trabalho e subsidiada pela Matemática Financeira. Financiamentos com prazo longo podem ficar bem mais onerosos financeiramente, porem a tentação da compra em mais prestações é grande, quando a prestação cabe no bolso, a compra e o objeto de desejo do indivíduo e as parcelas propostas são a perder de vista. Todas essas facilidades induz o consumidor a comprar em mais parcelas, principalmente quando maior e o prazo de pagamento e menor será o desembolso financeiro a cada mês.

Cabe atentar nessa atividade, que a estratégia de mais prestações custará caro, pois ao esticar os prazos, se gasta muito mais com o pagamento de juros.

Na análise do prazo menor para pagamento, caso o consumidor decida comprar o produto/serviço, constata-se que quanto menos prestação for paga menos juros também serão pagos.

Entretanto, o que fazer, se o indivíduo não pode comprar à vista ou no menor prazo possível? A orientação é para economizar, aplicando uma parte da renda e esperar para realizar o sonho da compra do veículo ou então adquirir o produto/serviço com menor preço. Aproveitando essa questão da aplicação financeira, é importante ressaltar que esse efeito que o tempo tem sobre o dinheiro pode ser um ponto positivo para as pessoas, caso ele opte em aplicar o dinheiro em longo prazo.

Essas opções de financiamentos e oportunidades de investimentos financeiros podem ser alternativas onde sejam buscadas opções viáveis e menos onerosas de efetuação de despesas e compras, com o intuito de promover conhecimento e despertar a consciência para as próprias finanças.

A ânsia do consumo influencia as tomadas de decisão, que sem planejamento prévio utilizam a contabilidade mental, e de forma imediatista compram simplesmente por que a parcela "cabe no bolso", muitas vezes sem saberem que estão pagando o dobro ou mais do preço do produto/serviço.

O uso da Educação Financeira, através dos conceitos de Matemática Financeira, contribui para a formação de cidadãos conscientes, capazes de discernir como utilizar corretamente as finanças.

Referências Bibliográficas

[1] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: volume único*. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2005.

[2] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. *Matemática: Uma nova abordagem*. São Paulo: FTD, 2000.

[3] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 7ed. São Paulo: Atual, 1993.

[4] KELLEY, Walter G.; PETERSON, Allan C. *Difference Equation*. An Introduction with Applications. San Diego: Harcourt, 2001.

[5] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio - volume* 2. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] LUIS, Rafael Domingos Garanito. *Equações de diferença e aplicações*. Universidade da Madeira. Dissertação para mestrado. 232p. Funchal, 2006.

[7] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática* 1. 2ed. São Paulo: Moderna, 2010.