UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARABA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio

Magno Afonso Martins Barbosa

Orientador: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda

Campina Grande - PB
Dezembro/2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARABA
Programa de Pós-Graduação em Matemtica
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio

por

Magno Afonso Martins Barbosa †

Dissertação Apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

B238p Barbosa, Magno Afonso Martins.
Proposta do ensino de integrais de funções no Ensino Médio [manuscrito] / Magno Afonso Martins Barbosa. - 2016.
78 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda, Departamento de Matemática".

1. Áreas. 2. Cálculos. 3. Integral. 4. Ensino de Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 371.12

Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio

por

Magno Afonso Martins Barbosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos - UFPB

Aldo Trajano Louredo

Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo - UEPB

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda - UEPB
Orientador

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dezembro/2016

Dedicatória

METADE

Que a força do medo que tenho não me impeça de ver o que anseio.
Que a morte de tudo em que acredito não me tape os ouvidos e a boca.
Pois metade de mim é o que eu grito a outra metade é silêncio.
Que a música que ouço ao longe seja linda ainda que tristeza.
Que a mulher que amo seja pra sempre amada mesmo que distante.
Pois metade de mim é partida a outra metade é saudade.
Que as palavras que falo não sejam ouvidas como prece
Nem repetidas com fervor, apenas respeitadas,
Como a única coisa que resta a um homem inundado de sentimentos.
Pois metade de mim é o que ouço, a outra metade é o que calo.
Que a minha vontade de ir embora se transforme na calma e paz que mereço.
Que a tensão que me corrói por dentro seja um dia recompensada.
Porque metade de mim é o que penso, a outra metade é um vulcão.
Que o medo da solidão se afaste,
E o convívio comigo mesmo se torne ao menos suportável.
Que o espelho reflita meu rosto num doce sorriso,
Que me lembro ter dado na infância.
Pois metade de mim é a lembrança do que fui. A outra metade não sei.
Que não seja preciso mais do que uma simples alegria
Pra me fazer aquietar o espírito,
E que o seu silêncio me fale cada vez mais.Porque metade de mim é abrigo.
A outra metade é cansaço.
Que a arte nos aponte uma resposta, mesmo que ela mesma não saiba,
E que ninguém a tente complicar.
Pois é preciso simplicidade para fazê-la florescer
Pois metade de mim é platéia. A outra metade é canção.
Que a minha loucura seja perdoada
Pois metade de mim é amor
E a outra metade também.

Oswaldo Montenegro

Esta mensagem é direcionada como homenagem aos meus pais, irmãos e em especial à minha esposa Jucileny e aos meus filhos: Magno Victor, Matheus e Mayara pela grandeza com que soube compreender o sentido de minha luta apoiando-me nos momentos mais difíceis no decorrer deste curso, destacando também especialmente meus amigos e irmãos Manoel Sátiro e Josemberg por ajudarem de forma incontestável na conquista de meu objetivo e todos os outros que de alguma forma contribuíram para conclusão desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a **DEUS** pela graça concedida de concluir este curso, pois sempre me deu força, equilíbrio e sabedoria para prosseguir nesta caminhada.

A minha querida esposa, **Jucileny de Morais Felisardo**, que me apoiou, incentivou e compreendeu os momentos aos quais estive ausente.

Aos meus pais, **Manoel Martins Barbosa e Maria do Carmo Barbosa** aos meus irmãos, **Marcio, Marciano, Marcia, Magna** e ao meu cunhado **Amarildo** pela força dada para que eu nunca desistisse dos meus ideais.

Aos meus amigos que demonstraram paciência, solidariedade, companheirismo, auxílio, parceria e alegria na troca de informações, materiais e horas de estudo no decorrer do curso. De maneira especial a **Manoel Sátiro** e **Josemberg** pelos momentos de empenho e dedicação que passamos juntos.

Ao professor **Dr. Manuel Antolino Milla Miranda** pela orientação e os ensinamentos ministrados e, sobretudo pelo estímulo as atividades profissionais.

A UEPB, particularmente na pessoa do professor Ms. Onildo dos Reis Freire pela colaboração na conquista dos meus objetivos.

Aos professores **Dr. Aldo Trajano Louredo** e **Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos** pelo apoio recebido.

E aos demais professores que de alguma forma, contribuíram na elaboração desta Dissertação.

Agradeço também à Sociedade Brasileira da Matemática – SBM pelo oferecimento desde Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa de estudo.

.

“Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”
Isaac Newton (Carta para Robert Hooke - 15/02/1676).

Resumo

O objetivo deste trabalho é propor um método para o ensino de integrais de funções no Ensino Médio. Este trabalho é constituído das seguintes partes. Primeiro, desenvolve-se uma breve introdução da evolução do conceito de integral de uma função, começando com Arquimedes e chegando a Newton e Leibniz. Segundo, estuda-se os conceitos de limite, continuidade, derivação e integração de uma função. Finalmente, explicamos nosso método o qual foi aplicado aos alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Professor Antonio Oliveira de Campina Grande. Os resultados obtidos superaram nossas expectativas e pensamos que nosso método pode ser aplicado nas diferentes escolas do Ensino Médio.

PALAVRAS CHAVES: Áreas, Cálculo, Integral e Aplicações.

Abstract

The objective of this work is to provide a method for teaching of integral of functions in the high school. This work is constituted constituting of the following parts. First, we develop a brief introduction of the evolution of the concept of integral of a function, beginning with Arquimedes and arriving to Newton and Leibniz. Second, we study the limit, continuity, differentiation and integration of a function. Finally, we explained our method which was applied to the students of the Professor Antonio Oliveira State School of Campina Grande. The obtained results exceeded our expectations and we think that our method can be applied to other schools.

KEY WORDS: Areas, Calculus, Integral and Applications.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O estudo do cálculo de áreas vem muito antes dos tempos da Grécia antiga. Mas desta época destaca-se Arquimedes, que com o método de exaustão calculou diversas áreas de figuras planas.

Muito tempo depois, no século XVII, Newton e Leibniz criaram o Cálculo Diferencial e Integral que permite o cálculo de áreas de figuras planas que não admitem quadratura. Notamos que Issac Newton (Woolsthorpe Manor, Inglaterra, 4 de janeiro de 1643 – Kensington, 31 de março de 1727) foi um matemático e físico inglês e Gottfried Leibniz (Leipzip, 1 de julho de 1646 – Hanôver, 14 de novembro de 1716) foi um matemático e filósofo alemão.

O calculo diferencial começou com o intuito de calcular taxas de variações, possibilitando determinar os coeficientes angulares de curvas, calcular grandezas tais como a velocidade e a aceleração de corpos em movimento, etc.

Já o calculo integral começou com o intuito de determinar uma função a partir de informações a respeito de suas taxas de variações, possibilitando calcular áreas de regiões irregulares no plano, medir o comprimento de curvas e determinar o volume e massa de sólidos arbitrários.

No ensino médio muitos livros trazem nos seus últimos capítulos uma noção de cálculo falando sobre limites e derivadas, mas de uma maneira muito abstrata, venho por meio desta proposta completar o conteúdo de cálculo com o estudo de integral e além disso mostrar a praticidade do conteúdo de integrais.

Agora com a proposta de Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio, procuramos aplicar os resultados de integração no cálculo de áreas de figuras planas não regulares.

Para obtenção do nosso objetivo aplicamos a seguinte estratégia: Primeiro calculamos a área de figuras planas não regulares como limite de áreas de figuras planas conhecidas, isto é, como limite das somas de Riemann. Nesta tarefa fomos ajudados pelo Software Geogebra auxiliando na construção e animação de figuras. A seguir desenvolvemos rudimentos de limites, derivação e integração de funções, notadamente de polinômios. Finalmente, aplicamos os resultados de integração de polinômios, calculamos as mesmas áreas das figuras planas estudadas na primeira parte. A potência do cálculo integral foi incontestável e foi muito comemorada pelos alunos, pois na primeira parte tivemos que fazer muitas contas tornando o cálculo da área muito cansativa e na segunda, os resultados foram obtidos rapidamente numa linha mostrando a praticidade da aplicação do conteúdo.

Para avaliar os conhecimentos transmitidos desenvolvemos exercícios e aplicamos uma avaliação para verificarmos o nível de aprendizado da turma. Os resultados obtidos foram colocados em uma tabela e posteriormente em um gráfico, sendo feita uma análise e comprovamos que os resultados superaram nossas expectativas e pensamos que nosso método pode ser aplicado sem dificuldades em outras escolas.

Capítulo 2

Introdução Histórica do Surgimento do Estudo do Cálculo de Áreas

Uma das ferramentas utilizada para o cálculo de áreas e volumes é o método da exaustão inicialmente usado por Eudoxus (408 - 355 a.C.) para aproximar duas quantidades desiguais, tanto como se deseje, pelo esgotamento de suas diferenças, este método evita qualquer recurso ao infinito e tem como base um duplo raciocínio por redução ao absurdo e logo depois Arquimedes (287 - 212 a.C.) ampliou esta idéia, levando seu estudo a se aproxima do cálculo integral, com este mesmo intuito Bonaventura Cavalieri também deu uma enorme contribuição com o princípio de Cavalieri e finalizando este feito maravilhoso veio à criação do Cálculo através de Newton e Leibniz.

2.1 Arquimedes de Siracusa

Arquimedes conhecido como Arquimedes de Siracusa (Siracusa, 287 a.C. – 212 a.C.) além de matemático era físico, astrônomo, engenheiro e inventor.

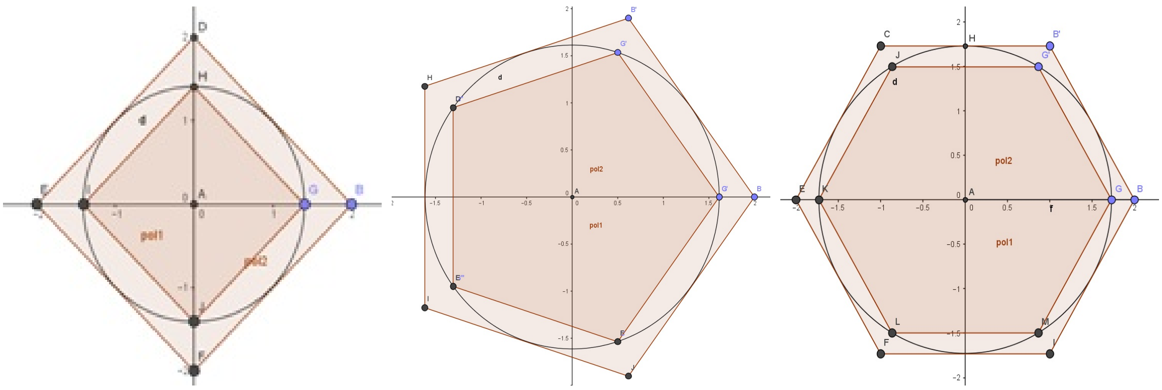
Várias fontes históricas informam que Arquimedes nasceu em Siracusa onde passou a maior parte de sua vida e morreu nesta cidade. Arquimedes é considerado um dos criadores de dois dos ramos da Física o da estática e o da hidrostática. Tem contribuições notáveis em diversas áreas como a matemática, a física e a engenharia.

Arquimedes morreu em 212 a.C., durante a captura de Siracusa pelos romanos. Em uma das versões mais comentadas sobre sua morte, fala-se que ele foi morto por desobediência a um soldado romano, a mando do comandante Marcelo, enquanto estudava um problema geométrico.

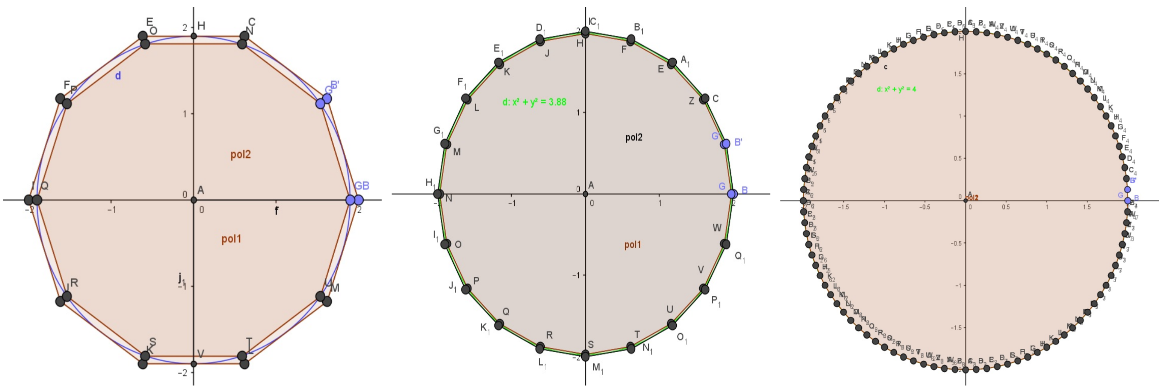
Embora poucos detalhes de sua vida sejam conhecidos, suas contribuições matemáticas são suficientes para que ele seja considerado o maior matemático da antiguidade, e um dos maiores de todos os tempos.

2.1.1 Utilização do Método da Exaustão por Arquimedes (Cálculo aproximado de π)

Em um de seus trabalhos, Arquimedes desenvolveu um método para encontrar áreas e volumes utilizando os infinitesimais que é bastante parecida com o cálculo integral utilizado hoje, onde ele através de somas parciais de uma série ou de alguns termos de uma sequencia, consegue chegar a um valor aproximado do real. Com este método, ele encontrou comparando as áreas de dois poligonos regulares um inscrito e outro circunscrito a um mesmo circulo, um valor aproximado de π e uma aproximação para a área de um circulo, mostrando que cada vez mais que aumentava o número de lados dos poligonos tanto o valor da área do circulo como o valor de π se aproximava do ideal, com este procedimento chegou até um polígono regular, de 96 lados cada um. Esta técnica é conhecida como o método da exaustão. Chegando a uma valor para π entre $3\frac{10}{70}$e $3\frac{10}{71}$. Ver o método de Arquimedes nas figuras abaixo:



(a) $n = 4$ (b) $n = 5$ (c) $n = 6$



(d) $n = 10$ (e) $n = 20$ (f) $n = 96$

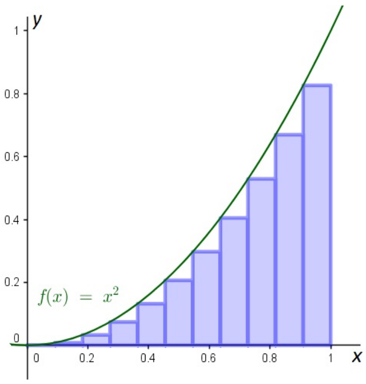
2.1.2 Axioma de Arquimedes

Considere duas grandezas desiguais. Da grandeza maior se subtrai uma parte maior que a metade dela, do resto se subtrai uma parte maior que a metade dela e assim de forma sucessiva. Depois de um número finito de subtrações o resto que fica será menor que a menor das duas grandezas consideradas.

Este axioma é um aperfeiçoamento do método de Eudoxo. O axioma de Arquimedes esta descrito num palimpsesto descoberto em 1906, o qual é uma cópia feita no século X do trabalho de Arquimedes sobre a quadratura da parábola.

Resolução do problema da área da região S determinada pela parábola $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ feito por Arquimedes.

Inicialmente utilizando os retângulos abaixo da parábola no intervalo $[0, 1]$ temos:



Sendo $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ os subintervalos de $[0, 1]$ temos:

$$\begin{aligned} S_n &= 0^2 \cdot \tfrac{1}{n} + \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{n} + \left(\tfrac{2}{n}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{n} + \ldots + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{n} \\ &= \tfrac{1}{n^3} \cdot \left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right]. \end{aligned}$$

A soma dos quadrados dos $(n - 1)$ primeiros números naturais foi calculado por Arquimedes da seguinte forma:

Note que,

$(k + 1)^3 - k^3 = 2k^3 + 3k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ \vdots &= \vdots \\ n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} n^3 - 1 &= 3 \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] + 3 \cdot [1 + 2 + \ldots + (n-1)] + (n-1) \\ &= 3 \cdot \sigma_n + 3 \cdot \tfrac{(n-1)n}{2} + (n-1), \end{aligned}$$

onde,

$$\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2.$$

Fazendo os cálculos obtém-se

$$\sigma_n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}.$$

Assim,

$$S_n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3}.$$

Note que,

$$S_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right),$$

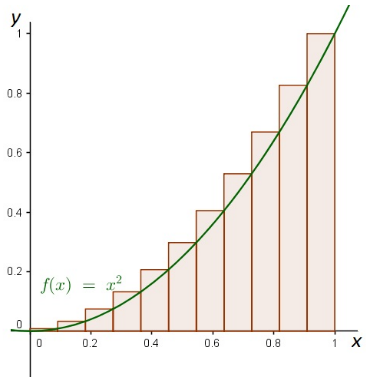
como $\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right) > 0$, vem que,

$$S < \frac{1}{3}.$$

Daí, Arquimedes decidiu que

$$S_n < S \leq \frac{1}{3}.$$

Também se utilizarmos a soma $\widetilde{S_n}$ das áreas dos retângulos que estão acima da parábola no intervalo $[0,1]$, obtém-se:



$$\begin{aligned}\widetilde{S_n} &= \left(\tfrac{1}{n}\right)^2\cdot\tfrac{1}{n} + \left(\tfrac{2}{n}\right)^2\cdot\tfrac{1}{n} + \ldots + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2\cdot\tfrac{1}{n} + \left(\tfrac{n}{n}\right)^2\cdot\tfrac{1}{n}\\ &= \tfrac{1}{n^3}\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right].\end{aligned}$$

Usando a notação temos:

$$\widetilde{\sigma_n} = 1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2.$$

Resulta da conta acima,

$$\widetilde{\sigma_n} = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} + n^2.$$

Portanto,

$$\widetilde{\sigma_n} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Assim,

$$\widetilde{S_n} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3},$$

ou equivalentemente,

$$\widetilde{S_n} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

Como $\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)>0$, vem que,

$$\widetilde{S_n}>\frac{1}{3}.$$

Daí, Arquimedes decidiu que,

$$\widetilde{S_n}<S\geq\frac{1}{3}.$$

Como, $S\leq\frac{1}{3}$ e $\widetilde{S_n}\geq\frac{1}{3}$, Arquimedes concluiu que $S=\frac{1}{3}$. ■

O exemplo apresentado acima é um desenvolvimento de uma descrição sucinta do trabalho de Arquimedes encontrado em Pierre Dugac, Histoire de I'Analyse, Vuibert, Paris, 2003.

2.2 Bonaventura Cavalieri

Francesco Bonaventura Cavalieri (Milão, 1598 - Bolonha, 1647) foi um matemático e astronômo italiano um dos discípulos de Galileu, que também era um sacerdote jesuita.

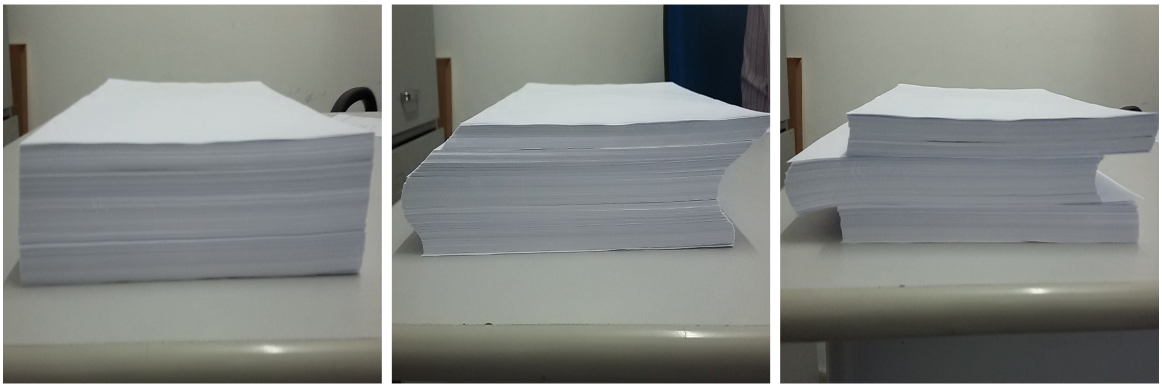
Chamava-se Francesco Cavalieri, nasceu em Milão, Itália, onde iniciou seus estudos, em 1615 tornou-se Jesuíta e assumiu o nome de Bonaventura Cavalieri. Depois transferiu-se para estudar filosofia e teologia em Pisa onde se interessou por matemática ao conhecer Galileu por intermédio do Cardeal Benedito Castelli, tornando-se um dos discípulos de Galileu no estudo da geometria, inventor do método dos indivisíveis.

Bonaventura Cavalieri completou o manuscrito dos seis primeiros livros sobre os indivisíveis e o apresentou aos Lordes de Bolonha. Ele tem como a sua obra principal a Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos, publicada em 1635 envolvendo quantidades infinitamente pequenas, utilizando o mesmo raciocínio de Arquimedes, diferenciado apenas pelas demostrações de cada um. Cavalieri desenvolveu um método que foi bastante utilizado na época e que seria substituído pelo Cálculo Integral. Bonaventura Cavalieri faleceu no ano de 1647 em Bolonha, deixando um imenso legado, dentre eles o Princípio de Cavalieri.

2.2.1 Principio de Cavalieri

O tratado de Cavalieri considera que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado por uma infinidade de seções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas.

Um exemplo prático é colocarmos duas resmas de papel ofício, sendo uma organizada formando um prisma retangular reto e outra deixando suas laterais não alinhadas, daí teremos dois sólidos com o mesmo volume, porém com formatos diferentes, pois os dois sólidos são formados com folhas do mesmo formato, tamanho, espessura e quantidades iguais. Ver figuras abaixo:



Sólidos formados com duas resmas de papel ofcio cada um

Os Princípios de Cavalieri podem ser enunciados da seguinte forma:

(1) Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão r é constante, então, a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante r. E isso nos leva a dizer que as áreas de uma porção é r vezes a área da outra porção.

(2) Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos seções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. Em outras palavras: dois sólidos com a mesma altura têm o mesmo volume se seccionados por um plano paralelo ao plano onde estão assentados, geram áreas iguais.

O que é feito no Princípio de Cavalieri é uma comparação entre dois sólidos. Mas, temos que escolher convenientemente esses sólidos para obtermos resultados satisfatórios. Como estes princípios não estavam suficientemente embasados, eles sofreram muitas críticas, no entanto foram uma das principais motivações do que hoje conhecemos como cálculo integral, facilitando a definição de integral.

2.3 Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz

Newton descobre o Cálculo estudando a velocidade (fluxão) e aceleração de uma particular cujo movimento (fluente) é descrito por uma curva. Leibniz chega ao Cálculo analisando a reta tangente a uma curva.

Isaac Newton (Woolsthorpe Manor, Inglaterra, 1643 – Kensington, 1727) foi um matemático, físico, astrônomo, filósofo, teólogo e cientista inglês e Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzip, 1646 – Hanôver, 1716) foi um matemático, filósofo, teólogo e cientista alemão. Eles juntaram todas as teorias anteriormente estudadas sobre os indivisíveis através de Barrow, Gregory, Cavalieri, Pascal, Descartes e outros, organizaram e as colocaram em seus trabalhos com dois direcionamentos um encabeçado por Newton direcionando seus estudos a aplicação à física estudando a velocidade e a aceleração, para Newton as quantidades geométricas são geradas por movimentos contínuos, esta quantidade gerada ele a chamava de fluxo, por isso seu trabalho ficou conhecido como método dos fluxos, um manuscrito de Newton de 1666 descreve de maneira completa este método. O outro encabeçado por Leibniz que aplicou para encontrar diferencias de expressões, o uso que ele fazia de diferenciais ficou ilustrado de maneira clara numa carta escrita a John Wallis em 1699, para o fluxo de Newton, Leibniz usava dx/dy. Assim a descoberta do Cálculo por sua vez foi direcionada aos dois, pois chegaram de maneiras distintas, independentes e simultaneamente a invenção do cálculo, o que conhecemos hoje como o teorema fundamental do cálculo.

A partir do descobrimento de Leibniz e Newton, muitos matemáticos contribuíram de forma direta ou indireta, para o contínuo desenvolvimento do cálculo.

Capítulo 3

Limite e Continuidade de Funções

Após a descoberta do cálculo por Newton e Leibniz, outros matemáticos contribuiram para o desenvolvimento do cálculo. Neste capítulo mostraremos de uma forma mais abrangente o avanço do cálculo, iniciando pelo estudo dos limites de uma função e suas propriedades, bem como a continuidade de funções, mostrando a importância deste conteúdo na construção e elaboração desta proposta de ensino.

3.1 Limite de Funções

Intuitivamente, dizemos que uma função $f(x)$ tem limite L quando x tende para b, se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de x, $x \neq b$ suficientemente próximos de b.

Com efeito, suponhamos que $f(x)$ é uma função real e que b é um número real. A expressão:

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

significa que $f(x)$ se aproxima tanto de L quanto quisermos, quando se toma x suficientemente próximo de b. Quando tal acontece dizemos que "o limite de $f(x)$, à medida que x se aproxima de b, é L". Note-se que esta afirmação pode ser verdadeira mesmo quando $f(b) \neq L$, ou quando a função $f(x)$ nem sequer está definida em b.

Definição 3.1.1 *Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto I, contendo b, exceto possivelmente no próprio b. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de b é L, e escrevemos:*

$$L = \lim_{x \to b} f(x)$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - b| < \delta$. Ou, usando a notação simbólica:

$$L = \lim_{x \to b} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I; 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 3.1.2 Usando a definição de limites, provar que $\lim\limits_{x \to 2} (5x - 3) = 7$.

Solução: De acordo com a definição de limites devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$,existe um $\delta > 0$, tal que $|(5x-3)-7| < \varepsilon$ sempre que $\varepsilon < |x-2| < \delta$. O exame da desigualdade envolvendo ε proporciona uma chave para a escolha de δ. As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\begin{aligned} |(5x-3)-7| < \varepsilon &\Rightarrow |5x-10| < \varepsilon \Rightarrow |5(x-2)| < \varepsilon \\ 5\,|x-2| < \varepsilon &\Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned}$$

A última desigualdade nos sugere a escolha do δ. Fazendo $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, vem que:

$$|(5x-3)-7| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x-2| < \delta.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2} (5x-3) = 7$. ▲

Proposição 3.1.3 (Unicidade do Limite) *Se* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L_1$ *e* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L_2$, *então* $L_1 = L_2$.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ arbitrátrio. Como $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L_1$, existe um $\delta_1 > 0$, tal que $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 < |x-b| < \delta_1$. Como $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L_2$, existe um $\delta_2 > 0$, tal que $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 < |x-b| < \delta_1$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 < |x-b| < \delta$.

Seja x tal que $0 < |x-b| < \delta$. Então podemos escrever :

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, temos $|L_1 - L_2| = 0$ e, portanto $L_1 = L_2$. ■

Propriedade dos Limites: Se $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b} g(x)$ existem, e seja k um número real qualquer, então

(a) $\lim\limits_{x\to b} k = k$.

(b) $\lim\limits_{x\to b} x = b$.

(c) $\lim\limits_{x\to b} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to b} f(x) \pm \lim\limits_{x\to b} g(x)$.

(d) $\lim\limits_{x\to b} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x\to b} f(x)$.

(e) $\lim\limits_{x\to b} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to b} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to b} g(x)$.

(f) $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to b} f(x)}{\lim\limits_{x\to b} g(x)}$, se $\lim\limits_{x\to b} g(x) \neq 0$.

Proposição 3.1.4 *Seja* $p(x)$ *o polinômio* $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, *com* $b_n, b_{n-1}, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$. *Considere* $a \in \mathbb{R}$. *Então* $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$.

Demonstração: Antes de provarmos esta proposição, provaremos que $\lim\limits_{x\to a} x = a$. É trivial e verdade, pois, dado um $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\varepsilon = \delta$ e temos:

$$0 < |x-a| < \varepsilon, \quad \text{então} \quad |x-a| < \varepsilon.$$

Provamos agora que $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$. De fato, aplicando as propriedades dos limites obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a} (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) \\
&= \lim_{x\to a} b_n x^n + \lim_{x\to a} b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} b_1 x + \lim_{x\to a} b_0 \\
&= b_n \left(\lim_{x\to a} x^n\right) + b_{n-1}\left(\lim_{x\to a} x^{n-1}\right) + \ldots + b_1 \left(\lim_{x\to a} x\right) + b_0 \\
&= b_n \left(\lim_{x\to a} x\right)^n + b_{n-1}\left(\lim_{x\to a} x\right)^{n-1} + \ldots + b_1 \left(\lim_{x\to a} x\right) + b_0.
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} x = a$ temos:

$$\lim_{x\to a} p(x) = b_n (a)^n + b_{n-1} (a)^{n-1} + \ldots + b_1 (a) + b_0.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$. ■

Exemplo 3.1.5 Calcule o valor dos seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 2x + 7)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3+x^2-3x+5}{x^2-4}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2}$.

Solução:
(a) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 2x + 7) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 - \lim\limits_{x\to 3} 2x + \lim\limits_{x\to 3} 7 = 3^2 - 2\cdot 3 + 7 = 9 - 6 + 7 = 10.$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3+x^2-3x+5}{x^2-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+x^2-3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4)} = \frac{2\cdot 1^3+1^2-3\cdot 1+5}{1^2-4} = \frac{2+1-3+5}{1-4} = -\frac{5}{3}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2}$, como $\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$, não podemos aplicar a propriedade do quociente, mas este limite pode ser escrito de forma mais simples, ou seja,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x-4) = 2-4 = -2. \quad \blacktriangle$$

3.2 Continuidade de Funções

Definição 3.2.1 *Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a) *f é definida no ponto a.*

(b) $\lim_{x \to a} f(x)$, *existe.*

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se f não verifica qualquer das condições da definição, f é dita descontínua em a.

Propriedades: Sejam f e g funções contínuas no ponto a. Então

(i) $f + g$ é contínua em a.

(ii) $f - g$ é contínua em a.

(iii) $f \cdot g$ é contínua em a.

(iv) $\frac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Estas afirmações seguem das propriedades dos limites.

1. Uma função polinomial é contínua para todo número real.

2. Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.

As demonstrações destes itens seguem da proposição 3.1.4.

Exemplo 3.2.2 Verificar se as funções são contínuas nos pontos determinados.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & se\ x \neq 2 \\ 4, & se\ x = 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & se\ x \neq 1 \\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}$

Solução: (a) Primeiramente veremos se a função está definida no ponto a, $f(2) = 4$. Verificamos se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Agora observamos que se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2).$$

Como as três condições foram satisfeitas, logo a função $f(x)$ é contínua em $x = 2$.
(b) Primeiramente veremos se a função está definida no ponto a, $f(1) = 1$. Verificamos se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Agora observamos que se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1).$$

Como a terceira condição não foi satisfeita, logo a função $f(x)$ não é contínua em $x = 1$, ou ainda, $f(x)$ é descontínua em $x = 1$. ▲

Capítulo 4

Derivada de uma Função

A descoberta do cálculo veio com Newton através do estudo das variações de algumas aplicações na Física e com Leibniz analisando e estudando a reta tangente a uma curva. Neste capitulo abordaremos inicialmente a velocidade instantânea método utilizado por Newton e o problema da reta tangente método utilizado por Leibniz, tais métodos fizeram com que a descoberta do cálculo fosse atribuída aos dois, que chegaram ao mesmo resultado de maneiras independentes. Assim procuramos mostrar também o estudo das derivadas de funções e suas propriedades, como suas aplicabilidades no contexto ensino aprendizagem, visto que este estudo e de suma importância para o desenvolvimento de toda a nossa proposta de ensino, levando o leitor a construir suas próprias definições e aplicações.

4.1 Velocidade Instantânea

Suponha que uma bola é solta do alto de um edifício de 10 andares. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

Se a distância percorrida pela bola após t segundos for denotada por $s(t)$ e medida em metros, então podemos representá-la por $s(t) = 4,9t^2$.

A velocidade média da bola no intervalo $[t_0, t_1]$ é dada por:

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{4,9(t_1)^2 - 4,9(t_0)^2}{t_1 - t_0}.$$

Agora suponha que t_0 é fixado e t_1 se aproxima cada vez mais de t_0, mais precisamente $t_1 = t_0 + h$ com $h \to 0$, então a velocidade instantânea da bola, ou simplesmente, velocidade no instante t_0 é dada por

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{(t_0 + h) - t_0}.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{4,9(t_0+h)^2-4,9(t_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{4,9(2t_0h+h^2)}{h} \\ &= 9,8t_0. \end{aligned}$$

Assim a velocidade da bola no instante t_0 é dada por $v(t_0) = 9,8t_0$. Em particular a velocidade da bola após $t_0 = 5$ segundos é dada por

$$v(s) = 9,8 \cdot 5 = 49m/s.$$

Em geral, se $s(t)$ é a função posição de um objeto, então a velocidade deste objeto no tempo t_0 é definida por:

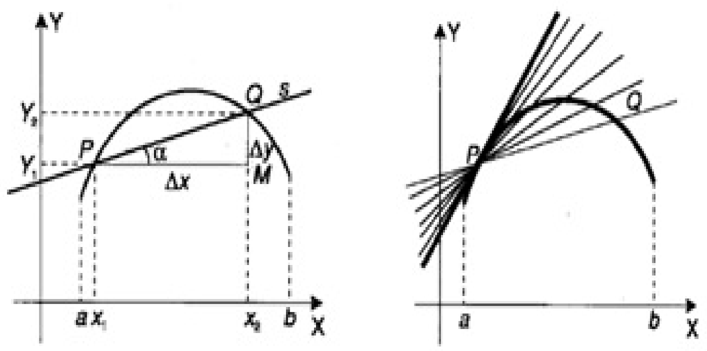
$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h},$$

se tal limite existir.

4.2 Problema da Tangente

O problema da tangente consiste em encontrar a equação da reta tangente passando por um certo ponto de uma curva que é o gráfico de uma função $y = f(x)$.

O gráfico abaixo motiva a obtenção da reta tangente em $P(x_1, y_1)$.



(a) Reta Secante PQ (b) Reta tangente em P

Fonte: FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A)

Intuitivamente percebemos que quando $x_2 = a+h$ aproxima de $x_1 = a$, então os pontos $f(a+h)$ e $f(a)$ onde as secantes cortam a curva e ficam cada vez mais próximas e assim estas secantes se aproximam cada vez mais da tangente em $x_1 = a$.

Define-se a reta tangente que passa por $P(a, f(a))$ como a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

caso tal limite existir.

Do exposto, observa-se que a velocidade de um objeto no tempo t_0 é um conceito equivalente ao coeficiente angular da reta tangente que passa pelo ponto $P(a, f(a))$ de uma curva que é o gráfico da função $y = f(x)$.

4.3 Derivada de uma função

Nesta secção anunciaremos o conceito de derivadas e algumas de suas propriedades.

Definição 4.3.1 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalo aberto, e $x_0 \in I$. Diz-se que f é derivável em x_0 se o limite*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existir. Nesse caso $f'(x_0)$ é denominada a derivada de f em x_0.

Note que a definição acima é equivalente a

$$f'(x_0) = \lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Se uma função é derivável em todos os pontos de I diz-se que f é derivável em I.

Definição 4.3.2 *Dada uma curva $y = f(x)$, ou seja, $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dado por*

$$m(x_1) = \lim_{Q\to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, temos:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Fazendo $\Delta x = h$, temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Proposição 4.3.3 *As derivadas tem as seguintes propriedades.*

(1) *Se $f(x) = c$, c constante, então $f'(x) = 0$.*

(2) *Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.*

(3) *Sejam f e g duas funções e m a função definida por $m(x) = f(x)+g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $m'(x)$ existe e é dado por $m'(x) = f'(x) + g'(x)$.*

(4) *Sejam f e g duas funções e m a função definida por $m(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $m'(x)$ existe e é dado por $m'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.*

(5) *Sejam f e g duas funções e m a função definida por $m(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $m'(x)$ existe e é dado por $m'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.*

Demonstração: A prova de (1) e (2) é direta. Mostraremos:

(3) Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} m'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{m(x+h)-m(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \tfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

(4) Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Sabemos que se f é contínua, então $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ temos

$$m'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}.$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x+h)\cdot g(x)$ vem

$$\begin{aligned} m'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x+h)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)\cdot [g(x+h)-g(x)] + g(x)\cdot [f(x+h)-f(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \left[\tfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot \left[\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \tfrac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x). \end{aligned}$$

(5) Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Sabemos que se g é contínua, então $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ temos

$$\begin{aligned} m'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{m(x+h)-m(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \left[\tfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \tfrac{f(x)}{g(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \left[\tfrac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}\right] \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x)\cdot g(x)$ vem,

$$\begin{aligned} m'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \left[\tfrac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\tfrac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) + f(x)\cdot \frac{g(x)-g(x+h)}{h}}{g(x+h)\cdot g(x)}\right] \\ &= \tfrac{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x) + \lim\limits_{h\to 0} f(x)\cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)\cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x)} \\ &= \tfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)\cdot g(x)} \\ &= \tfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

■

4.4 Derivada de um Polinômio (Regra da Potência)

Se $f(x) = x^n$ onde n é um número inteiro, $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Vamos separar nossa dedução em duas partes:

Primeiro encontraremos a derivada de x^n para $n > 0$ usando a derivada do produto e indução, em seguida encontraremos a derivada de x^n para $n < 0$ usando a derivada do quociente.

Proposição 4.4.1 *Se $f(x) = x^n$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ se $n \geq 0$ e derivável para $x \in \mathbb{R}^*$ se $n \leq 0$, nos dois casos $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.*

Demonstração: Para $n = 1$ é válido. Suponhamos que o resultado vale para $n = k$, ou seja, $f(x) = x^k$ é derivável e $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$, e mostraremos que vale para $n = k+1$, ou seja, $f(x) = x^{k+1}$ é derivável e $f'(x) = (k+1)\cdot x^k$. Aplicando a regra do produto, temos que $f(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$ é derivável e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{k+1}\right)' &&= \left(x \cdot x^k\right)' &&= x' \cdot x^k + x \cdot \left(x^k\right)' \\ &= x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} &&= x^k + k \cdot x^k &&= (k+1)x^k. \end{aligned}$$

Logo, é válida para $n = k+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Finita é válido para todo $n > 0$ com $x \in \mathbb{R}$.

Suponhamos agora que $n < 0$. Então $n = -m$, com $m > 0$ e $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Se $x \neq 0$ então, pela derivada do quociente, $f(x) = \frac{1}{x^m}$ é derivável e vale que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

Logo, a função $f(x) = x^n$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ se $n \geq 0$ e derivável para $x \in \mathbb{R}^*$ se $n \leq 0$, nos dois casos $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. ■

Exemplo 4.4.2 Encontre a derivada da função $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{1}{x^2}$.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^4 - 2x^3 + \tfrac{1}{x^2}\right)' &&= (x^4)' - (2x^3)' + \left(\tfrac{1}{x^2}\right) \\ &= 4x^3 - 6x - 2x^{-3} &&= 4x^3 - 6x - \tfrac{2}{x^3} \end{aligned}$$ ▲

4.5 Derivada de uma Função Composta: Regra da Cadeia

Se $y = g(u)$, $u = f(x)$, então a derivada de $y = g\left[f(x)\right]$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Daremos uma ênfase maior à derivada da potência, pois utilizaremos esta derivada com uma maior freqüência nos nossos conteúdos posteriores.

Capítulo 5

Integral de uma Função Real

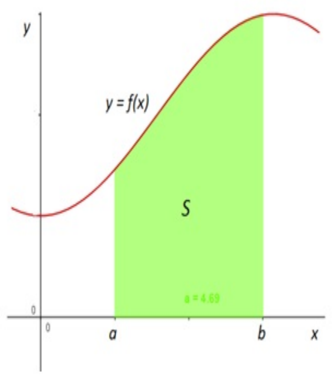
O matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Rieman (1826 – 1866), formalizou à Teoria do limite das Aproximações Finitas as quais posteriormente fora chamada de limite das Somas de Riemann. No inicio, com a descoberta de Newton e Leibniz a integral de um polinômio foi definida como função inversa da derivada do polinômio. Depois do surgimento das somas de Riemann de uma função continua no intervalo $[a, b]$. O limite destas somas de Riemann passou a ser denominado a integral de uma função em $[a, b]$.

5.1 Soma de Riemann

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ um função limitada tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Inicialmente começaremos com uma função f, ou melhor, seja S a região limitada pela curva $y = f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo x.

Vamos calcular a área da região S.



Para calcularmos a área da região S subdividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, não necessariamente iguais e escolhemos $n - 1$ pontos $P = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$ entre a e b, este conjunto P é chamado de uma partição do intervalo $[a, b]$, então $a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < b$, ou para uma melhor compreensão faremos

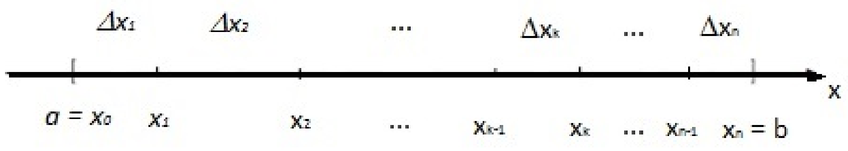
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

A partição P divide o intervalo $[a, b]$, em n subintervalos fechados, isto é, os subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, com $k = 1, 2, 3, ..., n$, ou seja,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Denotaremos o comprimento de cada intervalo como $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, com $k = 1, 2, 3, ..., n$, ou seja,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \Delta x_3 = x_3 - x_2, \ldots \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$



Escolhendo c_k um k-ésimo ponto aleatório em cada subintervalo do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, construiremos um retângulo com base no eixo x e que toca a curva no ponto $(c_k, f(c_k))$.

Sendo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ o comprimento da base e $f(c_k)$ a altura desses retângulos, resulta que a área de cada retângulo é $f(c_k) \cdot \Delta x_k$, com $k = 1, 2, 3, ..., n$. Denotaremos por S_k a área deste retângulo.

Portanto para encontrarmos um valor aproximado da área procurada devemos somar todas as áreas dos retângulos S_k, isto é,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots f(c_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(c_n)\Delta x_n.$$

A soma S_n é uma soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$. Dependendo da escolha da partição P e dos valores de c_k nos subintervalos, existem diversas somas desse tipo.

Definimos a norma de P a qual é denotada por $||\Delta||$ como sendo o comprimento do maior de todos os subintervalo, isto é,

$$||\Delta|| = \max\{\Delta x_k, 1 \leq k \leq n\}.$$

Se $||\Delta||$ é um número muito próximo de 0, então todos os subintervalos da partição P são pequenos e as respectivas somas de Riemann ficarão mais próximas de S, isto é,

$$S = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Teorema 5.1.1 *Se a função f é contínua ao longo do intervalo fechado $[a, b]$, então não importa como escolhemos a partição P e os pontos c_k em seus subintervalos para construir a soma de Riemann: a aproximação sempre chegará a um único valor limite quando o comprimento dos subintervalos, controlada pela norma da partição, tender a zero.*

Definição 5.1.2 *Dada uma função f limitada num intervalo $[a,b]$, e uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$, desse intervalo, uma soma de Riemann é:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k,$$

onde $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ e $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

5.2 Integral Definida

Da mesma forma como a derivada, a integral também é um dos conceitos mais importantes do cálculo. Vimos que o conceito de derivada está diretamente ligado ao problema de encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva num determinado ponto. Veremos agora que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana.

A seguir definimos a integral de uma função limitada no intervalo fechado $[a,b]$.

Definição 5.2.1 *Seja $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$. A integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k,$$

desde que exista o limite. Neste caso diz que f é integrável em $[a,b]$.

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $x \in [a,b]$, onde,

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Note que $f_+(x)$ e $f_-(x)$ são funções limitadas e $f_+(x) \geq 0$, $f_-(x) \geq 0$. Diz-se que f é integrável em $[a,b]$ se $f_+(x)$ e $f_-(x)$ são integráveis em $[a,b]$.

Neste caso por definição temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx.$$

5.2.1 Observações sobre as Integrais Definidas

(i) Note que na definição acima, estamos tomando o limite quando o tamanho da partição vai a zero. Isso significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

para qualquer partição P com $||\Delta|| < \delta$ e $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

(ii) Suponha que f é integrável em $[a,b]$. Podemos também fazer uma partição do intervalo $[a,b]$ em n subintervalos com tamanhos iguais. Neste caso, o comprimento de cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$ é $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, a amplitude da partição é $||\Delta|| = \frac{b-a}{n}$ e escolhendo um ponto c_k em cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, $k = 1,2,3,...,n$ temos que a Soma de Riemann é

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k).$$

Logo, a Integral Definida de uma função limitada no intervalo fechado $[a,b]$ é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k).$$

(iii) A área da região S dado no início, tem valor

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

desde que $f(x)\geq 0$, para todo $x\in[a,b]$.

(iv) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada tal que f seja integrável em $[a,b]$. Então o valor limite $\int_a^b f(x)dx$ independente das escolhas das partições de $[a,b]$ e de $c_k\in[x_{k-1},x_k]$.

Teorema 5.2.2 *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *contínua. Então* f *é integrável em* $[a,b]$.

A seguir proporcionamos um esboço da demonstração do teorema acima.

(1) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada e seja $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$. Temos que f é limitada em cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ de P e, portanto, existem m_i e M_i, respectivamente o ínfimo e o supremo de f em $[x_{i-1},x_i]$. Assim $m_i = \inf\{f(x); x\in[x_{i-1},x_i]\}$ e $M_i = \sup\{f(x); x\in[x_{i-1},x_i]\}$. Definimos a soma inferior de f relativamente à partição P como sendo

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

e analogamente, definimos a soma superior de f relativamente à partição P como sendo

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Os números $s(f;P)$ e $S(f;P)$ são denominados, respectivamente, de soma de Riemann-Darboux inferior e superior de f, relativas à partição P.

Lema 5.2.3 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam P e Q duas partições quaisquer de $[a,b]$. Então $s(f;P) \leq S(f;P)$.*

Definição 5.2.4 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a integral inferior de f como*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}}\{s(f;P)\}.$$

Onde $\mathcal{P}$ denota o conjunto de todas as partições de $[a,b]$ e a integral superior de f por

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}}\{S(f;P)\}.$$

Proposição 5.2.5 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos as funções F e G em $[a,b]$ do seguinte modo: $F(a) = G(a) = 0$ para todo $x \in (a,b]$,*

$$F(x) = \int_{a}^{\bar{x}} f(t)dt \quad e \quad G(x) = \int_{\underline{a}}^{x} f(t)dt.$$

Então em cada ponto $x_0 \in [a,b]$ onde f é contínua temos $F'(x_0) = G'(x_0) = f(x_0)$.

Definição 5.2.6 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável à Riemann em $[a,b]$ quando*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{\bar{b}} f(t)dt$$

e o valor comum denotamos por $\int_a^b f(t)dt$.

Esta definição é equivalente à dada anteriormente.
Demonstração do Teorema 5.2.2: Consideremos F e G como na proposição 5.2.5. Temos que

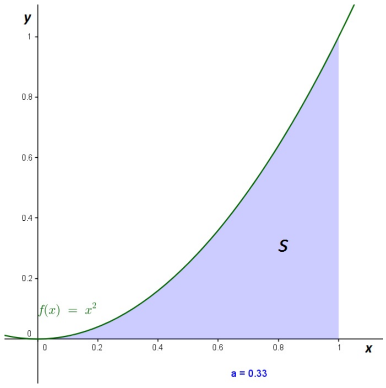
$$F'(x_0) = G'(x_0) = f(x_0),\ \forall x \in [a,b].$$

Logo, $F(x) = G(x) + c$, para todo $x \in [a,b]$ para alguma constante c. Como $F(a) = G(a) = 0$, segue que $c = 0$. Ou seja, $F(x) = G(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Em particular para $x = b$, temos

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(t)dt = F(b) = G(b) = \int_{\underline{a}}^{b} f(t)dt.$$

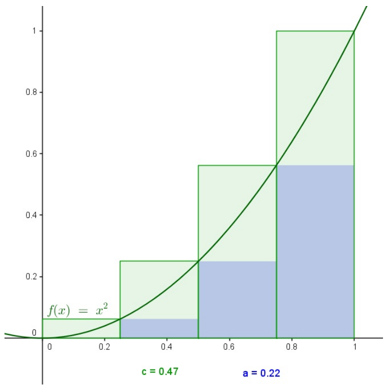
Portanto, f é integrável em $[a,b]$. ■

Exemplo 5.2.7 Seja S a região entre o eixo x e a curva $y = x^2$, $x \in [a,b]$.



Solução: Podemos usar dois métodos um com retângulos que contém a região S para obtermos uma estimativa superior da área de S, uma vez que a união dos retângulos contém S e dizemos que temos uma soma superior que indicaremos por c; ou com retângulos contidos dentro da região S para obtermos uma estimativa inferior da área de S, que é a soma inferior para a área de S, que indicaremos por a.

Graficamente teríamos:



Então sabemos que o valor ideal da área S está compreendido entre a soma superior e a soma inferior, ou seja, $0,22 < S < 0,47$, ou ainda , $a < S < c$, isto dividindo nossa área em 4 retângulos.

Para obtermos uma estimativa melhor para a área de S podemos utilizar a regra do ponto médio para aproximação da área S, que usam retângulos cujas alturas sejam valores de $y = f(x)$ nos pontos médios de suas bases. A regra do ponto médio fornece uma estimativa que fica entre uma soma inferior e uma superior.

Cálculo da Área da região S:

Encontraremos um valor aproximado da área desta região através da uma Soma de Riemann utilizando a regra do ponto médio. Poderíamos também utilizar o método desenvolvido por Arquimedes (ver no Capítulo 2).

Inicialmente faremos partições do subintervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, isto é,

$$[x_{k-1}, x_k] = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Agora escolheremos c_k como o ponto médio do subintervalo $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, isto é,

$$c_k = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{2k-2+1}{2n} = \frac{2k-1}{2n}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Neste caso, a Soma de Riemann é

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k)^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)^2}{4n^3} = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2.$$

Então, a área da região S é

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2.$$

Nos próximos conteúdos veremos que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Portanto a área da região S é

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \cong \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2. \qquad \blacktriangle$$

De modo prático observaremos que realmente aumentando n, a Soma de Riemann desta partição fica mais próxima do valor da área da região S.

Ou seja, para $n = 4$ temos

$$S = \frac{1}{3} \cong \frac{1}{4 \cdot 4^3} \sum_{k=1}^{4} (2k-1)^2 = \frac{1}{4^4}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = \frac{84}{256} = \frac{21}{64} = 0,328125.$$

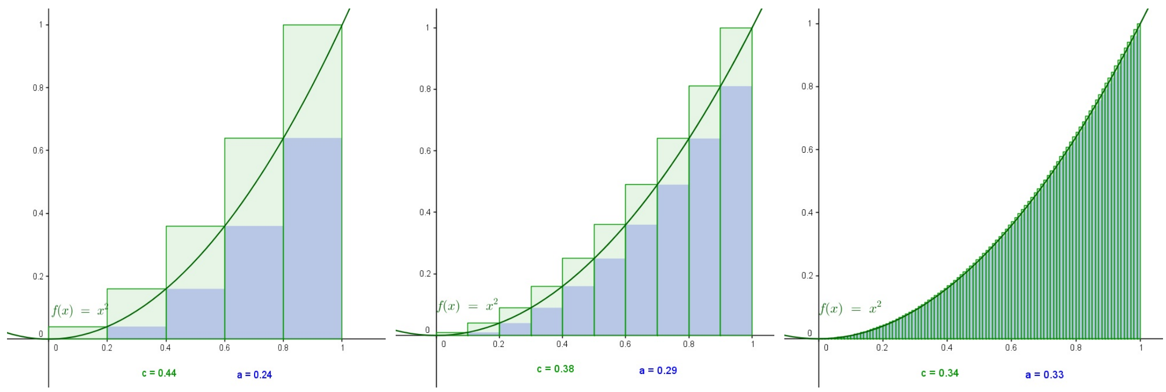
Para $n = 5$ temos:

$$S = \frac{1}{3} \cong \frac{1}{4 \cdot 5^3} \sum_{k=1}^{5} (2k-1)^2 = \frac{1}{4 \cdot 125}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = \frac{165}{500} = 0,33.$$

Para $n = 10$ temos:

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{3} \cong \tfrac{1}{4 \cdot 10^3} \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 \\ &= \tfrac{1}{4000}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 19^2) \\ &= \tfrac{1330}{4000} = 0,3325. \end{aligned}$$

Para $n = 100$ temos:



(a) $n = 5$ (b) $n = 10$ (c) $n = 100$

$$
\begin{aligned}
S &= \tfrac{1}{3} \cong \tfrac{1}{4\cdot 100^3}\sum_{k=1}^{100}(2k-1)^2\\
&= \tfrac{1}{4000000}(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+\ldots+95^2+97^2+99^2)\\
&= \tfrac{1333300}{4000000} = 0,333325.
\end{aligned}
$$

Portanto se tomarmos valores cada vez maiores de retângulos se aproximando do infinito observaremos que realmente a Soma de Riemann desta partição fica mais próxima do valor real da área da região S, isto é, $S = 0,333\ldots = \frac{1}{3}$.

Para $a \leq b$, é convencional escrevermos

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Pela definição de Integral Definida, temos:

a) $\int_a^a f(x)dx = 0.$

b) $\int_a^b 1dx = b - a.$

c) $\int_a^b cdx = c \cdot (b - a).$

Proposição 5.2.8 *Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e c uma constante.*

i) $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$

ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx,$ *sendo f integrável também em $[a, d]$ e $[d, b]$.*

iv) $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, *se* $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

v) $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$, *se* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

vi) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$, *se* $|f(x)|$ *também é integrável* $x \in [a,b]$.

vii) *Se* f *é contínua no intervalo fechado* $[a,b]$, *então* $m\cdot(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M\cdot(b-a)$, *onde* $m = \min\{f(x); x \in [a,b]\}$ *e* $M = \max\{f(x); x \in [a,b]\}$.

Proposição 5.2.9 *Se* f *é uma função contínua em* $[a,b]$, *existe um ponto* c *entre* a *e* b *tal que*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c).$$

As demonstrações das propriedades acima decorrem da definição de integral de uma função. Para mais detalhes, consulte o livro de CÁLCULO A citado em nossas referências bibliográficas.

Calcular uma integral através do limite das Somas de Riemann é geralmente uma tarefa trabalhosa. Dessa forma estabeleceremos o chamado Teorema Fundamental do Cálculo que nos permitirá calcular integrais de maneira muita mais simples.

5.3 Integral Indefinida

Nesta secção faremos uma revisão dos principais resultados do cálculo de integração.

Definição 5.3.1 *Uma função* $F(x)$ *é chamada uma primitiva da função* $f(x)$ *em um intervalo* I *(ou simplesmente uma primitiva de* $f(x)$*), se para todo* $x \in I$, *temos* $F'(x) = f(x)$.

Observamos que, de acordo como nossa definição, as primitivas de uma função $f(x)$ estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função f, entendemos que essas funções são primitivas de f no mesmo intervalo I.

Exemplo 5.3.2 $F(x) = \frac{x^4}{4}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^3$, pois $F'(x) = \frac{1}{4}4x^3 = f(x)$.

As funções $G(x) = \frac{x^4}{4} + 5$, $H(x) = \frac{x^4}{4} + 3$, também são primitivas da função $f(x) = x^3$, pois $G'(x) = H'(x) = f(x)$. Observe que as primitivas de uma função não são únicas, diferencia de uma constante.

Proposição 5.3.3 *Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se C é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + C$, também é primitiva de $f(x)$.*

Demonstração: Como $F(x)$ é primitiva de $f(x)$, temos $F'(x) = f(x)$. Também,

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

O que prova que $G(x)$ é uma primitiva de $f(x)$. ■

Proposição 5.3.4 *Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I, então f é constante em I.*

Demonstração: Sejam $x, y \in I$, com $x < y$. Como f é derivável em I, f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y). Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$, tal que

$$f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como $f'(z) = 0$, vem que $f(y) - f(x) = 0$ ou $f(y) = f(x)$. Sendo x e y dois pontos quaisquer de I, concluímos que f é constante em I. ■

Proposição 5.3.5 *Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I, então existe uma constante C tal que $G(x) - F(x) = C$, para todo $x \in I$.*

Demonstração: Seja $H(x) = G(x) - F(x)$. Como F e G são primitivas de $f(x)$ no intervalo I, temos $F'(x) = G'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Assim, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, para todo $x \in I$. Pela Proposição 5.3.4, existe uma constante C, tal que $H(x) = C$, para todo $x \in I$. Logo, para todo $x \in I$, temos

$$G(x) - F(x) = C.$$ ■

Da Proposição 5.3.5, concluímos que se $F(x)$ é uma particular primitiva de f, então toda primitiva de f é da forma

$$G(x) = F(x) + C,$$

onde C é uma constante. Assim o problema de determinar as primitivas de f, se resume em achar uma primitiva particular.

Desta última proposição concluímos que se $F(x)$ é uma particular primitiva de f, então toda primitiva de f é da forma $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante.

Definição 5.3.6 *Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a função $F(x) + C$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Desta definição, decorre que:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ \Leftrightarrow\ F'(x) = f(x).$$

Exemplo 5.3.7 Resolva as integrais indefinidas

(a) $\int x \cdot (3x-2)dx.$

(b) $\int (2x-5)\cdot(3x+1)dx.$

(c) $\int (4x-3)^2 dx.$

(d) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx.$

Solução:
(a) $\int x\cdot(3x-2)dx = \int(3x^2-2x)dx = \int 3x^2dx - \int 2xdx = 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + C = x^3 - x^2 + C.$

(b) $\int(2x-5)\cdot(3x+1)dx = \int(6x^2-13x-5)dx = \int 6x^2dx - \int 13xdx - \int 5dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - 13\cdot\frac{x^2}{2} - 5x + C = 2x^3 - \frac{13x^2}{2} - 5x + C.$

(c) $\int(4x-3)^2dx = \int(16x^2-24x+9)dx = \int 16x^2dx - \int 24xdx + \int 9dx = \frac{16x^3}{3} - 12x^2 + 9x + C.$

(d) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x-1}dx = \int(x^2+x+1)dx = \int x^2dx + \int xdx + \int 1dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$

5.4 Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo afirma que a diferenciação e a integração são, em um certo sentido, operações inversas. O Teorema Fundamental do Cálculo provê uma forma prática de calcular integrais definidas. Podendo ser colocado como uma afirmação que a derivada e a integral são operações inversas.

É afirmado pelo teorema fundamental do cálculo que:

Teorema 5.4.1 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I) *Seja uma função f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Então $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, tem derivada em todos os pontos $x \in [a,b]$ que é dado por:*

$$G'(x) = f(x), \ \textit{ou seja,}\ \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Demonstração: Vamos determinar a derivada $G'(x)$, usando a definição

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}.$$

Temos,

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{e} \quad G(x+h) \int_a^{x+h} f(t)dt.$$

Logo,

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Usando a propriedade *iii)* das integrais definidas, podemos escrever

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

com isso,

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[x, x+h]$, pela Proposição 5.2.9, existe um ponto $\overline{x}$ entre x e $x+h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} f(t)dt &= (x+h-x)f(\overline{x}). \\ &= f(\overline{x})h. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x})h}{h} = \lim_{h\to 0} f(\overline{x}).$$

Como $\overline{x}$ entre x e $x+h$, segue que $\overline{x} \to x$ quando $h \to 0$. Como f é contínua, temos

$$\lim_{h\to 0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to x} f(\overline{x}) = f(x).$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x), \text{ ou seja, } G'(x) = f(x). \qquad \blacksquare$$

Observamos que quando x é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, os limites usados na demonstração serão limites laterais. $G'(a)$ será uma derivada à direita e $G'(b)$ uma derivada à esquerda.

Uma importante consequência desta proposição é que toda função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ possui uma primitiva que é dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Teorema 5.4.2 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte II) *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e se F é uma primitiva de f, ou seja, F é uma função cuja derivada é f, no intervalo $[a, b]$, então:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Como f é contínua sobre $[a, b]$, pela Proposição 5.4.1, segue que

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

é uma primitiva de f nesse intervalo. Seja $F(x)$ uma primitiva qualquer de f sobre $[a, b]$. Pela Proposição 5.3.5, temos que $G(x) - F(x) = C$, para todo $x \in [a, b]$. Como $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t)dt$, calculando a diferença $F(b) - F(a)$, obtemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + C) - (G(a) + C) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

■

Observamos que a diferença $F(b)-F(a)$ usualmente é denotada por $[f(t)]_a^b$. Também escrevemos,

$$\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

As duas proposições acima podem ser expressas da seguinte forma:

Considere f uma função contínua de valores reais definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Se F é uma função tal que $f(x) = F'(x)$ para todo x em $[a, b]$ então:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt.$$

Essa descoberta, realizada por Newton e Leibniz, que se basearam nos resultados de um trabalho anterior de Isaac Barrow, exerceu um papel chave na massiva proliferação de resultados analíticos que se seguiram após seus trabalhos ficarem conhecidos. O Teorema Fundamental do Cálculo provê um método algébrico de calcular muitas integrais definidas sem executar processos com limite, simplesmente encontrando uma primitiva F da função f.

5.5 Integral de um Polinômio

Nesta seção veremos uma breve revisão de integral de polinômios.

Proposição 5.5.1 *Seja $f(x) = x^n$ temos que*

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b.$$

Demonstração: É imediato verificar que $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ é uma primitiva de $f(x) = n^n$, pois

$$F'(x) = (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(x^{n+1-1}\right) = x^n.$$

Como o teorema nos diz que a integral indefinida de uma função contínua f é outra função F tal que $F'(x) = f(x)$. Esta função F não é única e defere de outra integral indefinida G de f por uma constante. Então nos permite calcular:

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \left(\frac{b^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{a^{n+1}}{n+1}\right). \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.5.2 Calcule as integrais definidas abaixo com o auxilio do Teorema Fundamental do Cálculo.

(a) $\int_1^3 x dx$.

(b) $\int_0^2 x^2 dx$.

(c) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$.

(d) $\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{x^7} - \frac{7}{x^4} + x\right) dx$.

(e) $\int_{-1}^2 \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x-2} dx$.

Solução:

(a) $\int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

(b) $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$

(c) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 - \frac{1}{2}\right)$ $- \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 - \frac{1}{1}\right) = \left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 - 1\right) = \left(\frac{16-24-33}{6}\right) - \left(\frac{2-18}{6}\right) = \left(-\frac{11}{6}\right) - \left(-\frac{16}{6}\right) = \frac{-11}{6} + \frac{16}{6} = \frac{5}{6}.$

(d) $\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{4}{x^7} - \frac{7}{x^4} + x\right) dx = \int\limits_{-1}^{1} (4x^{-7} - 7x^{-4} + x)\, dx = \left[\left(\frac{4x^{-6}}{-6} - \frac{7x^{-3}}{-3} + \frac{x^2}{2}\right)\right]_{-1}^{1} =$
$\left[\left(-\frac{4}{6x^6} + \frac{7}{3x^{-3}} + \frac{x^2}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{4}{6\cdot 1^6} + \frac{7}{3\cdot 1^3} + \frac{1^2}{2}\right) - \left(-\frac{4}{6\cdot(-1)^6} + \frac{7}{3\cdot(-1)^3} + \frac{(-1)^2}{2}\right) =$
$\left(-\frac{4}{6} + \frac{7}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{4}{6} - \frac{7}{3} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-4+14+3}{6}\right) - \left(\frac{-4-14+3}{6}\right) = \frac{13}{6} + \frac{15}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}.$

(e) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x-2} dx = \int\limits_{-1}^{2} (x^2 + 5x + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{5\cdot 2^2}{2} + 2\right) -$
$\left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5\cdot(-1)^2}{2} - 1\right) = \left(\frac{8}{3} + 12\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 1\right) = \left(\frac{16+72}{6}\right) - \left(\frac{-2+15-6}{6}\right) = \frac{88}{6} - \frac{7}{6} =$
$\frac{81}{6} = \frac{27}{2}.$

Capítulo 6

Cálculo de Áreas

Neste capítulo vamos calcular as áreas de figuras planas as quais podem ser determinadas por meio de integrais de funções.

Observamos que nossa proposta do ensino de integrais de funções no Ensino Médio cobre apenas o cálculo de áreas de figuras planas. O cálculo de volumes de corpos geométricos por meio de integrais fica em aberto.

6.1 Cálculo de Áreas

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Desejamos calcular a área da figura plana S limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x. Os seguintes casos podem se apresentar:

Caso I

Se $f(x) \geq 0$, então $S = \int\limits_a^b f(x)dx$, $\forall x \in [a, b]$.

Caso II

Se $f(x) \leq 0$, então $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$, $\forall x \in [a, b]$.

Caso III

Se $f(x)$ muda de sinal em $[a, b]$ isto é, $f(x) \geq 0$ nos subintervalos $[c_i, d_i]$ de $[a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, M$, e $f(x) \leq 0$ nos subintervalos $[p_i, q_i]$ de $[a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Neste caso

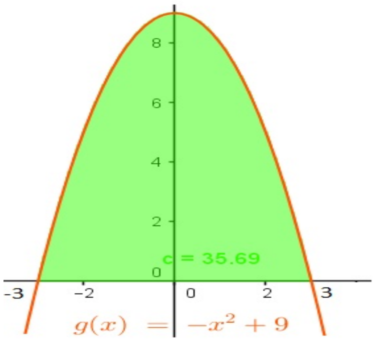
$$S = \sum_{i=1}^{M} \int_{c_i}^{d_i} f(x)dx + \sum_{i=1}^{N} \left|\int_{p_i}^{q_i} f(x)dx\right|.$$

Exemplo 6.1.1 Encontre a área limitada pela curva $y = 9 - x^2$ e o eixo dos x.

Solução: A curva intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissas -3 e 3.

No intervalo de $[-3, 3]$, temos $y = 9 - x^2 \geq 0$. Então:

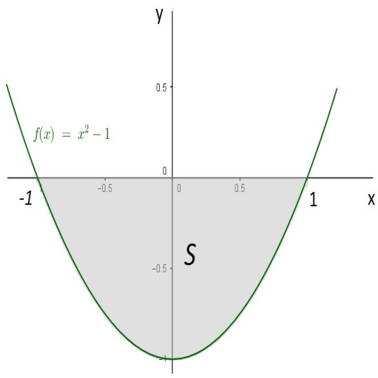
$$\begin{array}{rclclcl} S &=& \int\limits_{-1}^{1} (-x^2 + 9)\,dx &=& \left[-\frac{x^3}{3} + 9x\right]_{-1}^{1} &=& \left(-\frac{27}{3} + 27\right) - \left(\frac{27}{3} - 27\right) \\ &=& (-9 + 27) - (9 - 27) &=& -18 + 54 &=& 36u.a. \end{array}$$



▲

Exemplo 6.1.2 Encontre a área limitada pela curva $y = x^2 - 1$ e o eixo dos x.

Solução: A curva intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissas -1 e 1.



No intervalo de $[-1, 1]$, temos $y = x^2 - 1 \leq 0$. Então:

$$\begin{aligned} S &= \left|\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx\right| &= \left|\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}\right| &= \left|\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) - \left(-\tfrac{1}{3} + 1\right)\right| \\ &= \left|\left(\tfrac{1-3}{3}\right) - \left(\tfrac{-1+3}{3}\right)\right| &= \left|-\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}\right| &= \left|\tfrac{-4}{3}\right| = \tfrac{4}{3} u.a. \end{aligned}$$

▲

Caso IV

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, tais que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Pode-se calcular também a área da figura plana S localizada entre os gráficos de f e g, e as retas $x = a$, $x = b$.

Temos os seguintes casos:

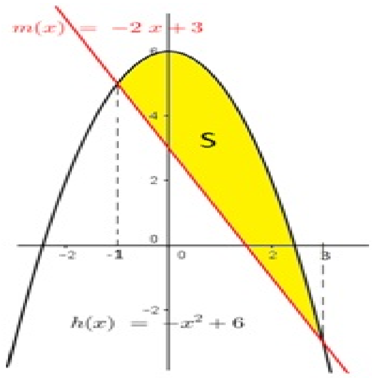
1. Se $g(x) \geq 0$ então $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$.

2. Se $g(x) \leq 0$ então considere uma constante $c > 0$ tal que $g(x) + c \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Então $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$. Assim

$$S = \int_a^b \{[f(x) + c] - [g(x) + c]\}\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Exemplo 6.1.3 Usando a integral definida, calcule a área da região limitada pelos gráficos das equações $y + x^2 = 6$ e $y + 2x - 3 = 0$.

Solução: As curvas $y = -x^2 + 6$ e $y = -2x + 3$ interceptam nos pontos de abscissas -1 e 3.



No intervalo de $[-1, 3]$, temos $-x^2 + 6 \geq -2x + 3$. Então:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 6 + 2x - 3)\, dx &&= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{1} &&= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) \\ &= 9 - \frac{1}{3} + 2 &&= 11 - \frac{1}{3} &&= \frac{32}{3} u.a. \end{aligned}$$

Capítulo 7

Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio

Introdução no Ensino Médio da Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas.

7.1 Procedimentos Metodológicos

A presente pesquisa foi realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Antônio Oliveira, na cidade de Campina Grande – PB, trabalhada com uma turma de 26 alunos do 3^o ano do ensino médio, onde foram necessárias 08 (oito) aulas, nas quais aplicamos nossa Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio, em particular, o Cálculo de Áreas de figuras Planas por meio de Integrais, onde procedemos da seguinte maneira:

7.1.1 Plano de Aula

Ementa

Método da Exaustão; Soma de Riemann; Integral Definida; Integral Indefinida; O Teorema Fundamental do Cálculo; Aplicações de Integral Definida no estudo de áreas de figuras planas.

Objetivos

Geral

Proporcionar ao aluno habilidade matemática necessária para a resolução de problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras planas com a utilização de uma ferramenta da Integral de Funções, a Aplicação de Integral Definida no estudo de áreas de figuras planas. Ferramenta apropriada para estes tipos de problemas. Desta forma o aluno ficará mais bem preparado para estudos universitários futuros.

Específicos

✓ Dotar os alunos de conhecimentos que proporcionem meios de compreensão e de resolução de problemas relacionados a outras disciplinas do curso, e posteriormente, aplicar esses conhecimentos no desenvolvimento de atividades profissionais onde se faça necessário.

✓ Estimular os alunos a ampliar seus conhecimentos matemáticos por meio de leitura de textos, jornais, revistas, livros e enciclopédias, pesquisas, consultas na Internet e a profissionais.

✓ Contribuir para a formação do aluno, tornando-o mais crítico, criativo e atuante.

✓ Desenvolver o raciocínio lógico-matemático, favorecendo a interdisciplinaridade.

Conteúdo Programático

1. Método da Exaustão;
2. Soma de Riemann;
3. Integral Definida;
4. Integral Indefinida;
5. Teorema Fundamental do Cálculo;
6. Aplicações de Integral Definida no estudo de áreas de figuras planas.

Metodologia

Estratégias de Ensino: Aulas expositivas precedidas de uma discussão prévia sobre o assunto levando os alunos a se deparar com questões práticas, onde se aplica a teoria em exposição. Formar grupos para discutir e resolver questões relacionadas aos conteúdos abordados como também a utilização do software Geogebra para a construção de gráficos e figuras geométricas.

Recursos Técnico-Pedagógicos: Os recursos a serem utilizados são: quadro branco, pincel e Data Show, notebook e o software Geogebra.

Avaliação: Serão realizadas no mínimo duas avaliações durante as aulas ministradas, que serão somadas para obtenção da média. As avaliações serão aplicadas em diferentes formatos, de acordo com a necessidade para uma melhor clareza da utilidade desta pesquisa definida pelo professor.

7.1.2 Material e Métodos

Aula 1

Nesta aula iniciamos falando um pouco do surgimento do cálculo começando por Arquimedes falando sobre suas descobertas principalmente sobre o Método da Exaustão, fazendo com que desperte a curiosidade dos alunos proporcionando um interesse maior por parte deles, dando continuidade mostramos a importância desta descoberta para os nossos estudos hoje.

Depois de citarmos as importantes contribuições de Arquimedes para a Matemática, anunciamos os seus sucessores até chegarmos aos considerados inventores ou criadores do Cálculo Isaac Newton e Leibniz, fazendo um breve comentário de como eles chegaram a esta descoberta.

Citamos as principais contribuições tanto de Isaac Newton como também de Leibniz para a Matemática.

Aula 2

Nesta aula fizemos uma breve revisão sobre funções e da construção e esboço do gráfico de uma função do 1^o grau e outra do 2^o grau no plano Cartesiano, e analisamos a região determinada por uma função e o eixo dos x e utilizamos o software matemático Geogebra para construirmos e esboçarmos os gráficos.

Segue Roteiro:

Revisando Funções

Definição 7.1.1 *Seja A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f : A \to B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado de domínio de f e é denotado por $D(f)$. B é chamado de contradomínio de f. Notação*

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

Exemplo 7.1.2 Sejam $A\{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

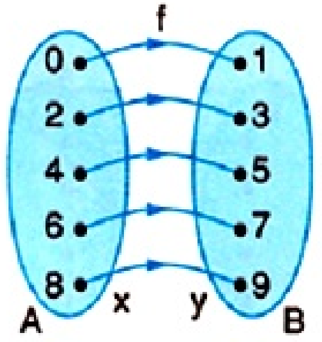
$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

ou $f(x) = x + 1$ é uma função de A em B e podemos representá-la pelo diagrama abaixo:

Gráfico de uma função

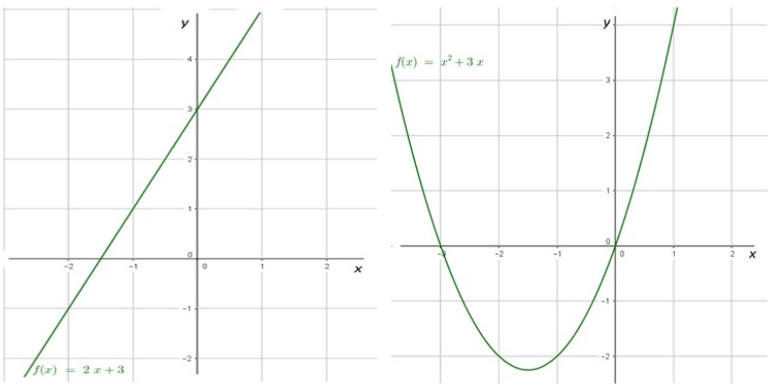
Definição 7.1.3 *Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f.*

Exemplo 7.1.4 Construa o gráfico de cada uma das funções abaixo:



(a) $f(x) = 2x + 3$.

(b) $f(x) = x^2 + 3x$.



(a) (b)

Observe e analise nos gráficos as áreas das regiões determinada pelas funções e o eixo dos x nos seguintes intervalos:

(a) $f(x) = 2x + 3$ no intervalo $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$.

(b) $f(x) = x^2 + 3x$ no intervalo $[-3, 0]$

Aula 3

Nesta aula mostramos todo o processo para calcularmos uma área determinada por uma função e o eixo dos x, procuramos mostrar passo a passo os cálculos desenvolvidos por Arquimedes até chegarmos ao método aplicado por Riemann para encontrar a área procurada.

Segue Roteiro:

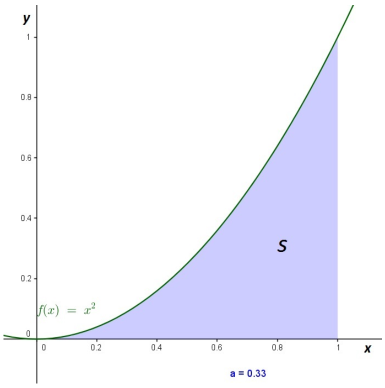
Cálculo de Áreas utilizando a Soma de Riemann

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupavam com o problema de determinar a área de uma figura plana.

O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Para definir a área de uma figura plana qualquer, procedemos de forma análoga. Aproximamos a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Exemplo 7.1.5 Seja S a região entre o eixo x e a curva $y = x^2$, $x \in [0, 1]$.



Podemos usar dois métodos um com retângulos que contém a região S para obtermos uma estimativa superior da área de S, uma vez que os retângulos contêm S e dizemos que temos uma soma superior que indicaremos por c; ou com retângulos contidos dentro da região S para obtermos uma estimativa inferior da área de S, que é a soma inferior para a área de S, que indicaremos por a.

Então sabemos que o valor ideal da área S está compreendido entre a soma superior e a soma inferior, ou seja, $a < S < c$.

Para obtermos uma estimativa melhor para a área de S podemos utilizar a regra do ponto médio para aproximação da área S, que usam retângulos cujas alturas sejam valores de $y = f(x)$ nos pontos médios de suas bases. A regra do ponto médio fornece uma estimativa que fica entre uma soma inferior e uma superior.
Calculando a área da região S.

Encontraremos um valor aproximado da área desta região através da uma Soma de Riemann utilizando a regra do ponto médio.

Inicialmente faremos partições do subintervalo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais, isto é,

$$[x_{k-1}, x_k] = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Agora escolheremos c_k como o ponto médio do subintervalo $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, isto é,

$$c_k = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{2k-2+1}{2n} = \frac{2k-1}{2n}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

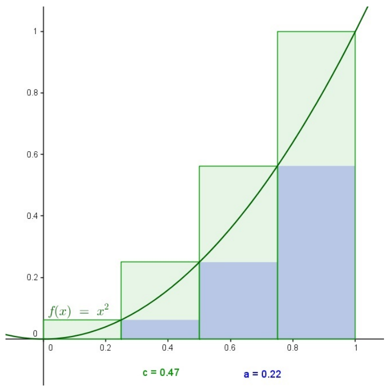
Neste caso, a Soma de Riemann é

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k)^2\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^2}{4n^3} = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2.$$

De modo prático observaremos que realmente aumentando n, a Soma de Riemann desta partição fica mais próxima do valor da área da região S.

Vejamos para $n = 4$:

Comprimento dos retângulos que chamaremos de base que é igual $b = \frac{1}{n} \Rightarrow b = \frac{1}{4} = 0,25$ e ponto médio $c_k = \frac{2k-1}{2n} \Rightarrow c_1 = \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 4} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{8} = 0,125$, $c_2 = \frac{3}{8} =, 0,375$, $c_3 = \frac{5}{8} = 0,625$, $c_4 = \frac{7}{8} = 0,875$.



Logo, a área S é igual a soma das áreas dos quatro retângulos que chamaremos de $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Como c_k é ponto médio então a altura será $y = (c_k)^2$, pois $y = x^2$ e a área de um retângulo é igual a $A_{\text{retângulo}} = base \cdot altura$ então, $A_{\text{retângulo}} = \frac{1}{4}\cdot(c_k)^2$ temos:

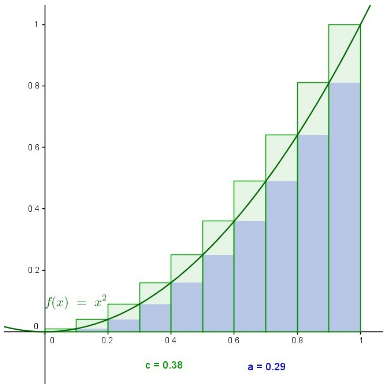
$$\begin{array}{lllllllll}
S_1 & = & \frac{1}{4}\cdot(c_1)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{64}\right) & = & \frac{1}{256}\\
S_2 & = & \frac{1}{4}\cdot(c_2)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9}{64}\right) & = & \frac{9}{256}\\
S_3 & = & \frac{1}{4}\cdot(c_3)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{25}{64}\right) & = & \frac{25}{256}\\
S_4 & = & \frac{1}{4}\cdot(c_4)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2 & = & \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{49}{64}\right) & = & \frac{49}{256}
\end{array}$$

Portanto, a área total é

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{256} + \frac{9}{256} + \frac{25}{256} + \frac{49}{256} = 0,328125.$$

Agora vejamos para $n = 10$:

Comprimento dos retângulos que chamaremos de base que é igual $b = \frac{1}{n} \Rightarrow b = \frac{1}{10} = 0,1$ e ponto médio $c_k = \frac{2k-1}{2n} \Rightarrow c_1 = \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 10} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{20} = 0,05$, $c_2 = \frac{3}{20} = 0,15$, $c_3 = \frac{5}{20} = 0,25$, $c_4 = \frac{7}{20} = 0,35, \ldots, c_{10} = \frac{19}{20} = 0,95$.



Daí, temos:

$$\begin{array}{lllllllll}
S_1 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_1)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{400}\right) & = & \frac{1}{4000}\\
S_2 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_2)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{400}\right) & = & \frac{9}{4000}\\
S_3 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_3)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{5}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{25}{400}\right) & = & \frac{25}{4000}\\
S_4 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_4)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{49}{400}\right) & = & \frac{49}{4000}\\
S_5 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_5)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{81}{400}\right) & = & \frac{81}{4000}\\
S_6 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_6)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{121}{400}\right) & = & \frac{121}{4000}\\
S_7 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_7)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{13}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{169}{400}\right) & = & \frac{169}{4000}\\
S_8 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_8)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{15}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{225}{400}\right) & = & \frac{225}{4000}\\
S_9 & = & \frac{1}{10}\cdot(c_9)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{289}{400}\right) & = & \frac{289}{4000}\\
S_{10} & = & \frac{1}{10}\cdot(c_{10})^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^2 & = & \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{361}{400}\right) & = & \frac{361}{4000}
\end{array}$$

Portanto, a área total é

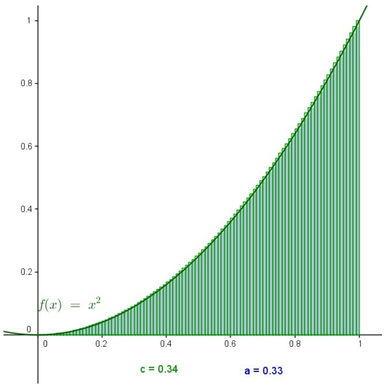
$$\begin{aligned}
S &= S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}\\
&= \frac{1}{4000}+\frac{9}{4000}+\frac{25}{4000}+\frac{49}{4000}+\frac{81}{4000}+\frac{121}{4000}+\frac{169}{4000}+\frac{225}{4000}+\frac{289}{4000}+\frac{361}{4000}\\
&= \frac{1330}{4000}=\frac{133}{400}=0,3325.
\end{aligned}$$

Por fim vejamos para $n = 100$:

Comprimento dos retângulos que chamaremos de base que é igual $b = \frac{1}{n} \Rightarrow b = \frac{1}{100} = 0,01$ e ponto médio $c_k = \frac{2k-1}{2n} \Rightarrow c_1 = \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 100} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{200} = 0,005$, $c_2 = \frac{3}{200} = 0,015$, $c_3 = \frac{5}{200} = 0,025,\ldots,c_{100} = \frac{199}{200} = 0,995$.

Daí, temos:

$$\begin{array}{lllllllll}
S_1 & = & \frac{1}{100}\cdot(c_1)^2 & = & \frac{1}{100}\cdot\left(\frac{1}{200}\right)^2 & = & \frac{1}{100}\cdot\left(\frac{1}{40000}\right) & = & \frac{1}{4000000}\\
S_2 & = & \frac{1}{100}\cdot(c_2)^2 & = & \frac{1}{100}\cdot\left(\frac{3}{200}\right)^2 & = & \frac{1}{100}\cdot\left(\frac{9}{40000}\right) & = & \frac{9}{4000000}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
S_{100} & = & \frac{1}{100}\cdot(c_{100})^2 & = & \frac{1}{100}\cdot\left(\frac{199}{200}\right)^2 & = & \frac{1}{100}\cdot\left(\frac{39601}{40000}\right) & = & \frac{39601}{4000000}
\end{array}$$



Portanto, a área total é

$$\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + \ldots + S_{98} + S_{99} + S_{100} \\
&= \frac{1}{4000000} + \frac{9}{4000000} + \frac{25}{4000000} + \ldots + \frac{38025}{4000000} + \frac{38809}{4000000} + \frac{38601}{4000000} \\
&= \frac{1333300}{4000000} = \frac{13333}{40000} = 0,333325.
\end{aligned}$$

Portanto se pegarmos valores cada vez maiores de retângulos se aproximando do infinito observaremos que realmente a Soma de Riemann desta partição fica mais próxima do valor real da área da região S, isto é, $S = 0,333\ldots = \frac{1}{3}$.

Essa soma das áreas dos retângulos é chamada de Soma de Riemann da função $f(x) = x^2$.

Posteriormente mostraremos usando as integrais que o valor da área em estudo é $S = \frac{1}{3}$.

Exemplo 7.1.6 Seja S a região entre o eixo x e a curva $y = -x^2 + 2x$, ou seja,$y = -\left(x^2 - 2x + 1\right) + 1$, ou ainda, $y + 1 = -\left(x - 1\right)^2$, com $x \in [0, 2]$.

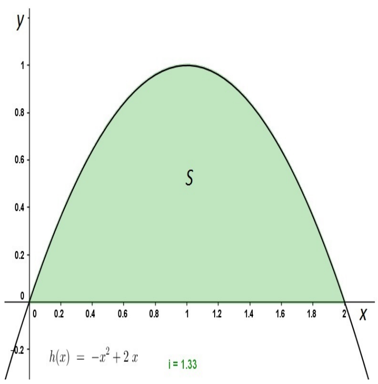


Figura 7.1: $y = -x^2 + 2x$

Vamos encontrar um valor aproximado da área desta região.

Para isto, vamos fazer partições do subintervalo $[0, 2]$ em n subintervalos iguais.

De maneira análoga ao exemplo anterior:

Vejamos para $n = 4$:

Comprimento dos retângulos que chamaremos de base que é igual $b = \frac{2}{n} \Rightarrow b = \frac{2}{4} = 0,5$ e ponto médio $c_k = 2 \cdot \left[\frac{2k-1}{2n}\right] \Rightarrow c_1 = 2 \cdot \left[\frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 4}\right] \Rightarrow c_1 = \frac{2}{8} = 0,25$, $c_2 = \frac{6}{8} = 0,75$, $c_3 = \frac{10}{8} = 1,25, c_4 = \frac{14}{8} = 1,75$.

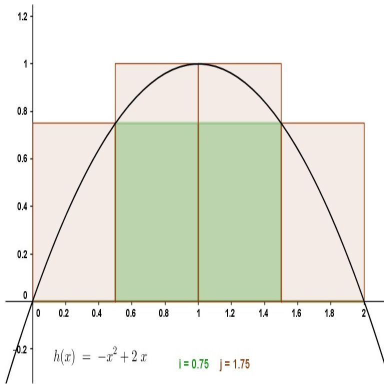


Figura 7.2: $n = 4$

Como c_k é ponto médio então a altura será $y = -(c_k)^2 + 2(c_k)$, pois $y = -x^2 + 2x$ e a área de um retângulo é igual a $A_{\text{retângulo}} = base \cdot altura$ então, $A_{\text{retângulo}} = \frac{2}{4} \cdot \left[-(c_k)^2 + 2(c_k)\right]$, temos:

Observação: Usaremos os valores de b e c_k sem simplificarmos.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \tfrac{2}{4} \cdot \left[-(c_1)^2 + 2(c_1)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{2}{8}\right)^2 + 2\left(\tfrac{2}{8}\right)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{4}{64}\right) + \left(\tfrac{4}{8}\right)\right] \\
&= \tfrac{56}{256} \\
S_2 &= \tfrac{2}{4} \cdot \left[-(c_2)^2 + 2(c_2)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{6}{8}\right)^2 + 2\left(\tfrac{6}{8}\right)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{36}{64}\right) + \left(\tfrac{12}{8}\right)\right] \\
&= \tfrac{120}{256} \\
S_3 &= \tfrac{2}{4} \cdot \left[-(c_3)^2 + 2(c_3)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{10}{8}\right)^2 + 2\left(\tfrac{10}{8}\right)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{100}{64}\right) + \left(\tfrac{20}{8}\right)\right] \\
&= \tfrac{120}{256} \\
S_4 &= \tfrac{2}{4} \cdot \left[-(c_4)^2 + 2(c_4)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{14}{8}\right)^2 + 2\left(\tfrac{14}{8}\right)\right] = \tfrac{2}{4} \cdot \left[-\left(\tfrac{196}{64}\right) + \left(\tfrac{28}{8}\right)\right] \\
&= \tfrac{56}{256}
\end{aligned}
$$

Portanto, a área total é

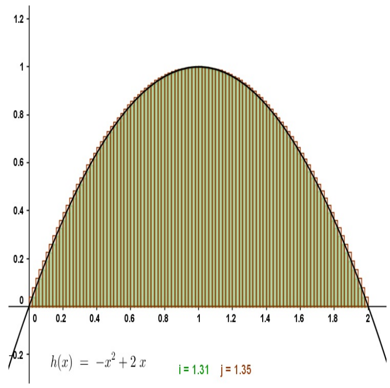
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{56}{256} + \frac{120}{256} + \frac{120}{256} + \frac{56}{256} = 1,375.$$

Analogamente, podemos concluir que, quanto maior for o valor de n a área da região S, que é a soma das áreas dos retângulos, se aproxima do valor $S = 1,333\ldots = \frac{4}{3}$.

Essa soma das áreas dos retângulos é chamada de Soma de Riemann da função $y = -x^2 + 2x$, ou seja, $y + 1 = -(x-1)^2$.

Posteriormente mostraremos usando as integrais que o valor da área em estudo é $S = \frac{4}{3}$.

Para $n = 100$ temos:



Aula 4 e 5

Nesta aula mostramos um resumo das derivadas de um polinômio e a parte teórica do estudo de Integrais Definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo e alguns exemplos de integrais definidas.

Segue Roteiro:

Derivada de um Polinômio (Regra da Potência)

Se $f(x) = x^n$ onde n é um número inteiro positivo e $x \neq 0$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Exemplo 7.1.7 Encontre as derivadas das funções:

(a) $f(x) = 5$.

(b) $f(x) = x$.

(c) $f(x) = x^2$.

(d) $f(x) = x^3$.

(e) $f(x) = 5x^6$.

(f) $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{1}{x^2}$.

Solução:

(a) $f(x) = 5$, ou seja, $f(x) = 5x^0 \Rightarrow f'(x) = 0 \cdot 5x^{0-1} = 0$.

(b) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot 1 = 1$.

(c) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$.

(d) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$.

(e) $f(x) = 5x^6 \Rightarrow f'(x) = 6 \cdot 5x^{6-1} = 30x^5$.

(f) $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = (x^4)' - (2x^3)' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' = 4x^3 - 6x^2 - \frac{2}{x^3}$.

Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas.

Introdução

O Cálculo Integral é o estudo das definições, propriedades, e aplicações de dois conceitos relacionados, as integrais indefinidas e as integrais definidas. O processo de encontrar o valor de uma integral é chamado integração. Em linguagem técnica, o calculo integral estuda dois operadores lineares relacionados.

Integral Definida

A integral definida insere uma função e extrai um número, o qual fornece a área entre o gráfico da função e o eixo do x. A definição técnica da integral definida é o limite da soma das áreas dos retângulos, chamada Soma de Riemann.

Definição 7.1.8 *Seja* $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ *uma partição qualquer de* $[a, b]$*. A integral de* $f(x)$ *no intervalo* $[a, b]$*, denotada por* $\int\limits_a^b f(x)dx$*, é*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k,$$

desde que exista o limite. Neste caso diz que f *é integrável em* $[a, b]$*. Assim, temos que*

- $\int$ é o sinal da integração;
- $f(x)$ é a função integrando;
- dx é a diferencial que identifica a variável de integração.
- Na integral definida $\int\limits_a^b f(x)dx$ é lida com "a integral de f de x de a até b". Onde a é o limite inferior e b é o limite superior.

Propriedades das integrais definidas

(i) $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx.$

(ii) $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$

Considerações:

Calcular uma integral através do limite das Somas de Riemann é geralmente uma tarefa trabalhosa. Dessa forma estabeleceremos o chamado Teorema Fundamental do Cálculo que nos permitirá calcular integrais de maneira muita mais fácil.

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 7.1.9 *Se uma função* f *é contínua no intervalo* $[a, b]$ *e se* F *é uma função cuja derivada é* f *no intervalo* (a, b)*, então*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Agora vejamos como resolveríamos estes problemas com o auxilio das Integrais Definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Técnica de Integração para polinômios

Seja $f(x) = x^n$ temos que

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b.$$

De fato, é imediato verificar que $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ é uma primitiva de $f(x) = x^n$ pois

$$F'(x) = (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1-1} = x^n.$$

Como o teorema nos diz que a integral indefinida de uma função contínua f é outra função F tal que $F'(x) = f(x)$. Esta função F não é única e defere de outra integral indefinida G de f por uma constante. Então nos permite calcular:

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \left(\frac{b^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{a^{n+1}}{n+1}\right).$$

Exemplo 7.1.10 Resolva as seguintes Integrais Definidas Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo.

(a) $\int_2^3 6dx$.

(b) $\int_{-1}^4 xdx$.

(c) $\int_{-1}^1 (x+2)\, dx$.

(d) $\int_2^3 x^2 dx$.

(e) $\int_1^2 (x-2)^2 dx$.

Solução:

(a) $\int_2^3 6dx = 6\int_2^3 dx = 6\,[x]_2^3 = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 18 - 12 = 6.$

(b) $\int_{-1}^4 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^4 = \left(\frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{16}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}.$

(c) $\int_{-1}^1 (x+2)\, dx = \int_{-1}^1 xdx + \int_{-1}^1 2dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + [2x]_{-1}^1 = \left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \frac{(-1)^2}{2}\right] + [2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)] =$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 + 2 = 4.$

(d) $\int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{2^3}{3}\right) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$.

(e) $\int_1^2 (x-2)^2 dx = \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1\right) = \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{1+6}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

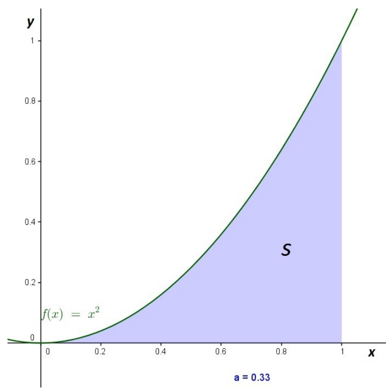
Aula 6

Nesta aula mostramos as Aplicações do Cálculo de Integrais Definidas no Estudo de Áreas de Figuras Planas.

Segue Roteiro:

Integrais de Funções e Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no Estudo de Áreas de Figuras Planas.

Exemplo 7.1.11 Seja S a região entre o eixo x e a curva $f(x) = x^2$, ou seja, $y = x^2$, $x \in [0, 1]$. Encontre a área de S.



Solução: Para encontrarmos a área da região R, basta integrar a função $f(x) = x^2$ no intervalo fechado $[a, b]$, ou seja,

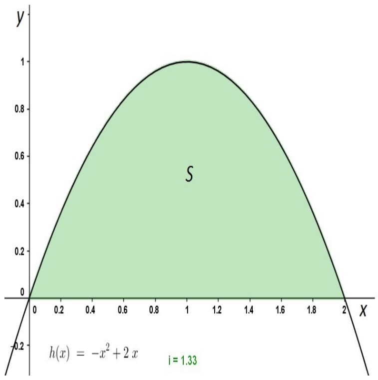
$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0}{3}\right) = \frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

Exemplo 7.1.12 Seja S a região entre o eixo x e a curva $y = -x^2 + 2x$, ou seja, $x \in [0, 2]$. Encontre a área de S.

Solução: Para encontrarmos a área da região S, basta integrar a função $y = -x^2 + 2x$ no intervalo fechado $[0, 2]$, ou seja,

$$\int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right) dx = \left|\left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2\right| = \left|\left(\frac{-2 \cdot 2^3}{3} + 2^2\right) - \left(\frac{-2 \cdot 0}{3} + 0\right)\right|$$

$$= \left|\frac{-16}{3} + 4\right| = \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3} = 1,333\ldots$$



Aula 7 e Aula 8

Nestas aulas aplicamos um Exercício de Aprendizagem para avaliarmos o aprendizado dos alunos em relação à Proposta do ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio. (Algumas avaliações em anexo).

Segue Exercício de Avaliação:

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Antônio Oliveira
Disciplina: Matemática Série: 3^o ano Turma: A
Professor: Magno Afonso Martins Barbosa
Aluno(a):

Exercício Avaliativo sobre: Integrais de Funções e Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no Estudo de Áreas de Figuras Planas.

(1) Usando a integral definida, calcule a área da região limitada pelo gráfico da equação $y - x^2 = -9$ e pelo eixo dos x, com $x \in [-3, 3]$.
(2) Usando a integral definida, calcule a área da região limitada pelos gráficos das equações $y + 2x - 8 = 0$ e o eixo dos x, com $x \in [0, 4]$.
(3) Resolva as integrais definidas abaixo:

(a) $\int_{-1}^{1} 5x^2 dx.$ (e) $\int_{-2}^{-1} x \cdot (3x - 2)\, dx.$

(b) $\int_{2}^{3} (-x^2 + 3x)\, dx.$ (f) $\int_{-1}^{0} (2x - 5) \cdot (3x + 1)\, dx.$

(c) $\int_{0}^{2} (x - 3)^2\, dx.$ (g) $\int_{-1}^{2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x-2} dx.$

(d) $\int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx.$ (h) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3-1}{x-1} dx.$

7.2 Análise e Discussão dos Resultados

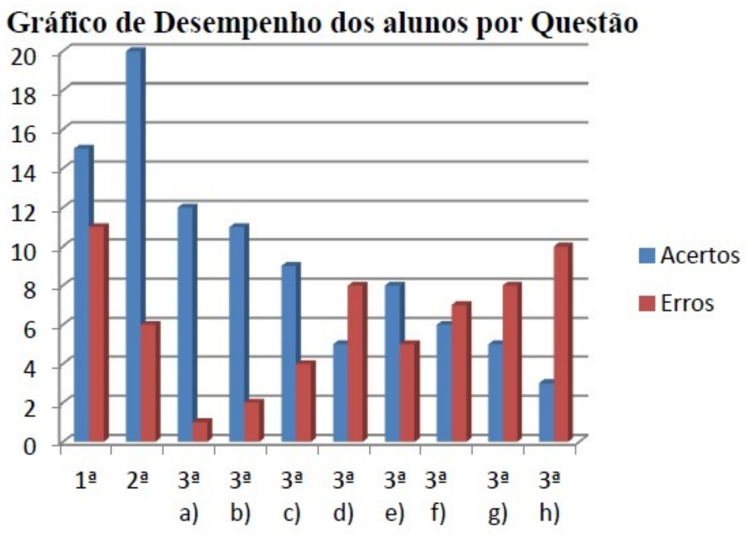
A coleta de dados foi realizada Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Antônio Oliveira, na cidade de Campina Grande – PB. Participando assim 26 alunos do 3^o ano do ensino médio no período vespertino. Os mesmos têm entre 14 e 20 anos. Após exposição e explicação de uma Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio, em particular, a Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas, foram entregue aos alunos um exercício de verificação da aprendizagem individual que foi respondido. E a partir desta atividade observamos os seguintes resultados expostos nas tabelas e nos gráficos abaixo.

Questões	Acertos	Erros
1ª	15	11
2ª	20	6
3ª a)	12	1
3ª b)	11	2
3ª c)	9	4
3ª d)	5	8
3ª e)	8	5
3ª f)	6	7
3ª g)	5	8
3ª h)	3	10

Figura 7.3: TABELA DE DESEMPENHO DOS ALUNOS POR QUESTÃO

Observação:

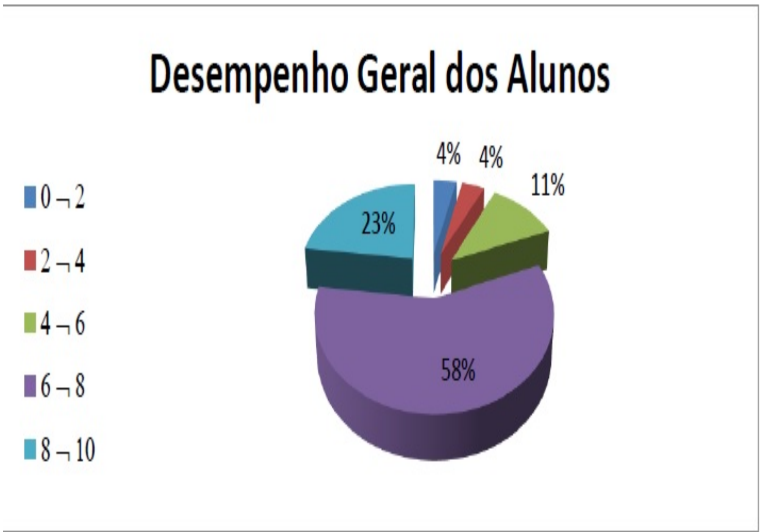
Todos os alunos faziam a 1^a e 2^a questão e a 3^a questão foi dividida em a), c), f) e h) para uns alunos e b), d), e) e g) para outros alunos, ou seja, os alunos faziam 04 letras da 3^a questão.



Notas	Freqüência (fi)	Porcentagem	xi	xi.fi
0 ¬ 2	1	4%	1	1
2 ¬ 4	1	4%	3	3
4 ¬ 6	3	11%	5	15
6 ¬ 8	15	58%	7	105
8 ¬10	6	23%	9	54
TOTAL	26	100%		178

Figura 7.4: TABELA DE DESEMPENHO GERAL DOS ALUNOS

Média Aritmética: $MA = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{178}{26} = 6,85.$



Notação: Os alunos participaram e desempenharam a atividade com satisfação, socializando com o professor de forma interativa, participativa desenvolvendo suas criatividades e habilidades. Observa-se, porém, a necessidade de continuar este trabalho, que além de ajudar na exposição e assimilação do conteúdo, torna a aula mais atraente e desperta a curiosidade dos alunos em conhecer a história da matemática favorecendo a aprendizagem. Mostrando assim que as atividades envolvendo as aplicações com integrais definidas no estudo de áreas de figuras planas e volumes é recurso de grande importância para o aprendizado do aluno.

7.2.1 Conclusão da Experiência

Observamos que posterior à exibição de uma aula prática através da utilização do data show envolvendo uma Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino

Médio, em particular, Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas, foi possível constatar benefícios trazidos pelo seu uso, pois por meio desse recurso foram identificados os alunos que apresentavam dificuldades em relação ao conteúdo trabalhado. De acordo com essa aula houve a possibilidade de ajudar os alunos a esclarecer suas dúvidas e visto que este conteúdo só é apresentado nos cursos superiores os alunos demonstram muita curiosidade em aprendê-los.

A partir dessas considerações, trazemos então, como sugestão para outros professores de matemática, a análise das dificuldades apresentadas pelos estudantes em algum conteúdo e também o uso de alguns conteúdos do ensino superior mesmo que de forma não tão aprofundadas podem auxiliar nessa compreensão.

7.3 Considerações Finais

Essa dissertação tem como objetivo principal melhorar o ensino de Matemática no ensino médio, lançando uma Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio em especial o estudo de funções e a Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas. Baseado em outros estudos este foi organizado, tendo como referência a importância de uma reformulação no ensino médio. Há muito tempo o ensino de matemática consiste de um ensino mecânico voltado apenas a aplicações de formulas e repetições de exercícios, ou seja, um sistema de ensino totalmente desestimulante, com muitos resultados abstratos sem aplicações no cotidiano dos alunos, deixando de lado a capacidade do mesmo construir ou até buscar em exemplos práticos uma ligação com o seu dia a dia. Observamos que o estudo das Integrais de Funções e suas Aplicações no ensino médio é um fator motivador que pode ajudar no processo ensino-aprendizagem, acreditamos que se bem trabalhado o mesmo contribui muito para a aprendizagem, servindo como facilitador na construção do conhecimento de áreas, deixando as aulas mais dinâmicas, proporcionando aos alunos uma interação dos conteúdos do ensino médio com os do ensino superior no qual o aluno poderá construir seus próprios conceitos.

Assim, com o uso das Integrais de Funções como as aplicações das Integrais, é possível elaborar uma aula dinâmica, e dentro de uma perspectiva construtiva, fazendo os alunos partirem de uma função, construir um gráfico e depois calcular sua área. Desta forma, criando meios para superação de obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem do cálculo de integrais de funções.

Portanto, tendo como objetivo principal a reestruturação do ensino de matemática, buscando estratégicas capazes de melhorar a motivação e auto-estima dos alunos, mostramos neste estudo como é possível ensinar, de forma prática e dinâmica a Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas, procuramos através de um período de 08 aulas ministradas na EEEFM Professor Antonio Oliveira numa turma de 3^o ano do ensino médio apresentar uma Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio. Inicialmente com o auxilio do software Geogebra mostramos a construção de gráficos e de algumas figuras geométricas e depois começamos mostrando o cálculo de área pelo método da exaustão, utilizado por Arquimedes, passando pela soma de Riemann, apresentando o processo que por muitos anos foi aplicado, que por sua vez era muito cansativo e inviável para os alunos, chegando ao ponto central de nosso estudo, que é a aplicação do cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas, causando um impacto, pois depois de uma introdução e algumas definições, os alunos observaram a praticidade da aplicação da Integral Definida no cálculo de áreas, observando e lembrando de todo o processo visto anteriormente pela soma de Riemann e agora sendo feito pela Integral Definida, ficando assim cada vez mais interessados pelo conteúdo abordado. Claro que para aplicarmos um conteúdo de tal porte no ensino médio precisamos fazer algumas adaptações dos conteúdos do ensino superior ao ensino médio. Por este e outros motivos que viemos apresentar esta Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio em particular a Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas, más nada que deixe o conteúdo de cálculo fora dos contextos de sua importância.

Portanto, podemos concluir que a Proposta do Ensino de Integrais de Funções no Ensino Médio como também a Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no estudo de áreas de figuras planas podem ser introduzidas, visando uma melhoria no ensino de funções e áreas direcionadas ao ensino médio buscando através de exemplos práticos do seu cotidiano em aulas e atividades em sala aumentar o interesse dos alunos estimulando-os a estudarem cada vez mais para almejar um futuro melhor.

Bibliografia

[1] AVILA, GERALDO. LTC, 7^a edição, 3 vols. Cálculo das Funções de uma Variável, 2003.

[2] ÁVILA, Geraldo. - O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

[3] BOULOS, P. Introdução ao Cálculo. Vol. 1 e 2. São Paulo: Edgard Blucher, 1973.

[4] BOYER, CARL BENJAMIN. História da matemática, 1998.

[5] BARRETO, BENIGNO FILHO; XAVIER, CLAUDIO DA SILVA. Matemática Aula por Aula, Vol. 3 – São Paulo, Editora FTD, 2005.

[6] CAJORI, F. Uma história da matemática, Ciência Moderna, 2007.

[7] DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. Vol. 1 e 3. 4^a ed. São Paulo: Ática, 2008.

[8] DUGAC, PIERRE, Histoire de I'Analyse, Vuibert, Paris, 2003.

[9] EVES, HOWARD. Introdução à história da matemática. Campinas: Unicamp, 2004.

[10] EDGARD BLÜCHER. Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: matemática, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, $3.^a$ edição, 2001.

[11] FUNDAMENTOS DE CÁLCULO, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

[12] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração. 6^a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

[13] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de matemática elementar 1: Conjuntos, funções. 7° ed. São Paulo: Atual, 2001.

[14] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de matemática elementar 8: Límites, Derivadas e Noções de Integral. 7° ed. São Paulo: Atual, 2001.

[15] LEITHOLD, L. “O Cálculo com Geometria Analítica”, vol.1, 3a Ed., Harbra, 1994.

[16] MACIEL, A. B. e LIMA, O. A., Introdução a Análise Real, EDUEP, Campina Grande, PB, 2005.

[17] MENDES, I.A., FOSSA, J.A., VALDÉS, J.E.N. A história como um agente de cognição na educação matemática, Sulina, 2006.

[18] STEWART, JAMES. Thomsom Pioneira, 5^a edição, 2 vols. Cálculo, 2002.

[19] SWOKOWSKI, EARL WILLIAM. Cálculo com Geometria Analítica.-Volume I, São Paulo: Editora McGraw-Hill – Makron Books, 2^a edição – 1995.

[20] THOMAS, GEORGE B.: Cálculo, vol I, 11^a Edição, Addison Wesley, 2002.

[21] SOFTWARE GEOGEBRA: https://www.geogebra.org/material/show/id/124609.

7.4 Anexos

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Antônio Oliveira

Disciplina: Matemática Série: 3º ano Turma: A

Professor: Magno Afonso Martins Barbosa

Aluno(a): ______________________ 10,0

Exercício Avaliativo sobre: **Integrais de Funções e Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no Estudo de Áreas de Figuras Planas.**

1. Usando a integral definida, calcule a área da região limitada pelo gráfico da equação $y - x^2 = -9$ e o eixo dos x, com $x \in [-3, 3]$.

2. Usando a integral definida, calcule a área da região limitada pelos gráficos das equações $y + 2x - 8 = 0$ e o eixo dos x, com $x \in [0, 4]$.

3. Resolva as integrais definidas abaixo:

a) $\int_{-1}^{1} 5x^2 dx$

b) $\int_{2}^{3} (-x^2 + 3x) dx$

c) $\int_{0}^{2} (x-3)^2 dx$

d) $\int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

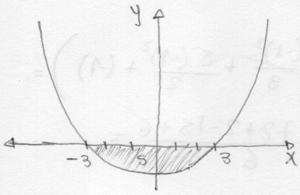
e) $\int_{-2}^{-1} x \cdot (3x-2)\, dx$.

f) $\int_{-1}^{0} (2x-5) \cdot (3x+1)\, dx$.

g) $\int_{-1}^{2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x-2}\, dx$.

h) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx$.

1. $y - x^2 = -9 \Rightarrow y = x^2 - 9 \quad [-3, 3]$



$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

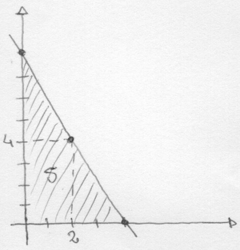
$S = \{-3, 3\}$

$S = \int_{-3}^{3} (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_{-3}^{3} = \left(\frac{3^3}{3} - 9.3\right) - \left(\frac{(-3)^3}{-3} - 9.(-3)\right) = \left(\frac{27}{3} - 27\right) - \left(\frac{-27}{3} + 27\right) =$

$= (9 - 27) - (-9 + 27) = (-18) - (18) = |-18 - 18| = |-36| = \boxed{36\ ua}$

2. $y + 2x - 8 = 0$

$y = -2x + 8 \qquad [0, 4]$



$-2x + 8 = 0$

$(-1)\ -2x = -8\ (-1)$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2} = 4 \qquad S = \{4\}$

$S = \int_0^4 (-2x + 8)\,dx = \left[-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 8x\right]_0^4 = \left[-x^2 + 8x\right]_0^4 =$

$= (-(4)^2 + 8.4) - (-0^2 + 8.0) = (-16 + 32) - 0 = \boxed{16\ ua}$

3. b) $\int_2^3 (-x^2 + 3x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_2^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3.3^3}{2}\right) - \left(-\frac{2^2}{3} + \frac{3.2^2}{2}\right) = \left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{2}\right) - \left(-\frac{4}{3} + \frac{12}{2}\right) =$

$= \left(-9 + \frac{27}{2}\right) - \left(-\frac{4}{3} + 6\right) = -9 + \frac{27}{2} + \frac{4}{3} - 6 = -\frac{15}{1} + \frac{27}{2} + \frac{4}{3} = \frac{-90 + 81 + 8}{6} = \boxed{-\frac{1}{6}}$

d) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 (x^2 - 2 + x^{-2})\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2.2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2.1 - \frac{1}{1}\right) =$

$= \left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 - 1\right) = \frac{8}{3} - \frac{4}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{1} = \frac{16 - 24 - 3 - 2 + 18}{6} = \frac{34 - 29}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$

e) $\int_{-2}^{-1} x.(3x - 2)\,dx = \int_{-2}^{-1} (3x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\right]_{-2}^{-1} = \left[x^3 - x^2\right]_{-2}^{-1} =$

$= \left((-1)^3 - (-1)^2\right) - \left((-2)^3 - (-2)^2\right) = -2 + 12 = \boxed{10}$

g) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x-2}\,dx =$

$$= \int_{-1}^{2} (x^2+5x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3}+\frac{5\cdot 2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{5\cdot(-1)^2}{2}+(-1)\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{3}+10+2\right)-\left(\frac{-1}{3}+\frac{5}{2}-1\right) = \frac{8}{3}+\frac{12}{1}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+1 = \frac{16+72+2-15+6}{6} =$$

$$= \frac{96-15}{6} = \frac{81^{:3}}{6^{:3}} = \boxed{\frac{27}{2}}$$

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Antônio Oliveira

Disciplina: Matemática Série: 3º ano Turma: A

Professor: Magno Afonso Martins Barbosa

Aluno(a):

9,0

Exercício Avaliativo sobre: **Integrais de Funções e Aplicação do Cálculo de Integrais Definidas no Estudo de Áreas de Figuras Planas.**

1. Usando a integral definida, calcule a área da região limitada pelo gráfico da equação $y - x^2 = -9$ e o eixo dos x, com $x \in [-3, 3]$.

2. Usando a integral definida, calcule a área da região limitada pelos gráficos das equações $y + 2x - 8 = 0$ e o eixo dos x, com $x \in [0, 4]$.

3. Resolva as integrais definidas abaixo:

a) $\int_{-1}^{1} 5x^2 dx$

b) $\int_{2}^{3} (-x^2 + 3x) dx$

c) $\int_{0}^{2} (x-3)^2 dx$

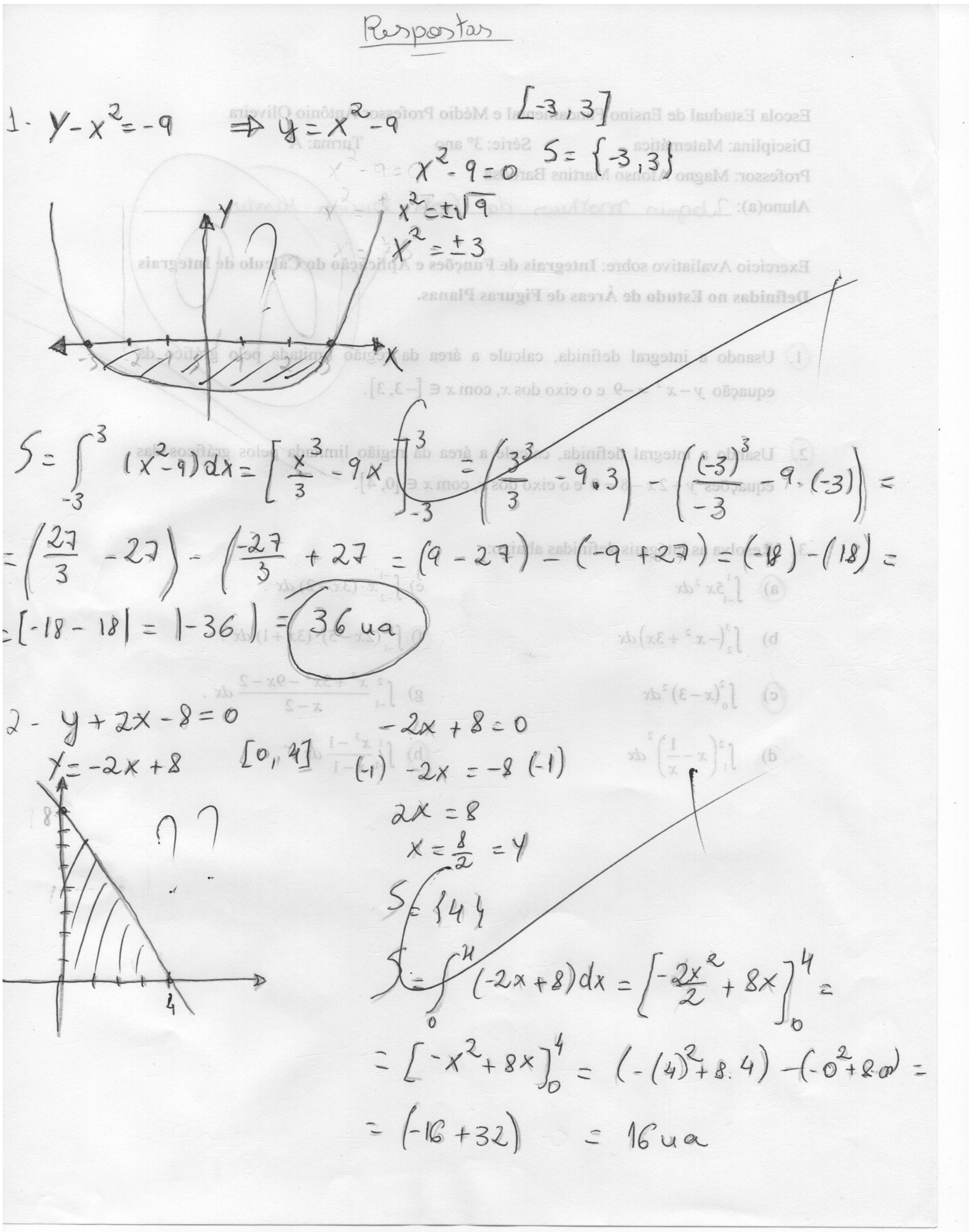
d) $\int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

e) $\int_{-2}^{-1} x \cdot (3x-2)\, dx$.

f) $\int_{-1}^{0} (2x-5) \cdot (3x+1)\, dx$.

g) $\int_{-1}^{2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x-2} dx$.

h) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$.



Respostas

1- $y - x^2 = -9 \Rightarrow y = x^2 - 9$ $[-3, 3]$

$x^2 - 9 = 0$ $S = \{-3, 3\}$

$x^2 = \pm\sqrt{9}$

$x^2 = \pm 3$

$$S = \int_{-3}^{3} (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_{-3}^{3} = \left(\frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3\right) - \left(\frac{(-3)^3}{-3} - 9 \cdot (-3)\right) =$$

$$= \left(\frac{27}{3} - 27\right) - \left(\frac{-27}{3} + 27 = (9 - 27) - (-9 + 27) = (-18) - (18) =\right.$$

$$= |-18 - 18| = |-36| = 36\ ua$$

2- $y + 2x - 8 = 0$ $[0, 4]$

$y = -2x + 8$

$-2x + 8 = 0$

$(-1)\ -2x = -8\ (-1)$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2} = 4$

$S = \{4\}$

$$S = \int_{0}^{4} (-2x + 8)\,dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + 8x\right]_{0}^{4} =$$

$$= \left[-x^2 + 8x\right]_{0}^{4} = (-(4)^2 + 8.4) - (-0^2 + 8.0) =$$

$$= (-16 + 32) = 16ua$$

3- a) $\int_{-1}^{1} 5x^2 dx = \left[\frac{5x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{5\cdot 1^3}{3}\right) - \left(\frac{5\cdot(-1)^3}{3}\right) = \frac{5}{3} - \left(\frac{-5}{3}\right) =$

$= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

c) $\int_0^2 (x-3)^2 dx = \int_0^2 (x^2-6x+9)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{6}x^2}{\cancel{2}} + 9x\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^2 =$

$= \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2^2 + 9\cdot 2\right) - 0 = \frac{8}{3} - 12 + 18 = \frac{8}{3} + 6 = \frac{8+18}{3} = \frac{26}{3}$

f) $\int_{-1}^0 (2x-5)\cdot(3x+1)\,dx = \int_{-1}^0 (6x^2+2x-15x+5)\,dx =$

$= \int_{-1}^0 (6x^2-13x-5)\,dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{13x^2}{2} - 5x\right]_{-1}^0 = \left[2x^3 - \frac{13x^2}{2} - 5x\right]_{-1}^0$

$= \left(2\cdot 0^3 - \frac{13\cdot 0^2}{2} - 5\cdot 0\right) - \left(2(-1)^3 - \frac{13\cdot(-1)^2}{2} - 5\cdot(-1)\right) = 0 - \left(-2 - \frac{13}{2} + 5\right) =$

$= 2 + \frac{13}{2} + 5 = 7 + \frac{13}{2} = \frac{14+13}{2} = \frac{27}{2}$

h) $\int_{-1}^1 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx =$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$x^2 + x + 1$

$= \int_{-1}^1 (x^2+x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 1\right) =$

$= \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + 1 =$

$\frac{2}{3} + 2 = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$