UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Presidente Prudente
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Rodrigo Felipe da Silva

Função exponencial e logarítmica

Presidente Prudente
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Função exponencial e logarítmica

Rodrigo Felipe da Silva

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Orientador
Prof. Dr. Marco Antônio Piteri

2016

Silva, Rodrigo Felipe da.
Função exponencial e logarítmica / Rodrigo Felipe da Silva. -- São José do Rio Preto, 2016
118 p. : il., tabs.

Orientador: Marco Antônio Piteri

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 3. Funções exponenciais. 4. Funções logarítmicas. 5. Aprendizagem baseada em problemas. 6. Tecnologia educacional. 7. Matemática – Metodologia. I. Piteri, Marco Antônio. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU – 517.5(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Rodrigo Felipe da Silva
FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antônio Piteri
Orientador

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
UFSCAR - São Carlos

Prof. Dr. Aylton Pagamisse
UNESP - Presidente Prudente

Presidente Prudente, 08 de julho de 2016

Dedico este trabalho a minha esposa Mayara Miralha, aos meus pais Luiz Edval e Maria Marluce e irmã Laise Felipe. Amo vocês!

Agradecimentos

A realização do presente trabalho foi possível devido à colaboração de muitas pessoas que me auxiliaram durante o processo. Manifesto assim minha gratidão:

Em primeiro lugar a minha esposa Mayara Faria Miralha que esteve comigo em todos os momentos, me apoiando e ajudando diante de cada etapa dessa caminhada. Obrigado por estar ao meu lado.

A minha família que me apoiaram e incentivaram durante o curso.

Aos meus amigos, principalmente os companheiros de curso que juntos através de companherismo e ajuda mútua conseguimos alcançar nossos objetivos.

Agradeço à SBM pela iniciativa do Profmat e à CAPES pelo suporte Financeiro.

Finalmente, agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UNESP de Presidente Prudente por tudo que me ensinaram durante esse processo, em especial meu orientador Marco Antônio Piteri pelo apoio e paciência em todos os momentos de difculdades e me animando para a conclusão deste trabalho.

A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela.

Albert Einstein

Resumo

No ensino da matemática um dos assuntos mais desafiadores aos alunos do Ensino Médio é o de funções exponenciais e logarítmicas, sendo que grande parte dos alunos possuem dificuldades de compreensão e resolução dos exercícios propostos. Dessa maneira o trabalho em tela tem como objetivo precípuo o ensino de funções exponenciais e logarítmicas, visando apresentar aos docentes a possibilidade de ensinar o conteúdo de maneira mais atrativa e acessível aos seus alunos. Para tanto, a pesquisa se valeu de levantamento bibliográfico e documental acerca da temática abordada. Salienta-se que ao iniciar o ensino de funções é preciso fazer um resgate histórico do conteúdo, buscando desvelar suas origens. Posteriormente o trabalho traz as concepções do tema segundo os documentos oficiais. A fim de concretizar o estudo trabalha-se com o uso das definições aritméticas e geométricas, pois são fundamentais para o entendimento das funções, e também com situações problema contextualizadas, buscando envolver os alunos no processo de ensino aprendizagem promovendo o levantamento de hipóteses e consolidando a aprendizagem. Essas situações problemas serão difundidas por meio de atividades propostas nas quais pretende-se explorar a caracterização da função logarítmica e exponencial, buscando relacioná-las ao contexto do educando, em situações que poderiam ocorrer em seu cotidiano, para isso propomos alguns exemplos de atividades, como: a utilização do BROffice Calc no Ensino de potenciação com números irracionais, o jogo de xadrez, mágica do baralho e a resolução de problemas da OBMEP e do ENEM.

Palavras-chave: Matemática, Funções, Logaritmo e Exponencial, Aplicações.

Abstract

In teaching mathematics one of most challenging subjects to middle school students is of exponential and logarithmic functions, being that most of the students have difficulties in understanding and addressing the proposed exercises. In this way the work on canvas aims foremost teaching of exponential and logarithmic functions, n order to present to teachers the possibility to teach the content more attractive and accessible to his students. To this end, the research used for bibliographical and documental about the theme addressed.It should be noted that the starting teaching duties must make a historic rescue of the contents, looking for their origins unveiling. In order to implement the study works with the use of arithmetic and geometric definitions, because they are fundamental to the understanding of the functions, and also with contextualized problem situations, seeking to engage students in teaching learning process promoting the survey of hypotheses and consolidating learning. These problems will be disseminated through activities in which it is intended to explore the characterization of logarithmic and exponential function, seeking to relate them to the context of educating, in situations that could occur in their daily lives, for this we propose some examples of activities, such as: libreoffice Calc use in teaching empowerment with irrational numbers, the game of chess, magic of the deck and the troubleshooting of OBMEP and ENEM.

Keywords: Mathematics, Functions, Logarithm and exponential, Applications.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O ensino relacionado à função exponencial e logarítmica faz parte dos conteúdos a serem abordados no primeiro ano do Ensino Médio. O tema é considerado desafiador de ser apresentado, discutido e ensinado aos alunos, pois é complexo e árduo. Dessa maneira, denota-se que grande parte dos alunos demonstram dificuldades na aprendizagem/compreensão desses conteúdos. Os PCNEM (Brasil, 2002) e os PCN+ (Brasil, 2002) retratam a proposta do ensino de função baseado em situações problemas e fenômenos naturais determinados/relacionados à essas funções, salientando a busca de um aprendizado que seja útil na vida dos educandos, promovendo o desenvolvimento de conhecimentos contextualizados, e também amplos e mais abstratos, visando contemplar as necessidades específicas da vida contemporânea.

Com base nos documentos oficiais norteadores da educação (PCNEM e DCN) pode-se depreender que o tema de ensino relacionado às funções possuem caráter interdisciplinar, podendo ser aplicado na construção/interpretação/leitura de gráficos e em outras áreas, como a Física, Geografia e Economia, entre outras. Dessa maneira, cumpre salientar que o ensino de funções é fundamental para construção do conhecimento do educando, e cabe aos docentes ministrar um ensino que garanta aos alunos a possibilidade de aplicar seus conhecimentos relacionados ao conteúdo de funções em diversas situações de sua vida cotidiana.

> Pode-se conjecturar que grande parte das dificuldades dos estudantes, ao longo da Escola Básica e no Ensino Superior, se assenta sobre o fato de que os mesmos não conseguem coordenar sobre um determinado conhecimento matemático os diversos registros de representação. Eles possuem o domínio isolado de determinada representação e o tratamento específico que a mesma requer, mas tornam-se incapazes de articular estas representações para estabelecer uma apreensão do objeto matemático.(ANDRADE, KAIBER 2011, p.10)

No entanto, percebe-se que muitas vezes o ensino das funções tem como base a resolução de equações e cálculos que são desvinculados às orientações de abordagem do tema por meio de situações problemas contextualizadas determinadas nos documentos oficiais.

1.1 Objetivos do trabalho

Objetivo Geral

A pesquisa em tela propõe que o ensino de funções (propriedades, ideias, definições e caracterizações) seja explanado a partir de problemas/atividades contextualizadas, provando sua aplicabilidade em situações concretas de seu dia a dia.

Objetivos Específicos

- Explorar aspectos da história matemática, mostrando o desenvolvimento de seus conceitos com o decorrer do tempo;
- Apresentar a definição dos logaritmos buscando relacioná-la a fenômenos encontrados/vivenciados no cotidiano do aluno;
- Mostrar a relação estreita entre o conceito de logaritmos e fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos e sociais;
- Ressaltar a importância do trabalho de logaritmos por meio de situações problemas.

1.2 Organização do trabalho

Visando contemplar os objetivos da pesquisa o presente trabalho se organiza em capítulos sistematizados e relevantes acerca do tema em estudo.

No Capítulo 2 julgou-se necessário fazer uma contextualização histórica relacionada do conceito de logaritmos, buscando retratar suas origens e os principais pensadores que contribuiram para o seu desenvolvimento. No Capitulo 3, denominado "Ensino Médio: concepções de documentos oficiais" buscou-se abordar o que os documentos oficiais entendem por Ensino Médio, bem como, quais são suas particularidades, conteúdos e objetivos a serem alcançados. Ainda dentro desse capítulo salientou-se o ensino de matemática de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), o ensino de funções de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), a proposta curricular do Estado de São Paulo "Programa São Paulo faz Escola" e o ensino das funções exponenciais e logarítmicas. Por sua vez, no Capítulo 4, contempla-se o estudo do ensino de funções desvelando seus conceitos prévios sobre potenciação, potência de expoente natural, potência de expoente inteiro negativo, potência com expoente racional, potência com expoente irracional e potência com expoente real, potencializando a aprendizagem de função exponencial, analisando seu gráfico e comportamento, além de contextualizar o tema. Definiu-se logaritmo, função logarítmica e seu gráficos analisando também sua forma e propriedades e aplicando tais conceitos em situações adversas, define-se o número "**e**", realça-se a sua importância, os logaritmos decimais, a definição geométrica de logaritmo a partir da área de uma faixa da Hipérbole.

Na sequência, o Capítulo 5 apresenta algumas propostas de atividades como: a utilização do BROffice Calc no Ensino de potenciação com números irracionais, o jogo de xadrez, mágica do baralho, a escala Ricther, a intensidade sonora e a resolução de problemas da OBMEP e do ENEM.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as considerações gerais acerca do trabalho, buscando sistematizar os conhecimentos e as possíveis deduções sobre o que foi discutido ao longo do estudo realizado.

Para facilitar a compreensão de alguns aspectos discutidos ao longo do trabalho, essa dissertação ainda possui três anexos, denominados: "A evolução da Escrita"; "A história do Jogo de Xadrez"; e "Tábua de Logaritmos Decimais".

2 Logaritmos: contextualização histórica

Ao longo do processo de civilização e da evolução humana, foi possível elaborar e refinar o pensamento científico que norteou o desenvolvimento de diferentes áreas do conhecimento, tornando alcançável atingir os níveis em que se encontram a ciência e a tecnologia nos dias de hoje. Entretanto, é necessário mencionar que inúmeras preocupações teóricas já existentes há milhares de anos entre os povos antigos (egípcios, sumérios, fenínicios, babilônios, gregos, romanos, judeos, maias, chineses, hindus e árabes, ...), motivaram o descobrimento e a formalização de conceitos que se tornaram reais somente a partir do século XV ou XVI. Para ser mais preciso, as modernas noções de exponencial e logaritmos, objeto central deste trabalho, possui origem que remonta há 4000 a.C.

Por volta desse período, os babilônios já dominavam técnicas para o cálculos de áreas, de superfícies, de volume, de capacidade e de peso. Também foram eles os primeiros a demonstrarem métodos e técnicas que influenciaram na criação dos logaritmos, lembrando que todos os cálculos realizados por eles faziam uso do sistema sexagesimal.

Os babilônios estenderam o princípio posicional numérico, bem como as frações, sendo assim eles demonstravam grande domínio matemático equivalente até o que ocorre na atualidade com a moderna notação decimal para frações. Na Universidade de Yale nos EUA existe uma grande tabela de argila babilônica contendo o cálculo de $\sqrt{2}$ com três casas sexagesimais, a resposta seria escrita como 1;24,51,10, onde o "ponto e vírgula" faz a separação da parte inteira da fracionária, enquanto a vírgula, separa os símbolos sexagesimais. Vale mencionar que ao converter os resultados obtidos pelos babilônios para o sistema de numeração posicional na base 10, obtém-se aproximadamente 1,414222 para a raiz quadrada de dois (Boyer, 2003), ou seja, quatro dígitos de precisão, o que é notável e certamente suficiente para inúmeras aplicações, mesmo nos dias de hoje.

Segundo Boyer (2003), entre outras conquistas dos babilônios também é possível verificar outras tabelas (tabletas) feitas de argila com exponenciais semelhantes às tabelas de logaritmos desenvolvidas milhares de anos depois, nas quais se observa as primeiras dez potências.

Avançando um pouco no tempo, Arquimedes (287 – 212 a.C.) em sua obra Psammites-contador de areia, tentou quantificar as dimensões do universo, afirmando que seria possível preenchê-lo com grãos de areia e para isso precisava encontrar um número e encontrou a solução 10^{51}, que não podia ser escrita na numeração utilizada na altura (alfabética), que permitia apenas escrever números até 10000 (uma miríade). Arquimedes criou então um novo sistema onde considerou os números de 1 a 10^8, ou seja, até uma miríade de miríade ($10000 \cdot 10000 = 10^8$), que era escrito na numeração grega como sendo de primeira ordem; depois, os números de 10^8 até 10^{16} como sendo de segunda ordem, em que a unidade é 10^8, e assim sucessivamente. É importante observar que nesse trabalho, Arquimedes cria o princípio que influenciaria Napier séculos depois.

> Foi em conexão com esse trabalho sobre números imensos que Arquimedes mencionou, muito incidentalmente, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos - a adição das "ordens" dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 100.000.000) corresponde a achar o produto dos números (BOYER, 2003, p.86).

Por sua vez, os árabes desempenharam um papel primordial na evolução da matemática ocidental, desenvolvendo a aritmética e a álgebra, onde sua trigonometria foi fortemente influenciada pelo sistema dos hindus. Por exemplo, foram, os árabes ibn-Yunus e ibn-al-Haitham que elaboraram a fórmula descrita pela Equação (2.1), que transforma o produto de cossenos numa soma de cosseno (BOYER, 2003, p.212).

$$2 \cos x \cos y = cos(x + y) + cos(x - y) \tag{2.1}$$

Como se sabe, essa é uma das fórmulas que permitem transformar produto de funções em somas de funções e que foram úteis na Europa no século XVI para facilitar os cálculos nos observatórios astronômicos e desenvolvidas muito antes da criação dos logaritmos por Napier. O método utilizado era genericamente denominado *prosthaphaeresis*, que em grego significa adição e subtração. Essas regras também são conhecidas por Fórmulas de Werner, que era um astrônomo europeu.

Com o propósito de ilustrar, vale lembrar as identidades trigonométricas para o seno da soma dos arcos (Equação (2.2)), o seno da diferença dos arcos (Equação (2.3)), assim como o cosseno da soma dos arcos (Equação (2.4)) e o cosseno da diferença dos arcos (Equação (2.5)).

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cos(a) \tag{2.2}$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cos(a) \tag{2.3}$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \tag{2.4}$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \tag{2.5}$$

Fazendo-se algumas manipulações algébricas sobre essas identidades, chega-se facilmente ao que se denomina por Fórmulas de Werner.

Adicionando as Equações (2.2) e (2.3) obtém-se a Equação (2.6). Por sua vez, subtraindo as Equações (2.2) e (2.3) obtém-se a Equação (2.7). Do mesmo modo, somando-se as Equações (2.4) e (2.5) obtém-se a Equação (2.8), e, realizando a diferença entre as Equações (2.4) e (2.5) obtém-se a Equação (2.9).

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(b) \tag{2.6}$$
$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen}(b)\cos(a) \tag{2.7}$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) \tag{2.8}$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \tag{2.9}$$

Pode-se avançar ainda mais por meio de uma mudança de variável, do seguinte modo: $a+b=p$ e $a-b=q$. Logo, resolvendo-se o sistema linear associado encontra-se os valores das variáveis a e b, respectivamente, pelas Equações (2.10) e (2.11).

$$a = \frac{p+q}{2} \tag{2.10}$$
$$b = \frac{p-q}{2} \tag{2.11}$$

Finalmente, substituindo os valores de a e b nas Fórmulas de Werner dadas pelas Equações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5), chega-se definitivamente nas Fórmulas de Prostaférese dadas pela Equação (2.12). Considerando-se a existência de fórmulas envolvendo senos e cossenos, é fácil obter fórmulas para a tangente da soma dos arcos e para a tangente da diferença dos arcos.

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2\operatorname{sen}(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})) \tag{2.12}$$
$$\tag{2.13}$$
$$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2\operatorname{sen}(\frac{p-q}{2}))\cos(\frac{p+q}{2}))$$
$$\tag{2.14}$$
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2}))\cos(\frac{p-q}{2}))$$
$$\tag{2.15}$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\operatorname{sen}(\frac{p+q}{2}))\operatorname{sen}(\frac{p-q}{2}))$$

Ao final do século XIII (1360), o bispo francês Nicole Oresme deixou inúmeros manuscritos e regras sistematizadas para operar com potências, onde os expoentes eram racionais e irracionais. Nessa mesma época, Nicolas Chuquet utilizou notações para potências com expoente zero, escrevendo também a obra Triparty em La science, na qual ele elabora tabelas de valores com as potências de 2, similares as tabelas de logaritmos.

Chuquet também observou que as potências do número dois se relacionavam com o princípio associado à Equação (2.1), onde é possível reescrever produtos por meio de somas. Nesse trabalho, os índices das potências de 2 eram colocados em uma tabela de 0 a 20, no qual as somas dos índices correspondiam aos produtos das potências. Se por acaso não houvesse grandes lacunas entre as colunas isso seria uma miniatura de uma tabela de logaritmos. Como pode ser visto, essas descobertas foram repetidas diversas vezes e se tornaram fundamentais para a definitiva invenção dos logaritmos que conhecemos na atualidade (BOYER, 2003).

É fácil observar que mesmo antes da invenção dos logaritmos por Napier, muitos conceitos relevantes para a matemática já estavam disponíveis. Além do mais, como se sabe, as idéias de logaritmo, potências e sequências aritméticas e geométricas, estão fortemente relacionados entre si.

A invenção dos logaritmos que conhecemos nos dias de hoje, inicia-se com a publicação em 1614 da obra Mirifici logarithmorum por John Napier. Desde então, o termo "logaritmo" passa a integrar a matemática e se torna um tema importante e, portanto, estudado por cientistas da Europa, China e posteriormente, de todo o mundo.

Considera-se como imprescindível destacar o período no qual John Napier viveu, bem como suas criações, motivações e contribuições para a matemática.

Não apenas os conceitos matemáticos foram se desenvolvendo no decorrer dos anos, mas a escrita também teve mudanças, observe a tabela da evolução de como foi se modificando a representação de potenciação.

2.1 Os logaritmos de John Napier

John Napier nasceu na Escócia no ano de 1550. Durante sua infância estudou religião e quando adulto demonstrou interesse pela prática religiosa, sendo protestante, mantinha posição oposta ao papado. Considerando suas origens, possuía título de nobreza, sendo Barão de Merchiston, também era proprietário de terras e possuia interesses em várias áreas do saber, entre elas a militar. Conhecendo as histórias de Arquimedes, chegou a projetar espelhos gigantes para incendiar navios. Um outro exemplo de sua genialidade foi a invenção de um "parafuso hidráulico para controlar o nível da água em minas de carvão".

Apesar de ser apenas um matemático curioso e não um matemático profissional, Napier é considerado um grande cientista e é lembrado essencialmente por seu trabalho de vinte anos relacionado ao desenvolvimento dos logaritmos. Ao se convencer que não há nada mais trabalhoso no campo matemático do que as operações de multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas e cúbicas de números grandes, passou a se preocupar em como contornar essas dificuldades, ou seja, em como resolver essas operações de uma forma mais simples e em menor tempo (MAOR, 2003). A ideia central era transformar uma operação mais complexa em uma mais simples, disponibilizando tabelas com valores previamente calculados, vindo a simplificar o trabalho dos cientistas, em particular dos astrônomos.

Embora essas preocupações já estivessem presentes desde a antiguidade, os estudos de Napier foram embasados fundamentalmente nos trabalhos de Arquimedes e Stifel, que já haviam desenvolvidos trabalhos com potências sucessivas de um dado número. Deve-se mencionar também que era de seu conhecimento as regras chamadas *prosthaphaeresis* e as regras de Werner, discutidas previamente.

Observando resultados desenvolvidos ao longo de milhares de anos e partindo da premissa que as operações aritméticas de soma e a subtração são mais fáceis do que a multiplicação e a divisão, Napier notou que seus problemas poderiam ser solucionados se transformasse um produto em uma soma e a divisão, em uma subtração. Embora o conceito de função ainda não estivesse completamente formalizado, ele buscava por relações matemáticas do tipo descritas pelas Equações (2.16) e (2.17).

$$f(x.y) = f(x) + f(y) \tag{2.16}$$

$$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \tag{2.17}$$

Naquela altura, Napier não dispunha do conceito de base, portanto não utilizava uma base decimal (potências de dez), por exemplo. A palavra *logaritmo* era usada com o sentido de descrever uma proporcionalidade, ou seja, um quociente. A rigor, essa palavra foi criada a partir da junção de duas palavras gregas, a saber: *logos* e *arithmos*. A primeira tem o significado de razão, enquanto a segunda está associada a ideia de número.

Com o propósito de ilustrar um outro uso da palavra *arithmos*, vale mencionar que Pitagoras já tinha observado que haviam dois tipos de *arithmos*, os *protoi arithmós* que seriam números primários e os *deuterói arithmós* que seriam os números secundários. Aqui, os termos primários e secundários se referem a possibilidade dos números serem escritos ou não por meio da multiplicação entre outros números. Assim, números do primeiro tipo seriam, por exemplo: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$, enquanto $4, 10, 15, 18, \cdots$ seriam do segundo tipo. É fácil perceber que Pitagoras estava se referindo ao que se conhece hoje como números primos e compostos e praticamente enuncia o Teorema Fundamental da Aritmética, proposto e provado por Gauss no final do século XVIII, mais precisamente em 1796.

Ao iniciar o trabalho de montagem de suas tabelas, como observado anteriormente, Napier pensou nos logaritmos como razões entre segmentos, como valores de uma sequência geométrica e mais uma vez, baseado em resultados previamente estabelecidos.

> Michael Stifel (1487-1567) havia estabelecido, anos antes, uma relação entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes dos respectivos termos. Considere a sequência geométrica $(1, q, q^2, q^3, ..., q^n$

Tabela 2.1: Ilustração das ideias de Stifel.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q = 2$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$q = 3$	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
$q = 4$	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576

> $,..., q^m, ...)$. Stifel percebeu que $q^n.q^m = q^{m+n}$ e que $\frac{q^n}{q^m} = q^{n-m}$. Além disso, ele havia percebido que os expoentes formavam uma *progressão aritmética*. Napier, ao que parece, inspirou-se nestes resultados obtidos por Stifel. (SANTOS, p.19, 2008).

A Tabela 2.1 ilustra em cada uma de suas linhas sequências numéricas formadas com 11 termos. Na primeira linha tem-se uma PA de razão 1, enquanto nas demais linhas, PG's de razão 2, 3 e 4, respectivamente.

Como pode ser observado na Tabela 2.1 os expoentes são somente inteiros e a diferença entre termos consecutivos de uma PG é relativamente significativa, conforme se aumenta o expoente. Assim, Napier desejava escrever os expoentes em forma de uma faixa contínua de valores, sabendo *a priori* que para manter os termos próximos na sequência, não poderia trabalhar com valores altos na base, tomando apenas valores pequenos. Um valor que correspondesse a uma fração da unidade, escolhendo assim a unidade 10 e baseado na trigonometria de sua época, escolheu o valor $(1 - \frac{1}{10^7}) = 0,9999999$.

Dessa maneira seria capaz de conservar os termos de sua progressão geométrica de potências inteiras. Os termos de sua sequência eram obtidos com a subtração do termo anterior a sua 10^7 parte, assim Napier montou sua primeira tabela de 101 elementos.

Sabe-se que o estudo de Napier durou aproximadamente duas décadas e foi totalmente realizado com pena e papel, já que naquele tempo não havia calculadoras ou quaisquer artefatos mecânicos para auxiliar nessa tarefa. Entretanto, é importante mencionar que os logaritmos de Napier eram diferentes daqueles que se manipula nos dias atuais, considerando que Napier não dispunha do conceito de base. Assim, todos os princípios utilizados eram explicados em termos geométricos.

Uma outra forma de ver os logaritmos imaginados por Napier era pensar em termos de segmentos, semirretas e em velocidades, como pode ser observado no conjunto de premissas descritas a seguir e retiradas de Boyer (2003).

1. Suponha, por exemplo, o segmento de reta $\overline{AB}$ e a semirreta passando por $\overline{DX}$, com origem no ponto D, conforme Figura 2.1;

2. Admita o segmento $\overline{AB}$ como a unidade. No caso de Napier era adotado o valor 10^7;

3. Suponha um ponto C percorrendo o segmento $\overline{AB}$ e um ponto F percorrendo a semirreta com suporte no segmento $\overline{DX}$ de forma que ambas iniciam o movimento simultaneamente a partir dos extremos A e D, respectivamente;

4. Admita ainda que os pontos C e F possuam a mesma velocidade inicial;

5. Suponha que a velocidade do ponto C seja dada pela medida do segmento $\overline{CB}$ e que a velocidade F seja constante e igual a velocidade inicial de C;

6. Nessas condições, Napier concebeu a noção de logaritmo do número $x = \overline{CB}$ como sendo o número $y = \overline{DF}$. Aqui, o conceito de base não interfere nesta definição (Boyer, 2003).

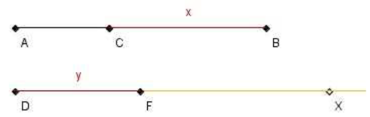


Figura 2.1: Vetor

Nesse contexto, o ponto C inicia seu movimento a partir do ponto A ao longo do segmento $\overline{AB}$ com uma velocidade variável, diminuindo cada vez mais sua distância do ponto B. A velocidade do ponto F, apesar de ser constante, está diretamente relacionada a velocidade inicial do ponto C.

> A definição geométrica de Napier concorda, é claro, com a descrição numérica dada acima. Para mostrar isto, seja $\overline{PB} = x$ e $\overline{CQ} = y$. Se $\overline{AB}$ é tomado como 10^7 e se a velocidade inicial de P também é tomada como 10^7, então em notações modernas temos $\frac{dx}{dt} = -x$ e $\frac{dy}{dt} = 10^7$, $x_q = 10^7$, $y_q = 0$. Então $\frac{dy}{dx} = \frac{-10^7}{x}$ ou $y = -10^7 lncx$, onde das condições iniciais resulta $c = 10^{-7}$. Logo $y = 10^7 ln(\frac{x}{10^7})$ ou $\frac{y}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}}(\frac{x}{10^7})$. Isto é, se as distâncias $\overline{PB}$ e $\overline{CQ}$ fossem divididas por 10^7, a definição de Napier levaria precisamente a um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, (BOYER, 2003, p.214).

Ainda de acordo com Boyer (2003), o conceito de função logarítmica estava implícito na definição de Napier, mas o conceito não se concretizou porque o objetivo maior de Napier era somente simplificar as cálculos numéricos. Formalmente, o aparecimento dos logaritmos se deu somente no ano de 1614, com a publicação do artigo *Mirifici logarithmorum cononis descriptio*, assim como a publicação de suas primeiras tábuas e isso representou uma capacidade de se realizar cálculos de forma mais simplificada jamais observada anteriormente.

Um tábua (tabela) de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números formadas por um conjunto de linhas. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, na mesma linha, chamado o seu *logaritmo*. Logo, para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos (coluna à direita), tendo como resultado o logaritmo do produto. Na sequência, para encontrar o produto basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que possui aquele valor de logaritmo.

Por outro lado, na divisão, o processo ocorre de forma semelhante. Para se dividir dois números, basta subtrair os respectivos logaritmos. Para elevar um número a uma potência n é suficiente multiplicar o logaritmo pelo mesmo valor n. Do mesmo modo, para extrair a m–ésima raiz basta dividir o logaritmo por m. É claro que após essas operações era necessário ir até a tábua e encontrar os números que possuiam os respectivos logaritmos.

Essas e outras propriedades estão devidamente enunciadas e provadas no Capítulo 4. É importante observar ainda que, a relação que Napier fazia entre cada uma das linhas das colunas de suas tábuas é exatamente aquilo que hoje é referenciado por função. Como se sabe, a gênese do conceito de logaritmmo precede a noção de função no desenvolvimento da Matemática.

No Anexo A pode-se encontrar uma tabela com logaritmos decimais onde inúmeras atividades envolvendo operações de multiplicação e divisão poderiam ser exploradas, mostrando aos alunos como eram realizados os cálculos no século XVI, motivando-os a refletir e contrastar com a realidade dos dias de hoje, com o advento dos modernos computadores.

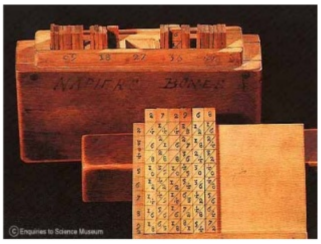


Figura 2.2:
Tábua de Napier

Logo após o aparecimento das primeiras tábuas de logaritmos e a comunidade científica percebendo a importância e utilidade delas, conjuntamente com o matemático inglês Henry Briggs (1561 – 1631), Napier elaborou uma nova tábua, bem mais simples de ser utilizada e onde se fazia uso apenas da base 10, o que é conhecido popularmente hoje como *logaritmos decimais* ou *logaritmos ordinários*.

> [...]Brigs começou com $\log 10 = 1$ e depois achou outros logaritmos tomando raízes sucessivas. Calculando que $\sqrt{10} = 3,162277$, Briggs tinha que $\log 3,162277 = 0,5000000$, e de $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{31,62277} = 5,623413$ tinha que $\log 5,623413 = 0,750000$. (Boyer, 2003, pp.215)

É importante observar como uma ideia básica inicial que se concentrava essencialmente em "simplificar cálculos", motivada por povos antigos há milhares de anos, evoluiu sistematicamente ao longo da civilização, foi refinada e deu origem ao conceito de logaritmos, e, posteriormente ao de funções logarítmicas, que, conjuntamente com funções afins, quadráticas e exponenciais se constituem nos modelos matemáticos mais simples e amplamente utilizados numa vasta gama de problemas. Desde a gênese dos logaritmos até os dias atuais, sua utilidade se revelou decisiva no desenvolvimento de várias áreas do conhecimento humano.

O conceito de logaritmos como se conhece hoje, foi forjado ao longo de milhares de anos e com a contribuição direta e indireta de inúmeros personagens. Essa mesma busca pelo conhecimento fez com que o homem desenvolvesse artefatos mecânicos, eletrônicos e digitais que passaram a substituir as "tábuas de logaritmos"como instrumento de cálculo. Atualmente, calculadoras digitais disponíveis em notebooks, *tablets* e celulares são capazes de realizar cálculos extremamente complexos e em tempo real. Entretanto, o legado conceitual subjacente a noção de logaritmo continuará para sempre a contribuir para a evolução da matemática e das ciências em geral.

Diferentes pesquisas apontam para a importância de se utilizar abordagens metodológicas alternativas que possam auxiliar e facilitar o processo de ensino-aprendizagem da matemática, entre elas o uso de recursos da história da matemática, de jogos, de novas tecnologias, modelagem matemática (situações problema).

Explorar o uso da História da Matemática como um recurso adicional no processo de ensino-aprendizagem da matemática é algo que está presente nos documentos oficiais. Tentar fazer com que o aluno consiga enxergar que a matemática é uma criação humana, que não é fruto da mente de um único indivíduo e de um simples desejo de se criar algo completamente desconectado da realidade, mas que suas origens estão relacionadas a diferentes povos, muitas vezes sem contato entre eles e foi desenvolvida para resolver problemas práticos relevantes no cotidiano dessas civilizações. Entretanto, a história não pode se limitar a fatos isolados ou simplesmente de bibliografias de matemáticos famosos (BRASIL, 1998).

É importante salientar ao aluno que a moderna tecnologia existente hoje nada mais é do que a transformação do conhecimento acumulado de várias áreas do saber em produtos e processos e que a matemática está presente no projeto, desenvolvimento e materialização de um aparelho celular, de um carro ou um avião.

Por outro lado, diferentes fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos e sociais que envolvem grandes ou pequenas variações ao longo do tempo são modelados por funções logarítmicas e pela sua inversa – a função exponencial, ilustrando a interdisciplinariedade e transversalidade do conceito de logaritmos. Problemas como desintegração radioativa, cultura de bactérias, crescimento populacional, juros, absorção/eliminação do teor alcólico pelo corpo humano, são alguns exemplos. No Capítulo 5 são explorados problemas dessa natureza.

3 O Ensino médio: concepção de documentos oficiais

Como o objetivo precípuo do trabalho é discutir/analisar o ensino de funções exponenciais e logarítmicas, conteúdo que é abordado no Ensino Médio, nesse capítulo será feito uma análise a cerca dos documentos oficiais que norteiam o trabalho docente a ser realizado nesta etapa de ensino.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB, o ensino médio se consiste na etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, tendo como finalidade: a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos que foram adquiridos no ensino fundamental, tornando possível o prosseguimento dos estudos, a preparação básica para o mercado de trabalho, e para a cidadania do educando, para que este possa continuar aprendendo, sendo capaz de se adaptar com facilidade a novas condições de trabalho ou aperfeiçoamento, o aprimoramento como pessoa em sua formação ética, com o desenvolvimento de sua autonomia intelectual e o pensamento crítico, e a compreensão de fundamentos técnicos científicos relacionando teoria e prática no ensino das diversas disciplinas (Brasil, 1996).

O Ensino Médio, ao ser instituído como última etapa da Educação Básica, tem objetivo de complementar e aprofundar o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental, dessa maneira a LDB/96 determina que o currículo dessa etapa consista de alguns pressupostos:

> I - destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania;
> II - adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes;
> III - será incluída uma língua estrangeira moderna, como disciplina obrigatória, escolhida pela comunidade escolar, e uma segunda, em caráter optativo, dentro das disponibilidades da instituição (Brasil, 1996).

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio dispõe a educação visando a promoção de valores, frisando que os atuais marcos legais subsidiados pela LDB/96 representam um divisor na construção da identidade do Ensino Médio, sendo dois aspectos fundamentais, o primeiro deste dispõe sobre as finalidades do Ensino Médio que seria o aprimoramento do educando como ser humano, em sua formação ética, promovendo o desenvolvimento de sua autonomia intelectual, de seu pensamento crítico, sua preparação para o mundo de trabalho e o desenvolvimento de novas competências para o mercado de trabalho.

O segundo dispõe sobre a organização curricular com os seguintes componentes: uma base curricular nacional comum, sendo complementada em cada escola de acordo com suas especificidades regionais e locais, de sua sociedade, cultura e economia; o planejamento e desenvolvimento do currículo de modo a promover a interdisciplinaridade entre as disciplinas escolares; uma gestão democrática, quando os professores participam ativamente da elaboração de normas comuns, e da proposta pedagógica da instituição (Brasil, 2006).

Salienta-se que o grande avanço depreendido por tais diretrizes se constitui na possibilidade de organizar o trabalho das escolas a partir de suas especificidades e de sua realidade local, tendo como primordial a gestão democrática e o trabalho coletivo.

Conclui-se a partir do exposto que a definição de tais propósitos para o Ensino Médio evidencia que a educação não pode se restringir ao ensino disciplinar isolado, mas deve abarcar um grande contingente de competências e habilidades a serem desenvolvidas no âmbito de todas as disciplinas.

3.1 O Ensino de matemática: parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e diretrizes curriculares nacionais (DCN)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino médio, em seu volume três - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, tem como objetivo precípuo explicitar as habilidades e competências básicas a serem desenvolvidas por alunos do ensino médio, público alvo do presente estudo. No Ensino Médio destacamos que os objetivos envolvem o aprofundamento dos saberes disciplinares em Biologia, Física, Química e Matemática, com procedimentos científicos comuns aos seus objetos de estudo, com metas formativas particulares, e com tratamentos didáticos específicos. Envolve também a articulação interdisciplinar desses saberes em várias circunstâncias, das quais se destacam os conteúdos tecnológicos e práticos. (Brasil, 2002). Contudo os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002) propõem um aprendizado que seja útil na vida dos educandos, desenvolvendo conhecimentos práticos e contextualizados, visando também o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos. Dessa maneira o ensino tem por objetivo suprir as necessidades da vida contemporânea, bem como contemplar uma visão científica do ensino.

Tendo em vista as novas aspirações da sociedade globalizada é imprescindível que a educação esteja voltada para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, fazer inferências, criar e aperfeiçoar conhecimentos trabalhando coletivamente. É importante a adequação do ensino para a promoção do desenvolvimento de todos os alunos, com diversas motivações, interesses e capacidades.

A maneira de trabalhar os conteúdos deve agregar um valor formativo, no que se refere ao desenvolvimento do pensamento lógico matemático, colocando os alunos em um processo que valorize o raciocínio de formular questões, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. O ensino deve também valorizar a apresentação de propriedades matemáticas, acompanhadas de explicações de fórmulas acompanhadas de dedução, valorizando o uso da matemática para a resolução de problemas (Brasil, 2006).

Destaca-se o papel da matemática no Ensino Médio enfatizando sua universalidade, considerando que outras ciências dependem da matemática, sendo que os alunos devem desenvolver habilidades relacionadas a representação, compreensão, comunicação, investigação e também contextualização sociocultural.

> [...] todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (Brasil, 2002).

Segundo o PCNEM (2002) a matemática no Ensino Médio apresenta ainda, “valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas”.

Em seu papel formativo a matemática “contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria matemática” , dessa maneira o ensino da matemática pode formar alunos com capacidade de resolução de problemas, com habilidades de investigação, com confiança para a análise e enfrentamento de novas situações. Em seu caráter instrumental a matemática “ deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional” (Brasil, 2002).

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a compreender os conceitos da disciplina, bem como procedimentos e estratégias matemáticas que permitam o desenvolvimento dos estudos posteriores adquirindo uma formação científica inicial; aplicar os conhecimentos matemáticos em diversas situações, em interpretação da ciência, na atividade tecnológica e em atividades cotidianas; fazer análise de informações provenientes de diversas fontes de acesso, formando um cidadão com opinião própria que possa se expressar criticamente sobre problemas matemáticos e em outras áreas do conhecimento; o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o senso crítico e criativo; o desenvolvimento da compreensão de conceitos matemáticos e sua aplicabilidade no cotidiano; conseguir se expressar oralmente, por escrito e graficamente em diversas situações matemáticas; conseguir fazer conexões dentre os conceitos matemáticos e também com outras disciplinas do currículo; promover a realização pessoal do aluno, mediante ao sentimento de segurança em suas capacidades matemáticas (Brasil, 2002).

O ensino de matemática possuí caráter instrumental amplo, além da investigação e invenção, ele se situa como linguagem, ou seja, instrumento de expressão e raciocínio, um espaço de elaboração e compreensão de ideias. Dessa maneira se torna fundamental a interlocução da matemática com as demais disciplinas promovendo uma aprendizagem ampla e significativa aos alunos.

Os conteúdos básicos a serem trabalhados ao longo do ano estão organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. Dentro desses conteúdos é imprescindível o desenvolvimento de outras habilidades na área de representação e comunicação: ler e interpretar textos de Matemática; ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta; produzir textos matemáticos adequados; utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação; utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. Na área de investigação e compreensão: identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc); procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados numa situação concreta; distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; discutir idéias e produzir argumentos convincentes. Na área de Contextualização sócio cultural: desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento; relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade; utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades (Brasil, 2002).

Cumpre destacar que para suprir as novas necessidades educacionais é preciso superar a visão conservadora de que cada disciplina é algo isolado e independente, é preciso a articulação de várias disciplinas em busca de um currículo mais flexível adequado às novas necessidades educacionais da contemporaneidade.

Tendo em vista que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação já iniciada na escola básica possibilitando o desenvolvimento de novas habilidades matemáticas é preciso rever alguns temas que são tradicionalmente ensinados. Não basta apenas nos atentarmos a metodologias de ensino, se os conceitos matemáticos se restringirem apenas a transmissão ou a informação com definições e exemplos, deve-se verificar se os conteúdos são passados de forma fragmentada, pois se forem, mesmo com uma profunda explicação o aluno não consegue compreender o significado dessas ideias isoladas e desconectadas, podemos notar essa falta de compreensão escancarada no fracasso escolar principalmente no campo da matemática.

Dessa maneira, a concepção do currículo deve corresponder a conteúdos e práticas previamente determinados como conteúdos mínimos da Base Nacional Comum, sendo que o currículo deve ser flexível de acordo com a realidade local das escolas. Evidencia-se que os temas escolhidos devem partir dos critérios estabelecidos anteriormente, visando o desenvolvimento de atitudes e habilidades, "O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático" (Brasil, p.43, 2002).

3.2 O Ensino de funções segundo o PCNEM e DCN

A partir dos documentos norteadores oficiais da educação (PCNEM e DCN) podemos afirmar que o ensino de funções possui caráter interdisciplinar, toma-se como exemplo a análise de gráficos que pode ser utilizada em várias áreas do conhecimento.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (Brasil, 2002)

Em suma, denota-se que o conceito de função se constitui em um dos eixos de ligação, dentro da própria matemática, bem como com outras áreas do conhecimento, o conceito de função transgride os conceitos matemáticos fomentando um importante papel para o estudo de gráficos, por meio da leitura, interpretação e construção, bem como o comportamento de fenômenos de diversas áreas do conhecimento. Dessa maneira o ensino de matemática visa garantir flexibilidade do ensino de funções, para que os conhecimentos dos alunos possam ser aplicados em diferentes situações.

As funções devem ser trabalhadas inicialmente com uma exploração qualitativa entre duas grandezas diferentes, ou seja, uma relação de dependência entre duas variáveis, como por exemplo, área do círculo e o raio, medida do lado e o perímetro, entre outras. É importante também fazer uma sondagem de conhecimentos prévios dos alunos, bem como incentivar para que eles levantem hipóteses, criem gráficos que representem relações.

Destacamos que é apropriado a interação dos alunos na compreensão do funcionamento da função, explicando com suas próprias palavras uma função algébrica, por exemplo, $f(x) = 5x - 1$, quando é associado um valor real ao seu quíntuplo subtraído de uma unidade. A apresentação gráfica das funções também se mostra importante na compreensão de seu significado e identificar as mudanças realizadas quando alteramos os coeficientes de uma função.

"O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola — modelos linear, quadrático e exponencial" (Brasil, 2006). No estudo das funções exponenciais o ideal é discutir fenômenos de crescimento, para então introduzir o modelo de crescimento/decrescimento, onde situações reais como crescimento de população de determinada bactéria pode ilustrar bem esse modelo exponencial. Dentre as aplicações matemáticas podemos dar ênfase na matemática financeira, onde o cálculo de juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas que envolvem equações exponenciais em geral necessita a função inversa ou função logarítmica.

Os estudos das funções exponenciais e logarítmicas podem ser utilizados como um tema transversal, explorando aplicações em áreas como Física, Química, Biologia ou Matemática Financeira, onde pode-se modelar situações através das funções. Contudo a resolução e desenvolvimento da resolução das mesmas pode-se utilizar diferentes métodos, como algébrico, geométrico ou através de softwares e jogos.

3.3 O programa São Paulo faz escola e o ensino das funções exponenciais e logarítmicas

O governo do Estado de São Paulo por meio da Secretaria do Estado da Educação (SEE) implementou o "Programa São Paulo Faz Escola". Criado em 2007, o programa tem como foco a implantação de um currículo único para as mais de 5 mil escolas da rede pública estadual, todos os alunos da rede estadual recebem o mesmo material didático e seguem o mesmo plano de aula. O fato de todas as unidades escolares contarem com o mesmo currículo pedagógico auxilia na melhoria da qualidade de ensino da rede pública, uma vez que coloca todos os alunos da rede estadual no mesmo nível de aprendizado" (Portal Eletrônico da Secretaria Estadual de São Paulo SEE/SP).

Em 2008 também chega às escolas públicas a "Proposta Curricular" com orientações a serem acatadas pelas unidades de ensino. Esta proposta se torna o novo Currículo

Oficial do Estado. Em 2012 temos quatro documentos norteadores para a implantação da reforma curricular, sendo esses: a Proposta Curricular (currículo oficial), o Caderno do Gestor, o Caderno do Professor e o Caderno do Aluno.

> O argumento adotado pela Secretaria para a implantação da Proposta Curricular se concentra no fato de que a autonomia conferida às escolas pela LDB (Lei 9394/96) para definirem seus projetos pedagógicos, embora seja reconhecida como importante medida descentralizadora, mostrou-se insuficiente do ponto de vista da garantia de um sistema educacional. A Proposta Curricular buscou unificar ações em toda a rede na busca de "garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências", segundo Maria Inês Fini, coordenadora geral da proposta (PONCE; LEITE, 2012)

O argumento supracitado vai em contra mão aos preceitos democráticos estabelecidos pela Lei de Diretrizes e Bases e nos remete ao fato de que as escolas perdem sua autonomia segundo eles por se mostrarem incapazes de se conduzir por si mesmos. Não se pode discordar de forma alguma de que parâmetros mínimos para a educação são necessários, no entanto, as particularidades de cada escola também deve ser respeitada, e ao delimitar o trabalho docente passo a passo a escola perde a autonomia para efetivamente atender suas peculiaridades. Ao invés de investir tanto dinheiro em uma apostila pronta o governo deveria se preocupar com a formação dos docentes, com o plano de carreira e principalmente com a infraestrutura escolar.

Os professores recebem o denominado "caderno do professor" e este contém atividades a serem executadas e orientações a serem seguidas pelos docentes. Os estudantes recebem um caderno de atividades, denominado "caderno do aluno", enquanto os gestores recebem "o caderno do gestor" contendo orientações sobre as medidas relacionadas ao currículo escolar, a avaliação e expectativas de aprendizagem.

> O Currículo se completa com um conjunto de documentos dirigidos especialmente aos professores e aos alunos: os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplina/série(ano)/bimestre. Neles, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula e para a avaliação e a recuperação. Oferecem também sugestões de métodos e estratégias de trabalho para as aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasses e estudos interdisciplinares. (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, 2008)

O Caderno do Professor de Matemática referente à primeira série do Ensino Médio em seu segundo volume traz os conteúdos determinados pelo PCN abordando diversas situações de aprendizagens, dentre elas destacaremos algumas que se tornam pertinentes ao nosso tema de trabalho. "As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial"; "Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: a força da ideia de logaritmo"; "As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica"; " As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: problemas envolvendo equações e inequações em diferentes contextos".

As inovações apresentadas no caderno do professor são referentes a novas formas de abordagens e contextualização dos conteúdos, destacando as competências pessoais do educando, a leitura e a escrita matemática, bem como os elementos culturais que são internos ou externos à matemática. O caderno ainda contém materiais extras em sintonia com a abordagem proposta, visando enriquecer a aula do professor, como por exemplo, textos, softwares, sites, vídeos, entre outros.

Os conteúdos básicos abordados no caderno é referente à ideia de crescimento e decrescimento exponencial, consolidando a linguagem das potências e introduzindo a ideia de logaritmo.

O ensino de potência é intensificado no primeiro ano do ensino médio, visando solidificar seu significado, "As potências já foram apresentadas aos alunos do Ensino Fundamental (na 5ª série/ 6º ano, as primeiras noções; na 7ª série/8º ano, as potências com expoentes inteiros; na 8ª série/ 9º ano, os expoentes racionais e reais)" (Brasil, 2008).

O caderno busca articular as funções exponencial e logarítmicas, salientando o que a distinção entre elas é apenas uma troca de posição entre suas variáveis, como por exemplo: Se $y = a^x$, considerando x a variável independente, escrevemos $y = f(x) = a^x$ e temos uma função exponencial; Quando y é a variável independente, escrevemos $x = g(y) = \log_a y$, e temos uma função logarítmica.

Observa-se como fundamental que o professor conheça diversos tipos de contextualização dos logaritmos como calculo de juros, graus de terremotos, ondas sonoras, dentre outros visando enriquecer o aprendizado, tais problemas serão explorados e discutidos no Capitulo 5.

4 O Ensino de funções

O Ensino de função é um dos conteúdos da matemática que pode ser trabalhado em diversas áreas do conhecimento. Salientando o estudo sobre os PCNs anteriormente abordado destaca-se a importância da multidisciplinaridade durante a construção dos saberes escolares, buscando permitir com que o aluno faça essa interação dos conhecimentos matemáticos em diferentes aplicações no dia a dia e em situações diversas. Uma função é uma maneira de associar a cada valor de um conjunto $\mathbb{A}$ à um único valor do conjunto $\mathbb{B}$. Isto pode ser feito especificando através de uma fórmula ou relação entre os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, essa relação ($\Re$) pode ser apresentada através de gráficos, diagramas, tabelas entre outros.

Entende-se por função f uma terna

$$(\mathbb{A}, \mathbb{B}, a \mapsto b)$$

Onde $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são dois conjuntos e $a \mapsto b$ uma regra que nos permite associar a cada elemento a de $\mathbb{A}$ um único b de $\mathbb{B}$. O conjunto $\mathbb{A}$ é o domínio de f e indica-se por D_f, assim $\mathbb{A} = D_f$. O conjunto $\mathbb{B}$ é o contradomínio de f. O único b de $\mathbb{B}$ associado ao elemento a de $\mathbb{A}$ é indicado por $f(a)$; diremos que $f(a)$ é o valor que assume em a ou que $f(a)$ é o valor que f associado ao a.

Uma função f de domínio $\mathbb{A}$ e contradomínio $\mathbb{B}$ é usualmente indicada por $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$.

Uma função pode ser classificada como:

-**Crescente:** $\forall x, y \in \mathbb{A}$, se $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

-**Decrescente:** $\forall x, y \in \mathbb{A}$, se $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Para compreender o ensino de função é preciso explorar diversas habilidades, como por exemplo, a numérica, geométrica e algébrica. Através de diferentes situações problemas os alunos podem aplicar tais conceitos matemáticos adquiridos para solucionar o que foi proposto. Observe um exemplo de função relacionada com o cotidiano de qualquer pessoa.

Exemplo

Um trabalhador de classe média precisa economizar, pois com o aumento da inflação sua renda tem ficado insuficiente, e como não tem carro gasta uma pequena quantia com taxi. Em sua cidade tem duas companhias de taxi a Companhia A e a Companhia

Tabela 4.1: Valores pagos nas companhias de taxi

Km rodado	Custo na companhia A	Custo na companhia B
0	R$ $13,00$	R$ $6,00$
5	R$ $16,50$	R$ $10,75$
10	R$ $20,00$	R$ $15,50$
15	R$ $23,50$	R$ $20,25$
20	R$ $27,00$	R$ $25,00$
25	R$ $30,50$	R$ $29,75$
26	R$ $31,20$	R$ $30,70$
27	R$ $31,90$	R$ $31,65$
28	R$ $32,60$	R$ $32,60$
29	R$ $33,30$	R$ $33,55$
30	R$ $34,00$	R$ $34,50$
35	R$ $37,50$	R$ $39,25$
40	R$ $41,00$	R$ $44,00$
45	R$ $44,50$	R$ $48,75$
50	R$ $48,00$	R$ $53,50$

B onde o valor da bandeirada e do quilômetro rodado varia de uma empresa para outra, a Companhia A cobra R$ $13,00$ pela bandeirada e R$ $0,70$ por quilômetro rodado e a Companhia B cobra R$ $6,00$ pela bandeirada e R$ $0,95$ por quilômetro rodado. Determine qual é a melhor opção para obter uma economia de recursos.

Resolução:

Para a resolução do problema precisa-se escrever a situação citada algebricamente ou "matematicamente". Conforme pode ser observado pela Tabela 4.1 do preço pago nas diferentes companhias de taxi de acordo com a quantidade de quilômetros rodados.

Existe uma relação entre as grandezas distância e quantidade de dinheiro, ou seja, cada vez que aumenta a quantidade de quilômetros percorridos pelo taxi aumenta também a quantia paga pela corrida. Essa relação de dependência pode ser representada através de uma **função** onde o domínio será a quantidade de quilômetros (variável x) e a imagem será a quantia em reais pago pelo passegeiro (variável $f(x)$).

A função $f(x)$ é o valor gasto na companhia A, será definida da seguinte forma:

Dados os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, uma função $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ (lê-se uma função de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{B}$) é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in \mathbb{A}$ (quilômetros percorridos) um elemento $f(x) \in \mathbb{B}$ (preço a ser pago).

$$f(x) = 13 + \frac{7x}{10}$$

A função $g(x)$ da companhia B será definida da seguinte forma:

Dados os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, uma função $g : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ (lê-se uma função de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{B}$) é uma regra que que diz como associar a cada elemento $x \in \mathbb{A}$ um elemento $g(x) \in \mathbb{B}$.

$$g(x) = 6 + \frac{95x}{100}$$

Note que pela Tabela 4.1 o valor de quilômetros rodados (x) que em ambas as companhias irão pagar a mesma quantia será de 28km, porém pode-se determinar com quantos quilômetros será pago a mesma quantia em ambas as companhias igualando as funções:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 13 + \frac{7x}{10} &= 6 + \frac{95x}{100} \\ \frac{95x}{100} - \frac{7x}{10} &= 13 - 6 \\ \frac{25x}{100} &= 7 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

Portanto a quantidade de quilômetro percorrido pelo cliente para ser pago a mesma quantia será de 28km. Para qualquer valor menor que 28km a Companhia B será mais econômica e a partir disso será mais econômico a Companhia A. Na figura 4.1 pode ser observado o comportamento gráfico das duas funções e analisar como elas se cruzam no ponto $(28, 32.60)$.

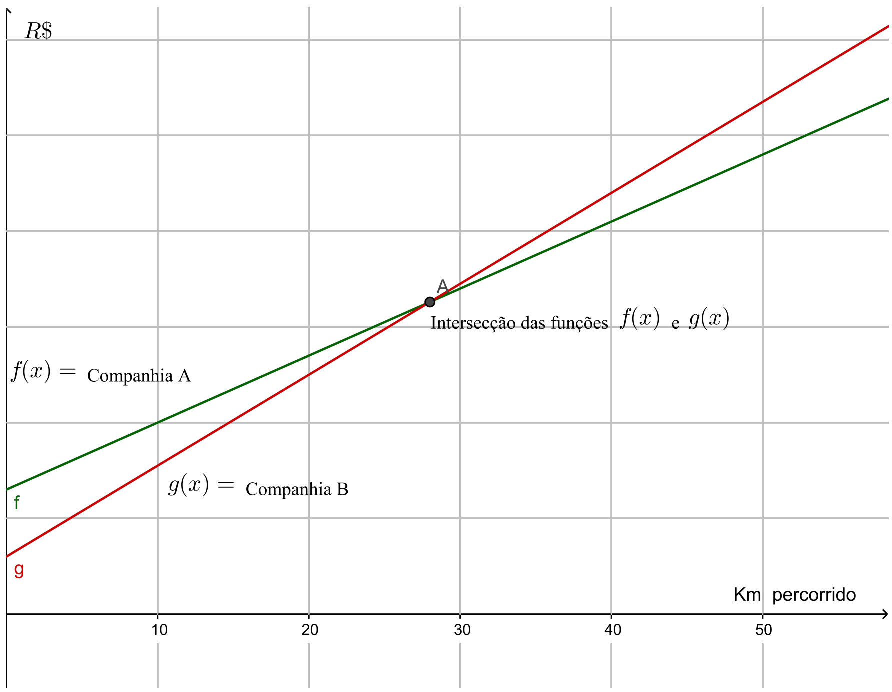


Figura 4.1: Comportamento dos custos das companhias de taxi

Propriedades de função

-Função injetora: elementos de $\mathbb{A}$ não tem a mesma imagem em $\mathbb{B}$.

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{A}, x_1 \neq x_2 \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)$$

-Função sobrejetora: Uma função é sobrejetora quando o conjunto imagem coincide com o contradomínio da função.

$$\forall y \in \mathbb{B}, \exists x \in \mathbb{A} / f(x) = y \rightarrow Imf = \mathbb{B}$$

-Função bijetora: Uma função é dita bijetora quando ela for injetora e sobrejetora.

As funções são classificadas de diferentes maneiras e sua representação gráfica também muda em seu formato. O exemplo dado foi uma função afim, veja alguns exemplos de diferentes funções que são estudadas no ensino médio:

Função afim

Chama-se de função afim a função definida da seguinte maneira:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Quando $a = 0 \Rightarrow f(x) = b, \forall x$.

Quando $a > 0 \Rightarrow f(x)$ é crescente.

Quando $a < 0 \Rightarrow f(x)$ é descrescente.

O gráfico de $f(x) = ax + b$ é uma reta, sendo alguns pontos especiais, os pontos que cortam os eixos das coordenadas, que podem ser representados como $(\frac{-b}{a}, 0)$ e o $(0, b)$. Na Figura 4.2 podem ser observados diferentes gráficos com o comportamento dessa função, quando tem a variação dos coeficientes a e b.

Modificando o valor de a por valores positivos o gráfico continua crescente, porém sua angulação ou inclinação sobre o eixo x varia, de acordo com a Figura 4.2(a).

$f_1(x) = x$;

$f_2(x) = 3x$;

$f_3(x) = \frac{1}{5}x$.

Modificando o valor de a por valores negativos o gráfico se torna decrescente, e sua angulação sobre o eixo x também varia de acordo com esse valor, de acordo com a Figura 4.2(b).

$g_1(x) = x$;

$g_2(x) = -x$;

$g_3(x) = -4x$.

Modificando o valor de b, o gráfico se desloca verticalmente, ou seja, em relação ao eixo y, observe de acordo com a Figura 4.2(c)

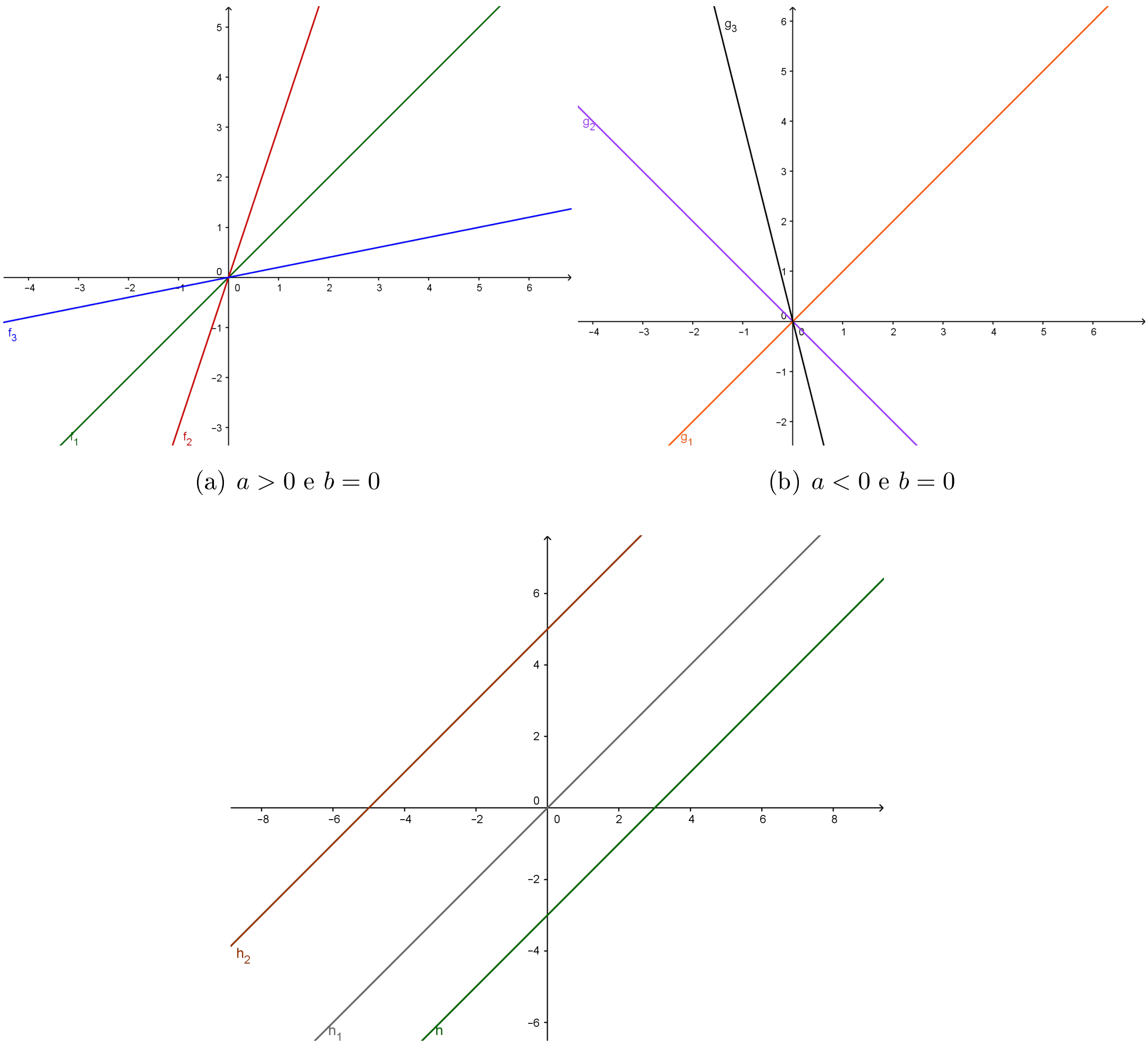
$h_1(x) = x$;

$h_2(x) = x + 5$;

$h_3(x) = x - 3$.

Função quadrática

Uma funçaõ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Graficamente uma função



(a) $a > 0$ e $b = 0$

(b) $a < 0$ e $b = 0$

(c) $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$

Figura 4.2: $f(x) = ax + b$

quadrática é representada através de uma parábola.

$a > 0 \Rightarrow$ a função f tem concavidade para cima;

$a < 0 \Rightarrow$ a função f tem concavidade para baixo.

As raízes de uma função quadrática ou pontos que a função cruza o eixo das abscissas está relacionado com o valor de sua discriminate $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

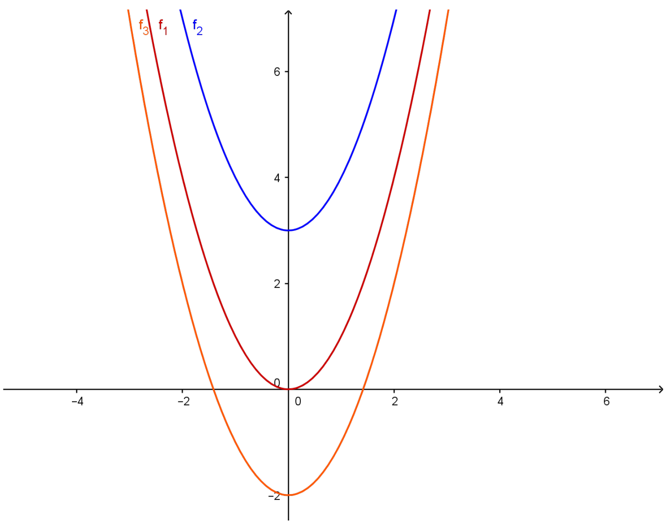
$\Delta = 0 \Rightarrow$ tem raiz única, $f(x_n) = 0$, $f(x) = a(x - x_n)$;

$\Delta > 0 \Rightarrow$ tem raiz dupla, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;

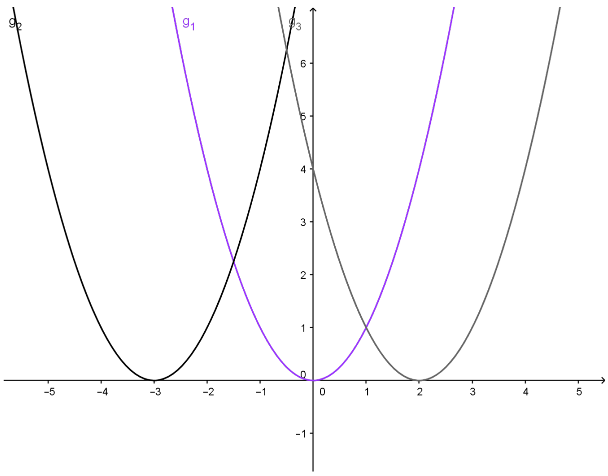
$\Delta < 0 \Rightarrow$ não tem raiz real.

A Figura 4.3 ilustra exemplos do comportamento quando se tem uma variação dos coeficientes a, b e c.

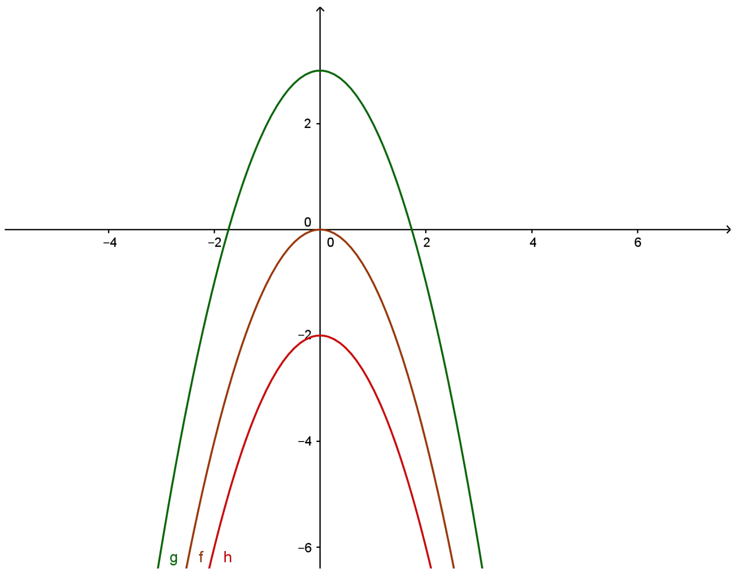
Graficamente o coeficiente c representa o deslocameno vertical (ou através do eixo y) da parábola para cima ou para baixo, de acordo com a Figura 4.3(a), os gráficos das funções $f_i(x)$ obteve um movimento vertical ao variar os valores c.



(a) Variação do coeficiente c, fixado $a > 0$



(b) Variação do coeficiente x_0



(c) Variação do coeficiente $a < 0$, fixado c

Figura 4.3: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f_1(x) = x^2$;
$f_2(x) = x^2 + 3$;
$f_3(x) = x^2 - 2$.

Se representar a função $g(x) = a(x + x_0)^2 + bx + c$ o valor de x_0 representa o deslocamento horizontal (ou através do eixo x) da parábola. Analisando os gráficos de $g_i(x)$, tem-se o movimento no eixo x conforme a Figura 4.3(b).

$g_1(x) = x^2$;
$g_2(x) = (x + 3)^2$;
$g_3(x) = (x - 2)^2$.

O valor de a em uma função quadrática representa a concavidade da parábola, quando a for positivo ela é voltada para cima e quando a for negativo a concavidade é voltada para baixo. De acordo com as funções h_i os gráficos apresentados na Figura 4.3(c).

$h_1(x) = -x^2$;

$h_2(x) = -x^2 + 3$;

$h_3(x) = -(x^2 + 2)$.

Observe pelos gráficos da Figura 4.3 que é formado uma parábola onde o valor de a representa a concavidade, o valor de c representa o deslocameno vertical da parábola. Quando a função quadrática $f(x) = a(x + x_0) + bx + c$, o valor de x_0 representa o deslocamento horizontal da parábola.

Não há dúvidas que entre as funções citadas: lineares, quadráticas, exponenciais e logarítmica existe inumeras aplicações no decorrer da evolução humana ou situações diárias dos alunos. Na sequência, econsiderando que o objetivo do presente trabalho é explorar os conceitos de funções exponenciais e logarítmica, como uma das estratégias utiliza-se de um estudo prévio sobre potenciação.

4.1 Potenciação

O estudo de potenciação é um dos pré requisitos para ajudar na compreesão do ensino de função exponencial, a partir da compreensão das propriedades deste conteúdo abordado no ensino fundamental, com demonstrações, exemplos e situações problemas, sempre em busca de auxiliar os estudante a compreender melhor o conceito e a aplicabilidade do estudo abordado.

Para as demonstrações das propriedades irá ser usado o método de indução finita, que consiste de : Dada uma proposição $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, ela é verdadeira para todo n se:

i) $p(n_0)$ for verdadeira;

ii) Se $n = k$, $k \geq n_0$, supõe que $p(k)$ é verdadeira, então prova-se que $p(k+1)$ é verdadeira.

4.1.1 Potência de expoente inteiro positivo

Dados $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, e $n \in \mathbb{Z}^+$. Dizemos que a potência a^n, tem base a e expoente n, então por definição:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n, n > 1$$

Logo:

$$a^1 = a^0 \cdot a = a$$
$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

De modo geral, tem-se que a^n, n>1, pode ser escrito como o produto da base a por n fatores iguais a ela. Algebricamente, $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ...a\cdot$ (n fatores).

Propriedades

Seja $a > 0, b \geq 0, a \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Então valem as seguintes propriedades:

Produto de potências de mesma base : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Demonstração. Dado $m \in \mathbb{Z}^+$, por indução sobre n:
Se $n = 0$, então :

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$$

Supondo a veracidade da propriedade para $n = k$, onde $k \geq 0$ qualquer, ou seja, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$, mostramos que seja válido para $n = (k+1)$. De fato:

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{k+m} \cdot a = a^{m+k+1} = a^{m+(k+1)}$$

□

Divisão de potências de mesma base : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Demonstração. Como anteriormente, por indução sobre n:
Se $n = 0$, tem-se :

$$a^{m-0} = a^m = \frac{a^m}{1} = \frac{a^m}{a^0}.$$

Supondo que a igualdade seja verdadera para $n = k$, isto é,

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k},$$

tem-se para $n = k+1$:

$$a^{m-(k+1)} = a^{(m-k)-1} = a^{(m-k)-1} \cdot \frac{a}{a} = \frac{a^{(m-k)-1} \cdot a}{a} = \frac{a^{m-k}}{a} = \frac{a^{m-k}}{a} \cdot \frac{a^k}{a^k} = \frac{a^{m-k+k}}{a \cdot a^k} = \frac{a^m}{a^{k+1}}$$

□

Potenciação de potência : $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Demonstração. Para $n = 0$, tem-se:

$$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$$

Supondo que a afirmação seja verdadeira, para $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k.$$

Tem-se para $n = k + 1$:

$$(a \cdot b)^{(k+1)} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b)^1 = a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$

□

Potenciação de fração : $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

Demonstração. Para $n = 0$, tem-se:

$$(\frac{a}{b})^0 = 1 = \frac{a^0}{b^0}$$

Supondo que a afirmação seja verdadeira, para $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$(\frac{a}{b})^k = \frac{a^k}{b^k},$$

tem-se para $n = k + 1$:

$$(\frac{a}{b})^{k+1} = (\frac{a}{b})^k \cdot (\frac{a}{b})^1 = \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^k \cdot a}{b^k \cdot b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}.$$

□

Potenciação de um produto : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demonstração. Para $n = 0$, tem-se:

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$$

Supondo que a afirmação seja verdadeira:

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k}.$$

tem-se para $n = k + 1$:

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m)^1 = a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} = a^{m \cdot (k+1)}$$

□

4.1.2 Potência de expoente inteiro negativo

Dados $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, e $n \in \mathbb{Z}^+$. Define-se a^{-n} de modo que seja mantida a probriedade:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Desta forma estende o conceito de potência com expoentes inteiros negativos quaisquer.

4.1.3 Potência com expoente racional

Dados $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Define-se uma potência $a^{\frac{m}{n}}$ como:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Logo, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

A partir da definição todas as propriedades continuam verdadeiras.

4.1.4 Potência com expoente Real

Dados $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, e $b \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$(racional ou irracional). Dizemos que a potência a^n, esta definida a potência a^b como potência com expoente real.

Com isso tem-se as seguintes propriedades para potência com expoente real:

Produto de potências de mesma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

Divisão de potências de mesma base: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

Potenciação de uma multiplicação : $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

Potenciação de uma divisão: $(\dfrac{a}{b})^m = \dfrac{a^m}{b^m}$;

Potenciação de potência: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Com base nas propriedades e definição do conteúdo de potenciação, pode-se a partir deles definir e trabalhar com diferentes funções exponenciais.

4.2 Função exponencial

Definição: Chama-se função exponencial qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, dado $a \in \mathbb{R} > 0$, $a \neq 1$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$. O valor de a tem que ser diferente de 1 porque com $a = 1$ a função se torna constante, pois se $a = 1$ e $m \in \mathbb{R}$, então $a^m = a = 1$.

Como consequência das considerações das propriedades de potênciação, temos:

i) Na função exponencial $f(x) = a^x$, tem-se:

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = a^0 = 1$$

Com isso podemos dizer então que o par ordenado (0,1) pertence ao gráfico da função, ou seja, que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).

Lema 1: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, tem-se:

$$a^n > 1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por contradição:

Se $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$. (Absurdo!)

Se $n < 0 \Rightarrow -n \geq 1$, então $a^{-n} > 1 \Rightarrow a^{-n} \cdot a^n = a^n \Rightarrow 1 > a^n$. (Absurdo!)

($\Leftarrow$) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$ e $a > 1$.

Para $n = 1$ temos: $a^n = a^1 = a > 1$.

Suponhamos pela hipótese de indução que $a^k > 1$ e mostra-se que:

$a^{k+1} = a^k \cdot a > 1$, pois $a > 1$ e $a^n > 1$.

Portanto $a^{n+1} \geq 1$

□

Lema 2: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$$

A demonstração pode ser encontrado em Lima, 1996.

Lema 3: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1, r,\ s \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$a^r > a^s \Leftrightarrow r > s$$

Demonstração. Como $a^{-r} > 0$ tem-se, $a^s > a^r \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1 \Leftrightarrow$ (pelo Lema 2) $s - r > 0 \Leftrightarrow s > r$.

□

Lema 4: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1, t \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tem-se:

$$a^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$$

Demonstração. ($\Leftarrow$)

$$t > 0 \Rightarrow a^t > 1$$

Para definição no número t irracional e positivo, existem r, s tal que $0 < r < t < s$.

Pelo Lema 2, como $a > 1, r > 0$ e $s > 0$, temos : $a^r > 1$ e $a^s > 1$.

Pelo Lema 3, como $a > 1$ e $r < s$, tem-se: $1 < a^r < a^s$ e, tem-se:

$$1 < a^r < a^t < a^s$$

logo,

$$a^t > 1$$

$(\Rightarrow)$
Provando por absurdo tem-se:

$$a^t > 1 \Rightarrow t > 0$$

Suponhamos, $t < 0$, isto é $-t > 0$.
Pela primeira parte deste lema tem-se:

$$a > 1, -t \in \mathbb{I} \Rightarrow a^{-t} > 1$$

e

$$-t > 0 \Rightarrow a^{-t} > 1$$

Multipliplicando ambos os lados pela desigualdade $a^t > 0$, tem-se:

$$a^{-t} \cdot a^t > a^t \Leftrightarrow 1 > a^t$$

Absurdo, pois contraria a hipótese, logo:

$$t > 0$$

$\square$

Teorema 1: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0$$

Demonstração.

$$b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \quad \text{(pelo Lema 2)} \quad (a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0), \\ \text{ou} \\ b \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \quad \text{(pelo Lema 4)} \quad (a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0). \end{cases} \quad \square$$

Corolário 1: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $r \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$a^r > a^s \Leftrightarrow r > s$$

Demonstração.

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \Leftrightarrow \text{(pelo Teorema 1)} \quad x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

$\square$

Teorema 2: Sendo $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$$

Demonstração. Se $0 < a < 1$, então $\frac{1}{a} > 1$, toma-se $b \in \mathbb{R}$, logo

$$(\frac{1}{a})^b > 1 \Leftrightarrow (a^{-1})b > 1 \Leftrightarrow -b > 0 \Leftrightarrow b < 0$$

□

Corolário 2: Sendo $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ e $r \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$a^r > a^s \Leftrightarrow r < s$$

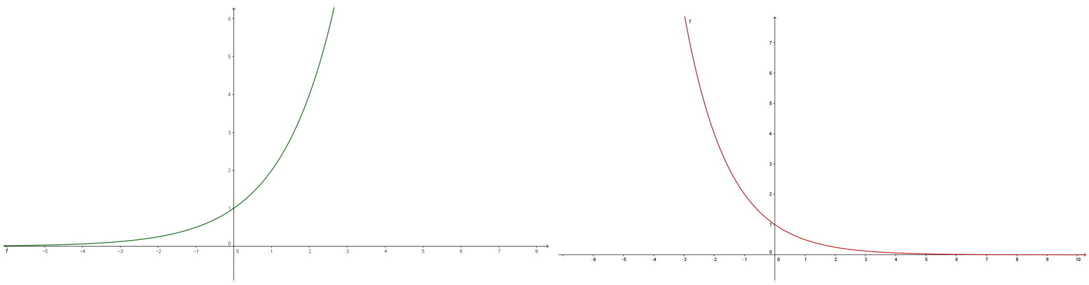
Demonstração.

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \Leftrightarrow \text{(pelo Teorema 2)} \quad x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

□

4.2.1 Gráfico de função exponencial

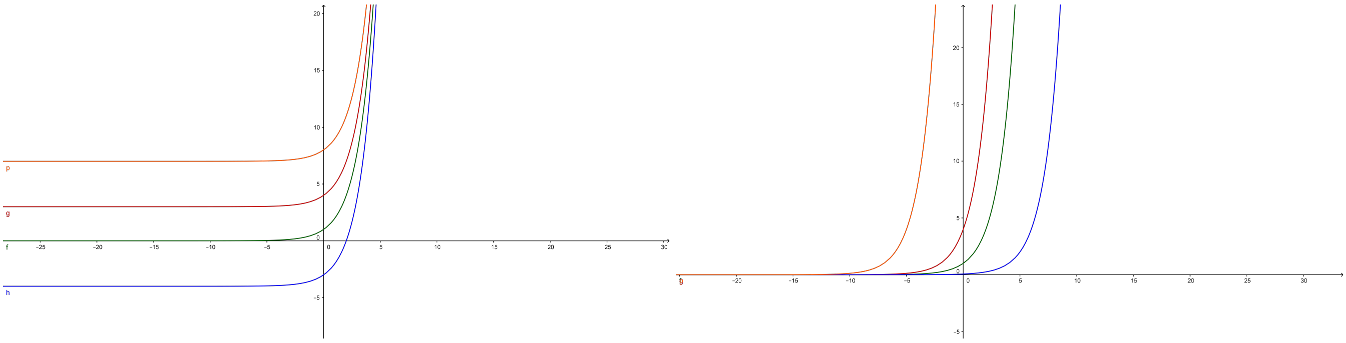
Dada uma função $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, a curva do gráfico esta toda acima do eixo x, pois $f(x) = a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(0) = 1$, então a curva corta o eixo y no ponto de ordenada 1; se $a > 1$ é uma função crescente. Se $0 < a < 1$ é uma função decrescente. Observe as funções representadas pelas figuras 4.4(a) e 4.4(b).



(a) $a > 1$ (b) $0 < a, 1)$

Figura 4.4: $f(x) = a^x$

Por outro lado pode-se modificar o comportamento do gráfico de uma função exponencial através do acrescimo de coeficientes, ou seja, dado uma função $f(x) = a^{x+c} + b$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$; , $a > 0 \neq 1$. Como dito o valor de a define a curva como crescente ou decrescente, já o valor de b define o deslocamento vertical e o valor de c o deslocamento horizontal. Observe os gráficos os gráficos apresentado na Figura 4.5(a) a variação da curva de acordo com a mudanças da variável b e na Figura 4.5(b) a variação da curva de acordo com a mudança da variável c.



(a) Variação do coeficiente b (b) Variação do coeficiente c

Figura 4.5: $f(x) = a^{x+c} + b$

As aplicações no cotidiano do aluno são em diversas situações e em diferentes disciplinas, na biologia, onde geralmente, o crescimento de determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias, acontece exponencialmente. Na química onde a decomposição ou desintegração de determinadas substâncias também acontece segundo um padrão exponencial. Na matemática financeira onde o sistema de juros compostos também funciona de forma exponencial. Observe alguns exemplos de contextualização do uso da função exponencial:

Exemplo 1

A população de uma colônia de bactéria dobra a cada 30 minutos. Em um experimento, colocou-se inicialmente em um tubo de ensaio uma amostra com 1000 bactérias. Ao final do experimento obteve-se um total de $4,096 \cdot 10^6$ bactérias. Qual foi o tempo do experimento?

Resolução

Para iniciar a resolução do problema, cria-se uma tabela que representa a situação, onde de acordo que o tempo vai passando a quantidade de bactérias também vai mudando, observando assim a relação ou "função" entre as grandezas tempo e quantidade de bactérias.

Tabela 4.2: Relação entre tempo e quantidade de bactérias

Tempo(x)	Quantidade de bactérias($f(x)$)
0 minutos	1000
30 minutos	2000
60 minutos	4000
90 minutos	8000
120 minutos	16000
...	...

Observe que a cada 30 minutos dobra a quantidade de bactéria, representando essa situação algébricamente onde x representa a quantidade de minutos e $f(x)$ a quantidade de bactérias, ficaria da seguinte maneira:

$$f(0) = 1000$$

$$f(30) = 2^1 \cdot 1000$$

$$f(60) = 2 \cdot (2^1 \cdot 1000) = 2^2 \cdot 1000$$

$$f(90) = 2 \cdot (2^2 \cdot 1000) = 2^3 \cdot 1000$$

$$f(30n) = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot 1000 = 2^n \cdot 1000$$

Apresentando como função a expressão tem-se:

$$f(x) = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{30}}$$

Como $f(x) = 4,096 \cdot 10^6$ tem-se:

$$4,096 \cdot 10^6 = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{30}}$$

$$2^{\frac{x}{30}} = \frac{4,096 \cdot 10^6}{1000}$$

$$2^{\frac{x}{30}} = 4,096 \cdot 10^3$$

$$2^{\frac{x}{30}} = 2^{12}$$

$$\frac{x}{30} = 12$$

$$x = 12 \cdot 30$$

$$x = 360$$

Tem-se então que para ter um total de $4,096 \cdot 10^6$ bactérias será necessário 360 minutos ou 6 horas após o início do experimento.

Exemplo 2

(Unicamp-SP – 2007) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde t é o instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração inicial no instante $t = 0$. Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante b.

Resolução

Analizando o problemas tem-se que $P(t)$ é igual a $\dfrac{P_0}{2}$ para t =29 anos então representando algébricamente tem-se:

$$P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$$
$$\frac{P_0}{2} = P_0 \cdot 2^{-b \cdot 29}$$
$$P_0 \cdot 2^{-1} = P_0 \cdot 2^{-29 \cdot b}$$
$$2^{-1} = 2^{-29 \cdot b}$$
$$-1 = -29 \cdot b$$
$$b = \frac{1}{29}$$

Tem-se então que a constante b é igual à $\dfrac{1}{29}$.

Exemplo 3

Um capital de $1000, 00$ reais é aplicado a juros mensais de 4% ao mês, gerando um montante de $1731, 68$ reais. Determine o tempo em meses de aplicação desse capital.

Resolução

Um exemplo clássico matemática financeira de juros composto onde o valor total ou montante é dada pela equação $M = P \cdot (1+i)^t$, onde M é o montante, P o valor inicial, i é a taxa de juros e t é o tempo em mês da aplicação. Então tem-se $M = 1731, 68$, $P = 1000$, $i = 4\%$ ou $0, 04$ e precisamos descobrir o valor do tempo t. Aplicando a fórmula tem-se:

$$M = P \cdot (1 + i)^t$$
$$1731, 68 = 1000 \cdot (1 + 0, 04)^t$$
$$(1, 04)^t = \frac{1731, 68}{1000}$$
$$(1, 04)^t = 1, 733168$$
$$(1, 04)^t = (1, 04)^1 4$$
$$t = 14$$

Portanto tem-se que para obter um montante de $1731, 68$ é preciso aplicar o valor inicial durante 14 meses ou 1 ano e 2 meses.

4.3 Logaritmo

Sejam a e $b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b, onde o logaritmo que se deve obter na base b de a, ou escrevendo em forma de potência seria qual o expoente que aplicado sobre a base b seja igual a a, ou seja:

$$\log_b a = x \Longleftrightarrow b^x = a$$

Para o $log_b a = x$ dizemos que b é a base do logaritmo, a é o logaritmando e x é o logaritmo.

Exemplos:

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

$\log_5 625 = 4$, pois $5^4 = 625$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$, pois $\frac{1}{3}^2 = \frac{1}{9}$

$\log_{34} 1 = 0$, pois $34^0 = 1$

$\log_{14} 14 = 1$, pois $14^1 = 14$

Seguem as seguintes afirmações sobre o logaritmo que decorrem imediatamente da definição.

i) O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero.

$$\log_a 1 = 0, \text{pois } a^0 = 1$$

ii) O logaritmo da base a na base a é igual a um.

$$\log_a a = 1, \text{pois } a^1 = a$$

iii) A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

iv) Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow b = c$$

Demonstração. $\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow$(pela definição de logaritmo)$a^{\log_a b} = a^{\log_a c} \Longleftrightarrow$(pela **iii)**) $b = c$ □

Apartir das afirmações tem-se as seguintes propriedades relacionadas aos logaritmos.

Propriedades:

Logaritmo do produto

Se $a > 0, a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Demonstração. Seja $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b \cdot c) = z$, tem-se:

$$\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \quad a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y \\ \log_a(b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{cases}$$

Portanto $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ □

Logaritmo do quociente

Se $a > 0, a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$.

Demonstração. Seja $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \frac{b}{c} = z$, tem-se:

$$\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \quad a^z = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y \\ \log_a \frac{b}{c} = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{cases}$$

Portanto $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

□

Logaritmo da potência

Se $a > 0, a \neq 1, b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$.

Demonstração. Seja $\log_a b = x$ e $\log_a b^\alpha = y$, tem-se:

$$\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^\alpha = y \Rightarrow a^y = b^\alpha \end{cases} \quad a^y = (a^x)^\alpha = a^{x \cdot \alpha} \Rightarrow y = x \cdot \alpha$$

Portanto $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$.

□

4.3.1 Mudança de base

Nos logaritmos pode se realizar a mudança de base, em diferentes situações necessita-se realizar cálculos com logaritmos em bases diferentes, para que seja possível utilizar as propriedades dos logaritmos, pois elas devem ser todas na mesma base.

Para realizar esse processo que transforma a base de um logaritmo em outra base que seja conveniente aplica-se a seguinte propriedade:

Propriedade:

Mudança para a mesma base

Seja a, b e $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração. Considere $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$ e nota-se que $z \neq 0$ pois $a \neq 1$.

Agora provaremos que $x = \dfrac{y}{z}$.

De fato:

$$\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_c b = y \Rightarrow c^y = b \\ \log_c a = z \Rightarrow c^z = a \end{cases} \Rightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow z \cdot x = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \quad \square$$

4.4 Funções logarítmicas

Seja $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ chama-se função logarítmica de base a a função f de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número $\log_a x$ ou seja:

$$f(x) = \log_a x$$

A partir da definição de função logarítmica tem-se:

i) Se $0 < a \neq 1$, então a funções $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração. Para a demonstração da propriedade basta verifiar que $f(g(x)) = Id_{\mathbb{R}^*_+}$ e $g(f(x)) = Id_{\mathbb{R}}$.

De fato:

$f(g(x)) = \log_a a^x = x$ e $g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x$ $\square$

ii) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente se $a > 1$ e é decrescente se $0 < a < 1$.

Demonstração. Por implicação tem-se:

$a > 1 \Rightarrow$ (para todo x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}^*_+$), $x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$.

De fato:

Sabe-se que $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1} \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$

Considerando

$\log_a x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = a^{y_2}$

$\log_a x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = a^{y_1}$

Tem-se:

$y_2 > y_1 \Rightarrow a^{y_2} > a^{y_1}$. Pelo fato da função exponencial ser crescente para base maior que um concluimos que $a > 1$.

De forma análoga tem-se que a função logarítmica é decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$. $\square$

Uma função real, $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, chama-se uma *função logarítmica* quando tem as seguintes afirmações:

iii) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

iv) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ chama–se logaritmo de x. (Se estivermos contemplando outras funções logrítmicas além de L, diremos que $L(x)$ é o logaritmo de x segundo L, ou no sistema de logaritmos L).

Segue uma lista de propriedades das funções logarítmicas, isto é, propriedades que são consequências de **iii)** e **iv)** enunciadas.

Função injetiva Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes tem logaritmos diferentes.

Demonstração. Com efeito, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, resulta de **iii)** que $L(x) < L(y)$. No segundo caso tem–se $L(y) < L(x)$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$. □

O logaritmo de 1 é zero: $\log 1 = 0$

Demonstração. Com efeito, por **iv)** tem-se:
$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$, logo $L(1) = 0$ □

Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos: Seja $n \in \mathbb{R}$, onde $\log n$ é positivo para $n > 1$ e é negativo para $0 < n < 1$.

Demonstração. Com efeito, sendo L crescendo, $0 < x < 1 < y$ resulta $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é $L(x) < 0 < L(y)$.

□

O logaritmo de $\frac{1}{x}$ é o oposto logaritmo de x: Para todo $x > 0$, tem–se $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$.

Demonstração. Com efeito, de $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$ resulta que $L(x) + L(\frac{1}{x}) = L(1) = 0$, donde $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$. □

O logaritmo de $\frac{x}{y}$ é o logaritmo de x com o oposto do logaritmo de y: Para quaisquer $x, y \to \mathbb{R}^+$, vale $L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y)$.

Demonstração. $L(\frac{x}{y}) = L(x \cdot (\frac{1}{y})) = L(x) + L(\frac{1}{y}) = L(x) - L(y)$. □

$L(x^r) = r \cdot L(x)$: Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem–se $L(x^r) = r \cdot L(x)$.

Demonstração. Tem-se pela propriedade que $L(x^r) = L(x \cdot x \cdot ... \cdot x) = L(x) + L(x) + ... + L(x) = r \cdot L(x)$.

□

Teorema 3: Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$

Demonstração. Seja $a > 1$ tal que $L(a) = a \cdot M(a)$. Tem-se que $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que existe um $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Consideremos que $L(b) < M(b)$.

Seja $k \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$k \cdot (M(b) - L(b)) > L(a).$$

Então:

$$L(a^{\frac{1}{k}}) = \frac{L(a)}{k} < M(b) - L(b).$$

Seja $m \cdot L(a^{\frac{1}{k}})$, pertencente ao interior do intervalo $]L(b), M(b)[$, ou seja $L(b) < m \cdot L(a^{\frac{1}{k}}) < M(b)$. Assim tem-se que:

$$m \cdot L(a^{\frac{1}{k}}) = L(a^{\frac{m}{k}}) = M(a^{\frac{m}{k}}).$$

Então:

$$L(b) < L(a^{\frac{m}{k}}) = M(a^{\frac{m}{k}}) < M(b),$$

Como L é crescente, tem-se que $b < a^{\frac{m}{k}}$. Como M também é crescente. tem-se que $a^{\frac{m}{k}} < b$. Pelas duas desigualdades tem-se um absurdo, sendo assim tem-se que $M(x) = L(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

□

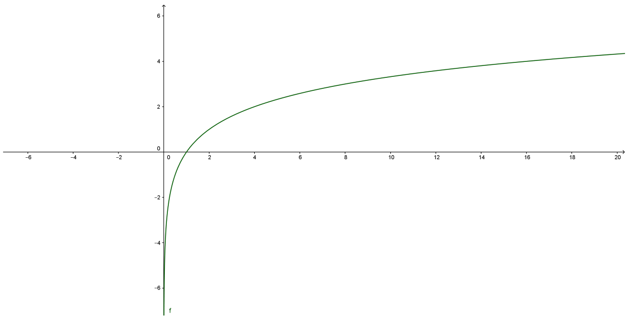
Teorema 4: Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = c$.

Teorema 5: Toda função logarítmica L é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um único número real positivo x tal que $f(x) = c$.

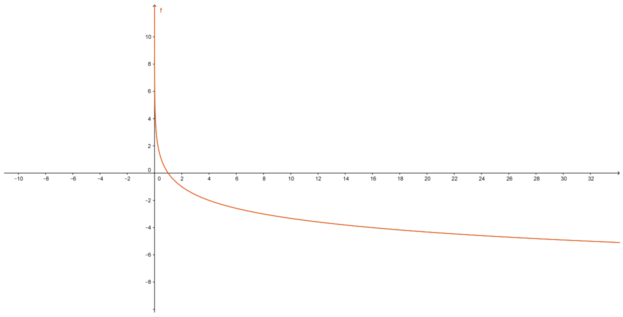
Demonstração. Como visto anteriormente que uma função logarítmica é sobrejetora e injetora, então tem-se que ela é bijetora. □

4.4.1 Gráfico de função logarítmica

Dada uma função f logarítmica definida em $\mathbb{R}$, e dada por $f(x) = log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, a curva do gráfico está todo a direita do eixo $y(x > 0)$; corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($log_a 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$); de acordo com a Figura 4.6(a) se $a > 1$ é uma função crescente e se $0 < a < 1$ é de uma função decrescente de acordo com a Figura 4.6(b).



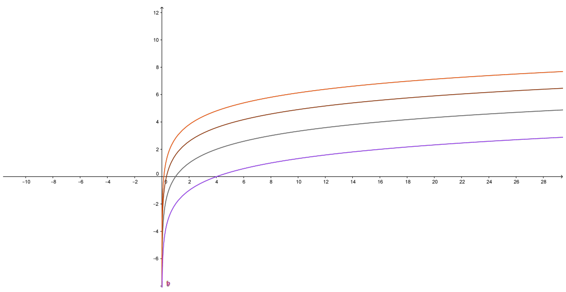
(a) $f(x) = log_a x$ com $a > 1$



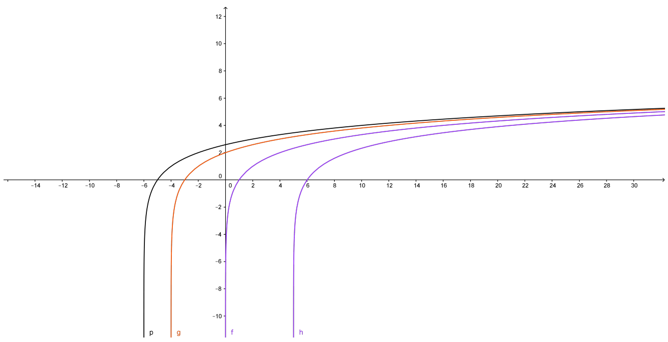
(b) $f(x) = log_a x$ com $0 < a < 1$

Figura 4.6: $f(x) = log_a x$

O comportamento do gráfico de uma função logarítmica varia de acordo com os coeficientes da função, ou seja, dado uma função $f(x) = log_a(bx + c)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b, a > 0$ e $a \neq 1$, como dito o valor de a define a curva como crescente ou decrescente, já o valor de b define o deslocamento vertical como pode ser observado na Figura 4.7(a) e o valor de c o deslocamento horizontal de acordo com a Figura 4.7(b).



(a) variação do coeficiente b



(b) variação do coeficiente c

Figura 4.7: $f(x) = log_a(bx + c)$

Como nas funções exponenciais pode-se realizar diversas aplicações em exemplos no cotidiano do aluno além de sua interdisciplinaridade ao ser aplicada em situações. Observe alguns exemplos de contextualização do uso da função exponencial:

Exemplo 1

Em uma colônia de bactérias, a cada meia hora, o número de bactérias dobra. Se inicialmente havia 700 bactérias, após quanto tempo haverá 700000 bactérias, aproximadamente? (Considere $\log 2 = 0,3$).

Resolução

Como no exemplo anterior no estudo de funções exponenciais onde ele seria expressado da forma $f(x) = 700 \cdot 2^{\frac{x}{30}}$ mas, o que queremos é a função inversa então como seria sua expressão? Ou para que valor de x tem-se $f(x) = 700000$?

Precisa-se transformar as informações dadas em uma expressão algébrica para poder ser utilizado os conteúdos abordados. Então tem-se que:

$$
\begin{aligned}
700 \cdot 2^{\frac{x}{30}} &= 700000 \\
2^{\frac{x}{30}} &= \frac{700000}{700} \\
2^{\frac{x}{30}} &= 1000 \\
\log 2^{\frac{x}{30}} &= \log 10^3 \\
\frac{x}{30} \cdot \log 2 &= 3 \cdot \log 10 \\
\frac{x}{30} \cdot 0,3 &= 3 \\
\frac{x}{100} &= 3 \\
x &= 300
\end{aligned}
$$

Tem-se que após 300 minutos ou 5 horas haverá 700000 bactérias.

Exemplo 2

Um capital de R\$ $12000,00$ é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre:

a) O capital acumulado após dois anos.

b) O número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial.

(use $\log 2 = 0,301$ e $\log 1,08 = 0,033$).

Resolução

a) O capital acumulado após um ano pode ser calculado através da fórmula de juros compostos : $M = C \cdot (1+i)^t$.

Sendo C o capital inicial de R\$ $12000,00$, i a taxa de juros de $0,08$ ao ano e t o tempo de 2 anos, tem-se:

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$M = 12000 \cdot (1+0,08)^2$$

$$M = 12000 \cdot 1,08^2$$

$$M = 13996,8$$

Então, após dois anos, o capital acumulado será de R\$ $13996,80$.

b) Considere x como o número de anos, i como a taxa de juros de $8\% = \frac{8}{100} = 0,08$, C como o capital inicial e M como o montante que deverá ser maior que o dobro do capital inicial, sendo assim, tem-se:

$$C \cdot (1+i)^t > M$$

$$C \cdot (1+0,08)^x > 2$$

$$1,08^x > \frac{2}{M}$$

$$1,08^x > 2$$

$$\log 1,08^x > \log 2$$

$$x \cdot \log 1,08 > \log 2$$

$$x \cdot 0,033 > 0,301$$

$$x > \frac{0,301}{0,033}$$

$$x > 9,121$$

Portanto, será necessário o mínimo de 10 anos para que o capital acumulado seja o dobro do capital inicial.

4.5 O número e

Uma questão teve grande ênfase nos séculos passados com relação ao comportamento de um depósito bancário, como cresceria o montante ao longo do tempo se os juros seriam creditados em intervalos de tempo cada vez menor, até que o acréscimo seja considerado instantâneos e sobre eles as mesmas taxas de juros.

Para melhor explicar a situação veja o exemplo:

Suponha que um banco pague 100% ao ano. Após um ano, teria um montante de R\$200,00 para cada R\$100,00 aplicado. Se o juros fossem creditados semestralmente, após um ano tera um montante de R\$225,00 para cada R\$100,00 aplicado. Se fosse trimestralmente após um ano teria R\$244,14 para cada R\$100,00 aplicado.

Note que o modelo matemático para esse cálculo é dada pela fórmula:

$$M = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Observe a relação de alguns valores n na Tabela 4.3

Com base na Tabela 4.3 consegue intuitivamente observar que a montante está se aproximando de um número cada vez que o valor de n vai aumentando, mas que número seria esse, se o valor de n fosse grande tanto quanto se queira?

Esse número é chamado de número de Euler e representado pela letra e. Ele é o que chamado de base do sistema de logaritmos naturais, a qual definiremos.

Tabela 4.3: Relação entre Montante (M) e o tempo(n)

Valor de n	Valor de M
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815

$$\log_e x = lnx$$

.

O número e é um número irracional, logo seu desenvolvimento decimal não termina e nem é periódico. Um valor aproximado de e com 6 algarismos decimais é 2,718281.

Teorema 6: Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional, tem-se $y = e^r$ se e somente se $lny = r$.

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Se $y = e^r$, aplicando ln em ambos os lados obtem:

$lny = lne^r = r \cdot lne = 1$, segue que:

$$lny = r$$

($\Leftarrow$)

Seja $y > 0$ um número real tal que $lny = r$. Como $lne = 1$, pode-se escrever $lny = r \cdot lne$.

Pela propriedades dos logaritmos $lny = lne^r$. Como ln é uma função injetiva conclui-se que $y = e^r$. □

4.6 Os logaritmos decimais

Históricamente os logaritmos decimais (de base 10) teve uma grande importância para facilitar os cálculos antes da criação das calculadoras, para obter uma melhor ideia de grandeza dos números costuma representá-los da forma:

$$a \cdot 10^n, 1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z}$$

Então dado um valor $x = a \cdot 10^n$, tem-se:

$$\log x = \log a \cdot 10^n = \log a + \log 10^n = n + \log a$$

Como $1 \leq a < 10$, tem-se que $1 \leq \log a < 10$. Tem-se que: $\log a =$ mantissa do $\log x$ e $n =$ característica de $\log x$. Portanto tem-se:

$$\log x = \text{característica} + \text{mantissa}.$$

Para facilitar as realizações dos cálculos foi elaborado uma tabela de alguns valores da mantissa, segue em anexo uma pequena tábua de logaritmos decimais dos números de duas casas decimais, desde 1 até 9, 99.

Exemplo:

Calcule $\log 23$:

Solução: Tem-se que $23 = 2,3 \cdot 10$. Então

$$\log 23 = \log(2,3 \cdot 10) = \log 2,3 + \log 10 = \log 2,3 + 1$$

Analisando a tabua no Apêndice A, tem-se que $\log 2,3 \approx 0,3617$.

Portanto: $\log 23 \approx 1 + 0,3617 = 1,3617$.

Exemplo:

Calcule $\log 7430$:

Solução: Tem-se que $7430 = 7,43 \cdot 10^3$. Então:

$$\log 7430 = \log 7,43 \cdot 10^3 = \log 7,43 + \log 10^3 = 3 + \log 7,43$$

Analisando a tabua no Apêndice A, tem-se que $\log 7,43 \approx 0,8710$.

Portanto: $\log 7430 \approx 3 + 0,8710 = 3,871$.

Exemplo:

Calcule $\log 0,00562$:

Solução: Tem-se que $0,00562 = 5,62 \cdot 10^{-3}$. Então:

$$\log 0,00562 = \log 5,62 \cdot 10^{-3} = \log 5,62 + \log 10^{-3} = -3 + \log 5,62$$

Analisando a tabua no Apêndice A, tem-se que $\log 5,62 \approx 0,7497$.

Portanto: $\log 0,00562 \approx -3 + 0,7497 = -2,2503$.

4.7 Representação geométrica de logaritmo

Com o intuito de melhorar a compreenção e obter um ensino de qualidade para todos os alunos, um grande desafio do professor é saber diversificar a apresentação dos conteúdos e explicar de diferentes maneiras um mesmo conceito. Na função logarítmica não é diferente, irá ser abordado a definição de uma função logarítmica de forma geométrica, interpretando seu comportamento e analizando-as, pois segundo Ávila, "O natural, como se vê, é levar o logaritmo para o contexto do Cálculo.

A utilização na geometria para calcular a área de uma hipérbole teve sua importância principalmente no século XVII e XVIII. Hoje podemos utilizá-la para definir as curvas no gráfico dos logaritmos naturais.

4.7.1 Área de uma faixa da hipérbole

Para definir a área de uma faixa da hipérbole considera-se um sistema de eixos cartesianos fixado num plano, isto é, duas retas orientadas e perpendiculares entre si. Cada ponto do plano ficará então representado por um par ordenado $(x; y)$.

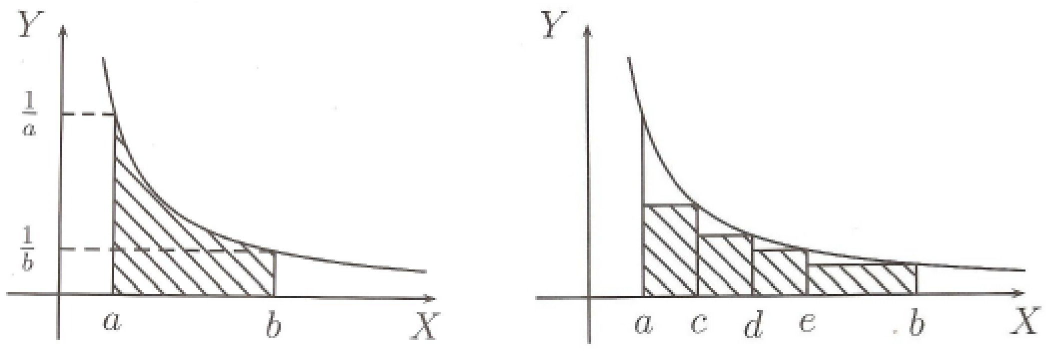
Seja H a parte positiva do gráfico $y = \dfrac{1}{x}$, ou seja:

$$H = \{(x; y); x > 0, y = \frac{1}{x}\}$$

Ao fixar dois números reais positivos $a; b$ com $a < b$ tomemos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, o eixo das abscissas e a parte H obtém-se uma faixa da hipérbole que será indicada por H_a^b de acordo com Figura 4.8(a).

Então $H_a^b = \{f(x; y); a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}\}$.

Para realizar o cálculo da área aproximada dessa região, com pontos intermediários decompomos o intervalo $[a, b]$ com um número finito de intervalos justaposto. Seja $[c, d]$ tal que $a < c < d < b$, um intervalo qualquer da decomposição, consideremos então o retângulo de altura $\dfrac{1}{d}$, o vértice superior direito desse retângulo esta sobre a hipérbole H. Esse retângulo é o retângulo inscrito na faixa H_a^b, a reunião desses retângulos inscritos constitui um polígono inscrito na faixa H_a^b como pode ser analisado na Figura 4.8(b).



(a) A região hachurada é a faixa H_a^b (b) Polígono retangular inscrito na faixa H_a^b

Figura 4.8: Faixa da H_a^b

Figuras retiradas de Lima(2009)

Quanto mais subdividirmos o intervalo $[a; b]$ mais aproximado será esse valor do exato da área, pois segundo LIMA “a área de H_a^b é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b". Podendo assim dizer que a área de H_a^b é o extremo superior do conjunto de números reais dados pelo valor das áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b, ou seja, fazendo a área de H_a^b igual a A temos que A é o menor número real tal que A maior ou igual área de P para todo polígono retangular P inscrito em $[a;b]$. Temos que A é o extremo superior do conjunto dos valores das áreas dos polígonos retangulares P inscritos em H_a^b, que significa o mesmo que afirmar que todos os valores aproximados por falta da área H_a^b são as áreas dos polígonos retangulares inscritos nesta faixa.

Teorema 7: Seja $k \in \mathbb{R}$, tal que $k > 0$, então as faixas H_a^b e H_{ka}^{kb} tem a mesma área.

Demonstração. Observemos primeiramente o seguinte fato. Dado um retângulo inscrito em H, cuja base é o segmento $[c,d]$ do eixo das abscissas, o retângulo inscrito em H e com base no segmento $[ck,dk]$ tem mesma área que o anterior. Observe a Figura 4.9.

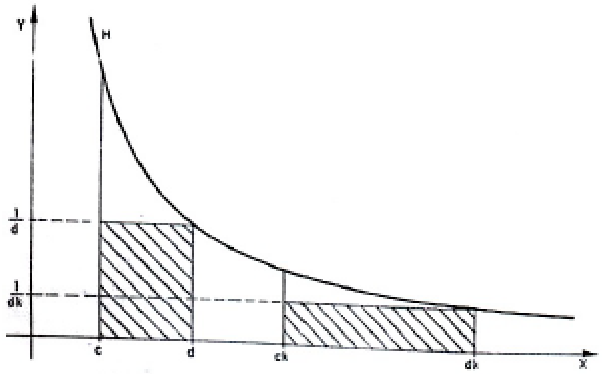


Figura 4.9: Os retângulos hachurados têm a mesma área.

Figura retirada de Lima(2009)

De fato, a área do primeiro é igual a $(d-c)\cdot\dfrac{1}{d} = 1-\dfrac{c}{d}$, enquanto a área do segundo é $(dk-ck)\cdot\dfrac{1}{dk} = 1-\dfrac{c}{d}$.

Considere agora uma reunião de retângulos adjacentes inscritos numa faixa de hipérbole H, cujas bases particionam um intervalo $[a,b]$ no eixo das abscissas, conforme ilustra a Figura 4.10

Chama-se esta reunião de retângulos de polígono retangular P. Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão $[a,b]$, determinados por P, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak,bk]$ e portanto um novo polígono retangular P', inscrito na faixa H_{ka}^{kb}. Cada um dos retângulos que compõem P' tem a mesma área que o retângulo correspondente em P. Logo a área de P' é igual à de P.

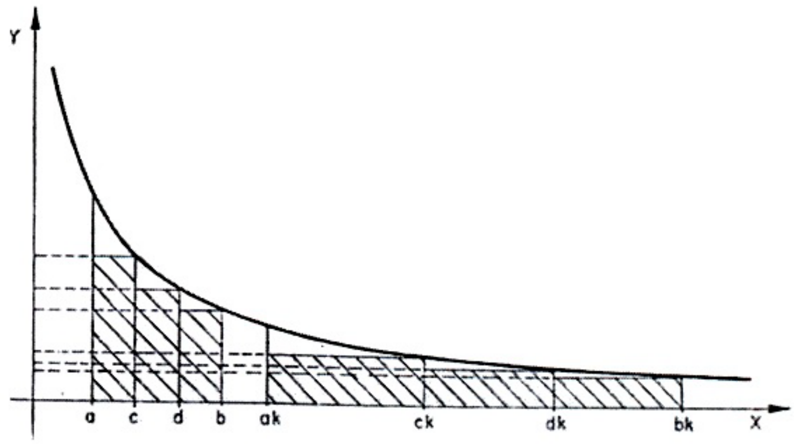


Figura 4.10: Os polígonos retangulares P e P' possuem mesma área.

Figura retirada de Lima(2009)

Portanto, concluímos que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um inscrito em H_{ka}^{kb} com a mesma área. Analogamente, para cada polígono retangular Q' inscrito em H_{ka}^{kb}, existe um outro Q, de mesma área, inscrito em H_a^b. Assim sendo, temos que as áreas destas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores e, portanto, são iguais. $\square$

Em consequência do teorema é que podemos restringir nossa consideração às áreas das faixas da forma H_1^c, pois:

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_1^{\frac{b}{a}}) = \text{Área}(H_1^c),\ c = \frac{b}{a}.$$

Exemplo: Utilizando o cálculo de área podemos obter um valor aproximado para $ln2$.

Resolução: Inicialmente será subdividido o intervalo $[1, 2]$ em dez partes iguais, que listados na Tabela 4.7.1, juntamente com os respectivos valores de $\frac{1}{x}$ quando x assume os valores da subdivisão .

Formou-se dez retângulos cujas as bases medem $0,1$ cada e, suas alturas são os valores $\frac{1}{x}$ da Tabela 4.7.1. Calcula-se a soma das áreas desses retângulos obtém-se $0,6685$ que é um valor aproximado para $ln2$. Assim:

$$ln2 \approx 0,6685.$$

Tabela 4.4: $\dfrac{1}{x}$

x	$\dfrac{1}{x}$
1	1
1,1	0,909
1,2	0,833
1,3	0,769
1,4	0,714
1,5	0,666
1,6	0,625
1,7	0,588
1,8	0,555
1,9	0,526
2	0,500

4.8 Séries de Taylor

Dada uma função diferenciável em qualquer ordem num certo ponto a interior ao seu domínio (isto é, existe a derivada de qualquer ordem de f em $x = a$, $f^{(n)}(a)$) podemos sempre escrever a sua série de Taylor relativa a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

A principal propriedade deste polinômio é que ele passa pelo ponto $(a, f(a))$ e possui as mesmas derivadas até ordem n que a função f.

Cada vez que aproxima-se um valor desconhecido por outro conhecido é importante saber estimar o erro que se comete ao fazer esta aproximação. Isto é estimar o erro para melhorar a aproximação se necessário. Quer encontrar um valor $\epsilon > 0$ de tal forma que

$$|f(x) - p_m(x)| < \epsilon, \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$$

onde p_m é o polinômio de Taylor de grau m numa vizinhança de $x = a$.

Teorema de Taylor: Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo (a, b). Seja

$$x_0 \in [a, b]$$

então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Demonstração. Denota-se a função

$$G(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k + A(x - t)^{n+1}$$

onde A é de tal forma que $G(x_0) = 0$. Portanto teremos que $G(x) = G(x_0) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (x, x_0)$ tal que $G'(c) = 0$. Derivando G encontramos

$$G'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(\frac{f^k(t)}{k!}(x - t)^k) - (n+1)A(x - t)^n$$

Usando das fórmulas das derivadas de um produto tem-se que

$$G'(t) = -f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1}) - (n+1)A(x - t)^n$$

Note que o somatório anterior é telescópico, portanto

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{k!}(x - t)^n - (n+1)A(x - t)^n \Longrightarrow \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n)!}(x - c)^n = (n+1)A(x - c)^n$$

Tomando $t = c$, segue que

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Tomando $t = x_0$ e aplicando o fato que $G(x_0) = 0$ obtemos o resultado.

□

O Teorema de Taylor pode ser usado para calcular potenciação e logaritmos, observe os exemplos.

Exemplo 1: Determine o m de tal forma que a aproximação

$$e^x \approx \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!},$$

para $x \in (0, 1)$, possua dois dígitos exatos.

Resolução:

O erro ao aproximar a exponencial pelo polinômio de Taylor está dado por

$$E_m = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x)^{m+1} = \frac{e^c}{(m+1)!}(x)^{m+1} \leq \frac{e}{(m+1)!}$$

Tabela 4.5: $ln1,5$

n	$ln1,5$
2	0,37500
4	0,40104
5	0,40729
10	0,40543
11	0,40548
12	0,40546
13	0,40547
15	0,40547
20	0,40547
Aproximado:	0,40547

Para ter dois dígitos exatos, deve-se ter $E_m \leq 0,005$. Para obter essa estimativa toma-se

$$\frac{e}{(m+1)!} \leq 0,005 \Longrightarrow (m+1)! \leq 200 \cdot e = 543,6563656 \leq 544$$

Como $6! = 720$ pode-se tomar $m = 5$. Isto é, para qualquer valor $x \in (0,1)$ a expressão

$$\sum_{n=0}^{5} \frac{x^n}{n!}$$

aproxima ao exponencial e^x com dois dígitos exatos.

Exemplo 2: O cálculo de $ln1,5$ e $ln2$, usando a série de Taylor,utilizando os valores fornecido pela Tabela 4.5 e Tabela 4.6.

Como a série é convergente para $x = 1,5$, observa-se que pela Tabela 4.5 a função fornece o resultado correto com cinco casas decimais empregando 13 termos da série. Os outros valores, para $n > 13$, embora não sejam exatos, mostram tendências de convergência para o valor exato. No caso do $ln2$ analizando a Tabela 4.6, nota-se que a convergência do valor é lenta, para obter o resulta do com precisão de cinco casas decimais, necessita de uma ordem de 200000 termos da série. Geralmente quanto maior o valor de x para o cálculo de $f(x)$, maior será a precisão do resultado.

Tabela 4.6: $ln2$

n	$ln2$
10	0,64564
50	0,68325
100	0,68817
500	0,69215
1000	0,69265
10000	0,69310
50000	0,69314
100000	0,69314
200000	0,69315
Aproximado:	0,69315

5 Intervenção didática no ensino de funções exponencial e logarítmica

A educação de hoje se encontra diante de um grande desafio, que se dá devido aos meios tecnológicos que agora são disponíveis de mobilidade e armazenamento de informações e meios de comunicação. Sob esse ponto de vista a escola hoje tem um papel de nortear os indivíduos para que estes não fiquem submergidos nesses novos meios de comunicação.

A educação também desempenha o papel de transmitir saberes, estes cada vez mais complexos, e também o aprender a conhecer. Ou seja, não basta apenas transmitir conteúdos aos alunos, a escola deve também desenvolver nos alunos o saber-fazer, que significa saber aprender e saber aplicar esse conhecimento em seu dia-a-dia, saber se desenvolver conforme a necessidade e saber adquirir novos conhecimentos.

Para saciar/contemplar os desafios propostos para a escola, a educação deve se organizar em torno de quatro aprendizagens.

> Para poder dar resposta ao conjunto das suas missões, a educação deve organizar-se em torno de quatro aprendizagens fundamentais que, ao longo de toda vida, serão de algum modo para cada indivíduo, os pilares do conhecimento: *aprender a conhecer*, isto é adquirir os instrumentos da compreensão; *aprender a fazer*, para poder agir sobre o meio envolvente; *aprender a viver juntos*, a fim de participar e cooperar com todos os outros em todas atividades humanas, finalmente *aprender a ser*, via essencial que integra as três precedentes. É claro que estas quatro vias do saber constituem apenas uma, dado que existem entre elas múltiplos pontos de contato, de relacionamento e de permuta. (DELLORS, 2000, p. 89-90)

A aprendizagem do aprender a conhecer é fundamental, esta se resume na aquisição de instrumentos de compreensão, ou seja, o aluno aprende as estratégias de compreensão, desenvolvendo novas habilidades no processo de aprendizagem. Essa aprendizagem se caracteriza como meio, pois o aluno deve compreender o mundo que o rodeia, evoluindo a partir de suas necessidades, e essa aprendizagem se caracteriza como finalidade, pois tem fundamentação no prazer de aprender, ou seja, o ato de aprender/conhecer se torna prazeroso, estimulando a pesquisa individual.

O processo de aprendizagem nunca se esgota, o conhecimento não é algo acabado, sempre é possível aprender a partir das próprias experiências, por isso cabe à educação transmitir as bases da aprendizagem, de modo que o indivíduo possa aprender em todas as situações ao longo de sua vida.

O Aprender a fazer se resume em saber aplicar/utilizar os conteúdos aprendidos em diversas situações, ou seja, o indivíduo deve aprender a aplicar o que aprendeu na teoria, de caráter cognitivo, na prática, ou seja, em seu dia-a-dia.

A aprendizagem de aprender a viver juntos, se resume em aprender a trabalhar em coletividade, respeitando as diferenças dos outros e livre de preconceitos. Para isso a educação deve trabalhar em dois níveis, a descoberta progressiva do outro, e a participação em projetos comuns.

O aprender a ser tem como objetivo que o indivíduo se aceite socialmente, e aceite os outros. Essa aprendizagem inclui a formação de valores do indivíduo, seu reconhecimento como um sujeito ativo na sociedade, bem como a formação do respeito ao próximo, e de humanização do indivíduo.

Segundo Reali e Reyes, (2009), "a aprendizagem da docência envolve processos de naturezas distintas, porém inter-relacionados, dos quais destacamos: (1) a aprendizagem sobre ensinar e (2) a aprendizagem sobre ser professor".

A aprendizagem sobre o ensinar envolve a compreensão de si, dos alunos, da matéria, do currículo e das estratégias de ensino, ou seja, está relacionado ao professor ensinar os conteúdos propostos no currículo da escola, de modo a facilitar a aprendizagem do aluno.

O professor deve saber atuar em diversas situações, diante às questões que o aluno trouxer, o professor deve ter a habilidade de transformar o conteúdo dado em conteúdo aprendido pelos alunos. O ensinar envolve estritamente as atividades da sala de aula entre alunos e professores.

O ser professor é um processo amplo, pois abrange não somente a sala de aula, mas o sujeito professor como um todo, sua participação profissional, sua postura social, sua atuação na escola e em outros locais. O ser professor implica no desempenho do papel do professor, em sua função social, suas responsabilidades e seus pensamentos.

Nota-se atualmente que nossa sociedade está em constante transformação, essas transformações sociais tem refletido diretamente na escola. Nos dias atuais ser professor engloba não somente os conteúdos curriculares, hoje o professor tem que dominar as tecnologias e os meios de comunicação, de modo a atrair a atenção do aluno para os saberes escolares, utilizando a tecnologia como um aliado e não como um inimigo no processo de ensino aprendizagem.

O ensinar agrega uma série de estratégias de ensino/didática ao planejar e executar uma aula. O professor em sala de aula deve ensinar uma base de conteúdos que possam ser flexíveis, de modo a permitir que o aluno possa aplicar e desenvolver o mesmo em diversos âmbitos.

Os professores assim como os alunos, devem aprender a trabalhar em diversificados ambientes, que se alteram ao longo do tempo, visando o aprender a aprender. As vivências do professor vão determinar sua prática, ela engloba seus valores constituídos na família, seus saberes escolares da escola primária e secundária, seus saberes adquiridos na sua formação acadêmica, suas experiências com livros didáticos e atividades em sala de aula, e de sua prática escolar, ou seja, de sua experiência em sala de aula.

Para ser um bom professor é necessário ter domínio dos conteúdos, sabendo que eles servirão de base para os alunos adquirirem novos saberes, um bom professor se preocupa com sua prática em sala de aula, buscando sempre articular a teoria pedagógica com a sala de aula, buscando desenvolver atividades didáticas com diversas estratégias de ensino. Na atualidade um bom professor deve conhecer as tecnologias, sabendo utilizalas em sala de aula.

O professor deve respeitar o aluno como um indivíduo crítico e reflexivo e promover o desenvolvimento dessas características no mesmo.

O professor deve saber e deve desenvolver nos alunos os quatro pilares da educação, sendo eles o aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver juntos e o aprender a ser.

Para mediar o aprendizado dos alunos, o professor deve ter um conjunto de habilidades e estratégias de ensino aprendizagem, de modo a facilitar a compreensão dos mesmos, tornando o conteúdo ensinado em conteúdo aprendido. O ensino não deve englobar apenas um grande arsenal de conteúdos, mas deve propor uma base de conteúdos que servirão para os alunos adquirirem novos conhecimentos.

Tendo em vista a necessidade de se utilizar diversas abordagens interdisciplinares no campo da matemática, com base no estudo do tema proposto, tornou-se possível a confecção de propostas de atividades que poderão auxiliar o professor no ensino de funções e logarítmos.

5.1 O uso do BROffice Calc no ensino de potenciação com números irracionais

A função exponencial é contínua, no entanto, muitos alunos continuam com a dúvida de que se essa afirmação é possível e verídica, mesmo ao provar algebricamente a dúvida permanece. Dessa maneira, para fazer a demonstração da continuidade algébrica de forma prática e de fácil compreensão iremos usar um software bem comum nos computadores e gratuito "BROffice Calc".

O trabalho tem início com uma pergunta que irá chamar a atenção dos alunos, buscando envolvê-los na atividade fazendo o levantamento de hipóteses e através dessa participação irá dar continuidade na demonstração do conteúdo. Pergunta–se: — Será que é possível representar o número 10 através de uma potência na base 2 ou será que tem algum expoente na potência de base 2 que resulta em 10? Em outras palavras representando algébricamente, determine o valor de “x” onde $2^x = 10$.

As repostas serão divergentes, alguns dirão que sim e quando o fizerem pergunta–se qual o número que deverá ocupar o lugar do expoente. Diante disso irá ficar essa dúvida no ar e aproveitando que estão envolvidos e interagindo com o problema apresentado, vamos resolvê-lo por aproximação. Iniciando com a pergunta: — a potência 10 esta entre quais expoentes naturais na base 2? Facilmente será respondida que esta entre 3 e 4, porque como pode-se observar:

$$8 = 2^3 < 10 < 2^4 = 16$$

Continua–se com a pergunta:— agora entre quais números com até 1 casa decimal a potência 10 esta localizada sobre a base 2? Diante essa pergunta não será possível ter uma resposta mentalmente, e será através dela que iremos inserir o uso do software.

Levando os alunos em uma sala de informática ou trabalhando em algum aparelho que contenha o software BROffice Calc, iremos dar início ao trabalho fazendo uma simples tabela (de acordo com a Figura: 5.1)contendo os valores do expoente e o valor resultante da potência.

Expoente										
Potência										

Figura 5.1: Tabela inicial

Com base na tabela, o aluno irá preencher os valores do expoente com uma sequência de números naturais de 0 á 9 e através de um comando simples completa-se a potência por exemplo: suponha que o expoente seja o número 2 e o mesmo está escrito sobre a célula destinada ao expoente, então abaixo dele colocamos o comando de 2 elevado ao seu respectivo expoente, e com isso tem-se o valor resultante da potência $2^2 = 4$, fazendo isso até completar a tabela.

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Potência	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Figura 5.2: Tabela com expoente entre 0 e 9

Pode-se observar na Figura: 5.2 e orientar os alunos que o que foi dito em sala era verdadeiro, pois a potência 10 esta entre o expoente 3 e 4 na base 2, pois $8 < 10 < 16$, logo sabe-se que os valores decimais possíveis para o expoente esta entre 3 e o 4, completando a tabela com os números 3,1 ao 3,9 nos valores dos expoente terá os resultados mostrado na Figura: 5.3.

Chegou–se em outro impasse, com apenas um número decimal não se consegue chegar na potência 10, então propõe–se de aproximar ainda mais no valor, ou seja,

Expoente	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
Potência	8,57419	9,18959	9,8492	10,5561	11,314	12,126	12,996	13,929	14,9285

Figura 5.3: Tabela com expoente entre 3,1 e 3,9

construindo uma nova tabela onde acrescenta–se mais uma casa decimal, usando o mesmo princípio dado anteriormente. A potência 10 está entre os expoente 3,3 e 3,4, completando a tabela com os números 3,31 ao 3,39 nos valores do expoente.

Expoente	3,31	3,32	3,33	3,34	3,35	3,36	3,37	3,38	3,39
Potência	9,91766	9,98664	10,056	10,1261	10,196	10,267	10,3388	10,411	10,4831

Figura 5.4: Tabela com expoente entre 3,31 e 3,39

Note pela Figura: 5.4 que com duas casas decimais também não se consegue chegar na potência 10, porém esta se aproximando cada vez mais tanto pela direita quanto pela esquerda e entre os expoente 3,32 e 3,33 então pode–se aproximar ainda mais com 3 casas decimais usando os expoente 3,321 ao 3,329. Fazendo–se então o mesmo processo completando a linha dos expoente com os números obtém o resultado de acordo com a Figura: 5.5.

Expoente	3,321	3,322	3,323	3,324	3,325	3,326	3,327	3,328	3,329
Potência	9,99357	10,0005	10,007	10,0144	10,021	10,028	10,0352	10,042	10,0491

Figura 5.5: Tabela com expoente entre 3,321 e 3,329

Note que com três casas decimais aproximou–se a potência 10 na base 2 o expoente sendo 3,321 (por falta) ou o 3,322 (por excesso). Com esse mesmo pensamento e metodologia é proposto aos alunos que continuem repetindo o processo até chegar a exatamente na potência desejada e verifiquem se existe algum número racional que possa ser expoente da base 2. Após um tempo, possivelmente chegará um aluno que consegue realizar a tarefa, obtendo assim um número racional como resposta, será nessa hora que o professor terá que mediar a situação e mostrar aos alunos que isso foi possível apenas porque o próprio programa está arredondando ou aproximando a resposta, que é possível aumentar o total de casas decimais a serem visualizadas na célula, e assim concluindo que pode-se aproximar cada vez mais.

Com base nesse experimento conclui que não existirá um número racional que possa ser expoente de 2 que resultará em 10, porém sabe–se que tal número existe pois se trata de uma função contínua para os reais, logo esse número se é um número irracional. Mostrado então que pode ter um número irracional no expoente. Pode–se ainda aproveitar tal situação para dar um gancho entre potenciação e logaritmos ao perguntar:"– qual será este número? Como podemos escrever este numero?". E explica-se que ele pode se escrito da forma:

$\log_2 10$

Onde o significado dessa simbologia será $2^x = 10 \rightarrow x = \log_2 10$. Portanto o tal número irracional será $\log_2 10$.

5.2 O jogo de xadrez

Há uma lenda sobre o jogo de xadrez, que pode ser encontrada no livro "O Homem que Calculava" (Malba, 1994). Segundo essa lenda, um rei empolgado com as tramas possíveis de serem construídas com esse jogo, pede ao sábio responsável por sua invenção que escolha qualquer coisa do seu reino como forma de gratificação pelo trabalho. O sábio pede como prêmio grãos de trigo.

O rei, bastante surpreso pela simplicidade do pedido, pergunta imediatamente qual é a quantidade desejada. O sábio deixando o rei ainda mais assustado e intrigado pede ao soberano que coloque no tabuleiro 1 grão de trigo na primeira casa, 2 grãos na segunda, 4 grãos na terceira, 8 grãos na quarta, 16 na quinta, e assim por diante, dobrando sempre o número de grãos de trigo na passagem de cada casa. O rei fica perplexo e não entende a limitação do pedido.

Inicialmente para interagir ainda mais os alunos com a história, realiza uma roda de discussões dos possíveis pedidos que o sábio poderia realizar e se foi uma vantagem pedir os "grãos de trigo". Diante de diversas respostas e indagações dos alunos continua a história de como foi a reação do rei diante o pedido e se foi concedido seu pedido ou não.

Insensato, chamou-lhe o rei, donde já se viu tanto desamor pelos bens materiais? Chamou então, o rei, os algebristas mais hábeis da corte, e ordenou-lhes que calculassem o valor. Após muito tempo, voltaram:

Rei magnânimo! Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento e obtivemos um número cuja grandeza é inconcebível para a imaginação humana. O sábio abriu mão de seu pedido, mas mostrou ao rei uma nova maneira de pensar. Ganhou com isso um manto de honra e ainda 100 sequins de ouro.

Segue no Apêndice: B o capítulo 5 do livro de Malba Tahan(1994) que relata a situação citada. com isso os professores e alunos podem utilizar como uma leitura auxiliar. O ponto de partida é utilizar essa lenda como um problema para introduzir o conceito de função exponencial.

Repare que para cada casa no tabuleiro de xadrez está relacionado a uma certa quantidade grãos de trigo, essa relação como estudado anteriormente pode ser escrita como função, analizando a Tabela: 5.1 temos o número de grãos de acordo com a casa do tabuleiro.

Irá ser abordado essa relação para melhor compreenção de exponencial e como seu crescimento é rápido, pois com 9 casas já foram 512 grãos e após 64 casas seria um número absurdamente grande como disse os algebristas do rei. Por isso a importân-

Tabela 5.1: Relação entre Número de casa e quantidade de grãos

Número da casa	Quantidade de grãos
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
5	$16 = 2^4$
6	$32 = 2^5$
7	$64 = 2^6$
8	$128 = 2^7$
9	$256 = 2^8$
10	$512 = 2^9$
n	2^{n-1}
64	2^{63}

cia de saber trabalhar com exponecial e compreender a razão de crescimento e suas propriedades.

5.3 Baralho mágico

Muitos truques de mágica se fundamentam em princípios da Matemática, este experimento tratará de um truque com baralho que, aparentemente, não parece ter relação alguma com esta ciência. Contudo, se observarmos com atenção, de dentro da cartola mágica tira-se algo surpreendente: uma função logarítmica!

Na mágica proposta pelo experimento no Apêndice: C, a carta escolhida termina sempre no centro da coluna do meio. Será que isso realmente sempre acontece? A presente etapa pretende provar que sim.

A condição necessária para que a carta escolhida termine sempre no meio é a de que o número de cartas e o número de colunas sejam ímpar. Então, sejam n o número ímpar de cartas e m o número ímpar de colunas da mágica; quer mostrar que, na i-ésima iteração, a carta estará no centro da coluna do meio conforme a Figura: 5.6.

Para que isso aconteça, queremos que, na iteração número $i-1$, a carta termine no centro de uma das colunas, ampliando a cobertura para 3 cartas conforme a Figura: 5.7.

Analogamente, para que isso ocorra, precisa-se que na iteração $i - 2$ as cartas estejam na região marcada, aumentando a cobertura para 9 cartas conforme a Figura: 5.8

Perceba que, quando distribuímos as cartas de uma das colunas, as cartas formam uma linha no centro, conforme mostrado no diagrama da iteração $i - 2$. Ao realizar o mesmo raciocínio na iteração $i - 3$, cobrirà 27 cartas, conforme Figura: 5.9

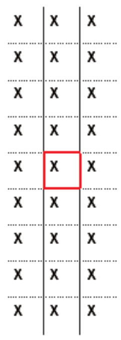


Figura 5.6: Diagrama para i iterações.

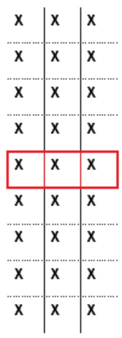


Figura 5.7: Diagrama para $i-1$ iterações.

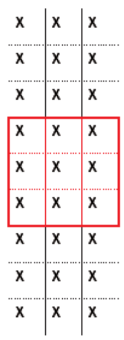


Figura 5.8: Diagrama para $i-2$ iaterações.

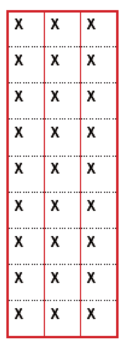


Figura 5.9: Diagrama para $i-3$ iterações.

Pode-se concluir que o número de cartas cobertas na iteração $i-3$ será de 3^3. Na iteração 0, ou seja, antes de fazer qualquer iteração, cobrirá 3^i das cartas. Mas sabe-se, de acordo com o que foi desenvolvido no experimento, que $i \geq \log_3 n$, ou ainda, $3^i \geq n$ (onde n é o número de cartas usadas na mágica). Portanto, o número de cartas cobertas sempre será maior ou igual ao número de cartas com o qual começa a mágica, ou seja, após i iterações, qualquer que seja a carta escolhida, ela irá convergir para o centro da coluna central.

É bastante provável que os alunos questionem o motivo de o número de cartas sempre ser ímpar no experimento. Isso acontece porque não há carta do centro quando temos um número par de cartas. Mas onde a carta fica se tem um número par de cartas e um número ímpar de colunas?

Suponha que a carta escolhida esteja na posição p da coluna antes da primeira iteração. Se utilizado três colunas, a posição dessa carta será o menor inteiro maior que $\frac{(p+t)}{3}$, onde t, é o número de cartas da coluna. Veja que isso acontece porque quando reagrupa-se as cartas de modo que o monte escolhido esteja no meio, ela será a carta número $p+t$ da nova iteração.

Realiza-se a mágica usando 18 cartas e supoem-se que seja escolhida a segunda carta da terceira coluna. Tem-se que, após a primeira iteração, a carta estará na terceira posição de alguma coluna ($\frac{(6+2)}{3} = 2,6...$). Ao realizar a iteração novamente, a carta estará na terceira posição de alguma coluna novamente e, a partir desse ponto, a posição começa a se repetir, a carta se mantém na terceira posição. Como passado essa carta para o centro do baralho, quando reagrupados, a carta estará na terceira posição da coluna do meio.

Ao realizar essas iterações para os mais variados números pares de cartas, percebe-se que no final elas sempre variam entre as duas cartas do meio da coluna central, já que, como dito anteriormente, não há centro da coluna para que ela pare.

O mesmo ocorre com as colunas, se elas forem de número par. A carta sempre irá variar entre as duas colunas centrais. Como a carta varia se tiver um número par de colunas e/ou cartas. Nesse casa não é conveniente realizar esta mágica com esses números de cartas.

Variações podem ser facilmente obtidas alterando o número de cartas e o número de colunas, e as demonstrações são elementares a partir das já realizadas. Detalhes da atividade pode ser observadas no Apêndice: B.

5.4 A escala Richter

Há muito tempo os fenômenos naturais intrigam a humanidade motivo pelo qual se iniciou a busca por padrões matemáticos em tais fenômenos despertando o interesse de inúmeros cientistas, físicos, geólogos e matemáticos.

O terremoto é um fenômeno natural e podem ser percebidos por meio de instrumentos denominados sismógrafos (do grego seismos, tremor), ou até mesmo por nossos sentidos. Os terremotos ocorrem quando a camada mais superficial da Terra – a litosfera – divide-se em partes menores chamadas placas tectônicas, que se movimentam lentamente, ocasionando um contínuo processo de esforço e deformação nas grandes massas de rocha. Quando o esforço é grande e supera o limite de resistência da rocha, esta se rompe – originando uma falha geológica – e acontece o terremoto. Parte da energia acumulada é então liberada sob a forma de ondas elásticas, que podem se propagar em todas as direções, fazendo o terreno no entorno vibrar intensamente. Esse processo é o causador da maioria dos terremotos. Normalmente, a ruptura das rochas só acontece em profundidade. Nos sismos menores é comum o terreno se deslocar somente alguns centímetros ao longo da falha geológica. Portanto, a ruptura da rocha é o mecanismo pelo qual o terremoto é produzido.

Charles Francis Richter e Beno Gutenberg em seus estudos em 1935 desenvolveram uma escala a qual denominaram de escala Richter com o intuito de medir a magnitude de um terremoto com base nas ondas sísmicas que se propagam a partir do local de origem do tremor no subsolo provocado pelo movimento das placas tectônicas. A escala Richter é uma escala logarítmica que possui pontuação de 0 a 9 graus. A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto.

O princípio básico da escala é que as magnitudes sejam expressas na escala logarítmica, de maneira que cada ponto na escala corresponda a um fator de 10 vezes na amplitude das vibrações. Por isso é usado o logaritmo de base 10, em que ele classifica cada grau da escala em 1,2,3,... em vez de falar 10,100,1000,... o que dificultaria mais o processo para o cálculo. No entanto, o modo de classificá-lo através da escala usada é bem fácil de trabalhar, compreendendo assim que, se houver um abalo de magnitude 4, ele será dez vezes maior que o de magnitude 3, cem vezes maior que a 2,mil vezes maior que a 1. É importante relatar que cada ponto na escala de magnitude corresponde a uma diferença da ordem de 30 vezes na energia liberada. Assim, um abalo de magnitude 4 libera 30 vezes mais energia que o de magnitude 3. A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida pelos sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto.

A fórmula utilizada é dada pela equação:

$$M = \log A - \log A_0$$

Sendo :

M : magnitude;

A :amplitude máxima;

A_0 : amplitude de referência.

Podemos utilizar a fórmula para comparar as magnitudes de dois terremotos. Para calcular a energia liberada por um terremoto, usamos a seguinte fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0}$$

Sendo :

I : varia de 0 a 9;

E : energia liberada em Kw/h;

E_0 : $7 \cdot 10^{-3} Kw/h$.

Na sequência, são analizados alguns problemas envolvendo esta temática, realçando que foram retirado de vestibulares de algumas das principais universidades brasileiras.

Problema (UFV-MG 2007)

A fim de medir a magnitude de um terremoto, os sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter em 1935. Nesta escala, o maior terremoto já registrado foi o Grande Terremoto do Chile, em 1960, atingindo a magnitude de 9,5, seguido do ocorrido na Indonésia, em 2004, que atingiu a magnitude de 9,3. Na escala Richter, a magnitude M é dada por $M = \log A - \log A_0$ onde log denota logaritmo decimal, A é a amplitude máxima medida pelo sismógrafo e A_0 é uma amplitude de referência padrão. Sabe-se também que a energia E, em ergs (1 erg = 10^{-7} Joules), liberada em um terremoto está relacionada à sua magnitude M por meio da expressão $\log E = 11,8 + 1,5M$.

A partir das informações acima, faça o que se pede:

a) Sabendo que no litoral do Brasil, em 1955, foi registrado um terremoto de magnitude 6,3 na escala Richter, determine a razão entre as energias liberadas nos terremotos ocorridos na Indonésia e no Brasil.

b) Considerando A_1 a amplitude máxima de um terremoto e E_1 sua energia, e A_2 a amplitude máxima de outro terremoto e E_2 sua energia, determine k tal que:

$$\frac{A_2}{A_1} = (\frac{E_2}{E_1})^k.$$

Resolução:

a) Sejam E_i e E_b as energias liberadas nos terremotos ocorridos na Indonésia e no Brasil, respectivamente. Então de acordo com o enunciado:

$$\log E_i = 11,8 + 1,5 \cdot 9,3 = 25,75$$

$$\log E_b = 11,8 + 1,5 \cdot 6,3 = 21,25$$

Logo

$$\log \frac{E_i}{E_b} = \log E_i - \log E_b = 4,5$$

Portanto

$$\frac{E_i}{E_b} = 10^{4,5}.$$

b) Considere M_1 a magnitude de um terremoto e M_2 a magnitude de outro. De acordo com o enunciado:

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0$$

$$M_2 = \log A_2 - \log A_0$$

Logo,

$$M_2 - M_1 = \log A_2 - \log A_1 = \frac{A_2}{A_1}.$$

E também,

$$\log E_1 = 11,8 + 1,5 \cdot M_1$$

$$\log E_2 = 11,8 + 1,5 \cdot M_2$$

Assim,

$$\log \frac{E_2}{E_1} = \log E_2 - \log E_1 = 1,5 \cdot (M_2 - M_1).$$

Em consequência segue que:

$$\log \frac{E_2}{E_1} = 1,5 \cdot \log \frac{A_2}{A_1} \Leftrightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = \frac{3}{2} \cdot \log \frac{A_2}{A_1}$$

$$\log \frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E_2}{E_1}$$

$$\log \frac{A_2}{A_1} = \log(\frac{E_2}{E_1})^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = (\frac{E_2}{E_1})^{\frac{2}{3}}$$

Portanto, $k = \frac{2}{3}$.

Problema (Fuvest-SP 2008)

A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8,5$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula :

$$I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kWh$.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Resolução :

a) Pelo enunciado temos:

$$8 = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$

$$12 = \log\frac{E}{E_0}$$

$$10^{12} = \frac{E}{E_0}$$

$$E = 7\cdot 10^{-3}\cdot 10^{12} = 7\cdot 10^{9}$$

Portanto a energia liberada é de $7\cdot 10^9 kWh$.

b)Somando 1 na intensidade temos:

$$I + 1 =$$

$$\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} + 1 =$$

$$\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} + \log 10 =$$

$$\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\log 10 =$$

$$\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} + \frac{2}{3}\cdot\log\sqrt{1000} =$$

$$\frac{2}{3}(\log\frac{E}{E_0} + \log\sqrt{1000}) =$$

$$\frac{2}{3}\log\frac{E\cdot\sqrt{1000}}{E_0}$$

Portanto a energia liberada fica multiplicada pelo fator $10\cdot\sqrt{10}$.

5.5 Intensidade sonora

O som que ouvimos são ondas sonoras produzidas por vibrações de partículas do meio. Por exemplo, ao acontecer uma explosão num dado ponto, as moléculas do ar em volta desse ponto são comprimidas e vão se propagando ao longo dos meios materiais. O nosso ouvido, ao ser atingido por essa onda sonora, possui a capacidade de converter a variação de pressão no ar em estímulo nervoso, o qual, quando alcança o cérebro, nos passa uma sensação auditiva, o som. A onda sonora pode ser um ruído como a do exemplo citado ou um som musical, produzido pela vibração periódica de uma fonte.

A intensidade do som está intimamente ligada a um termo que é ao mesmo tempo o mais usado e o menos compreendido no mundo do áudio: o **deciBEL (dB)**. O decibel tem um significado muito importante em todo tipo de medida usadas em áudio, tais como: volume de som, potência elétrica, potência acústica, tensão elétrica, pressão sonora, intensidade sonora e outros.

O decibel não é uma unidade de medida, visto que ele não está ligado especificamente a nenhuma grandeza física, tal como a potência ou tensão. O decibel não expressa a quantidade de alguma coisa mas sim a relação entre valores de uma mesma grandeza. Ou seja, o dB é uma escala relativa, sem dimensão (como a percentagem), que compara a intensidade de um sinal a uma referência. Por exemplo, quando se fala em 10 Watts pode-se estar referindo à quantidade de potência que um determinado dispositivo pode desenvolver, tal como um amplificador, ou a quantidade de potência que um dispositivo pode suportar, tal como um alto-falante.

A criação da escala dB esta diretamente ligada aos primórdios da industria da telefonia. À medida que o telefone começou a se popularizar, os engenheiros ligados ao projeto (particularmente estamos falando de Alexander Graham Bell, inventor do telefone) sentiram a necessidade de encontrar uma maneira mais simples de anotar e trabalhar com os números que expressavam os ganhos e as perdas numa linha telefônica. Além disso, era preciso criar uma unidade que representasse a forma como o ouvido humano interpreta os sons que chegam a ele, e no caso da telefonia, isso era imprescindível.

Ocorre que o ouvido humano não interpreta os sons tal qual eles se manifestam fisicamente falando, ou seja, a sensibilidade do ouvido humano varia proporcionalmente ao logaritmo da variação física. Quando começaram a estudar os fenômenos que ocorrem no processo de transmissão e recepção de sinais de áudio, os cientistas dos laboratórios Bell logo viram a complexidade que seria se tivessem que utilizar a notação aritmética dos resultados obtidos de suas experiências.

Portanto tratou-se de inventar um sistema de medidas, ou melhor, de escala capaz de expressar as muitas variações de valores na potência do sinal de áudio nas linhas telefônicas em números simples e de fácil manuseio. Para isso os cientistas lançaram mão de um artifício matemático denominado de logaritmo.

Então os principais motivos do uso do dB na forma logarítmica são:

- O ouvido humano tem resposta logarítmica (sensação auditiva versus potência acústica);

- Em telecomunicações, se usam números extremamente grandes ou pequenos. O uso de logaritmos torna estes números pequenos e fáceis de manipular, e transforma produtos em somas e divisões em subtrações.

Percebe-se que por meio dos problemas discutidos nas diferentes atividades a importância das aplicações desses conceitos em modelagem matemática. Na sequência foram retirados alguns problemas envolvendo o conceito de intensidade sonora, que foram extraídos de vestibulares nacionais.

Problema (UEPA 2007)

Os carnavais fora de época conseguem reunir uma grande quantidade de pessoas que se divertem ao som dos famosos Trios Elétricos. Os frequentadores desses eventos ficam submetidos a uma excessiva exposição sonora, que podem causar dores e lesões auditivas. A expressão utilizada para medir o Nível de Intensidade Sonora (NIS), em decibel, é dada por:

$$NIS = 10 \cdot \log(\frac{I}{I_0})$$

onde I é a intensidade de energia qualquer e I_0 é a intensidade de energia do limiar de audição. A nocividade auditiva começa a partir de 80 dB. Se num desses eventos descritos acima a intensidade de energia for quadruplicada, o Nível de Intensidade Sonora será: (Dado $\log 4 = 0,6$)

a) oito vezes maior;

b) dezesseis vezes maior;

c) aumentado em 8 dB;

d) aumentado em 6 dB;

e) aumentado em 16 dB.

Resolução :

Se quadruplicamos a intensidade de energia, temos que:

$$NIS = 10 \cdot \log(\frac{4 \cdot I}{I_0})$$

$$= 10 \cdot (\log 4 + \log I - \log I_0)$$

$$= 10 \cdot \log 4 + 10 \cdot (\log I - \log I_0)$$

$$= 10 \cdot 0,6 + 10 \cdot \log(\frac{I}{I_0})$$

$$6 + 10 \cdot \log(\frac{I}{I_0})$$

$$6 + NIS$$

Portanto a alternativa correta é a letra **d)** aumentado em 6 dB.

(UEL-PR 2010)

No século XIX, o trabalho dos fisiologistas Ernest e Gustav Fechner levou à quantificação da relação entre as sensações percebidas pelos sentidos humanos e a intensidades dos estímulos físicos que as produziram. Eles afirmaram que não existe uma relação linear entre elas, mas logarítmica; o aumento da sensação S, produzido por um aumento de um estímulo I, é proporcional ao logaritmo do estímulo, isto é,

$$S - S_0 = K \cdot \log(\frac{I}{I_0})$$

onde S_0 é a intensidade auditiva adotada como referência, I_0 é a intensidade física adotada como referência associada a S_0 e K é uma constante de proporcionalidade. Quando aplicada à intensidade auditiva, ou sonoridade, a unidade de intensidade auditiva S, recebeu o nome de bel (1 decibel $= 0,1$ bel), em homenagem a Alexander Grahan-Bell, inventor do telefone, situação em que foi assumido que $K = 1$. Com base nesta relação, é correto afirmar que se um som é 1000 vezes mais intenso que a intensidade I^3 do menor estímulo perceptível, a diferença de intensidade auditiva destes sons corresponde a:

a) 1000 decibéis

b) 33,33 decibéis

c) 30 decibéis

d) 3 decibéis

e) 0,3 decibéis

Resolução :

Do enunciado, $K = 1$ e $I = 1000 \cdot I_0$. Substituindo-se na equação dada, chega-se a:

$$S - S_0 = 1 \cdot \log(\frac{1000 \cdot I_0}{I_0})$$

$$S - S_0 = 1 \cdot \log 1000 + \log I_0 - \log I_0$$

$$S - S_0 = 3B$$

Para obter o valor em dB, pode ser feita a seguinte regra de três:

$$1dB \longrightarrow 0,1B$$

$$x \longrightarrow 3B$$

Logo;

$$x = \frac{3B \cdot 1dB}{0,1B} = 30dB$$

Portanto a alternativa correta é a letra **c)** 30 decibéis.

5.6 Questões do ENEM e OBMEP

A importância do domínio do conhecimento associado ao conceito de logaritmos e saber aplicar esses conhecimentos, estabelecendo situações problemas são muito utilizados em diferentes tipos de exames nacionais (ENEM) e olimpíadas (OBMEP).

Questão envolvendo equação logarítmica no Enem de 2013

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere $0,3$ como aproximação para $\log 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27.

b) 36.

c) 50.

d) 54.

e) 100.

Resolução: De acordo com o enunciado do exercício, sabe-se que a meia-vida do césio-137 é de 30 anos. Aplicando esse valor à expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, pode-se substituir o tempo t por 30 e a massa A, quando $t = 30$, por $\frac{A}{2}$:

$$M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$$

$$\frac{A}{2}A = A \cdot (2,7)^{k \cdot 30}$$

$$(2,7)^{30 \cdot k} = \frac{1}{2}$$

$$(2,7)^{30 \cdot k} = 2^{-1}$$

Agora basta aplicar logaritmo de base 10 em ambos os lados da equação:

$$\log(2,7)^{30 \cdot k} = \log 2^{-1}$$

$$30 \cdot k \cdot \log 2,7 = -1 \cdot \log 2$$

Como $\log 2 = 0,3$:

$$30 \cdot k \cdot \log 2,7 = -1 \cdot 0,3$$
$$30 \cdot k \cdot \log 2,7 = -0,3$$
$$\log 2,7 = \frac{-0,3}{30 \cdot k}$$
$$\log 2,7 = \frac{0,01}{k} \cdot (-1)$$

Precisamos descobrir em quanto tempo a massa será apenas 10% da massa inicial, ou seja, $0,1 \cdot A$. Assim sendo:

$$0,1 \cdot A = A \cdot (2,7)^{kt}$$
$$(2,7)^{kt} = 0,1$$

Aplicando logaritmos em ambos os lados da igualdade, teremos:

$$\log(2,7)^{kt} = \log 0,1$$
$$kt \cdot \log 2,7 = -1$$

Mas pela equação primeira equação, podemos substituir $\log 2,7$:

$$kt \cdot \log 2,7 = -1$$
$$kt - \frac{0,01}{k} = -1$$
$$t \cdot 0,01 = 1$$
$$t = \frac{1}{0,01}$$
$$t = 100$$

Portanto, em 100 anos, a massa do césio-37 será reduzida para 10% da quantidade inicial. A alternativa correta é a letra e.

Questão envolvendo equação logarítmica no Enem de 2011

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, subsituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Ricther, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \cdot \log(M_0)$$

Onde M_0 é o movimento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina $\cdot$ cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado). U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)?
a) $10^{-5,10}$
b) $10^{-0,73}$
c) $10^{12,00}$
d) $10^{21,65}$
e) $10^{27,00}$

Resolução: De acordo com o exercício, podemos utilizar a seguinte equação logarítmica para medir a magnitude dos terremotos:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \cdot \log(M_0)$$

Se o terremoto de Kobe teve magnitude $M_w = 7,3$, basta substituirmos esse valor na equação logarítmica para determinar seu momento sísmico M_0:

$$\begin{aligned} M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \cdot \log(M_0) \\ 7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} \cdot \log(M_0) \\ 7,3 + 10,7 = \frac{2}{3} \cdot \log(M_0) \\ 18 = \frac{2}{3} \cdot \log(M_0) \\ 2 \cdot \log(M0) = 18 \cdot 3 \\ \log(M0) = \frac{54}{2} \\ \log(M0) = 27 \end{aligned}$$

Aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos, temos:

$$M_0 = 10^{27}$$

Portanto, o momento sísmico do terremoto de Kobe foi de $M_0 = 10^{27}$ dina · cm e a alternativa correta é a letra e.

Questão envolvendo equação exponencial no Enem de 2014

Segundo a Organização Mundial do Turismo (OMT), o Ecoturismo cresce a uma taxa de 5% ao ano. No Brasil, em 2011, o Ecoturismo foi responsável pela movimentação de 6,775 bilhões de dólares. Supondo que o percentual de crescimento incida sobre a movimentação do ano anterior, pode-se expressar o valor movimentado V (em bilhões de dólares), em função do tempo t (em anos), por $V = 6,775 \cdot (1,05)^{t-1}$ com $t = 1$ correspondendo a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante. Em que ano o valor movimentado será igual a 13,5 bilhões de dólares?

Dados: $\log 2 = 0,3$ e $\log 1,05 = 0,02$

a) 2015.

b) 2016.

c) 2020.

d) 2025.

e) 2026.

Resolução: Na função exponencial dada, temos que encontrar o tempo para que o valor movimentado pelo Ecoturismo seja igual a 13,5 bilhões de dólares. Para isso, vamos substituir V por este valor. Assim:

$$\begin{aligned} 13,5 &= 6,775 \cdot (1,05)^{t-1} \\ \frac{13,5}{6,775} &= (1,05)^{t-1} \\ 2 &= (1,05)^{t-1} \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados temos:

$$\begin{aligned} \log 2 &= \log(1,05)^{t-1} \\ \log 2 &= (t-1) \cdot \log 1,05 \\ 0,3 &= (t-1) \cdot 0,02 \\ t-1 &= \frac{0,3}{0,02} \\ t &= 15+1 \\ t &= 16 \end{aligned}$$

Veja que o tempo $t = 1$, corresponde a 2011, $t = 2$, a 2012 e assim por diante. Este percentual de crescimento, expresso pela função exponencial dada, incide sobre a movimentação do ano anterior, ou seja, no $t = 1$, este valor será em relação a 2010. Logo, o valor de 13,5 bilhões de dólares será movimentado em $2010 + 16 = 2026$. A alternativa correta é a e).

Questão envolvendo equação exponencial na OBMEP de 2013

Se x e y são inteiros positivos tais que $x \cdot (x + 2 + 4 + 6 + ... + 4024) = 2013^y$, qual é o valor de y?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolução: A equação dada é equivalente a $x \cdot (x + 2013 \cdot 2012) = 2013^y$. Veja que $2013|x \cdot (x + 2013 \cdot 2012) \rightarrow 2013|x^2 \rightarrow 2013|x$, pois $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ é livre de quadrados. Lembrando que a notação $a|b$, a divide b, se $\exists c \in \mathbb{Z}$, tal que $b = a \cdot c$ (a é um divisor de b, ou analogamente b é um múltiplo de a). Fazendo então $x = 2013 \cdot k$, tem-se:

$$2013^2 \cdot k \cdot (k + 2012) = 2013^y$$
$$k \cdot (k + 2012) = \frac{2013^y}{2013^2}$$
$$k \cdot (k + 2012) = 2013^{y-2} (y > 2)$$

Se $y = 3$, temos $k = 1$, o que nos da uma solucao. Suponhamos agora $y > 3$ e daí se $d|k$ e $d|(k+2012)$,teriamos $d|2012$, o que nos da $d = 1$, pois 2012 e 2013 são primos entre si. Logo, podemos escrever $k = a^{y-2}$ e $k + 2012 = b^{y-2}$, onde a e b são inteiros positivos tais que $a \cdot b = 2013$.

Então $b^{y-2} - a^{y-2}$ é função decrescente de y e, portanto, $2012 \geq b^2 - a^2$, com $a \cdot b = 2013$. Temos poucas possibilidades para a e b, podemos ter:

$(a, b) = (1, 2013), (3, 671), (11, 183), (33, 61)$.

Em todos os casos, temos que $b^2 - a^2 > 2012$, contradição. Portanto $y = 3$ de fato. A resposta correta é a letra C).

Questão envolvendo equação exponencial na OBMEP de 2011

A linha poligonal da figura parte da origem e passa por todos os pontos do plano que têm coordenadas inteiras não negativas, de acordo com o padrão indicado. A unidade de comprimento nos eixos é 1 cm. O comprimento da poligonal da origem até um ponto (a, b) é chamado de lonjura de (a, b); por exemplo, a lonjura de $(1, 2)$ é 5 cm.

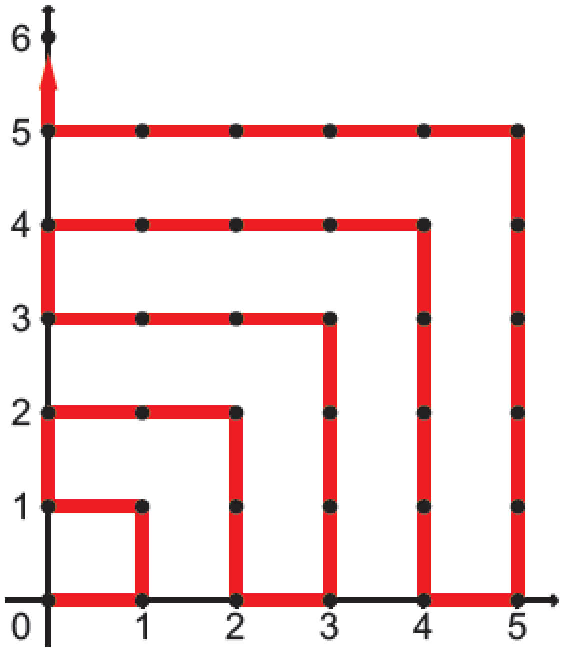
a) Determine a lonjura dos pontos $(3, 2)$ e $(0, 4)$.

Solução: Por contagem direta, vemos que a lonjura de $(3, 2)$ é 11 e a de $(0, 4)$ é 16.

b) Quantos pontos de coordenadas inteiras estão contidos no interior e nos lados do quadrado cujos vértices são $(0, 0), (n, 0), (n, n)$ e $(0, n)$?

Solução: Os pontos de coordenadas inteiras no inferior e nos lados desse quadrado formam $n + 1$ linhas, cada uma com $(n + 1)$ pontos; o total de pontos no interior e nos lados desse quadrado é então $(n + 1)^2$. Excluindo a borda desse quadrado de $n - 1$ linhas e $n - 1$ colunas, que contém $(n - 1)^2$ pontos inteiros; segue que o número de pontos na borda do quadrado original é $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$.

Pode-se também calcular o número de pontos de coordenadas inteiras no quadrado notando que de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ a poligonal passa por $1 + 3 = 2^2$ pontos; de $(0, 0)$ a $(2, 0)$



a poligonal passa por $1+3+5=3^2$ pontos, de $(0,0)$ a $(0,3)$ a poligonal passa por $1+3+5+7=4^2$ pontos e assim por diante. Logo o número de pontos inteiros do quadrado que tem um de seus vértices no ponto (n,n) é $(n+1)^2$.

c) Qual é o ponto cuja lonjura é 425?

Solução: Para determinar o valor da coordenada precisa inicialmente verificar que $425=(20^2+20)+5$, como 20^2+20 é a coordenada de $(20,20)$, vemos que para chegar ao ponto de lonjura 425 devemos chegar a $(20,20)$ e andar mais 5 segmentos ao longo da poligonal. Como 20 é par, esses segmentos partirão do ponto $(20,20)$ na vertical para baixo; assim chegamos ao ponto $(20,15)$, que é o ponto procurado.

6 Conclusão

Ao longo do trabalho em tela buscamos discutir o ensino de função na atualidade que se dá principalmente por resolução de exercícios isolados do cotidiano do aluno, dando ênfase apenas nos processos algébricos. Dessa maneira busca-se defender um ensino de funções por meio de situações problemas e atividades que envolvam os alunos no processo de ensino aprendizagem. Assim como salienta Dante (2003, p. 20):

> Situações-problema são problemas de aplicação que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos... Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a Matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse.

O ensino de matemática deve ser desenvolvido de maneira contextualizada e relacionada à outros conhecimentos, promovendo interdisciplinaridade de conteúdos, buscando o desenvolvimento de novas capacidades intelectuais, capacitando o aluno para compreender e interpretar situações problemas, na agilização do raciocínio lógico-dedutivo, nas situações cotidianas e em outras áreas curriculares. Dessa forma o ensino de funções deve ser contextualizado para que haja um real envolvimento dos educandos.

A história da matemática se revela como um importante recurso didático, oferecendo grandes contribuições ao processo de ensino aprendizagem. Enfatizando que a matemática é uma criação humana, e ao desvelar que ela surge a partir de necessidades e preocupações de diferentes culturas e em diversos momentos históricos, o professor pode despertar no aluno uma resposta/atitude mais positiva diante à matemática.

Percebe-se que o ensino de função na atualidade se encontra desvinculado do desenvolvimento histórico da matemática, representando que a matemática é um conhecimento pronto e acabado, destinado apenas aos intelectuais, o que dificulta a aprendizagem. Não há menções sobre a construção da matemática, que tem origem em questões de diversos contextos sociais, como a divisão de terras, cálculo de créditos, problemas vinculados à outras ciências, bem como problemas associados à própria matemática.

Nota-se que na atualidade os problemas matemáticos não estão sendo explorados/aproveitados, não possibilitando o desempenho de seu verdadeiro papel no ensino, tendo em vista que servem apenas para aplicação/avaliação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos, dessa maneira o professor não explora as potencialidades do uso de um problema, mas apenas suas definições, técnicas e demonstrações. O problema é apresentado aos alunos como um discurso simbólico, abstrato e incompreensível, o aluno acaba aprendendo por reprodução/imitação, resolvendo os problemas de acordo com a fórmula que acabou de aprender, não entendendo o sistema de conceitos presente na resolução dos mesmos.

Com a proposta de trabalhar com função exponencial e logarítmica mantendo o foco na resolução de problemas procura-se defender que o ponto de partida de uma atividade matemática deve ser o problema e não a definição de conceitos, de modo que os conceitos devem ser adquiridos pelos alunos mediante a exploração dos problemas, do levantamento e constatação de hipóteses, de criação/utilização de estratégias.

Devemos considerar que um problema envolvendo uma relação exponencial e logarítmica não deve ser uma proposta mecânica, na qual o aluno aplica fórmulas de maneira metódica, mas deve ser centrada numa dinâmica na qual o aluno deve ser levado à interpretar o enunciado apresentado e desenvolver um raciocínio capaz de resolvê-lo, fazendo uso de conhecimentos adquiridos anteriormente. Dessa forma observa-se que o aluno constrói um campo de conceitos em resposta a um problema. Um novo conceito matemático é construído a partir da articulação de conceitos anteriores.

Em suma, as atividades propostas no trabalho demonstram que o ensino do tema proposto pode se tornar de fácil aplicação e desenvolvimento. A partir de ideias simples que se pautam no cotidiano do educando, tornando possível tornar o ensino de função exponencial e logarítmica mais acessível, possibilitando maior assimilação de seus conceitos.

Diante do exposto ao longo do trabalho, defende-se que o ensino de logaritmos e de funções exponenciais deve se focar em aplicações e contextualizações, diferentemente do que ocorre atualmente na educação, que prioriza o cálculo algébrico e o uso de fórmulas matemáticas prontas. Propõe-se que os alunos entendam o porquê do uso dos modelos exponencial e logarítmico, trazendo as caracterizações dessas funções, bem como seu uso ao longo do processo da civilização humana.

Referências

ALTOÉ, Anair; SILVA, Heliana da. *O Desenvolvimento Histórico das Novas Tecnologias e seu Emprego na Educação.* In: ALTOÉ, Anair; COSTA, Maria Luiza Furlan; TERUYA, Teresa Kazuko. Educação e Novas Tecnologias. Maringa: Eduem, 2005, p 13-25.

ANDRADE, L. S.; KAIBER, C. T.. *Registro de representação de semiótica e o estudo das funções.* Artigo 13º conferência Interamericana de Educação Matemática, XVIII CIAM. Recife, 2011.

ÁVILA, Geraldo. *Números muito grandes. Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, v. 25, p. 1-9, 1o semestre de 1994.

ÁVILA, Geraldo. *O Ensino do Cálculo no 2o Grau.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 18, p. 1-9, 1o semestre de 1991.

BEZERRA, Francisca Iris Nunes da Silva. *Reflexões sobre a prática pedagógica no ensino de logaritmo.* Mestrado em Matemática- Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Acre. Rio Branco, 2015.

BORGES, Ulisses dos Santos.*Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas.*Dissertação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Juiz de Fora, 2014.

BOYER, C.B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. SEMTEC/MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: SEMTEC/MEC, 2000.

BRASIL. *SEMTEC/MEC. PCN+ Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: SEMTEC/MEC, 2002.

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.* Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em 30/01/2015.

BRASIL. *Lei nº 12.796, de 4 de abril de 2013. Altera a lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996 que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para dispor sobre a formação dos profissionais da educação e dar outras providências.* Brasília, 4 de abril de 2013. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2013/lei/l12796.htm. Acesso em 30/01/2015.

BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Secretaria MEC/SEF. Brasília, 1997, 142p. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 04/04/2015.

BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.* MEC/SEF, 1998. 174 p. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arqui vos/pdf/introducao.pdf. Acesso em 13/04/2015.

BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental.* Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 04/04/2015.

BRASIL. *Ministério da Educação e do Desporto.* Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

BrOffice. Disponível em <http://ultradownloads.com.br/download/BrOfficeorg/>. Acesso em 05 jul. 2015.

DELORS, JACQUES. *Os quatro pilares da Educação.* In: Educação: um tesouro a descobrir. 4ed. São Paulo: Cortez; Brasília: MEC/UNESCO 2000, p.89-101.

Geogebra. Disponível em <http://www.geogebra.org/cms/pt.BR>. Acesso em 05 jul. 2015.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. Coleção do Professor de Matemática: Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

MAOR, Eli. *A história de um número*. Rio de Janeiro:Record, 2003.

OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2015.* Disponível em http://www.obmep.org.br/apresentacao.html. Acesso em 04/02/2015.

PECORARI, Mariana. *Logaritmos e Aplicações*.Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.Rio Claro: [s.n.],2013.

RAMOS, Simone Sotozono Alonso. *Logaritmos*: uma abordagem didática.Departamento de Matemática - UFPR, Curitiba, 2015.

REALI, Aline M; REYES, Cláudia R. *Ensinar e ser professor: processos independentes ou inter-relacionados. Reflexões sobre o fazer docente. São Carlos: EDUFSCa.*, 2009, p. 13-20.

SANTOS, V. de M. *Eixos estruturadores do currículo de ensino médio e sua interpretação em textos didáticos de Matemática*. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Salvador, Bahia, 2010.

SIMOKA, Marcos Alexandre. *Mídias e Tecnologias no Ensino de Matemática*. Universidade Paranaense, Paraná, 2010.

SILVA, Edson Ferreira da, *Logaritmo e aplicações*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

Taham, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro. Editora Record, 1994

VALENTE, J. A. *Informática na educação*: conformar ou contornar a escola. Perspectiva . Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, n. 24, 1995.

A Tábua de Logaritmos Decimais

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0606	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1039	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5443	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6281	0,6294	0,6301	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7788	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8337	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9529	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9667	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9719	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996

B A lenda do xadrez

CAPÍTULO XVI

Difícil será descobrir, dada a incerteza dos documentos antigos, a época precisa em que viveu e reinou na índia um príncipe chamado Iadava, senhor da província da Tiligana. Seria, porém, injusto ocultar que o nome desse monarca vem sendo apontado por vários historiadores hindus como um dos soberanos mais ricos e generosos de seu tempo.

A guerra, com o cortejo fatal de suas calamidades, muito amargou a existência do rei Iadava, transmutando-lhe o ócio e o gozo da realeza nas mais inquietantes atribulações. Adstrito ao dever, que lhe impunha a coroa, de zelar pela tranqüilidade de seus súditos, viu-se o nosso bom e generoso monarca forçado a empunhar a espada para repelir, à frente de pequeno exército, um ataque insólito e brutal do aventureiro Varangul, que se dizia príncipe de Caliã.

O choque violento das forças juncou de mortos os campos de Dacsina e tingiu de sangue as águas sagradas do rio Sandhu. O rei Iadava possuía - pelo que nos revela a crítica dos historiadores - invulgar talento para a arte militar; sereno em face da invasão iminente, elaborou um plano de batalha, e tão hábil e feliz foi em executá-lo, que logrou vencer e aniquilar por completo os pérfidos perturbadores da paz do seu reino.

O triunfo sobre os fanáticos de Varangul custou-lhe, infelizmente, pesados sacrifícios; muitos jovens quichatrias pagaram com a vida a segurança de um trono para prestígio de uma dinastia; e entre os mortos, com o peito varado por uma flecha, lá ficou no campo de combate o príncipe Adjamir, filho do rei Iadava, que patrioticamente se sacrificou, no mais aceso da refrega, para salvar a posição que deu aos seus a vitória final.

Terminada a cruenta campanha e assegurada a nova linha de suas fronteiras, regressou o rei ao suntuoso palácio de Andra, baixando, porém, formal proibição de que se realizassem as ruidosas manifestações com que os hindus soíam festejar os grandes feitos guerreiros. Encerrado em seus aposentos, só aparecia para atender aos ministros e sábios brâmanes quando algum grave problema nacional o chamava a decidir, como chefe de Estado, no interesse e para felicidade de seus súditos.

Com o andar dos dias, longe de se apagarem as lembranças da penosa campanha, mais se agravaram a angústia e a tristeza que, desde então, oprimiam o coração do rei. De que lhe poderiam servir, na verdade, os ricos palácios, os elefantes de guerra, os tesouros imensos, se já não mais vivia a seu lado aquele que fora sempre a razão de ser de sua existência? Que valor poderiam ter, aos olhos de um pai inconsolável, as riquezas materiais que não apagam nunca a saudade do filho estremecido?

As peripécias da batalha em que pereceu o príncipe Adjamir não lhe saíam do pensamento. O infeliz monarca passava longas horas traçando, sobre uma grande caixa de areia, as diversas manobras executadas pelas tropas durante o assalto. Com um sulco indicava a marcha da infantaria; ao lado, paralelo ao primeiro, outro traço mostrava o avanço dos elefantes de guerra; um pouco mais abaixo, representada por pequenos círculos dispostos em simetria, perfilava a destemida cavalaria chefiada por um velho radj que se dizia sob a proteção de Techandra, a deusa da Lua. Ainda por meio de gráficos esboçava o rei a posição das colunas inimigas, desvantajosamente colocadas, graças à sua estratégia, no campo em que se feriu a batalha decisiva.

Uma vez completado o quadro dos combatentes, com as minudências que pudera evocar, o rei tudo apagava, para recomeçar novamente, como se sentisse íntimo gozo em reviver os momentos passados na angústia e na ansiedade. À hora matinal em que chegavam ao palácio os velhos brâmanes para a leitura dos Vedas, já o rei era visto a riscar na areia os planos de uma batalha que se reproduzia interminavelmente.

– Infeliz monarca! – murmuravam os sacerdotes penalizados. - Procede como um sudra a quem Deus privou da luz da razão. Só Dhanoutara4 , poderosa e clemente, poderá salvá-lo!

E os brâmanes erguiam preces, queimavam raízes aromáticas, implorando à eterna zeladora dos enfermos que amparasse o soberano de Taligana.

Um dia, afinal, foi o rei informado de que um moço brâmane - pobre e modesto - solicitava uma audiência que vinha pleiteando havia já algum tempo. Como estivesse, no momento, com boa disposição de ânimo, mandou o rei que trouxessem o desconhecido à sua presença.

Conduzido à grande sala do trono, foi o brâmane interpelado, conforme as exigências da praxe, por um dos vizires do rei.

– Quem és, de onde vens e que desejas daquele que, pela vontade de Vichnu , é rei e senhor de Taligana?

– Meu nome - respondeu o jovem brâmane - é Lahur Sessa e venho da aldeia de Namir, que trinta dias de marcha separam desta bela cidade. Ao recanto em que eu vivia chegou a notícia de que o nosso bondoso rei arrastava os dias em meio de profunda tristeza, amargurado pela ausência de um filho que a guerra viera roubar-lhe. Grande mal será para o país, pensei, se o nosso dedicado soberano se enclausurar, como um brâmane cego, dentro de sua própria dor. Deliberei, pois, inventar um jogo que pudesse distraí-lo e abrir em seu coração as portas de novas alegrias. É esse o desvalioso presente que desejo neste momento oferecer ao nosso rei Iadava.

Como todos os grandes príncipes citados nesta ou naquela página da história, tinha o soberano hindu o grave defeito de ser excessivamente curioso. Quando o informaram da prenda de que o moço brâmane era portador, não pôde conter o desejo de vê-la e apreciá-la sem mais demora.

O que Sessa trazia ao rei Iadava consistia num grande tabuleiro quadrado, dividido em sessenta e quatro quadradinhos, ou casas, iguais; sobre esse tabuleiro colocavam-se, não arbitrariamente, duas coleções de peças que se distinguiam, uma da outra, pelas cores branca e preta, repetindo, porém, simetricamente, os engenhosos formatos e subordinados a curiosas regras que lhes permitiam movimentar-se por vários modos. Sessa explicou pacientemente ao rei, aos vizires e cortesãos que rodeavam o monarca em que consistia o jogo, ensinando-lhes as regras essenciais:

– Cada um dos partidos dispõe de oito peças pequeninas - os peões. Representam a infantaria, que ameaça avançar sobre o inimigo para desbaratá-lo. Secundando a ação dos peões vêm os elefantes de guerra, representados por peças maiores e mais poderosas; a cavalaria, indispensável no combate, aparece, igualmente, no jogo, simbolizada por duas peças que podem saltar, como dois corcéis, sobre as outras; e, para intensificar o ataque, incluem-se - para representar os guerreiros cheios de nobreza e prestígio - os dois vizires do rei.

Outra peça, dotada de amplos movimentos, mais eficiente e poderosa do que as demais, representará o espírito de nacionalidade do povo e será chamada a rainha. Completa a coleção uma peça que isolada pouco vale, mas se torna muito forte quando amparada pelas outras. É o rei.

O rei Iadava, interessado pelas regras do jogo, não se cansava de interrogar o inventor:

– E por que é a rainha mais forte e mais poderosa que o próprio rei?

– É mais poderosa - argumentou Sessa - porque a rainha representa, nesse jogo, o patriotismo do povo. A maior força do trono reside, principalmente, na exaltação de seus súditos. Como poderia o rei resistir ao ataque dos adversários, se não contasse com o espírito de abnegação e sacrifício daqueles que o cercam e zelam pela integridade da pátria?

Dentro de poucas horas o monarca, que aprendera com rapidez todas as regras do jogo, já conseguia derrotar os seus dignos vizires em partidas que se desenrolavam impecáveis sobre o tabuleiro.

Sessa, de quando em quando, intervinha, respeitoso, para esclarecer uma dúvida ou sugerir novo plano de ataque ou de defesa.

Em dado momento, o rei fez notar, com grande surpresa, que a posição das peças, pelas combinações resultantes dos diversos lances, parecia reproduzir exatamente a batalha de Dacsina.

– Reparai - ponderou o inteligente brâmane - que para conseguirdes a vitória, indispensável se torna, de vossa parte, o sacrifício deste vizir!

E indicou precisamente a peça que o rei Iadava, no desenrolar da partida - por vários motivos -, grande empenho pusera em defender e conservar.

O judicioso Sessa demonstrava, desse modo, que o sacrifício de um príncipe é, por vezes, imposto como uma fatalidade, para que dele resultem a paz e a liberdade de um povo.

Ao ouvir tais palavras, o rei Iadava, sem ocultar o entusiasmo que lhe dominava o espírito, assim falou:

– Não creio que o engenho humano possa produzir maravilha comparável a este jogo interessante e instrutivo! Movendo essas tão simples peças, aprendi que um rei nada vale sem o auxílio e a dedicação constante de seus súditos. E que, às vezes, o sacrifício de um simples peão vale mais, para a vitória, do que a perda de uma poderosa peça. E, dirigindo-se ao jovem brâmane, disse-lhe:

– Quero recompensar-te, meu amigo, por este maravilhoso presente, que de tanto me serviu para alívio de velhas angústias. Dize-me, pois, o que desejas, para que eu possa, mais uma vez, demonstrar o quanto sou grato àqueles que se mostram dignos de recompensa.

As palavras com que o rei traduziu o generoso oferecimento deixaram Sessa imperturbável. Sua fisionomia serena não traía a menor agitação, a mais insignificante mostra de alegria ou surpresa. Os vizires olhavam-no atônitos, e entreolhavam-se pasmados diante da apatia de uma cobiça a que se dava o direito da mais livre expansão.

– Rei poderoso! - redargüiu o jovem com doçura e altivez. - Não desejo, pelo presente que hoje vos trouxe, outra recompensa além da satisfação de ter proporcionado ao senhor de Taligana um passatempo agradável, que lhe vem aligeirar as horas dantes alongadas por acabrunhante melancolia. Já estou, portanto, sobejamente aquinhoado e outra qualquer paga seria excessiva. Sorriu, desdenhosamente, o bom soberano ao ouvir aquela resposta, que refletia um desinteresse tão raro entre os ambiciosos hindus. E, não crendo na sinceridade das palavras de Sessa, insistiu:

– Causa-me assombro tanto desdém e desamor aos bens materiais, ó jovem! A modéstia, quando excessiva, é como o vento que apaga o archote, cegando o viandante nas trevas de uma noite interminável. Para que possa o homem vencer os múltiplos obstáculos que se lhe deparam na vida, precisa ter o espírito preso às raízes de uma ambição que o impulsione a um ideal qualquer.

Exijo, portanto, que escolhas, sem mais demora, uma recompensa digna de tua valiosa oferta. Queres uma bolsa cheia de ouro? Desejas uma arca repleta de jóias? Já pensaste em possuir um palácio? Almejas a administração de uma província? Aguardo a tua resposta, por isso que à minha promessa está ligada a minha palavra!

– Recusar o vosso oferecimento depois de vossas últimas palavras - acudiu Sessa - seria menos descortesia do que desobediência ao rei. Vou, pois, aceitar, pelo jogo que inventei, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo.

– Grãos de trigo? - estranhou o rei, sem ocultar o espanto que lhe causava semelhante proposta. - Como poderei pagar-te com tão insignificante moeda? - Nada mais simples - elucidou Sessa. - Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e, assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. Peço-vos, ó rei, de acordo com a vossa magnânima oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei!

Não só o rei como os vizires e venerandos brâmanes presentes riram-se, estrepitosamente, ao ouvir a estranha solicitação do jovem. A desambição que ditara aquele pedido era, na verdade, de causar assombro a quem menos apego tivesse aos lucros materiais da vida. O moço brâmane, que bem poderia obter do rei um palácio ou uma província, contentava-se com grãos de trigo!

– Insensato! - clamou o rei. - Onde foste aprender tão grande desamor à fortuna? A recompensa que me pedes é ridícula. Bem sabes que há, num punhado de trigo, número incontável de grãos. Devemos compreender, portanto, que com duas ou três medidas de trigo eu te pagarei folgadamente, consoante o teu pedido, pelas 64 casas do tabuleiro. É certo, pois, que pretendes uma recompensa que mal chegará para distrair, durante alguns dias, a fome do último pária1 do meu reino.

Enfim, visto que minha palavra foi dada, vou expedir ordens para que o pagamento se faça imediatamente, conforme teu desejo.

Mandou o rei chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia.

Os sábios calculistas, ao cabo de algumas horas de acurados estudos, voltaram ao salão para submeter ao rei o resultado completo de seus cálculos. Perguntou-lhes o rei, .interrompendo a partida que então jogava:

– Com quantos grãos de trigo poderei, afinal, desobrigar-me da promessa que fiz ao jovem Sessa?

– Rei magnânimo! – declarou o mais sábio dos matemáticos. – Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento pedido por Sessa, e obtivemos um número cuja grandeza é inconcebível para a imaginação humana.

Avaliamos, em seguida, com o maior rigor, a quantas ceiras corresponderia esse número total de grãos, e chegamos à seguinte conclusão: a porção de trigo que deve ser dada a Lahur Sessa equivale a uma montanha que, tendo por base a cidade de Taligana, seria cem vezes mais alta do que o Himalaia! A índia inteira, semeados todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria em 2 000 séculos a quantidade de trigo que, pela vossa promessa, cabe, em pleno direito, ao jovem Sessa!

Como descrever aqui a surpresa e o assombro que essas palavras causaram ao rei Iadava e a seus dignos vizires?

O soberano hindu via-se, pela primeira vez, diante da impossibilidade de cumprir a palavra dada.

Lahur Sessa – rezam as crônicas do tempo -, como bom súdito, não quis deixar aflito o seu soberano. Depois de declarar publicamente que abriria mão do pedido que fizera, dirigiu-se respeitosamente ao monarca e assim falou:

– Meditai, ó rei, sobre a grande verdade que os brâmanes prudentes tantas vezes repetem: os homens mais avisados iludem-se, não só diante da aparência enganadora dos números, mas também com a falsa modéstia dos ambiciosos. Infeliz daquele que toma sobre os ombros o compromisso de uma dívida cuja grandeza não pode avaliar com a tábua de cálculo de sua própria argúcia. Mais avisado é o que muito pondera e pouco promete!

E, após ligeira pausa, acrescentou:

– Menos aprendemos com a ciência vã dos brâmanes do que com a experiência direta da vida e das suas lições de todo dia, a toda hora desdenhadas!

O homem que mais vive mais sujeito está às inquietações morais, mesmo que não as queira. Achar-se-á ora triste, ora alegre; hoje fervoroso, amanhã, tíbio; já ativo, já preguiçoso; a compostura alternará com a leviandade. Só o verdadeiro sábio, instruído nas regras espirituais, se eleva acima dessas vicissitudes, paira por sobre todas essas alternativas!

Essas inesperadas e tão sábias palavras calaram fundo no espírito do rei. Esquecido da montanha de trigo que, sem querer, prometera ao jovem brâmane, nomeou-o seu primeiro-vizir.

E Lahur Sessa, distraindo o rei com engenhosas partidas de xadrez e orientando-o com sábios e prudentes conselhos, prestou os mais assinalados benefícios ao povo e ao país, para maior segurança do trono e maior glória de sua pátria.

Encantado ficou o califa Al-Motacém quando Beremiz concluiu a história singular do jogo de xadrez. Chamou o chefe de seus escribas e determinou que a lenda de Sessa fosse escrita em folhas especiais de algodão e conservada em valioso cofre de prata.

E, a seguir, o generoso soberano deliberou se entregasse ao calculista um manto de honra e 100 sequins de ouro.

Bem disse o filósofo:

– Deus fala ao mundo pelas mãos dos generosos!

A todos causou grande alegria o ato de magnanimidade do soberano de Bagdá. Os cortesãos que permaneciam no divã eram amigos do vizir Maluf e do poeta Iezid: era, pois, com simpatia que ouviam as palavras do calculista persa, por quem muito se interessavam. Beremiz, depois de agradecer ao soberano os presentes com que acabava de ser distinguido, retirou-se do divã. O califa ia iniciar o estudo e julgamento de diversos casos, ouvir os honrados cádis e proferir suas sábias sentenças.

Deixamos o palácio real ao cair da noite. Ia começar o mês de Chá-band.

C Experimento da mágica

Este experimento vai mostrar que alguns desses poderes podem ser um conhecimento matemático específico, no caso sobre funções logarítmicas.

A atividade consiste em fazer um aluno, aleatoriamente, escolher uma carta de baralho que será embaralhada seguindo uma sequência de passos. O ponto principal é analisar os resultados desse procedimento. Assim, além de introduzir o conceito de função logarítmica, o experimento é motivacional e lúdico, transfigurando de certa forma o (pré)conceito que os alunos fazem deste conteúdo matemático. A partir desta atividade, o professor pode partir para o estudo mais profundo de logaritmo e das funções que o contém, reto mando inclusive propriedades e aplicações do tema.

Material necessário

1 baralho sem cartas repetidas.(ou cartões numerados feitos de cartolina.)

Preparação

Verificar se todos os grupos possuem um baralho ou algum tipo de carta confeccionada, por exemplo, com cartolina. É importante que cada grupo possua no mínimo 40 cartas não repetidas.

Divida a turma em grupos com 3 ou 4 alunos e peça-lhes que elejam um líder. A Folha do Aluno está dividida em duas partes, uma delas, a que ensina o procedimento da mágica, deve ser entregue somente ao líder de cada grupo. Peça para eles estudarem a mágica antes de mostrá-la ao grupo.

Regras do jogo

1. Separe 15 cartas quaisquer do baralho;

2. Distribua-as sobre a mesa em três colunas de 5 cartas cada, conforme a figura2;

3. Peça para que um colega do grupo escolha umas das cartas sem dizer qual é;

4. Peça ao colega que aponte a coluna na qual se encontra a carta que ele escolheu, conforme a figura 3;

5. Junte as cartas de cada uma das 3 colunas formando 3 montes. Coloque sempre o monte referente à coluna escolhida entre os outros dois, juntando os três montes. Faça isso da forma mais discreta possível;

6. Distribua novamente as cartas sobre a mesa em três colunas conforme mostra a figura 4 (siga da esquerda para a direita e, quando completar uma linha com 3 cartas, de cima para baixo);

7. Repita os passos 4, 5 e 6 mais duas vezes;

8. A carta escolhida pela vítima é a carta do meio da coluna do meio (no nosso caso, a carta escolhida foi o Três de copas)!

A matemágica das cartas

Para começar, o líder de cada grupo deve realizar a mágica para os colegas, desafiando-os a descobrir como ela foi feita. Eles devem repeti-la até que o grupo descubra qual o algoritmo de execução.

Depois de descobrir o mecanismo da mágica, eles devem realizá-la com diferentes números de cartas, sempre usando um número ímpar de cartas distribuídas em 3 colunas, conforme a tabela 1 que também está na Folha do Aluno:

Para cada quantidade de cartas escolhida, é necessário repetir os passos 4, 5 e 6 da mágica um número diferente de vezes. É com essa informação que os alunos devem preencher a tabela a seguir.

Número de cartas	1	3	9	15	21	27	33	39	...	75	81	...	237	243
Número de repetições necessárias									...			...		

Se o número de cartas fosse par, também seria possível realizar a mágica, porém a carta que buscamos não estaria no mesmo lugar que definimos neste experimento. No corpo do trabalho, há uma demonstração de que, para a carta convergir para o local indicado, temos que ter um número ímpar delas.

Resultado esperado

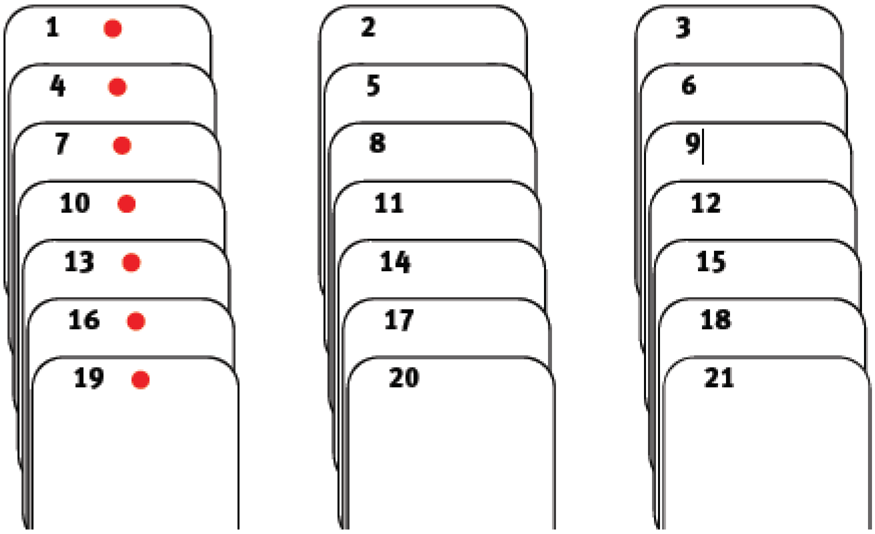
Ao preencher a tabela, espera-se que os alunos percebam que, assim que o número de cartas ultrapassa uma potência de 3, aumenta a quantidade de vezes que o mágico precisa perguntar em qual coluna está a carta?.

Fechamento

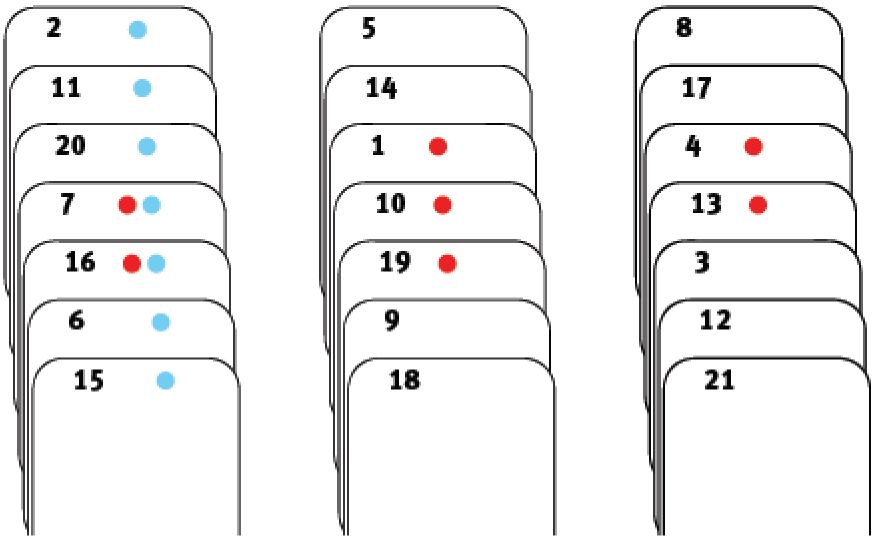
Após a realização da atividade, tome a palavra e siga os passos indicados a seguir para deduzir com seus alunos a expressão que nos fornece o número de perguntas em qual coluna está a carta? em função do número de cartas utilizadas para a realização da mágica.

Dedução

Vamos analisar o caso com 21 cartas. Antes de realizar a primeira pergunta em qual coluna está a carta?, sabemos apenas que a carta escolhida é uma das 21 expostas sobre a mesa. Porém, ao pedir a indicação da coluna (as marcações indicam a coluna escolhida) em que ela se encontra, teremos reduzido a nossa incerteza a $\frac{1}{3}$ da inicial, como indica a figura:



Nossas possibilidades foram reduzidas a $\frac{1}{3} \cdot 21 = 7$ cartas. Redistribuindo as cartas e repetindo a pergunta, teremos reduzido então as nossas opções a $\frac{1}{3}$ da quantidade anterior de cartas, conforme a figura:

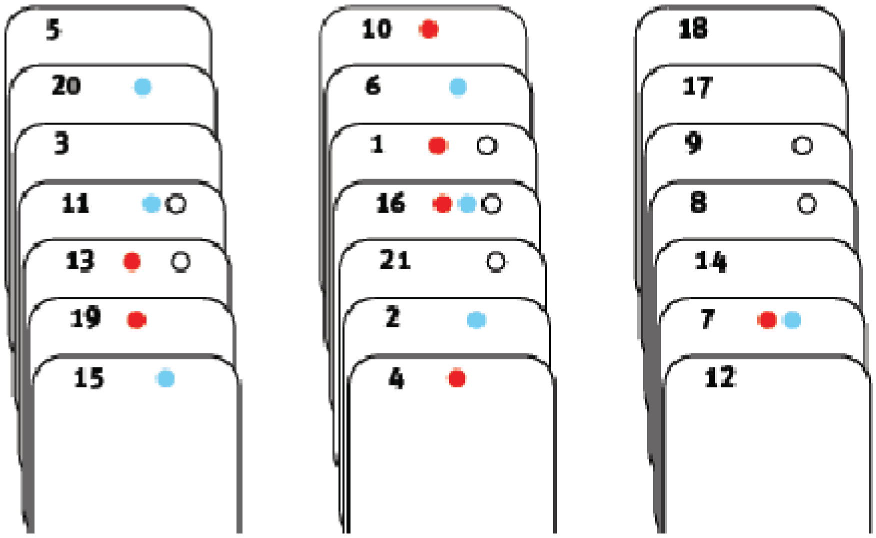


Aqui as nossas possibilidades foram reduzidas a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 21 = 2,33...$, e como o número de cartas é inteiro, podemos perceber que esse número foi reduzido a 2 cartas.

Repetindo esse procedimento novamente, temos as nossas possibilidades reduzidas a $\frac{1}{3}$ das anteriores (a única com as três marcações):

Agora temos $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 21 = 0,77...$, ou seja, um número menor que 1! Portanto, basta reorganizar as cartas novamente que saberemos que a carta escolhida será a carta do meio da coluna do meio:

De maneira geral, dado um número n de cartas, queremos saber qual o número k de perguntas que devem ser feitas para ter certeza de onde se encontra a carta escolhida. Assim, temos:



–Primeira pergunta: $\frac{1}{3} \cdot n$;

–Segunda pergunta: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot n$;

–Terceira pergunta: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot$;

.

.

.

– k-ésima pergunta: $(\frac{1}{3})^k \cdot n$.

Queremos que as nossas dúvidas sejam menores que 1, ou seja:

$$(\frac{1}{3})^k \cdot n \leq 1$$

ou ainda,

$$(\frac{1}{3})^k \leq \frac{1}{n}$$

Agora vamos isolar k, já que o nosso objetivo é ter um valor de k em função do número de cartas. Perceba que $(\frac{1}{3})^k = \frac{1}{n}$ é uma exponencial e, para isolar o k, deveremos aplicar $\log_3$ (a função inversa) nos dois lados da expressão:

$$\log_3(\frac{1}{3})^k \leq \log_3(\frac{1}{n})$$

$$k \cdot \log_3(\frac{1}{3}) \leq \log_3 1 - log_3 n$$

$$-k \leq 0 - \log_3 n$$

$$K \leq \log_3 n$$

Ou seja, para ter certeza da carta que a pessoa escolheu, devemos fazer um número de perguntas maior ou igual a $\log_3 n$, onde n é o número de cartas utilizadas na realização da mágica. Como queremos fazer o menor número possível de perguntas, temos que k deve ser o menor inteiro maior que $\log_3 n$.

C.1 Folha do aluno

Folha do líder

Você é o mágico. Leia com atenção os precedimentos a seguir e faça a mágica para seus colegas. Seja o mais discreto possível na hora de juntar os montes? este é o segredo da mágica.

Procedimento

1. Separe 15 cartas quaisquer do baralho;

2. Distribua-as sobre a mesa em três colunas de 5 cartas cada, conforme a Figura 1;

3. Peça para que um colega escolha umas das cartas sem dizer qual é ela;

4. Peça ao colega que aponte a coluna na qual se encontra a carta que ele escolheu;

5. Junte as cartas de cada uma das 3 colunas formando 3 montes. Coloque sempre o monte referente à coluna escolhida entre os outros dois, juntando os montes. Faça isso da forma mais discreta possível;

6. Distribua novamente as cartas sobre a mesa em três colunas, conforme mostra a figura 3 (siga da esquerda para a direita e, quando completar uma linha com 3 cartas, de cima para baixo);

7. Repita os passos 4, 5 e 6 mais duas vezes;

8. A carta escolhida pela vítima é a carta do meio da coluna do meio!

Folha do grupo

Etapa 1 A matemágica das cartas:

1. Tentem descobrir como funciona o truque realizado pelo líder do grupo;

2. Depois que todos descobrirem como funciona o truque, executem a mágica usando a quantidade de cartas indicada nas colunas da tabela. Não se esqueçam de distribuir as cartas sempre em 3 colunas;

3. Preencham a tabela com o número de vezes que o mágico precisa perguntar em qual coluna está a carta? para ter certeza que ela estará no centro;

4. Sem realizar a mágica nos casos que exigem mais que 39 cartas, complete a tabela.

Questão 1 Qual raciocínio você adotou para preencher o resto da tabela? Responda à questão em seu caderno.

Questão 2 Tente explicar por que a mágica funciona.

Número de cartas	1	3	9	15	21	27	33	39	...	75	81	...	237	243
Número de repetições necessárias									...			...		