

Fabricio Eduardo Ferreira

**Ensino e aprendizagem de poliedros regulares
via a teoria de Van Hiele com origami**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavani Lamas.

São José do Rio Preto
2013

Fabricio Eduardo Ferreira

**Ensino e aprendizagem dos poliedros regulares
via a teoria de Van Hiele com origami**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavani Lamas.

Banca Examinadora

Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
UNESP – São José do Rio Preto

Prof.^a Dr.^a Edna Maura Zuffi
USP – São Carlos

São José do Rio Preto
2013

Dedico este trabalho

Aos meus pais, meus primeiros mestres, que me ensinaram o valor da educação e a importância de sempre perseverarmos em nossos sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que sempre esteve ao meu lado desde o primeiro momento que realizei o Exame Nacional de Admissão e principalmente nos momentos mais difíceis do Programa de Mestrado.

Agradeço aos meus pais, Benedito e Cleodir, que foram fundamentais na transmissão dos valores que me tornaram o homem que sou hoje; aos meus irmãos, Alessandra e Luciano, que cuidaram de mim nos momentos mais difíceis das nossas vidas e aos meus sobrinhos, Júnior, Carol, Pedro e Aninha que são os protagonistas da continuidade da minha vida.

Agradeço a todos os professores do Ibilce pelas contribuições que deram à minha fundamentação teórica como professor de matemática, em especial, à minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavani Lamas, que dedicou momentos importantes de seu convívio para me auxiliar na concretização de um sonho que trazia dentro de mim há muito tempo. Aproveito também para agradecer o Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita por ter acreditado e implementado o Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional no Ibilce.

Agradeço a todos meus colegas do Profmat que compartilharam comigo o brilhantismo de suas resoluções, suas angústias pessoais e seus êxitos profissionais. Saibam que o pioneirismo a qual nos aventuramos sempre destacará nossa coragem na busca do mais nobre valor que o ser humano pode ter: o conhecimento.

Aproveito a oportunidade para agradecer à Capes pelo auxílio financeiro.

E finalmente agradeço à minha namorada, Letícia, pelo companheirismo nos mais diversos momentos desta jornada e pela sabedoria de sua experiência que sempre me guiou.

“O Universo é um lugar abundante,
ouse e o poder lhe será dado.”

Autor desconhecido

RESUMO

De acordo com as atuais diretrizes pertinentes ao ensino de matemática (Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática e Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática), este trabalho baseia-se na Teoria de Van Hiele, visando a aprendizagem de conceitos geométricos, em particular a aprendizagem de poliedros regulares, através da confecção de dobraduras (origami). Iniciando com uma abordagem histórica sobre poliedro, apresenta orientações para o uso de origami em sala de aula, delinea as principais características da Teoria de Van Hiele, além de retomar os principais conceitos matemáticos associados aos poliedros. Utilizando este arcabouço é proposta uma sequência de atividades de sondagem e aplicação de conceitos geométricos respeitando as fases de aprendizagem de Van Hiele, visando a conclusão por parte do aluno, da existência de apenas cinco poliedros regulares. Após a execução das atividades propostas, as demonstrações dos teoremas relacionados aos poliedros apresentados neste trabalho servirão para a sistematização das conclusões feitas pelos alunos, sempre respeitando o nível de Van Hiele em que se encontrem. Apresenta, ainda, atividades de exploração das características dos poliedros através do Teorema de Euler para poliedros convexos.

Palavras-chave: Aprendizagem; Poliedros de Platão; Teoria de Van Hiele; Origami; Teorema de Euler.

ABSTRACT

According to the current guidelines relevant to teaching mathematics (National Curriculum: Mathematics, and Curricular Proposal of the State of São Paulo: Mathematics) this work is based on Van Hiele, and aimed at learning of geometric concepts, particularly learning regular polyhedra, by paperfolding (origami). Starting with a historical approach of polyhedron, this work presents guidelines for the use of origami in the classroom, outlines the main features of the Van Hiele theory, and resume the main mathematical concepts associated with polyhedra. Using this framework, a sequence of activities is proposed and the applying of geometric concepts respecting the learning phases of Van Hiele, which aims deduction by the student, of the existence of only five regular polyhedra. After execution of the proposed activities, the proof of theorems related to polyhedra presented in this paper will serve to systematize the conclusions made by the students, always respecting the level of Van Hiele who are. It presents further exploration of the characteristics of polyhedra by Euler's theorem for convex polyhedra

Keywords: Learning; Plato Polyhedra; Van Hiele Theory; Origami; Euler's Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Busto de Platão _____	17
Figura 2	Figuras Cóslicas _____	18
Figura 3	Elementos empedoclianos _____	19
Figura 4	Triângulos retângulos no tetraedro planificado _____	20
Figura 5	Triângulos retângulos no quadrado _____	20
Figura 6	Triângulos retângulos no pentágono _____	20
Figura 7	Rene Descartes _____	23
Figura 8	Leonard Euler _____	23
Figura 9	A. M. Legendre _____	24
Figura 10	A. L. Cauchy _____	24
Figura 11	J. H. Poincaré _____	24
Figura 12	Página de <i>Hiden Senbazuro Orikata</i> _____	26
Figura 13	Ideogramas ori e kami _____	27
Figura 14	Dobra em origami _____	29
Figura 15	Configuração referente ao Axioma 3.4.1 _____	30
Figura 16	Configuração referente ao Axioma 3.4.2 _____	30
Figura 17	Configuração referente ao Axioma 3.4.3 _____	30
Figura 18	Configuração referente ao Axioma 3.4.4 _____	30
Figura 19	Configuração referente ao Axioma 3.4.5 _____	31
Figura 20	Configuração referente ao Axioma 3.4.6 _____	31
Figura 21	Configuração referente ao Axioma 3.4.7 _____	31
Figura 22	Níveis da teoria de Van Hiele _____	35
Figura 23	Fases de aprendizagem da teoria de Van Hiele _____	37
Figura 24	Um poliedro convexo _____	39
Figura 25	Um poliedro não convexo _____	39
Figura 26	Uma superfície poliédrica limitada convexa aberta _____	39
Figura 27	Exemplos de poliedros não convexos para verificação da fórmula de Euler _____	42
Figura 28	Um ângulo poliédrico _____	43
Figura 29	Diagrama para a classificação de poliedros _____	47
Figura 30a	Passo 1 da construção do módulo quadrangular _____	56

Figura 30b	Passo 2 da construção do módulo quadrangular	56
Figura 30c	Passo 3 da construção do módulo quadrangular	57
Figura 30d	Passo 4 da construção do módulo quadrangular	57
Figura 30e	Módulo quadrangular	57
Figura 30f	Encaixe dos módulos quadrangulares	58
Figura 31a	Passo 1 da construção do triângulo equilátero	58
Figura 31b	Passo 2 da construção do triângulo equilátero	59
Figura 31c	Passo 3 da construção do triângulo equilátero	59
Figura 31d	Passo 4 da construção do triângulo equilátero	59
Figura 31e	Triângulo equilátero	60
Figura 32a	Passo 1 da construção do módulo triangular	60
Figura 32b	Passo 2 da construção do módulo triangular	61
Figura 32c	Passo 3 da construção do módulo triangular	61
Figura 32d	Módulo triangular	61
Figura 33a	Passo 1 da construção do módulo-encaixe	62
Figura 33b	Passo 2 da construção do módulo-encaixe	62
Figura 34a	Passo 1 da construção do módulo pentagonal	63
Figura 34b	Passo 2 da construção do módulo pentagonal	63
Figura 34c	Passo 3 da construção do módulo pentagonal	63
Figura 34d	Passo 4 da construção do módulo pentagonal	64
Figura 34e	Passo 5 da construção do módulo pentagonal	64
Figura 34f	Passo 6 da construção do módulo pentagonal	64
Figura 34g	Passo 7 da construção do módulo pentagonal	65
Figura 34h	Passo 8 da construção do módulo pentagonal	65
Figura 34i	Passo 9 da construção do módulo pentagonal	65
Figura 34j	Passo 10 da construção do módulo pentagonal	66
Figura 35	Resultado esperado do cálculo realizado pelos alunos	67
Figura 36	Construções esperadas pelos alunos usando polígonos diversos	68
Figura 37	Construções esperadas pelos alunos usando triângulos	70
Figura 38	Construção esperada pelos alunos usando quadrados	70
Figura 39	Construção esperada pelos alunos usando pentágonos	71
Figura 40	Poliedros formados pela junção de ângulos poliédricos	73
Figura 41	Poliedros regulares	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Classe de poliedros de Platão	_____	45
----------	-------------------------------	-------	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	A GÊNESE HISTÓRICA DOS POLIEDROS	17
2.1	CONTRIBUIÇÕES DE PLATÃO RELACIONADAS AOS POLIEDROS	17
2.2	A FÓRMULA DE DESCARTES-EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS	22
3	A UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI COMO MÉTODO DE APRENDIZAGEM	25
3.1	A IMPORTÂNCIA DA UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	25
3.2	UMA BREVE HISTÓRIA DO ORIGAMI	26
3.3	NOÇÕES BÁSICAS PARA A UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI	27
3.4	OS AXIOMAS DA GEOMETRIA DO ORIGAMI	28
4	A TEORIA DE VAN HIELE PARA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS	33
4.1	PRINCÍPIOS BÁSICOS DA TEORIA DE VAN HIELE	33
4.2	O MODELO PROPOSTO POR VAN HIELE	34
4.3	O PAPEL DO PROFESSOR NA TEORIA DE VAN HIELE	36
5	A MATEMÁTICA DOS POLIEDROS	38
5.1	A DEFINIÇÃO DE POLIEDRO	38
5.2	O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS	40
5.3	POLIEDROS DE PLATÃO	42
5.4	POLIEDROS REGULARES	45
6	UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES	48
6.1	ATIVIDADES DE SONDAÇÃO PARA APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES	48
6.1.1	Atividades de reconhecimento entre figuras planas e espaciais	49
6.1.2	Atividades de reconhecimento de propriedades dos polígonos	50
6.1.3	Atividades de diferenciação entre polígonos regulares e polígonos irregulares	52
6.1.4	Atividades sobre ângulos internos de polígonos regulares	53

6.2	ATIVIDADES UTILIZANDO ORIGAMI PARA APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES	55
6.2.1	Confecção do módulo quadrangular	56
6.2.2	Confecção do triângulo equilátero	58
6.2.3	Confecção do módulo triangular	60
6.2.4	Confecção do módulo-encaixe	61
6.2.5	Confecção do módulo pentagonal	62
6.3	ATIVIDADES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES	66
6.3.1	Explorando ângulos poliédricos utilizando polígonos regulares diversos	67
6.3.2	Explorando ângulos poliédricos utilizando polígonos regulares do mesmo tipo	69
6.3.3	Obtendo poliedros através de ângulos poliédricos	72
6.3.4	Descobrimos os poliedros regulares utilizando origami	73
6.3.5	Explorando as faces e as arestas dos poliedros regulares utilizando planificações	75
6.4	ATIVIDADES DE FIXAÇÃO DO ESTUDO DE POLIEDROS	75
6.4.1	Classificando os tipos de poliedros	76
6.4.2	Verificando a fórmula de Euler	78
7	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83
	ANEXO A: Moldes para atividades das seções 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3	86
	ANEXO B: Moldes para atividade da seção 6.3.5	90

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é favorecer a aprendizagem dos poliedros regulares, levando o aluno a concluir que existem apenas cinco tipos de tais poliedros. Como objetivo secundário do trabalho, há a exploração dos elementos dos poliedros, como o número de faces, arestas, vértices e ângulos poliédricos, além da utilização do Teorema de Euler para fixação de certas propriedades dos mesmos. Para isto, a utilização da Teoria de Van Hiele para aprendizagem de conceitos geométricos é indicada, porque propicia uma compreensão progressiva dos conceitos por parte dos alunos e por, até o presente momento, estar mais fundamentada em trabalhos envolvendo a Geometria Plana e não a Geometria Espacial (NASSER & SANT'ANNA, 2010), mostrando assim, o caráter inovador do mesmo.

Apesar dos conceitos relacionados à Geometria Espacial estarem mais elencados nas séries do Ensino Médio, restando ao Ensino Fundamental apenas os conteúdos mais elementares (SÃO PAULO, 2008), a Teoria de Van Hiele afirma que a aprendizagem dos conceitos geométricos deve-se mais à boa elaboração de uma sequência de atividades por parte do professor, do que à faixa etária do aluno (CROWLEY, 1994). Portanto, o presente trabalho destina-se a auxiliar os professores do anos finais do Ensino Fundamental com o intuito de auxiliar seus alunos na melhor compreensão dos conceitos geométricos espaciais durante o Ensino Médio.

Para que o trabalho tenha o efeito desejado pressupõe-se que os alunos tenham uma formação satisfatória envolvendo conceitos da Geometria Plana sobre polígonos e seus elementos, diferenciando polígonos regulares e determinando o valor de cada ângulo interno dos mesmos. Tais conceitos serão fundamentais para a obtenção dos ângulos poliédricos que resultarão, posteriormente, na confecção dos poliedros por parte dos alunos. Na ausência de tais pré-requisitos, as atividades de sondagem presentes no trabalho auxiliarão o professor na construção dos mesmos pelos alunos.

Durante a confecção dos poliedros via utilização de dobraduras, origamis e kirigamis configuram o principal recurso metodológico utilizado na elaboração do trabalho, pois além de serem um material de fácil acesso pela maioria absoluta das escolas, a construção dos módulos individuais torna-se facilmente executável por

parte dos alunos, propiciando uma variedade de conexões e ampliando o número de poliedros que podem ser obtidos. Em algumas atividades serão utilizadas folhas de papel cartão com o intuito de preparar o aluno para confecções mais elaboradas, além de enfatizar características, como as faces e arestas, dos poliedros.

A maioria das atividades destina-se ao acompanhamento individual do aluno, indicando, inclusive, a qual nível de aprendizagem o mesmo se encontra na Teoria de Van Hiele referente aos conceitos geométricos. Contudo, conforme prevê a própria teoria utilizada, em determinados momentos será necessária a socialização das conclusões obtidas individualmente. Logo, ao se tratar do nível referido, será indicada a organização da sala em grupos, restando ao professor o papel de catalizador e fundamentador dos conceitos adquiridos por parte dos alunos.

Um dos maiores desafios encontrados pelos professores, ao abordarem a Geometria Espacial, trata-se da dificuldade por parte dos alunos de desenvolverem uma visão tridimensional do mundo que os rodeia (BRASIL, 1997). Atividades de construção de sólidos são indicadas neste contexto, pois amenizam tais defasagens através da análise dos elementos que constituem cada figura espacial. Da mesma forma, planificações de figuras tridimensionais são importantes para que os alunos diferenciem certas características imperceptíveis no poliedro em sua forma final, principalmente por parte daqueles que se encontram em níveis menos avançados, segundo a Teoria de Van Hiele.

Existem duas leituras possíveis do trabalho: o leitor que assim desejar pode aprofundar-se em cada capítulo embasando-se das principais ideias que envolvem as atividades propostas no sexto capítulo, pelo fato de serem capítulos compartimentados. Porém, o leitor que ler sequencialmente os mesmos compreenderá as inter-relações existentes entre os capítulos tendo uma percepção maior das atividades propostas no sexto capítulo.

No segundo capítulo, encontra-se uma abordagem histórica sobre o surgimento dos poliedros de Platão, suas interpretações e a concepção da fórmula de Descartes-Euler para poliedros convexos. O conhecimento da gênese destes conceitos por parte do professor pressupõe uma compreensão mais geral da matemática e de como a mesma é apresentada atualmente ao aluno. A não-linearidade das descobertas matemáticas ao longo do tempo e as contribuições de diversos matemáticos em épocas e culturas diferentes refletem a diversidade do

pensamento matemático, contrastando com o sequenciamento e compartimentação que atualmente se presencia na matemática.

Dando sequência ao trabalho, encontram-se delineadas, no terceiro capítulo, as implicações metodológicas que explicitam a importância da utilização do trabalho com dobraduras no ensino de geometria, além de evidenciarem-se algumas escolhas metodológicas como, por exemplo, o público-alvo a quem se destina esta proposta didática. Compreendendo o surgimento do origami na história da humanidade, e através de indicações pontuais sobre o trabalho de origami na sala de aula, o professor se informa como deve orientar antes, durante e após as atividades que serão desenvolvidas ao longo do texto.

Um dos principais momentos do trabalho encontra-se no quarto capítulo, por abrigar os princípios da Teoria de Van Hiele para a aprendizagem de conceitos geométricos. Justificativas sobre a escolha desta metodologia para a compreensão dos poliedros regulares serão explicitadas, além da descrição detalhada de cada nível e de cada fase de aprendizagem da referida teoria, acompanhadas, respectivamente, de exemplos envolvendo a aprendizagem de tais sólidos.

O quinto capítulo compreende as principais definições matemáticas relacionadas ao trabalho, sendo de suma importância a prova rigorosa da existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares. Um caso notório a ser citado é a própria definição de poliedro que de acordo com cada autor, é crucial para a compreensão do aluno e que pode gerar exemplos pertinentes ou não para sua aprendizagem. Definições importantes, como a de ângulo poliédrico, são fundamentais para a confecção dos poliedros regulares, além da apresentação de uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Caso se verifique que os alunos se situem no nível 3 (dedução formal) de Van Hiele, sugere-se que tais demonstrações sejam exploradas em sala de aula.

A sequência de atividades a qual se refere o cerne do trabalho encontra-se no sexto capítulo. Iniciando-se com atividades de sondagens sobre os conhecimentos prévios dos alunos, seguidas de construções detalhadas dos módulos individuais com origami e culminando nas atividades para a obtenção dos poliedros regulares, a sequência proposta mostra-se totalmente integrada com o desenvolvimento teórico feito anteriormente.

Este trabalho se configura como uma proposta da Modalidade 1 do Banco Indutor de Trabalhos de Conclusão de Curso (B.I.T.) fornecido pela Sociedade

Brasileira de Matemática (S.B.M.) ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat). Para trabalho futuro, está prevista a real aplicação das atividades sugeridas em sala de aula, seguida da análise dos resultados obtidos verificando a eficácia da sequência elaborada.

2 A GÊNESE HISTÓRICA DOS POLIEDROS

“A matemática sempre existiu, estava meramente aguardando ser descoberta”.

Platão, séc. IV a.C.

2.1 CONTRIBUIÇÕES DE PLATÃO RELACIONADAS AOS POLIEDROS

Apesar de atualmente Platão (427 a.C. à 347 a.C.) ser lembrado por suas contribuições filosóficas, seu pensamento continua compatível com a moderna concepção dos entes matemáticos. A ideia de “forma” que Platão expôs em seus diálogos pode ser adaptada a diversos conceitos, fato que com que sua filosofia tenha permanecido imutável por mais de dois milênios. Pode-se citar a ideia de número como exemplo de como o mundo das ideias platônico se assemelha ao mundo abstrato da matemática contemporânea.

Platão nasceu sob a égide de Aristocles, em Atenas ou na ilha de Egina, em 427 a.C., mas devido à suas características físicas, recebeu a alcunha de Platão, provavelmente por ter ombros largos ou grande testa (STRATHERN, 1997) (Figura 1). Filho de um casal rico e importante (seu pai Aristo era descendente do último rei de Atenas e sua mãe tinha como ascendente um grande legislador ateniense), tentou, sem êxito, tornar-se um grande atleta ou literato. Com o insucesso em tais áreas, Platão adotou e aprofundou a filosofia de Sócrates, tornando-se um dos mais influentes pensadores do século IV a.C.

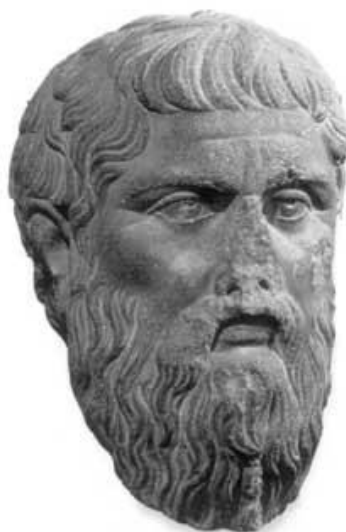


Figura 1: Busto de Platão.

Fonte: University of St Andrews

Durante suas viagens ao sul da Itália, Platão entrou em contato com os ideais pitagóricos, os quais influenciaram sua principal corrente filosófica durante toda sua vida (EVES, 2005). Em sua obra *Timaeus*, Platão narra um possível encontro com o pitagórico Timeu de Locri para expressar suas ideias relacionadas aos sólidos que atualmente conhecemos como sólidos platônicos e que outrora eram conhecidos por “figuras cósmicas”. Tudo isso ocorrera pois Platão associara cada um dos sólidos aos elementos naturais de Empédocles: o tetraedro representava o fogo (Figura 2a), o hexaedro a terra (Figura 2b), o octaedro o ar (Figura 2c) e o icosaedro a água (Figura 2e), enquanto que o dodecaedro servia como representação do Universo (Figura 2d).

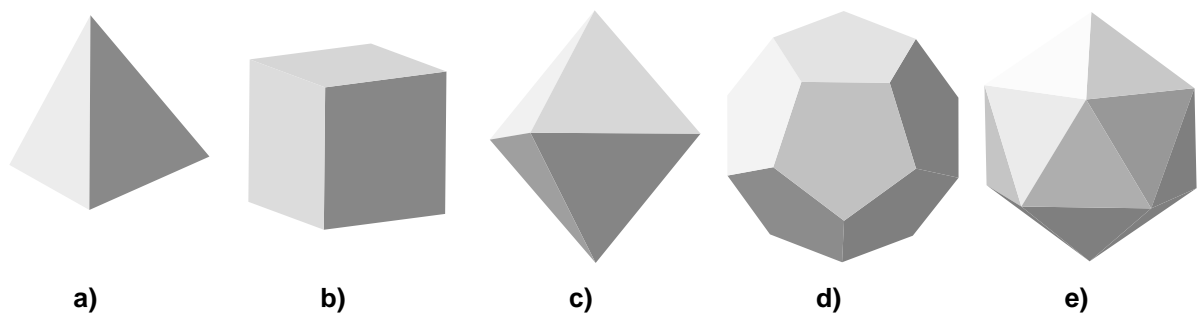


Figura 2: Figuras Cósmicas.

Uma possível explicação para a associação feita por Platão foi exposta pelo matemático Johannes Kepler (1571 à 1630). Ele verificou que o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, enquanto que o icosaedro possui o maior. Tais relações entre volume e superfície foram identificadas de acordo com sua secura ou umidade e, a partir daí, foram atribuídos os respectivos elementos. Como o fogo é o elemento mais seco, a ele foi associado o tetraedro, enquanto que a água, como elemento mais úmido, relacionava-se ao icosaedro. A explicação segundo a qual o hexaedro assenta-se mais facilmente sobre qualquer uma de suas faces relacionou-o à terra, enquanto que o octaedro, ao ser segurado por suas extremidades, possui mais instabilidade e associou-o ao ar. O dodecaedro foi associado ao Universo de acordo com as doze estações zodiacais. O esquema a seguir (Figura 3) relaciona quatro sólidos regulares aos elementos empedoclianios:

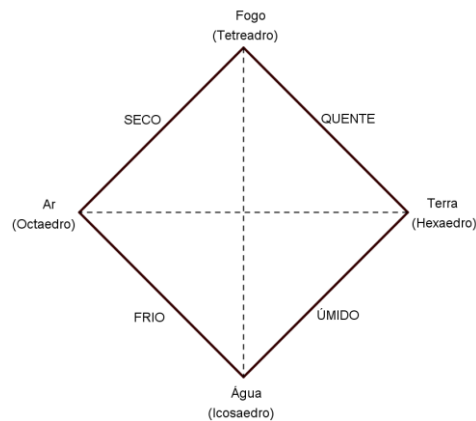


Figura 3: Elementos empédoclios.

No livro XIII de *Os Elementos* de Euclides, está dito que os pitagóricos conheciam apenas o tetraedro, o hexaedro e o octaedro. Porém, com a descoberta de um antigo artefato etrusco em forma de dodecaedro, datado do século V a.C., além da observação dos cristais presentes na pirita (dissulfeto de ferro), há fortes evidências de que os pitagóricos conheciam os demais sólidos (BOYER, 1999).

Como o último livro de *Os Elementos* é inteiramente dedicado às propriedades dos cinco sólidos regulares, muitos historiadores foram levados erroneamente à conclusão de que Euclides usara toda sistematização lógica da sua mais importante obra para culminar na concepção de tais sólidos. Levando-se em conta que a maior parte do conteúdo de *Os Elementos* não possui relação direta com os sólidos, afirmar que o propósito da obra é concluir a existência de apenas cinco tipos destes sólidos não condiz com a realidade. Contudo, isto não tira o brilhantismo dos resultados da referida obra.

Na busca das ideias perfeitas, Platão destacou a importância da reta e do círculo, reservando um destaque especial para o triângulo, ao referir-se aos poliedros regulares. Para Platão as faces dos poliedros não eram meros triângulos, quadrados e pentágonos regulares, mas sim combinações de triângulos retângulos menores. Exemplificando, cada uma das faces do tetraedro podia ser decomposta em seis triângulos retângulos formados por suas respectivas alturas. Na figura 4 se observa um destes triângulos retângulos destacado.

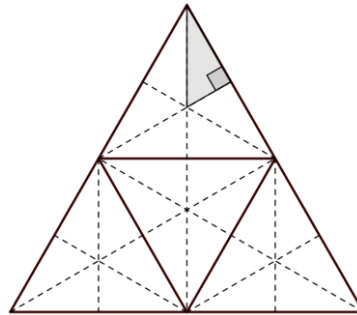


Figura 4: Triângulos retângulos no tetraedro planificado.

Segundo Platão, os demais sólidos formados por faces triangulares podem ser decompostos de maneira semelhante: o octaedro regular contém $8 \times 6 = 48$ triângulos retângulos e o icosaedro $20 \times 6 = 120$ triângulos retângulos. No caso do hexaedro, cada face quadrada pode ser dividida em quatro triângulos retângulos ao traçar suas diagonais perfazendo $6 \times 4 = 24$ triângulos retângulos (um destes triângulos está destacado na figura 5). Em relação ao dodecaedro, cada face pentagonal pode ser decomposta em trinta triângulos retângulos. Para isso traça-se as diagonais do pentágono e, em seguida, são traçadas as cinco medianas relativas aos lados do pentágono tendo assim $12 \times 30 = 360$ triângulos retângulos (na figura 6 tem-se um destes triângulos destacado).

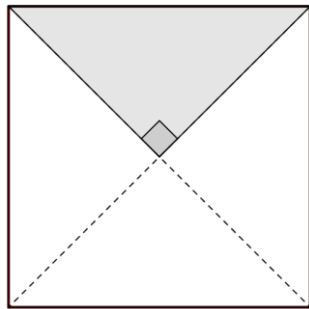


Figura 5: Triângulos retângulos no quadrado.

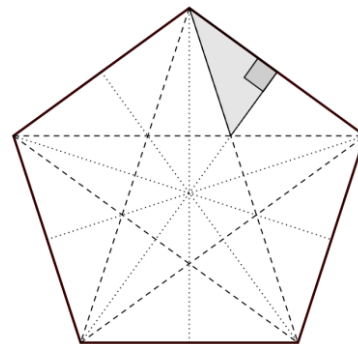


Figura 6: Triângulos retângulos no pentágono.

Parece provável que Teatetus (417 a.C. à 369 a.C.) tenha feito um estudo mais aprofundado dos cinco poliedros regulares, sendo de sua autoria o teorema que afirma haver apenas cinco poliedros regulares. Teatetus era um jovem nascido em Atenas que morreu em decorrência de uma sucessão de desgraças. Platão homenageia o amigo num diálogo intitulado com seu nome, onde narra um encontro entre Sócrates e Teodoro, durante uma discussão sobre as grandezas incomensuráveis.

Depois dos gregos, assuntos relacionados aos poliedros platônicos caíram em ostracismo, ou seja, nenhuma outra grande contribuição ocorreu por longo período. Para se ter uma ideia foi apenas no século XIX que o matemático suíço Ludwig Schläfli (1814 à 1895) concebeu a notação $\{p, q\}$ para poliedros regulares, onde p indica o número de lados de cada polígono e q o número de polígonos que incidem em cada vértice do poliedro (KLAASEN, 1994).

Provavelmente o nome de Platão é recordado mais como filósofo do que como matemático, pois nenhum grande teorema ou descoberta fundamental fora realizada pelo mesmo: são registradas apenas uma fórmula para ternos pitagóricos e a utilização do chamado método analítico para demonstrações. Contudo, Platão sempre será lembrado como um grande criador de matemáticos, uma vez que em 386 a.C. fundou sua Academia, considerada a primeira universidade do mundo. Na entrada da Academia, lia-se, em destaque, seu lema:

“Que aqui não adentrem aqueles não-versados em geometria”
(EVES, 2005, p. 132).

Predominava na época a tradição oral de Sócrates e dos pitagóricos, sendo que a partir da fundação desta Academia, iniciou-se a tradição literal:

“Praticamente não existem documentos matemáticos ou científicos até os dias de Platão no quarto século a.C.” (BOYER, 1999, p. 43)

Depois de uma vida conturbada envolvendo diversas fugas relacionadas aos aspectos políticos da época, aos oitenta e um anos (fato incomum), Platão morre e é sepultado na Academia, que continuou a existir até 529 d.C., quando foi destruída pelo imperador Justiniano, com o intuito de abolir a cultura helenística a favor do cristianismo. Porém, o ideal de Platão, de um mundo imaterial, onde as ideias são perfeitas, continuaria com seu principal seguidor, Aristóteles.

2.2 A FÓRMULA DE DESCARTES-EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Abordar a fórmula de Descartes-Euler para poliedros convexos é imprescindível para qualquer trabalho relacionado aos sólidos geométricos, devido à sua relevância e utilização. Arquimedes de Siracusa (287 a.C. à 212 a.C.) foi provavelmente o primeiro matemático a ter contato com a fórmula, que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, mas foi somente nos séculos XVII e XVIII que os trabalhos de Descartes e Euler, respectivamente, fundamentaram a conhecida expressão (EVES, 2005).

Elucubrações à parte, era comum, durante a Antiguidade, dedicar a célebres matemáticos a autoria de obras apócrifas, fato este que influenciou inclusive edições de *Os Elementos* de Euclides, atribuindo à famosa obra um décimo quarto e um décimo quinto livro. Em tais apócrifos dá-se continuidade às comparações entre os sólidos geométricos inscritos numa esfera, como no caso do livro XIV, onde consta o resultado indicando que a razão entre a superfície do dodecaedro e do icosaedro inscritos na esfera é igual à razão entre seus volumes. O controverso livro XV continua abrangendo a inscrição de sólidos regulares sendo alguns dentro de outros sendo, para isso, necessário contar o número de arestas e ângulos nos sólidos e determinando os ângulos diedros de faces que se encontram numa aresta. Apesar de todo esforço, os antigos gregos não conseguiram determinar a fórmula poliedral citada (BOYER, 1996).

Um matemático que esteve prestes a generalizar a fórmula sobre os elementos de um poliedro foi Rene Descartes (1596 à 1650) (Figura 7). Educado num mosteiro jesuíta na França, Descartes influenciou não somente o pensamento filosófico moderno, com seu racionalismo, como foi precursor de uma revolução no pensamento matemático que se iniciava na Europa no início do século XVII. Em seu *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências), publicado em 1637, Descartes lança as bases daquilo que atualmente consideramos como sendo a Geometria Analítica, numa tentativa de unificar algebristas e geômetras que por séculos haviam tratado a matemática com perspectivas díspares (WAGNER, 1991).



Figura 7: Rene Descartes.

Fonte: University of St Andrews



Figura 8: Leonard Euler.

Fonte: University of St Andrews

Porém, foi a publicação, em 1752, de um artigo de Leonard Euler (1707 à 1783) (Figura 8) que demonstrou com primazia a relação

$$V - A + F = 2$$

relacionando os números V de vértices, A de arestas e F de faces de um poliedro convexo. Euler foi o mais profícuo matemático de todos os tempos e escreveu nada mais do que 800 trabalhos ao longo de sua vida, nas mais diversas áreas. Nascido na Basiléia (atual Alemanha), teve a oportunidade de cair nas graças da influente família Bernoulli e, a partir de então, alternou seus trabalhos entre a Rússia e sua terra natal. Muitas das notações atuais empregadas devem a autoria à Euler, porém sua contribuição extrapola em muito a de diversos matemáticos. Por muito tempo, ele foi considerado a Análise em pessoa. Atualmente conhecida por fórmula de Euler para poliedros convexos, tal relação configura uma das mais antigas descobertas topológicas conhecidas (LA PENHA, 1983), sendo que uma demonstração da mesma encontra-se seção 5.2 deste trabalho.

Um evento relatado em LIMA (2000) conta que houve um manuscrito produzido por Descartes, por volta de 1639, e que posteriormente foi encontrado pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 à 1716), em 1675, que continha resultados com os quais se poderia obter a fórmula de Euler como consequência imediata. Porém Descartes não percebeu tal fato e, após sua morte em Estocolmo, o navio que trazia seus pertences naufragou no rio Sena. Contudo, o baú que continha o manuscrito flutuou e foi encontrado no dia seguinte. Mais uma

vez o destino atrapalhara o curso da Matemática, pois o manuscrito feito por Leibniz também perdeu-se, sendo reencontrado apenas em 1860.

Inicialmente Euler supôs que o teorema que atualmente leva seu nome era válido para todos poliedros, fato que é falso e deve ser explorado pelo professor conforme mostra os exemplos apresentados na seção 5.2 e as atividades da seção 6.4.2. Uma saída óbvia para validar tal situação é restringir a classe de poliedros tal que a relação seja verdadeira (poliedros convexos). Existem muitas demonstrações elegantes e válidas sobre o Teorema de Euler para poliedros convexos, e a primeira foi noticiada pelo matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 à 1833). Contudo, a demonstração mais divulgada do Teorema de Euler para poliedros homeomorfos à esfera é devida ao matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789 à 1857).

A controvérsia sobre se o Teorema de Euler era válido apenas para poliedros convexos perdurou durante mais de um século, sendo que a solução definitiva deve-se ao matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 à 1912), que foi o primeiro a compreender que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia, e não de Geometria, ao notar que o número $V - A + F$ é o invariante topológico do poliedro P .



Figura 9: A. M. Legendre.

Fonte: University of St Andrews



Figura 10: A. L. Cauchy.

Fonte: University of St Andrews



Figura 11: J. H. Poincaré.

Fonte: University of St Andrews

3 A UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI COMO MÉTODO DE APRENDIZAGEM

“(...) Há uma grande diferença entre compreender alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato.”

Tomoko Fuse, origamista japonês

3.1 A IMPORTÂNCIA DA UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Desde a mais tenra idade, a criança começa a construir as noções de espaço através dos sentidos, fazendo com que este espaço perceptivo a auxilie na construção do espaço representativo, onde fará suas construções no campo da matemática. Através da experimentação do espaço sensível, a criança terá a possibilidade de desprender-se dos objetos materiais para raciocinar sobre representações mentais.

Em relação às formas, observa-se que muitas crianças identificam determinados entes geométricos como um todo, sem considerar suas partes tampouco suas propriedades. Desenvolvendo um trabalho de construção das formas o aluno reconhecerá com maior propriedade tanto figuras bidimensionais, quanto as tridimensionais. Nesse contexto o trabalho com dobraduras, recortes e encaixes é fundamental para efetivar tais construções (BRASIL, 1997).

Recomenda-se, nas séries iniciais do Ensino Fundamental II (5ª e 6ª séries) que o ensino de geometria deva estar atrelado à representação, classificação de formas planas e espaciais, preferencialmente em contextos concretos, deixando a estruturação lógico-dedutiva para as séries finais (7ª e 8ª séries) (SÃO PAULO, 2008). Ressalta-se, ainda, que não deve existir a distinção entre Geometria Plana para o Ensino Fundamental e Geometria Espacial para o Ensino Médio, tratando ambos os assuntos simultaneamente, sempre que houver necessidade.

O trabalho envolvendo origami representa um recurso importante para a aprendizagem de diversos conceitos matemáticos, pois serve como ligação entre o mundo dos objetos manipuláveis e as formas ideais pretendidas. Ao realizarem as dobraduras, os alunos vão se familiarizando com as formas geométricas, realizam movimentos que as transformam e exploram propriedades através das simetrias realizadas. Conceitos como retas perpendiculares e paralelas, ângulos e bissetrizes,

figuras planas e figuras espaciais, entre outros, são introduzidos de maneira espontânea e eficaz (RÊGO, 2003).

3.2 UMA BREVE HISTÓRIA DO ORIGAMI

A história do origami confunde-se com a própria origem do papel, no século II a.C., pelos chineses, através da maceração de cascas de árvores e restos de tecidos. Oneroso e raro, o papel era destinado às camadas mais abastadas da população e era utilizado pela nobreza e para festas religiosas. Durante os séculos IV ao X, no Japão, foram os monges budistas chineses os responsáveis por inserir o papel, onde a arte de dobrá-lo tomou grande proporção (SÁ, 1987).

Inicialmente as instruções sobre as dobraduras eram passadas oralmente, conforme a tradição oriental. As primeiras reminiscências sobre origami datam de 1797 com a publicação de *Hiden Senbazuru Orikata* (Como dobrar mil garças) (Figura 12), porém foi somente com a produção de papel em larga escala que o origami veio a se popularizar, tornando-se uma arte secular. No ano de 1876, o Japão insere o origami como parte integrante do currículo escolar, com o intuito de contribuir para o desenvolvimento intelectual de seus alunos. A principal função do origami seria desenvolver as habilidades criativas do aluno assim como sua psicomotricidade (CHEMELLO, 1987).

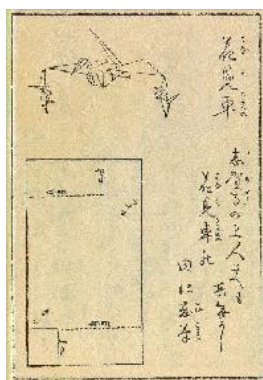


Figura 12: Página de *Hiden Senbazuru Orikata*.

Fonte: Wikimedia Commons

Em 1880 surge o termo origami como sendo a união de duas palavras *ori* (do verbo dobrar) e *kami* (papel) (Figuras 13a e 13b), pois na forma tradicional, o origami não envolve cortes, encaixes ou colagens. Paralelamente ao desenvolvimento no Oriente, no século VIII, os árabes trazem para o norte da África

o segredo da fabricação do papel, o aperfeiçoam e levam-no para a Espanha. Porém, como a religião muçulmana impede a representação simbólica de animais e pessoas, os mouros atêm-se apenas ao estudo das formas geométricas obtidas (RÊGO, 2003).



Figura 13: Ideogramas ori e kami.

Mesmo com a criação da imprensa, foi somente a partir de 1950 que o origami começou a popularizar-se no Ocidente. Atualmente encontram-se centenas de publicações japonesas sobre a arte de dobrar papéis, algumas em inglês, espanhol e português.

3.3 NOÇÕES BÁSICAS PARA A UTILIZAÇÃO DO ORIGAMI

Para a realização de um bom trabalho envolvendo origami, algumas recomendações são pertinentes (RÊGO, 2003):

- a) verificar se o formato do papel está adequado ao solicitado pela atividade;
- b) efetuar os vincos com firmeza e precisão para criar os eixos de simetria corretamente;
- c) realizar tentativas antes de executar a versão final do origami para auxiliar na compreensão dos passos;
- d) escolher um papel com espessura e textura adequadas para a realização das dobraduras;
- e) determinar as dimensões iniciais do papel para facilitar a execução das dobras pelos alunos.

Na utilização do origami em sala de aula é recomendável que o professor esteja atento a algumas circunstâncias que podem ocorrer durante a execução dos procedimentos (RÊGO, 2003):

- 1) as construções realizadas pelos alunos devem ser acompanhadas, passo-a-passo, por um instrutor, que pode ser o próprio professor ou algum aluno-monitor que possua maior facilidade e treinamento prévio;

- 2) o instrutor deve utilizar um papel com dimensão maior do que os alunos para que todos visualizem os detalhes dos procedimentos;
- 3) a escolha da dobradura deve obedecer uma graduação de dificuldade progressiva, pois mesmo as dobraduras mais simples podem conter diversos conceitos matemáticos a serem explorados;
- 4) durante a confecção do origami, o instrutor deve sempre utilizar a linguagem matemática adequada para favorecer a compreensão correta dos conceitos geométricos por parte dos alunos;
- 5) a organização da sala é importante e deve valorizar o trabalho em grupo para que os alunos comparem os trabalhos executados e elaborem diagramas detalhados sobre suas próprias construções;
- 6) deve-se respeitar os diferentes níveis de aprendizagem durante a execução das dobraduras, sendo frequente que determinados alunos necessitem de maior prática para realizar os origamis do modo desejado;
- 7) sempre ter em mente os objetivos pretendidos com a execução do origami: quais conteúdos matemáticos serão abrangidos, que tipo de estrutura será utilizada (diagramas, orientações dirigidas, etc), como a sala será organizada, etc.

Muitas outras circunstâncias poderão surgir durante as aulas, sendo que em algumas atividades serão necessárias recortes, encaixes e colagens, fato que configura uma variação do origami tradicional, denominado *kirigami*. Recomenda-se ao professor que confeccione os origamis previamente antes das aulas para compreender todos os conceitos envolvidos na execução do mesmo. As dobraduras existentes neste trabalho são acompanhadas de vídeos de orientação que podem ser acessados pelos professores antes da execução das mesmas. Vale lembrar que a utilização do origami no auxílio da aprendizagem de conceitos geométricos é de baixo custo, favorecendo sua adoção mesmo em escolas que não possuam muitos recursos materiais.

3.4 OS AXIOMAS DA GEOMETRIA DO ORIGAMI

O origami, como instrumento pedagógico, tem se mostrado eficaz na aprendizagem da geometria, devido ao seu caráter lúdico e também pelo fator de descoberta propiciado ao aluno (CARNEIRO & SPIRA, 2010, p. iii). Além disso, a

aplicação do origami no ensino de geometria motiva o estudo da mesma, podendo inclusive auxiliar no desenvolvimento cognitivo do aluno e, conseqüentemente, trazendo melhor aprendizagem e compreensão da Matemática através da manipulação de entes concretos (CAVACAMI & FURUYA, 2010, p. 1).

Embora haja técnicas de origami dobrando linhas curvas, a maioria dos trabalhos destina-se às dobras em linhas retas. Dada uma folha de papel, ao efetuar uma dobra, a mesma gera uma linha reta que divide o plano em dois semiplanos, sendo que os pontos de um deste são refletidos no outro, ou seja, seja considerando r a linha de dobra e P um ponto da folha no semiplano S (Figura 14); ao efetuar a dobra P é levado no seu simétrico P' em relação a r no semiplano S' . Em outras palavras, a linha de dobra r é a mediatriz de cada par P, P' , em que P' é o refletido de P .

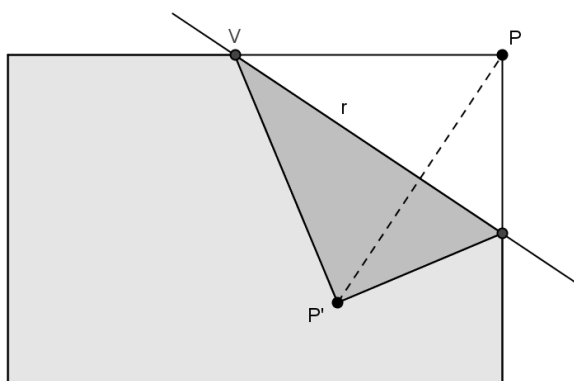


Figura 14: Dobra em origami

Note ainda que a linha de dobra r da figura 14 é bissetriz de cada ângulo $P\hat{V}P'$ formado por um lado VP com origem em V e seu lado refletido VP' . Desta forma verifica-se que as mediatrizes e as bissetrizes são construções elementares do origami, assim como a construção de paralelas e de perpendiculares.

Da mesma forma que os postulados de Euclides servem de base para as construções realizadas na Geometria Euclidiana, no origami encontram-se os chamados Axiomas da Geometria do Origami, conhecidos por Axiomas de Huzita (ou Huzita–Hatori, ou Huzita–Justin), cujos enunciados traz-se a seguir:

Axioma 3.4.1

“Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que passa por eles.”

(Figura 15)

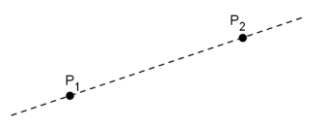


Figura 15: Configuração referente ao Axioma 3.4.1

Axioma 3.4.2

“Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que coloca P_1 sobre P_2 .” (Figura 16)

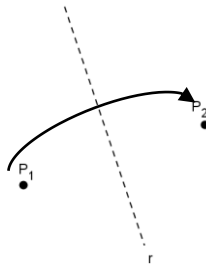


Figura 16: Configuração referente ao Axioma 3.4.2

Axioma 3.4.3

“Dadas as retas r_1 e r_2 , existe uma dobra que coloca r_1 sobre r_2 .” (Figura 17)

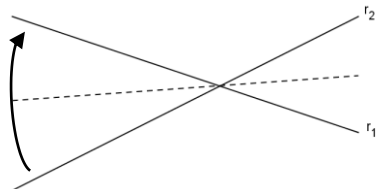


Figura 17: Configuração referente ao Axioma 3.4.3

Axioma 3.4.4

“Dados um ponto P e uma reta r , existe uma única dobra que é perpendicular a r e que passa por P .” (Figura 18)

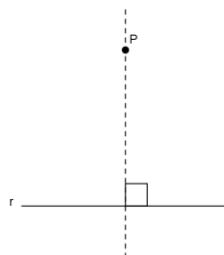


Figura 18: Configuração referente ao Axioma 3.4.4

Axioma 3.4.5

“Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r , existe uma dobra que coloca P_1 sobre r e que passa por P_2 .” (Figura 19)

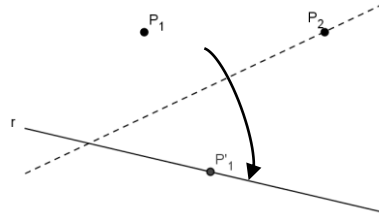


Figura 19: Configuração referente ao Axioma 3.4.5

Axioma 3.4.6

“Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2 , existe uma dobra que leva simultaneamente P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 .” (Figura 20)

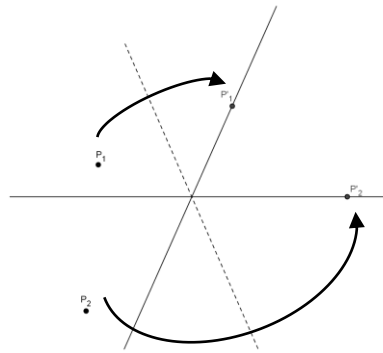


Figura 20: Configuração referente ao Axioma 3.4.6

Axioma 3.4.7

“Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2 , existe uma dobra que coloca P sobre r_1 e que é perpendicular a r_2 .” (Figura 21)

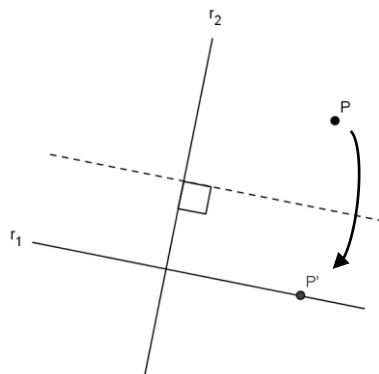


Figura 21: Configuração referente ao Axioma 3.4.7

Fica evidente a relação entre os axiomas de Huzita aos postulados de Euclides como, por exemplo, o fato do Axioma 3.4.1 ser o correspondente do Postulado da existência de retas na Geometria Euclidiana, que afirma que, “dados dois pontos distintos do espaço, existe uma única reta que os intercepta”.

Deve-se deixar claro que nos axiomas destinados ao origami, o tamanho do papel é suficientemente grande para efetuar as construções e que ao se ler que “existe uma dobra”, deve-se entender que, caso a solução geométrica exista, então ela pode ser realizada através de uma dobra.

Enquanto os cinco primeiros axiomas podem ser construídos utilizando régua e compasso, verifica-se que o sexto axioma não é construtível com tais instrumentos. Outro fato notável deve-se ao sétimo axioma, acrescentado por Koshiro Hatori em 2001 e que supostamente independe dos cinco primeiros. Para um estudo mais avançado recomenda-se a leitura de LANG (2004).

4 A TEORIA DE VAN HIELE PARA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS

“As flores de um jardim não desabrocham num mesmo dia.”

Autor desconhecido

4.1 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA TEORIA DE VAN HIELE

Cada indivíduo revela peculiaridades na aprendizagem de conceitos, sejam estes aritméticos, algébricos ou geométricos. A teoria de Van Hiele para aprendizagem de conceitos geométricos surge com o intuito de favorecer ao professor a identificação destas especificidades apresentadas pelos alunos e fornece uma alternativa de intervenção para efetivar a compreensão de tais assuntos. Outro fator importante da teoria envolve a participação ativa do aluno na construção do próprio conhecimento, extinguindo o antigo modelo de aula expositiva presente em nossas escolas há décadas.

A publicação, em 1957, das dissertações de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, nos Países Baixos, intitulada *Structure and Insight: A theory of mathematics education* (Estrutura e Conhecimento: Uma teoria da educação matemática) é o ponto de partida da teoria de Van Hiele, que abrange a didática da matemática e, mais especificamente, a didática da geometria. Pouco após a publicação da tese, Dina vem a falecer e fica a cargo de Pierre o aperfeiçoamento e a divulgação da teoria. Os primeiros trabalhos baseados na Teoria de Van Hiele eram quase desconhecidos no Ocidente e ficaram mais conhecidos na década de 1980, com suas traduções para o inglês (CROWLEY, 1994).

A ideia central da teoria é que os alunos progridem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria (NASSER & SANT'ANNA, 2010). Para que o aluno progrida de um nível para outro, o professor deverá selecionar uma sequência de atividades que favoreça a aprendizagem dos conceitos. Desta forma, fica implícito na teoria de Van Hiele que a evolução do aluno depende mais da escolha adequada de atividades, do que da idade do aluno ou sua maturação, o que a diferencia de outras didáticas existentes.

Outros aspectos importantes da teoria enfatizam que:

- a) assuntos implícitos num nível tornam-se explícitos no próximo;
- b) cada nível possui linguajar próprio, sendo que cada símbolo possui um respectivo significado;
- c) caso haja uma combinação inadequada entre o professor, o material e o aluno, a aprendizagem não será efetivada; ou seja, não há compreensão entre indivíduos de diferentes níveis.

4.2 O MODELO PROPOSTO POR VAN HIELE

A teoria de Van Hiele estabelece cinco níveis hierárquicos para aprendizagem de conceitos, no sentido que o aluno só atinge o nível de raciocínio seguinte após dominar os níveis anteriores. Talvez esteja neste fato o cerne da questão do porquê alguns alunos apresentarem maiores dificuldades na aprendizagem num curso de geometria embasado em demonstrações lógico-dedutivas, sem terem vivenciado os níveis anteriores. Segue uma breve descrição de cada nível (CROWLEY, 1994):

- i) *Nível 0 (visualização ou reconhecimento)*: neste estágio, o aluno reconhece as figuras como entes globais, ou seja, sem considerar seus atributos tampouco lhe atribui propriedades. Um aluno neste nível, por exemplo, reconhece o cubo por seu formato, porém não lhe atribui o nome de hexaedro pois não compreende a relação da quantidade de faces com o poliedro em questão;
- ii) *Nível 1 (análise)*: neste estágio, o aluno inicia suas experimentações utilizando as características das figuras geométricas. Contudo, um aluno neste nível ainda está impossibilitado de realizar inter-relações com outras figuras semelhantes ou entender definições. Utilizando novamente o exemplo do cubo, um aluno neste nível consegue compreender que o cubo é um hexaedro por possuir seis faces, mas não consegue identificar que existe uma classe de sólidos (os poliedros) em que cada um recebe denominação própria de acordo com seu número de faces;
- iii) *Nível 2 (dedução informal ou abstração)*: neste estágio o aluno consegue estabelecer inter-relações usando a própria figura ou entre figuras. Desta forma, tais alunos conseguem deduzir propriedades ou classificar grupos de

figuras, fazendo com que as definições tenham significado, mesmo que, para isso, utilizem uma linguagem informal. Porém, os alunos deste nível ainda não conseguem deduzir uma sequência lógica entre proposições ou o significado de axiomas. Neste nível os alunos conseguem, por exemplo, agrupar os poliedros de acordo com o tipo de face que o compõe (tetraedro, octaedro e icosaedro possuem faces triangulares);

- iv) *Nível 3 (dedução)*: neste estágio o aluno compreende sistemas axiomáticos e utiliza estruturas lógico-dedutivas para realizar demonstrações. Alunos neste nível entendem a diferenciação entre axiomas, teoremas, postulados e definições, conseguindo verificar condições de suficiência e necessidade, além de distinguir uma afirmação de sua recíproca. Continuando no exemplo do cubo, os alunos neste nível compreendem e estão aptos a demonstrar porquê duas arestas paralelas (distintas) de um cubo estão contidas em planos paralelos ou num mesmo plano;
- v) *Nível 4 (rigor)*: neste estágio o aluno entende a diferenciação entre os diversos sistemas axiomáticos podendo compreender geometrias não-euclidianas. Os entes geométricos são vistos como construções abstratas que satisfazem determinadas propriedades.

Em seus trabalhos, o casal Van Hiele concentrou seus esforços nos três primeiros níveis, pois destinavam-se a aplicações em escolas secundárias com ênfase na Geometria Plana. Há uma escassez de pesquisas referentes tanto aos níveis avançados, desde que a maioria dos cursos ministrados demandam apenas a compreensão da geometria euclidiana através de uma estrutura demonstrativa; quanto com ênfase na Geometria Espacial.

O esquema seguinte (Figura 22) representa os níveis de aprendizagem de Van Hiele de acordo com a sequência proposta pelo casal.

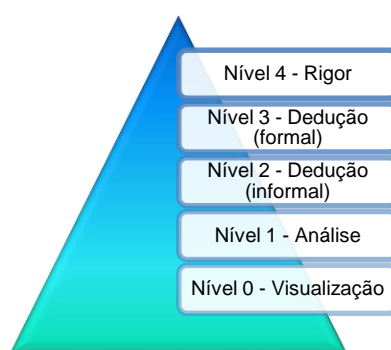


Figura 22: Níveis da teoria de Van Hiele.

4.3 O PAPEL DO PROFESSOR NA TEORIA DE VAN HIELE

Elaborar cuidadosamente uma sequência de atividades que vislumbre o progresso do aluno de um nível para outro na aprendizagem de certo conceito geométrico é o papel principal do professor na teoria de Van Hiele. Para tal, o casal de estudiosos propôs cinco fases sequenciais de aprendizagem onde, através da realização correta de cada, propicia ao aluno a passagem para o nível seguinte. Uma breve descrição de cada fase é exposta a seguir (CROWLEY, 1994):

- 1) *Fase 1 (interrogação / informação)*: nesta etapa o professor dialoga junto aos alunos questionando sobre os objetos de estudo do nível em que se encontram. O principal objetivo nesta fase é realizar uma sondagem prévia dos conhecimentos dos alunos e suscitar nos mesmos os conceitos a serem desenvolvidos. Questões como: “alguém conhece algum poliedro?”, “quantas faces são necessárias no mínimo para termos um poliedro?” e “quais são as características de um poliedro regular?” são pertinentes nesta fase;
- 2) *Fase 2 (orientação dirigida)*: nesta etapa os alunos realizam uma sequência de atividades elaborada cuidadosamente pelo professor sobre o conceito a ser desenvolvido neste nível. Tal sequência deve possuir um nível gradual de dificuldade e, geralmente, é composta por pequenas tarefas a serem executadas para responder questões específicas sobre o tópico. Por exemplo, o professor pode solicitar aos alunos que reúnam quadrados congruentes ao redor de um único vértice para verificar a quantidade máxima de figuras necessárias para construir um ângulo poliédrico;
- 3) *Fase 3 (explicação)*: nesta etapa o papel do professor é reduzido ao mínimo e os alunos socializam os resultados obtidos pela execução das atividades anteriormente desenvolvidas. Através da comparação das respostas os alunos começam a reelaborar as estruturas prévias e, conseqüentemente, aprimoram seus conceitos sobre o assunto. Um exemplo de atividade proposta nesta fase consiste em elaborar cartazes em conjunto sobre quantos polígonos são necessários para confeccionar determinado poliedro regular;
- 4) *Fase 4 (orientação livre)*: nesta etapa os alunos se deparam com desafios que exigem diversas etapas para serem concluídos. As tarefas devem ser complexas, possuírem diversas formas de serem executadas ou até mesmo

terem final aberto. Um bom exemplo nesta fase seria questionar aos alunos sobre quantos poliedros regulares podem ser obtidos;

- 5) *Fase 5 (integração)*: nesta etapa os alunos sintetizam, junto ao professor, os resultados obtidos no nível e constroem uma nova rede de objetos e relações. O professor deve ter cuidado nesta fase para não introduzir nenhum conhecimento novo alheio à descoberta dos próprios alunos. Solicitar aos alunos que redijam as conclusões obtidas e generalizadas anteriormente sob a forma de relatório é um exemplo de procedimento adotado nesta fase.

Van Hiele afirma que, realizando adequadamente a sequência de fases, o aluno terá desenvolvido um novo conhecimento, substituindo o antigo e prosseguindo de nível, fazendo, desta forma, que o professor recomece o trabalho no novo nível (NASSER & SANT'ANNA, 2010).

Desta forma a sequência de fases de aprendizagem da teoria de Van Hiele pode ser representada de acordo com a figura 23:



Figura 23: Fases de aprendizagem da teoria de Van Hiele.

5 A MATEMÁTICA DOS POLIEDROS

“Deus sempre geometriza.”

Platão, *Timeu*

5.1 A DEFINIÇÃO DE POLIEDRO

Muitos matemáticos apresentaram dificuldades para demonstrar teoremas sobre poliedros, devido à falta ou imprecisão das definições utilizadas. Dizer que poliedros são uma reunião de figuras planas convexas (polígonos) pode auxiliar na construção de sua ideia, porém tal afirmação não possui relevância no momento de efetuar demonstrações.

A definição de **poliedro** a qual se refere este trabalho provém de CARVALHO (1999), que considera um poliedro como sendo toda região do espaço delimitada por um conjunto de polígonos planos (região poligonal) que satisfazem as seguintes condições:

- i) a interseção de dois polígonos é vazia ou é um vértice comum aos dois polígonos ou é um lado comum aos dois polígonos;
- ii) cada lado de um polígono é lado de exatamente mais um outro polígono.

Conforme DOLCE (1993) dado um número finito n de polígonos planos convexos ($n \geq 4$) tais que:

- i) dois polígonos não estejam contidos num mesmo plano;
- ii) cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- iii) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço determinam n semiespaços, sendo que cada um destes tem origem no polígono que o origina e contém os restantes. A intersecção destes semiespaços é chamada **poliedro convexo**. A ênfase deste trabalho será dada aos poliedros convexos. A seguir observa-se um poliedro convexo (Figura 24) e um poliedro não convexo (Figura 25):

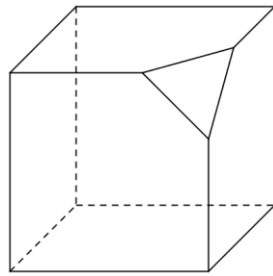


Figura 24: Um poliedro convexo.

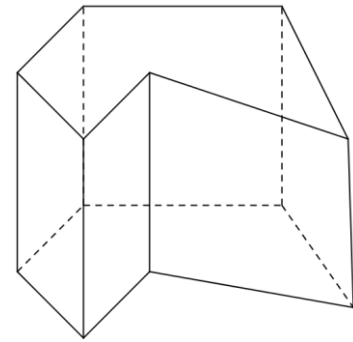


Figura 25: Um poliedro não convexo.

DOLCE (1993) diferencia poliedro convexo de **superfície poliédrica limitada convexa** considerando esta última como sendo a reunião de um número finito de polígonos planos convexos (regiões poligonais convexas) tais que:

- 1) dois polígonos não estão num mesmo plano;
- 2) cada lado de um polígono não está em mais que dois polígonos;
- 3) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única linha poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
- 4) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço.

Uma superfície poliédrica limitada convexa não é uma região convexa, o que a diferencia do poliedro convexo.

Chamam-se **superfícies poliédricas limitadas convexas abertas** aquelas que possuem contorno, enquanto que as que não o possuem são chamadas **superfícies poliédricas limitadas convexas fechadas** (Figura 26).

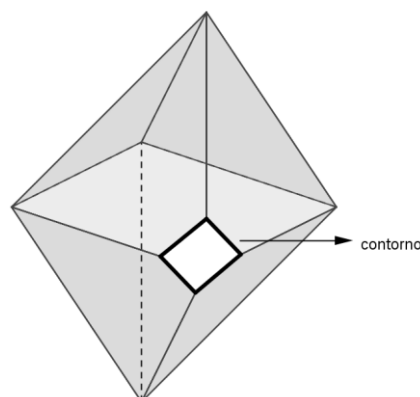


Figura 26: Uma superfície poliédrica limitada convexa aberta.

Um poliedro convexo possui faces (que são os polígonos convexos), arestas (que são os lados dos polígonos) e vértices (que são os vértices dos polígonos), sendo a reunião das faces do poliedro denominada superfície do poliedro.

5.2 O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Uma das relações mais importantes e utilizadas envolvendo poliedros é dada pelo Teorema de Euler. Tal relação possui características que podem ser exploradas pelo professor desde as séries iniciais do Ensino Fundamental II e aprofundadas no Ensino Médio. Algumas propostas de atividades para os anos finais do Ensino Fundamental que utilizam tal relação encontram-se na seção 6.4.

5.2.1 Teorema (de Euler)

Para todo poliedro convexo, vale a relação $V - A + F = 2$ em que V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro.

Tal relação é comumente conhecida como “Fórmula de Euler”. A demonstração desta teorema se dará em duas partes: a primeira parte refere-se às superfícies poliédricas limitadas convexas abertas, enquanto que a segunda é relativa às superfícies poliédricas limitadas convexas fechadas (DOLCE, 1993).

(a) Pelo princípio da indução finita referente ao número de faces prova-se, em caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica convexa aberta, vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1 \quad (1)$$

onde V_a é o número de vértices, A_a é o número de arestas e F_a é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta.

Para $F_a = 1$ a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_a = n$ e $A_a = n$. Tem-se que:

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1.$$

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1$.

Admitindo que a relação (1) vale para uma superfície de F' faces (consequentemente V' vértices e A' arestas), isto é,

$$V' - A' + F' = 1,$$

prova-se que a relação também é válida para uma superfície de $F' + 1$ faces ($F_a = F' + 1$ faces, V_a vértices e A_a arestas), ou seja, que possua $F_a = F' + 1$ faces, V_a vértices e A_a arestas. De fato, acrescentando a essa superfície poliédrica limitada aberta uma face de p arestas (lados) e considerando que q dessas arestas (lados do

polígono) coincidem com as arestas existentes no poliedro, obtêm-se uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices, de tal forma que $F_a = F' + 1$ (pois acrescentou-se uma face ao poliedro); $A_a = A' + p - q$ (pois existem q arestas coincidentes); e $V_a = V' + p - (q + 1)$ (pois existem q arestas coincidentes e $q + 1$ vértices também coincidem). Com isso,

$$V_a - A_a + F_a = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1 = V' - A' + F' = 1.$$

Logo, a relação $V_a - A_a + F_a = 1$ é válida se acrescentarmos (ou retirarmos) uma face da superfície, ou seja, é válida para toda superfície poliédrica convexa aberta.

Como a relação obtida trata-se da própria hipótese de indução verificou-se, pelo princípio da indução finita, que o resultado preliminar $V_a - A_a + F_a = 1$ é válido para toda superfície poliédrica convexa aberta.

(b) Seja agora a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada com V vértices, A arestas e F faces. Desta superfície retira-se uma face. Desta forma tem-se uma nova superfície aberta com V_a vértices, A_a arestas para a qual é válida (pelo item anterior) a relação:

$$V_a - A_a + F_a = 1.$$

Como $V_a = V$, $A_a = A$ (com a retirada da face o número de vértices da superfície e de suas arestas não se altera) e $F_a = F - 1$, tem-se que:

$$V - A + (F - 1) = 1 \text{ e } V - A + F = 2.$$

Desta forma fica provado a relação de Euler para poliedros convexos com V vértices, A aresta e F faces. Um papel importante a ser desenvolvido pelo professor é explorar diversos poliedros para instigar a validade do Teorema de Euler. Pode-se inclusive ser verificado pelos alunos que para poliedros não convexos a fórmula de Euler pode não ser verdadeira. A figura 27(i) mostra um poliedro com 14 vértices, 21 arestas e 9 faces, ou seja, $14 - 21 + 9 = 2$; enquanto que a figura 27(ii) mostra um poliedro com 16 vértices, 32 arestas e 16 faces, perfazendo $16 - 32 + 16 = 0 \neq 2$.

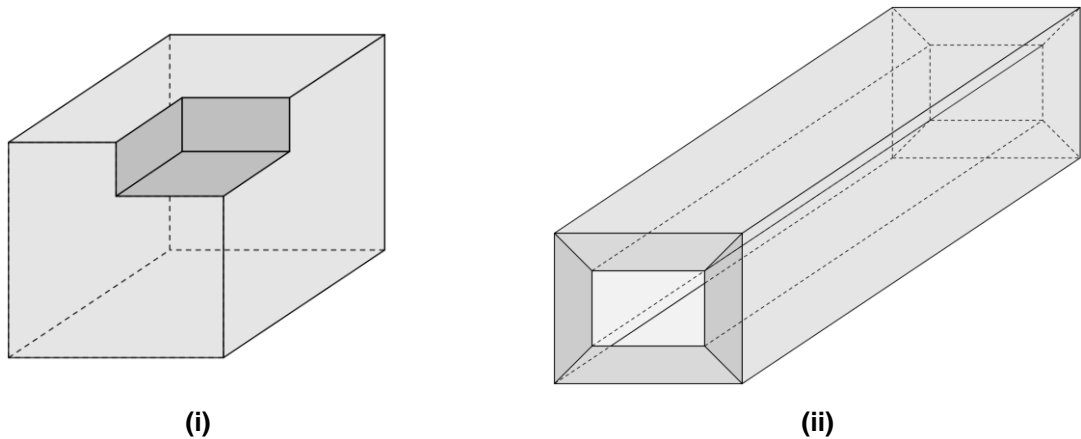


Figura 27: Exemplos de poliedros não convexos para verificação da fórmula de Euler.

Os poliedros para os quais é válida a fórmula de Euler são conhecidos por **poliedros eulerianos**. Como consequência do Teorema de Euler e dos exemplos, (Figura 27) todo poliedro convexo é euleriano, porém nem todo poliedro euleriano é convexo.

5.3 POLIEDROS DE PLATÃO

Primeiramente é necessário definir ângulo poliédrico para as próximas demonstrações.

Definição: Dado um número finito n (com $n \geq 3$) de semirretas $Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_n$ de mesma origem V , tais que o plano de duas semirretas consecutivas (Va_1 e Va_2, Va_2 e Va_3, \dots, Va_n e Va_1) deixa as demais num mesmo semiespaço; considere n semiespaços $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, cada um deles com origem no plano de duas semirretas consecutivas e contendo as restantes. Chama-se **ângulo poliédrico convexo** (DOLCE, 1993) determinado por $Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_n$ a interseção dos semiespaços $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, ou seja,

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n.$$

A figura 28 representa um ângulo poliédrico de vértice V , de semirretas $Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_n$ e n faces (ângulos, $\widehat{a_1 a_2}, \widehat{a_2 a_3}, \dots, \widehat{a_n a_1}$).

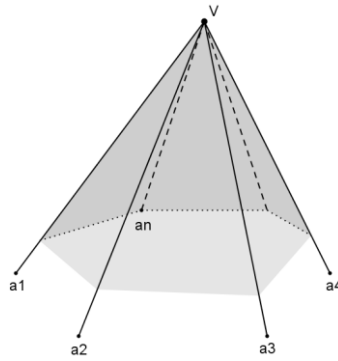


Figura 28: Um ângulo poliédrico.

Dentre os poliedros eulerianos existe uma classe importante de poliedros conforme a definição a seguir:

Definição: Chama-se **poliedro de Platão** todo poliedro que satisfaz as seguintes condições:

- i) todas suas faces tem o mesmo número (n) de arestas;
- ii) todos os ângulos poliédricos possuem o mesmo número (m) de arestas;
- iii) satisfaz a Fórmula de Euler.

Observa-se, como exemplo, que uma pirâmide pentagonal satisfaz a Fórmula de Euler (pois é um poliedro convexo), porém não pode ser considerada um poliedro de Platão pois não satisfaz as condições i) e ii) da definição.

Teorema 5.3.1: Existem apenas cinco tipos de poliedros de Platão.

Seja um poliedro convexo P com V vértices, A arestas e F faces. Para provar o teorema basta verificar as condições da definição para P ser um poliedro de Platão.

- i) cada uma das F faces do poliedro possui n arestas ($n \geq 3$) e, pelo fato de cada aresta ser concomitante a duas faces, $n \cdot F = 2A$. Assim:

$$F = \frac{2A}{n}. \quad (I)$$

- ii) cada um dos vértices V dos ângulos poliédricos possuem m arestas ($m \geq 3$). Como cada aresta contém dois vértices, $m \cdot V = 2A$. Logo:

$$V = \frac{2A}{m}. \quad (II)$$

- iii) para o poliedro P ser classificado como Poliedro de Platão deve satisfazer também a Fórmula de Euler. Desta forma, substituindo (I) e (II) em $V - A + F = 2$, tem-se:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}. \quad (\text{III})$$

O número de lados de cada polígono (n) e o número de arestas de um ângulo poliédrico (m) a princípio são maiores ou iguais a 3 (satisfazem (I) e (II)). No entanto, o caso $m > 3$ e $n > 3$ não satisfaz (III). De fato:

$$\left. \begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

o que contraria o resultado (III), pois o número A de arestas deve ser um valor inteiro positivo. Desta forma, existem duas situações a serem consideradas: $m = 3$ (e o poliedro de Platão possui apenas triedros) ou $n = 3$ (as faces do poliedro de Platão são triangulares).

- 1º) supondo que o poliedro de Platão possua apenas triedros ($m = 3$), de (III):

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6.$$

Logo, tem-se que $3 \leq n < 6$, sendo n o número de lados dos polígonos que compõe o poliedro de Platão. Em outras palavras, caso o poliedro de Platão possua apenas triedros ele deverá apresentar faces triangulares, quadrangulares ou pentagonais.

- 2º) supondo que o poliedro de Platão tenha faces triangulares ($n = 3$), novamente de (III):

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6.$$

Desta forma tem-se que $3 \leq m < 6$, sendo m o número de arestas de um ângulo poliédrico que compõe o poliedro de Platão. Em outras palavras, caso o poliedro de Platão possua faces triangulares então seus ângulos serão triédricos, tetraédricos ou pentaédricos (respectivamente com 3, 4 ou 5 arestas).

Reunindo as informações obtidas pode-se classificar os poliedros de Platão através do par $\{m, n\}$ determinando as características pertinentes a cada classe. Por exemplo, o poliedro de Platão $\{3, 3\}$ apresenta todas suas faces triangulares e triedros como sendo seus ângulos poliédricos. Substituindo em (III):

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{1}{6} \Rightarrow A = 6.$$

De (I) e (II) tem-se respectivamente que:

$$F = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4 \text{ e } V = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4.$$

Realizando os cálculos para os demais poliedros de Platão chega-se às seguintes classes, denominadas de acordo com o número de faces:

Tabela 1: Classe de poliedros de Platão

m	n	A	V	F	Denominação
3	3	6	4	4	<i>Tetraedro</i>
3	4	12	8	6	<i>Hexaedro</i>
4	3	12	6	8	<i>Octaedro</i>
3	5	30	20	12	<i>Dodecaedro</i>
5	3	30	12	20	<i>Icosaedro</i>

5.4 POLIEDROS REGULARES

A definição de **poliedro regular** a qual se refere este trabalho é:

“Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais (*congruentes*) e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas”.
(LIMA, 2006, p. 241)

Propriedade: Existem apenas cinco poliedros regulares, a menos da medida das arestas.

Considere um poliedro P regular com V vértices, A arestas e F faces de tal forma que o número de lados de cada face do poliedro seja representado por n (com $n \geq 3$) e o número de arestas que concorrem em cada vértice do poliedro seja dado por m (com $m \geq 3$). Por definição, todo poliedro regular é de Platão. De (I) e (II),

$$2A = n \cdot F = m \cdot V.$$

Assim,

$$A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{m}.$$

Substituindo na fórmula de Euler, obtém-se que:

$$\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2,$$

ou seja,

$$F = \frac{4m}{2m + 2n - mn}.$$

Como o número de faces de um poliedro é um valor inteiro positivo:

$$2m + 2n - mn > 0$$

o que resulta em:

$$\frac{2n}{n-2} > m.$$

Pelo fato de $m \geq 3$:

$$\frac{2n}{n-2} > 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow n < 6.$$

Listando as possibilidades para $3 \leq n < 6$, verifica-se que:

a) para $n = 3$ (faces triangulares) resulta:

$$F = \frac{4m}{2m + 2 \cdot 3 - 3m} = \frac{4m}{6 - m}. \text{ De } \begin{cases} m = 3, F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ m = 4, F = 8 \text{ (octaedro)} \\ m = 5, F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases}$$

b) para $n = 4$ (faces quadrangulares) resulta:

$$F = \frac{4m}{2m + 2 \cdot 4 - 4m} = \frac{2m}{4 - m}. \text{ De } m = 3, F = 6 \text{ (hexaedro)}$$

c) para $n = 5$ (faces pentagonais) resulta:

$$F = \frac{4m}{2m + 2 \cdot 5 - 5m} = \frac{4m}{10 - 3m}. \text{ De } m = 3, F = 12 \text{ (dodecaedro)}$$

Esta propriedade também pode ser considerada como um corolário do Teorema 5.3.1. De fato, com as condições da definição de poliedro convexo todo poliedro regular é de Platão. Logo, tal poliedro tem as características de acordo com a Tabela 1, ou seja, existem apenas cinco tipos de poliedros. Levando-se em conta a condição que as faces são polígonos congruentes, em cada tipo, há apenas um poliedro, a menos da medida dos lados.

Os poliedros regulares são nomeados de acordo com a tabela 1 acrescentando-se a palavra regular na terminação, sendo que no caso específico do hexaedro regular, também é chamado de cubo.

No sexto capítulo são propostas atividades baseadas na teoria de Van Hiele com o auxílio de origami, de forma que o aluno faça a conjectura dada pelo corolário, sem que o professor apresente a mesma diretamente. Desta forma o aluno passa de ser passivo do recebimento de informações a ser ativo na construção de seu conhecimento. Contudo o professor não deixa de ter sua importância, uma vez que dependerá da boa organização das atividades propostas por ele e de sua correta atuação durante o desenvolvimento das atividades para o sucesso da aprendizagem. Ressalta-se que as demonstrações apresentadas neste capítulo podem ser exploradas para a validação dos resultados informais, obtidos pelos alunos, após a execução das atividades propostas no sexto capítulo, respeitando sempre o nível de Van Hiele que este se encontra (no caso, apenas para alunos do nível 3 – dedução).

Reunindo as informações apresentadas até o momento pode-se agrupar os poliedros da seguinte forma (Figura 29):



Figura 29: Diagrama para a classificação de poliedros.

6 UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES

“A sabedoria não se transmite, é preciso que nós a descubramos fazendo uma caminhada que ninguém pode fazer em nosso lugar (...).”

Marcel Proust in *À Procura do Tempo Perdido*

6.1 ATIVIDADES DE SONDAÇÃO PARA APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES

Existem várias abordagens que o professor pode utilizar para introduzir o estudo de poliedros no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O professor pode lançar mão da história da matemática para instigar a curiosidade do aluno através de uma seleção criteriosa de textos matemáticos que abordam o assunto; outra possibilidade é utilizar a metodologia de resolução de problemas para despertar o interesse no aluno, solicitando que o mesmo utilize diversos polígonos para obter um poliedro, seja este regular ou não; ou até mesmo explorar a etimologia da palavra, através de uma simples pesquisa ao dicionário.

Visando a **Fase 1 (interrogação / informação)** da teoria de Van Hiele para aprendizagem dos poliedros regulares, são propostos modelos de atividades previamente concebidas para aferir a compreensão dos alunos sobre determinados conteúdos matemáticos pertinentes a aprendizagem de poliedros convexos. Tais atividades são meros exemplos para que o professor, assim preferindo, elabore testes ou avaliações para situar seus alunos de acordo com o nível de aprendizagem (de 0 a 3) a qual pertencem. De acordo com NASSER e SANT’ANNA (2010) o progresso dos alunos não ocorre num período curto de tempo e, no caso dos testes, tais autores afirmam que o aluno alcançou determinado nível quando acerta pelo menos 60% das questões propostas a ele.

Os níveis de Van Hiele aos quais se refere cada subseção de atividades são, respectivamente, atividade I (nível 0 – visualização ou reconhecimento), atividade II (nível 1 – interrogação / informação), atividade III (nível 2 – dedução informal ou abstração) e atividade IV (nível 3 – dedução). Os pré-requisitos a serem analisados previamente compreendem em:

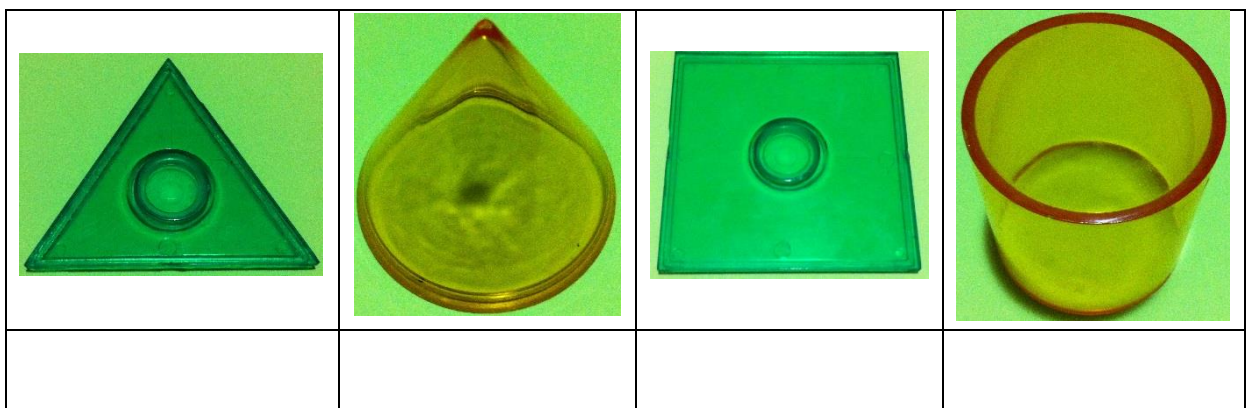
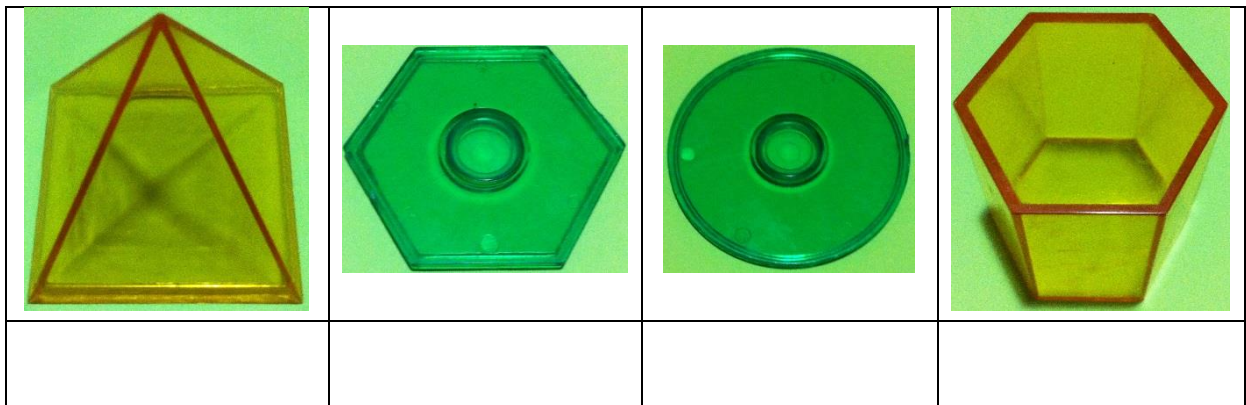
- 1) distinguir figuras planas e espaciais;
- 2) reconhecer determinadas propriedades dos polígonos;
- 3) diferenciar polígonos regulares e polígonos irregulares;

- 4) determinar o valor de cada ângulo interno de um polígono regular.

6.1.1 Atividades de reconhecimento entre figuras planas e espaciais

Tais atividades tem o propósito de verificar se o aluno possui uma visão tridimensional das figuras apresentadas a ele, se o mesmo pode relacionar representações bidimensionais à sua respectiva forma espacial, conhecer a nomenclatura das figuras geométricas mais comuns e diferenciar corretamente a definição de figuras planas e espaciais.

- I) (Nível 0) Após a manipulação das figuras a seguir, classifique-as em PLANAS ou ESPACIAIS:



- II) (Nível 1) Complete os espaços abaixo corretamente com as palavras PLANA ou ESPACIAL de acordo com a figura citada:
- Uma circunferência é uma figura _____.
 - O cubo trata-se de uma figura _____.
 - Um exemplo de figura _____ é uma esfera.
 - Outro exemplo de figura _____ é um triângulo.

III) (Nível 2) Agrupe as figuras abaixo em PLANAS ou ESPACIAIS:

CÍRCULO – PIRÂMIDE – PENTÁGONO – PARALELEPÍPEDO – PRISMA – TRIÂNGULO – QUADRADO – CUBO	
PLANAS	ESPACIAIS

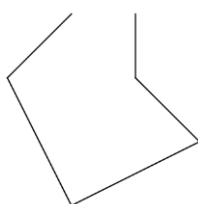
IV) (Nível 3) Classifique corretamente as afirmações abaixo em Verdadeiras (V) ou Falsas (F);

- a) () Caso todos os pontos de uma figura pertençam a um mesmo plano então esta figura é considerada plana.
- b) () Se um ponto de uma figura pertence a um plano diferente dos demais então esta figura é considerada espacial.
- c) () Uma figura é plana quando estiver totalmente contida num único plano.
- d) () Chama-se figura espacial aquela que contém pontos em mais de um plano.

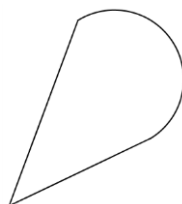
6.1.2 Atividades de reconhecimento de propriedades dos polígonos

As atividades desta subseção têm como objetivo verificar se os alunos possuem bem definido o conceito de polígono, assim como verificar propriedades como o número mínimo de lados necessário para se obter um polígono, realizar a triangularização de polígonos a partir de um único vértice e conceituar empiricamente a soma de ângulos internos de um polígono.

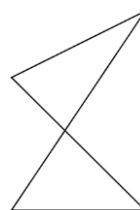
I) (Nível 0) Nas figuras abaixo, identifique aquelas que podem ser consideradas como POLÍGONOS marcando um X:



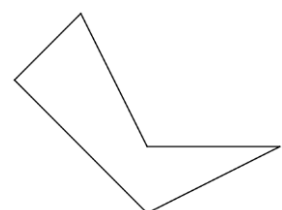
()



()



()

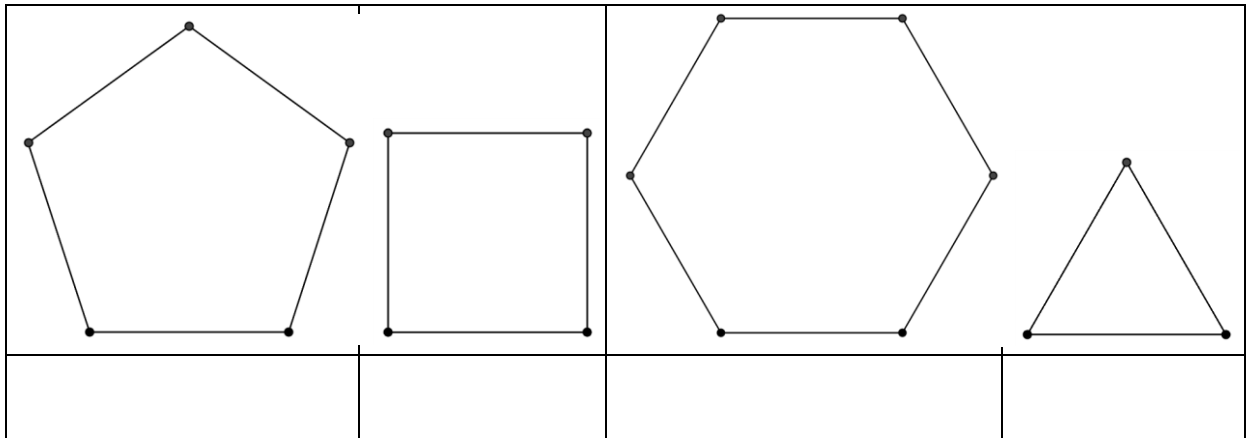


()

II) (Nível 1) Assinale a alternativa INCORRETA marcando um X:

- a) Um polígono é formado apenas por segmentos de retas.
- b) Todo polígono é uma figura plana fechada.
- c) O número mínimo de lados de um polígono é três.
- d) Existe um polígono com dois lados.

III) (Nível 2) Divida corretamente os polígonos abaixo em triângulos, a partir de um único vértice e, em seguida, escreva a quantidade de triângulos obtidos.



IV) (Nível 3) De acordo com o resultado da atividade anterior, responda corretamente cada item a seguir:

a) qual a soma dos ângulos internos de um triângulo?

b) qual a soma dos ângulos internos de um quadrilátero?

c) qual a soma dos ângulos internos de um pentágono?

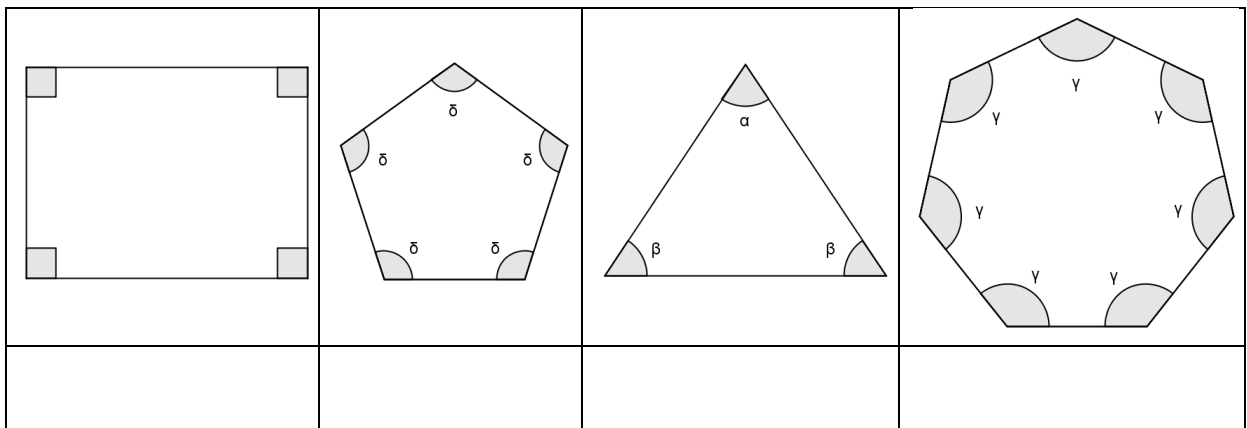
d) quantos triângulos se pode obter, a partir de um único vértice, num polígono de n lados?

e) escreva uma expressão que determine a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados.

6.1.3 Atividades de diferenciação entre polígonos regulares e polígonos irregulares

Nesta subseção, as atividades propostas têm como intuito verificar se o aluno compreende a definição de polígono regular, diferencia um polígono regular de outro irregular, conhece as propriedades de tais figuras, assim como determinar condições de suficiência para que um polígono possa ser classificado como regular.

- l) (Nível 0) Nos polígonos abaixo identifique aqueles que são POLÍGONOS REGULARES daqueles que são POLÍGONOS IRREGULARES:

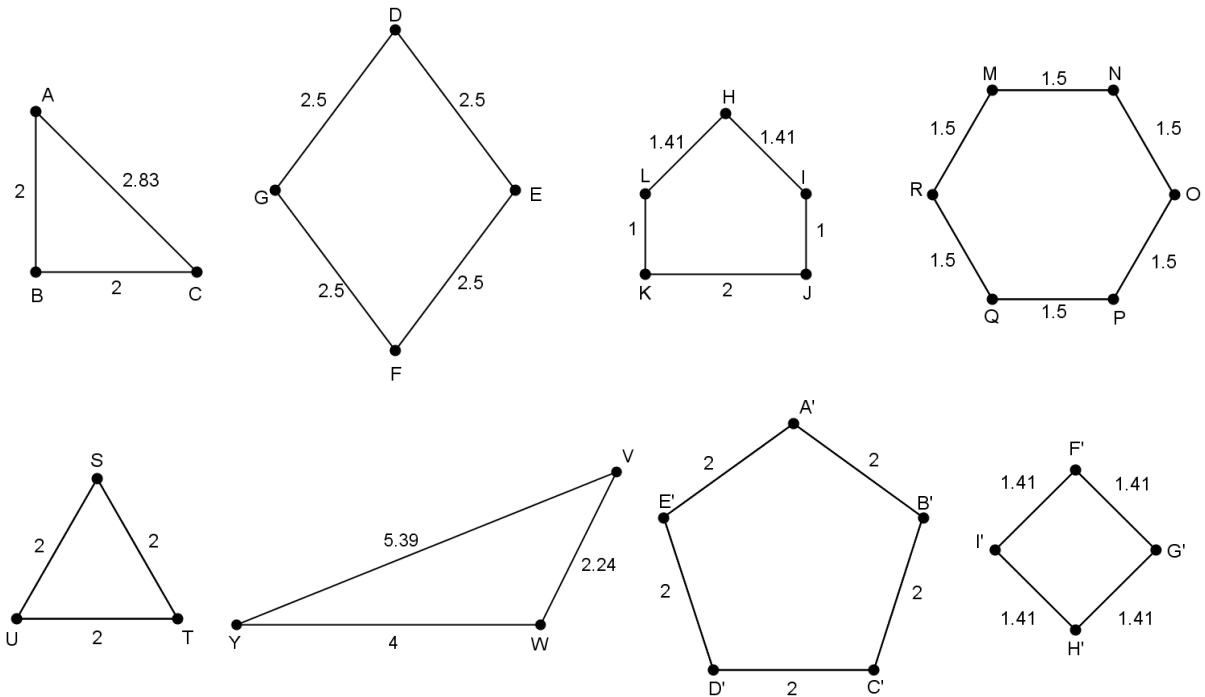


- l) (Nível 1) Complete corretamente as lacunas abaixo com as palavras do retângulo:

CONGRUENTES – REGULAR – ÂNGULOS – LADOS

- a) Nos polígonos regulares todos os _____ e os ângulos são congruentes.
- b) Se um polígono possui todos os _____ e os lados congruentes então ele é regular.
- c) Caso um polígono possua todos os ângulos e os lados _____ então ele é regular.
- d) Para um polígono ser considerado _____ seus lados e seus ângulos devem ser congruentes.

III) (Nível 2) Agrupe corretamente os polígonos a seguir em POLÍGONOS REGULARES ou POLÍGONOS IRREGULARES:



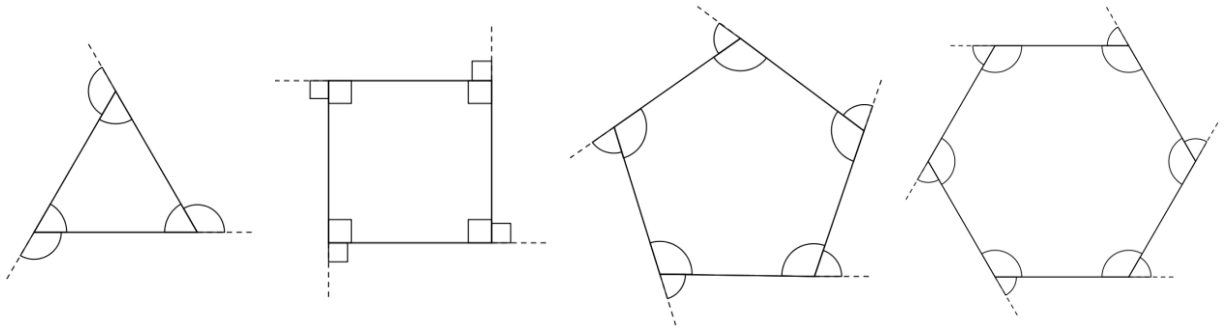
POLÍGONOS REGULARES				
POLÍGONOS IRREGULARES				

- IV) (Nível 3) Classifique as afirmações abaixo em Verdadeiras (V) ou Falsas (F):
- a) Todo polígono equiângulo é equilátero. ()
 - b) Se um polígono é equilátero então ele é equiângulo. ()
 - c) Os polígonos regulares são equiláteros e equiângulos. ()
 - d) Para ser um polígono regular é condição suficiente ser equiângulo. ()

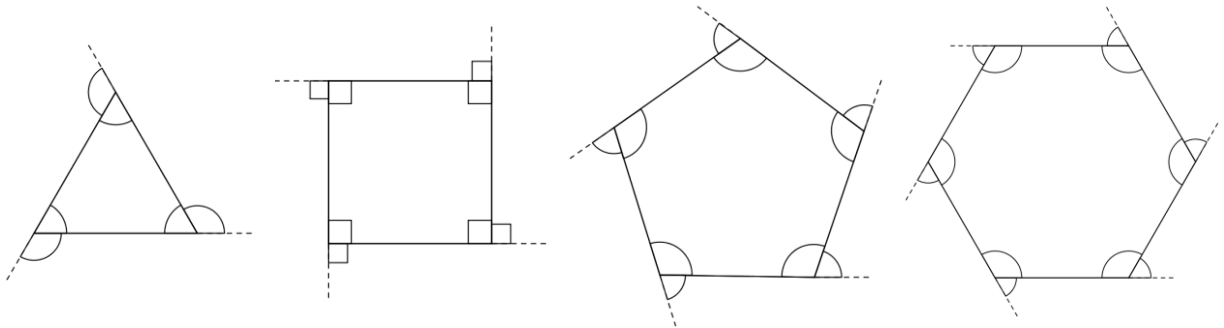
6.1.4 Atividades sobre ângulos internos de polígonos regulares

As atividades propostas nesta subseção têm como propósito verificar se os alunos identificam os ângulos internos e externos de polígonos regulares, assim como verificar propriedades importantes, como o caso destes serem suplementares quando adjacentes num mesmo vértice, além da correta determinação do valor de cada um dos ângulos em tais polígonos.

- I) (Nível 0) Nos polígonos abaixo pinte os ângulos internos de AZUL e os ângulos externos de VERMELHO:



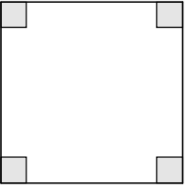
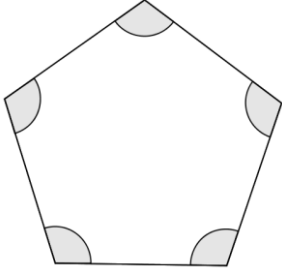
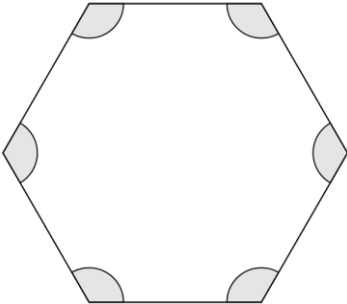
- II) (Nível 1) Utilizando uma única cor destaque cada ângulo interno e o ângulo externo adjacente ao mesmo nos polígonos a seguir.



- III) (Nível 2) Analisando cada ângulo interno e seu ângulo externo adjacente na atividade anterior a qual conclusão você pode chegar? Dê uma propriedade matemática que relaciona esses ângulos.

- IV) (Nível 3) De acordo com a atividade 6.1.2.IV, calcule corretamente o valor de cada ângulo interno dos polígonos regulares abaixo.

<p>TRIANGULO EQUILÁTERO</p>		<p>Soma dos ângulos internos</p>	<p>Cálculo de cada ângulo interno</p>
---------------------------------	--	--------------------------------------	---

QUADRADO		<i>Soma dos ângulos internos</i>	<i>Cálculo de cada ângulo interno</i>
PENTÁGONO		<i>Soma dos ângulos internos</i>	<i>Cálculo de cada ângulo interno</i>
HEXÁGONO		<i>Soma dos ângulos internos</i>	<i>Cálculo de cada ângulo interno</i>

Após a aplicação das atividades de sondagem o professor deve corrigir as mesmas observando atentamente a qual nível de aprendizagem cada aluno se encontra. Desta forma o professor pode fazer as intervenções necessárias para que o aluno progrida para o nível subsequente, de acordo com as dúvidas que forem surgindo em cada atividade.

6.2 ATIVIDADES UTILIZANDO ORIGAMI PARA APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES

Nesta seção são abordadas as técnicas necessárias para a confecção dos módulos individuais dos origamis que servirão como faces dos poliedros regulares, sempre respeitando as sugestões propostas no terceiro capítulo para obter um melhor aproveitamento dos alunos. As construções apresentadas foram adaptadas de RÊGO (2003) e IMENES (1988). Os interessados, em particular o professor, podem acessar os endereços indicados para terem acesso a vídeos explicativos sobre cada construção. É interessante que o professor tenha clareza de cada construção antes de efetuar as mesmas perante os alunos, para que ele possa questioná-los de forma adequada e contribua ainda mais com o aprendizado dos

mesmos podendo, inclusive, explorar os Axiomas de Huzita para alunos que situem-se no nível 3 (dedução formal) da teoria de Van Hiele, conforme indica a seção 4.2 item iv).

6.2.1 Confeção do módulo quadrangular

Com um papel em formato quadrangular, sugere-se 15 cm de lado, efetue os seguintes passos:

- 1) Dobre o papel ao meio fazendo um vinco (Axioma 3.4.2) que una os pontos médios de dois lados opostos (Figura 30a);

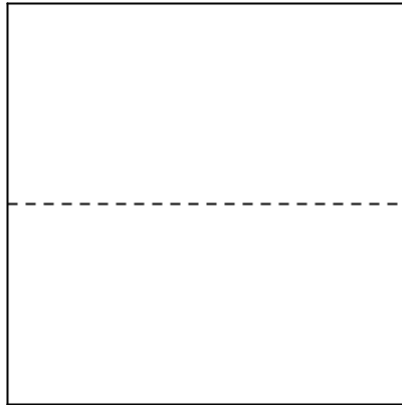


Figura 30a: Passo 1 da construção do módulo quadrangular.

- 2) Dobre o papel de forma com que um dos lados do quadrado fique sobre o vinco obtido (Figura 30b). Note que as dobras representam retas paralelas à dobra inicial;

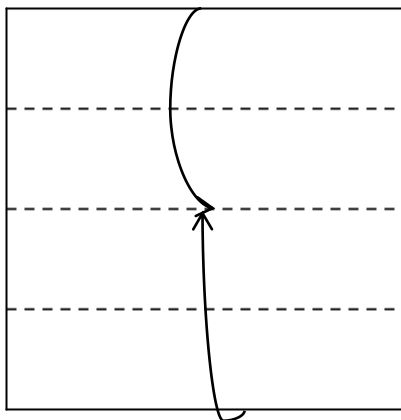


Figura 30b: Passo 2 da construção do módulo quadrangular.

- 3) Coloque um vértice do retângulo por dentro da fenda obtida até que o vértice toque a dobra interna; repita o procedimento com o outro vértice (não adjacente) do lado oposto (Figura 30c);

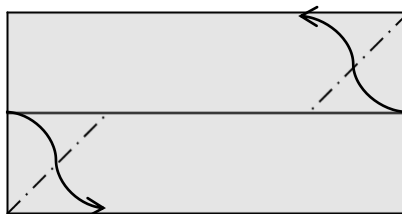


Figura 30c: Passo 3 da construção do módulo quadrangular.

- 4) Vire as abas obtidas no sentido contrário para travar o módulo quadrangular (Figura 30d).

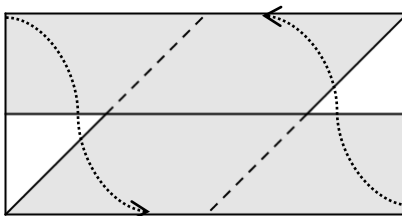


Figura 30d: Passo 4 da construção do módulo quadrangular.

A figura 30e mostra a aparência final do módulo quadrangular. Note que a figura obtida trata-se de um paralelogramo que ao ser dobrado nas linhas tracejadas decompõe-se num quadrado e dois triângulos retângulos.

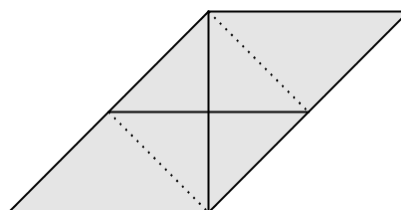


Figura 30e: Módulo quadrangular.

Os módulos quadrangulares não necessitam de peças-encaixe, possuindo fendas para encaixe entre si como mostra a figura 30f. Contudo o encaixe ocorre apenas entre módulos iguais, não havendo encaixe de módulos simétricos.

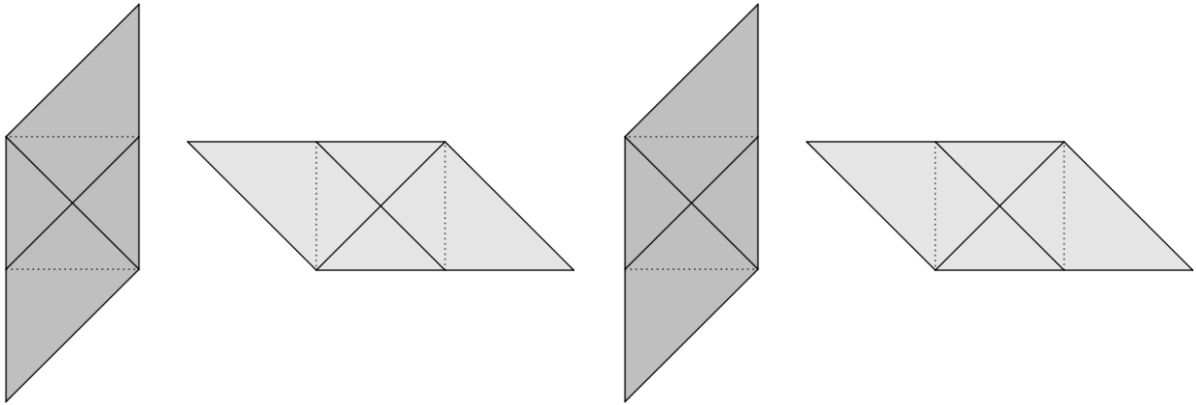


Figura 30f: Encaixe dos módulos quadrangulares.

Para acompanhar a confecção do módulo quadrangular acesse <http://migre.me/cRUia>.

6.2.2 Confecção do triângulo equilátero

Com um papel em formato quadrangular com 15 cm de lado efetue os seguintes passos:

- 1) Dobre o papel ao meio fazendo um vinco (Axioma 3.4.2). Observe que a mediatriz une os pontos médios de dois lados opostos (Figura 31a);

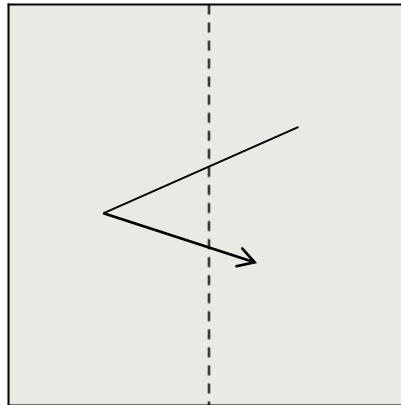


Figura 31a: Passo 1 da construção do triângulo equilátero.

- 2) Leve um dos vértices do quadrado até a mediatriz marcando um ponto com o auxílio de um lápis (Figura 31b). Observe que este ponto é único pois o lado do quadrado deve estar alinhado com o outro vértice do quadrado adjacente ao vértice escolhido (Axioma 3.4.2);

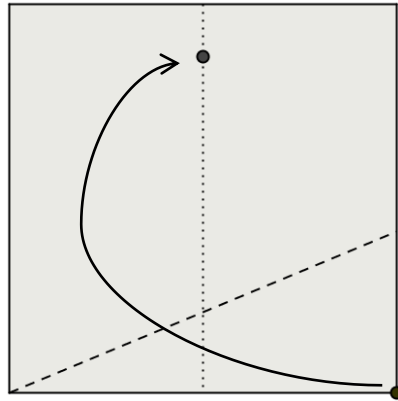


Figura 31b: Passo 2 da construção do triângulo equilátero.

- 3) Note que a dobra efetuada condiz à bissetriz formada pelo ponto marcado com o lápis, o vértice do quadrado adjacente ao vértice escolhido inicialmente e o próprio vértice (Figura 31c), faça a dobra sobre a bissetriz determinando um dos lados do triângulo solicitado;

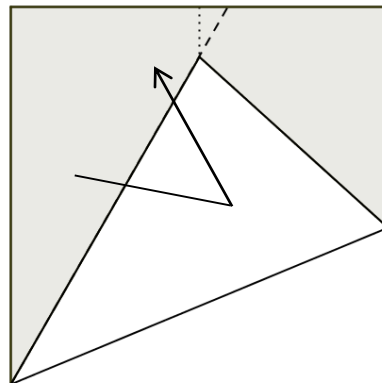


Figura 31c: Passo 3 da construção do triângulo equilátero.

- 4) Repita o procedimento para o outro vértice (adjacente ao primeiro escolhido) para determinar o outro lado do triângulo equilátero (Figura 31d).

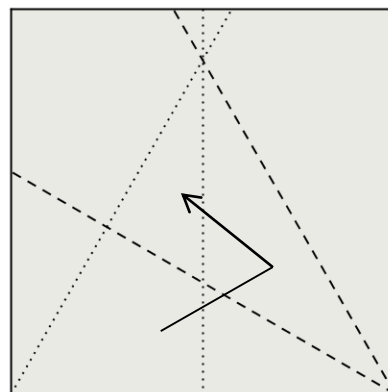


Figura 31d: Passo 4 da construção do triângulo equilátero.

O triângulo obtido com a construção é equilátero. De fato, executando o passo 2, obtêm-se um ponto P sobre a mediatriz relativa ao lado CD do quadrado $ABCD$ (Figura 31e). Tal ponto possui em relação ao vértice C distância igual à medida do lado do quadrado, isto é, $\overline{PC} = \overline{CD}$. Como o ponto E é ponto médio do lado CD , tem-se que $\overline{CE} = \overline{ED}$. Logo, os triângulos CEP e DEP são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado), pois o segmento PE é perpendicular ao lado CD . Ainda, a distância do ponto P ao ponto D é igual à distância do ponto P ao ponto C com $\overline{PD} = \overline{PC} = \overline{CD}$

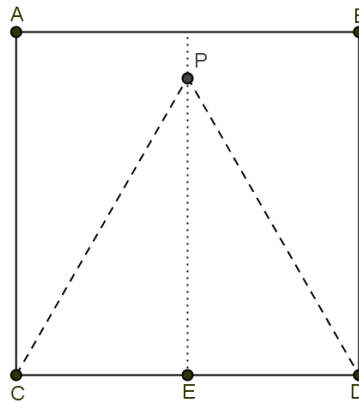


Figura 31e: Triângulo equilátero.

6.2.3 Confeção do módulo triangular

A confecção do módulo triangular baseia-se na construção de um triângulo equilátero. Desta forma, após obter um triângulo equilátero de acordo com as instruções anteriores execute os seguintes passos:

- 1) Dobrando os lados do quadrado para obter o triângulo equilátero obtém-se uma configuração conforme mostra a figura 32a; a seguir una o vértice oposto à base do triângulo observado até o pé da mediatriz;

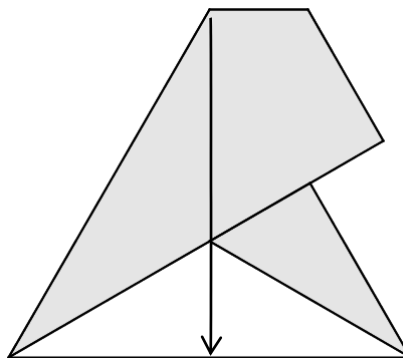


Figura 32a: Passo 1 da construção do módulo triangular.

- 2) Observe que surgirão três triângulos equiláteros menores; vire o papel ao contrário e dobre tais triângulos um sobre o outro (Figura 32b);

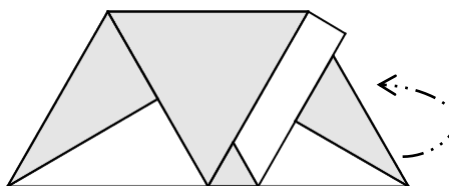


Figura 32b: Passo 2 da construção do módulo triangular.

- 3) Ainda com o papel virado ao contrário guarde um dos triângulos obtidos inserindo-o dentro do outro (Figura 32c);

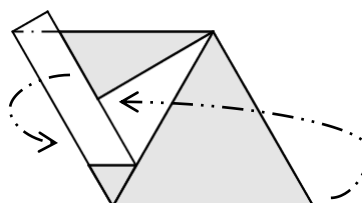


Figura 32c: Passo 3 da construção do módulo triangular.

- 4) Vire o papel novamente para obter o módulo triangular com três “bolsos” para encaixes (Figura 32d).

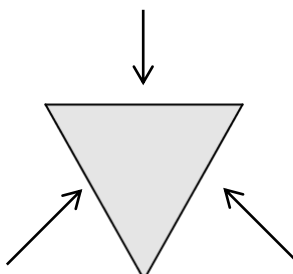


Figura 32d: Módulo triangular.

Diferente do módulo quadrangular (que possui encaixes próprios) é necessário para a utilização dos módulos triangulares a confecção dos módulos-encaixe. Para acompanhar a confecção do módulo triangular acesse <http://migre.me/cRVOe>.

6.2.4 Confecção do módulo-encaixe

Para a confecção do módulo-encaixe é necessário utilizar um papel com $1/4$ da área do papel utilizado no módulo triangular. Segue-se os passos:

- 1) Corte o papel original (15 X 15 cm) em quatro quadrados iguais (figura 33a);

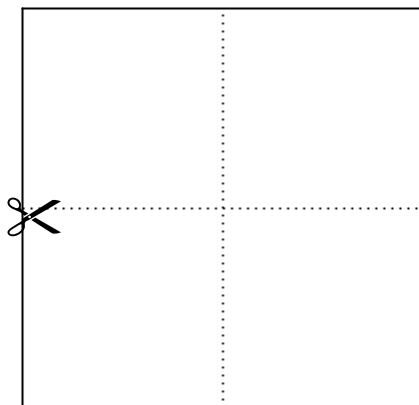


Figura 33a: Passo 1 da construção do módulo-encaixe.

- 2) Dobre um dos pedaços obtidos ao meio fazendo um vinco (mediatriz); repita a operação com os outros lados do quadrado; em seguida una os vértices no ponto de interseção obtido (figura 33b).

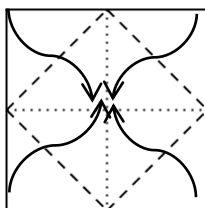


Figura 33b: Passo 2 da construção do módulo-encaixe.

A construção do módulo-encaixe está disponível em <http://migre.me/cRVYD>.

6.2.5 Confecção do módulo pentagonal

Para a confecção do módulo pentagonal não é necessário a utilização de uma folha de papel no formato quadrangular. Por isso basta utilizar uma folha de papel retangular (por exemplo, nas dimensões A4) e executar os seguintes passos:

- 1) Dobre o papel ao meio fazendo um vinco (mediatriz) (Axioma 3.4.2) que una os pontos médios de dois lados opostos (figura 34a);

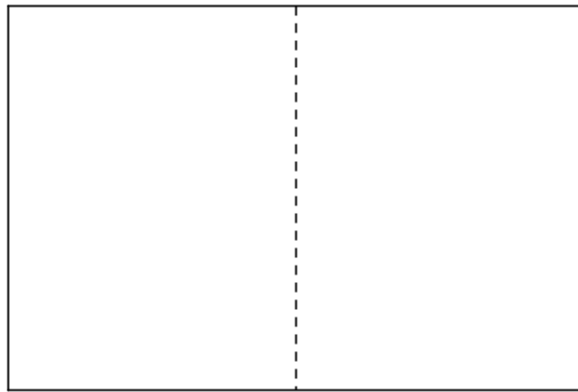


Figura 34a: Passo 1 da construção do módulo pentagonal.

- 2) Dobre o papel novamente ao meio fazendo um outro vinco (mediatriz) (Axioma 3.4.2) agora utilizando os outros dois lados opostos (figura 34b);

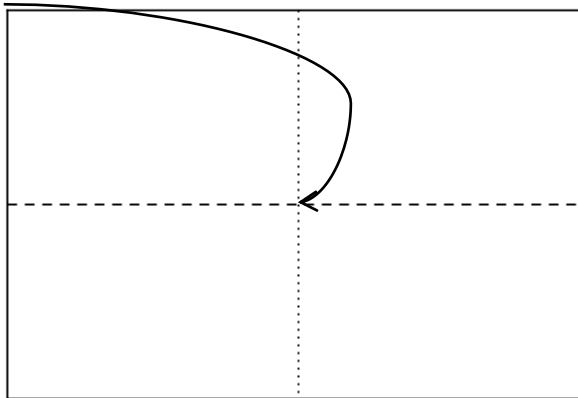


Figura 34b: Passo 2 da construção do módulo pentagonal.

- 3) Una um vértice do retângulo ao ponto de interseção das duas mediatrizes obtidas (figura 34c);

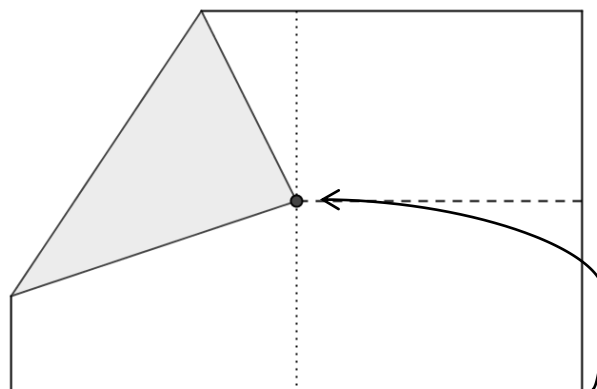


Figura 34c: Passo 3 da construção do módulo pentagonal.

- 4) Una o vértice oposto ao primeiro (não adjacente ao escolhido inicialmente) ao ponto de interseção das mediatrizes (figura 34d);

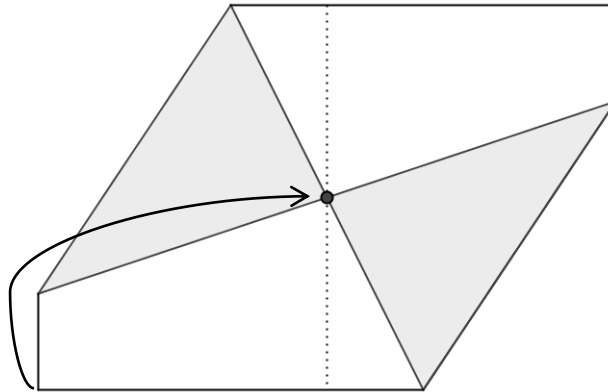


Figura 34d: Passo 4 da construção do módulo pentagonal.

- 5) Una o vértice adjacente ao primeiro escolhido ao ponto de interseção das mediatrizes (figura 34e);

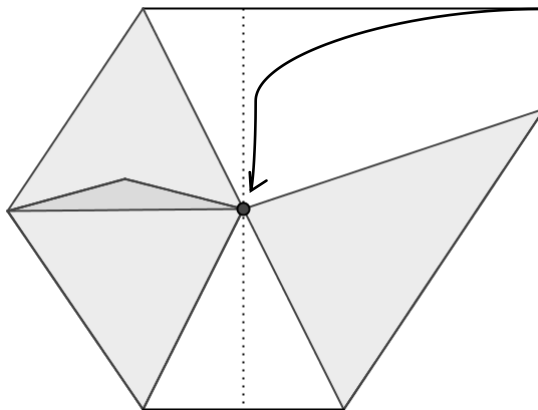


Figura 34e: Passo 5 da construção do módulo pentagonal.

- 6) Una o último vértice ao ponto de interseção das mediatrizes (figura 34f);

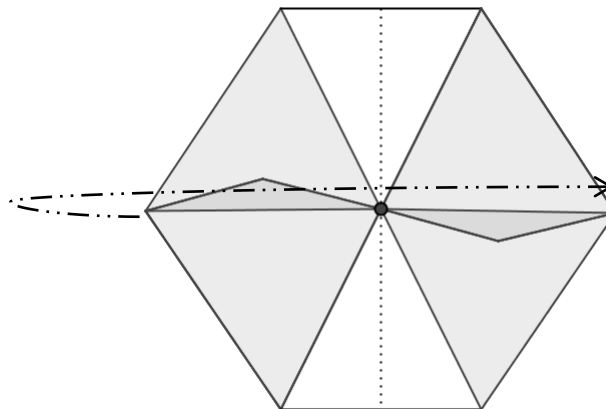


Figura 34f: Passo 6 da construção do módulo pentagonal.

- 7) Dobre a figura obtida ao meio através do primeiro vinco efetuado (figura 34g);

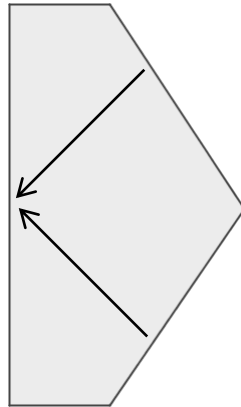


Figura 34g: Passo 7 da construção do módulo pentagonal.

- 8) Traga um dos lados (maior) do pentágono obtido junto ao vinco inicial (figura 34h), destacando o segmento maior encontrado com o auxílio de um lápis;

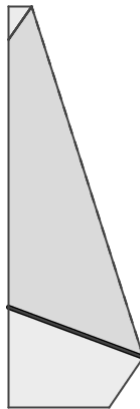


Figura 34h: Passo 8 da construção do módulo pentagonal.

- 9) Desdobre o papel e repita a operação agora usando o outro lado (maior) junto ao vinco inicial (figura 34i), destaque o segmento maior encontrado;

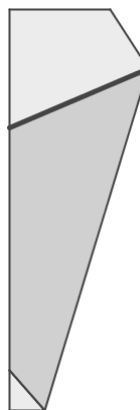


Figura 34i: Passo 9 da construção do módulo pentagonal.

- 10) Desdobre o papel e verifique o pentágono encontrado, assim como os encaixes e os “bolsos” obtidos (Figura 34j).

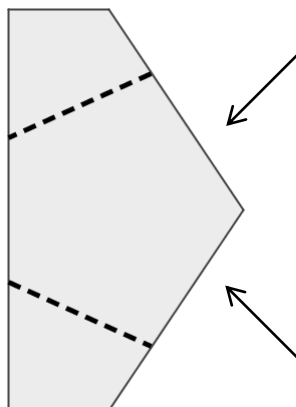


Figura 34j: Passo 10 da construção do módulo pentagonal.

A construção do módulo pentagonal está disponível em <http://migre.me/cRW75>.

6.3 ATIVIDADES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE POLIEDROS REGULARES

Esta seção inicia-se com orientações que o professor deve desenvolver na **Fase 2 (orientação dirigida)** da teoria de Van Hiele para aprendizagem de conceitos geométricos referente ao estudo de poliedros regulares. Pretende-se que tais atividades quando efetuadas com atenção e precisão gerem um conhecimento pertinente ao aluno sobre tais poliedros sendo, para isto, indicadas a alunos que se situem no nível 2 (dedução informal) de Van Hiele. Após a execução das atividades das seções 6.3.1 e 6.3.2, sugere-se que o professor inicie a **Fase 3 (explicação)** socializando na lousa os resultados obtidos pelos alunos. A atividade proposta na seção 6.3.3 enfatiza o caráter da **Fase 4 (orientação livre)** estando intrinsecamente associada ao objetivo maior do trabalho que é induzir o aluno a concluir a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares. Feitas as conclusões pelos alunos o professor finaliza a **Fase 5 (integração)** sistematizando os resultados obtidos e redigindo junto aos alunos o novo conhecimento advindo. Caso seja detectado que os alunos se encontrem no nível 3 (dedução) sugere-se a apresentação das demonstrações apresentadas nas seções 5.3 (existem apenas cinco tipos de poliedros de Platão) e 5.4 (existem cinco poliedros regulares a menos da medida das arestas).

6.3.1 Explorando ângulos poliédricos utilizando polígonos regulares diversos

Proposta inicialmente por MACHADO (2000) esta atividade foi adaptada, revista e ampliada com o objetivo de propiciar ao aluno a noção de ângulo poliédrico através da manipulação de polígonos regulares com diferentes números de lados.

- I) Para realizar esta atividade confeccione previamente a seguinte quantidade de polígonos regulares utilizando os moldes do anexo A: 9 triângulos equiláteros, 10 quadrados, 4 pentágonos regulares, 6 hexágonos regulares, 1 heptágono;
- II) Calcule corretamente o valor da soma dos ângulos de cada polígono confeccionado registrando em seu caderno;
- III) Calcule corretamente o valor de cada ângulo interno dos polígonos confeccionados e indique no próprio polígono tais valores

Nesta atividade espera-se obter dos alunos os resultados de acordo com a figura 35.

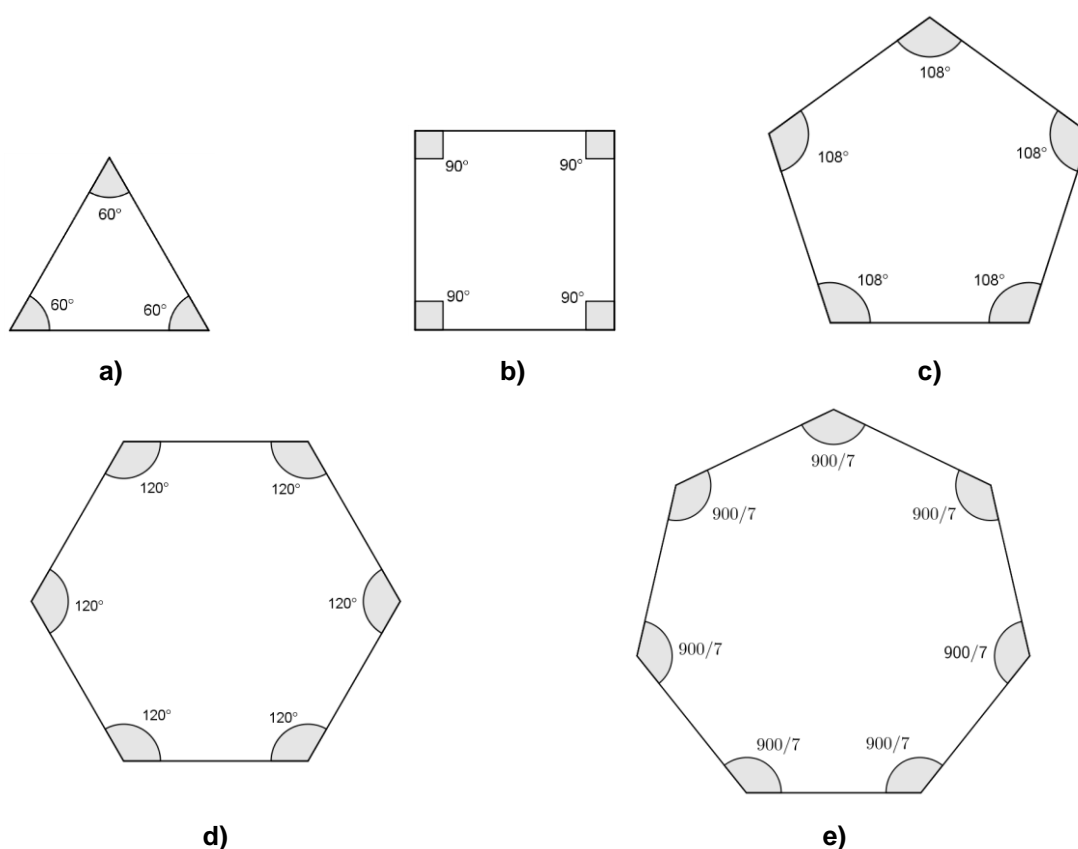
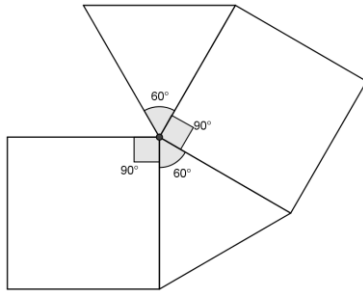


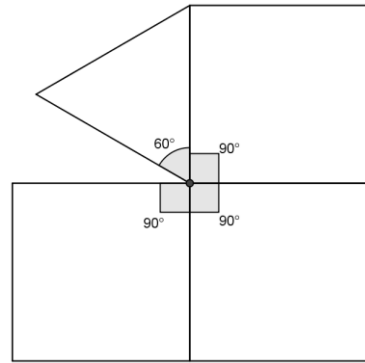
Figura 35: Resultado esperado do cálculo realizado pelos alunos.

IV) Reúna ao redor de um ponto os polígonos em cada situação a seguir unindo seus lados com fita adesiva:

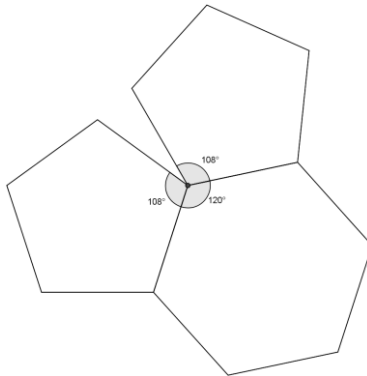
- a) dois triângulos equiláteros e dois quadrados (Figura 36a);
- b) um triângulo equilátero e três quadrados (Figura 36b);
- c) dois pentágonos regulares e um hexágono regular (Figura 36c);
- d) um pentágono regular e dois hexágonos regulares (Figura 36d);
- e) um quadrado, um pentágono regular e um heptágono regular (Figura 36e);
- f) dois quadrados e três triângulos equiláteros (Figura 36f);
- g) um triângulo equilátero, dois quadrados e um hexágono regular (Figura 36g);
- h) dois triângulos equiláteros e dois hexágonos regulares (Figura 36h).



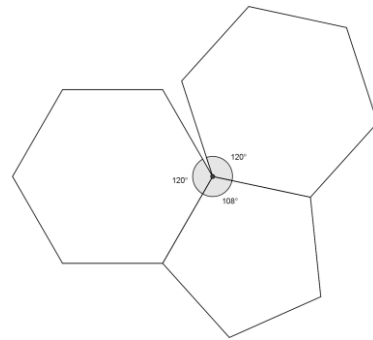
a)



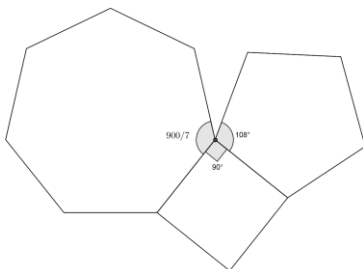
b)



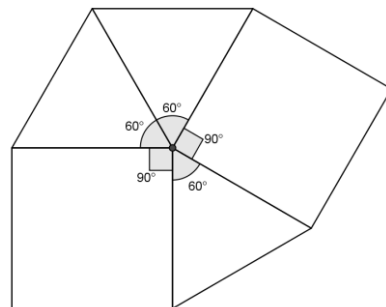
c)



d)



e)



f)

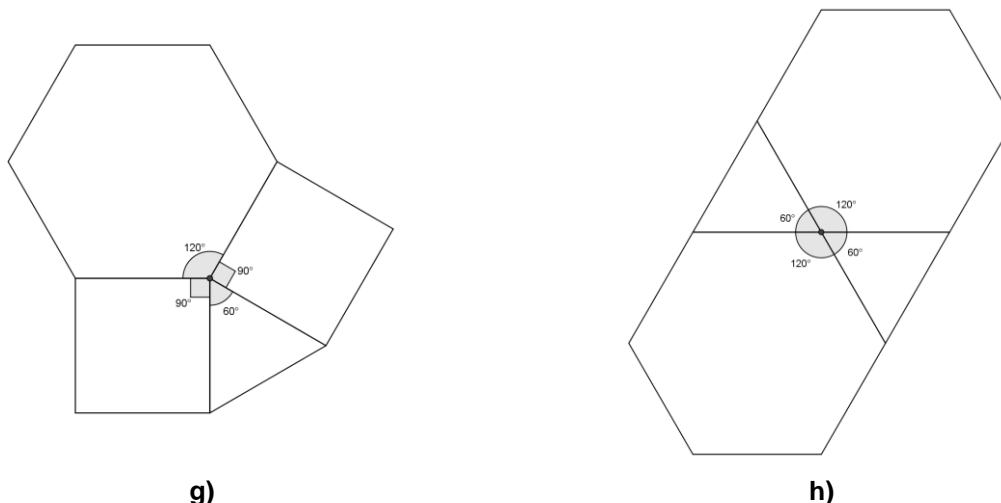


Figura 36: Construções esperadas pelos alunos usando polígonos diversos.

V) Quais dessas situações formam ângulos poliédricos? Por quê?

Com esta atividade espera-se que os alunos concluam que a soma dos ângulos internos ao redor do ponto escolhido deve ser sempre inferior a 360° para formar o ângulo poliédrico pois, caso contrário, os polígonos estariam contidos num mesmo plano. Nos casos possíveis, o ponto escolhido é o vértice do ângulo poliédrico.

6.3.2 Explorando ângulos poliédricos utilizando polígonos regulares do mesmo tipo

Inicialmente proposta por MACHADO (2000) esta atividade foi adaptada, revista e ampliada com o intuito de propiciar ao aluno a verificação das possibilidades de obtenção de ângulos poliédricos através da utilização de polígonos regulares do mesmo tipo.

- I) Para realizar esta atividade confeccione previamente a seguinte quantidade de polígonos regulares utilizando os moldes do anexo A: 13 triângulos equiláteros, 4 quadrados, 4 pentágonos regulares, 4 hexágonos regulares;
- II) Marque o valor de cada ângulo interno em cada polígono;
- III) Utilizando apenas triângulos equiláteros reúna ao redor de um único ponto os polígonos unindo seus lados com o auxílio de fita adesiva (lembre-se que o número mínimo de arestas coincidentes num ângulo poliédrico é três).

Espera-se que neste passo os alunos apresentem as construções expostas na figura 37.

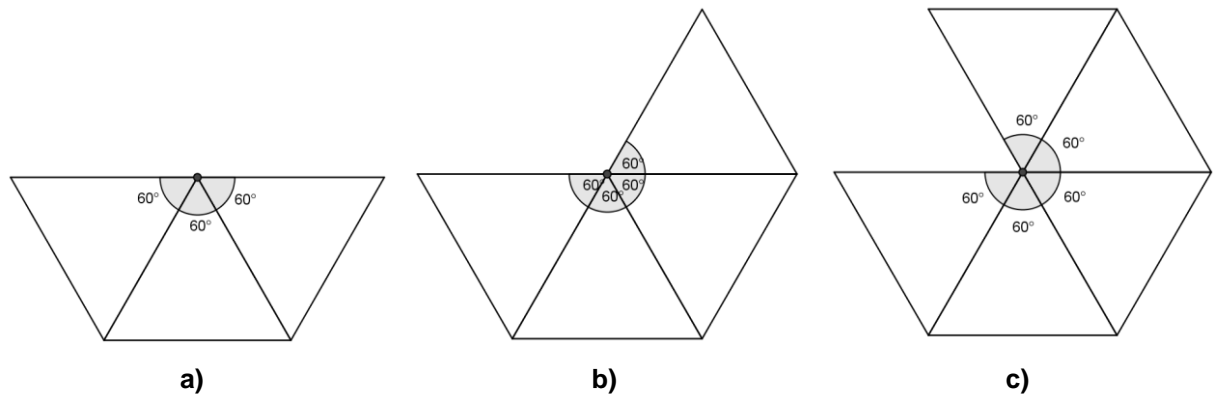


Figura 37: Construções esperadas pelos alunos usando triângulos.

- IV) Redija em seu caderno quantos tipos de ângulos poliédricos você conseguiu obter mostrando quantos triângulos foram utilizados em cada situação;
- V) Justifique matematicamente em seu caderno se você conseguiria construir um ângulo poliédrico utilizando seis triângulos equiláteros.

Espera-se que o aluno conclua que isto não é possível pois a soma dos ângulos internos ao redor do vértice escolhido seria igual a 360° , implicando que todos estivessem contidos num mesmo plano e impossibilitando a formação do ângulo poliédrico.

- VI) Agora utilizando apenas quadrados, reúna os mesmos ao redor de um único ponto unindo seus lados com fita adesiva e tentando formar um ângulo poliédrico.

Espera-se que neste passo os alunos apresentem a construção exposta na figura 38.

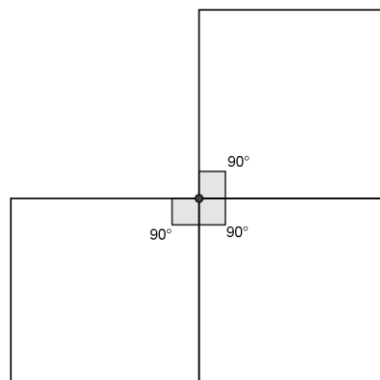


Figura 38: Construção esperada pelos alunos usando quadrados.

- VII) Redija em seu caderno quantos tipos de ângulos poliédricos você conseguiu obter mostrando quantos quadrados foram utilizados em cada um;

- VIII) Justifique matematicamente em seu caderno se você conseguiria construir um ângulo poliédrico utilizando quatro quadrados.

Espera-se que o aluno conclua que isto não é possível pois a soma dos ângulos internos ao redor do vértice escolhido seria igual a 360° , implicando que todos estivessem contidos num mesmo plano e impossibilitando a formação do ângulo poliédrico.

- IX) Utilizando apenas pentágonos regulares, reúna os mesmos ao redor de um único ponto unindo seus lados com fita adesiva e tentando formar um ângulo poliédrico.

Espera-se que neste passo os alunos apresentem a construção exposta na figura 39.

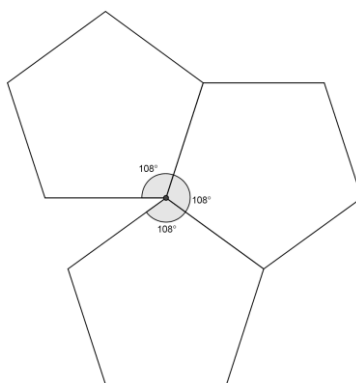


Figura 39: Construção esperada pelos alunos usando pentágonos.

- X) Redija em seu caderno quantos tipos de ângulos poliédricos você conseguiu obter mostrando quantos pentágonos foram utilizados em cada um;
- XI) Justifique matematicamente em seu caderno se você conseguiria construir um ângulo poliédrico utilizando quatro pentágonos

Espera-se que o aluno conclua que isto não é possível pois a soma dos ângulos internos ao redor do vértice escolhido seria maior que 360° , impossibilitando a formação do ângulo poliédrico.

- XII) Utilizando apenas hexágonos, reúna os mesmos ao redor de um único vértice unindo seus lados com fita adesiva e tentando formar um ângulo poliédrico. Você conseguiu formar algum ângulo poliédrico? Em caso negativo justifique matematicamente o porquê desta impossibilidade.

Espera-se que o aluno conclua que isto não é possível pois a soma dos ângulos internos ao redor do vértice escolhido utilizando no mínimo três hexágonos seria igual a 360° , implicando que todos estivessem contidos num mesmo plano e impossibilitando a formação do ângulo poliédrico.

XIII) De acordo com seus resultados anteriores, você acha que conseguiria formar um ângulo poliédrico utilizando heptágonos regulares, octógonos regulares, eneágonos regulares e assim sucessivamente? Quais tipos de ângulos poliédricos pode-se obter utilizando polígonos regulares de mesmo tipo?

Espera-se que o aluno conclua que as únicas configurações possíveis de ângulos poliédricos utilizando polígonos regulares de mesmo tipo utilizam triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares. Como é necessário no mínimo quatro polígonos para obter um poliedro, a conclusão final esperada pelos alunos é de que deve haver somente poliedros regulares formados exclusivamente por triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares.

6.3.3 Obtendo poliedros através de ângulos poliédricos

Inicialmente proposta por MACHADO (2000) esta atividade foi adaptada, revista e ampliada com o intuito de propiciar ao aluno a obtenção de poliedros através da junção de ângulos poliédricos.

- I) Para realizar esta atividade confeccione previamente a seguinte quantidade de polígonos regulares utilizando os moldes do anexo A: 8 triângulos equiláteros e 6 quadrados;
- II) Confeccione um ângulo poliédrico utilizando 2 quadrados e 2 triângulos equiláteros ao redor de um mesmo vértice, da mesma forma construída anteriormente na seção 6.3.1, item IV, subitem a (Figura 36a);
- III) Repita o padrão ao redor dos outros vértices da figura obtida utilizando todos os polígonos da atividade.
- IV) Conte quantas faces, arestas e vértices possui a figura obtida. Pesquise sobre o nome dado a esta figura.

Espera-se que o aluno obtenha uma figura conforme a mostrada em 40a. A figura obtida é um exemplo de poliedro convexo, chamado cuboctaedro. O cuboctaedro é um poliedro arquimediano pois trata-se de um poliedro convexo formado apenas por polígonos regulares de mais de um tipo, onde todos os ângulos poliédricos são congruentes.

A próxima atividade é uma variação da anterior com o intuito de fixar os conceitos de poliedros formados através da junção de ângulos poliédricos.

- I) Para realizar esta atividade confeccione previamente a seguinte quantidade de polígonos regulares utilizando os moldes do anexo A: 8 triângulos equiláteros e 18 quadrados;
- II) Confeccione um ângulo poliédrico utilizando 3 quadrados e 1 triângulo equilátero ao redor de um mesmo vértice, da mesma forma construída anteriormente na seção 6.3.1, item IV, subitem b (Figura 36b);
- III) Repita o padrão ao redor dos outros vértices da figura obtida utilizando todos os polígonos da atividade.
- IV) Conte quantas faces, arestas e vértices possui a figura obtida. Pesquise sobre o nome dado a esta figura.

Espera-se que o aluno obtenha um rombicuboctaedro conforme mostra a figura 40b, que também é um poliedro arquimediano pois satisfaz tais condições.



a)



b)

Figura 40: Poliedros formados pela junção de ângulos poliédricos.

6.3.4 Descobrimo os poliedros regulares utilizando origami

Caráter principal do trabalho esta atividade encontra-se integrada à Fase 4 (orientação livre) da Teoria de Van Hiele e possui como objetivo principal propiciar ao aluno condições necessárias para que o mesmo conclua que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares utilizando os módulos da seção 6.2. Sugere-se que o professor agrupe a sala em grupos, preferencialmente de no máximo quatro alunos, para facilitar a confecção dos módulos e auxiliar na socialização dos resultados obtidos pelos mesmos.

- I) Para realizar esta atividade confeccione previamente a seguinte quantidade de módulos usando origami: 32 módulos triangulares, 6 módulos quadrangulares, 12 módulos pentagonais e 48 módulos–encaixe;

- II) Utilize módulos do mesmo tipo (e quando necessário os módulos-encaixe) para obter poliedros. Registre em seu caderno o tipo e a quantidade de faces utilizada na confecção de cada poliedro.

De acordo com as atividades desenvolvidas anteriormente espera-se que os alunos obtenham:

- um tetraedro formado por 4 módulos triangulares e 6 módulos encaixe (Figura 41a);
- um hexaedro formado por 6 módulos quadrangulares (Figura 41b);
- um octaedro formado por 8 módulos triangulares e 12 módulos encaixe (Figura 41c);
- um dodecaedro formado por 12 módulos pentagonais (Figura 41d);
- um icosaedro formado por 20 módulos triangulares e 30 módulos encaixe (Figura 41e).



a)



b)



c)



d)



e)

Figura 41: Poliedros regulares.

- Escreva em seu caderno quantas arestas, faces e vértices cada poliedro obtido possui.
- Verifique o número de arestas que concorrem em cada vértice de cada poliedro. O que você percebeu?

Tais construções estão disponíveis em <http://migre.me/cS0bB> (Tetraedro Regular), <http://migre.me/cS0dq> (Hexaedro Regular), <http://migre.me/cS0f9>

(Octaedro Regular), <http://migre.me/cS0gg> (Dodecaedro Regular) e <http://migre.me/cS0hE> (Icosaedro Regular).

6.3.5 Explorando as faces e as arestas dos poliedros regulares utilizando planificações

A atividade proposta a seguir tem como intuito principal levar o aluno a realizar a contagem de elementos dos poliedros como faces e arestas que talvez sejam imperceptíveis a alguns alunos na observação do poliedro em sua forma final. Esta atividade pode inclusive auxiliar no desenvolvimento destes conceitos aos alunos que se situarem em níveis menos avançados da Teoria de Van Hiele e fornecer subsídios posteriores para a utilização de tais contagens em atividades que envolvam a fórmula de Euler:

- I) Para realizar esta atividade utilize como modelo as planificações do anexo B, em papel cartão. Pinte cada aresta do poliedro com caneta hidrocor para realçá-las;
- II) Em cada planificação dobre cada aresta pontilhada e fixe as demais arestas utilizando fita adesiva;
- III) Conte o número de faces e o número de arestas de cada poliedro obtido registrando em seu caderno.

Caso o professor não queira utilizar os moldes anexos o mesmo pode construí-los com seus alunos utilizando régua e compasso ou indica-se a utilização de softwares de geometria dinâmica como o Poly, disponível em www.peda.com/poly/ ou o Geogebra encontrado em www.geogebra.org/cms/pr_BR.

6.4 ATIVIDADES DE FIXAÇÃO PARA O ESTUDO DE POLIEDROS

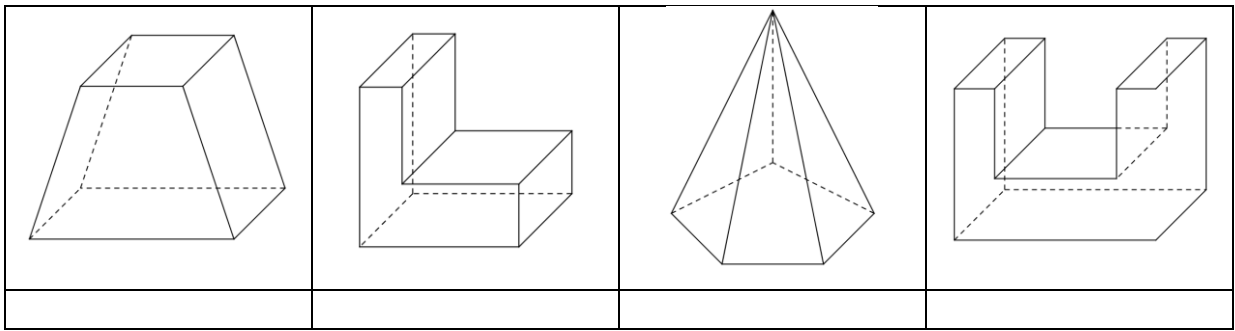
Após as atividades de aprendizagem terem sido aplicadas aos alunos e os mesmos terem concluído sobre a existência de apenas cinco poliedros regulares é dado o momento de reiniciar as fases da teoria de Van Hiele com um novo conceito geométrico. Sugere-se dar continuidade ao trabalho desenvolvendo o Teorema de Euler para poliedros convexos, desde que os alunos em tal momento estejam familiarizados com os elementos dos poliedros e conhecerem as principais

características de cada sólido. Lembra-se que tais atividades se enquadram na Fase 1 (interrogação / informação) da Teoria de Van Hiele.

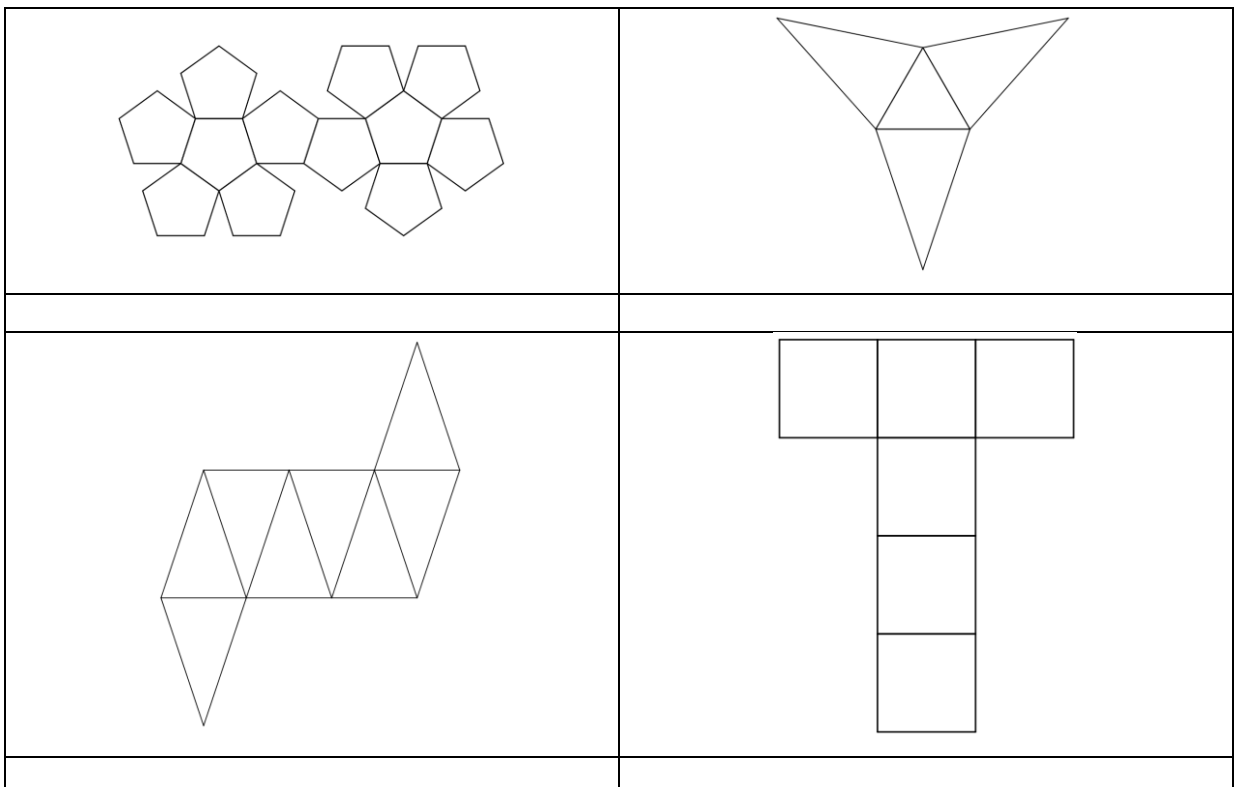
6.4.1 Classificando os tipos de poliedros

As atividades desta seção têm como objetivo fixar os conceitos desenvolvidos anteriormente durante as construções dos ângulos poliédricos e poliedros, além de verificar se os alunos compreenderam corretamente as definições relativas à cada classe de poliedros.

- I) (Nível 0) Identifique as figuras a seguir em POLIEDROS CONVEXOS ou POLIEDROS NÃO CONVEXOS:



- II) (Nível 0) Nas planificações a seguir identifique aquelas que correspondem aos POLIEDROS DE PLATÃO ou aos POLIEDROS REGULARES:



III) (Nível 1) Assinale a(s) alternativa(s) INCORRETA(S):

- a) A pirâmide é um poliedro não convexo.
- b) O cubo não é um poliedro regular.
- c) Todo paralelepípedo é poliedro de Platão.
- d) Um prisma pode ser um poliedro de Platão.

IV) (Nível 2) Associe corretamente as colunas abaixo, sabendo que há apenas um item para cada propriedade da coluna da direita:

(A) Poliedro	formado por polígonos do mesmo tipo cujas arestas são congruentes ()
(B) Poliedro convexo	formado por polígonos do mesmo tipo cujas arestas não são congruentes ()
(C) Poliedro de Platão	formado por uma reunião de polígonos sendo que cada um deles deixa os demais no mesmo semiespaço ()
(D) Poliedro regular	formado por uma reunião de polígonos ()

V) (Nível 2) Um cuboctaedro que é um poliedro formado por seis faces quadradas e oito faces triangulares.

De acordo com esta definição o cuboctaedro pode ser considerado:

um poliedro	um poliedro	um poliedro	um poliedro
convexo	não convexo	de Platão	regular
()	()	()	()

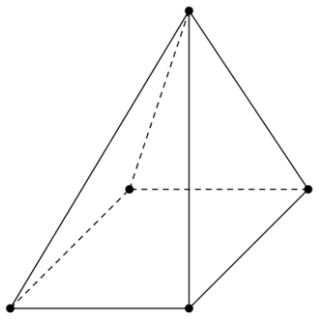
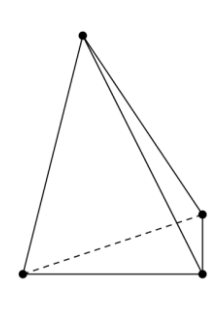
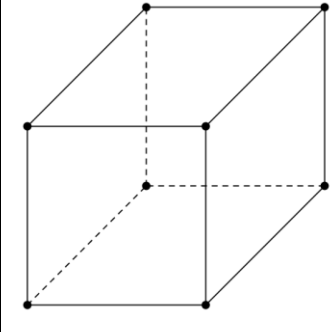
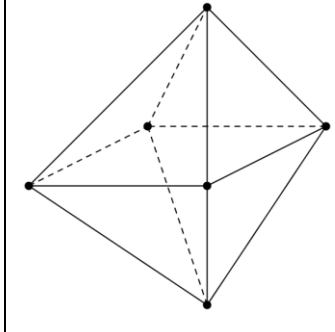
VI) (Nível 3) Classifique corretamente as afirmações abaixo em Verdadeiras (V) ou Falsas (F):

- a) Todo poliedro de Platão é um poliedro regular. ()
- b) Se um poliedro é regular então ele é convexo. ()
- c) Caso um poliedro seja não convexo então ele não é um poliedro de Platão. ()
- d) Existe poliedro de Platão que é não convexo. ()

6.4.2 Verificando a fórmula de Euler

As atividades contidas nesta seção devem-se à exploração de elementos dos poliedros como faces e arestas, objetivo secundário do trabalho que auxiliam na execução de atividades envolvendo a fórmula de Euler.

- I) (Nível 0) Nos poliedros abaixo determine corretamente o número de VÉRTICES, ARESTAS e FACES:

			
VÉRTICES = ARESTAS = FACES =	VÉRTICES = ARESTAS = FACES =	VÉRTICES = ARESTAS = FACES =	VÉRTICES = ARESTAS = FACES =

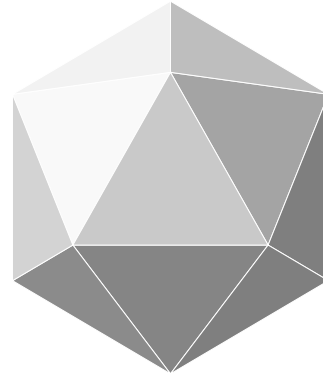
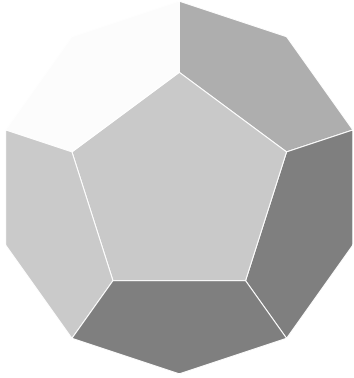
- II) (Nível 1) Sendo V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces dos poliedros do exercício anterior, calcule corretamente a sentença $V - A + F$.

PIRÂMIDE QUADRANGULAR	$V - A + F =$
TETRAEDRO	$V - A + F =$
HEXAEDRO	$V - A + F =$
OCTAEDRO	$V - A + F =$

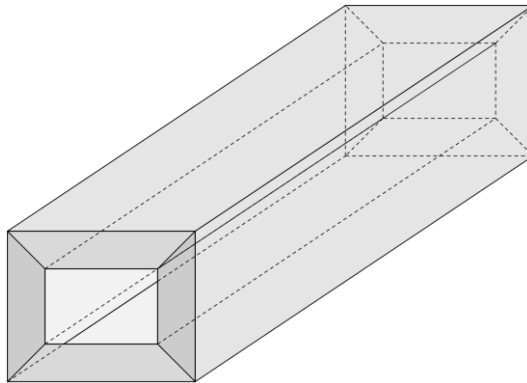
- V) (Nível 2) De acordo com os resultados obtidos no exercício anterior qual conclusão você pode obter em relação à expressão $V - A + F$ nos poliedros estudados ?

IV) (Nível 2) Supondo que a expressão $V - A + F = 2$ seja válida para todos os poliedros convexos, determine:

- a) o número de arestas de um dodecaedro b) o número de vértices de um icosaedro



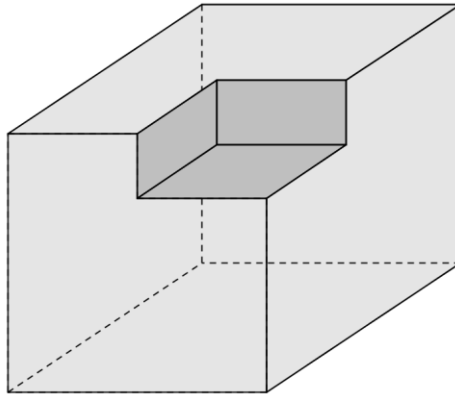
V) (Nível 2) A figura a seguir representa um paralelepípedo de cujo centro foi retirado um outro paralelepípedo:



- a) Determine o número de faces, arestas e vértices desta figura.

- b) A fórmula de Euler é válida para esta figura? Comente o resultado.

- VI) (Nível 2). A figura a seguir representa um cubo onde em um dos vértices foi retirado um paralelepípedo.



- a) Determine o número de faces, arestas e vértices desta figura.

- b) A fórmula de Euler é válida para esta figura? Comente o resultado.

- c) Compare os resultados obtidos em (V) e (VI) e registre a propriedade obtida.

- VII) (Nível 3) Os poliedros para os quais é válida a fórmula de Euler são conhecidos por poliedros eulerianos. Elabore um diagrama relacionando as palavras do retângulo a seguir, de forma que se verifique essa definição e as características obtidas nas atividades anteriores em relação aos poliedros.

POLIEDROS – POLIEDROS REGULARES –
POLIEDROS EULERIANOS – POLIEDROS DE PLATÃO

7 CONCLUSÃO

Particularmente, o embasamento teórico apresentado no trabalho deu ao seu autor propriedade suficiente para distinguir similitudes que outrora a linguagem cotidiana abusa como, por exemplo, diferenciações entre poliedro, poliedro convexo e superfície poliédrica. O trabalho também propiciou ao autor a real fixação das classes de poliedros de uma forma axiomática e, portanto, conclusiva como a Geometria deve ser.

Novas formas de ensinar geometria sempre foram bem vindas. Como a teoria de Van Hiele para aprendizagem de conceitos geométricos tem mostrado bons resultados quando destinada aos conteúdos da Geometria Plana (NASSER & SANT'ANNA, 2010), nada mais natural do que expandir tais melhorias aos conteúdos de Geometria Espacial, mais especificamente, a aprendizagem de poliedros regulares.

Contudo existe a resistência por uma parcela dos professores em modificar o ensino tradicional de aulas calcado em aulas expositivas e onde o professor é o detentor do saber, por aulas mais dinâmicas onde o aluno passa de ser passivo de recebimento de informações a ser ativo de produtor de seu próprio conhecimento. Outro fator agravante é que utilizando a teoria de Van Hiele o professor deve preparar a sequência de atividades detalhadamente, reiniciando o processo toda vez que o ciclo das fases de aprendizagem termina para determinado conteúdo. Isto ocorre pois a referida teoria propicia um respeito ao nível de desenvolvimento que o aluno se encontra, demandando ao professor uma melhor elaboração de suas aulas.

O trabalho utilizando dobraduras e origami também deve ser levado em conta pois o mesmo auxilia a diminuir a resistência que muitos alunos apresentam para determinados conteúdos matemáticos. Os vídeos disponíveis também diminuirão a resistência dos professores pois auxiliarão na compreensão das dobraduras além de otimizar o tempo que, de modo geral, é escasso para os mesmos.

Em suma, todos os elementos elencados mostram que o trabalho apresenta relevância na aprendizagem de poliedros regulares e, portanto, deve ser bem aceito pelos professores pois além de possuir boa fundamentação histórica, pedagógica, teórica e conceitual, apresenta atividades pontuais que facilitarão a

aplicação em sala de aula pelos mesmos. O trabalho também deixa claro que não existe um único modo de ensinar um conteúdo, da mesma forma que não existe uma única maneira de compreender um determinado assunto.

Um trabalho futuro compreenderá da análise dos resultados após a aplicação pelos professores e possíveis adaptações devidas às realidades específicas de cada turma de alunos respeitando o nível de Van Hiele em que se situem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2ª Edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1999.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais : matemática* – Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARNEIRO, Mário Jorge Dia; SPIRA, Michel. *Oficina de dobraduras*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. p. iii. Disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296659.o>

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à geometria espacial*. 4ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. *Explorando geometria com origami*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. 79 p. Disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296661.o>

CHEMELLO, Thereza. *Brincando com dobraduras*. São Paulo: Editora Global, 1987.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In. LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Editora Atual, p. 1 – 20, 1994.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar, 10*. 5ª Edição. São Paulo: Editora Atual, 1993.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 1ª reimpressão. Campinas: Editora da Unicamp, 2005.

IMENES, Luiz Márcio. *Geometria das Dobraduras*. São Paulo: Editora Scipione, 1988.

KLAASEN, Daniel L. Poliedros regulares. In: EVES, Howard. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*; v. 3. São Paulo: Editora Atual, p. 58 – 60, 1994.

LA PENHA, G. M. Leonardo Euler. In. *Revista do Professor de Matemática nº 03*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, p. 2 – 4, 1983.

LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 3ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, p. 67 – 83, 2000.

LANG, Robert J. *Origami and Geometric Constructions*. Disponível em http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A matemática do ensino médio – volume 2*. 6ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MACHADO, Nilson José. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. São Paulo: Editora Scipione, 2000.

NASSER, Lilian; SANT'ANNA, Neide F. Parracho. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática / UFRJ, 2010.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio; RÊGO, Rômulo Marinho do; GAUDÊNCIO JR, Severino. *A geometria do origami – Atividades de ensino através de dobraduras*. João Pessoa: Editora Universtiária UFPB, 2003.

SÁ, Dario de. *Origami – Arte japonesa em dobras de papel*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1987.

SÃO PAULO. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: SEE/SP, 2008.

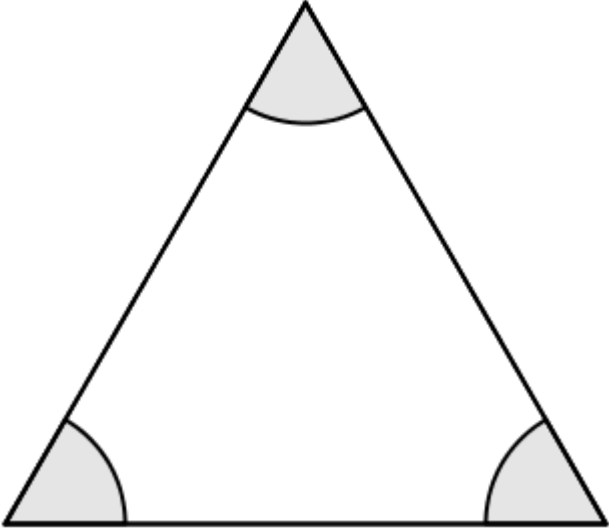
STRATHERN, Paul. *Platão em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Editora Jorge Zahar Editor Ltda., 1997.

UNIVERSITY OF ST ANDREWS. *The MacTutor History of Mathematics archive*. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>>. Acesso em: 03 de janeiro de 2013.

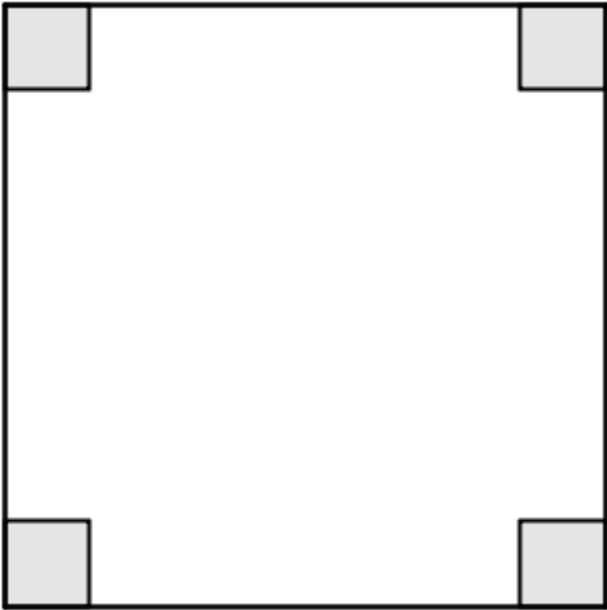
WAGNER, Eduardo. Um pouco sobre Descartes. In. *Revista do Professor de Matemática nº 19*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, p. 9 – 10, 1991.

WIKIMEDIA COMMONS. *Hiden Senbazuru Orikata*. Disponível em: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Hiden_Senbazuru_Orikata?uselang=pt-br>. Acesso em: 03 de janeiro de 2013.

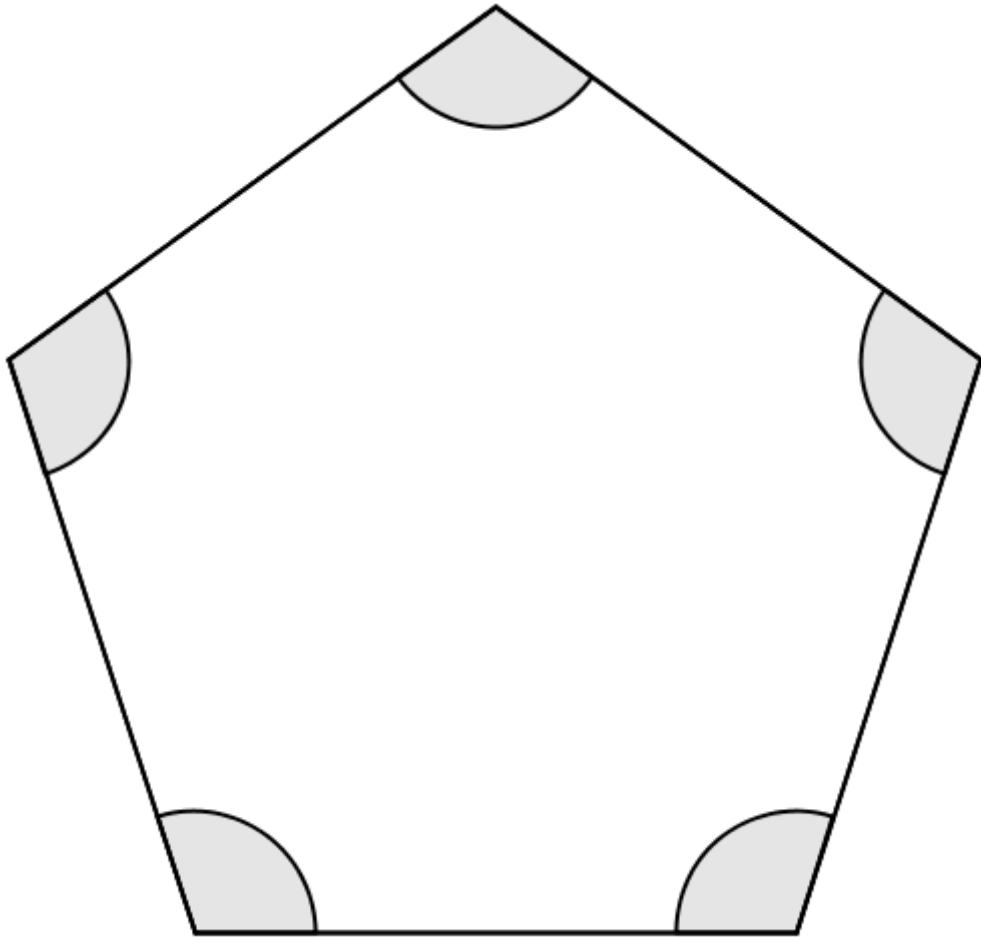
ANEXO A: Moldes para atividades das seções 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3



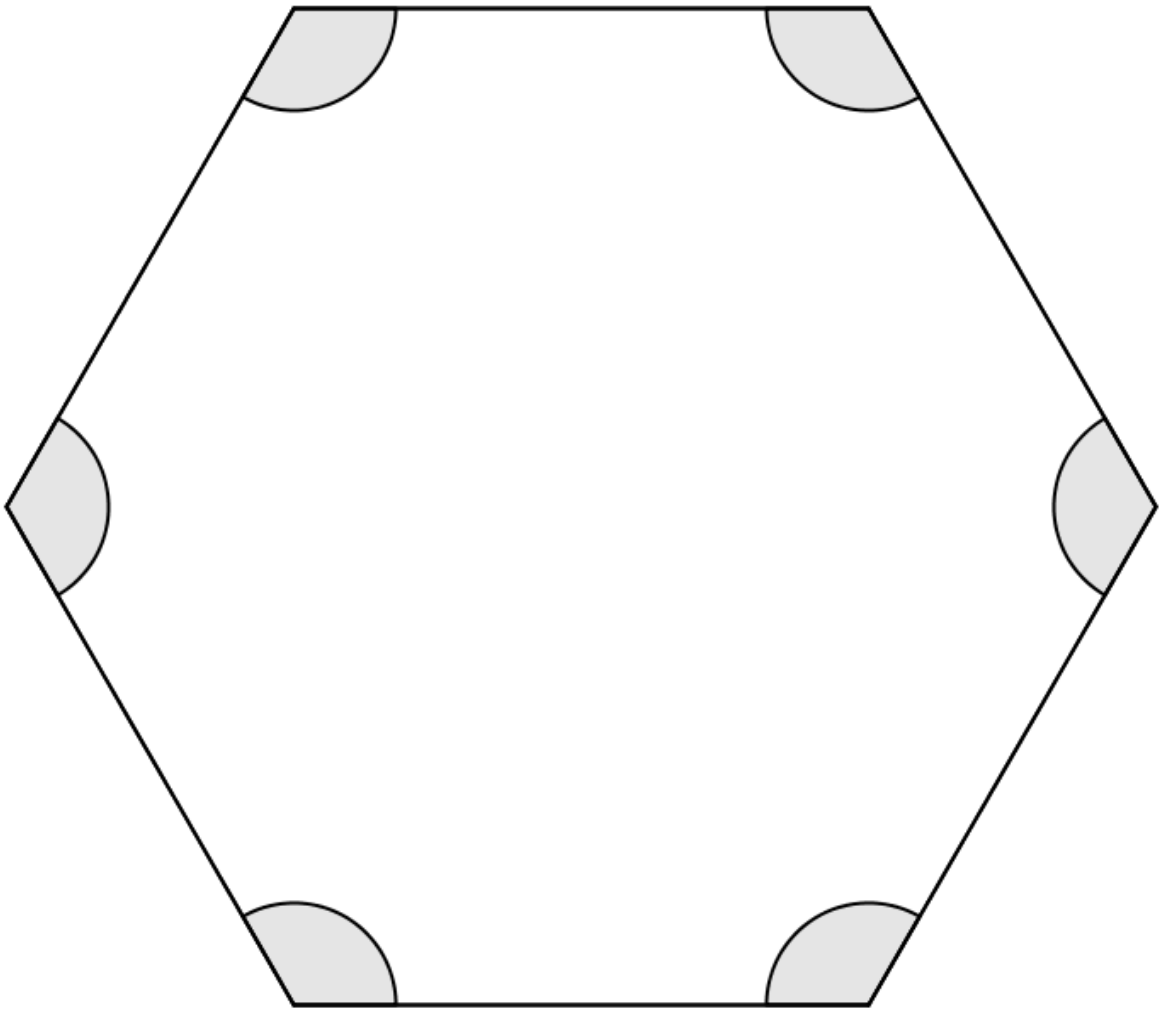
Triângulo equilátero



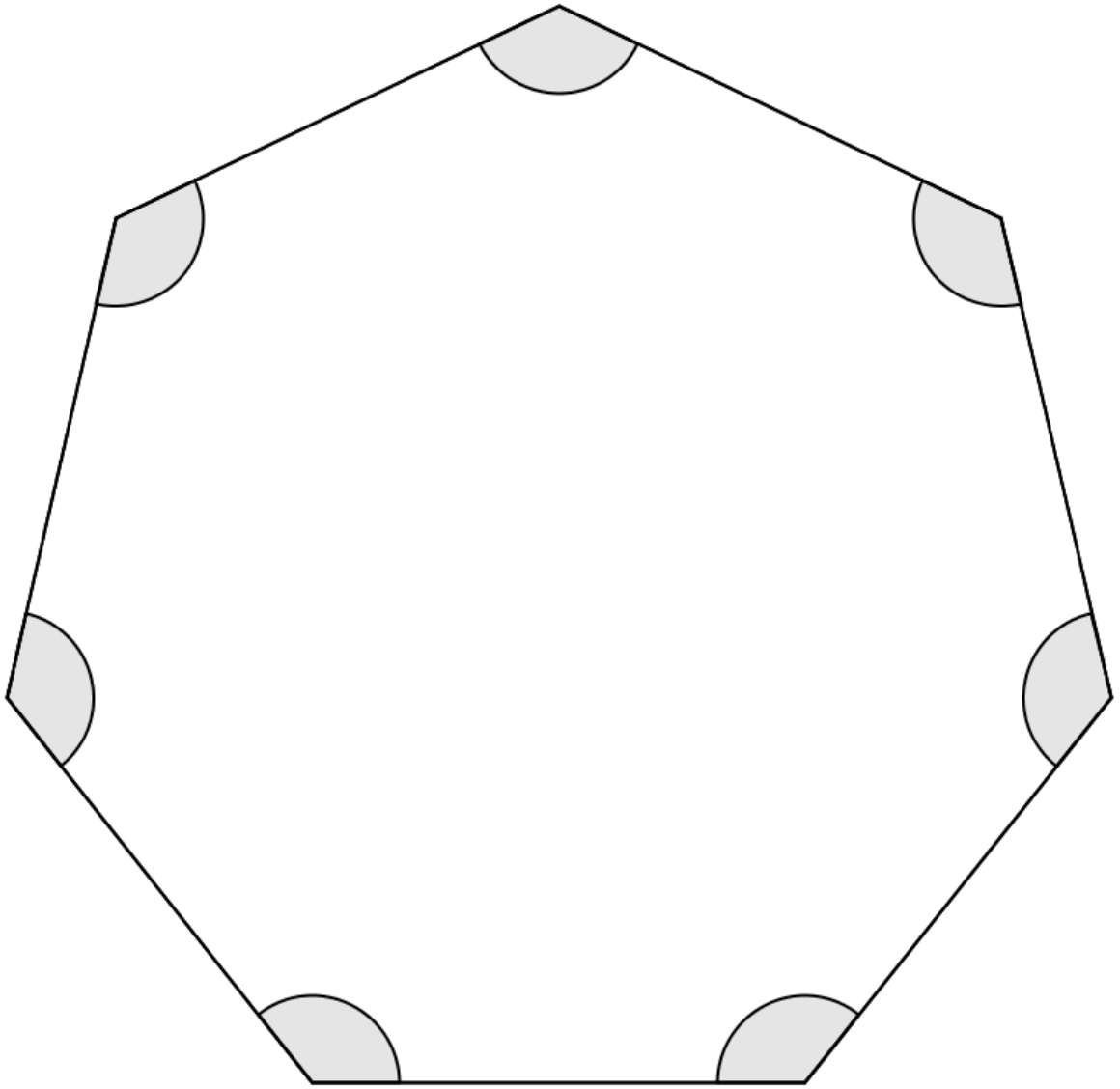
Quadrado



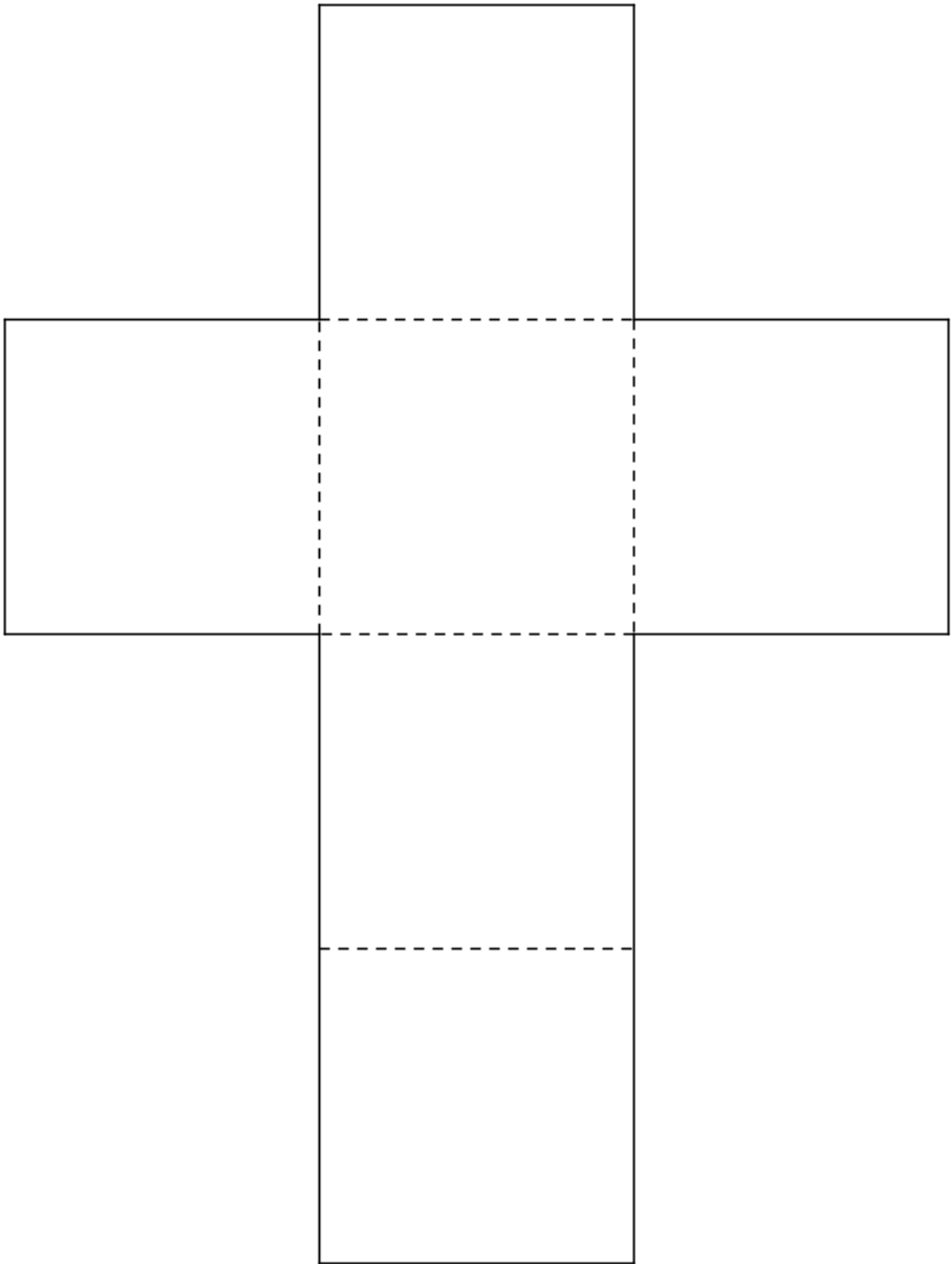
Pentágono Regular



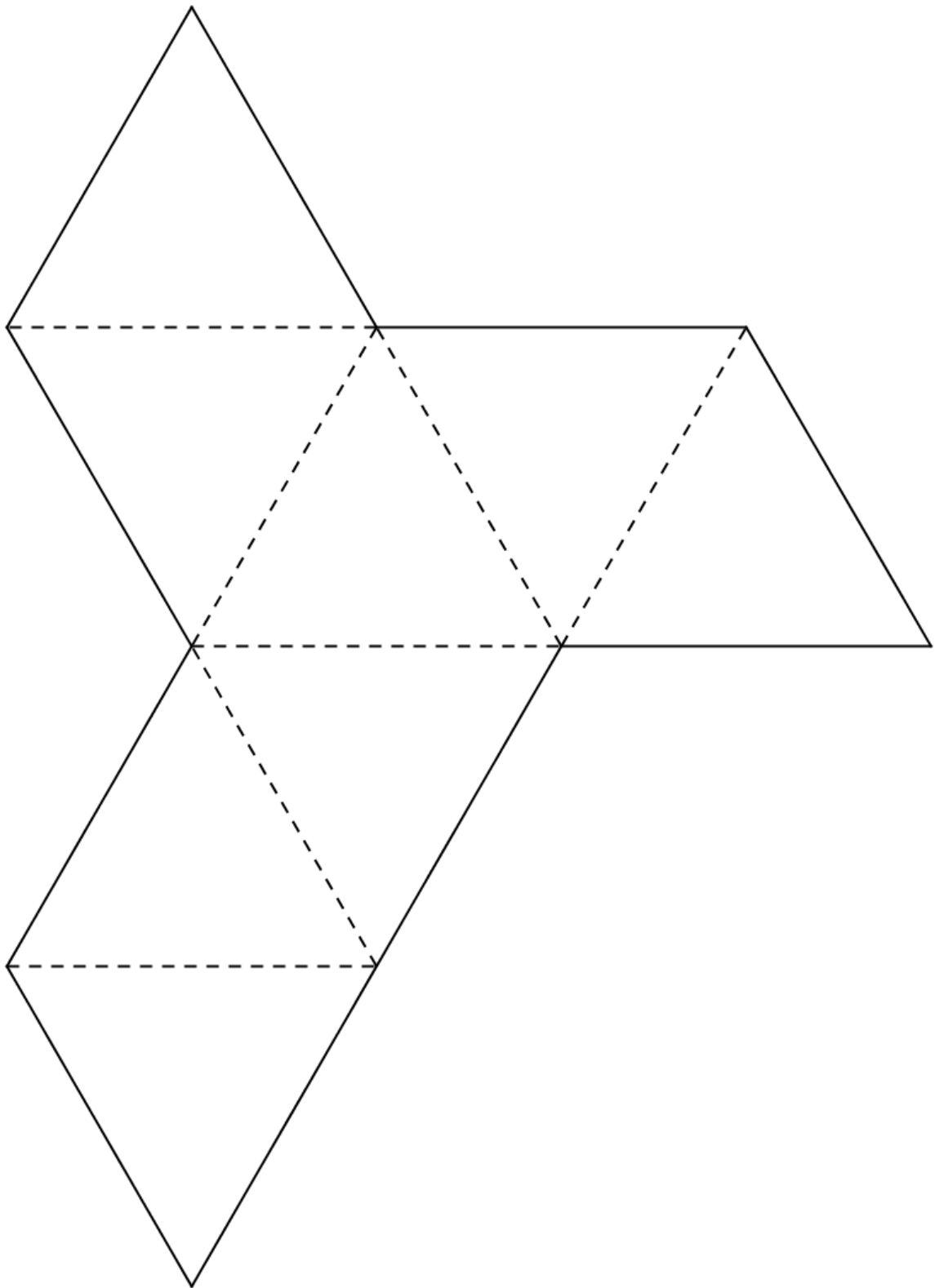
Hexágono Regular



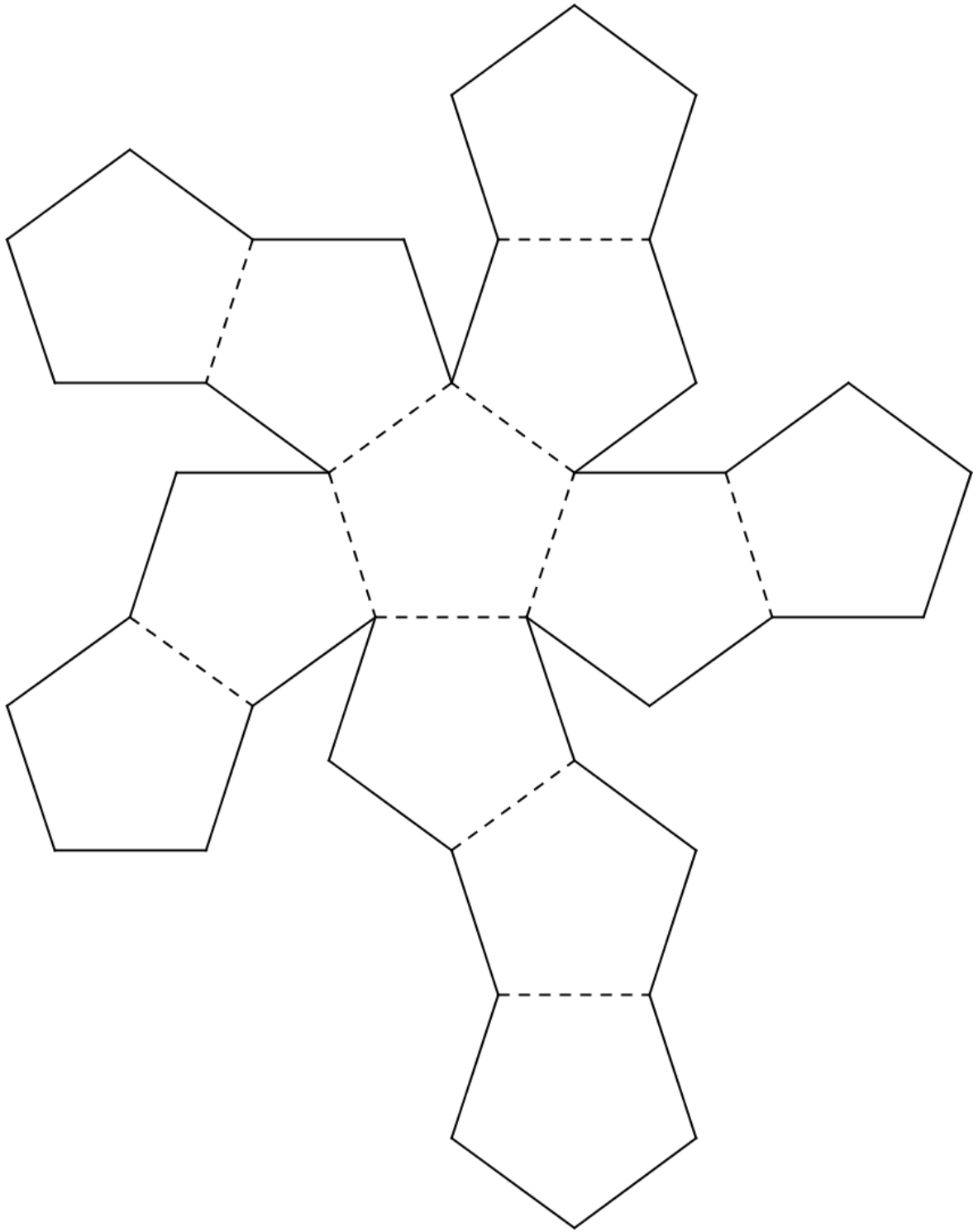
Heptágono Regular



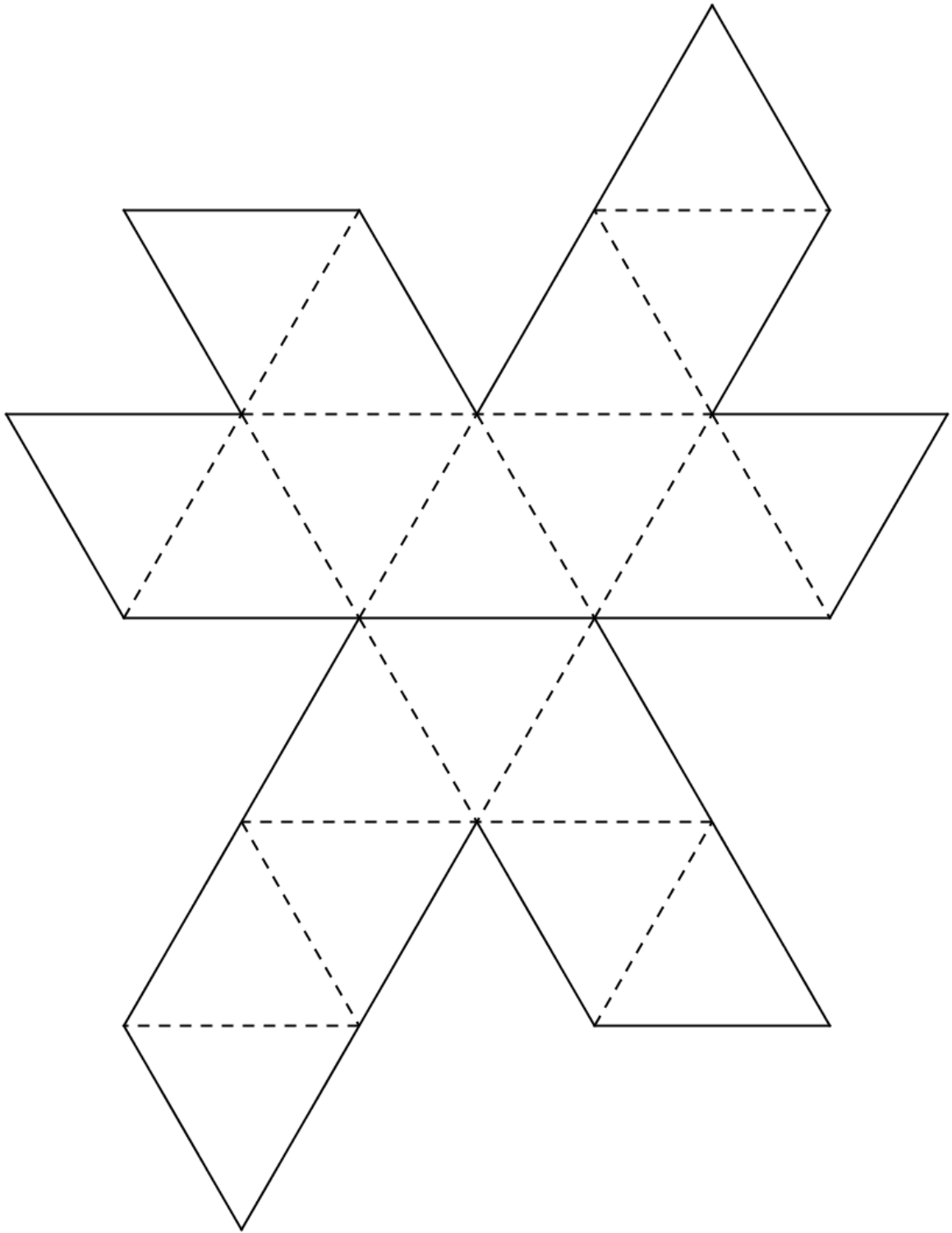
Planificação do Hexaedro



Planificação do Octaedro



Planificação do Dodecaedro



Planificação do Icosaedro