

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

ISAIAS JOSÉ DE LIMA

**DERIVADA E SUAS APLICAÇÕES EM RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DO ENSINO MÉDIO**

DISSERTAÇÃO

JUAZEIRO DO NORTE

2014

ISAIAS JOSÉ DE LIMA

**DERIVADA E SUAS APLICAÇÕES EM RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. Maria Silvana Alcântara
Costa

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Federal do Ceará

Biblioteca do Curso de Matemática

L698d Lima, Isaias José de

Derivação e suas aplicações em resolução de problemas do ensino médio / Isaias José de Lima.

- 2016.

40 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2016.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

1. Funções (Matemática). 2. Cálculo diferencial. 3. Ensino médio. I. Título.

ISAIAS JOSÉ DE LIMA

DERIVADA E SUAS APLICAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO
ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Maria Silvana Alcantara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa (Orientadora)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus, meus pais e minha irmã

AGRADECIMENTOS

- À Deus pela dádiva da vida e pelas felicidades que vem me proporcionando. Agradeço aos meus pais, Francisco Assis e Maria Luciene, que me deram a vida e me ensinaram a lutar por ela, me guiando para ser um homem de bem.
- A minha irmãzinha, Isabela Jane, que assim como eu, é uma vencedora.
- Aos meus professores que me ajudaram a seguir essa caminhada de estudos: Gerado Severido, Antônio Fernando, Antônio Marcos, Edmar Jr, Inaldo Dionísio, Silvana Costa, Mario Assis, entre outros.
- Aos meus amigos que estiveram sempre presente nessa jornada, Alex Magalhães e Tiago Melo.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À minha orientadora Maria Silvana Alcântara Costa.

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade levar aos estudantes do 3º ano do Ensino Médio a ampliação do seu conhecimento em Matemática e construir significado para a ideia de derivada como taxa de variação para, a partir daí, aplicá-los na resolução de problemas vistos anteriormente por eles. Para este propósito definimos a derivada de uma função em um ponto como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função neste ponto. Em sequência estudamos as técnicas de derivação de funções elementares para facilitar os cálculos no capítulo seguinte e finalizamos nosso trabalho mostrando a derivada como taxa de variação e apresentamos alguns problemas que fazem parte do currículo do Ensino Médio onde usamos a derivada como taxa de variação para resolvê-los, mostrando assim, a utilidade desse conhecimento matemático no Ensino Médio.

Palavras-chave: Função. Derivada. Aplicações

ABSTRACT

In this work we did a brief study about Derivative whose target audience is the high school student. We started from the idea that the derivative of a function at a point is the angular coefficient of the tangent line to the graph at this point. We worked with the derivative of elementary functions using limit, whose resolution involves the basic mathematics, as well as the properties of derivative. We finished the work emphasizing the derivative as about the rate of variation and how this one can be applied in the resolution of basic problems seen in High School.

Keywords: Function. Derivative. Applications.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	DERIVADA	11
2.1	A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO	11
2.2	OUTROS EXEMPLOS	16
3	REGRAS DE DERIVAÇÃO	19
3.1	DERIVADA DA SOMA	19
3.2	DERIVADA DO PRODUTO	20
3.3	DERIVADA DO QUOCIENTE	22
4	TAXA DE VARIAÇÃO	24
4.1	TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO E TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA	24
4.2	VELOCIDADE E ACELERAÇÃO	26
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
6	REFERÊNCIAS	31

1 INTRODUÇÃO

Durante todo o estudo da Matemática do Ensino Médio nos deparamos com muitos problemas que podem ser representados por modelos matemáticos cuja solução envolve o conceito de derivada. Tais problemas surgem com frequência em disciplinas como Física, Química, Biologia, entre outras. Com o intuito de estudarmos alguns desses problemas fizemos um breve estudo sobre derivada, enfatizando inicialmente o seu significado geométrico o qual vem facilitar a compreensão do conceito de derivada como um limite, pois sabemos que a ideia de limite, muitas vezes não é assimilada com facilidade. Dessa forma apresentaremos a derivada como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto. Em sequência apresentamos a derivada de algumas funções. Enfatizamos, em alguns exemplos, que a assimilação deste conceito depende do conhecimento matemático do Ensino Básico e da ideia de aproximação. No segundo capítulo apresentamos algumas regras de derivação que serão utilizadas no capítulo seguinte. E finalizamos nosso estudo mostrando que a derivada, vista anteriormente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto, pode ser vista como a taxa de variação e em sequência fizemos algumas aplicações.

2 DERIVADA

Neste capítulo apresentaremos o conceito de derivada, a ideia de reta tangente e algumas propriedades básicas. Um dos limites mais importantes do Cálculo Diferencial, a derivada tem grande aplicabilidade em várias áreas do conhecimento. Deste forma começaremos o nosso estudo com o conceito de derivada de uma função em um ponto.

2.1 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Denotemos por I um intervalo aberto de \mathbb{R} . Nesta seção estudaremos um dos mais importantes limites do cálculo que é a derivada de uma função em um ponto.

Definição 2.1.1 Dizemos que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $p \in I$ se o limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

existe e é finito.

Caso o limite acima exista, ele será denotado por $f'(p)$, ou seja,

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad (1)$$

e diremos que $f'(p)$ é a derivada de $f(x)$ em p .

Observemos que, para cada $x \in I$, o quociente

$$q(x) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

é o coeficiente angular da reta que contém os pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$ do gráfico de $f(x)$. Logo a existência do limite acima significa que estas retas se aproximam da reta que passa pelo ponto $(p, f(p))$ e tem coeficiente angular $f'(p)$. Fixaremos estas ideias na seguinte definição.

Definição 2.1.2. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $p \in I$. A reta do plano que contém o ponto $(p, f(p))$ e tem coeficiente angular $f'(p)$ será chamada de reta tangente ao gráfico de f

no ponto $(p, f(p))$.

Sendo assim a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ fica sendo

$$y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p). \quad (2)$$

Tal reta intersecta o gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Claro, tal reta é o gráfico da função afim

$$T(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p).$$

Além disso, os valores da função afim $T(x)$ para pontos próximos a p aproxima os valores de $f(x)$ nestes mesmos pontos. De fato, considere a função diferença

$$E(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(p) - f'(p) \cdot (x - p).$$

Então temos

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} - f'(p) \right] = 0.$$

Portanto, para x próximo de p , o valor $E(x)$ é próximo de zero, isto implica que o valor de $T(x)$ é próximo de $f(x)$ para x próximo a p .

Quando a função $f(x)$ é derivável em todo ponto do seu domínio podemos construir uma nova função $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada ponto $p \in I$ associa a derivada de $f(x)$ em p . Esta função é usualmente nomeada de função derivada ou, simplesmente, derivada de f .

Muitas vezes, para efetuarmos cálculos de limites é conveniente modificarmos a apresentação do limite que define a derivada (1), p. 11. Se $h = x - p$ o limite que defini a derivada de f no ponto p fica reescrita como

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Em geral, quando a derivada de f existe em todos os pontos do domínio, a sua derivada $f'(x)$ pode ser calculada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3)$$

Exploraremos abaixo a definição de derivada e reta tangente.

Exemplo 2.1.3. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Calculemos a derivada de f no ponto $p = 2$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2))$.

Solução Calculemos inicialmente a derivada de $f(x)$ utilizando o limite descrito em (3):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 2x$. Calculando $f(2) = 4$ e $f'(2) = 4$, temos a equação da reta tangente ao gráfico no ponto $(2, f(2))$:

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \quad \therefore \quad y = 4x - 4.$$

Esta reta é o gráfico da função afim $T(x) = 4x - 4$.

Para calcularmos a derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $p = 2$ utilizando o limite (1), p. 11, é necessário percebermos que $x = 2$ é uma das raízes da função quadrática $q(x) = x^2 - 4$. Como $x = -2$ é outra raiz, fatorando temos $q(x) = (x-2)(x+2)$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Até aqui utilizamos apenas o conhecimento da matemática do Ensino Básico. □

Exemplo 2.1.4. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Calculemos a derivada desta função no ponto $p = 2$.

Solução Pela definição de derivada, (1) temos

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}.
 \end{aligned}$$

Como $x - 2 \neq 0$, então simplificando a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) \\
 &= 12.
 \end{aligned}$$

Logo $f'(2) = 12$. De forma similar ao exemplo anterior, para calcularmos a derivada da função $f(x) = x^3$ no ponto $p = 2$ foi necessário percebermos que $x = 2$ é uma raiz da função polinomial $g(x) = x^3 - 8$. Assim $g(x) = x^3 - 8$ é divisível por $x - 2$, logo podemos escrevê-la como $g(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. O passo seguinte foi efetuarmos a divisão por $x - 2$. Mais uma vez utilizamos apenas o conhecimento da Matemática do Ensino Básico. Finalmente ao fazermos x se aproximar de 2, $x^2 + 2x + 4$ se aproximará de 12. \square

O resultado seguinte assegura que se uma função admite derivada em um ponto $p \in I$, então o gráfico da função no ponto $(p, f(p))$ não possui “saltos” nem “buracos”. Esta é a leitura geométrica do teorema.

Teorema 2.1.5. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $p \in I$. Então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Prova. Observe que

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - f(p)] = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} (x - p) \right].$$

Por hipótese, f é derivável em $p \in I$, logo, por definição,

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right].$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} (x - p) = 0$, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right] = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x \rightarrow p} (x - p) = 0.$$

Considerando que $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - f(p)] = 0$, obtemos $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$. \square

Definição 2.1.6. Dizemos que uma função f é contínua em um ponto p de seu domínio se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Pelo visto no último teorema, se f é derivável em um ponto p , então f é contínua neste ponto. A igualdade $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ assegura que ao fazermos x se aproximar de p os valores de $f(x)$ se aproximam de $f(p)$. Apenas a existência deste limite assegura que o gráfico de f não possui “salto” neste ponto, pois como p pertence ao interior do intervalo I , tanto a aproximação de p pela direita quanto pela esquerda os valores de f se aproximam do mesmo valor, qual seja $f(p)$. Geometricamente, isto garante que neste ponto o gráfico não possui “buraco”.

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. De fato, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.7. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 1|$. Mostremos que ela não possui derivada em $p = -1$.

Solução Reescrevamos a função,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x > -1 \\ -(x + 1), & \text{se } x \leq -1 \end{cases}.$$

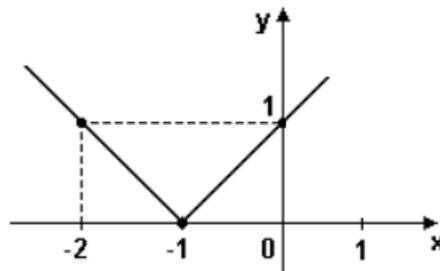


Figura 1:

Examinando visualmente o gráfico de f percebemos que ela é contínua em todos os pontos do seu domínio. Em $x = -1$, o gráfico de f possui um “bico”. Mostremos que f não é derivável neste ponto. De fato, sabemos da teoria de limite que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita e a esquerda do ponto $p = 1$ existe e são iguais, isto é

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}.$$

A sinalização $x \rightarrow -1^-$ indica que x aproxima-se de -1 com $x < -1$ enquanto $x \rightarrow -1^+$ indica que x se aproxima de -1 com $x > -1$. Como a função é definida por duas sentenças, analisemos o comportamento da função

$$q(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \tag{8}$$

tanto à direita quanto à esquerda do ponto p . Ao fazermos x se aproximar de -1 pela esquerda, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1.$$

Simetricamente ao fazermos x se aproximar de -1 , pela direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

Portanto, os limites laterais da função

$$q(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

são distintos, significando que não existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}.$$

Em outras palavras, f não é derivável em $p = -1$. □

No exemplo acima, não existe $f'(-1)$, implicando que não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$. Nesse ponto o gráfico da função apresenta um “bico” pois os limites laterais da função q são distintos. É fácil construir outros exemplos de funções que são contínuas em um ponto p e não são deriváveis neste ponto. Assim fica clara a importância da reta tangente na construção do gráfico de funções.

2.2 OUTROS EXEMPLOS

Nos exemplos a seguir apresentaremos a derivada de algumas funções e enfatizaremos o conhecimento da Matemática Básica para a compreensão destas. Começaremos com a função constante.

Exemplo 2.2.1 Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = k$, onde k é constante real. Mostremos que $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução Como a derivada de f é calculada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

então

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0.$$

Portanto $f'(x) = 0$ para todo x em seu domínio. □

Exemplo 2.2.2 Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Mostremos que $f'(x) = 1$.

bf Solução De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esta derivada merece um comentário. O gráfico de $f(x)$ é uma reta com declividade 1. Uma reta tangente a uma reta, coincide com ela. Logo, toda reta tangente ao gráfico de $f(x) = x$ tem a mesma declividade, qual seja, 1. \square

Exemplo 2.2.3 Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Mostremos que $f'(x) = 3x^2$.

Solução Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o numerador,

$$\begin{aligned} (x+h)^3 &= x^3 + 3h^2x + 3hx^2 + h^3 - x^3 \\ &= h^3 + 3h^2x + 3hx^2 = h(h^2 + 3hx + 3x^2), \end{aligned}$$

e substituindo no limite obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 3hx + 3x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3hx + 3x^2) \\ &= 3x^2. \end{aligned}$$

Logo, $f'(x) = 3x^2$. \square

Exemplo 2.2.4 Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Prova: Seja $f(x) = x^n$. Então,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Expandindo o numerador da fração, utilizando o binômio de Newton e fatorando, temos

$$\begin{aligned}(x+h)^n - x^n &= \left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n\right) - x^n \\ &= h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Logo, o cálculo da derivada resume-se em calcular o limite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

Daí segue que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

Como $h \rightarrow 0$, imediatamente concluímos que $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. □

3 REGRAS DE DERIVAÇÃO

No Capítulo 2 apresentamos as derivadas de algumas funções polinomiais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, procurando relacionar o cálculo das derivadas com os conteúdos de Matemática do Ensino Médio. Em resumo, mostramos os cálculos das seguintes funções.

Função	Derivada
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Por fim, demonstramos uma regra geral, mostrando que a função derivada da função polinomial $f(x) = x^n$ é $f'(x) = nx^{n-1}$, para todo inteiro $n \geq 1$.

A lista pode ser ampliada, mas o cálculo direto a partir do limite fica progressivamente mais difícil quando tentamos encontrar a derivada de funções menos simples do que as citadas acima. Neste capítulo, estudaremos regras gerais para obter a derivada da soma, produto e quociente de duas ou mais funções e em sequência apresentaremos alguns exemplos.

3.1 DERIVADA DA SOMA

Proposição 3.1.1. Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I . Se f e g são deriváveis em $x \in I$, então a função $t(x) = f(x) + g(x)$ é derivável em x e vale que

$$t'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Prova Por hipótese, f e g não diferenciáveis, isto significa que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Mostremos que t é diferenciável. Por definição de derivada de uma função em x , devemos

calcular o seguinte limite:

$$\begin{aligned}
 t'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
 \end{aligned}$$

Esta última soma de limites nos dá precisamente as derivadas de $f(x)$ e $g(x)$. Portanto, $t'(x) = f'(x) + g'(x)$. Nesta apresentação estamos utilizando propriedades naturais de limites, como a que parcelou o limite quando passamos da segunda linha para a terceira linha do cálculo feito. Não abordaremos teoremas específicos sobre limites pois está além dos objetivos da Matemática do Ensino Médio. \square

Esta proposição pode ser generalizada indutivamente para uma soma de funções com um número finito de parcelas, isto é, a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se estas existirem.

Exemplo 3.1.2: Encontremos a função derivada da função polinomial $f(x) = 3 + x^2 + x^3$.

Solução Seguindo a tabela apresentada no início deste capítulo e a última proposição, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3' + (x^2)' + (x^3)' \\
 &= 2x + 3x^2.
 \end{aligned}$$

Observamos que estamos utilizando a generalização da Proposição para uma soma de funções com um número finito de parcelas. \square

3.2 DERIVADA DO PRODUTO

Proposição 3.2.1 Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I . Se f e g são deriváveis, então a função produto $t(x) = f(x) \cdot g(x)$ é derivável em x e vale que

$$t'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Prova Por hipótese, f e g não diferenciáveis, isto significa que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Mostremos que t é diferenciável. Por definição de derivada de uma função em x , devemos calcular o seguinte limite:

$$\begin{aligned} t'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h} \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x+h) \cdot g(x)$ e rearranjando as parcelas do numerador, podemos reescrever este último quociente como:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Como f e g são diferenciáveis, então f e g são contínuas, ver Teorema 2.1.5, p. 14, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

Utilizando propriedades naturais de limites, temos

$$\begin{aligned} t'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração da proposição. □

Particularizando esta proposição, quando $g(x) = k$, onde k é uma constante e $f(x)$ é diferenciável, segue a regra derivação:

$$\text{se } g(x) = k \cdot f(x), \quad \text{então } g'(x) = k \cdot f'(x)$$

Um caso mais particular é quando a constante k é menor que zero. Por exemplo, a derivada de $f(x) = -3x^2$ é $f'(x) = -3 \cdot (2x) = -6x$.

Exemplo 3.2.2 Calculemos a derivada da função polinomial $t(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$.

Solução Façamos $f(x) = 2x^3 - 1$ e $g(x) = x^4 + x^2$. Logo, $f'(x) = 6x^2$ e $g'(x) = 4x^3 + 2x$. Pela regra do produto

$$\begin{aligned}
t'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
&= (6x^2)(x^4 + x^2) + (2x^3 - 1)(4x^3 + 2x) \\
&= (6x^2)(x^4 + x^2) + (2x^3 - 1)(4x^3 + 2x).
\end{aligned}$$

Efetuada a multiplicação obtemos $t'(x) = 8x^6 + 6x^5 + 2x^3 - 2x$. □

3.3 DERIVADA DO QUOCIENTE

Proposição 3.3.1 Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I . Se f e g são deriváveis em x e $g(x) \neq 0$, então a função produto $t(x) = f(x) \cdot g(x)$ é derivável em x e vale que

$$t'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

Prova Por hipótese, f e g não diferenciáveis, isto significa que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Mostremos que t é diferenciável. Por definição de derivada de uma função em x , devemos calcular o limite

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}.
\end{aligned}$$

Reescrevamos este último quociente.

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \frac{1}{h} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \\
&= \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h) \cdot g(x)}.
\end{aligned}$$

Utilizando regras naturais de limites, podemos, agora, demonstrar a regra do quociente.

$$\begin{aligned}
 t'(x) &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x)} \\
 &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)} \\
 &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.
 \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração. □

Exemplo 3.3.2 Podemos estender a regra de derivação descrita no Exemplo 2.2.4., p. 17. A derivada de $f(x) = x^n$ é $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo inteiro n e todo $x \neq 0$.

Exemplo 3.3.3 Encontremos a derivada da função $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$, para $x \neq 2$.

Solução Pela regra do produto temos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x^2+1)' \cdot (x-2) - (x^2+1) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{(2 \cdot x) \cdot (x-2) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-2)^2}.
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo, obtemos $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 - 4x + 2}$. □

4 TAXA DE VARIAÇÃO

A derivada é o elo entre declive de curvas e taxas de variação. Isto faz do Cálculo uma disciplina de grande relevância nos cursos de Engenharia, Física, Economia bem como, em outros cursos onde o cálculo está presente.

Neste capítulo estudaremos inicialmente as taxas de variação média e instantânea e em seguida apresentaremos algumas aplicações da derivada na modelagem de problemas.

4.1 TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO E TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Neste capítulo iremos considerar funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ que admitem derivada em todos os pontos. Definimos a variação (da variável) $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ como sendo a diferença $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Seja $\Delta x = x_2 - x_1$.

Definição 4.1.1 A taxa média de variação de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Geometricamente a taxa de variação de f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$. Em Geometria, uma reta que incide em dois pontos de uma curva é denominada reta secante em relação à curva. Portanto, a taxa média de variação de f de x_1 a x_2 é igual ao coeficiente angular da reta secante PQ .

Se $h = x_2 - x_1$, segue que $x_2 = x_1 + h$. Assim para $x_1 = x$ podemos interpretar a razão

$$\frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$$

como taxa de variação média de f no intervalo com extremos x e $x+h$. O limite desta taxa de variação média quando h tende a zero recebe um nome especial. Recordando, estamos considerando apenas funções com derivada em todos os pontos do domínio.

Os exemplos deste capítulo foram retirados ou adaptados dos livros [1.] e [4.], princi-

palmente.

Definição 4.1.1. A taxa de variação instantânea de $dey = f(x)$ em relação a x é a derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Logo, taxas instantâneas são limites de taxas médias.

Exemplo 4.1.2 Escreva a área de um quadrado como função de seu lado e determine:

1. a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 3 m a $3,2\text{ m}$;
2. a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 3 m .

Solução Sejam A a área do quadrado e l o seu lado. Sabemos da relação funcional $A(l) = l^2$.

1. A taxa média de variação de A em relação a l quando l varia de $3,0\text{ m}$ a $3,2\text{ m}$ é calculada por:

$$\frac{\Delta A}{\Delta l} = \frac{A(3,2) - A(3,0)}{3,2 - 3,0} = \frac{10,24 - 9,0}{0,2} = \frac{1,24}{0,2} = 6,2.$$

Portanto a taxa corresponde a $6,2\text{ m}^2/\text{m}$.

b) A taxa de variação instantânea da área em relação ao lado em $l = 3\text{ m}$ é calculada pelo valor da derivada $A'(l) = 2l$ no ponto $l = 3\text{ m}$. Portanto, $A'(3) = 6$ onde as unidades envolvidas são m^2/m . \square

Exemplo 4.1.2 Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, estimado por $f(x) = 64t - \frac{t^3}{3}$.

1. Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 4$?
2. Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 8$?
3. Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

Solução A taxa com que a epidemia se propaga é dada pela razão de variação da função $f(t)$ em relação a t . Portanto, para um tempo t qualquer, essa taxa é dada por:

$$f'(t) = 64 - t^2.$$

1. No instante $t = 4$, temos $f'(4) = 64 - 4^2 = 64 - 16 = 48$. Ou seja, no tempo $t = 4$, a moléstia está se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

2. No instante $t = 8$, temos $f'(8) = 64 - 8^2 = 64 - 64 = 0$. Portanto, no tempo $t = 8$ a epidemia está totalmente controlada.

3. Como o tempo foi contado em dias a partir do 1º dia de epidemia, o 5º dia corresponde a variação de t de 4 para 5. O número de pessoas atingidas pela moléstia durante o quinto dia é $f(4) - f(5) \approx 43$. \square

Exemplo 4.1.3 Analistas de produção verificaram que em uma montadora x , o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é estimado por

$$f(x) = \begin{cases} 50(t^2 + t), & \text{para } 0 \leq t \leq 4 \\ 200(t + 1), & \text{para } 4 \leq t \leq 8 \end{cases}.$$

1. Qual a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho? E após 7 horas?
2. Quantas peças são produzidas na 8ª hora de trabalho?

Solução 1. A razão de produção após 3 horas de trabalho é o valor $f'(3)$. Para $t < 4$, temos $f'(t) = 50(2t + 1)$. Portanto, $f'(3) = 50(2 \cdot 3 + 1) = 350$.

Após três horas de trabalho a razão de produção é de 350 peças por hora de trabalho. A razão de produção após 7 horas de trabalho é $f'(7)$. Para $t > 4$, $f'(t) = 200$. Logo, após 7 horas de trabalho a razão de produção é de 200 peças por hora de trabalho.

2. O número de peças produzidas na oitava hora de trabalho é estimado em $f(8) - f(7) = 200(8 + 1) - 200(7 + 1) = 200$. Nesse exemplo, o número de peças produzidas na oitava hora de trabalho coincidiu com a razão de produção após sete horas de trabalho. Isso ocorreu porque a razão de produção permaneceu constante durante o tempo considerado. \square

4.2 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Velocidade e aceleração são conceitos importantes que usamos no nosso dia-a-dia. O velocímetro marca, a cada instante, a velocidade. Se pisarmos no acelerador ou no freio, percebemos que a velocidade muda. Sentimos a aceleração.

Mostraremos como calcular a velocidade e a aceleração através de derivadas.

Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t . Então, no intervalo de tempo entre t e $t + h$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t + h) - s(t)$.

Definição 4.2.1 Definimos velocidade média nesse intervalo de tempo como o quociente

$$V_m = \frac{s(t + h) - s(t)}{h}.$$

Isto é, a velocidade média e o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto para percorrê-lo. De forma geral, a velocidade média nada nos diz sobre a velocidade do corpo no instante t . Para obtermos a velocidade instantânea do corpo no instante t , calculamos sua velocidade média em instantes de tempo h cada vez menores. A velocidade instantânea, ou velocidade no instante t , e o limite das velocidades médias quando h se aproxima de zero, isto é,

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}.$$

Como já vimos no capítulo anterior, esse limite é a derivada da função $s = s(t)$ em relação a t . Portanto, $v(t) = s'(t)$.

O conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao de velocidade.

Definição 4.2.2 Definimos a aceleração média no intervalo de tempo de t a $t + h$ pelo quociente

$$a_m = \frac{v(t + h) - v(t)}{h}.$$

Observamos que ela mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo de tempo h . Para obtermos a aceleração do corpo no instante t , tomamos sua aceleração média em intervalos de tempo h cada vez menores. A aceleração instantânea é o limite

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t + h) - v(t)}{h} = v'(t).$$

Logo, a derivada da velocidade nos dá a aceleração. Como $v(t) = s'(t)$, temos $a(t) = v'(t) = s''(t)$, $s''(t)$ é a derivada da derivada de $s(t)$.

Exemplo 4.2.3 No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por $s(t) = 16t - t^2$. Determinar:

1. a velocidade média do corpo no intervalo de tempo $[2, 4]$;
2. a velocidade do corpo no instante $t = 2$;

3. a aceleração média no intervalo $[0; 4]$;

4. a aceleração no instante $t = 4$.

Solução 1. A velocidade média do corpo no intervalo de tempo entre 2 e 4 será

$$v_m = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{48 - 28}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

2. A velocidade do corpo no instante $t = 2$ corresponde ao valor da derivada $s'(t)$ no ponto $t = 2$. Como $s(t) = 16t - t^2$, temos $v(t) = s'(t) = 16 - 2t$. No instante $t = 2$, a velocidade é $v(2) = 16 - 2 \cdot 2 = 12u.v$.

3. A aceleração média no intervalo $[0, 4]$, por definição é $\frac{v(4) - v(0)}{4 - 0} = \frac{8 - 16}{4} = -2u.a$.

4. A aceleração no instante $t = 4$ e dada pela derivada $v'(4)$. Como $v(t) = 16 - 2t$, temos $a(t) = v'(t) = -2$. Portanto, $a(4) = -2u.a$.

Exemplo 4.2.4 A equação do movimento de um corpo em queda livre e $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, onde g é a aceleração da gravidade. Determinar a velocidade e a aceleração do corpo no instante t .

Solução Num instante t a velocidade e a aceleração instantânea são, respectivamente

$$v(t) = s'(t) = gt \quad 2 \quad a(t) = v'(t) = g.$$

A aceleração é a gravidade. □

A Função Custo Marginal Vejamos como a derivada $f'(x)$, isto é, a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x , pode estar relacionada com o custo da produção de uma empresa.

Exemplo 4.2.4 Um fabricante produz um certo tipo de peça de tecido com largura fixa e o custo da produção de x metros desse material é dado por $C = f(x)$. Vejamos como interpretar a derivada neste caso.

Solução Sabemos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x},$$

isto é, a taxa de variação instantânea de C em relação a x . Se para produzir x metros de tecidos foi gasto $f(x)$ reais, então para produzir $x + \Delta x$ metros do mesmo material gastou-se $f(x + \Delta x)$. Assim, $f(x) - f(x + \Delta x)$ é o custo para produzir Δx metros de tecido adicional e

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x},$$

representa o custo médio para produzir cada metro de tecido adicional. A taxa de variação do custo da produção

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x},$$

chamada, pelos economistas, de Custo Marginal da produção, mede quanto o custo da produção variou em relação a quantidade de metros de tecido produzidos. \square

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos, com este trabalho, facilitar a compreensão do Cálculo de derivadas para aqueles estudantes que tenham um primeiro contato com esta disciplina. Tivemos a intenção mostrar como a matemática básica é fundamental na resolução de problemas e a partir deste conhecimento aprender novos conceitos. As aplicações servem de motivação para o estudo pois, não estamos apenas repassando conteúdos, mas conteúdos que podem ser aplicados em várias áreas do conhecimento. Dessa forma a Introdução ao Cálculo é uma poderosa ferramenta na resolução de problemas, podendo funcionar como um estimulador para ingresso dos discentes em um curso de nível superior.

6 REFERÊNCIAS

1. FLEMMING, D. & GONÇALVES, M. *Cálculo A* São Paulo: Editora Makron, 1992.
2. GUIDORIZZI, L. *Um Curso de Cálculo* 5ª edição. LTC Editora (2007).
3. LEITHOLD, L. *O Cálculo Com Geometria Analítica* 3ª edição. Editora Harbra Ltda (1994).
4. STEWART, J. *Cálculo* 5ª edição. Editora Thonson (2006).
5. THOMAS, G. B. *Cálculo* 12ª edição. Editora Pearson (2012).