UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Camila Lima da Costa

Maceió, Novembro de 2016

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CAMILA LIMA DA COSTA

A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

MACEIÓ-AL
2016

CAMILA LIMA DA COSTA

A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

MACEIÓ-AL
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

C837u Costa, Camila Lima da.
A utilização do laboratório de matemática para o ensino e aprendizagem de trigonometria no 2° ano do ensino médio / Camila Lima da Costa. - 2016.
95 f. ; il.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Bibliografia: f. 85-87.
Apêndices: f. 88-95.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Trigonometria – Ensino e aprendizagem. 3. Ensino médio. 4. Laboratório de matemática. 5. Materiais manipuláveis. I. Título.

CDU: 372:514.116

Folha de Aprovação

CAMILA LIMA DA COSTA

UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 11 de novembro de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Presidente)

Prof. Dra. Viviane de Oliveira Santos - UFAL

Prof. Dr Carlos Argolo Pereira Alves - IFAL

A DEUS, aos meus pais e à minha avó Donzinha (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por cada conquista alcançada e por me fortalecer diante das adversidades em minha caminhada.

Aos meus pais, Edivaldo (In Memorian) e Cícera, pelo amor, carinho, compreensão, respeito e confiança a mim sempre prestados. Reforçando aqui minha eterna gratidão a minha mãe que sempre muito guerreira, lutou dignamente para oferecer o melhor em tudo.

À minha avó Dona Donzinha (In Memorian), por todo apoio e incentivo dedicados a mim. Sei que está muito orgulhosa.

Ao Antônio Teixeira, meu namorado, pelo carinho, paciência, companheirismo e apoio a mim sempre prestados.

À minha família, em especial à minha tia Creusa e meu primo Daniel, pela colaboração constante a cada passo de minha caminhada.

Ao meu orientador Gregório, pelos ensinamentos e dedicação concedidos.

Aos professores do PROFMAT/UFAL, por todo o carinho e dedicação que tiveram conosco.

Aos colegas da turma PROFMAT/UFAL 2014, em especial as minhas “Poderosas” Eduarda e Luana, pelo apoio e companheirismo durante todas as etapas do mestrado.

Aos meus companheiros de turma e de viagem, Tony Fábio, Josivaldo e Fabiano, por todo apoio e solidariedade.

Aos meus companheiros de trabalho, em especial à Edileide, Ângela Maria e Emerson Aljan, pela paciência e pela colaboração desde o momento da aprovação no mestrado à execução desse projeto.

Aos alunos do 2º E /2015 da Escola Estadual Odete Bonfim, cada desafio vencido é um aprendizado construído.

Enfim, agradeço a todos que incentivaram e torceram, contribuindo direta ou indiretamente para realização desse sonho. Muitíssimo obrigada!

Diga-me e eu esquecerei.
Ensina-me e eu poderei lembrar.
Envolva-me e eu aprenderei.

Benjamin Franklin

RESUMO

Na presente dissertação apresentamos uma abordagem sobre o laboratório de matemática no contexto escolar, com vista para utilização de materiais manipuláveis em trigonometria. O objetivo é auxiliar professores da Rede Estadual de Educação de Alagoas na preparação de aulas utilizando o laboratório de matemática, visando o enriquecimento do ensino de trigonometria. Inicialmente, realizou-se uma análise histórica a respeito dos conteúdos a serem abordados. Após as análises bibliográficas, foi realizada uma pesquisa com professores da rede estadual de ensino que também são discentes do PROFMAT/UFAL, abordando as possíveis dificuldades enfrentadas na utilização do Laboratório de Matemática. Posteriormente, foi elaborada uma seqüência didática utilizando materiais do laboratório de matemática sendo aplicada em turmas do 2º ano do ensino médio da Escola Estadual Odete Bonfim, Maribondo - AL. Pretende-se com esse trabalho propor aos professores e futuros professores de matemática, um material que possa ser utilizado em sala de aula para auxiliar o ensino de trigonometria, buscando assim melhorias no ensino-aprendizado através da inserção do laboratório de matemática no ambiente escolar.

Palavras-chave: Trigonometria, Laboratório de Matemática e Materiais Manipuláveis.

ABSTRACT

This thesis presents an approach to the math lab in the school context, with a view to use of manipulatives in trigonometry. The goal is to guide teachers of Alagoas State Education Network in preparing lessons using the math lab, in order to enrich the teaching trigonometry. Initially, it took a historical analysis about the contents to be addressed. After the bibliographical analysis, a survey with teachers of state schools that are also students of PROFMAT / UFAL was held, addressing possible difficulties in using mathematics laboratory. Then it created a didactic sequence using math lab materials being applied in the 2nd year high school classes of the State School Odete Bonfim, Maribondo - AL. The aim of this work suggest to teachers and future teachers of mathematics, a material that can be used in the classroom to assist Trigonometry teaching, thus seeking improvements in teaching and learning by inserting the math lab at school.

Keywords: Trigonometry, Mathematics Laboratory, and manipulatives.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EVA	Ethil Vinil Acetat (Etileno Acetato de Vinila)
LDBEN	Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PEJA	Programa de Educação de Jovens e Adultos
PVC	Polyvinyl chloride (Policloreto de polivinila)
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino-aprendizado da matemática ainda apresenta, em seus diferentes níveis, deficiência em seu processo. Por isso, a disciplina de matemática continua sendo encarada nas salas de aula com uma maior rejeição, além de requerer por parte dos educandos mais dedicação no aprendizado de seus conceitos, exigindo linguagem e procedimentos apropriados para que suas relações sejam entendidas.

Estas “deficiências” na maioria das vezes decorrem de falta de oportunidade para conhecer metodologias de ensino diferenciadas. Percebemos que a maioria das aulas de matemática se baseia no método tradicional, pois alguns docentes não se preocupam em modificar sua metodologia de ensino, aperfeiçoando sua prática, limitando-se apenas ao uso do livro didático, pincel e lousa. O método tradicional acontece em dois momentos:

> [...] primeiro, o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas, geralmente em conformidade com um livro-texto. Em seguida, os alunos fazem alguns exercícios pela aplicação direta das técnicas apresentadas. O professor confere as respostas. (ALRØ E SKOVSMOSE, 2006, p.51).

Alrø e Skovsmose (2006, p. 52) sugerem a construção de uma metodologia investigativa: “Entendemos que a mera resolução de exercícios é uma atividade muito mais limitante para o aluno do que qualquer tipo de investigação”. Concordamos com Silva e Silva (2004, p. 10), quando afirmam que:

> A tarefa dos educadores em geral não é mais a de transmitir, e, sim, dar condições para que a aprendizagem realmente aconteça. O interesse na aprendizagem depende das situações estimuladoras criadas pelo educador para proporcionar ao educando o maior número possível de descobertas e desafios, estimulando, assim, a curiosidade dos alunos. (SILVA; SILVA, 2004, p.10)

Por este motivo, defendemos a utilização do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) como recurso investigativo no ensino e aprendizagem de trigonometria. Segundo Lorenzato (2009) um laboratório de matemática, mesmo em condições desfavoráveis, pode tornar o trabalho altamente gratificante para o professor e a aprendizagem compreensível e agradável para o aluno.

Porém, sabemos que a falta de recursos pedagógicos colabora para o aumento das dificuldades no processo ensino-aprendizagem. Em decorrência disso, a trigonometria, como parte integrante da matemática, também é vista dessa forma, ou seja, como área que gera dificuldades para ser ensinada e aprendida, principalmente por ser pouco trabalhada durante o ano letivo.

Baseado nesta problemática, o estudo proposto nessa dissertação tem por objetivo analisar as implicações que o uso do Laboratório de Ensino de Matemática pode trazer para melhoria do ensino-aprendizado de trigonometria no ensino médio e nortear professores da Rede Estadual de Educação de Alagoas na preparação de aulas utilizando o LEM.

A opção por esse estudo tem origem nas inquietações que se fizeram presentes no decorrer de minha trajetória como aluna e professora de uma escola da Rede Estadual de Ensino de Alagoas. Escola esta onde cursei todo o Ensino Fundamental II e Ensino Médio durante os anos de 2002 a 2008, retornando a este centro de ensino em novembro de 2012, dessa vez, como professora de Matemática.

Lembro-me, como hoje, de minha professora de matemática do terceiro ano do Ensino Médio que corriqueiramente citava um Laboratório de Matemática que chegou para a escola, mas que ninguém utilizava. Naquele momento, a escola não possuía estrutura física para organizar esses materiais num local adequado. Por este motivo, os materiais eram mantidos em caixas no depósito da escola e não eram utilizados.

Quando retornei a escola em 2012 várias mudanças haviam ocorrido em sua estrutura física. A escola já possuía Laboratório de Informática, Biblioteca e uma sala específica com materiais do Laboratório de Matemática, Química, Física, Biologia e Mapotecas de Ciências, História e Geografia. Porém, a sala com os materiais do Laboratório de Matemática não goza de espaço adequado para realização de atividades extraclasse. Além disso, os materiais do Laboratório de Matemática continuam sendo muito pouco ou quase nunca utilizados pelos professores. Realidade esta que não se restringe apenas a escola que leciono, durante a pesquisa realizada observou que essa realidade abrange boa parte das escolas da Rede Estadual de Ensino de Alagoas.

A ideia fundamental que gerou esta reflexão amadureceu com a própria experiência em minha prática educativa. Além da intensificação nos estudos e leituras de dissertações e teses a respeito da temática, debates, participação em grupos de trabalho e congressos, que contribuíram significativamente para isso.

Para tanto, num primeiro momento, que constitui o capítulo 02, buscamos conhecer como a trigonometria constitui-se na construção da história da matemática, suas transformações e mudanças, ou seja, inicialmente faremos um "apanhado" histórico da Matemática em particular da Trigonometria. Este estudo histórico além de dar uma visão quanto à importância histórica da trigonometria, ajuda na compreensão dos mesmos. Posteriormente, faremos uma análise sobre o que os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem para o ensino-aprendizado de trigonometria e o que as pesquisas destacam sobre o referido assunto. E por fim, analisaremos quais contribuições o uso do Laboratório de Ensino de Matemática podem auxiliar no ensino de trigonometria.

No capítulo 03, abordaremos os conhecimentos básicos em trigonometria necessários para a proposta didática, fazendo uso de linguagem clara e simples, visando discentes do ensino médio e sua ampla compreensão.

No capítulo 04 contemplamos a metodologia da pesquisa e todos os conceitos e objetivos inerentes a ela. Iniciando com os resultados da pesquisa realizada com professores atuantes em Escolas da Rede de Ensino Estadual de Alagoas para traçarmos um perfil da real situação dos Laboratórios de Ensino de Matemática das escolas e dos eventuais problemas enfrentados pelos professores, que dificultam a utilização do LEM. Posteriormente, foi realizado um levantamento dos materiais disponíveis no Laboratório de Ensino de Matemática cedidos pela Secretaria de Educação de Alagoas e a partir daí, selecionamos alguns materiais didáticos manipuláveis, instrumentos e atividades lúdicas destinados a fazer parte da sequência didática.

As sequências didáticas, aplicadas em sala de aula e autorizadas pela escola, estão descritas no capítulo 04, juntamente com algumas produções dos alunos e considerações do professor. Todas as atividades aplicadas estão em apêndice.

No capítulo 05, apresentamos as considerações finais do nosso trabalho.

2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Neste capítulo apresentaremos um pouco da história da trigonometria, mostrando como sua origem está relacionada com as questões mais práticas, como é o caso de medidas de distâncias inacessíveis e os estudos astronômicos.

Trazemos também um apanhado geral sobre as propostas curriculares existentes no país acerca do ensino de trigonometria e do uso do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM).

2.1. CONTEXTO HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

A palavra Trigonometria é composta por três radicais gregos: *tri* (três) + *gonos* (ângulos) + *metron* (medir), de onde nos sugere que Trigonometria significa medida (das partes) de um triângulo. Segundo Pitombeira e Roque (2013, p. 173), “ela surgiu devido às necessidades da Astronomia a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo, e para utilizar na Navegação e na Geografia” e está intimamente ligada ao desenvolvimento da geometria.

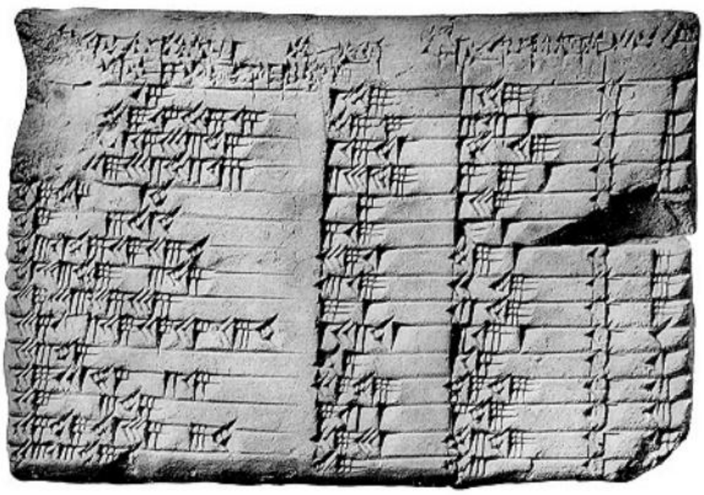
Os primeiros indícios do surgimento da Trigonometria são encontrados no Egito e na Babilônia. E seu desenvolvimento recebeu contribuições de importantes matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos, europeus, com um destaque especial para a matemática grega.

Segundo Mendes (2010), a utilização da trigonometria no Egito se deu a partir das medições das pirâmides conforme vestígios encontrados no Papiro Rhind, ver Figura 01, e também era utilizada na confecção do “relógio do sol” em 1500 a.C. Já na Babilônia, a trigonometria era utilizada na confecção de calendários, em épocas de plantio e estações do ano; eles também deixaram, em sua escrita cuneiforme, textos matemáticos que testemunham a utilização da trigonometria. O mais conhecido desses textos é o Plimpton 322, ver Figura 02.

Figura 01: Papiro de Rhind, Museu de Londres

Fonte: MENDES (2010)

Figura 02: Plimptom 322, Universidade de Columbia



Fonte: MENDES (2010)

Nos séculos IV e V a.C. os astrônomos babilônicos acumularam uma quantidade considerável de dados de observações e posteriormente os gregos tiveram acesso a grande parte desse material dando origem à trigonometria esférica, que estuda triângulos sobre a superfície de uma esfera, no entanto foi necessário desenvolver partes da trigonometria plana.

No oriente também são encontradas referências a trigonometria, por volta de 1110 a.C., acredita-se que triângulos retângulos eram utilizados para medir profundidade, distâncias e comprimentos. Costa (1997) afirma que na literatura chinesa encontramos certa passagem que podemos traduzir por*: "O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon (relógio de sol)",* o que mostra que a trigonometria plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C..

O marco da história da trigonometria se deu com o grego Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 120 a.C., sendo considerado o “pai” da trigonometria, pois foi o primeiro a construir uma tabela trigonométrica que relaciona cada arco da circunferência à sua respectiva corda. Além disso, segundo Pitombeira (2005), é provável que a divisão do círculo de 360º tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco.

Pouco se sabe sobre a vida de Hiparco e boa parte de suas contribuições em Trigonometria e Astronomia só são conhecidas devido citações em trabalhos posteriores, como por exemplo, os trabalhos de Cláudio Ptolomeu (100 d.C – 180 d.C.). Segundo Eves (2011), são creditados a Hiparco, em astronomia, a determinação do mês lunar médio, um cálculo preciso da inclinação eclíptica, estimativa dos equinócios, determinação do movimento médio da Lua e a organização de um catálogo de 850 estrelas. Além disso, em trigonometria, Têon de Alexandria (séc. IV) atribui a Hiparco um tratado de 12 livros que aborda a construção da *tábua de cordas*.

Outro matemático e astrônomo grego importante foi Menelau de Alexandria, viveu em torno de 100 a.C., que apresenta uma trigonometria bem desenvolvida. A ele, Têon também atribui um tratado sobre cordas de um círculo, em seis livros, que como vários outros, se perderam. (PITOMBEIRA 2005; EVES, 2011)

Felizmente, o tratado Sphaerica de Menelau, obra dividida em três livros, se preservou numa versão árabe. Segundo Boyer (2012) no Livro I desse tratado Menelau estabeleceu uma base para triângulos esféricos; no Livro II descreve a aplicação da geometria esférica aos fenômenos astronômicos e é de pouco interesse matemático; finalmente, no Livro III encontra-se o “teorema de Menelau” que desempenhou um papel fundamental na trigonometria esférica e na astronomia.

Contudo, a mais importante obra da Trigonometria Grega, o Almagesto, foi escrita pelo astrônomo, geógrafo e matemático Cláudio Ptolomeu, o qual viveu em torno de 150 d.C. Baseado nos estudos de Hiparco, a obra de Ptolomeu é famosa por sua compacidade e elegância, composta de 13 volumes, tendo por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a Terra está em seu centro[1].

---

[1] Teoria geocêntrica, que será substituída, já no século XV, pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico (1473-1543).

O desenvolvimento da trigonometria na obra de Ptolomeu ocorre nos capítulos 10 e 11 do primeiro volume, sendo que o capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos). Com as técnicas expostas, Ptolomeu é capaz de resolver qualquer triângulo, decompondo-o convenientemente em triângulos retângulos, a qual se tornou modelo até o renascimento. Segundo Boyer (2012), foi à fórmula para seno da diferença que Ptolomeu considerou útil para construção de suas tabelas.

Com os hindus, a Trigonometria continuou sendo desenvolvida com a aplicação na Astronomia. Surgiu uma série de textos, bem como a introdução de novas funções trigonométricas e o aperfeiçoamento de tabelas trigonométricas. Segundo Boyer (2012, p. 157) “uma das contribuições da Índia de maior influência na história da matemática foi à introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega de cordas”.

Após os hindus, as contribuições para a Trigonometria vieram dos árabes. Segundo Pitombeira (2005, p. 142), “eles introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante”. Além da ideia de introdução do círculo de raio unitário, que permitiu construir tabelas mais precisas.

Observamos que o interesse pela trigonometria entre gregos, hindus e árabes era motivados por algo comum, as aplicações à astronomia. A partir do Renascimento, época da expansão marítima européia, foi que a Trigonometria passou a ser utilizada em outras áreas, tais como a Cartografia e a Topografia.

No século XV a obra de Ptolomeu foi retomada pelo inglês George Peurbach (1423-1461), o qual iniciou uma tradução latina, diretamente do grego, do Almagesto. Com sua morte, seu discípulo Johann Muller (Regiomontanus) decidiu concluir a tradução da obra de Ptolomeu. Regiomontanus (1436 – 1476) foi um dos mais importantes matemáticos do século XV, escreveu *De Triangulis Omnimodis* que se divide em cinco livros, os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os demais, dedicados à trigonometria esférica. Até então, as únicas funções trigonométricas empregadas eram o seno e o cosseno. Posteriormente, Regiomontanus calcula novas tabelas trigonométricas incluindo nelas o uso das tangentes.

No século XVI, Nicolau Copérnico (1473 – 1543) completou alguns trabalhos de Regiomontanus publicando em sua obra, *De Lateribus et Angulus Trianguloum,* que contraria a teoria geocêntrica de Ptolomeu e desenvolveu a teoria Heliocêntrica.

Como sua teoria do universo necessitava de alguns desenvolvimentos em trigonometria, ele mesmo se incumbiu de implementá-los num tratado sobre a matéria, trazendo um grande avanço na trigonometria.

Por fim, não poderíamos deixar de mencionar Viéte (1540-1603), pois foi ele quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria, em 1580. Foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, o que representou grande progresso no campo da álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o $sen\ 1°$ com treze casas decimais.

Com esta análise histórica da trigonometria, fica evidente a necessidade de seu desenvolvimento para a humanidade, além disso, observamos que as concepções científicas são mutáveis e passíveis de mudanças ao longo de sua construção. Por estes motivos, consideramos importante no processo de ensino-aprendizagem conhecer a história que determinou o conhecimento matemático que pretendemos abordar.

2.2. OS PCNEM E O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Enquanto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[2] ainda não está consolidada, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) continuam sendo nossas principais referências no que diz respeito a organização e qualidades de ensino, a partir da Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional – LDBEN[3] 9.394/96, com o intuito de unificar e padronizar o ensino médio no país.

No que se refere à Matemática, os PCN's (BRASIL, 2000) articulam dois aspectos importantes, denominados formativo e instrumental. O primeiro é o das aplicações da matemática a várias atividades humanas cotidianas, proporcionando uma visão ampla e científica da realidade, além de ajudar a estruturar o pensamento, o raciocínio dedutivo e outras capacidades pessoais. O segundo é o da matemática pura, dando ênfase aos problemas gerados na própria ciência.

[2]A Base Nacional Comum Curricular será mais uma ferramenta que vai ajudar a orientar a construção do currículo das escolas de Educação Básica do Brasil. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/base/o-que> Acesso em: 15 mar. 2016.

[3] Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996, estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <http://www.jusbrasil.com.br/legislacao/109224/lei-de-diretrizes-ebases-lei-9394-96> Acesso em: 15 mar. 2016.

Entretanto, a matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. Desse modo, é indispensável que o aluno estabeleça gradualmente a diferença entre vários procedimentos de descoberta, invenção e validação.

Conhecidas as definições matemáticas, demonstrações e encadeamentos lógicos, é possível construir novos conceitos a partir de outros, além de validar e dar sentido às técnicas aplicadas. Dessa forma, o Ensino Médio cumpre o seu papel de ampliação, aprofundamento e organização dos conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental.

Nessa perspectiva, o Ensino Médio deve auxiliar no desenvolvimento da autonomia desses alunos, preparando-os para uma sociedade repleta de novas informações e tecnologias, além de viabilizar conhecimentos necessários para que seja possível prosseguir em patamares mais elaborados do saber. Assim, de acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2013), deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) o trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCN’s (BRASIL, 2000) e os PCN+ (BRASIL, 2002), o ensino da matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Contudo, estes parâmetros e orientações não apontam de forma específica quais conteúdos deverão ser trabalhados em sala de aula, mas dão diretrizes para a mobilização de conhecimentos e habilidades necessários. Dentre elas, os PCN+ destacam os seguintes direcionamentos para o ensino-aprendizado de matemática:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111)

No que se refere ao ensino e aprendizagem de Trigonometria, as propostas e orientações disponíveis sugerem que seu estudo esteja relacionado às aplicações, ou seja, o ensino de Trigonometria deve assegurar suas aplicações na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondam a fenômenos periódicos. Dessa forma, o ensino de trigonometria deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase no triângulo retângulo, no triângulo qualquer, na primeira volta do círculo trigonométrico e na perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas.

Além disso, segundo Bertoli e Schuhmacher (2013), o ensino de trigonometria não deve ser reduzido apenas às fórmulas trigonométricas, é necessário dar significado ao seu estudo, entender por que foi necessário ter tais conhecimentos, para que foram criados e como evoluíram ao longo do processo de construção da humanidade. Pois, é natural que os estudantes tenham curiosidade de saber de onde vieram tantos conhecimentos, o porquê de estudar esses conceitos e assim entender seu próprio papel na sociedade.

Por outro lado, a matriz de referência de Matemática do SAEB para o Ensino Médio[4] estabelece algumas habilidades e competências necessárias aos estudantes concluintes do Ensino Médio, em unidades denominadas Descritores, que são elas:

1) Descritores do Tema Espaço e Forma: Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo;
2) Descritores do Tema Números e Operações / Álgebra e Funções: Identificar gráficos e funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) reconhecendo suas propriedades.

Já a matriz de referência de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM[5] estabelece alguns objetos de conhecimentos referentes ao estudo de trigonometria, que são eles:

1) Conhecimentos Geométricos: Relações métricas nos triângulos e trigonometria do ângulo agudo.

---

[4] Disponível em <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/matrizes-de-referencia-professor>. Acesso em: 07 Abr. 2016.

[5] Disponível em <:http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em: 07 Abr. 2016.

2) Conhecimentos Algébricos: Relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

Desse modo, corroborando com Oliveira (2013), salientamos a importância de conhecer as propostas vigentes para que o professor possa garantir ao seu aluno acesso ao conhecimento básico que se espera desta fase de escolarização.

Além do mais, o estudo da Trigonometria evoluiu bastante e, atualmente, se faz presente em diversas ciências e na tecnologia. Segundo Lima et al. (2001), praticamente tudo o que envolve cálculo de distâncias está relacionado à Trigonometria.

Diversas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de trigonometria têm sido realizadas, destacando problemas diagnosticados no ensino de trigonometria. Dentre elas, podemos citar Costa (1997) com sua investigação sobre a influência de diferentes contextos na aprendizagem de trigonometria, desenvolvendo abordagens que envolviam o computador e o “mundo experimental”. Lindegger (2000) que investiga uma abordagem para o ensino de Trigonometria no triângulo retângulo, introduzindo conceitos a partir da manipulação de modelos, no Ensino Fundamental. Martins (2003) que introduz os conceitos de seno e cosseno no triângulo retângulo, na circunferência trigonométrica e no plano cartesiano, de forma coordenada, na tentativa de propiciar condições aos alunos do Ensino Médio de atribuírem significados a tais conceitos. E Silva (2009) que destaca a dificuldade de alguns professores de Matemática em ministrar aulas sobre trigonometria.

Observa-se, assim, que as dificuldades relacionadas à Trigonometria são diversas. Por outro lado, a importância deste tema ressalta a necessidade de que o mesmo seja bem compreendido, de forma a facilitar o entendimento de suas aplicações. Diante desse contexto, defende-se que o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) podem ser recursos favoráveis, se utilizados em atividades investigativas, pois permitem manipulação de variáveis e situações com maior controle do processo por parte do aluno.

2.3. O USO DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA (LEM)

Primeiramente, iremos compreender o que é um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), quais materiais o compõem e quais são os fins de um LEM.

Segundo Ewbank (1997, p. 214 apud Turrioni, 2004, p. 62):

> A expressão Laboratório de Matemática é utilizada para representar um lugar, um processo, um procedimento. Com o sentido de lugar, é uma sala estruturada para experimentos matemáticos e atividades práticas. O termo também é utilizado para caracterizar uma abordagem utilizada em sala onde os alunos trabalham de uma maneira informal, se movimentam, discutem, escolhem seus materiais e métodos e geralmente fazem e descobrem Matemática por si próprios.

Lorenzato (2009) afirma que existem diferentes concepções a respeito do LEM. Citando duas delas, inicialmente ele poderia ser um local para guardar materiais essenciais, tornando-os acessíveis para as aulas. Ampliando essa concepção de LEM, ele é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático.

As propostas de Ewbank e Lorenzato conduziram a discussão da análise da definição e a proposição de um LEM. Entretanto, sabemos que o uso do Laboratório de Ensino de Matemática está também voltado para a formação inicial do professor de Matemática, ou seja, o LEM é também um agente indispensável dentro da instituição formadora.

Além do mais, mesmo em condições desfavoráveis, o LEM pode tornar o trabalho altamente gratificante para o professor e a aprendizagem compreensível e agradável para o aluno, se o professor possuir uma boa formação e conhecimentos necessários para manipular e desenvolver tais atividades. Lorenzato (2009, p. 07) explica que, isso só acontece se o professor possuir:

> Conhecimento, crença e engenhosidade. Conhecimento porque, tendo em vista que ninguém ensina o que não sabe, é preciso conhecer matemática mas também metodologia de ensino e psicologia, enfim, possuir uma boa formação matemática e pedagógica; crença porque, como tudo na vida, é preciso acreditar naquilo que se deseja fazer, transformar ou construir; e engenhosidade porque, muito frequentemente, é exigido do professor uma boa dose de criatividade, não só para conceber, planejar, montar e implementar o seu LEM, como também para orientar seus alunos e transformá-los em estudantes e, de preferência, em aprendiz também.

Sendo assim, este ambiente proporciona, tanto ao aluno quanto ao professor, novas possibilidades de aprendizagem e construção de conhecimentos. Neste sentido, os Laboratórios de Ensino de Matemática podem favorecer uma relação pedagógica e melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Concordando com Silva e Silva (2004, p. 11), acreditamos que:

> O laboratório de ensino propiciará, dentre outras coisas, uma melhor relação interpessoal professor-aluno, gerando um ambiente mais salutar dentro da sala de aula, caracterizado por uma maior dinâmica do ensino, maior afetividade, motivação, participação, maior interação social, respeito pelos colegas, etc., tornando mais prazeroso o estudo.

Além disso, na construção de um ambiente com as características de um LEM em uma escola exige, por parte de seus realizadores e professores atuantes, uma profunda compreensão sobre os materiais existentes nesse laboratório e os aspectos que envolvem a utilização destes recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem da disciplina.

Existem diversos tipos de LEM, em razão de seus diferentes objetivos e concepções, além disso, os LEM são construídos a longo prazo com a participação de todos que compõem a escola. De modo geral, segundo Lorenzato (2009, p. 11), o LEM pode constituir-se de:

- Livros didáticos;
- Livros paradidáticos;
- Livros sobre temas matemáticos;
- Artigos de jornais e revistas;
- Problemas interessantes;
- Questões de vestibulares;
- Registros de episódios da história da matemática;
- Ilusões de ótica; falácias; sofismas e paradoxos;
- Jogos;
- Quebra-cabeças;
- Figuras;
- Sólidos;
- Modelos estatísticos ou dinâmicos;
- Quadros, murais ou pôsteres;
- Materiais didáticos industrializados;
- Materiais didáticos produzidos pelos alunos e professores;
- Instrumentos de medidas;
- Transparências, fitas, filmes, softwares;

- Calculadoras;
- Computadores;
- Materiais e instrumentos necessários à produção de materiais didáticos;
- Alunos monitores;
- Professores treinados.

Perez (1993) apud Turrioni (2009) afirma ainda que um LEM pode ser composto por diferentes tipos de materiais considerados didáticos, desde os mais comuns como giz, quadro, régua, compasso, esquadro, caderno, lápis, caneta, livros, entre outros; aos mais avançados como calculadora gráfica, computador e materiais industrializados.

Quanto à existência do espaço físico, Franzoni e Panossian (1999) apud Refosco e Bassoi[6] argumentam que o ideal é que o LEM tenha uma sala especialmente organizada e adequadamente equipada, porém, nada impede que a organização aconteça na forma de um laboratório circulante, numa caixa de objetos, numa estante de uma sala.

Baseado na concepção de que o aluno deve ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, Rêgo e Rêgo (2009) afirmam que o LEM instalado dentro de uma escola constitui um espaço de experimentação, tanto para alunos quanto para professores. Segundo eles, a utilização deste espaço permite ao educador trabalhar com novos materiais e metodologias sem o formalismo da sala de aula.

Rêgo e Rêgo (2009) ainda relacionam os principais objetivos das atividades realizadas em um LEM, no que diz respeito ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e à formação geral do aluno, reforçando a importância da utilização adequada dos materiais didáticos neste processo. Como exemplo, os autores apresentam algumas sugestões de atividades didáticas a serem realizadas em um LEM com a utilização de materiais didáticos de baixo custo e fácil confecção.

Assim, da mesma forma como Lorenzato (2009) e Rêgo e Rêgo (2009) ressaltam a responsabilidade do professor na escolha de qualquer tipo de material didático, destacando alguns cuidados básicos que ele deve ter ao elaborar atividades que envolvam este tipo de recurso: dar tempo para que os alunos

[6] Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marideisa_ita_refosco.pdf> Acesso em: 10 mar. 2016.

conheçam o material, incentivar a troca de ideias e discussões na turma, mediar o desenvolvimento das atividades, realizar uma escolha criteriosa do material, planejar as atividades com antecedência, estimular a participação dos alunos na confecção de materiais. (RÊGO; RÊGO, 2009).

Diante do exposto, tomando como base as diversas concepções a respeito do LEM analisadas nesta pesquisa, define-se como Laboratório de Ensino de Matemática um ambiente construído por professores com a colaboração dos alunos, equipe pedagógica da instituição e a comunidade em geral, com o objetivo de se realizarem atividades práticas por meio das quais os alunos manipulem materiais didáticos selecionados de acordo com objetivos preestabelecidos pelo professor. Estas atividades devem proporcionar uma construção dos saberes a partir da experiência, da reflexão, intuição, da dedução, enfim, da participação ativa dos alunos no processo de conhecimento. Deste modo, pretende-se que os conceitos matemáticos trabalhados nesta perspectiva sejam construídos e assimilados pelos alunos de forma significativa.

3. CONTEÚDOS BÁSICOS DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, apresentaremos os conteúdos básicos de trigonometria que consideramos ser essenciais na educação básica, além de serem pré-requisitos básicos para a realização das atividades de investigação em sala de aula.

As definições a seguir são baseadas em DANTE (2013), DO CARMO (2005), IEZZI et al (2010), LIMA et al (2006), MUNIZ NETO (2013) e PAIVA (2013).

3.1. ÂNGULOS

DEFINIÇÃO: Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ***ângulo*** (ou ***região angular***) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Figura 03: Regiões angulares no plano

Fonte: Autora, 2016.

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo; na figura acima, o ângulo da esquerda é convexo, ao passo que o da direita é não convexo. Denotamos um ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ escrevendo $\angle AOB$; o contexto deixará claro se estamos nos referindo ao ângulo convexo ou ao não convexo.

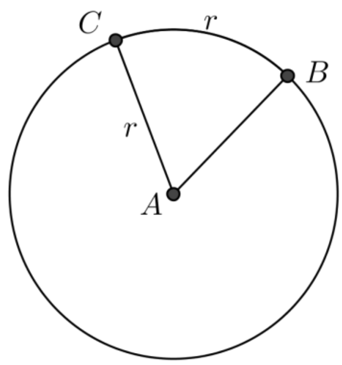
3.2. UNIDADES DE MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

Para a medida de uma região angular usam-se em geral unidades como “grau” e o “radiano”.

O grau, representado por °, é a unidade definida a partir da divisão da circunferência em 360 partes congruentes, em que cada uma dessas partes corresponde a $1°$. A circunferência toda corresponde a $360°$.

O radiano, representado por rad, é a unidade de medida obtida pela razão entre o comprimento do arco e o comprimentodo raio da circunferência que o contém. É uma unidade suplementar do SI para ângulos planos.

Figura 04: O radiano



Fonte: Autora, 2016

Na figura, a medida do arco BC (vamos adotar aqui, na notação de arco BC, o arco que inicia no ponto B e termina no ponto C no sentido anti-horário) é igual a 1 rad pois o comprimento do arco BC é igual à medida do raio da circunferência. Como o comprimento l de uma circunferência pode ser obtido pela fórmula $l = 2\pi \cdot r$, então o raio de uma circunferência cabe 2π vezes na circunferência e, assim, 2π rad equivale a $360°$.

De modo geral, sendo α a medida em radianos do arco de comprimento l, contido na circunferência de raio r, pode-se dizer que

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Com isso, as medidas de arcos de circunferência em graus são diretamente proporcionais às medidas de arcos de circunferência em radianos.

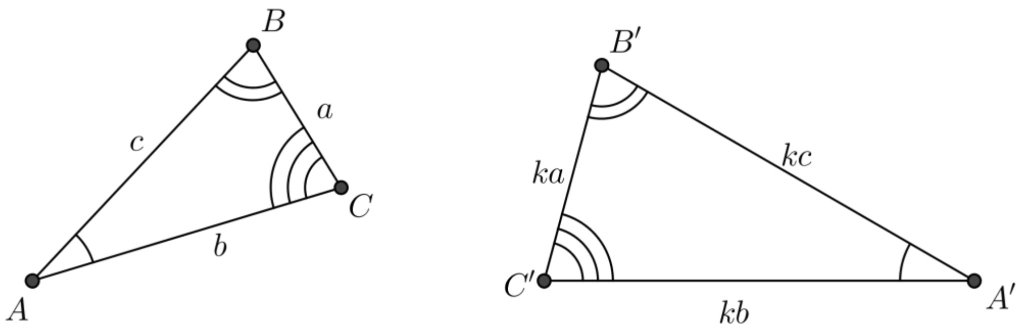
3.3. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

DEFINIÇÃO: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca, que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro de modo que:

I. Ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
II. Lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais.

Escrevemos $\mathrm{ABC} \sim \mathrm{A'B'C'}$ para indicar que os triângulos ABC e $\mathrm{A'B'C'}$ são semelhantes, com a congruência entre os vértices $\mathrm{A} \cong \mathrm{A'}$, $\mathrm{B} \cong \mathrm{B'}$ e $\mathrm{C} \cong \mathrm{C'}$ e com lados proporcionais $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$, com $k > 0$.

Figura 05: Semelhança de triângulos



Fonte: Autora, 2016

3.3.1. CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Pela definição de semelhança de triângulos é necessário que sejam obedecidas seis condições: três congruências e três proporcionalidades. Porém, escolhendo adequadamente algumas dessas seis condições, percebemos que, se elas forem obedecidas, as outras também o serão. Qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a semelhança de dois triângulos é chamado de *casos de semelhança.*

Serão enunciados a seguir os casos principais de semelhança de triângulos[7]:

[7] Para verificar as demonstrações dos casos de semelhança de triângulos veja-as no livro “Geometria”, do prof. Antônio Caminha Muniz Neto, editado pela SBM, nas páginas 149 à 151.

3.3.1.1. Caso A.A. (ângulo – ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

3.3.1.2. Caso L.A.L. (lado – ângulo – lado)

Se dois triângulos têm lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

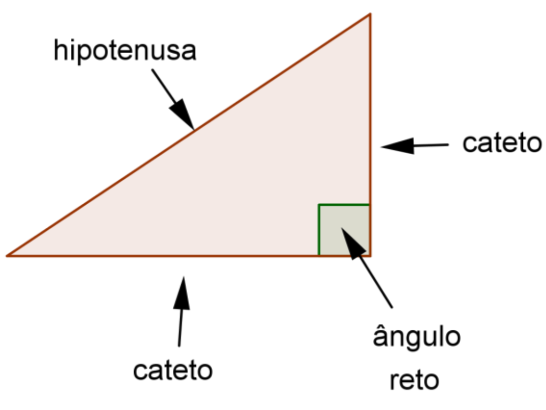
3.3.1.3. Caso L.L.L (lado – lado – lado)

Se dois triângulos têm os pares de lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

3.4. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo é retângulo quando possui um de seus ângulos internos reto. O maior lado desse triângulo é chamado de hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) e os outros dois lados, perpendiculares entre si, são chamados de catetos.

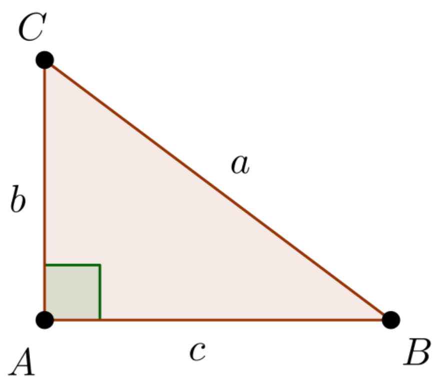
Figura 06: Elementos do Triângulo Retângulo



Fonte: Autora, 2016.

Utilizaremos a seguinte notação para os elementos do triângulo retângulo ABC:

Figura 07: Triângulo Retângulo



Fonte: Autora, 2016.

Lados: $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Ângulos Internos: $\hat{A} = \angle BAC$, $\hat{B} = \angle ABC$ e $\hat{C} = \angle ACB$.

Medida dos Lados: a = medida de $\overline{BC}$.

b = medida de $\overline{AC}$.

c = medida de $\overline{AB}$.

Medida dos Ângulos: medida de $\angle BAC = m(\angle BAC)$.

medida de $\angle ABC = m(\angle ABC)$.

medida de $\angle ACB = m(\angle ACB)$.

3.4.1. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

PROPOSIÇÃO: *Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = m$ e $\overline{CH} = n$, temos:*

(i) $c^2 = am$;

(ii) $ah = bc$;

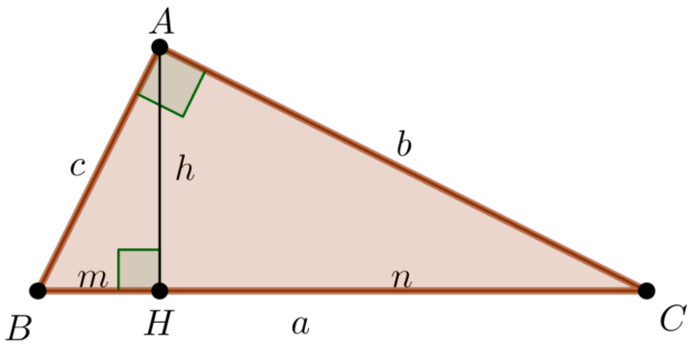
(iii) $b^2 = an$;

(iv) $h^2 = mn$.

Demonstração:

Seja H o pé da altura relativa à hipotenusa, observe que $\overline{AH}$ divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si, pelo caso de semelhança de triângulos AA (ângulo-ângulo).

Figura 08: Relações Métricas no Triângulo Retângulo



Fonte: Autora, 2016.

Da semelhança entre os triângulos ABC e HBA, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{BA}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am. \tag{I}$$

Da semelhança entre os triângulos ABC e DAC, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc; \tag{II}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an. \tag{III}$$

Da semelhança entre os triângulos HBA e HAC, temos que:

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HA}} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn. \tag{IV}$$

C.Q.D.

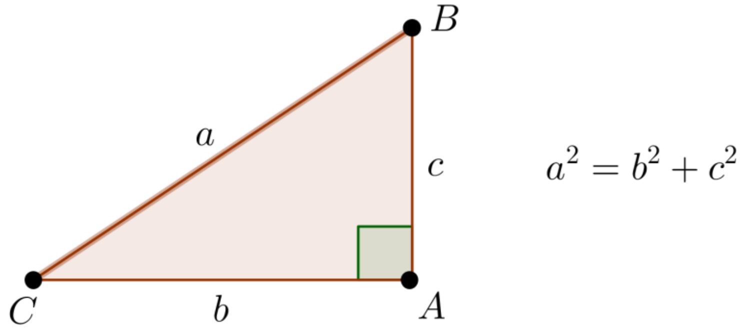
.

3.4.2. TEOREMA DE PITÁGORAS

Um resultado fundamental envolvendo triângulos retângulos é o Teorema de Pitágoras, que enunciamos e demonstramos a seguir:

TEOREMA (Pitágoras): *"Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos."*

Figura 09: Teorema de Pitágoras



Fonte: Autora, 2016.

Demonstração:

Somando membro a membro os resultados (I) e (III) obtidos na proposição anterior, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am \implies b^2 + c^2 = a(n + m).$$

Como $m + n = a$, então

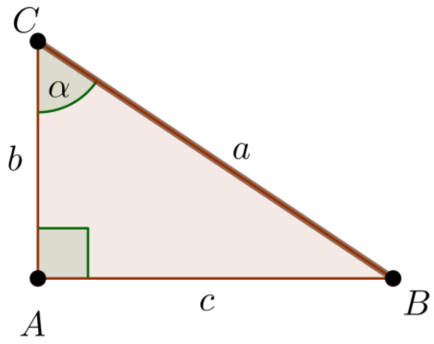
$$b^2 + c^2 = a^2.$$

C.Q.D.

3.4.3. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja ABC um triângulo retângulo em A, em que o ângulo $A\hat{C}B$ é igual a α, como na figura a seguir, podemos definir três razões entre os lados do triângulo ABC, que denominamos razões trigonométricas de α.

Figura 10: Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo



Fonte: Autora, 2016.

- **Seno:** é a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa. Notação:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

No caso, temos que $sen\ \hat{B} = \frac{b}{a}$ e $sen\ \hat{C} = \frac{c}{a}$.

- **Cosseno:** é a razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa. Notação:

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

No caso, temos que $cos\ \hat{B} = \frac{c}{a}$ e $cos\ \hat{C} = \frac{b}{a}$.

- **Tangente:** é a razão entre as medidas dos catetos oposto e adjacente ao ângulo. Notação:

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

No caso, temos que $tg\ \hat{B} = \frac{b}{c}$ e $tg\ \hat{C} = \frac{c}{b}$.

Estas definições fazem sentido devido à semelhança de todos os triângulos retângulos em que um dos ângulos agudos é α (caso AA); em consequência disto, estas razões são sempre as mesmas, não dependendo do tamanho do triângulo.

(LIMA et al., 2013). É importante ressaltar que os valores destas razões, para um mesmo ângulo α, não são independentes entre si, visto que as medidas dos lados de um triângulo retângulo estão associados pelo Teorema de Pitágoras.

3.4.3.1. RELAÇÃO FUNDAMENTAL ENTRE SENO E COSSENO DE UM ÂNGULO

PROPOSIÇÃO: Para todo $0 < \alpha < 90°$, temos

$$sen^2\,\alpha\ +\ cos^2\,\alpha\ =\ 1.$$

Demonstração:

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $ABC,$ na figura 09, temos que:

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por a^2, segue que:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(sen\,\hat{B}\right)^2 + \left(\cos\hat{B}\right)^2 = 1\ ou\ \left(sen\,\hat{C}\right)^2 + \left(\cos\hat{C}\right)^2 = 1.$$

C.Q.D.

3.4.3.2. RELAÇÃO ENTRE TANGENTE, SENO E COSSENO

PROPOSIÇÃO: Para todo $0 < \alpha < 90°$ a tangente de α, abreviada $tg\,\alpha$, pode ser calculada por:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}.$$

Demonstração:

Do triângulo retângulo $ABC,$ na figura 10, temos que $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ e $cos\,\hat{B} = \frac{c}{a}$. Desta forma,

$$\frac{sen\,\hat{B}}{cos\,\hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\,\hat{B}.$$

De modo análogo, temos que $tg\,\hat{C} = \frac{sen\,\hat{C}}{cos\,\hat{C}}$.

C.Q.D.

3.4.3.3. RELAÇÃO ENTRE SENO E COSSENO DE ÂNGULOS COMPLEMENTARES

PROPOSIÇÃO: Para todo $0 < \alpha < 90°$, temos

$sen\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$ e $cos\,\alpha = sen\,(90° - \alpha)$.

Demonstração:

Dois ângulos são ditos complementares quando a soma desses ângulos resulta em um ângulo reto.

No triângulo da Figura 06, observamos que $m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = 90\,°$, ou seja, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos complementares.

Temos ainda que $sen\,\hat{B} = cos\,\hat{C} = \frac{b}{a}$ e $sen\,\hat{C} = cos\,\hat{B} = \frac{c}{a}$.

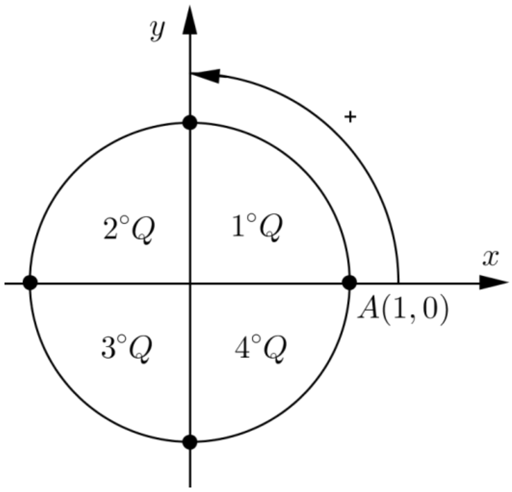
C.Q.D.

3.5. O CICLO TRIGONOMÉTRICO

DEFINIÇÃO: Denomina-se **Ciclo** ou **Circunferência Trigonométrica** a circunferência orientada, de centro na origem do sistema cartesiano ortogonal, cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário. Note que o comprimento da circunferência é 2π, pois o raio é unitário.

Fixamos o ponto A de coordenadas $(1,0)$ como origem dos arcos, conforme a figura 10. Observe que os eixos x (eixo horizontal) e y (eixo vertical) dividem o ciclo trigonométrico em quatro partes congruentes, denominamos quadrantes, e são enumeradas a partir do ponto A, no sentido positivo da circunferência.

Figura 11: Ciclo Trigonométrico

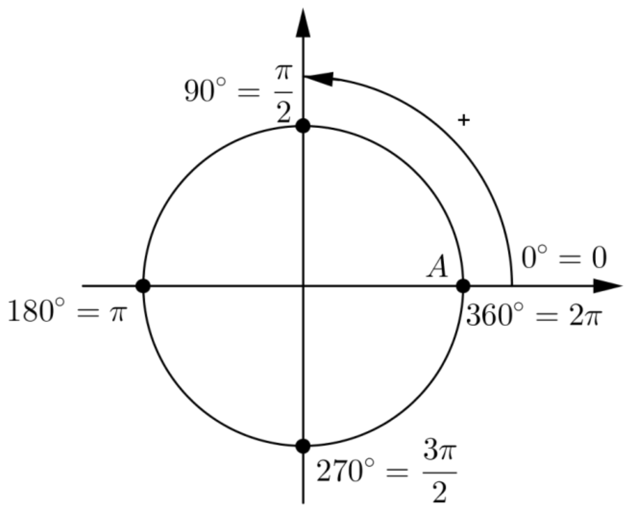


Fonte: Autora, 2016.

3.5.1. ARCOS TRIGONOMÉTRICOS

Aos pontos da circunferência trigonométrica associamos medidas em grau ou em radiano. Cada medida associada a um ponto M indica a medida do arco AM.

Figura 12: Arcos Trigonométricos



Fonte: Autora, 2016

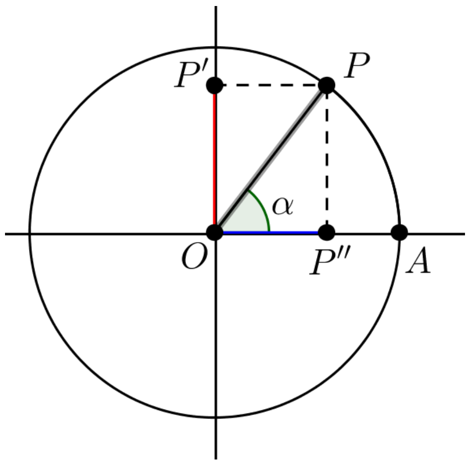
3.5.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Os conceitos de seno, cosseno e tangente se estende também para um número real α, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Além disso, podemos definir três outras razões trigonométricas na circunferência: a cotangente, a cossecante e a secante.

3.5.2.1. SENO E COSSENO

Consideremos os pontos A e P da circunferência trigonométrica, com $A(1{,}0)$ e $P(P'', P')$ um ponto qualquer, imagem de um número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, conforme a figura abaixo.

Figura 13: Seno e Cosseno na Circunferência



Fonte: Autora, 2016.

Analisando o triângulo retângulo $OP''P$, temos que:

$$sen\,\alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

$$\cos\alpha = \frac{OP''}{OP} = \frac{OP''}{1} = OP''.$$

DEFINIÇÃO: Para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, definimos o **seno** e o **cosseno** α, abreviados respectivamente $sen\,\alpha$ e $\cos\alpha$, por:

$$\cos\alpha = abscissa\ de\ P;\ sen\,\alpha = ordenada\ de\ P.$$

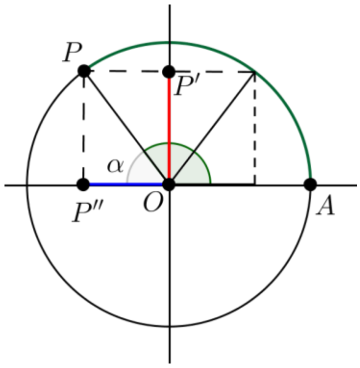
Daí, se P é o ponto do ciclo trigonométrico, podemos escrever: $P(\cos\alpha\,, sen\,\alpha)$.

Essa nova definição tem a vantagem de não ficar restrita apenas aos ângulos agudos. O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes, assim, podemos falar em seno e cosseno de ângulos de qualquer medida. Além disso, através da simetria podemos relacionar o seno e o cosseno de um arco de qualquer quadrante com os valores do primeiro quadrante. Desse modo, se o ângulo está localizado:

- No segundo quadrante, temos

$$sen\,(\pi-\alpha)=sen\,\alpha;\cos(\pi-\alpha)\ =-\cos\alpha.$$

Figura 14: Seno e Cosseno de um ângulo no segundo quadrante

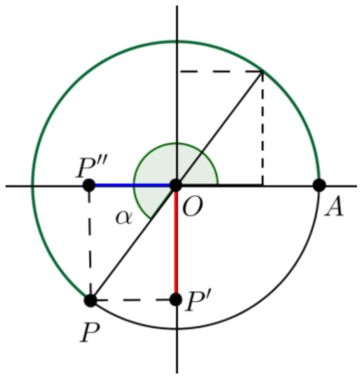


Fonte: Autora, 2016.

- No terceiro quadrante, temos

$$sen\,(\pi+\alpha)=-\,sen\,\alpha;\cos(\pi+\alpha)\ =-\cos\alpha.$$

Figura 15: Seno e Cosseno de um ângulo no terceiro quadrante

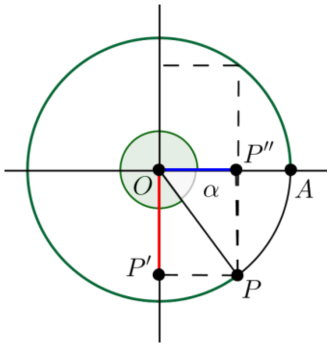


Fonte: Autora, 2016.

- No quarto quadrante, temos:

$$sen\,(2\pi-\alpha)=-\,sen\,\alpha;\cos(2\pi-\alpha)\;=\cos\alpha.$$

Figura 16: Seno e Cosseno de um ângulo no quarto quadrante



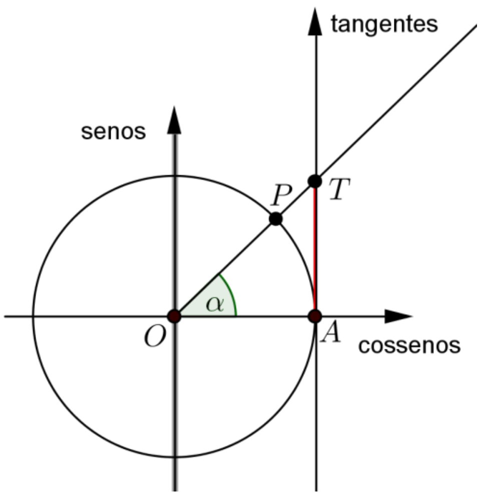
Fonte: Autora, 2016.

Como o raio do ciclo trigonométrico é unitário, temos que, para todo $\alpha \in [0\,,2\pi]$, $-1 \leq sen\,\alpha \leq$ e $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$. Pois, os segmentos $\overline{OP'}, \overline{OP_1'}$, $\overline{OP_2'}$, $\overline{OP''}, \overline{OP_1''}$ e $\overline{OP_2''}$ são sempre internos ao ciclo, para qualquer que seja a posição assumida por P.

3.5.2.2. TANGENTE

Para estabelecer a tangente de um número real α, vamos acrescentar ao ciclo trigonométrico um terceiro eixo, ver figura 17. Esse eixo, denominado **eixo das tangentes**, é obtido ao se tangenciar o ciclo trigonométrico no ponto A (1,0).

Figura 17: Tangente de α



Fonte: Autora, 2016.

Note que, o ponto A é a origem do eixo das tangentes e sua orientação “para cima” coincide com a do eixo dos senos. Unindo-se o centro O à extremidade P de um arco de medida α radianos (P é imagem do número real α), construímos a semi-reta $\overrightarrow{OP}$, que intercepta o eixo das tangentes no ponto T.

Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é a tangente do arco de α. Considerando a orientação do eixo das tangentes, temos, para P pertencente ao primeiro quadrante que

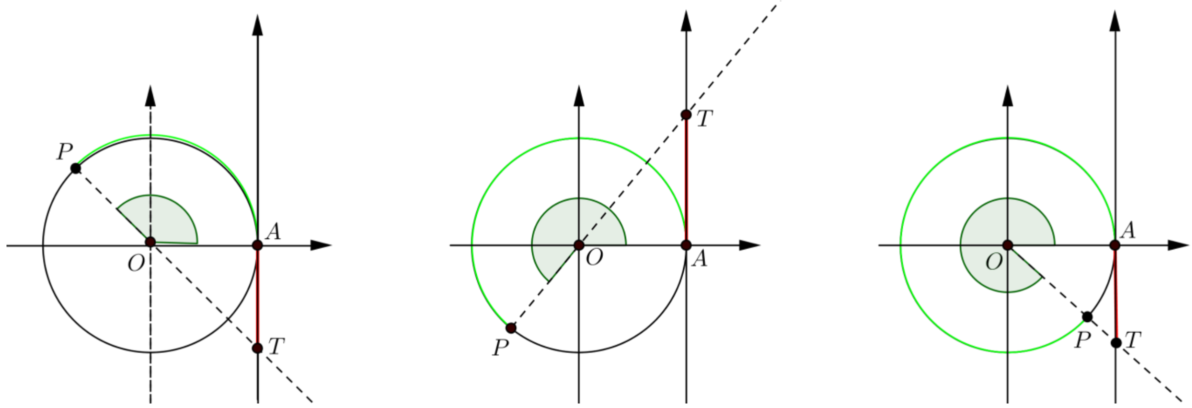
$$tg\ \alpha > 0.$$

Variando a posição de P nos demais quadrantes, temos:

- No segundo quadrante, $tg\ \alpha < 0$.
- No terceiro quadrante, $tg\ \alpha > 0$.
- No quarto quadrante, $tg\ \alpha < 0$.

Figura 18: Tangente de α, com $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$

2º Q 3º Q 4ºQ



T está abaixo de A. T está acima de A. T está abaixo de A.

$tg\ \alpha < 0$ $tg\ \alpha > 0$ $tg\ \alpha < 0$

Fonte: Autora, 2016

Observe que:

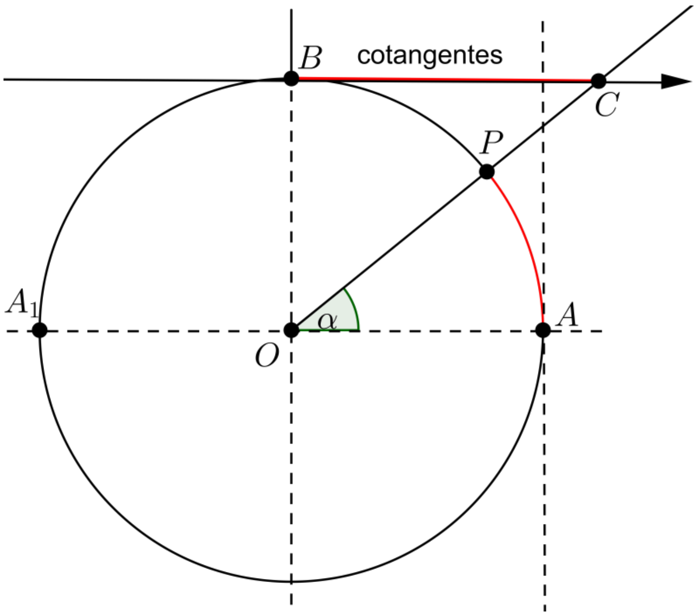
- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ponto P pertence ao eixo dos senos e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ será paralela ao eixo das tangentes. Neste caso, não se define $tg\frac{\pi}{2}$. Analogamente, não se define $tg\frac{3\pi}{2}$.

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intercepta o eixo das tangentes em sua origem A, isto é, $AT = 0$. Assim, $tg\ 0 = tg\ \pi = tg\ 2\pi = 0$.

3.5.2.3. COTANGENTE

Assim como para as tangentes, para estabelecer a cotangente é necessário acrescentar ao ciclo trigonométrico um quarto eixo denominado **eixo das cotangentes**. Esse eixo é obtido ao se tangenciar o ciclo trigonométrico no ponto $B(0,1)$. O ponto B será a origem do eixo das cotangentes e sua orientação (para a direita) coincide com o eixo dos cossenos.

Figura 19: Cotangente de $\boldsymbol{\alpha}$



Fonte: Autora, 2016.

Unindo-se o centro O à extremidade P ($P \neq A$ e $P \neq A_1$) de um arco de medida α radianos (P é imagem do número real α), construímos a semi-reta $\overrightarrow{OP}$, que intercepta o eixo das cotangentes no ponto C.

Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{BC}$ é a **cotangente de $\boldsymbol{\alpha}$**.

Note que:

- Se P pertence ao 1º Q, temos $cotg\ \alpha > 0$.

- Se P pertence ao 2º Q, temos $cotg\ \alpha < 0$.
- Se P pertence ao 3º Q, temos $cotg\ \alpha > 0$.
- Se P pertence ao 4º Q, temos $cotg\ \alpha < 0$.

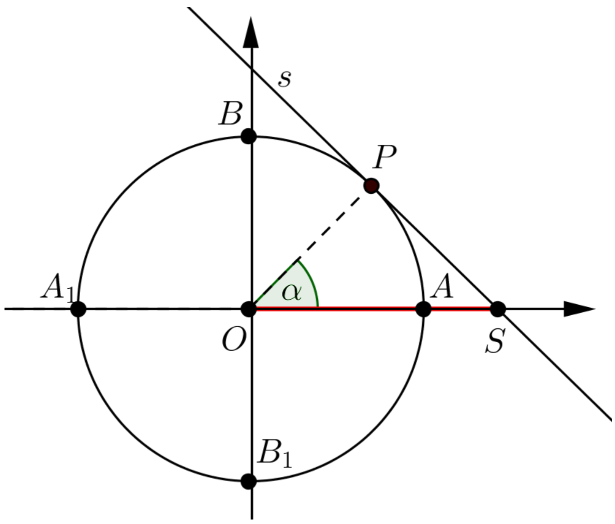
Quando o ponto P coincide com A ou A_1, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das cotangentes e, deste modo, não se definem $cotg\ 0$, $cotg\ \pi$ e $cotg\ 2\pi$.

Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intercepta o eixo das cotangentes em sua origem B, isto é, $BC = 0$. Assim, $tg\ \frac{\pi}{2} = tg\ \frac{3\pi}{2} = 0$.

3.5.2.4. SECANTE

No ciclo trigonométrico a seguir, seja P a imagem de um número real α tal que $m(\widehat{AP}) = \alpha$ rad, com $P \neq B$ e $P \neq B_1$. Considere a reta s tangente ao ciclo em P; s intercepta o eixo dos cossenos no ponto S.

Figura 20: secante de α



Fonte: Autora, 2016.

À medida algébrica do segmento $\overline{OS}$ damos o nome de **secante de α.**

Note que:

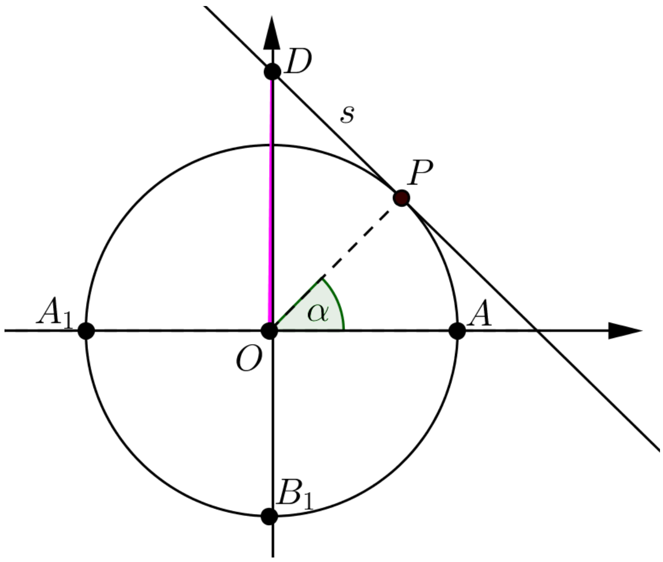
- Se P pertence ao 1º ou 4º quadrantes, então $\sec \alpha > 0$.
- Se P pertence ao 2º ou 3º quadrantes, então $\sec \alpha < 0$.

- Se P coincide com B ou B_1, a reta tangente ao ciclo por B (ou B_1) é paralela ao eixo dos cossenos e, deste modo, não é possível definir $\sec\frac{\pi}{2}$ e $\sec\frac{3\pi}{2}$. .
- Se $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$, o ponto P coincide com o ponto S e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ coincide com o eixo dos cossenos, isto é, $OS = OP = 1$. Assim, $\sec 0 = 1, \sec\pi = -1$ e $\sec\ 2\pi = 1$.

3.5.2.5. COSSECANTE

A definição da cossecante no ciclo trigonométrico é semelhante à apresentada para a secante. Seja P a imagem de um número real α tal que a medida do arco AP seja α rad, com $P \neq A$ e $P \neq A'$. Considere a reta s tangente ao ciclo em P; s intercepta o eixo dos senos no ponto D.

Figura 21: Cossecante de $\boldsymbol{\alpha}$



Fonte: Autora, 2016.

À medida algébrica do segmento $\overline{OD}$ damos o nome de **cossecante de $\boldsymbol{\alpha}$.**

Note que:

- Se P pertence ao 1º ou 2º quadrantes, então $\csc\alpha > 0$.
- Se P pertence ao 3º ou 4º quadrantes, então $\csc\alpha < 0$.

- Se P coincide com A ou A_1, a reta tangente ao ciclo por A (ou A_1) é paralela ao eixo dos senos e, deste modo, não se definem $\csc 0$, $\csc \pi$ e $\csc 2\pi$.
- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, o ponto P coincide com o ponto D e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ coincide com o eixo dos senos, isto é, $OD = OP = 1$. Assim, $csc\ \frac{\pi}{2} = 1$ e $\csc \frac{3\pi}{2} = -1$.

3.5.2.6. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

As relações entre os valores das funções trigonométricas de um mesmo arco são denominadas **relações trigonométricas**. As mais usuais são:

$$sen^2\, x + cos^2\, x = 1,\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x},\ \text{para todo } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Além delas, temos outras relações fundamentais:[8]

- $cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} = \frac{\cos x}{sen\ x}$, para todo $x \neq k\pi$
- $\sec x\ = \frac{1}{\cos x}$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\csc x = \frac{1}{sen\ x}$, para todo $x \neq k\pi$
- $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\csc^2 x = 1 + cotg^2\, x$, para todo $x \neq k\pi$.

Observamos que as relações trigonométricas apresentadas utilizando o ciclo trigonométrico possuem uma dedução mais acessível, além de facilitar a compreensão de suas definições. Uma vez compreendida as noções apresentadas, o educando poderá manipular expressões mais complexas, sem maiores dificuldades.

[8] As demonstrações dessas relações fundamentais serão realizadas na metodologia da pesquisa.

3.6. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER

3.6.1. LEI DOS SENOS

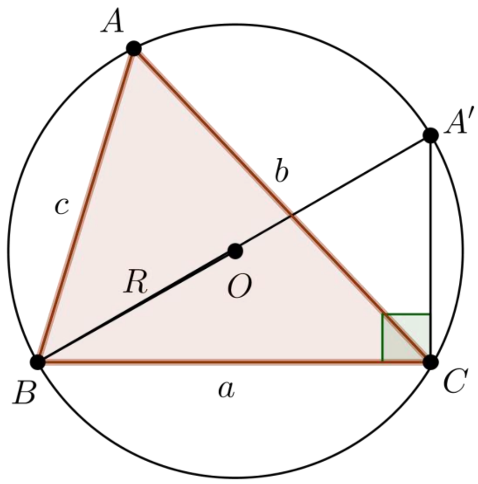
TEOREMA: Em qualquer triângulo $ABC,$ as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e sua constante de proporção é igual a $2R$, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo considerado. Ou seja,

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2R.$$

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro da circunferência correspondente a $\overline{BA'}$ em seguida, trace $\overline{A'C}$.

Figura 22: Lei dos Senos



Fonte: Autora, 2016

Observe que $\hat{A} = \widehat{A'}$, pois eles determinam na circunferência o mesmo arco BC. O triângulo $A'BC$ é retângulo em C, pois ele está inscrito na semicircunferência.

Considerando o triângulo $A'BC,$ temos que $\overline{BA'} = 2R$ e $\overline{BC} = a$. Assim,

$$sen\,\widehat{A'} = \frac{a}{2R} = sen\,\hat{A} \Longrightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = 2R.$$

Analogamente, temos:

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = 2R \;e\; \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2R.$$

Daí, concluímos que

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2R.$$

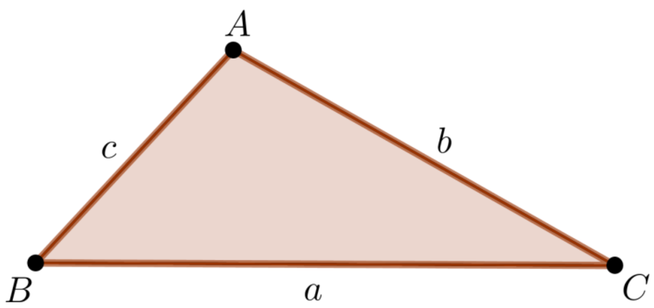
C.Q.D.

3.6.2. LEI DOS COSSENOS

TEOREMA: Em qualquer triângulo ABC, de lados medindo a, b e c e ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}.$$

Figura 23: Lei dos Cossenos



Fonte: Autora, 2016.

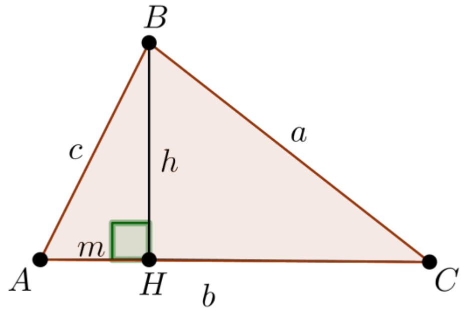
Demonstração:

A demonstração será feita em dois casos, o caso em que o triângulo ABC é acutângulo e o caso em que o triângulo ABC é obtusângulo em A.

<u>1º Caso</u>: Triângulo Acutângulo

Seja um triângulo acutângulo ABC com lados a, b e c, então $\hat{A} < 90°$, conforme a figura 24. Seja H o pé da altura em relação ao vértice B.

Figura 24: Lei dos Cossenos (Triângulo Acutângulo)



Fonte: Autora, 2016

Note que o triângulo ABH é retângulo em H, fazendo $\overline{AB} = c$, $\overline{AH} = m$ e $\overline{BH} = h$, temos:

$$c^2 = h^2 + m^2 \Longrightarrow h^2 = c^2 - m^2. \text{(I)}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{m}{c} \Longrightarrow m = c \cdot \cos \hat{A}. \text{(II)}$$

Note que o triângulo BHC é retângulo em H, fazendo $\overline{BC} = a$, $\overline{BH} = h$ e $\overline{HC} = b - m$, temos:

$$a^2 = h^2 + (b - m)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bm + m^2. \text{(III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

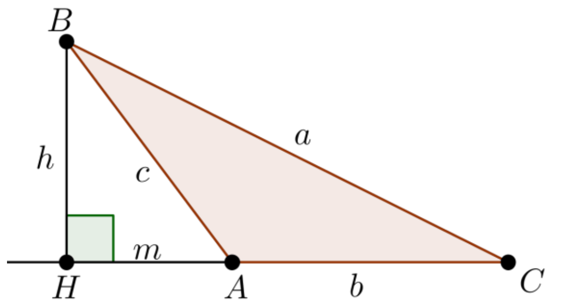
$$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} + m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

<u>2º Caso</u>: Triângulo Obtusângulo

Seja ABC um triângulo obtusângulo, com $90° < \hat{A} < 180°$, conforme a figura 25. Seja H o pé da altura em relação ao vértice B.

Figura 25: Lei dos Cossenos (Triângulo Obtusângulo)



Fonte: Autora, 2016.

Fazendo, da mesma forma, no triângulo ABH, $\overline{\mathrm{AB}} = c$, $\overline{AH} = m$ e $\overline{BH} = h$, temos:

$$c^2 = h^2 + m^2 \Longrightarrow h^2 = c^2 - m^2. \text{(I)}$$

$$\cos(180° - \hat{\mathrm{A}}) = \frac{m}{c} \Longrightarrow m = c \cdot \cos(180° - \hat{\mathrm{A}}) \Longrightarrow m = -c \cdot cos\,\hat{\mathrm{A}}. \text{(II)}$$

Note que o triângulo BHC é retângulo em H, fazendo $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{BH}} = h$ e $\overline{\mathrm{HC}} = b + m$, temos:

$$a^2 = h^2 + (b + m)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 + 2bm + m^2. \text{(III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bc \cdot cos\,\hat{\mathrm{A}} + m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\hat{\mathrm{A}}.$$

Analogamente, podemos provar:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\widehat{B}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\hat{C}.$$

C.Q.D.

Observe que se um dos ângulos é reto, a Lei dos Cossenos tem como conseqüência o Teorema de Pitágoras.

Por fim, ressaltamos que as noções apresentadas neste capítulo são a base necessária para o aprendizado da Trigonometria na Geometria Euclidiana.

4. METODOLOGIA

O objetivo deste capítulo é apresentar o processo de desenvolvimento da pesquisa, descrevendo a trajetória percorrida para alcançar os objetivos pretendidos. Apresentará o processo de coleta de dados: instrumentos utilizados, que estarão em anexo à dissertação, o processo de análise e interpretação dos dados, assim como os sujeitos envolvidos na pesquisa.

O processo de coleta de dados foi dividido em duas etapas: a entrevista com os professores de matemática que atuam em Escolas do Estado de Alagoas e a proposta de uma sequência didática sobre Trigonometria utilizando o LEM numa turma de 2º ano do Ensino Médio.

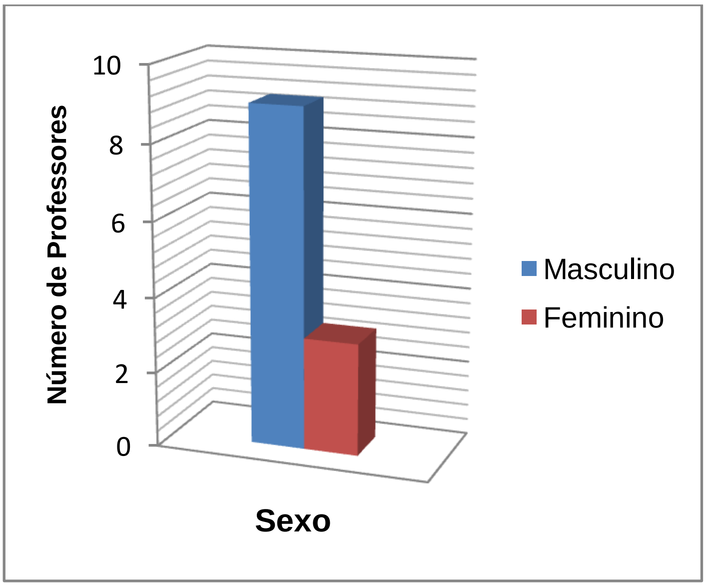
4.1. A ENTREVISTA

Inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica e qualitativa com um grupo de docentes da Rede Estadual de Ensino de Alagoas que faziam parte do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Federal de Alagoas (UFAL).

De um grupo de docentes que faziam parte das turmas de 2014 e 2015 do PROFMAT/UFAL selecionamos 12 professores para responder um questionário sobre o Laboratório de Ensino de Matemática das escolas da Rede Estadual de Alagoas para tentar descobrir as possíveis dificuldades enfrentadas na utilização do LEM.

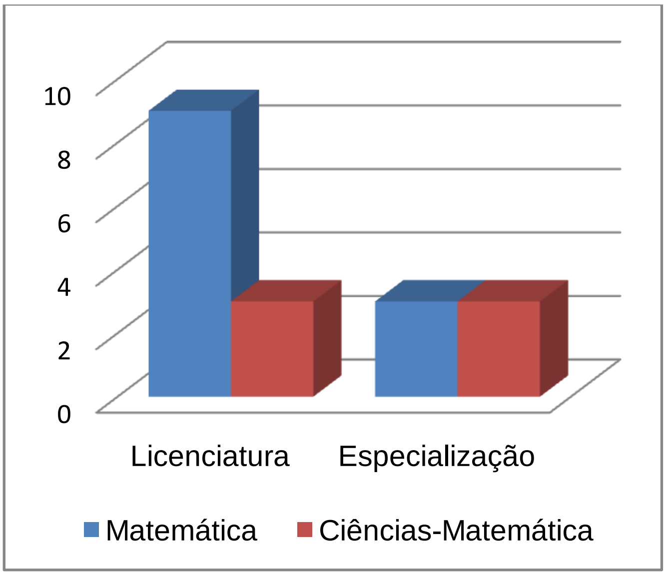
Dos 12 professores entrevistados, 09 são do sexo masculino e 03 do sexo feminino. Estão na faixa etária de 28 a 47 anos. Em relação à formação acadêmica dos entrevistados, 09 são licenciados em matemática, 03 são licenciados em Ciências-Matemática, dos quais apenas 06 professores possuem especialização.

Figura 26: Sexo dos Professores da Rede Estadual de Alagoas Entrevistados



Fonte: Autora, 2016.

Figura 27: Formação Acadêmica dos Professores da Rede Estadual de Alagoas Entrevistados

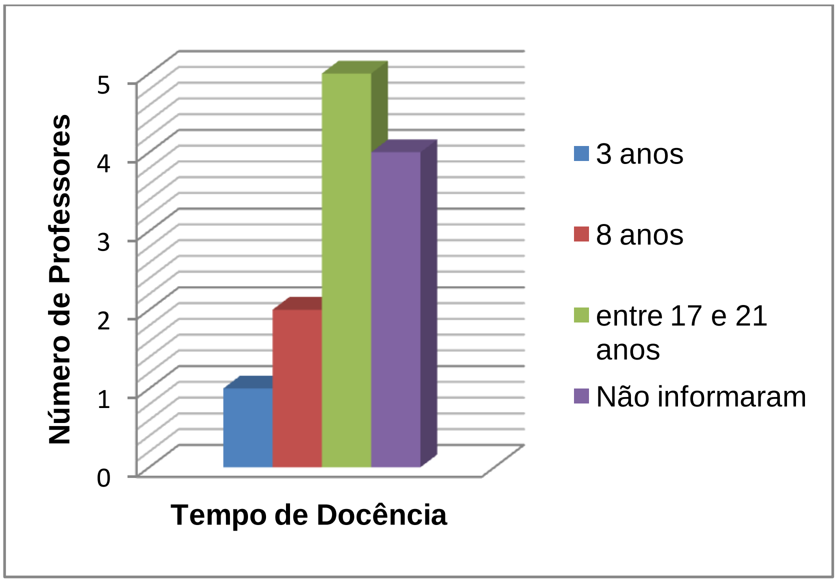


Fonte: Autora, 2016.

O tempo de docência de cinco destes professores está entre 17 a 21 anos, dois professores possuem 08 anos de experiência, um professor possui 03 anos e quatro professores não informaram o tempo de docência.

Durante este tempo todos os entrevistados lecionaram ou lecionam no ensino fundamental e/ou médio e apenas dois deles também lecionam no ensino superior. Apenas dois entrevistados lecionam somente na Rede Estadual de Alagoas, os outros dez entrevistados lecionam em duas ou mais escolas.

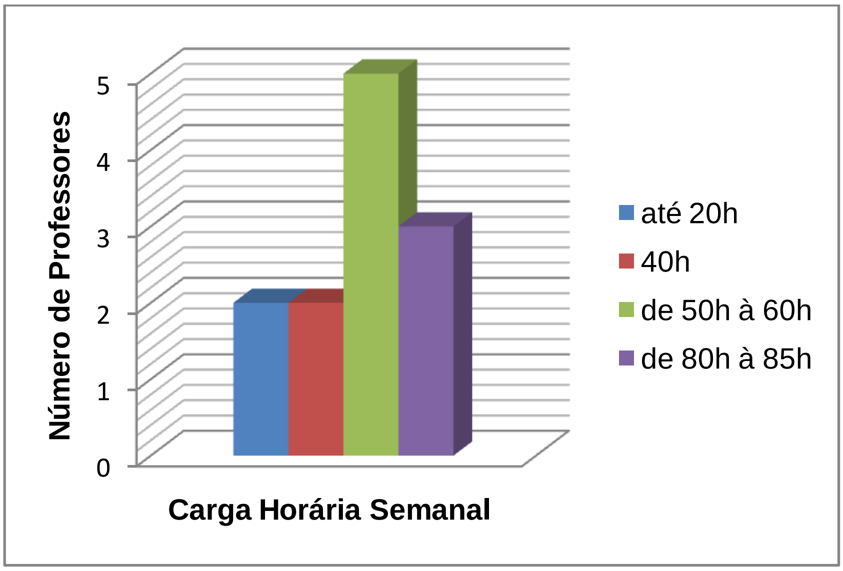
Figura 28: Tempo de Docência dos Professores da Rede Estadual de Alagoas Entrevistados



Fonte: Autora, 2016.

A carga horária de três dos entrevistados está entre 80h à 85h, cinco entrevistados possuem de 50h à 60h semanais, dois entrevistados possuem 40h e dois entrevistados possuem até 20h.

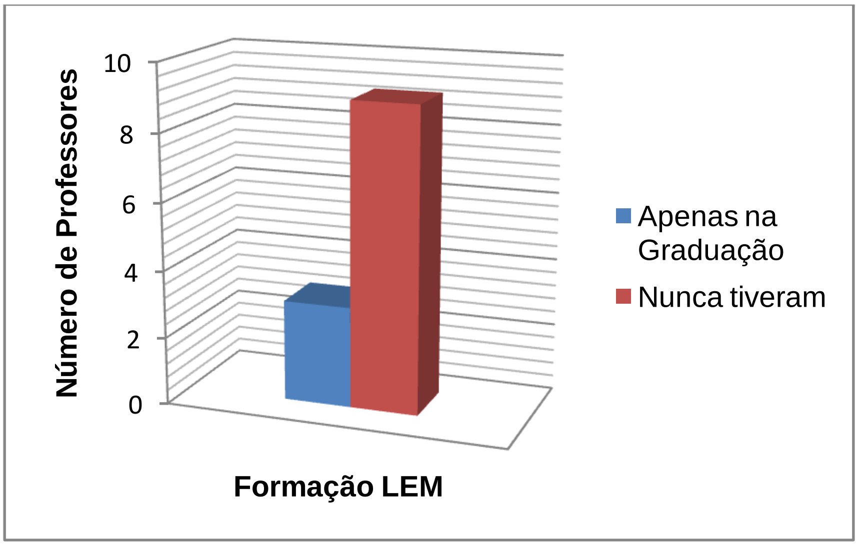
Figura 29: Carga Horária Semanal dos Professores da Rede Estadual de Alagoas Entrevistados



Fonte: Autora, 2016.

Em relação à formação para o uso do Laboratório de Ensino de Matemática, dos 12 entrevistados, 09 docentes nunca tiveram nenhuma experiência ou capacitação para utilização do LEM e 03 docentes tiveram experiência com o LEM apenas na graduação.

Figura 30: Formação para o Uso do LEM dos Professores da Rede Estadual de Alagoas Entrevistados



Fonte: Autora, 2016.

Em relação ao Laboratório de Ensino de Matemática da Escola da Rede Estadual de Alagoas, 10 entrevistados afirmaram que a escola possui LEM, 01 entrevistado afirmou que a escola foi contemplada com o LEM, porém o mesmo não se encontra ativo por falta de espaço físico e 01 entrevistado afirmou que a escola que ele leciona não possui LEM.

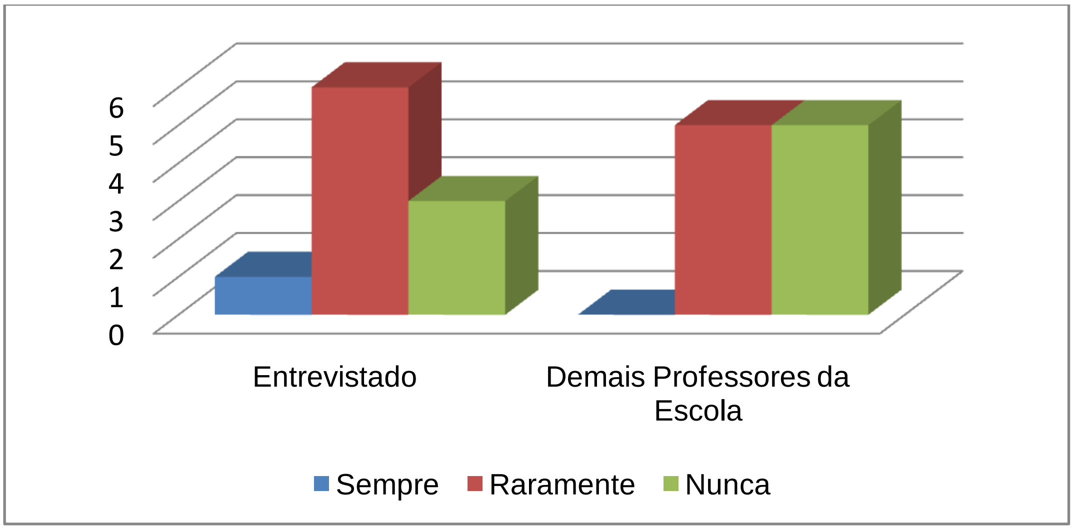
Sobre a constituição do LEM, os 10 entrevistados apontaram as mesmas características: possuem espaço físico compartilhado ou muito pequeno tornando-se inviável levar a turma para trabalhar no laboratório, possuem de dois a três armários repletos de materiais manipuláveis e jogos didáticos e apenas 05 entrevistados relataram possuir acervo bibliográfico no LEM.

Na descrição dos materiais foram constatados: geoplanos, sólidos geométricos, figuras planas, tábua trigonométrica, kits de esquadros, tangram, Teorema de Pitágoras em madeira, frações emborrachadas, dominó de operações, Torre de Hanói, prancha de plano cartesiano, ábacos, blocos dourados, tabelas, jogos, entre outros. Alguns entrevistados afirmaram que alguns materiais possuíam manuais, mas esses manuais sumiram. Foram citados também promessas de capacitações que nunca ocorreram.

Quando perguntamos se os entrevistados utilizam o LEM e o que eles utilizam, apenas 01 entrevistado afirmou que sempre utilizava os materiais do LEM em turmas do 9º ano, 06 entrevistados afirmaram que raramente utilizam os materiais do LEM e quando utilizam trabalham apenas com os sólidos geométricos e 03 entrevistados afirmaram que nunca utilizaram.

Quando perguntamos se os demais professores de matemática da escola que eles lecionam utilizam o LEM, 05 entrevistados responderam que os demais professores raramente utilizam o LEM e os outros 05 entrevistados responderam que os demais professores nunca utilizam os materiais do LEM.

Figura 31: Professores de Matemática da Rede Estadual de Alagoas que Utilizam o LEM



Fonte: Autora, 2016.

Em relação às dificuldades enfrentadas para a utilização dos materiais do LEM a falta de condições de trabalho foi uma reclamação freqüente exposta pelos professores, em decorrência do espaço insuficiente para o desenvolvimento de práticas laboratoriais. Concomitantemente à falta de espaço, os docentes descrevem a ausência de tempo para o planejamento das aulas, bem como a falta de capacitação para lidar com os materiais pedagógicos cedidos pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de Alagoas. Apenas um professor reclamou em relação à quantidade de matérias do laboratório que segundo ele é insuficiente para ser trabalhando com a turma.

A partir daí, fizemos um levantamento dos materiais disponíveis no LEM de uma escola de rede estadual e construímos uma sequência didática que poderia auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da Trigonometria no ensino médio.

Com essa sequência, objetivamos:

1. Analisar as implicações que o uso de materiais do Laboratório de Ensino de Matemática pode trazer para melhoria do ensino-aprendizado de trigonometria no ensino médio;
2. Conhecer a história da trigonometria;
3. Reconhecer, aplicar e calcular os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo;
4. Relacionar a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo com o seno e o cosseno desse ângulo;
5. Relacionar ângulos complementares através do seno e do cosseno.
6. Calcular e transformar a medida de um arco côngruo em radiano e grau;
7. Relacionar as medidas e os números reais aos pontos da circunferência trigonométrica;
8. Entender o conceito de seno, cosseno e tangente para arcos trigonométricos e ângulos não agudos e determinar seu sinal.
9. Compreender as principais relações trigonométricas;
10. Nortear professores da Rede Estadual de Educação de Alagoas na preparação de aulas utilizando o LEM.

4.2. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual Odete Bonfim, município de Maribondo – AL, no turno vespertino, no período de outubro a dezembro de 2015, com 19 alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio, com idades entre 15 e 22 anos. A escolha da escola ocorreu em virtude das inquietações presentes na trajetória da autora como ex-aluna e atual professora desse centro de ensino.

Os conhecimentos básicos de trigonometria para a aplicação das atividades do 2º ano do ensino médio já haviam sido adquiridos. Partes das atividades dos alunos serão citadas, mas seus nomes preservados. As citações dos alunos serão feitas acompanhadas da letra E, referente à turma, com a numeração de 1 a 19.

Nessa escola estudam aproximadamente 560 alunos, distribuídos nos seguintes seguimentos: Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos – EJA/Médio e o Programa da Educação de Jovens e Adultos – PEJA/Fundamental. No total, funcionam 20 turmas, distribuídas nos três turnos: no matutino funcionam 08 turmas do Ensino Médio Regular, no vespertino são 04 turmas do Ensino Médio Regular e no noturno funcionam 02 turmas do Ensino Médio Regular, 02 turmas de EJA/Médio e 04 turmas do PEJA/Fundamental. Além disso, a escola possui 03 professores de matemática atuando no Ensino Médio Regular e no EJA/Médio, sendo 02 professores efetivos, cada um com carga horária de 20h semanais, e 01 professor monitor com carga horária semanal de 34h exclusivamente em sala de aula. Em termos de espaços, a escola dispõe de 08 salas de aula, uma biblioteca, um laboratório de informática com sala de vídeo e um laboratório multidisciplinar.

O laboratório multidisciplinar possui materiais de Biologia, Química, Física, Matemática e mapotecas de História, Ciências e Geografia. Em relação aos materiais que constituem o laboratório de matemática, a escola dispõe de três armários com materiais manipuláveis e jogos didáticos, desses três armários um possui materiais específicos para o Ensino Médio. O acervo bibliográfico de matemática fica disponível na biblioteca com: livros didáticos, paradidáticos, revistas e banco de questões de vestibulares e da OBMEP.

No armário específico com materiais voltados para o Ensino Médio, estão disponíveis:

05 Conjuntos com Sólidos Geométricos Planificados;

05 Kits Áreas e Volumes;

10 Pranchas Trigonométricas + 01 Prancha Trigonométrica para Professor;

10 Ciclos Trigonométricos com Triângulos;

09 Mandalas Trigonométricas;

05 Roletas Matemáticas;

05 Jogos de Probabilidade;

05 Conjuntos de Trigominós;

10 Pranchas para Gráficos + 01 Prancha para Gráficos para Professor;

05 Maletas com Sólidos Geométricos;

05 Jogos sobre Álgebra;

10 Geoplanos Quadrangular/Circular;

A escola também disponibiliza dois Kits de régua, esquadros, transferidor e compasso que podem ser utilizados por professores e o governo também disponibiliza kits com régua, esquadros e transferidor para os alunos regularmente matriculados.

Dos materiais disponíveis no LEM, optamos por trabalhar apenas com a Prancha Trigonométrica, a Mandala Trigonométrica e os Ciclos Trigonométricos com Triângulos. O Conjunto de Trigominó não foi utilizado por ter objetivos semelhantes à Mandala Trigonométrica. As atividades desenvolvidas com os materiais do LEM foram intercaladas com as aulas expositivas dos conteúdos de Trigonometria, composta por 09 aulas, com duração de sessenta minutos cada. Divididas da seguinte maneira: 01 aula sobre a história da trigonometria, 02 (duas) aulas para atividades com a Prancha Trigonométrica, 02 (duas) aulas para atividades com a Mandala Trigonométrica e 04 (quatro) aulas para atividades com os Ciclos Trigonométricos com Triângulos. A análise das atividades se deu através da observação e do registro das demonstrações teóricas e práticas, tendo como principais fontes de dados as ações e os desempenhos dos alunos.

Objetivando a aprendizagem através da construção do conhecimento utilizando a história da matemática, materiais manipuláveis e exposição de ideias, os alunos compreenderam conceitos trigonométricos de forma significativa e aprenderam a justificar fórmulas e resoluções, não apenas memorizar e reproduzir cálculos.

4.2.1. HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Iniciamos nossa sequência didática no dia 29 de outubro de 2015 com um breve relato histórico sobre a Trigonometria. Esse primeiro momento teve duração de 01 aula de 60 minutos, com exposições históricas sobre a trigonometria baseadas na seção 2.1 do segundo capítulo dessa pesquisa, essas exposições foram realizadas pela autora desta sequência didática com a participação do professor e dos alunos.

Consideramos importante no processo de ensino-aprendizagem conhecer a história que determinou o conhecimento que pretendemos abordar. É natural que os estudantes tenham curiosidade de saber de onde vieram tantos conhecimentos, o porquê de estudar esses conceitos e assim entender seu próprio papel na sociedade.

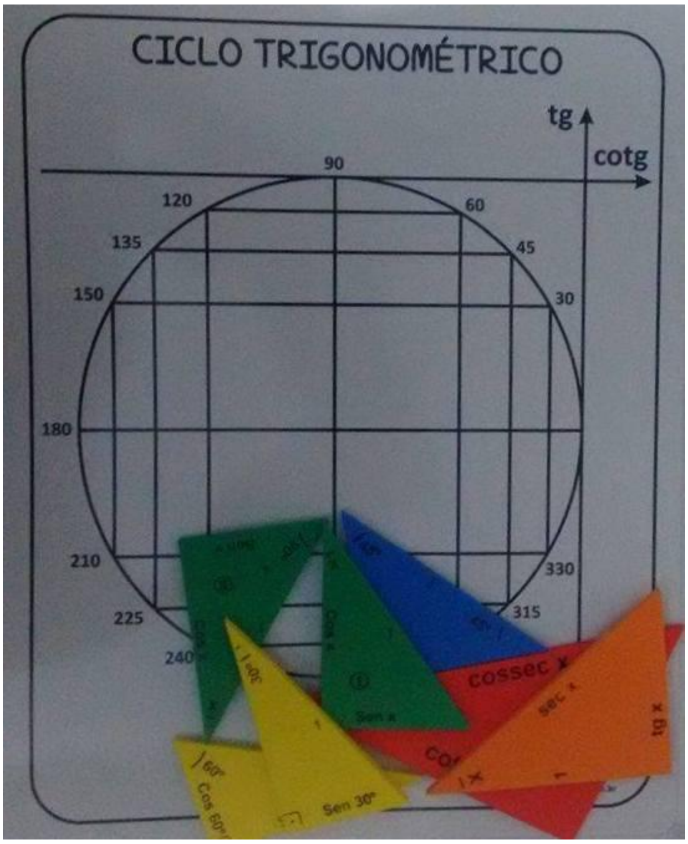
Com o estudo histórico da trigonometria, podemos motivar nossos educandos ao interesse por aprender a trigonometria, já que revendo os fatos da história somos remetidos a entender sua necessidade de construção, buscamos assim desenvolver uma aprendizagem significativa, que possibilite ao estudante estar inserido no processo de ensino-aprendizagem.

4.2.2. ATIVIDADES COM O CICLO TRIGONOMÉTRICO COM TRIÂNGULOS (PARTE I)

Nesse segundo momento, optamos por trabalhar com o Ciclo Trigonométrico com Triângulos que tem por objetivo demonstrar as principais relações trigonométricas, bem como demonstrações dos valores do seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis. Dividimos essas atividades em duas partes: na PARTE I trabalhamos apenas seno, cosseno e tangente; e, posteriormente na PARTE II, trabalhamos com secante, cossecante e cotangente. A sequência didática iniciou com uma oficina para conhecer o Ciclo Trigonométrico, com duração de 02 aulas de 60 minutos cada, realizada pela autora desta sequência didática no dia 04 de novembro de 2015.

O material é constituído por uma prancha em PVC na qual ilustra o ciclo trigonométrico, marcações dos ângulos notáveis e dos eixos seno, cosseno, tangente e cotangente que corresponde à reta tangente ao ciclo trigonométrico perpendicular ao eixo dos senos no ponto (0,1).

Figura 32: Ciclo Trigonométrico com Triângulos

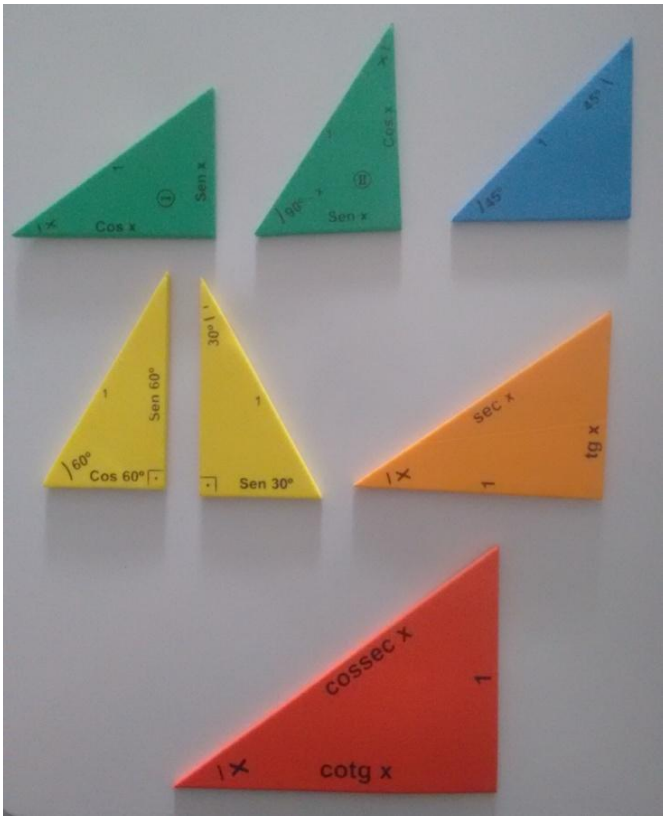


Fonte: Autora, 2016.

Além disso, estão disponíveis sete triângulos retângulos coloridos em EVA:

- Um **Triângulo Verde I**: triângulo retângulo com marcação do ângulo agudo x, hipotenusa medindo 1 e catetos medindo $\cos x$ e $sen\ x$.
- Um **Triângulo Verde II**: triângulo retângulo com marcação dos ângulos complementares x e $90° - x$, hipotenusa medindo 1 e catetos medindo $\cos x$ e $sen\ x$.
- Um **Triângulo azul**: triângulo retângulo com marcação dos ângulos agudos de 45º e hipotenusa medindo 1.
- Dois **Triângulos Amarelos** congruentes: triângulo retângulo com marcação do ângulo agudo 60º (ou 30º), hipotenusa medindo 1 e catetos medindo $\cos 60°$ e $sen\ 60°$ (ou $\cos 30°$ e $sen\ 30°$).
- Um **Triângulo Laranja**: triângulo retângulo com marcação do ângulo agudo x, hipotenusa medindo $\sec x$ e catetos medindo 1 e $tg\ x$.
- Um **Triângulo Vermelho**: triângulo retângulo com marcação do ângulo agudo x, hipotenusa medindo $\text{cossec}\, x$ e catetos medindo 1 e $cotg\ x$.

Figura 33: Triângulos do Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autora, 2016.

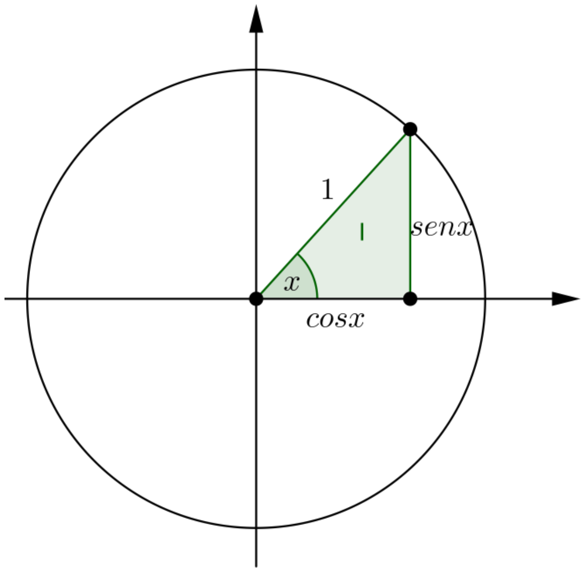
Para melhor compreensão dos conceitos envolvidos nas demonstrações, realizamos uma rápida revisão sobre semelhança de triângulos. Em seguida, a turma de 19 alunos foi dividida em 08 duplas e 01 trio e para cada grupo entregamos um Ciclo Trigonométrico e fotocópias[9] do roteiro da aula. As demonstrações foram realizadas no quadro pela autora desta sequência com a colaboração das observações dos alunos a respeito do material disponibilizado. As demonstrações das relações fundamentais com o ciclo trigonométrico com triângulos (PARTE I) foram divididas em 8 momentos como constam a seguir:

1. Relação entre Seno e Cosseno de um ângulo qualquer

Para essa demonstração utilizaremos o triângulo verde I e colocaremos o ângulo x na origem, com o triângulo sobre o 1º quadrante. Ver figura 34.

[9] Vide Apêndice B.

Figura 34: Relação entre seno e cosseno de um ângulo qualquer



Fonte: Autora, 2016.

Chamaremos o cateto adjacente e o cateto oposto ao ângulo x, respectivamente, de a e b. Além disso, observe que a hipotenusa do triângulo retângulo é 1, pois a mesma corresponde ao raio da circunferência trigonométrica.

Por definição, temos que:

$$sen\,x = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ x}{hipotenusa} = \frac{b}{1} = b.$$

$$\cos x = \frac{cateto\ adjascente\ ao\ \hat{a}ngulo\ x}{hipotenusa} = \frac{a}{1} = a.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$1^2 = b^2 + a^2.$$

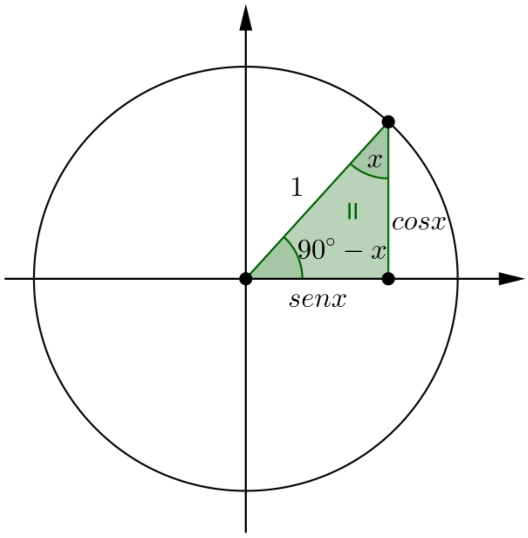
Como $sen\,x = b$ e $\cos x = a$, então

$$1 = sen^2\,x + \cos^2 x.$$

2. Relação entre Seno e Cosseno de ângulos complementares $(90° - x)$

Para essa demonstração utilizaremos o triângulo verde II e colocaremos o ângulo $90° - x$ na origem, com o triângulo sobre o 1º quadrante. Ver figura 35.

Figura 35: Relação entre seno e cosseno de ângulos complementares



Fonte: Autora, 2016.

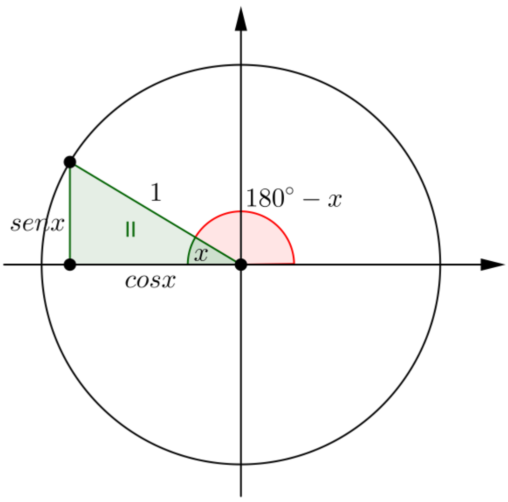
Observe que o cateto adjacente ao ângulo $90° - x$ tem a mesma medida que $\text{sen}\,x$ e que o cateto oposto ao ângulo $90° - x$ tem a mesma medida que $\cos x$. Como a hipotenusa mede 1, temos que:

$$\text{sen}\,(90° - x) = \cos x \text{ e } \cos(90° - x) = \text{sen}\,x.$$

3. Seno e Cosseno de ângulos localizados no 2º quadrante $(180° - x)$

Para essa demonstração utilizaremos o triângulo verde II e colocaremos o ângulo x na origem, com o triângulo sobre o 2º quadrante. Ver figura 36.

Figura 36: Seno e Cosseno de ângulos localizados no 2º quadrante



Fonte: Autora, 2016.

Desse modo, o ângulo medido do início dos arcos até o intercepção da hipotenusa é $180° - x$. Observe que a projeção no eixo dos senos de $180° - x$ é numericamente igual ao do ângulo x, e que a projeção no eixo dos cossenos de $180° - x$ é numericamente igual ao do ângulo x, só que com sinal contrário.

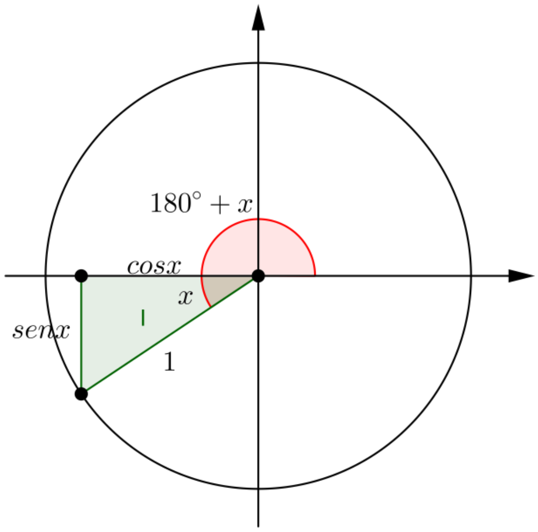
Assim, temos que

$$\text{sen}\,(180° - x) = \text{sen}\,x \;\text{ e }\; \cos(180° - x) = -\cos x.$$

4. Seno e Cosseno de ângulos localizados no 3º quadrante $(180° + x)$

Para essa demonstração utilizaremos o triângulo verde I e colocaremos o ângulo x na origem, com o triângulo sobre o 3º quadrante. Ver figura 37.

Figura 37: Seno e Cosseno de ângulos localizados no 3º quadrante



Fonte: Autora, 2016.

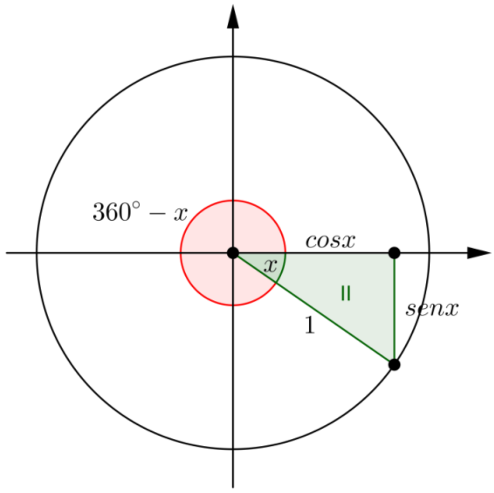
De modo análogo, verificaremos que:

$$\text{sen}\,(180° + x) = -\,\text{sen}\,x \;\text{ e }\; \cos(180° + x) = -\cos x.$$

5. Seno e Cosseno de ângulos localizados no 4º quadrante $(360° - x)$

Para essa demonstração utilizaremos o triângulo verde II e colocaremos o ângulo x na origem, com o triângulo sobre o 4º quadrante. Ver figura 38.

Figura 38: Seno e Cosseno de ângulos localizados no 4º quadrante



Fonte: Autora, 2016.

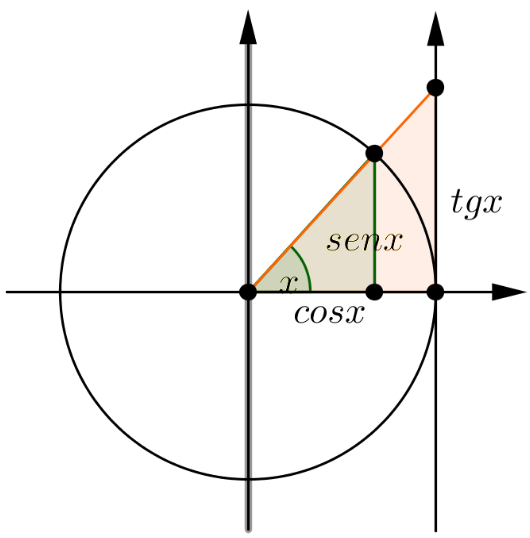
De modo análogo, verificaremos que:

$$\text{sen}\,(360° - x) = -\,\text{sen}\,x \text{ e } \cos(360° - x) = \cos \text{x}.$$

6. Cálculo da $tg\ x$ em função de $\text{sen}\ x$ e $\cos\ x$

Para essa demonstração utilizaremos o triângulo laranja e colocaremos o ângulo x na origem, sobre o 1º quadrante. Em seguida, sobreponha o triângulo verde I de modo que o ângulo x coincida.

Figura 39: Tg x em função de $\textbf{sen}\,x$ e cos x



Fonte: Autora, 2016.

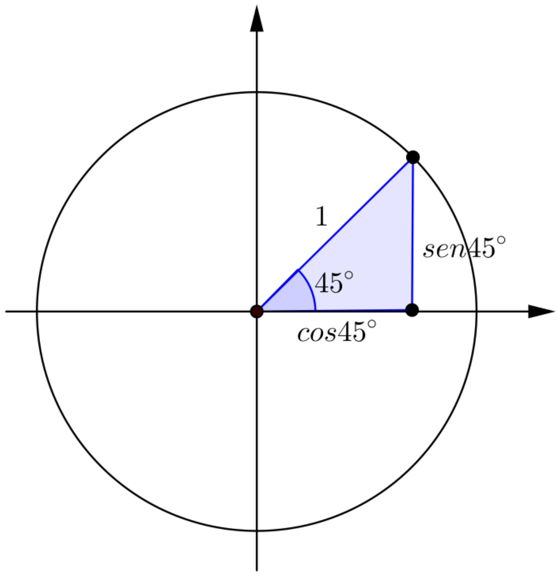
Observe que os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA (ângulo x e ângulo reto), logo os lados são proporcionais. Assim,

$$\frac{tg\ x}{1} = \frac{sen\ x}{\cos\ x}, \text{ ou seja, } tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos\ x}.$$

7. Seno, Cosseno e Tangente do ângulo de 45º

Para essa demonstração utilizaremos o triângulo azul e colocaremos o ângulo 45º na origem, sobre o 1º quadrante.

Figura 40: Seno, Cosseno e Tangente do ângulo de 45º



Fonte: Autora, 2016.

Como a hipotenusa mede 1, chamaremos o cateto adjacente ao ângulo 45º de cos 45º e o cateto oposto ao ângulo 45º de sen 45º.

Note que, a medida do ângulo complementar também é 45º. Assim, o triângulo retângulo é isósceles e sen 45º = cos 45º.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$sen^2\ 45° + cos^2\ 45° = 1^2$$

$$sen^2\ 45° + sen^2\ 45° = 1$$

$$2\ sen^2\ 45° = 1$$

$$sen^2\ 45° = \frac{1}{2}$$

$$sen\ 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Consequentemente, $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sabemos que, $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos\ x}$. Assim,

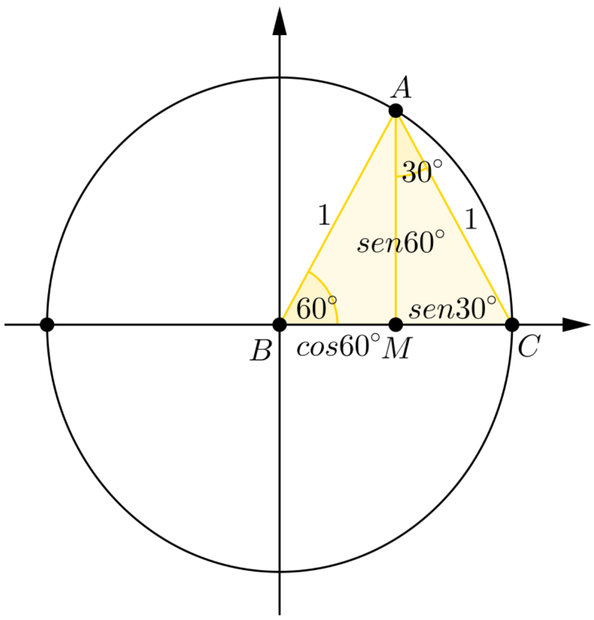
$$tg\ 45° = \frac{sen\ 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

8. Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 60º e 30º

Para essa demonstração, utilizaremos o triângulo amarelo e colocaremos o ângulo de 60º na origem, voltado para o 1º quadrante. Observe que o outro triângulo amarelo é congruente ao triângulo utilizado, assim utilizaremos o segundo triângulo amarelo simétrico ao primeiro.

Chamaremos o triângulo amarelo com ângulo de 60º de triângulo ABM e o triângulo amarelo com ângulo de 30º, ACM, de modo que $\overline{AB} = 1, \overline{BM} = \cos 60°$, $\overline{AM} = sen\ 60°$, $\overline{AC} = 1$, $\overline{MC} = sen\ 30°$, $A\hat{B}M = 60°$ e $C\hat{A}M = 30°$. Ver figura 41.

Figura 41: Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 60º e 30º



Fonte: Autora, 2016.

Note que, o triângulo ABC formado possui lados 1 e 1, portanto podemos afirmar que é um triângulo isósceles. Observe ainda que um dos ângulos da base desse triângulo isósceles mede 60º, consequentemente, o outro ângulo da base também medirá 60º. Que juntos, somam 120º. Assim, o terceiro ângulo também medirá 60º e podemos concluir que esse triângulo é eqüilátero.

O $\cos 60° = \overline{BM}$ equivale à metade do comprimento da base. Como a medida da base é igual a 1. Então,

$$cos\ 60° = \frac{1}{2}.$$

O $sen\,60°$ equivale à altura do triângulo eqüilátero. Para calcularmos aplicaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABM. Assim, temos

$$sen^2\,60° + \cos^2 60° = 1^2 \implies sen^2\,60° + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\implies sen^2\,60° + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \implies sen^2\,60° + \frac{1}{4} = 1$$

$$\implies sen^2\,60° = 1 - \frac{1}{4} \implies sen^2\,60° = \frac{3}{4}$$

$$\implies sen\ 60° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como 30º e 60º são ângulos complementares, temos:

$$sen\ 30° = cos\ 60° = \tfrac{1}{2} \text{ e } \cos 30° = sen\ 60° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sabemos que, $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos\ x}$. Assim,

$$tg\ 60° = \frac{sen\ 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

e

$$tg\ 30° = \frac{sen\ 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.2.3. ATIVIDADES COM A PRANCHA TRIGONOMÉTRICA

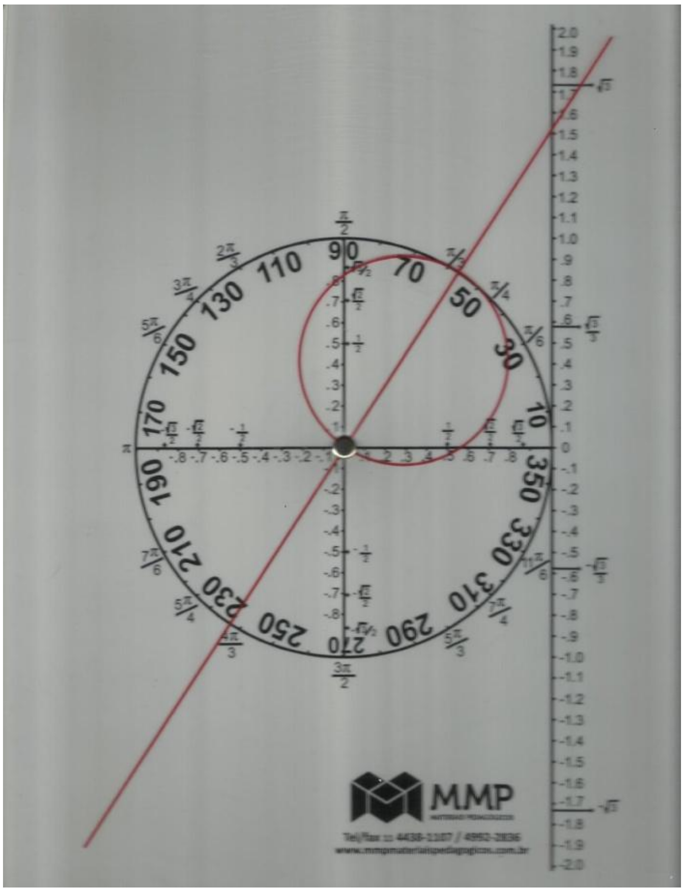
O LEM da escola possui 10 unidades de Pranchas Trigonométricas para o aluno e 01 Prancha Trigonométrica ampliada para o professor. A turma composta por 19 alunos mais o professor titular foi dividida em 10 duplas e cada dupla recebeu inicialmente 01 Prancha Trigonométrica e posteriormente duas fotocópias com atividades, uma para cada componente. A sequência didática iniciou com uma oficina para conhecer a prancha trigonométrica, com duração de 02 aulas de 60 minutos cada, realizada no dia 11 de novembro de 2015.

A Prancha é composta por duas partes em PVC: uma branca e outra transparente. Podemos verificar na parte branca da Prancha um desenho de um ciclo trigonométrico de raio 1, com divisões em vários ângulos numerados internamente em graus e externamente em radianos. Há também, três eixos: dois desses eixos passam pelo centro do ciclo trigonométrico, o eixo horizontal corresponde ao eixo dos cossenos e o eixo vertical corresponde ao eixo dos senos, e o terceiro eixo que tangencia o ciclo trigonométrico corresponde ao eixo das tangentes. Todos os eixos estão divididos em décimos, destacando os valores: $-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{3}$. No PVC transparente, podemos verificar uma reta vermelha passando pela origem e tendo uma circunferência de raio $\frac{1}{2}$ com centro em uma das semirretas e que também passa pela origem.

Ao girar a prancha transparente observamos que a reta vermelha forma um ângulo com o eixo dos cossenos. Podemos verificar o valor do seno, do cosseno e da tangente do ângulo formado, ao mesmo tempo, observando as intersecções da circunferência de raio $\frac{1}{2}$ com os eixos do seno e do cosseno e o valor da tangente irá corresponder ao ponto de encontro da reta com o eixo das tangentes. Ver figura 42.

Vale ressaltar que o sentido positivo do ciclo trigonométrico é o anti-horário. Além disso, os eixos dos senos e cossenos dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes chamadas de quadrantes, numeradas de 1 a 4 e contadas a partir do ponto de tangência da circunferência com o eixo das tangentes, no sentido positivo. Observamos ainda que para qualquer ponto (x, y) pertencente ao ciclo trigonométrico, temos que $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Figura 42: Prancha Trigonométrica



Fonte: Autora, 2016.

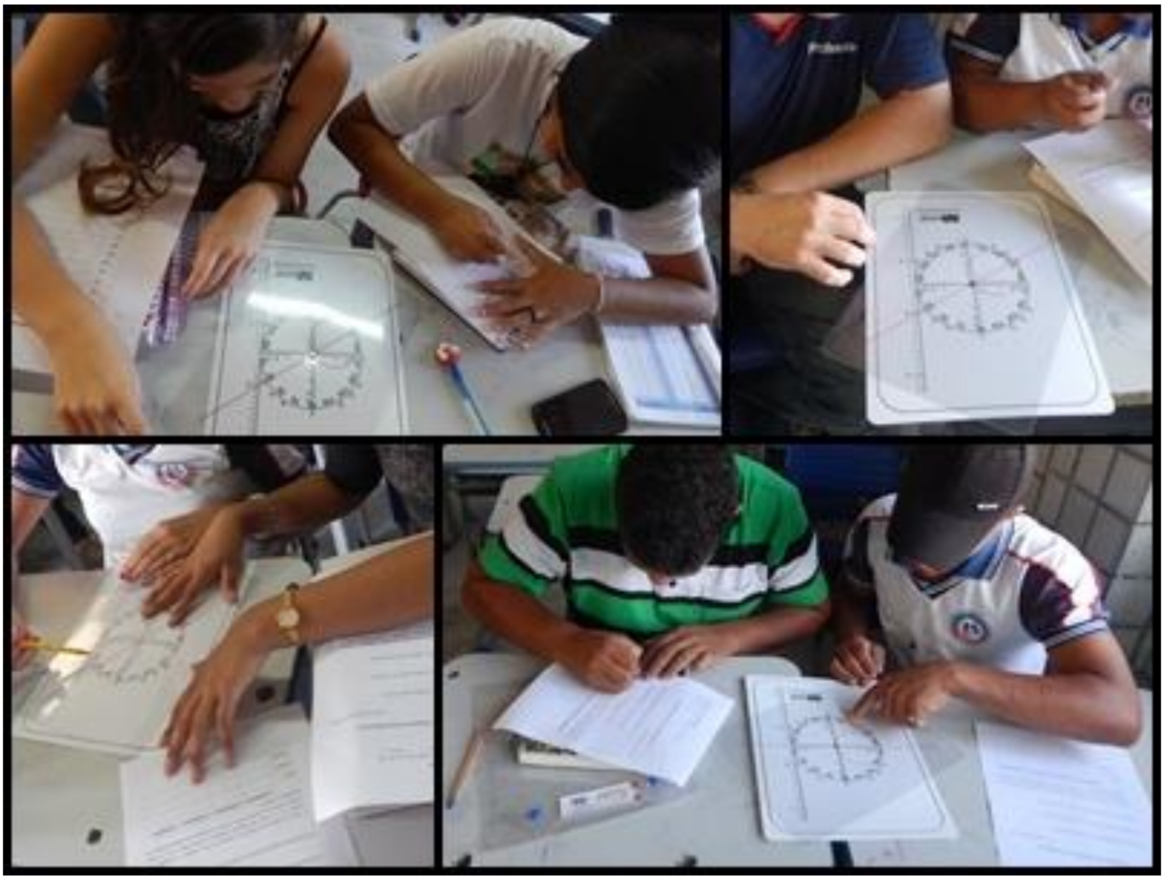
Em seguida, foi proposta uma atividade[10] para os alunos, subdividida em cinco momentos:

1. Identificar ângulos com o mesmo valor de seno;
2. Identificar ângulos com o mesmo valor do cosseno;
3. Identificar ângulos com o mesmo valor da tangente;
4. Estudar a variação de sinais do seno, cosseno e tangente nos quadrantes;
5. Identificar os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis analisados em uma volta do ciclo trigonométrico.

Os alunos continuaram em dupla, apesar de a atividade ser individual, para discutir e socializar os conceitos, para só então ser compartilhado com a classe. Durante todo o processo os estudantes foram monitorados, podendo haver intervenção da professora a qualquer momento da atividade. Após responderem as atividades foi realizada uma socialização, onde os alunos expressaram as dificuldades e facilidades de se trabalhar com a prancha trigonométrica.

[10] Vide apêndice C.

Figura 43: Alunos realizando atividades com o auxilio da Prancha Trigonométrica

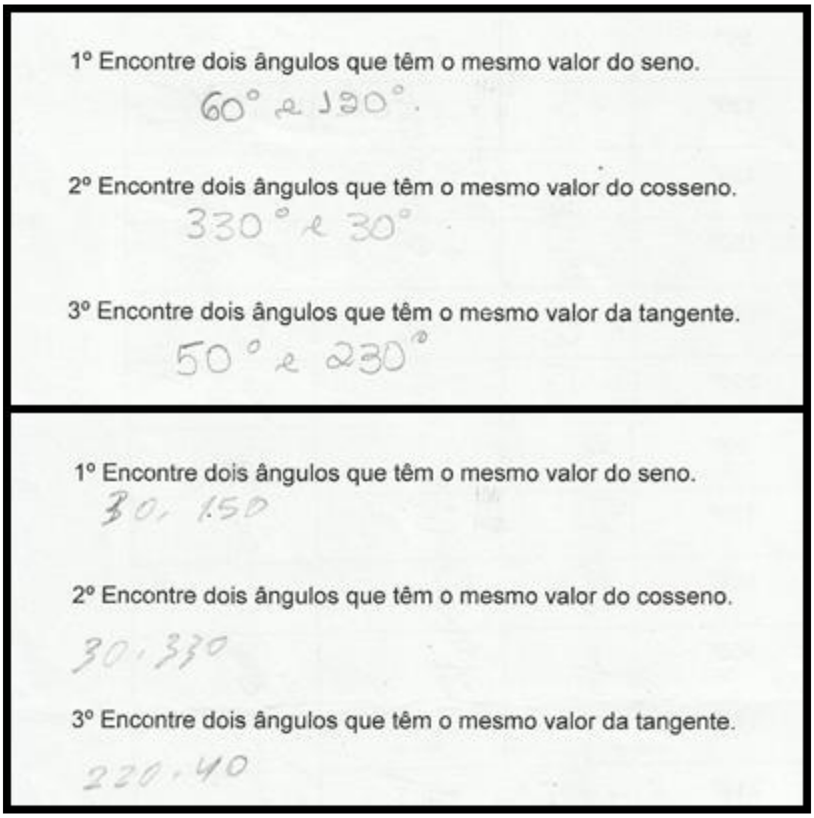


Fonte: Autora, 2016.

Em relação aos três primeiros momentos de atividades, que consistiam na identificação de dois ângulos com mesmos valores de seno, cosseno ou tangente, obtivemos um resultado totalmente satisfatório. Todos os alunos conseguiram identificar corretamente os ângulos solicitados, explorando não apenas os ângulos notáveis do ciclo trigonométrico. Destacamos na figura 44, as respostas dos alunos E03 e E08.

Com o auxilio da prancha trigonométrica, trabalhamos a simetria dos ângulos e os sinais dos valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de acordo com o quadrante ao qual pertencem com mais êxito. Em seguida, no quarto momento, foi solicitado para que o aluno preenchesse uma tabela com os sinais correspondentes aos valores do seno, cosseno e tangente. A partir daí algumas informações já conhecidas passaram a fazer sentido na prática, como o caso dos valores de seno e cosseno de ângulos obtusos possuírem os “mesmos” valores de seno e cosseno de ângulos agudos. Outro conceito importante foi o “porquê” do cosseno de ângulos obtusos serem negativos. Destacamos na figura 45, as respostas dos alunos E10 e E01.

Figura 44: Respostas das atividades 1, 2 e 3 realizadas pelos alunos E03 e E08.



1º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor do seno.
60° e 120°.

2º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor do cosseno.
330° e 30°

3º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor da tangente.
50° e 230°

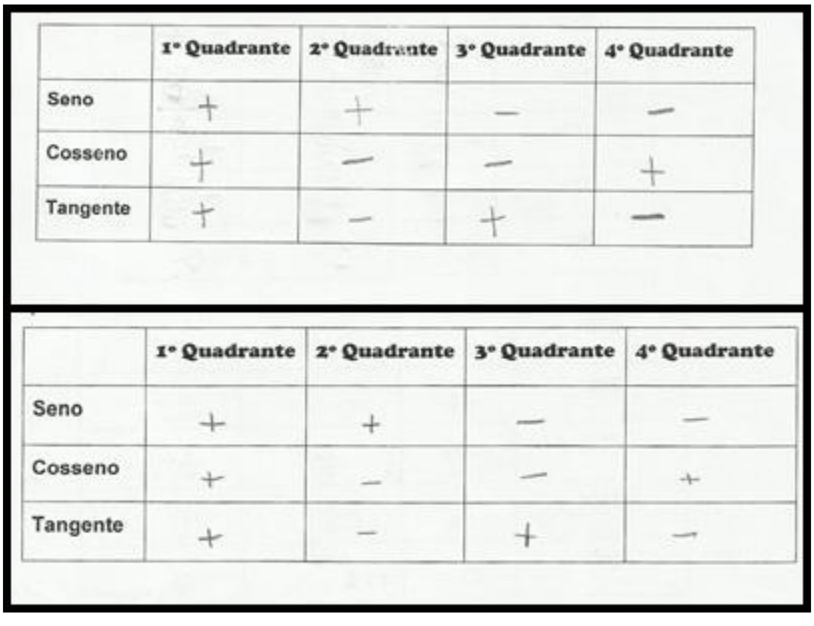
1º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor do seno.
30, 150

2º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor do cosseno.
30, 330

3º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor da tangente.
220, 40

Fonte: Autora, 2016

Figura 45: Tabela com sinais do seno, cosseno e tangente realizada pelos alunos E10 e E01.



	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Seno	+	+	–	–
Cosseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–

	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Seno	+	+	–	–
Cosseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–

Fonte: Autora, 2016.

No quinto e último momento da atividade, solicitamos para que os alunos preenchessem uma tabela identificando os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis analisados em uma volta do ciclo trigonométrico com o auxilio da prancha trigonométrica. A maioria dos alunos apresentou dificuldades em descobrir os valores de seno, cosseno e, principalmente, a tangente dos ângulos 90º e 270º. Porém, destacamos as respostas dos alunos E14 e E19, de duplas diferentes, que atribuíram os valores de $+\infty$ e $-\infty$, para os valores da tangente de 90º e 270º, respectivamente.

Figura 46: Tabela de valores de seno cosseno e tangente de ângulos notáveis analisados na primeira volta do ciclo trigonométrico pelos alunos E14 e E19.

5º Preencha a tabela abaixo:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0º	0	1	0
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90º	1	0	$+\infty$
120º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150º	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180º	0	-1	0
210º	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225º	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
240º	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
270º	-1	0	$+\infty$
300º	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315º	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{3}$
330º	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360º	0	1	0

5º Preencha a tabela abaixo:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0º	0	1	0
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90º	1	0	∞_{+}
120º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1
150º	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
180º	0	-1	0
210º	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225º	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1
240º	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270º	-1	0	∞_{-}
300º	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315º	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330º	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
360º	0	1	0

Fonte: Autora, 2016.

4.2.4. ATIVIDADES COM A MANDALA TRIGONOMÉTRICA

Após realizar várias atividades propostas pelo professor titular sobre conceitos trigonométricos básicos no ciclo trigonométrico, retomamos nossas atividades num segundo encontro no dia 18 de novembro de 2015 com duração de 02 aulas de 60 minutos cada. Dessa vez, a sequência didática sugere trabalhar com o jogo “Mandala Trigonométrica” cujo objetivo é explorar as razões trigonométricas de seno e cosseno, as simetrias existentes na circunferência trigonométrica e reconhecer os valores dos arcos notáveis. Novamente, dividimos a sala em 08 duplas e 01 trio. Para cada grupo, entregamos uma Mandala Trigonométrica e fotocópias[11] das regras a serem seguidas no jogo.

Inicialmente, recordamos algumas informações importantes sobre o ciclo trigonométrico vistas em aulas anteriores, completamos as informações contidas na fotocópia a respeito do ciclo trigonométrico e fizemos o reconhecimento do jogo, bem como as definições das regras a seguir.

Figura 47: Mandala Trigonométrica

Fonte: Autora, 2016

[11] Vide Apêndice D.

O Jogo consiste de um tabuleiro em PVC com o ciclo trigonométrico adaptado, com círculos em cinco cores distintas substituindo os valores dos arcos notáveis. Temos também seis tipos de polígonos substituindo valores de seno e cosseno de ângulos notáveis. Além de um dado, dois peões e duas cartelas contendo seis fichas em EVA.

Ficaram estabelecidas as seguintes regras do jogo:

- O jogo seria dividido em duas fases.
- Na primeira fase os jogadores irão percorrer os círculos coloridos em volta do ciclo trigonométrico.
- Completando a primeira fase, o jogador passará automaticamente para a segunda fase, na qual irá percorrer os polígonos sobre os eixos.
- Antes do início do jogo, os participantes devem decidir se os ângulos devem ser ditos em graus ou radianos.

Regras da Primeira fase:

- Os jogadores devem sair do mesmo lugar seguindo o mesmo sentido (anti-horário) e percorrer os círculos coloridos sobre o ciclo trigonométrico.
- O jogador da vez deverá lançar o dado, o número obtido corresponde à quantidade de círculos coloridos que o jogador deverá percorrer no ciclo trigonométrico. Ao parar, o jogador deverá indicar o ângulo correspondente ao arco indicado, assim como o seno e o cosseno deste arco.
- A avaliação do acerto será feita pelo jogador adversário.
- Acertando o jogador cobrirá, na sua cartela, o círculo de mesma cor que a marcação do ciclo trigonométrico.
- Nos próximos lançamentos, o jogador deverá pular no ciclo trigonométrico os círculos de cores já preenchidas.
- Completando toda a fila de círculos coloridos, o jogador deverá passar para a segunda fase.

Regras da Segunda fase:

- O jogador deverá percorrer sobre os eixos dos senos e dos cossenos a quantidade de polígonos de acordo com o número obtido no lançamento do dado.
- Cada vez que o jogador passar pela origem (0,0) poderá mudar de eixo (caso queira).
- Ao parar, o jogador deverá dizer o valor correspondente no eixo e os valores dos ângulos que possuem aquele seno ou cosseno.
- A avaliação será realizada de mesmo modo que a fase anterior.
- O jogador que conseguir completar a fila de polígonos primeiro será o vencedor.

Juntamente com as regras distribuídas nas fotocópias, anexamos um ciclo trigonométrico e preenchemos os valores dos arcos notáveis e seus respectivos valores de seno e cosseno. Que poderiam ser utilizados como consulta, num primeiro momento.

Como o jogo é aberto, não é possível fornecer as respostas para as questões. Isso atribui uma importância muito interessante ao Mandala, já que a solução deve ser aceita ou recusada pelo adversário, o que o obriga a também responder a questão.

Figura 48: Alunos jogando Mandala Trigonométrica

Fonte: Autora, 2016.

4.2.5. ATIVIDADES COM O CICLO TRIGONOMÉTRICO COM TRIÂNGULOS (PARTE II)

O quinto momento da proposta didática precisou ser adiado por algumas semanas devido os preparativos e a semana da Feira de Ciências e Cultura da Escola, com isso só foi possível realizar atividades com o ciclo trigonométrico com triângulos no dia 16 de dezembro de 2015 com duração de 02 aulas de 60 minutos cada.

Essa sequência objetiva demonstrar as principais relações trigonométricas envolvendo seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente. De modo análogo a PARTE I dessa atividade, dividimos a turma de 19 alunos em 08 duplas e 01 trio e para cada grupo entregamos um Ciclo Trigonométrico e fotocópias[12] do roteiro da aula. As demonstrações foram realizadas no quadro pela autora com a colaboração das observações dos alunos a respeito do ciclo trigonométrico disponibilizado, sendo divididas em 4 momentos:

1. Cálculo da Sec x em função de cos x

Inicialmente, demonstraremos porque a hipotenusa do triângulo laranja mede $sec\, x$.

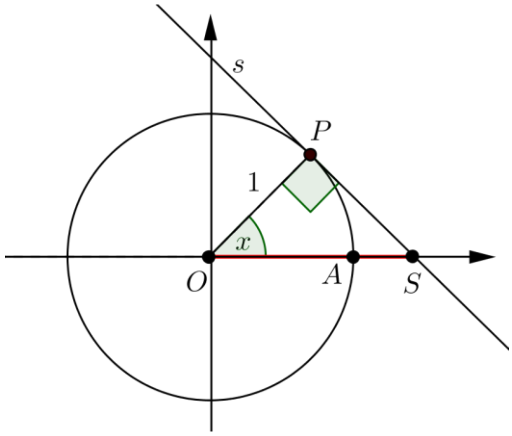
Demonstração:

Consideremos o ângulo $A\hat{O}P = x$ e traçaremos a reta s que passa pelo ponto P e é tangente ao ciclo trigonométrico de raio 1, além disso, a reta s intercepta o eixo dos cossenos no ponto S. Por definição, sabemos que o segmento $\overline{OS}$ corresponde à medida da secante do ângulo x. Utilizaremos o triângulo retângulo OPS, cujas medidas definidas são: $\overline{OS} = \sec x\,, \overline{OP} = 1, \hat{O} = x$ e $\hat{P} =$ ângulo reto, ver figura 42.

Do triângulo retângulo laranja, temos dois ângulos definidos: o ângulo x e o ângulo reto, a hipotenusa medindo $\sec x$ e catetos medindo 1 (raio do ciclo trigonométrico) e $tg\ x$ (por definição de tangente), ver figura 49.

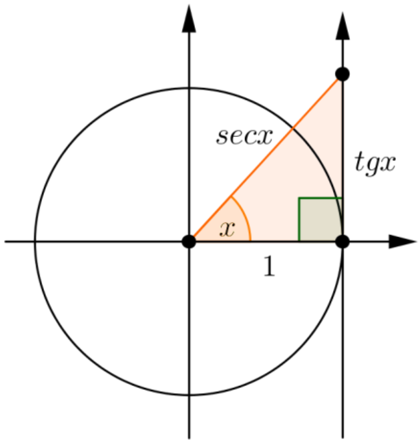
[12] Vide Apêndice E.

Figura 49: Triângulo retângulo OPS



Fonte: Autora, 2016.

Figura 50: Triângulo retângulo laranja



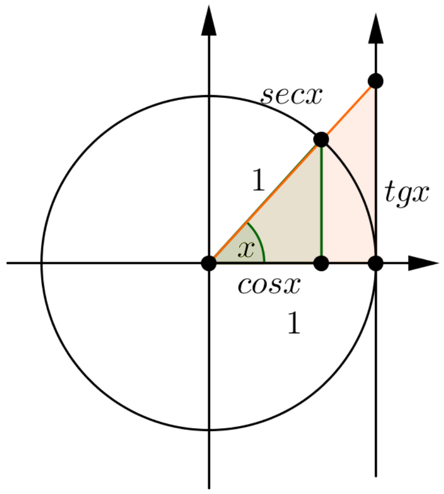
Fonte: Autora, 2016.

Observe que o triângulo retângulo OPS é semelhante ao triângulo laranja pelo caso Ângulo-Ângulo, ângulo x e ângulo reto. Note ainda que, em ambos os triângulos, a medida do cateto adjacente ao ângulo x é 1. Assim, o triângulo laranja é congruente ao triângulo retângulo OPS. Conseqüentemente, a medida da hipotenusa do triângulo laranja será igual à medida da hipotenusa do triângulo OPS, ou seja, $\sec x$.

C.Q.D.

Para demonstrar o calculo da sec x em função de cos x utilizaremos o triângulo laranja e colocaremos o ângulo x na origem, sobre o 1º quadrante. Em seguida, sobreponha o triângulo verde I de modo que o ângulo x coincida. Ver figura 51.

Figura 51: Sec x em função de cos x



Fonte: Autora, 2016.

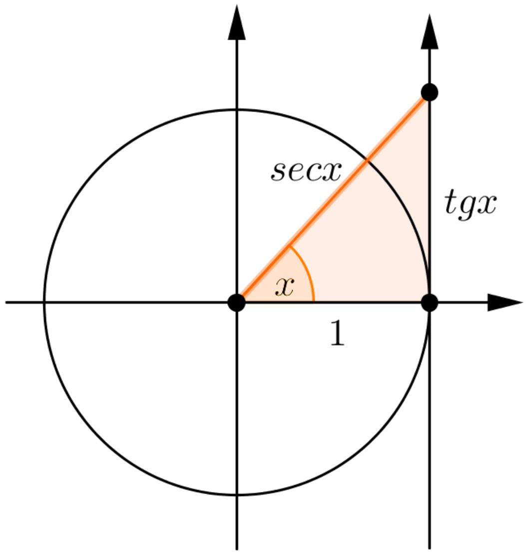
Observe que os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA (ângulo x e ângulo reto), logo os lados são proporcionais. Assim,

$$\frac{sec\ x}{1} = \frac{1}{\cos\ x},\ \text{ou seja,}\ sec\ x = \frac{1}{\cos\ x}.$$

2. Relação entre tangente e secante de um ângulo x

Utilizaremos o triângulo laranja e colocaremos o ângulo x na origem, sobre o 1º quadrante. Ver figura 52.

Figura 52: Relação entre tangente e secante de um ângulo x



Fonte: Autora, 2016

Observe que nesse triângulo a hipotenusa tem medida $sec\ x$ e os catetos, 1 e $tg\ x$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$sec^2x = tg^2x + 1.$$

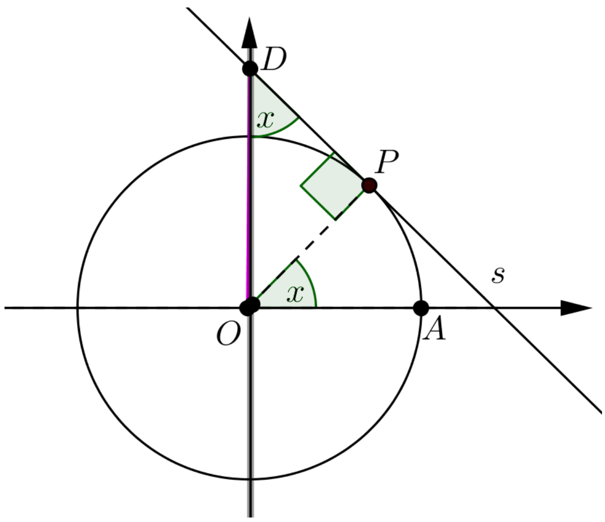
3. Cálculo da $\csc x$ e $ctg\ x$ em função de $sen\ x$ e $\cos x$

Inicialmente, demonstraremos porque a hipotenusa do triângulo vermelho mede $\csc x$.

Demonstração:

Consideremos o ângulo $A\hat{O}P = x$ e traçaremos a reta s que passa pelo ponto P e é tangente ao ciclo trigonométrico de raio 1, além disso, a reta s intercepta o eixo dos senos no ponto D. Por definição, sabemos que o segmento $\overline{OD}$ corresponde à medida da cossecante do ângulo x. Utilizaremos o triângulo retângulo OPD, cujas medidas definidas são: $\overline{OD} = \csc x\,, \overline{OP} = 1, \widehat{D} = x$ e $\hat{P} =$ ângulo reto.

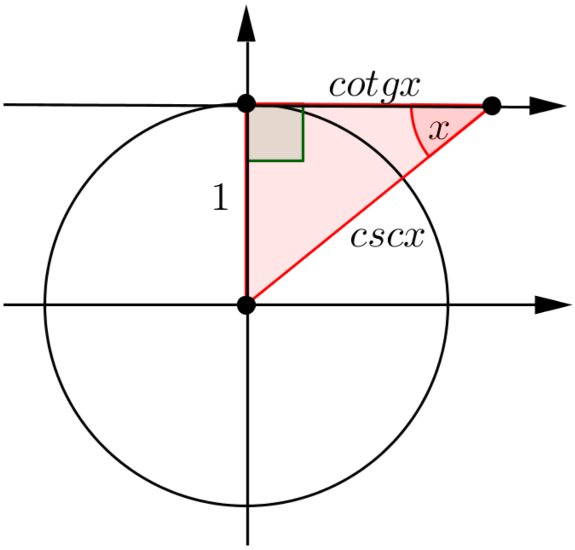
Figura 53: Triângulo retângulo $\boldsymbol{OPD}$



Fonte: Autora, 2016.

Do triângulo retângulo vermelho, temos dois ângulos definidos: o ângulo x e o ângulo reto, a hipotenusa medindo $\csc x$ e catetos medindo 1 (raio do ciclo trigonométrico) e $cotg\ x$ (por definição de cotangente), ver figura 54.

Figura 54: Triângulo retângulo vermelho



Fonte: Autora, 2016.

Observe que o triângulo retângulo OPD é semelhante ao triângulo vermelho pelo caso Ângulo-Ângulo, ângulo x e ângulo reto. Note ainda que, em ambos os triângulos, a medida do cateto oposto ao ângulo x é 1. Assim, o triângulo vermelho é congruente ao triângulo retângulo OPD. Conseqüentemente, a medida da hipotenusa do triângulo vermelho será igual à medida da hipotenusa do triângulo OPD, ou seja, $\csc x$.

C.Q.D.

Para demonstrar o calculo da csc x em função de tg x utilizaremos o triângulo vermelho e colocaremos o ângulo $90° - x$ na origem, sobre o 1º quadrante. Em seguida, sobreponha o triângulo verde I de modo que o ângulo $90° - x$ coincida. Ver figura 55.

Observe que os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA (ângulo x e ângulo reto), logo os lados são proporcionais. Assim,

$$\frac{cotg\ x}{\cos x} = \frac{\csc x}{1} = \frac{1}{\text{sen } x}.$$

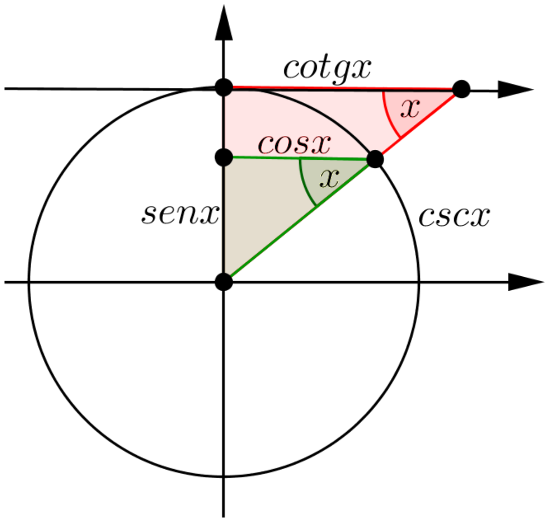
Daí, temos que:

$$\frac{\csc x}{1} = \frac{1}{\text{sen } x}, \text{ ou seja, } \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

e

$$\frac{cotg\ x}{\cos x} = \frac{1}{\text{sen } x}, \text{ ou seja, } cotg\ x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}.$$

Figura 55: $csc\ x$ e $ctg\ x$ em função de $sen\ x$ e $\cos x$

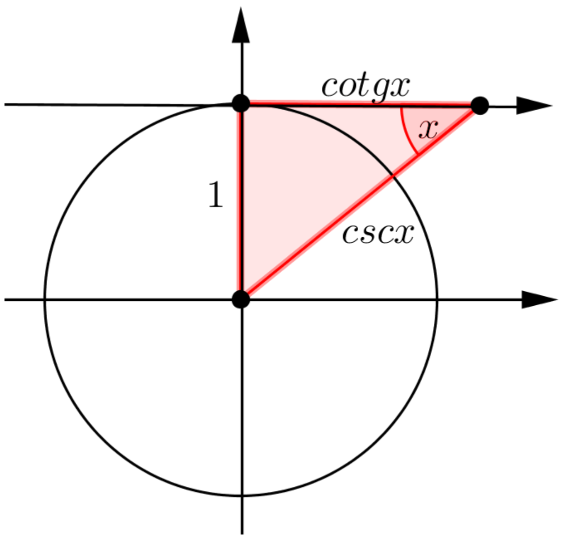


Fonte: autora, 2016.

4. Relação entre cossecante e cotangente de um ângulo qualquer

Utilizaremos o triângulo vermelho e colocaremos o ângulo $90° - x$ na origem sobre o 1º quadrante. Ver figura 56.

Figura 56: Relação entre cossecante e cotangente de um ângulo qualquer



Fonte: Autora, 2016.

Observe que nesse triângulo a hipotenusa tem medida $csc\ x$ e os catetos, 1 e $cotg\ x$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$csc^2x = cotg^2x + 1.$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o processo de elaboração do embasamento teórico desse trabalho referente à utilização do LEM, podemos perceber que existe uma ligação entre vários autores quando se trata da importância deste ambiente e do impacto que ele pode causar no meio pedagógico.

E mesmo com todos os desafios enfrentados ao ensinar trigonometria, com a utilização de um laboratório e seus respectivos materiais, podemos oportunizar uma melhor aprendizagem aos nossos alunos, possibilitando um estudo mais significativo dos conteúdos propostos no currículo escolar. Concordamos com Lorenzato (2006, p 34) que diz:

> Se for verdadeiro que ninguém "ama o que não conhece", então fica explicado porque tantos alunos não gostam de matemática, pois se a eles não foi dado conhecer a matemática, como podem vir a admirá-la? No entanto com o auxílio de MD[13], o professor pode, se empregá-lo corretamente, conseguir uma aprendizagem com compreensão, que tenha significado para o aluno, diminuindo, assim, o risco de serem criadas ou reforçadas falsas crenças referentes à matemática, como a de ser ela uma disciplina "só para poucos privilegiados", "pronta", "muito difícil", e outras semelhantes. Outra conseqüência provável se refere ao ambiente predominante durante as aulas de matemática, onde o temor, a ansiedade ou a indiferença serão substituídos pela satisfação, pela alegria ou pelo prazer. Mas, talvez, o mais importante efeito será o aumento da autoconfiança e a melhoria da auto-imagem do aluno.

O professor que busca promover uma aprendizagem significativa, através de um processo de ensino que desperte o interesse dos estudantes, encontra na Trigonometria muitos conteúdos para desenvolver suas aulas a fim de alcançar este propósito. A Trigonometria possui, em sua evolução histórica, episódios interessantes e ricos em conteúdo e aplicações.

Outro fator que contribui para as aulas de Trigonometria serem produtivas é a possibilidade de trabalhar com materiais concretos ou situações problemas que são de grande importância pra a consolidação da aprendizagem.

A sequência proposta para utilização do LEM no ensino de trigonometria no 2º ano do ensino médio despertou o interesse dos alunos de modo notório e estimulou a participação ativa nas atividades. Essa experiência se mostrou de grande relevância no processo de construção do conhecimento trigonométrico dos alunos e

[13] MD é a abreviatura utilizada pelo autor para Material Didático.

transformaram sua forma de resolver problemas matemáticos. Eles não mais usariam apenas fórmulas e artifícios para decorá-las, eles a construíam.

Observamos que nenhuma sugestão de proposta metodológica possui garantias de bons resultados, pois cada unidade escolar possui suas características específicas. Desta maneira, esperamos que este trabalho sirva para auxiliar professores em sua prática, mostrando como é possível desenvolver atividades com materiais do LEM para o ensino de trigonometria que contribua para que o nosso aluno consiga entender e um conceber um significado para o que está sendo estudado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BERTOLI, Vaneila; SCHUHMACHER, Elcio. **Retrospectiva Histórica sobre a Trigonometria: Considerações Importantes no Ensino da Matemática.** In: Anais do VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas – RS, 2013.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach. Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação** Básica / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

______.**Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática**. Brasília, 2011.

______. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996. Brasília, 1996. Disponível em <http://www.jusbrasil.com.br/legislacao/109224/lei-de-diretrizes-ebases-lei-9394-96> Acesso em: 15 mar. 2016.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em: 15 de mar. 2016

______. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf pdf> Acesso em: 15 mar. 2016.

______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio, vol 2**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf> Acesso em: 15 mar. 2016.

COSTA, N. M. L. **A história da Trigonometria.** Estudo realizado para dissertação de mestrado – PUC. São Paulo, 1997.

COSTA, N. M. L. **Função Seno e Cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador.** Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo – SP, 1997.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações.** Vol. 1 e 2 – 2. Ed. – São Paulo: Ática, 2013.

DO CARMO, Manfredo Perdigão. **Trigonometria/ Números Complexos/ Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado, Eduardo Wagner.** – 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª Ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Ciência e Aplicações**. Vol. 1 e 2. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LIMA, E. L. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Coleção do Professor de Matemática. 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. L. et al. **Temas e Problemas.** Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, E. L. ; et al. **Temas e Problemas Elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LINDEGGER, L. R. de M. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo-SP, 2000.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis. In: **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores** / Sergio Lorenzato (org.). 2. Ed. Rev. – Campinas, SP: Autores associados, 2009.

MARTINS, V. L de O. F. **Atribuindo significado ao seno e cosseno, utilizando o software Cabri-Géomètre.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo-SP, 2003.

MENDES, M. J. de F. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium.** 2010. 193 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2010

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVEIRA, Elvira Mendes de. **A Trigonometria na Educação Básica como Foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas.** / Juliana Elvira Mendes de Oliveira. 2013. 134 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Viçosa – Viçosa, MG. 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** Vol. 1 e 2 – 2. Ed. – São Paulo: Moderna, 2013.

PITOMBEIRA, João Bosco. A História da Trigonometria. In: CARMO, Manfredo Perdigão. **Trigonometria / Números Complexos / Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado, Eduardo Wagner.** – 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. **Tópicos de História da Matemática: Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

REFOSCO, M. I; BASSOI, T.S. **O Laboratório de Ensino de Matemática nas Escolas Públicas do Paraná e as Concepções dos Professores.** Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marideisa_ita_refosco.pdf> Acesso em: 10 mar. 2016.

RÊGO, R. M. do; RÊGO, R. G. do. Desenvolvimento e Uso de Materiais Didáticos no Ensino de Matemática. In: **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores** / Sergio Lorenzato (org.). 2. Ed. Rev. – Campinas, SP: Autores associados, 2009.

SILVA, L. C. F. **As Dificuldades em Aprender e Ensinar Matemática.** Licenciatura em Matemática, Universidade estadual de Goiás - UNEG Jussara-GO, 2009. Disponível em <http://www.cdn.ueg.br/arquivos/jussara/conteudoN/1209/Monografia_As_Dificuldades_em_Aprender_e_Ensinar_Matematica.pdf> Acesso em: 10 mar. 2016.

SILVA, R. C. da.; SILVA, J. R. da. **O papel do laboratório no ensino de matemática.** 2004. Disponível <http//www.sbem.com.br> Acesso em: 10 mar. 2016.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um Laboratório de Educação Matemática para Apoio na Formação de Professores. In: **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores** / Sergio Lorenzato (org.). 2. Ed. Rev. – Campinas, SP: Autores associados, 2009.

TURRIONI, A. M. S. **O Laboratório de Educação Matemática na formação inicial de professores.** Dissertação (Mestrado) – UNESP, Rio Claro. 2004.

APÊNDICE A

O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS DA REDE ESTADUAL DE ALAGOAS

Camila Lima da Costa
PROFMAT/UFAL
camilalc_mat@hotmail.com

QUESTIONÁRIO

IDADE: SEXO:
GRADUAÇÃO:
ESPECIALIZAÇÃO:
TEMPO DE EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL:
NÍVEIS DE ATUAÇÃO: ( ) Fundamental ( ) Médio ( ) Superior

1º ATUALMENTE, QUAL SUA CARGA HORÁRIA SEMANAL?

2º TRABALHA APENAS NA REDE ESTADUAL DE ENSINO?

3º VOCÊ TEVE ALGUMA EXPERIÊNCIA COM LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA EM SUA FORMAÇÃO?

( ) NÃO.
( ) APENAS NA GRADUAÇÃO.
( ) APENAS NA PÓS GRADUAÇÃO.
( ) TANTO NA GRADUAÇÃO QUANTO NA PÓS GRADUAÇÃO.

As perguntas a seguir devem ser respondidas de acordo com a realidade da(s) escola(s) da Rede Estadual de Ensino de Alagoas que você leciona.

4º A ESCOLA EM QUE VOCÊ TRABALHA POSSUI LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA?

( ) SIM.
( ) NÃO.
( ) NÃO SEI.

As perguntas posteriores são voltadas apenas para professores que responderam “sim” ao 4º item. Se sua resposta foi “não” ou “não sei”, a resolução do questionário está finalizada.

5º O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA POSSUI:

( ) ESPAÇO FÍSICO PRÓPRIO.
( ) ESPAÇO FÍSICO COMPARTILHADO.
( ) ARMÁRIO DE MATERIAIS. QUANTOS? ___
( ) ACERVO BIBLIOGRÁFICO.
( ) OUTROS: ____

6º VOCÊ PODERIA DESCREVER OS MATERIAIS QUE O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA POSSUI?

7º VOCÊ UTILIZA O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA?

( ) SEMPRE ( ) RARAMENTE ( ) NUNCA UTILIZEI

COM QUAIS TURMAS VOCÊ JÁ UTILIZOU O LABORATÓRIO E QUAIS OS TIPOS DE ATIVIDADES REALIZADAS?

8º OS DEMAIS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA ESCOLA UTILIZAM O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA?

( ) SEMPRE ( ) RARAMENTE ( ) NUNCA UTILIZAM

9º OS PROFESSORES ENFRENTAM DIFICULDADES PARA UTILIZAR OS MATERIAIS DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA? QUAIS SERIAM ESSAS DIFICULDADES?

APÊNDICE B

ESCOLA ESTADUAL ODETE BONFIM
Aluno(a): ____
Idade: _____________ 2º ano Turma: ___
Data: ___ / ___ / ____

ATIVIDADES COM A PRANCHA TRIGONOMÉTRICA COM TRIÂNGULOS (PARTE I)

Profª Camila Lima da Costa
PROFMAT/UFAL
camilalc_mat@hotmail.com

As atividades de hoje estarão voltadas para demonstrações das principais relações trigonométricas, bem como demonstrações dos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

Principais Relações Trigonométricas:

1. $\operatorname{sen}^2 \mathrm{x} + \cos^2 x = 1$.
2. $\operatorname{sen}(90° - x) = \cos x$ e $\cos(90° - x) = \operatorname{sen} x$.
3. $\operatorname{sen}(180° - x) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(180° - x) = -\cos x$.
4. $\operatorname{sen}(180° + x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(180° - x) = -\cos x$.
5. $\operatorname{sen}(360° - x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(360° - x) = \cos x$.
6. $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen}\, x}{\cos\, x}$.
7. **Ângulos Notáveis:**

	30º	**45º**	**60º**
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

APÊNDICE C

ESCOLA ESTADUAL ODETE BONFIM
Aluno(a): ____
Idade: _____________ 2º ano Turma: ___
Data: ___ / ___ / ____

ATIVIDADES COM A PRANCHA TRIGONOMÉTRICA

Profª Camila Lima da Costa
PROFMAT/UFAL
camilalc_mat@hotmail.com

1º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor do seno.

2º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor do cosseno.

3º Encontre dois ângulos que têm o mesmo valor da tangente.

4º Faça um estudo da variação de valores do seno, cosseno e tangente, para ângulos de 0º a 360º. Em seguida, preencha a tabela abaixo com os sinais correspondentes aos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos situados nos quadrantes indicados.

	1º Quadrante	**2º Quadrante**	**3º Quadrante**	**4º Quadrante**
Seno				
Cosseno				
Tangente				

5º Preencha a tabela abaixo:

Ângulo	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
0º			
30º			
45º			
60º			
90º			
120º			
135º			
150º			
180º			
210º			
225º			
240º			
270º			
300º			
315º			
330º			
360º			

APÊNDICE D

ESCOLA ESTADUAL ODETE BONFIM
Aluno(a): ____
Idade: ____________ 2º ano Turma: ___
Data: ___ / ___ / ____

ATIVIDADES COM A MANDALA TRIGONOMÉTRICA

Profª Camila Lima da Costa
PROFMAT/UFAL
camilalc_mat@hotmail.com

O objetivo de trabalhar com a Mandala Trigonométrica é explorar as razões trigonométricas de seno e cosseno, as simetrias existentes na circunferência trigonométrica e reconhecer os valores dos arcos notáveis.

Regras do Jogo:

1ª Fase: Círculos Coloridos

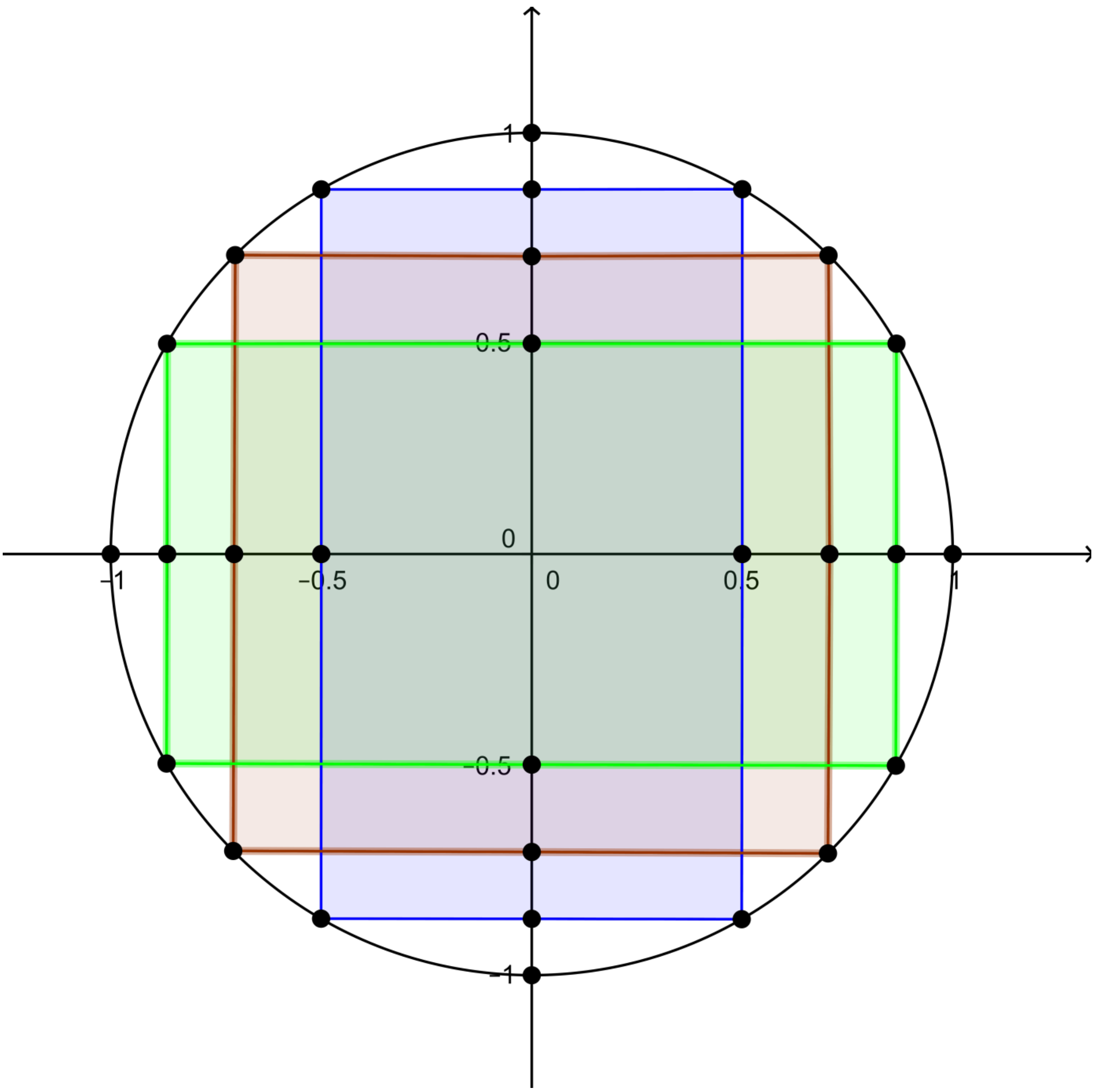
- Antes do início do jogo, os participantes devem decidir se os ângulos devem ser ditos em graus ou radianos.
- Os jogadores devem sair do mesmo lugar seguindo o mesmo sentido (anti-horário) e percorrer o ciclo trigonométrico.
- O jogador da vez deverá lançar o dado, o número obtido corresponde à quantidade de casas que o jogador deverá percorrer no ciclo trigonométrico. Ao parar, o jogador deverá indicar o ângulo correspondente ao arco indicado, assim como o seno e o cosseno deste arco.
- A avaliação do acerto será feita pelo jogador adversário.
- Nos próximos lançamentos, o jogador deverá pular no ciclo trigonométrico os círculos de cores já preenchidas.
- Acertando o jogador cobrirá, na sua cartela, o círculo de mesma cor que a marcação do ciclo trigonométrico.

Completando toda a fila de círculos coloridos, o jogador deverá passar para a 2ª fase.

2ª Fase: Ícones Vermelhos

- O jogador deverá percorrer sobre os eixos dos senos e dos cossenos, de acordo com o número obtido no lançamento do dado.
- Cada vez que o jogador passar pela origem (0,0) poderá mudar de eixo (caso queira).
- Ao parar, o jogador deverá dizer o valor correspondente no eixo e os valores dos ângulos que possuem aquele seno ou cosseno.
- A avaliação será realizada de mesmo modo que a fase anterior.

O ganhador será aquele que primeiro concluir a 2ª fase.



APÊNDICE E

ESCOLA ESTADUAL ODETE BONFIM
Aluno(a): ____
Idade: _____________ 2º ano Turma: ___
Data: ___ / ___ / ____

ATIVIDADES COM A PRANCHA TRIGONOMÉTRICA COM TRIÂNGULOS (PARTE II)

Profª Camila Lima da Costa
PROFMAT/UFAL
camilalc_mat@hotmail.com

As atividades de hoje estarão voltadas para demonstrações das principais relações trigonométricas envolvendo seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente.

Principais Relações Trigonométricas:

1. $\sec x = \frac{1}{\cos\ x}$
2. $\sec^2 x = \text{tg}^2\, x + 1$
3. $\csc x = \frac{1}{\text{sen}\ x}$
4. $\text{cotg}\, x = \frac{\cos\ x}{\text{sen}\ x}$
5. $\csc^2 x = \text{cotg}^2\, x + 1$