Universidade Federal do ABC

PROFMAT

ANDERSON ADELMO DA SILVA

DESVENDANDO A CRISE DA INCOMENSURABILIDADE. UMA PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA UTILIZANDO FRAÇÕES CONTÍNUAS.

Santo André, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ANDERSON ADELMO DA SILVA

DESVENDANDO A CRISE DA INCOMENSURABILIDADE. UMA PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA UTILIZANDO FRAÇÕES CONTÍNUAS.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ANDERSON ADELMO DA SILVA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. MAURÍCIO FIRMINO SILVA LIMA.

SANTO ANDRÉ, 2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Anderson Adelmo da
Desvendando a crise da incomensurabilidade. Uma proposta para a educação básica utilizando frações contínuas. / Anderson Adelmo da Silva. — 2016.

152 fls. : il.

Orientador: Maurício Firmino Silva Lima

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2016.

1. Frações Contínuas. 2. Números Irracionais. 3. Convergentes. I. Lima, Maurício Firmino Silva. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2016. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 20 de outubro de 2016.

Assinatura do autor: ______________________________

Assinatura do orientador: ______________________________

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Anderson Adelmo da Silva, realizada em 29 de setembro de 2016:

Prof.(a) Dr.(a) **Maurício Firmino Silva Lima** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Eduardo Guéron** (UFABC) – Membro Titular

Renato Alessandro Martins

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (UNIFESP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Cláudio Gomes Pessoa** (UNESP) – Membro Suplente

Dedico este trabalho à minha esposa Suzi, companheira de todas as horas, e aos meus filhos Fernando e Nanda Maria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pela luz que guia o meu caminho, propiciando esta oportunidade de ampliar meus conhecimentos.

À minha esposa Suzi pelo apoio, compreensão e incentivo para que eu me dedicasse, tanto quanto fosse necessário para a realização deste trabalho.

Aos meus filhos Fernando e Nanda Maria pela paciência (também pela falta), pelas histórias que não contei, pelas brincadeiras que não brinquei.

Minha sincera gratidão ao Professor Doutor Maurício Firmino Silva Lima pela sugestão do tema, pela orientação, paciência e cobrança que tornaram este trabalho possível.

Ao meu pai, de quem herdei a paixão pela matemática e o sonho de obter o título de mestre, e à minha mãe, grande parceira no início de minha jornada profissional, que cuidava de tudo para que eu pudesse trabalhar e estudar.

Aos meus irmãos, sempre parceiros em tudo que realizo. Ao Bruno pelo auxílio com o inglês.

Aos colegas de trabalho pela apoio, aos professores que participaram da minha formação, em especial à professora Madalena, hoje colega de profissão e aos alunos que tive, aos que tenho hoje e aos que terei.

Ao corpo docente da UFABC, em especial aos que lecionaram disciplinas neste curso e a SBM pelo programa PROFMAT.

“Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.”

(David Hilbert, *sobre a obra de Cantor*)

RESUMO

Esta dissertação apresenta as Frações Contínuas como facilitador para a compreensão do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Busco retomar aspectos históricos sobre os segmentos comensuráveis e incomensuráveis, utilizando os convergentes das frações contínuas finitas e infinitas para compreensão da importância de uma boa aproximação. Assim, apresento como sugestão que esse tema seja incluído na Educação Básica, não como um tema curricular, mas como uma rica ferramenta para aplicação em diversos conteúdos já previstos nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Palavras-chave: Frações Contínuas, Números Irracionais, Convergentes.

ABSTRACT

This dissertation presents the continued fractions as a facilitator to understanding the set of rational numbers and the set of irrational numbers. I have been looking for ways to resume historical aspects of the commensurable and incommensurable segments, using the convergent finite continued fractions and infinite to understanding the importance of a good approach. So, I offer a suggestion that this issue be included in basic education, not as a curriculum subject, but as a rich tool for application on content already provided for in the final years of elementary school and in high school.

Keywords: Continued Fractions, Irrational Numbers, Convergents.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

As frações contínuas são apresentadas nessa dissertação como uma importante ferramenta para a compreensão do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

Na educação básica é perceptível a dificuldade da transição entre o discreto e o contínuo. Assim como na história da matemática, em que se destaca a suposta crise do pensamento pitagórico causada pela descoberta de segmentos incomensuráveis, esse assunto apresenta grande dificuldade na aprendizagem, sendo apresentado como um amontoado de regras, quase sempre sem nenhuma aplicação.

Apesar disso, a proposta deste trabalho não é a de mais um conteúdo a ser ensinado, mas sim utilizar as frações contínuas nos conteúdos que já são oferecidos, atrelando os aspectos históricos, para contextualizar dentro da própria matemática, às habilidades a serem desenvolvidas.

A apresentação desta pesquisa foi pensada com o intuito de resgatar as motivações históricas que propiciaram o desenvolvimento das frações contínuas e suas aplicações à Teoria dos Números, bem como apresentar uma base sólida teórica sobre seus fundamentos, podendo contribuir àqueles que pretendem estudar suas diversas aplicações.

A seguir, descrevo os objetivos de cada capítulo desta pesquisa.

No capítulo 1, apresentamos argumentos contrários e favoráveis à Crise no Pensamento Pitagórico, causada pela descoberta da incomensurabilidade, sem a pretensão de concluirmos se ela realmente existiu, dando enfâse às questões que impulsionaram o conjunto dos números irracionais. Passando pelas primeiras provas apresentadas sobre incomensurabilidade, chegando ao desenvolvimento das frações contínuas nos séculos XVI à XIX, encerrando com a obra de Cantor e Dedekind que apresentaram um brilhante estudo sobre a enumerabilidade e não enumerabilidade de conjuntos infinitos, e definiram o contínuo.

Já no capítulo 2, definimos fração contínua finita e infinita, que equivalem aos números racionais e irracionais, respectivamente. Apresentamos as propriedades dos convergentes, bem como a ordem de aproximação. Destacamos que as melhores aproximações racionais de números irracionais são obtidas pelos convergentes das frações contínuas, provamos o Teorema de Dirichlet e o Teorema de Hurwitz-Markov que estão relacionados aos erros de aproximação.

No capítulo 3, aprofundamos algumas características dos números irracionais, definindo o que são irracionais algébricos e irracionais transcendentes, e que eles são enumeráveis e não enumeráveis respectivamente. Introduzimos o número de Liouville como número irracional transcendente. Por fim, apresentamos um importante resultado, que refere-se as frações contínuas periódicas, provando que todo número irracional, cuja expansão em fração contínua é periódica, é raiz de um polinômio de grau 2.

Por sua vez, no capítulo 4, apresentamos a interpretação geométrica das frações contínuas finitas e infinitas, que se referem, respectivamente, aos números racionais e irracionais.

No capítulo 5, descrevemos algumas expansões em frações contínuas de números irracionais da forma $\sqrt{N}$, com $n \in \mathbb{N}$, bem como um método para escrever os números π e e em frações contínuas utilizando calculadora científica. Encerramos esse capítulo apresentando a expansão em fração contínua da razão áurea ϕ, cujos todos coeficientes resultam em 1, e a sequência dos q_n's (denominadores dos convergentes) coincide com os elementos da sequência de Fibonacci.

No capítulo 6, realizamos uma análise crítica de como é proposto o ensino dos números irracionais no currículo da Educação Básica pela Base Nacional Comum Curricular (documento em construção), pelo Currículo do Estado de São Paulo e em duas coleções de livros didádicos recomendadas pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) uma para o Ensino Fundamental e outra para o Ensino Médio. Relacionando os objetivos propostos, em ambos documentos, com as sugestões de atividades, fazendo referências aos conteúdos em que podem ser utilizados às frações contínuas.

Por fim, no capítulo 7, destacamos objetivos e conteúdos do 7º ano do Ensino Fundamental ao 1º ano do Ensino Médio nos quais podem ser utilizadas as frações contínuas. Fazendo referências históricas, trabalhando com álgebra e geometria em atividades que vão desde a representação em frações contínuas, aproximações racionais de números racionais e irracionais, grandezas comensuráveis e incomensuráveis e equações dionfantinas lineares.

No Apêndice, apresentamos a demonstração da bela expansão em fração contínua do número e, a sugestão do Caderno do Currículo do Estado de São Paulo para a utilização de frações contínuas no 9º ano e uma atividade aplicada à alunos do 1º ano do Ensino Médio com a utilização de frações contínuas.

1

ASPECTOS HISTÓRICOS

1.1 A SUPOSTA CRISE NO PENSAMENTO PITAGÓRICO

Pitágoras de Samos (c. 570 – 495 a.C.) era um profeta e místico, é possível que tenha sido discípulo de Tales de Mileto, o que não seria difícil pela diferença de meio século entre suas idades e geograficamente, Mileto e Samos, eram próximas. A semelhança em seus interesses explica-se pelo fato de Pitágoras também ter viajado pelo Egito e Babilônia, possivelmente também até a Índia. De volta ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, hoje sul da Itália, onde fundou a Escola Pitagórica.

Existe uma grande dificuldade em recontar a história deste período, tanto pela perda de documentos da época, quanto ao fato da ordem fundada por Pitágoras ter sido comunitária, secreta e de tradição oral. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema “Os números governam o mundo”, sendo que, para eles, números eram apenas os inteiros, e as frações eram as razões desses números.

Um dos grandes marcos na história da matemática fora a descoberta dos segmentos incomensuráveis, por muitos atribuída aos pitagóricos, na tentativa de determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário.

Utilizando da notação atual, temos que a diagonal do quadrado unitário é $\sqrt{2}$, obtida aplicando o Teorema de Pitágoras, supondo por absurdo que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, com a e b coprimos, temos que:

$$a = b\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2,$$

como a^2 é o dobro de um número inteiro, então a^2 é par, logo a também. Fazendo $a = 2c$ teremos:

$$4c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2c^2 = b^2,$$

daí, conclui-se que b também é par, mas a e b são primos entre si, logo a e b pares é absurdo, portanto por contradição $\sqrt{2}$ não é racional.

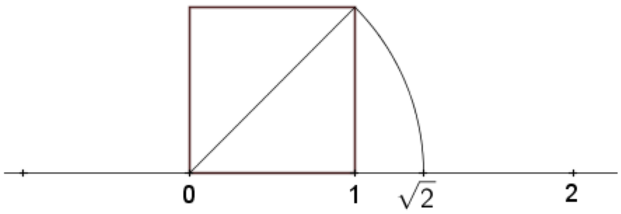


Figura 1: Construção geométrica de $\sqrt{2}$ na reta.

Pelo misticismo da Escola Pitagórica atribuído à ideia de que "Tudo é número", historiadores supõem a crise no Pensamento Pitagórico, com a descoberta atribuída aos próprios discípulos de Pitágoras de que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de retas incomensuráveis. [11]

Segundo Howard Eves [20], "deve ter sido um choque aos pitagóricos descobrir que há pontos na reta que não correspondem a números inteiros e nem a razão de dois números inteiros."

Segundo Gonçalves e Possani [2] (p. 22-23).

> "A crise da incomensurabilidade parece só existir quando lemos os textos gregos com os nossos termos, esquecendo-nos de prestar atenção no modo como os atores históricos viam a matemática. Quando tentamos nos colocar no ponto de vista dos antigos gregos, em especial dos primeiros pitagóricos, os motivos para a crise como que desaparecem."

Fowler apud Gonçalves e Possani [2] (p. 22), argumenta que através do conceito de razão pré-eudoxano ligado ao resultado da subtração recíproca e contínua, poderia lidar-se com a incomensurabilidade sem repensar os fundamentos da matemática. Assim, "dado dois números ou duas linhas [...], então conte: quantas vezes a segunda linha pode ser subtraída da primeira linha; quantas vezes o resto pode ser subtraído da segunda linha; quantas vezes o resto pode ser subtraído desse resto; etc."

Assim, a diagonal do quadrado de lado unitário seria expressa da seguinte forma:

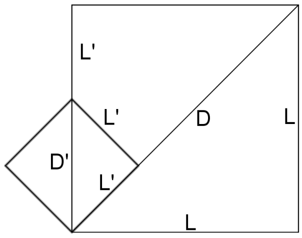


Figura 2: Razão pré-eudoxano.

Tomemos L e D, lado e diagonal do quadrado maior; e L' e D' segmentos correspondentes do quadrado menor.

A razão entre D e L, utilizando a subtração recíproca e contínua, é:

$$D - L = L',$$

ou seja, cabe L e sobra L'.

Agora vemos quantos L' cabem em L. Sabemos que:

$$D' + L' = L,$$

fazendo $D' = L' + L''$, teremos:

$$L = 2L' + L'',$$

ou seja, cabem $2L'$ e sobra L''.

Daí, perguntamos quantos L'' cabem em L', o que retorna a situação anterior, assim, a razão em termos entre D e L é $1, 2, 2, \ldots$, e dessa forma a razão entre L e D está expressa em números.

Segundo Carl B. Boyer [19], historiadores atribuem a descoberta dos incomensuráveis especificamente ao pitagórico Hipasus de Metaponto, deixando em aberto a possibilidade desta descoberta não ter sido pela razão entre a diagonal e o lado de um quadrado ($\sqrt{2}$), mas sim, a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

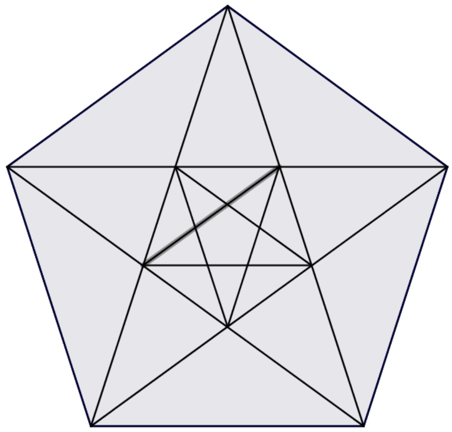


Figura 3: Pentágono Regular.

1.2 A PROVA DA INCOMENSURABILIDADE

Aristóteles (384-322 a.C.) refere-se a uma demonstração por absurdo, para demonstrar que a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis, supondo que a razão é comensurável, ou seja, é da forma $\frac{a}{b}$ fração irredutível para chegar num absurdo, no qual o mesmo inteiro tem que ser par e ímpar.

Segundo Platão, Teodoro de Cirene (425 a.C) foi o primeiro a provar a irracionalidade dos inteiros não quadrados de 3 a 17, inclusive, não se conhece o registro de como foi feito, e nem porque parou no 17, estas provas podem ter sido feitas da mesma forma que Aristóteles fez para $\sqrt{2}$. Teaetetus (morreu em 369 a.C.), amigo de Platão, supostamente trinta anos antes dialogou com Sócrates e Teodoro a natureza das grandezas incomensuráveis, fazendo distinções à grandezas que são incomensuráveis em comprimento e são ou não incomensuráveis em quadrado. Para ilustrar, $\sqrt{3}$ é incomensurável em comprimento, mas é comensurável em quadrado, já $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ é incomensurável tanto em comprimento e em quadrado [19].

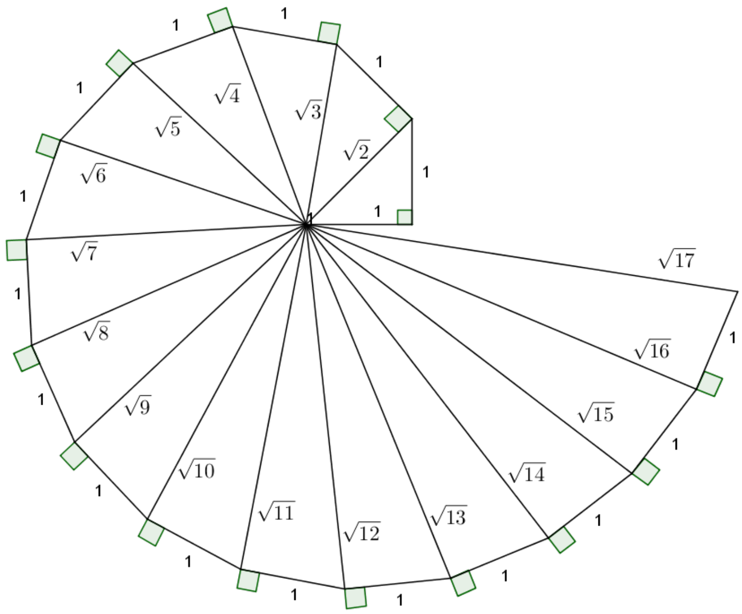


Figura 4: A Espiral de Cirene.

Zenão, o Eleático (viveu por volta de 450a.C) provou por argumentos a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. Pelo seu método dialético enunciou problemas que hoje são conhecidos como Paradóxos de Zenão, dos quais destacaremos: (1) a Dicotomia (2) o Aquiles.

Problema 1. Antes de um corredor percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disso, deve percorrer o primeiro quarto; e ainda antes, o primeiro oitavo e assim por diante, por meio de infinitas subdivisões. O corredor que quer se por em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento.

Problema 2. Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai em vantagem, após um determinado tempo ele percorre metade da distância entre eles, em seguida percorre a metade da distância restante, assim sucessivamente, sempre percorrendo apenas a metade da distância restante. Por mais depressa que Aquiles corra, e por mais devagar que a tartaruga caminhe, o processo continua indefinidamente e Aquiles nunca poderá alcançar a lenta tartaruga, pois quando percorrer metade da distância, a tartaruga já terá avançado um pouco.

Os dois paradoxos são semelhantes, a diferença é que no primeiro a subdivisão infinita é regressiva enquanto no segundo é progressiva.

1.3 EUCLIDES E A INCOMENSURABILIDADE

Euclides viveu em Alexandria em torno de 300 a.C., sabe-se muito pouco sobre sua vida, mas foi neste período que ele escreveu a obra que teve mais edições depois da Bíblia, Os Elementos. Dividida em treze livros que tratam de geometria, álgebra, aritmética e teoria dos números, sua apresentação por método axiomático foi descrita por Aristóteles como uma das maneiras de construir uma teoria científica [17].

No livro V, Euclides expõe de forma magistral a teoria das proporções de Eudoxo, teoria esta aplicável a grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Já no livro X trata da classificação sistemática de segmentos incomensuráveis com 115 proposições, este livro até o advento da álgebra moderna era o mais admirado e o mais temido [19], [20].

Na abertura deste livro, Euclides apresenta a seguinte definição:

Definição 1.1. Dizem-se grandezas comensuráveis as que se medem pela mesma medida, e incomensuráveis aquelas das quais não é possível nada tornar-se medida comum.

Sobre os incomensuráveis, ainda apresenta a proposição 2, que diz: *Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis* p.355 [18].

Esta obra não apresenta a crise dos incomensuráveis para os pitagóricos, sendo assim, alguns historiadores defendem que não há elementos sólidos que a comprovem, ainda destaca-se nessa obra a prova dos resultados apenas por raciocínios abstratos, sem o apoio de uma notação algébrica conveniente.

1.4 MÉTODO DA DESCIDA INFINITA POR FERMAT

Pierre de Fermat (1601?-1665), francês, dentre as variadas contribuições à matemática, destaca-se a fundação da moderna teoria dos números. Em 1879, na biblioteca de Leyden, encontrou-se um escrito em que ele descreve um método geral conhecido como *método da descida infinita*, pelo qual pode ter feito muito de suas descobertas, sendo este, útil para estabelecer resultados negativos [20].

Ilustramos à seguir uma prova que $\sqrt{2}$ é irracional pelo método da descida infinita.

Supomos $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}^+$, logo $p > q$, pois $1 < \sqrt{2} < 2$, então:

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

substituindo $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ no segundo membro da igualdade, teremos:

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\frac{p}{q} - 1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{\frac{p}{q} - 1} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q},$$

fazendo,

$$2q - p = p_1 \quad e \quad p - q = q_1,$$

teremos,

$$\sqrt{2} = \frac{p_1}{q_1},$$

mas,

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

substituindo,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

e multiplicando por q, obtemos:

$$q < p < 2q.$$

Agora,

$$p < 2q \Longrightarrow 0 < 2q - p = p_1,$$

e,

$$q < p \Longrightarrow p_1 = 2q - p < p,$$

ou seja, p_1 é inteiro positivo menor que p.

Assim, repetindo o procedimento obteremos $\sqrt{2} = \dfrac{p_2}{q_2}$, com $p_2 < p_1 < p$ inteiros positivos, porém o processo pode ser repetido indefinidamente, mas os inteiros positivos não podem decrescer indefinidamente. Logo segue que $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

1.5 AS FRAÇÕES CONTÍNUAS NOS SÉCULOS XVI À XIX

Pietro Antonio Cataldi (1548-1626) ensinou matemática e astronomia em Florença, Perúgia e Bolonha, credita-se a ele o mérito pelos primeiros passos na teoria das frações contínuas, ele expressou $\sqrt{18}$ como $4\&\frac{2}{8}\&\frac{2}{8}\cdots$[1].

John Wallis (1616-1703), em *Arithmetica Infinitorum (1655)*, apresentou o produto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots},$$

e Lord Brouncker(1620-1684), o primeiro presidente da Royal Society, converteu por manipulação esse resultado para

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}}.$$

O primeiro matemático a demonstrar aplicação prática de frações contínuas foi o holandês Christiaan Huygens (1629-1695), que escreveu um artigo explicando como usar os convergentes de uma fração contínua para as relações entre as engrenagens,

1 Notação de P. A. Cataldi que equivale à: $\sqrt{18} = 4\&\cfrac{2}{8\&\cfrac{2}{8+\cdots}} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8+\cdots}} = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4+\cdots}}.$

trabalho este motivado pelo seu desejo de construir um planetário mecânico.

No século $XVIII$ o campo de pesquisa em frações contínuas teve um grande desenvolvimento com Leornad Euler (1707-1783), Johan Heirinch Lambert (1728-1777) e Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Euler foi um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das frações contínuas, em 1737 "*De Fractionlous Continious*", mostrou que todo racional possui uma única representação em fração contínua simples finita. Forneceu também uma expressão para o número e,

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}},$$

e usou esta expressão para provar que e e e^2 são irracionais.

Já Lambert, em 1761, apresentou a primeira prova à Academia de Berlim de que π é irracional, e em 1778 encontrou expansões contínuas para funções $\log(1+x)$, $\arctan(x)$ e $\tan(x)$.

Lagrange, matemático conciso e preocupado com o rigor, usou frações contínuas para encontrar o valor de raízes irracionais, também provou que números quadráticos irracionais são dados por frações contínuas periódicas.

Jouseph Liouville (1809-1882), em 1844 construiu uma grande classe de números não algébricos, hoje denominados números de Liouville 3.10 que são números transcendentes, neste mesmo ano propôs que nem e e e^2 seriam números algébricos, problema este, que Charles Hermite (1822-1901), matemático francês, mostrou em 1873 num artigo, continuando as ideias de Liouville que e é transcendente.

E, somente nove anos depois, em 1882, num artigo da *Mathematische Annalen* Lindemann (1852-1939) de Munique, estendendo o trabalho de Liouville e Hermite, provou que π é também um número transcendente.

1.6 CANTOR E DEDEKIND – DENSIDADE DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Georg Cantor (1845-1912) e Julius Dedekind (1831-1916) estavam entre os matemáticos mais originais e notáveis de sua época. Seus nomes são associados à "número real" e a provocativa palavra "infinito", assunto este tratado desde o tempo de Zenão.

Dedekind voltou-se ao problema dos números irracionais desde 1858, quando lecionava Cálculo, concluiu que o conceito de limite deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar geometria como guia. Seu questionamento era o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais. Leibniz e Galileu haviam julgado que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era consequência de sua densidade, ou seja, entre dois pontos quaisquer sempre existe um terceiro, porém os números racionais tem essa propriedade, mas não forma um *continuum*.

As reflexões de Dedekind levaram-no à conclusão que a continuidade de um segmento de reta não se deve a propriedade da ligação mútua, e sim a uma ideia oposta, o corte do segmento em duas partes por um ponto sobre ele.

Sua ideia hoje é denominada por axioma de Cantor-Dedekind, que diz: *Seja o corte A, B gerado pelos conjuntos A e B, sempre existe um ponto P da reta que separa os dois conjuntos*, todo número de A é menor que todo número de B, existe só um único número real que possui esse corte. Se A possui um maior número e B um menor número, o corte define um número racional, mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor, então o corte define um número irracional.

Ele definiu conjunto infinito em notação moderna dizendo que se um conjunto S' de elementos diz-se infinito, se pode ser colocado em relação biunívoca com os elementos de S. Por exemplo, sabemos que o conjunto dos números pares naturais podem ser colocados em relação biunívoca com conjunto dos números naturais, tal que $n = 2n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Cantor, assim como Dedekind, reconheceu a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, mas ele também observou que os conjuntos infinitos não são iguais. Ele criou uma hierarquia pela potência do conjunto, definindo assim conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis. Mostrou que o conjunto dos números racionais positivos podem ser relacionados de forma biunívoca com o conjunto dos números naturais, sendo assim, são enumeráveis e possuem a mesma potência, ou seja, há tantos números naturais quantos números racionais positivos.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \cdots & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \cdots & & & \\
 & \swarrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \cdots & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & \\
\vdots & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

Ele também mostrou que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma potência, por redução ao absurdo provou que os números reais têm potência maior que o conjunto das frações racionais. Supondo por absurdo que os números reais entre 0 e 1 sejam enumeráveis, então poderiam ser colocados em sequência $p_1, p_2, p_3, \cdots$. Cada um dos números p_i pode ser escrito univocamente como uma fração decimal infinita, lembrando que todo número como $0,2$ pode ser representado como $0,199999\cdots$. Podemos então escrever a sequência da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
p_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
p_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

cada símbolo a_{ij} representa algum dos algarismos $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Após incluir "todos" os números reais entre 0 e 1, há um número que não foi incluído, esse número é

$0, b_1 b_2 b_3 \cdots$, onde digamos $b_k = 3$ se $a_{kk} \neq 3$ e $b_k = 5$ se $a_{kk} = 3,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$. Esse número obviamente está entre 0 e 1 e é diferente de p_i. Assim contradiz a suposição. Logo o conjunto é não enumerável.

Cantor ainda provou que o conjunto dos números algébricos é enumerável e o conjunto dos números transcedentes é não enumerável.

Sobre a obra de Cantor, David Hilbert exclamava "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

2

FRAÇÕES CONTÍNUAS

Uma *fração contínua* é uma expressão da forma

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4, \dots], \tag{2.1}$$

onde $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_2, a_3, a_4, \dots \in \mathbb{N}$, e pode ser finita, infinita periódica ou infinita.

No caso de *frações contínuas finitas* denotamos:

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_n]. \tag{2.2}$$

Para representarmos um número na forma de fração contínua, podemos utilizar o *algoritmo da divisão de Euclides*, ou a *tranformação de Gauss*.

Teorema 2.1. *Todo número real α, tem uma única correspondência em fração contínua, que é finita se α é racional e infinita se α é irracional.*

Nas seções à seguir, demonstraremos o Teorema 2.1.

2.1 FRAÇÕES CONTÍNUAS DE NÚMEROS RACIONAIS

Teorema 2.2. *Qualquer fração contínua finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua.*

Demonstração. Para verificarmos qual número racional está representado na fração contínua finita, basta efetuarmos as somas, até escrevermos o número racional na forma de fração reduzida, o que demonstra a primeira parte.

Para a recíproca, consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer. Pelo algoritmo da divisão obtemos:

$$p = a_1 q + r_1,$$

que equivale à:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q},$$

onde,

$$0 \leqslant r_1 < q,$$

e,

$$a_1 = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor,$$

$$\left(\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \text{ denota o maior inteiro menor ou igual a } \frac{p}{q} \right).$$

Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro e o processo termina.

Caso contrário, fazemos:

$$\frac{r_1}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r_1}},$$

e substituindo, temos:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < q.$$

Aplicamos agora o algoritmo da divisão em $\frac{q}{r_1}$, e obtemos:

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1,$$

se $r_2 = 0$, então processo termina. Daí,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a_1; a_2],$$

se $r_2 \neq 0$, temos:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}, \quad 0 < r_2 < r_1,$$

que equivale a:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Repetimos então o mesmo procedimento a $\frac{r_1}{r_2}$.

O processo encerra quando $r_n = 0$ para algum n, o que ocorre, pois $q > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots > r_{n-1} > r_n$ é uma sequência monótona decrescente de naturais, daí então,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{r_1}{q}, \quad 0 \leqslant r_1 < q, \\
\frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1, \\
&\vdots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \quad 0 \leqslant r_{n-1} < r_{n-2}, \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n, \quad r_n = 0,
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = [a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n],$$

como queríamos mostrar. $\square$

Assim, demonstramos que em 2.1 a representação de um número racional em frações contínuas é finita. Por fim, ressaltamos que a unicidade da representação de um número racional em fração contínua é garantida pelo seguinte teorema que se refere ao algoritmo da divisão euclidiana.

Teorema 2.3. *(Algoritmo Euclidiano da Divisão) Dados dois inteiros p e q, $q \neq 0$, existe um único par de inteiros a e r, tais que:*

$$p = aq + r, \quad 0 \leqslant r < |q| \quad (r = 0 \Leftrightarrow q \mid p).$$

Demonstração. Primeiro provamos a existência. Como $|q| > 0$, existe a satisfazendo:

$$aq \leqslant p < (a+1)q,$$

o que implica,

$$0 \leqslant p - aq \quad \text{e} \quad p - aq < q.$$

Definimos assim,

$$r = p - aq,$$

o que garante a existência de a e r.

Agora provamos a unicidade.

Supomos por absurdo a existência de $a \neq a'$ e $r \neq r'$, tal que:

$$p = aq + r = a'q + r',$$

onde $a, a', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < |q|$ e $0 \leqslant r' < |q|$.

Da segunda igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} (aq + r) - (a'q + r') &= 0 \\ \Rightarrow q(a - a') + r - r' &= 0 \\ \Rightarrow q(a - a') &= r' - r, \end{aligned}$$

logo, $q|(r - r')$.

Como $r < |q|$ e $r' < |q|$, temos:

$$|r' - r| < |q|.$$

Assim,

$$|q||a-a'| = |r'-r| < |q|,$$

o que é absurdo, pois a equação acima só é verdadeira se $a = a'$ e $r = r'$, o que contradiz a hipótese, portanto a e r são únicos. □

Assim provamos a primeira parte do teorema 2.1, que garante a unicidade, a não ser pela possibilidade de modificar o último termo a_n.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n-1)+\frac{1}{1}}.$$

Exemplo 2.1. Podemos escrever:

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}} = [1;2,3],$$

como,

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3-1+\frac{1}{1}}} = [1;2,2,1].$$

2.1.1 *Primeiro Quociente*

No processo de divisões sucessivas, apenas o primeiro quociente pode ser positivo, negativo ou zero.

Exemplo 2.2. $\frac{p}{q} = \frac{17}{10}$.

Como,

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \cdot 10 + 7 \\ 10 &= 1 \cdot 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1, \end{aligned}$$

então,

$$\frac{17}{10} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = [1; 1, 2, 3].$$

Se, $p > q$, então, $a_1 \geqslant 1$.

Exemplo 2.3. $\dfrac{p}{q} = \dfrac{5}{7}$.

Como,

$$\begin{aligned} 5 &= 0 \cdot 7 + 5 \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1, \end{aligned}$$

então,

$$\frac{5}{7} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = [0; 1, 2, 2] = [1, 2, 2].$$

Se, $0 < p < q$, então, $a_1 = 0$.

Exemplo 2.4. $\dfrac{p}{q} = -\dfrac{12}{5}$.

Como,

$$\begin{aligned} -12 &= -3 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1, \end{aligned}$$

então,

$$-\frac{12}{5} = -3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [-3; 1, 1, 2].$$

Se, $p > q$, então, $a_1 \geqslant 1$.

2.1.2 *Convergentes de Frações Contínuas Finitas*

Tomemos $\dfrac{p}{q}$ um racional, cuja expansão em fração contínua é da forma (2.2), isto é,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n].$$

Associado à expressão acima, escrevemos:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{a_1}{1} && = \frac{p_1}{q_1} && \Longrightarrow p_1 = a_1, && q_1 = 1;\\
C_2 &= a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1a_2+1}{a_2} && = \frac{p_2}{q_2} && \Longrightarrow p_2 = a_1a_2 + 1, && q_2 = a_2;\\
C_3 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{a_3p_2+p_1}{a_3q_2+q_1} && = \frac{p_3}{q_3} && \Longrightarrow p_3 = a_3p_2 + p_1, && q_3 = a_3q_2 + q_1;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

obtidas, considerando sucessivamente, o primeiro termo da expansão, o primeiro e o segundo termo da expansão, e assim por diante, até o n-ésimo termo.

Definição 2.4. Chamamos convergente de ordem i da fração contínua (2.2) , o número

$$C_i = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i}}}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Em particular, o n-ésimo convergente $C_n = \dfrac{p}{q}$.

Definição 2.5. Os números p_i e q_i tais que $C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ são chamados, respectivamente, numerador e denominador do i-ésimo convergente.

Teorema 2.6. *O numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente C_i da fração contínua $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$ satisfazem às equações,*

$$\begin{cases} p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2}, \\ q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2}, \quad i = 3, 4, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.3}$$

com as condições iniciais:

$$\begin{cases} p_1 = a_1, & q_1 = 1, \\ e & \\ p_2 = a_1a_2 + 1, & q_2 = a_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

Demonstração. Os cálculos feitos para C_1, C_2 e C_3 mostram que as condições iniciais são satisfeitas para $i = 1, 2$ e 3.

Supondo o resultado válido para um inteiro i, com $i \geqslant 3$, mostraremos que o mesmo é verdadeiro para $i + 1$.

Temos que:

$$C_{i+1} = \quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{a_{i+1}}}}} = \left[a_1; a_2, \ldots, a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right].$$

Daí, C_{i+1} é o i-ésimo convergente da fração contínua $[a_1; a_2, \ldots, a_i{}^*, a_{i+2}, \ldots, a_n]$ com $a_i{}^* = a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$. Pela hipótese de indução,

$$C_{i+1} = \frac{\left(a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}\right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}\right) q_{i-1} + q_{i-2}},$$

multiplicando por $\dfrac{a_{i+1}}{a_{i+1}}$, teremos:

$$\begin{aligned} C_{i+1} = \quad & \frac{(a_{i+1}a_i + 1)p_{i-1} + a_{i+1}p_{i-2}}{(a_{i+1}a_i + 1)p_{i-1} + a_{i+1}p_{i-2}} = \frac{a_{i+1}a_ip_{i-1} + p_{i-1} + a_{i+1}p_{i-2}}{a_{i+1}a_iq_{i-1} + q_{i-1} + a_{i+1}q_{i-2}} \\ = \quad & \frac{a_{i+1}(a_ip_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{a_{i+1}(a_iq_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}}, \end{aligned}$$

substituindo:

$$\frac{a_ip_{i-1} + p_{i-2}}{a_iq_{i-1} + q_{i-2}} = \frac{p_i}{q_i},$$

na última fração obtemos,

$$C_{i+1} = \frac{a_{i+1}p_i + p_{i-1}}{a_{i+1}q_i + q_{i-1}} = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}},$$

como queríamos mostrar. □

Observação 2.1.1. *Veja que:*

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + q_0} = \frac{a_2a_1 + 1}{a_2},$$

onde definimos $p_0 = 1$ *e* $q_0 = 0$.

Com as definições de p_0 e q_0, as equações (2.3) e (2.4) são satisfeitas também para $i = 2$. Assim,

$$\begin{cases} p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2}, \\ q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \end{cases}$$

com as condições iniciais:

$$\begin{cases} p_1 = a_1, \quad q_1 = 1, \\ e \\ p_0 = 1, \quad q_0 = 0, \end{cases}$$

sendo que, p_0 e q_0 não definem numerador e denominador de convergente.

Teorema 2.7. *(Fórmula do Determinante): Sejam* p_i *e* q_i *numerador e denominador, respectivamente, do convergente* C_i, $i \geqslant 1$ *de uma fração contínua. Então,*

$$\begin{vmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{vmatrix} = p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i, \quad i \geqslant 1, \tag{2.5}$$

Demonstração. Se $i = 1, 2$, então

- $i = 1, p_1q_0 - p_0q_1 = a_1.0 - 1.1 = -1 = (-1)^1$,
- $i = 2, p_2q_1 - p_1q_2 = (a_2a_1 + 1).1 - a_1a_2 = a_1a_2 + 1 - a_1a_2 = 1 = (-1)^2$.

Supondo o resultado verdadeiro para $i \leqslant k$, com $k \geqslant 1$, ou seja, $p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, vejamos que a igualdade é válida para $i = k + 1$. Pela hipótese de indução, e por $p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}$ e $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$, temos:

$$\begin{aligned} p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1} = & \ (a_{k+1}p_k + p_{k-1})q_k - p_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1}) \\ = & \ (a_{k+1}p_k + p_{k-1})q_k - p_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1}) \\ = & \ a_{k+1}p_kq_k + p_{k-1}q_k - a_{k+1}p_kq_k - p_kq_{k-1} \\ = & \ p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = -(p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k) \\ = & \ -(-1)^k = (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

2.2 APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR FRAÇÕES CONTÍNUAS

Definição 2.8. A transformação de Gauss T é definida por:

$$T : [0,1) \longrightarrow [0,1), \qquad T(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} - \left\lfloor \dfrac{1}{\alpha} \right\rfloor, & \alpha \neq 0, \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Definimos $T^0(\alpha) = \alpha$ e indutivamente $T^{i+1}(\alpha) = T(T^i(\alpha))$.

A transformação de Gauss pode ser utilizada para representar números racionais em frações contínuas ou aproximar irracionais de racionais.

Observação 2.2.1. *Um número $\alpha \in (0,1)$ é irracional se, e somente se, $T(\alpha)$ é irracional. Portanto, um número α é irracional se, e somente se, $T^n(\alpha)$ é irracional (logo não nulo) para todo $n \geqslant 0$.*

Assim, dado $\alpha \in \mathbb{Q}^C$, teremos $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, ou seja, a_1 é o maior inteiro menor do que α. Logo,

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

onde,

$$x_1 = \frac{1}{\alpha - a_1},$$

$x_1 \in \mathbb{Q}^C$ e $x_1 > 1$.

Aplicando a transformação de Gauss em x_1 , escrevemos:

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

sendo $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor$, $x_2 \in \mathbb{Q}^C$ e $x_2 > 1$.

Assim, podemos repetir o processo tanto quanto se queira, obtendo:

$$\begin{array}{ll}
\alpha = a_1 + \dfrac{1}{x_1}, & x_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_1}, \\
x_1 = a_2 + \dfrac{1}{x_2}, & x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_2}, \\
x_2 = a_3 + \dfrac{1}{x_3}, & x_3 = \dfrac{1}{x_2 - a_3}, \\
\vdots & \\
x_n = a_{n+1} + \dfrac{1}{x_{n+1}}, & x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_{n+1}}, \\
\vdots &
\end{array} \tag{2.7}$$

onde todos os a_n's $(n > 1)$ são inteiros positivos e todos os x_n's são irracionais maiores do que 1, tais que:

$$a_n = \lfloor x_{n-1} \rfloor, \quad n \geqslant 2.$$

Assim, calculamos a fração contínua de α, como segue:

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & a_1 + \frac{1}{x_1} & = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}} \\
= {} & a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_n}}}} & = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cdots}}}},
\end{aligned}$$

portanto:

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4, \dots].$$

Desta forma, dado um número irracional α temos uma sequência $(a_n$'s, $n > 1)$ infinita de números naturais e uma sequência de números irracionais $(x_n$'s, $n \geqslant 1)$.

O que nos leva a seguinte definição.

Definição 2.9. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, dizemos que:

- o número inteiro a_n é o n-ésimo quociente de α;
- o número racional $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$ é o n-ésimo convergente de α.

Observação 2.2.2. *Quando escrevemos* $\frac{p_n}{q_n}$ *expressamos duas coisas, um número racional e uma representação dele onde* p_n *e* q_n *são coprimos.*

Observação 2.2.3. *A transformação de Gauss também pode ser utilizada para representar um número racional na forma de fração contínua, sendo que o processo se encerra quando* $x_n = 0$*. Seja pelo algoritmo da divisão de Euclides ou pela transformação de Gauss a fração contínua do número racional será sempre única.*

Exemplo 2.5. Determine a expansão em frações contínuas de $\sqrt{2}$ usando a transformação de Gauss.

Solução: Seja $\alpha = \sqrt{2}$, então:

$$a_1 = \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1,$$

e,

$$x_1 = \frac{1}{\alpha - a_1} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1,$$

daí,

$$a_2 = \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2,$$

e,

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,$$

logo,

$$a_3 = \lfloor x_2 \rfloor = 2,$$

e,

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_3} = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$

Logo o processo de calcular os quocientes $a_n, n \geqslant 2$ e $x_n, n \geqslant 1$ sempre resulta em $a_n = 2$ e $x_n = \sqrt{2}+1$. Portanto, a expansão em frações contínuas de $\sqrt{2}$ é:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots] = \left[1; \overline{2}\right].$$

2.2.1 *Convergentes de Frações Contínuas Infinitas*

Tomemos α qualquer número irracional, cuja expansão em fração contínua é da forma (2.1), isto é,

$$\frac{p}{q} = [a_1; a_2, a_3, \dots].$$

Daí, os convergentes são calculados da mesma forma que no caso das frações contínuas finitas.

$$\begin{aligned}
C_1 = & \ \frac{a_1}{1} & = \frac{p_1}{q_1} & \implies p_1 = a_1, \qquad q_1 = 1; \\
C_2 = & \ a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} & = \frac{p_2}{q_2} & \implies p_2 = a_1 a_2 + 1, \quad q_2 = a_2; \\
& \vdots \\
C_i = & \ a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i}}}} & = \frac{p_i}{q_i}, \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Assim, o numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente C_i satisfazem as equações:

$$\begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}, \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \quad i \geqslant 3, \end{cases} \tag{2.8}$$

com as condições iniciais:

$$\begin{cases} p_1 = a_1, \qquad q_1 = 1, \\ e \\ p_2 = a_1 a_0 + 1, \quad q_2 = a_2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Exemplo 2.6. Vejamos os convergentes de $\sqrt{2}$:

Como já calculado em (2.5), sabemos que $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$, então:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{a_1}{1} = 1, & p_1 &= 1, & q_1 &= 1; \\
C_2 &= a_1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, & p_2 &= 3, & q_2 &= 2; \\
C_3 &= \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{7}{5}, & p_3 &= 7, & q_3 &= 5; \\
C_4 &= \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \frac{2 \cdot 7 + 3}{2 \cdot 5 + 2} = \frac{17}{12}, & p_4 &= 17, & q_4 &= 12.
\end{aligned}$$

2.2.2 *Ordem da Aproximação*

Teorema 2.10. *[8] A sequência dos convergentes de uma fração contínua infinita satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Os convergentes de ordem ímpar (C_{2n+1}) *formam uma sequência monótona crescente:*

$$\{C_1 < C_3 < C_5 < \cdots < C_{2n+1}\};$$

(ii) Os convergentes de ordem par (C_{2n}) *formam uma sequência monótona decrescente:*

$$\{C_2 > C_4 > C_6 > \cdots > C_{2n}\};$$

(iii) O convergente C_n*,* $n \geqslant 3$*, está entre os convergentes* C_{n-1} *e* C_{n-2}*.*

Demonstração. Tomemos $\alpha \in \mathbb{Q}^C$, cuja representação em frações contínuas resulta em $\alpha = [a_1; a_2, a_3, \cdots]$, temos pelo Teorema 2.7 que:

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i, i \geqslant 1.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $q_i q_{i-1}$, teremos,

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}},$$

como $C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ e $C_{i-1} = \dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$, então,

$$C_i - C_{i-1} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}}. \tag{2.10}$$

Tomemos agora,

$$C_i - C_{i-2} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \frac{p_i q_{i-2} - p_{i-2} q_i}{q_i q_{i-2}},$$

como $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ e $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, então:

$$\begin{aligned} C_i - C_{i-2} &= \frac{(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) q_{i-2} - p_{i-2}(a_i q_{i-1} + q_{i-2})}{q_i q_{i-2}} \\ &= \frac{a_i (p_{i-1} q_{i-2} + p_{i-2} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1} - p_{i-2} q_{i-2})}{q_i q_{i-2}} \\ &= \frac{a_i (p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1})}{q_i q_{i-2}}. \end{aligned}$$

Novamente, pela fórmula do determinante:

$$C_i - C_{i-2} = \frac{a_i(-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}}. \tag{2.11}$$

Como $a_n > 0$, para $n \geqslant 2$ e $q_n > 0$, para $n \geqslant 1$, segue de (2.11), para $i = 2n$ e $i = 2n+1$ que:

$$C_{2n} - C_{2n-2} = \frac{a_{2n}(-1)^{2n-1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} < 0 \Longrightarrow C_{2n} < C_{2n-2} \tag{2.12}$$

$$C_{2n+1} - C_{2n-1} = \frac{a_{2n+1}(-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} > 0 \Longrightarrow C_{2n-1} < C_{2n+1} \tag{2.13}$$

e de (2.10), para $i = 2n$ e $i = 2n+1$, temos:

$$C_{2n} - C_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}q_{2n-1}} > 0 \Longrightarrow C_{2n-1} < C_{2n} \tag{2.14}$$

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n}} < 0 \Longrightarrow C_{2n+1} < C_{2n}. \tag{2.15}$$

Das equações (2.12) e (2.13) podemos concluir respectivamente que $\{C_{2n}\}$ é uma sequência monótona decrescente e que $\{C_{2n+1}\}$ é uma sequência monótona crescente.

De (2.12)-(2.15) concluímos que:

$$C_{2n-1} < C_{2n+1} < C_{2n} < C_{2n-2}, \tag{2.16}$$

o que demonstra (iii), ou seja, C_n está entre C_{n-1} e C_{n-2}, tal que:

- se n par, então $C_{n-1} < C_n < C_{n-2}$;
- se n ímpar, então $C_{n-2} < C_n < C_{n-1}$.

Agora em (2.16), tomamos $n = 1, 2, 3, \ldots$

- $n = 1; \Longrightarrow C_1 < C_3 < C_2$ (não definimos C_0);
- $n = 2; \Longrightarrow C_3 < C_5 < C_4 < C_2$. Portanto, $C_1 < C_3 < C_5 < C_4 < C_2$;
- $n = 3; \Longrightarrow C_5 < C_7 < C_6 < C_4$. Portanto, $C_1 < C_3 < C_5 < C_7 < C_6 < C_4 < C_2$.

Continuando a sequência, obtemos:

$$C_1 < C_3 < \cdots < C_{2n-1} < C_{2n+1} < \cdots < C_{2n} < C_{2n-2} < \cdots < C_4 < C_2.$$

Assim concluindo a demonstração. □

Corolário 2.11. *A diferença entre um número irracional α e seu convergente é:*

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\alpha - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{x_{n+1}p_nq_n + p_{n-1}q_n - x_{n+1}p_nq_n - p_nq_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})},\end{aligned}$$

a última igualdade segue da fórmula do determinante (2.5), como queríamos mostrar. □

Como consequência do Corolário 2.11, temos:

(i) n par:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} < 0 \Rightarrow \alpha < \frac{p_n}{q_n};$$

(ii) n ímpar:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{p_n}{q_n}.$$

De (i) e (ii), concluímos que: $C_{2n+1} < \alpha < C_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.12. *Toda fração contínua infinita é convergente e seu limite é dado por*

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n} = \lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = \alpha.$$

Demonstração. Sejam,

l_I o limite da sequência monótona crescente $C_1, C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}, \ldots$

e,

l_P o limite da sequência monótona decrescente $C_2, C_4, C_6, \ldots, C_{2n}, \ldots$

Note que ambas são sequências monótonas (C_{2n} decrescente e C_{2n+1} crescente) e limitadas (C_{2n} limitada inferiormente e C_{2n+1} limitada superiormente, ambas por α), logo os limites existem.

De (2.10) fazendo $i = 2n$, teremos:

$$C_{2n} - C_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}q_{2n-1}},$$

como $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, $(n \geqslant 2)$, e os números $a_n (n \geqslant 2)$ e q_n são todos positivos, concluímos que a sequência dos $q_n' s$ cresce infinitamente, portanto

$$\lim_{n\to\infty}(C_{2n} - C_{2n-1}) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n} - \lim_{n\to\infty} C_{2n-1} = 0 \Rightarrow l_P - l_I = 0.$$

Como $C_{2n+1} < \alpha < C_{2n}$ para $\forall n$, segue que $l_P = l_I = \alpha$ como queríamos. □

Teorema 2.13. *Toda fração contínua infinita* $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$ *representa um número* α *irracional.*

Demonstração. Supomos por absurdo que:

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \alpha = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}\ \ com\ \ q > 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q}\ e\ \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p}{q},$$

do Teorema 2.10, temos que:

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}},$$

então,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p}{q} > 0 \Longrightarrow \frac{p_{2n}q - pq_{2n}}{q_{2n}q} > 0.$$

Logo,

$$p_{2n}q - pq_{2n} \geqslant 1,$$

dividindo ambos os membros da inequação por $q_{2n}q$, obtemos:

$$\frac{p_{2n}q - pq_{2n}}{q_{2n}q} \geqslant \frac{1}{q_{2n}q} \Longrightarrow \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p}{q} \geqslant \frac{1}{q_{2n}q}.$$

Mas,
$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p}{q} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = C_{2n} - C_{2n+1} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}},$$
ou seja,
$$\frac{1}{q_{2n}q} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}},$$
portanto, $q_{2n+1} < q$ para todo $n \geqslant 1$, o que é absurdo, pois $\{q_n\}$ é uma sequência crescente, logo α é irracional como queríamos mostrar. $\square$

Retomando o exemplo 2.5, temos que:
$$1 < \frac{7}{5} < \cdots < \sqrt{2} < \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2},$$
$$1 < 1,4 < \cdots < 1,414213562... < \cdots < 1,41\overline{6} < 1,5,$$
e,
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} C_n = \sqrt{2}.$$

2.2.3 *Boas Aproximações*

Agora veremos que dada a sequência C_n, quanto maior n, menor será $\alpha - C_n$.

Teorema 2.14. *Seja C_n a sequência de convergentes de α irracional, o convergente C_n é sempre uma melhor aproximação que seu antecessor C_{n-1}, isto é, $|\alpha - C_n| < |\alpha - C_{n-1}|$, $\forall n \geqslant 1$.*

Demonstração. Tomemos $\alpha = [a_1; a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$, onde $x_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots]$, ou seja, $x_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{1}{x_{n+2}}$.

Assim,
$$\alpha = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$
$$\Longrightarrow \alpha(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) = x_{n+1}p_n + p_{n-1}$$
$$\Longrightarrow \alpha x_{n+1}q_n - x_{n+1}p_n = -\alpha q_{n-1} + p_{n-1}$$
$$\Longrightarrow x_{n+1}(\alpha q_n - p_n) = -q_{n-1}\left(\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$
dividindo ambos os membros por $x_{n+1}q_n$ e calculando o valor absoluto obtemos:
$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{-q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right| \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|,$$

como $x_{n+1} > 1$ para $n \geqslant 2$ e $q_n > q_{n-1} > 0$, segue que:

$$0 < \frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n} < 1,$$

assim,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|,\ n \geqslant 2,$$

como queríamos mostrar. □

O *Teorema de Dirichlet* garante que todo convergente $\left(C_n = \dfrac{p_n}{q_n}\right)$, obtido pela expansão em fração contínua de α é uma boa aproximação, cujo erro, é sempre menor que o quadrado do inverso do denominador deste convergente.

Teorema 2.15. *(Dirichlet) Todo convergente $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ de α satisfaz,*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Demonstração. O número α pertence ao intervalo de extremos $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, daí da equação (2.10) temos:

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_nq_{n+1}} \\ \Longrightarrow \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| &\leqslant \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}, \end{aligned}$$

pois a sequência dos $q_i's$ é monótona crescente $(q_n < q_{n+1})$. □

2.2.4 *Teorema de Hurwitz-Markov*

De fato, os convergentes de uma fração contínua infinita representam excelentes aproximações racionais de números irracionais.

Nesta seção, mostraremos pelo *Teorema de Hurwitz-Markov* que as frações contínuas de números irracionais produzem infinitos convergentes que satisfazem esta aproximação, com erro menor que $\dfrac{1}{\sqrt{5}q_k^2}$, pois tomados três convergentes consecutivos pelo menos um deles satisfaz esta desigualdade.

Teorema 2.16. *(Hurwitz-Markov) Para todo α irracional e todo inteiro $n \geqslant 2$, temos:*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2},$$

para algum $k \in \{n-1, n, n+1\}$.

Em particular, esta desigualdade é válida para infinitos racionais $\frac{p}{q}$.

Para demonstrarmos o Teorema 2.16, utilizaremos os seguintes lemas:

Lema 2.17. *Denominamos x_{n+1} como cauda da fração contínua infinita, onde:*

$$x_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}\alpha}{q_n\alpha - p_n}.$$

Demonstração. Tomemos $\alpha = [a_1; a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$, onde $x_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots]$, ou seja, $x_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{1}{x_{n+2}}$.

Assim,

$$\alpha = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$
$$\Longrightarrow \alpha(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) = x_{n+1}p_n + p_{n-1}$$
$$\Longrightarrow \alpha x_{n+1}q_n - x_{n+1}p_n = p_{n-1} - \alpha q_{n-1},$$

colocando x_{n+1} em evidência:

$$\Longrightarrow x_{n+1}(\alpha q_n - p_n) = p_{n-1} - \alpha q_{n-1}$$
$$\Longrightarrow x_{n+1} = \frac{p_{n-1} - \alpha q_{n-1}}{\alpha q_n - p_n},$$

como queríamos mostrar. □

Lema 2.18. *Dados α e C_n, seu n-ésimo convergente, temos:*

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(x_{n+1} + y_{n+1})q_n^2},$$

onde,

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1],$$

com $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geqslant 1$.

Demonstração. Pelo Corolário 2.11, temos:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$
$$= \frac{1}{x_{n+1}q_n^2 + q_{n-1}q_n}.$$

Colocando q_n^2 em evidência, tem-se:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{\left(x_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right) q_n^2}.$$

Fazendo,

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n},$$

teremos,

$$y_{n+1} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1],$$

que se verifica, por indução para $n = 1$ e por (2.4),

$$y_2 = \frac{q_0}{q_1} = \frac{0}{1} = 0,$$

para $n = 2$,

$$y_3 = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{a_2} \in [0; a_1],$$

supondo válido para todo $n = k$, verificamos a validade para $n = k + 1$:

$$y_{k+2} = \frac{q_k}{q_{k+1}}.$$

Da equação (2.8), temos:

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= \frac{q_k}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} &&= \frac{1}{a_{k+1} + \dfrac{q_{k-1}}{q_k}} \\ &= \frac{1}{a_{k+1} + y_{k+1}} &&= \frac{1}{[a_{k+1}; a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_1]} \\ & &&= [0; a_{k+1}, a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_1]. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, o que conclui a demonstração deste corolário. □

Agora seguimos com a demonstração do Teorema de Hurwitz-Markov 2.16.

Demonstração. Suponha por contradição que $\exists\ \alpha \in \mathbb{Q}^C$ com $n \geqslant 1$, tal que,

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2},$$

para algum $k \in \{n-1, n, n+1\}$.

Daí, pelo lema anterior, temos:

$$x_n + y_n \leqslant \sqrt{5}, \qquad x_{n+1} + y_{n+1} \leqslant \sqrt{5} \qquad e \qquad x_{n+2} + y_{n+2} \leqslant \sqrt{5}. \tag{2.17}$$

Como $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ e $\sqrt{5} < 3$ então, devemos ter:

$$a_n \leqslant x_n < 3.$$

Portanto, $a_n \leqslant 2$.

Analogamente,

$$a_{n+1} \leqslant 2 \qquad \text{e} \qquad a_{n+2} \leqslant 2.$$

Logo, se $a_n = a_{n+1} = 2$, temos:

$$\sqrt{5} \geqslant x_n + y_n \geqslant a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\ddots}} > 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5},$$

que é absurdo.

Daí, segue que $a_n = 1$. Analogamente, $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$.

Escrevendo x_n, x_{n+2}, y_n e y_{n+2} em função de x_{n+1} e y_{n+1}, teremos:

$x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{x_{n+1}}$;

$y_{n+1} = \dfrac{1}{a_n + y_n} = \dfrac{1}{1 + y_n} \Longrightarrow 1 + y_n = \dfrac{1}{y_{n+1}} \Longrightarrow y_n = \dfrac{1}{y_{n+1}} - 1$;

$y_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1} + y_{n+1}} = \dfrac{1}{1 + y_{n+1}}$;

$x_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{1}{x_{n+2}} = 1 + \dfrac{1}{x_{n+2}} \Longrightarrow x_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{x_{n+2}} \Longrightarrow x_{n+2} = \dfrac{1}{x_{n+1} - 1}$.

Reescrevendo as desigualdades (2.17) temos:

(i) $\sqrt{5} \geqslant x_n + y_n = 1 + \dfrac{1}{x_{n+1}} + \dfrac{1}{y_{n+1}} - 1 = \dfrac{1}{x_{n+1}} + \dfrac{1}{y_{n+1}} = \dfrac{1}{1 + x_{n+1} - 1} + \dfrac{1}{y_{n+1}} = \dfrac{1}{1+\delta} + \dfrac{1}{\beta}$;

(ii) $\sqrt{5} \geqslant x_{n+1} + y_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_{n+2}} + \beta = 1 + \delta + \beta$;

(iii) $\sqrt{5} \geqslant x_{n+2} + y_{n+2} = \dfrac{1}{x_{n+1} - 1} + \dfrac{1}{1 + y_{n+1}} = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{1}{1+\beta}$,

onde $\delta = \dfrac{1}{x_{n+2}} = x_{n+1} - 1$ e $\beta = y_{n+1}$.

Daí, de (ii) temos:

$$1 + \delta + \beta \leqslant \sqrt{5} \Longrightarrow 1 + \delta \leqslant \sqrt{5} - \beta.$$

Fazendo o inverso, somando $\dfrac{1}{\beta}$ em ambos membros da desigualdade acima e usando (i) temos:

$$\frac{1}{1+\delta} + \frac{1}{\beta} \geqslant \frac{1}{\sqrt{5} - \beta} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \sqrt{5} - \beta}{\beta\sqrt{5 - \beta}} = \frac{\sqrt{5}}{\beta\sqrt{5 - \beta}}.$$

Portanto,

$$\beta(\sqrt{5} - \beta) \geqslant 1 \Leftrightarrow -\beta^2 + \sqrt{5}\beta - 1 \geqslant 0. \tag{2.18}$$

Temos também, que:

$$\delta \leqslant \sqrt{5} - \beta - 1.$$

Fazendo o inverso, somando $\dfrac{1}{1+\beta}$ em ambos os membros da desigualdade acima e usando (iii) temos:

$$\frac{1}{\delta} - \frac{1}{1+\beta} \geqslant \frac{1}{\sqrt{5} - \beta - 1} + \frac{1}{1+\beta} = \frac{1 + \beta + \sqrt{5} - \beta - 1}{(1+\beta)(\sqrt{5} - \beta - 1)} = \frac{\sqrt{5}}{(1+\beta)(\sqrt{5} - \beta - 1)}.$$

Portanto,

$$(1+\beta)(\sqrt{5} - \beta - 1) \geqslant 1 \Leftrightarrow -\beta^2 + (\sqrt{5} - 2)\beta + \sqrt{5} - 2 \geqslant 0. \tag{2.19}$$

Resolvendo a inequação(2.18) obtemos como solução $S' : \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Da mesma forma, resolvendo a inequação (2.19) obtemos $S'' : \left[\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

E assim, portanto $\beta = S' \cap S'' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Logo, $\beta \in \mathbb{Q}^C$, o que é absurdo, pois $\beta = y_{n+1} = \dfrac{q_{n+1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$. Isso conclui a prova do teorema. □

Poderíamos questionar se não há uma constante $C > \sqrt{5}$ que valide o teorema anterior para um número maior de convergentes. Bem, mas não há! O que veremos a seguir é que o número $\sqrt{5}$ é o maior com esta propriedade.

Sejam, $C = \sqrt{5} + \gamma$, com $\gamma > 0$ e $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Suponha:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\gamma)q^2},$$

o que resulta, em:

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\gamma)q^2}.$$

Multiplicando os dois membros da desigualdade por q tem-se:

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\gamma)q}.$$

Multiplicando agora os dois membros da desigualdade por $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q}\right|$ obtemos:

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right|\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q}\right|}{(\sqrt{5}+\gamma)q}$$

Multiplicando os dois membros da desigualdade por q segue que:

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right|\left|q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - p\right)\right| < \frac{\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\gamma}.$$

Simplificando o primeiro membro e usando o fato de que

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2},$$

obtemos:

$$|p^2 - pq - q^2| < \frac{\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5}\right|}{\sqrt{5}+\gamma}.$$

Pelo Teorema de Dirichlet 2.15, podemos tomar um q grande, tal que, $\frac{1}{q^2}$ seja muito pequeno, fazendo com que

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q},$$

esteja muito próximo de zero. Daí,

$$\frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5}\right|}{(\sqrt{5}+\gamma)},$$

é muito próximo de

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+\gamma}} < 1,$$

o que é absurdo, pois $|p^2 - pq - q^2| \geqslant 1$.

Concluindo assim, que $\sqrt{5}$ é o maior número com a propriedade descrita pelo *Teorema de Hurwitz-Markov*.

3

FRAÇÕES CONTÍNUAS PERIÓDICAS

Uma importante classe das frações contínuas são as ditas *periódicas*. Tal classe é caracterizada pelas frações contínuas do tipo,

$$[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+h-1}}], \tag{3.1}$$

onde a parte com barra na expressão acima se repete indefinidamente.

Considere a representação de α em fração contínua, tal que, existam k e h inteiros positivos com $a_k = a_{k+h}$. Tal fração contínua denomina-se periódica, onde os valores $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+h-1}$ formam o *período h* que se repete, assim, (3.1) é fração contínua periódica.

Ao caso particular

$$[\overline{a_1; a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}}],$$

chamamos *fração contínua puramente periódica*.

Veremos à seguir que essa classe das frações contínuas está intimamente ligadas aos números algébricos de grau 2.

3.1 NÚMEROS ALGÉBRICOS E NÚMEROS TRANSCENDENTES

Definição 3.1. Um número α é dito *algébrico de grau n* se existe um polinômio $f(x)$ com coeficientes inteiros $(a_o, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ e $a_n \neq 0)$, de grau $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

tal que, $f(\alpha) = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$ é o menor natural com esta propriedade.

Todo número algébrico de grau n para algum $n \in \mathbb{N}$, é número algébrico. Um número é chamado *transcendente*, se não é algébrico.

Definição 3.2. Também podemos definir como *inteiros algébricos* as soluções de uma equação polinomial na forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_o, \cdots, a_{n-1}$ são números inteiros e $a_n = 1$.

Assim, qualquer número inteiro p é inteiro algébrico, pois

$$x - p = 0$$

tem p como solução.

Também $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ são inteiros algébricos, pois são soluções da equação

$$x^2 - 3 = 0.$$

Além disso, números complexos como $i = \sqrt{-1}$ e $-i$, são inteiros algébricos pois são raízes da equação $x^2 + 1 = 0$ [7].

Teorema 3.3. *(Critério de Eisenstein) Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio de grau n. Se existe um número p primo tal que,*
$p \nmid a_n$
$p \mid a_i$ *para* $i = \{0, 1, \cdots, (n-1)\}$
$p^2 \nmid a_0$,
então $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}[x]$.

Demonstração. Suponha que possamos fatorar $p(x)$ em $\mathbb{Z}$:

$$p(x) = (b_r x^r + \cdots + b_0)(c_s x^s + \cdots + c_0),$$

com b_r, $c_s \neq 0$ e $r, s < n$. Como $p^2 \nmid a_0$, então, b_0 e c_0 não podem ser ambos divisíveis por p. Suponha então $p \mid c_0$, e seja m o menor valor de k tal que $p \nmid c_k$. Temos então $m \geqslant 1$ e

$$a_m = b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + \cdots + b_{m-i} c_i,$$

para algum i, $0 \leqslant i < m$. Como b_0 e c_m não são divisíveis por p, e $c_{m-1}, \cdots, c_1$ são todos divisíveis por p, temos $p \nmid a_m, b_o c_m$. Logo $m = n$, o que implica $s = n$, um absurdo, pois por suposição $s < n$. □

Corolário 3.4. *Um inteiro algébrico real é inteiro ou irracional.*

Demonstração. Suponha, por contradição, α inteiro algébrico, tal que $\alpha = \dfrac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e $q > 1$, p e q coprimos. Como α é uma solução da equação $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$, substituindo $\alpha = \dfrac{p}{q}$, teremos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = -a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} - \cdots - a_1\left(\frac{p}{q}\right) - a_0,$$

$$\Longrightarrow p^n = q^n(-a_{n-1}p^{n-1}q^{-n+1} - a_{n-2}p^{n-2}q^{-n+2} - \cdots - a_1pq^{-1} - a_0),$$

$$\Longrightarrow p^n = qq^{n-1}(-a_{n-1}p^{n-1}q^{-n+1} - a_{n-2}p^{n-2}q^{-n+2} - \cdots - a_1pq^{-1} - a_0),$$

$$\Longrightarrow p^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \cdots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}).$$

Logo $q \mid p^n$, o que contradiz o fato de p e q serem primos entre si, portanto um inteiro algébrico real é inteiro ou irracional como queríamos mostrar. □

Temos também que qualquer número racional $\alpha = \dfrac{p}{q}$, é algébrico, pois α é raiz da equação

$$qx - p = 0.$$

Logo, todo número racional e todo inteiro algébrico é um número algébrico. E todo número que não seja algébrico é transcendente.

3.1.1 *O Conjunto dos Números Transcendentes é não Enumerável*

Inicialmente iremos provar que o conjunto dos números algébricos é enumerável, mas para isso vejamos o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Qualquer equação da forma*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{3.2}$$

com coeficientes inteiros e $a_n > 0$ (se $a_n < 0$ multiplicasse a equação por -1), tem no máximo n raízes complexas distintas.

Demonstração. Supomos por absurdo que a equação (3.2) tenha $n+1$ raízes distintas,

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n, \beta_{n+1},$$

assim, $x - \beta_1$ é um fator de $f(x)$ com quociente, digamos $q_1(x)$.

$$f(x) = (x - \beta_1)q_1(x).$$

Como β_2 é outra raíz de $f(x) = 0$, temos que β_2 tem que ser raíz de $q_1(x) = 0$, e, assim, $x - \beta_2$ é um fator de $q_1(x)$, com quociente, digamos $q_2(x)$.

$$f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)q_2(x),$$

continuando o processo até β_n, observamos que $f(x)$ pode ser fatorado em,

$$f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \cdots (x - \beta_n)q_n(x), \tag{3.3}$$

como $f(x)$ tem grau n, então $q_n(x)$ é constante, de fato, $q_n(x) = a_n$ para que a equação esteja de acordo.

Consideremos agora a raíz β_{n+1}, que é diferente das outras raízes. Pelo fato de $f(\beta_{n+1}) = 0$, segue de (3.3), que:

$$(\beta_{n+1} - \beta_1)(\beta_{n+1} - \beta_2)(\beta_{n+1} - \beta_3) \cdots (\beta_{n+1} - \beta_n)a_n = 0,$$

o que é absurdo, pois cada fator deste produto é não nulo, e o produto de fatores não nulos não pode ser nulo. O que demonstra o teorema. □

Agora veremos que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Teorema 3.6. *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Tomemos uma equação da forma (3.2), definimos sua altura como sendo o número natural i, tal que,

$$i = n + a_n + \mid a_{n-1} \mid + \mid a_{n-2} \mid + \cdots + \mid a_2 \mid + \mid a_1 \mid + \mid a_0 \mid .$$

Pelo Teorema 3.5, vimos que a equação da forma (3.2) tem no máximo n raízes complexas distintas. Logo, algumas ou nenhuma delas podem ser reais, mas temos no máximo n raízes reais. Temos também que o número de equações do tipo (3.2) com uma dada altura i é um número finito, assim, as raízes de todas as equações de uma dada altura formam um conjunto finito. Logo, o conjunto de todas as raízes de todas as equações de todas as alturas formam um conjunto enumerável, pois é a união enumerável de conjuntos finitos [7]. □

Da seção 1.6 temos o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Tomemos agora todos os números reais entre 0 e 1. Sabemos que os números algébricos são enumeráveis, logo, os números algébricos entre 0 e 1 também são enumeráveis. Assim o que faz do intervalo real entre 0 e 1 não enumerável são os números transcendentes. Portanto, temos:

Teorema 3.8. *O conjunto dos números reais transcendentes não é enumerável.*

Segundo Niven [15], existem "mais" números transcendentes do que algébricos.

3.1.2 *Número de Liouville*

O matemático francês Jouseph Liouville (1809-1882), em 1844, construiu uma grande classe de números transcendentes, sua ideia foi mostrar uma propriedade comum à todos os números algébricos *(Teorema de Liouville)*. Assim, o número que não cumpre esta propriedade é transcendente. A essa classe denominamos *Número de Liouville* como veremos à seguir.

Teorema 3.9. *(Teorema de Liouville). Seja α um número algébrico de grau n, então existe uma constante $A > 0$, tal que,*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n},$$

para todo racional $\frac{p}{q}$, com $q \geqslant 1$ e $\alpha \neq \frac{p}{q}$.

Demonstração. Por hipótese, α é número algébrico, ou seja, é raíz de um polinômio da forma (3.1).

Podemos tomar $d > 0$, tal que, a única raíz de $f(x)$ no intervalo $[\alpha - d, \alpha + d]$, seja $x = \alpha$ (d pode ser qualquer número, menor que a menor das distâncias de α às raízes reais de $f(x)$).

Então, dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos:

Caso 1: $\frac{p}{q} \notin [\alpha - d, \alpha + d]$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > d \geqslant \frac{d}{q^n};$$

Caso 2: $\frac{p}{q} \in [\alpha - d, \alpha + d]$.

A função f é contínua e derivável no intervalo com extremos α e $\frac{p}{q}$, logo aplicando o **TVM** (Teorema do Valor Médio)[1], obtemos:

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\delta)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right),$$

onde $\delta \in [\alpha - d, \alpha + d]$ e $f(\alpha) = 0$, daí,

$$0 + \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\delta)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \tag{3.4}$$

onde $M = \text{máx}\{f'(x), x \in [\alpha - d, \alpha + d]\}$.

Note ainda que

$$0 \neq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a_0 + a_1\frac{p}{q} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n}\right| = \left|\frac{a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n}{q^n}\right| \tag{3.5}$$
$$= \frac{|a_oq^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n|}{q^n} \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

De (3.4) e (3.5) obtemos:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n},$$

tomando,

$$A = min\left\{d, \frac{1}{M}\right\},$$

teremos,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n},$$

como queríamos mostrar. □

1 **TVM** Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, derivável nos pontos internos. Então existe pelo menos um ponto c, compreendido entre a e b, tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. [21]

Definição 3.10. (Número de Liouville) Um número $x \in \mathbb{R}$ é dito *número de Liouville*, se existe $\left(\dfrac{p_j}{q_j}\right)_{j \geqslant 1} \in \mathbb{Q}$, infinita, $q_j > 1$, tal que,

$$\left|x - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \qquad \forall j \geqslant 1.$$

Proposição 3.11. *A sequência de denominadores (q_j) da definição anterior é ilimitada.*

Demonstração. Por contradição, vamos supor (q_j) limitada, isto é, $q_j \leqslant M$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Daí, temos:

$$\left|x - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} < 1,$$

pois $q > 1$. Assim,

$$|xq_j - p_j| < q_j \leqslant M \Longrightarrow |p_j| - |xq_j| \leqslant M \Longrightarrow |p_j| \leqslant M + |x||q_j| \leqslant ||x| + 1|M.$$

Absurdo, pois existem infinitos $\dfrac{p_j}{q_j}$.

□

Teorema 3.12. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Supondo por contradição que um certo número de Liouville x seja algébrico de grau n, então pelo Teorema de Liouville 3.9 e pela Definição 3.10, teremos:

$$\frac{A}{q_j^n} < \left|x - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}; \quad \forall j \geqslant 1,$$

por transitividade,

$$\frac{A}{q_j^n} < \frac{1}{q_j^j} \Longrightarrow q_j^{j-n} < \frac{1}{A},$$

note que, se $j \geqslant n+1$ então, $q_j \leqslant q_j^{j-n} < \dfrac{1}{A}$ o que implica (q_j) limitado, contradizendo a Proposição 3.11. □

A existência dos números transcendentes foi provada por Liouville com o seguinte exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,110001000000000000000001...$$

Teorema 3.13. *O número*

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}, \tag{3.6}$$

é transcendente.

Demonstração. Mostremos que l é o número de Liouville.

Definimos, $\dfrac{p_j}{q_j} = \sum_{n=1}^{j} 10^{-n!}$. Daí segue,

$$\left| l - \frac{p_j}{q_j} \right| = \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \cdots = \frac{1}{10^{(j+1!)}} \left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \cdots \right). \tag{3.7}$$

A expressão do último parênteses é majorada por:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = \frac{10}{9},$$

e o último membro da equação (3.7) é majorada por

$$\frac{1}{(10^{j!})^j 10^{j!}} \cdot \frac{10}{9} < \frac{1}{(10^{j!})^j},$$

daí,

$$\left| l - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{(10^{j!})^j},$$

por fim, como $q_j = 10^{j!}$, temos que l definido na equação (3.6) é um número de Liouville, portanto, transcendente. □

Podemos dizer ainda, que qualquer número da forma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}$$

onde a_k é qualquer um dos algarismos de 1 a 9, é número de Liouville.

Finalmente, vale observar que todo número de Liouville é transcendente, mas nem todo transcendente é número de Liouville [4].

3.2 FRAÇÕES CONTÍNUAS PERIÓDICAS E EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Agora mostraremos a importante relação entre as frações contínuas periódicas e os números irracionais algébricos de grau 2, descrita à seguir pelo *Teorema de Lagrange*.

Teorema 3.14. *(Lagrange) Seja α um número irracional, a expansão em frações contínuas de α é periódica, se, e somente se, α é raíz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros.*

Demonstração. Tomemos α, cuja representação em fração contínua é periódica da forma (3.1). Pela equação (2.2.4), temos que:

$$\alpha = \frac{x_i p_{i-1} + p_{i-2}}{x_i q_{i-1} + q_{i-2}} \qquad \Longrightarrow \qquad x_i = \frac{p_{i-2} - q_{i-2}\alpha}{\alpha q_{i-1} - p_{i-1}}.$$

Seja $i = k = k + h$, teremos,

$$x_k = [a_k, a_{k+1}, \cdots] = [a_{k+h}, a_{k+h+1}, \cdots] = x_{k+h},$$

ou seja,

$$\frac{p_{k-2} - q_{k-2}\alpha}{\alpha q_{k-1} - p_{k-1}} = \frac{p_{k+h-2} - q_{k+h-2}\alpha}{\alpha q_{k+h-1} - p_{k+h-1}}. \tag{3.8}$$

Então $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$, onde:

$$\begin{aligned} A &= q_{k-1}q_{k+h-2} - q_{k-2}q_{k+h-1}; \\ B &= p_{k+h-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k+h-1} - p_{k+h-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k+h-2}; \\ C &= p_{k-1}p_{k+h-2} - p_{k-2}p_{k+h-1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Note que $A \neq 0$, pois $q_{k-1}q_{k+h-2} - q_{k-2}q_{k+h-1} \neq 0$. Senão

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \frac{q_{k+h-2}}{q_{k+h-2}},$$

absurdo, pois essas frações são irredutíveis, pois

$$p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^n \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{mdc}(q_k, q_{k+1}) = 1.$$

Analogamente para q_{k+h} e p_{k+h+1}, temos ainda, $q_{k-1} < q_{k+h-1}$, pois $k < k + h$ e a sequência dos q_k's é monótona crescente.

Concluímos então, que se α é fração contínua periódica, então, é raiz algébrica de um polinômio de grau 2.

Agora vamos provar que se α é irracional algébrico de grau 2, então sua expansão em fração contínua é periódica.

Seja,

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0, \tag{3.10}$$

substituindo α, teremos:

$$a\left(\frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right)^2 + b\left(\frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right) + c = 0.$$

Desenvolvendo e colocando em evidência os coeficientes teremos:

$$A_n x_k^2 + B_n x_k + C_n = 0,$$

onde,

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{k-1}^2 + b_{p_{k-1}q_k-1} + cq_{k-1}^2; \\ B_n &= 2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}; \\ C_n &= ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + cq_{k-2}^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Da equação (3.11), segue,

$$C_n = A_{n-1}. \tag{3.12}$$

Queremos provar que existem $m < k$ inteiros positivos com

$$x_{m+1} = x_{k+1} \Longrightarrow a_{m+h} = a_{k+h},\ \forall h \geqslant 1 \Longrightarrow a_n = a_n + (k-m), \forall n \geqslant m+1.$$

Para isso é suficiente mostrar que existe $M > 0$, tal que para $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < |A_n| \leqslant M, \qquad |B_n| \leqslant M, \qquad |C_n| \leqslant M.$$

Sabemos α é raíz, então tomemos $\alpha' \in \mathbb{R}$, tal que

$$Ax^2 + Bx + c = A(x-\alpha)(x-\alpha').$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left|A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\frac{p_n}{q_n} + C\right| &= \left|A\left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right)\left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha'\right)\right| \\ &= |A|\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|\left|\alpha' - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{|A|}{q_n^2}\left|\alpha' - \frac{p_n}{q_n}\right|, \end{aligned}$$

mas,

$$\left|\alpha' - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant |\alpha - \alpha'| + \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < |\alpha - \alpha'| + 1.$$

Então,

$$\left| A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + C \right| \leqslant \frac{|A|}{q_n^2}(|\alpha - \alpha'| + 1)$$

$$\Longrightarrow |Ap_n^2 + Bp_nq_n + Cq_n^2| = |A_n| < |A|(|\alpha - \alpha'| + 1).$$

Logo, $|C_n| = |A_{n-1}| < |A|(|\alpha - \alpha'| + 1)$.

Provamos assim, que An e Cn são limitados.

Temos ainda que:

$$Bn^2 - 4AnCn = (B^2 - 4AC)(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)^2 = B^2 - 4AC$$

$$\Longrightarrow Bn^2 = 4AnCn + B^2 - 4AC \leqslant 4A^2(|\alpha - \alpha'| + 1) + B^2 - 4AC,$$

Portanto, $M = \sqrt{4A^2|\alpha - \alpha'| + B^2 - 4AC}$.

Por fim, $A_n \neq 0$, pois $A_n = q_n^2 A\left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right)\left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha'\right)$ e $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}^C$.

Mostrando, assim, que α representado por uma fração contínua periódica é raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros [1], [5]. $\square$

4

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE FRAÇÕES CONTÍNUAS

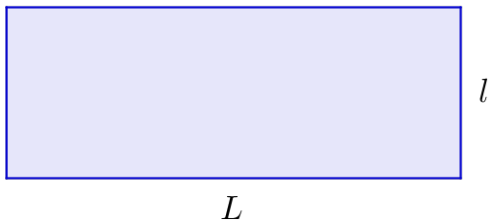


Figura 5: Retângulo L x l.

Tomemos um retângulo qualquer, de lados L e l, com $L, l \in \mathbb{R}_*^+$, supondo sem perda de generalidade $L > l$, podemos construir a fração contínua que representa a razão entre eles apenas por construção geométrica.

Vamos representar $\frac{L}{l}$, então colocamos o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre, ou seja, colocamos quadrados de lado l, denominamos de a_1 a quantidade de quadrados de lado l que coube no retângulo Lxl, assim, obtemos a_1 quadrados de área l^2, que se preencherem completamente o retângulo, então $\frac{L}{l} \in \mathbb{N}$, já se sobrar um retângulo lx$L - a_1 \cdot l$, onde $l > L - a_1 \cdot l$ continuamos o processo, ou seja,

$$\frac{L}{l} = \frac{a_1 \cdot l + L - a_1 \cdot l}{l} = a_1 + \frac{L - a_1 \cdot l}{l},$$

onde,

$$0 \leqslant L - a_1 \cdot l < l,$$

se,

$$L - a_1 \cdot l = 0,$$

então o processo encerra e $\frac{L}{l} = a_1 \in \mathbb{N}$,
se,

$$L - a_1 \cdot l \neq 0,$$

então continuamos o processo.

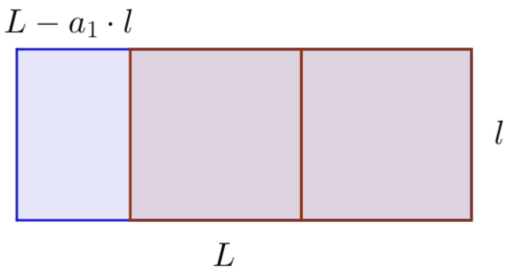


Figura 6: Representação geométrica de $\frac{L}{l} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{l}{L - a_1 \cdot l}}$.

Construímos a_2 quadrado(s) de lado $L - a_1 \cdot l$, dentro do retângulo restante, se este for preenchido por completo, o processo acaba, e

$$\frac{L}{l} = [a_1; a_2] \in \mathbb{Q},$$

mas, se restar um retângulo de lados $(L - a_1 \cdot l)$ x $(l - a_2(L - a_1 \cdot l))$, continuamos o processo, ou seja,

$$\frac{L}{l} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{l}{L - a_1 \cdot l}} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2(L - a_1 \cdot l) + l - a_2(L - a_1 \cdot l)}{L - a_1 \cdot l}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{l - a_2(L - a_1 \cdot l)}{L - a_1 \cdot l}}.$$

onde,

$$0 \leqslant l - a_2(L - a_1 \cdot l) < L - a_1 \cdot l,$$

se,

$$l - a_2(L - a_1 \cdot l) = 0,$$

então o processo encerra e $\frac{L}{l} = [a_1; a_2] \in \mathbb{Q}$,
se,

$$l - a_2(L - a_1 \cdot l) \neq 0,$$

então, continuamos o processo, obtendo uma sequência de quadrados $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ finita se $\frac{L}{l} \in \mathbb{Q}$ e infinita se $\frac{L}{l} \in \mathbb{Q}^C$.

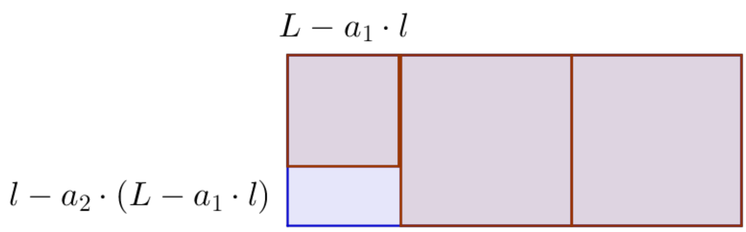


Figura 7: Representação geométrica $\frac{L}{l} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}$.

Assim,

$$\frac{L}{l} = [a_1; a_2, a_3, \cdots, a_n] \text{ se } \frac{L}{l} \in \mathbb{Q},$$

ou

$$\frac{L}{l} = [a_1; a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots] \text{ se } \frac{L}{l} \in \mathbb{Q}^C.$$

As demonstrações algébricas do capítulo 2, também justificam a interpretação geométrica feita aqui.

4.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA FRAÇÃO CONTÍNUA DE UM NÚMERO RACIONAL

Exemplo 4.1. Obtenha por meio da interpretação geométrica a representação em fração contínua de $\frac{17}{10}$.

Solução:

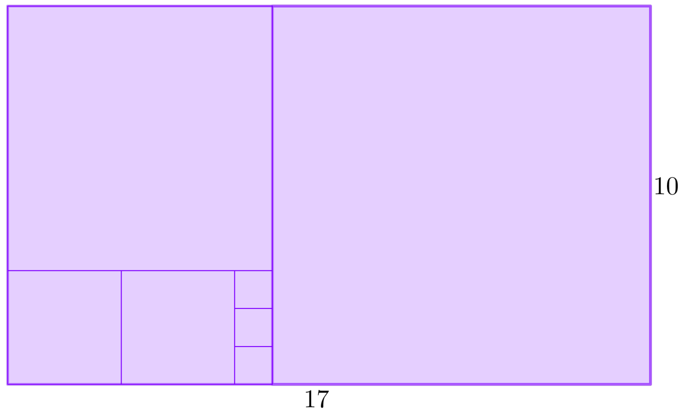


Figura 8: Retângulo 17 x 10.

- Obtemos $a_1 = 1$, construindo um quadrado de lado 10, restando assim, um retângulo 10 x 7;

- Obtemos $a_2 = 1$, construindo um quadrado de lado 7, restando assim, um retângulo 7 x 3;

- Obtemos $a_3 = 2$, construindo dois quadrados de lado 3, restando assim, um retângulo 3 x 1;

- Obtemos $a_4 = 3$, construindo três quadrados de lado 1, obtendo assim, todo o retângulo 17 x 10.

Logo,

$$\frac{17}{10} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = [1; 1, 2, 3].$$

4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA FRAÇÃO CONTÍNUA DE UM NÚMERO IRRACIONAL

Exemplo 4.2. Obtenha por meio da interpretação geométrica a representação em fração contínua de $\sqrt{2}$.

Solução: Construímos um retângulo $\sqrt{2}$ x 1;

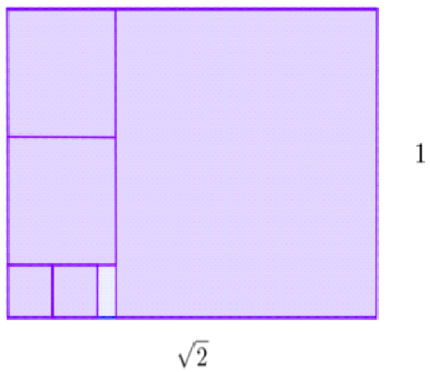


Figura 9: Retângulo $\sqrt{2}$ x 1.

- Obtemos $a_1 = 1$, construindo um quadrado de lado 1, restando assim, um retângulo 1 x $(\sqrt{2}-1)$;

- Obtemos $a_2 = 2$, construindo dois quadrados de lado $\sqrt{2}-1$, restando assim, um retângulo $(\sqrt{2}-1)$ x $(1-2(\sqrt{2}-1))$, ou seja, $(\sqrt{2}-1)$ x $(3-2\sqrt{2})$, cuja razão é proporcional à 1 x $(\sqrt{2}-1)$. De fato,

$$\frac{\sqrt{2}-1}{-2\sqrt{2}+3} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

- Obtemos $a_3 = 2$, construindo dois quadrados de lado $3-2\sqrt{2}$, restando assim, um retângulo de medidas proporcionais ao anterior $(3-2\sqrt{2})$ x $(\sqrt{2}-1-2(-2\sqrt{2}+3))$, ou seja, $(3 - 2\sqrt{2})$ x $(5\sqrt{2} - 7)$, cuja razão é proporcional à 1 x $(\sqrt{2} - 1)$.

Assim, todos os $a_n's$ com $n \geqslant 2$, são iguais à 2.

Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = [1; 2, 2, \cdots] = [1; \overline{2}].$$

5

EXPANSÃO EM FRAÇÕES CONTÍNUAS DE π, e, ϕ E OUTROS IRRACIONAIS

Apresentaremos à seguir, a expansão em frações contínuas de alguns números irracionais, verificando a sequência dos convergentes, o *Teorema de Dirichlet* 2.15 e o *Teorema de Hurwitz-Markov* 2.16.

5.1 NÚMEROS IRRACIONAIS DA FORMA $\sqrt{N}$, COM $N \in \mathbb{N}$

Observe que todos os números irracionais da forma $\sqrt{N}$ são algébricos de grau 2, pois são raízes de $x^2 - N = 0$. Desta forma, a expansão em frações contínuas resulta periódica.

A seguir, ilustraremos com exemplos alguns casos particulares.

Exemplo 5.1. Represente $\sqrt{2}$ em frações contínuas, determine seus primeiros convergentes verificando sua sequência, o Teorema de Dirichlet 2.15 e o Teorema de Hurwitz-Markov 2.16.

Solução: Pelos exemplos 2.5 e 2.6, temos que:

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$$

e seus primeiros convergentes são:

$$C_1 = 1; \qquad C_2 = \frac{3}{2}; \qquad C_3 = \frac{7}{5}; \qquad C_4 = \frac{17}{12},$$

que formam a seguinte sequência,

$$1 < \frac{7}{5} < \cdots < \sqrt{2} < \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2},$$

equivalente à,

$$1 < 1,4 < \cdots < 1,414213562... < \cdots < 1,41\overline{6} < 1,5.$$

Pelo Teorema de Dirichlet 2.15, sabemos que:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

O que implica dizer, que podemos obter aproximações de $\sqrt{2}$ com erro tão pequeno quanto se queira, bastando tomar n suficientemente grande.

Assim, para $n = 4$, temos:

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}.$$

Na verdade, essa aproximação é muito melhor, pois,

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| = 0,002453104... < 0,0025 = \frac{1}{400} < \frac{1}{144}.$$

Também é fácil verificar o Teorema de Hurwitz-Markov 2.16, tomando três convergentes consecutivos, por exemplo C_1, C_2 e C_3.

Supomos a desigualdade válida para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
& \left|\sqrt{2} - 1\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\cdot 1^2} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} + 1 < \sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{6-2\sqrt{5}}{5} < 2 < \frac{6+2\sqrt{5}}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & 6 - 2\sqrt{5} < 10 < 6 + 2\sqrt{5},
\end{aligned}$$

verdadeiro, para o primeiro convergente.

Supomos a desigualdade válida para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
& \left|\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^2} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{4\sqrt{5}} < \sqrt{2} - \frac{3}{2} < \frac{1}{4\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{3}{2} < \sqrt{2} < \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1 + 6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} < \sqrt{2} < \frac{1 + 6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{181 - 12\sqrt{5}}{80} < 2 < \frac{181 + 12\sqrt{5}}{80} \\
\Leftrightarrow \quad & 181 - 12\sqrt{5} < 160 < 181 + 12\sqrt{5},
\end{aligned}$$

verdadeiro, para o segundo convergente.

Supomos a desigualdade válida para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
& \left|\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 5^2} = \frac{1}{25\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{25\sqrt{5}} < \sqrt{2} - \frac{7}{5} < \frac{1}{25\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{25\sqrt{5}} + \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{1}{25\sqrt{5}} + \frac{7}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1 + 35\sqrt{5}}{25\sqrt{5}} < \sqrt{2} < \frac{1 + 35\sqrt{5}}{25\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{6124 - 70\sqrt{5}}{3125} < 2 < \frac{6124 + 12\sqrt{5}}{3125} \\
\Leftrightarrow \quad & 6124 - 70\sqrt{5} < 6250 < 6124 + 70\sqrt{5},
\end{aligned}$$

verdadeiro, para o terceiro convergente.

Neste caso, as desigualdades são verdadeiras para os três primeiros convergentes.

Exemplo 5.2. Represente $\sqrt{3}$ em frações contínuas, determine seus primeiros convergentes verificando sua sequência, o Teorema de Dirichlet 2.15 e o Teorema de Hurwitz-

Markov 2.16.

Solução:

$$a_1 = \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor = 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1,$$

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3}+1,$$

$$a_3 = \left\lfloor \sqrt{3}+1 \right\rfloor = 2,$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = x_1,$$

como $x_1 = x_3$ concluímos que $x_2 = x_4$, logo:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}} = [1; \overline{1,2}].$$

Daí, os convergentes de $\sqrt{3}$, são:

$C_1 = \dfrac{a_1}{1} = 1, \quad$ logo, $p_1 = 1$ e $q_1 = 1$;

$C_2 = a_1 + \dfrac{1}{a_2} = 1 + \dfrac{1}{1} = 2, \quad$ logo, $p_2 = 2$ e $q_2 = 1$;

$C_3 = \dfrac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \dfrac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{5}{3}, \quad$ logo, $p_3 = 5$ e $q_3 = 3$;

$C_4 = \dfrac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \dfrac{1 \cdot 5 + 2}{1 \cdot 3 + 1} = \dfrac{7}{4}, \quad$ logo, $p_4 = 7$ e $q_4 = 4$.

Que formam a seguinte sequência:

$$1 < \frac{5}{3} < \cdots < \sqrt{3} < \cdots < \frac{7}{4} < 2,$$

equivalente à,

$$1 < 1{,}\overline{6} < \cdots < 1{,}732050808... < \cdots < 1{,}75 < 2.$$

Pelo Teorema de Dirichlet 2.15, para C_3, temos:

$$\left|\sqrt{3} - \frac{5}{3}\right| < \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Também é fácil verificar o Teorema de Hurwitz-Markov 2.16, tomando três convergentes consecutivos C_1, C_2 e C_3.

Supomos a desigualdade válida para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
& \left|\sqrt{3} - 1\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 1^2} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{3} - 1 < \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} + 1 < \sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} < \sqrt{3} < \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{6 - 2\sqrt{5}}{5} < 3 < \frac{6 + 2\sqrt{5}}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & 6 - 2\sqrt{5} < 15 < 6 + 2\sqrt{5},
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto a desigualdade do Teorena de Hurwitz-Markov não é válida para o primeiro convergente.

Supomos a desigualdade válida para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
& \left|\sqrt{3} - 2\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 1^2} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{3} - 2 < \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} + 2 < \sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} < \sqrt{3} < \frac{1 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{21 - 4\sqrt{5}}{5} < 3 < \frac{21 + 4\sqrt{5}}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & 21 - 4\sqrt{5} < 15 < 21 + 4\sqrt{5},
\end{aligned}$$

verdadeiro, portanto é válido para o segundo convergente.

Supomos a desigualdade válida para $n = 3$,

$$
\begin{aligned}
& \left|\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\cdot 3^2} = \frac{1}{9\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{9\sqrt{5}} < \sqrt{3}-\frac{5}{3} < \frac{1}{9\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{9\sqrt{5}}+\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{1}{9\sqrt{5}}+\frac{5}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1+15\sqrt{5}}{9\sqrt{5}} < \sqrt{3} < \frac{1+15\sqrt{5}}{9\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1124-30\sqrt{5}}{405} < 3 < \frac{1126+30\sqrt{5}}{405} \\
\Leftrightarrow \quad & 1124-30\sqrt{5} < 1215 < 1126+30\sqrt{5},
\end{aligned}
$$

absurdo, pois o último termo da desiguldade é menor que 1200, portanto, não é válido para o terceiro convergente.

Assim, entre os convergentes C_1, C_2 e C_3 a desigualdade é válida apenas para C_2, ou seja, para pelos menos um entre três convergentes consecutivos.

Exemplo 5.3. Represente $\sqrt{17}$ em frações contínuas, determine seus primeiros convergentes verificando sua sequência, o Teorema de Dirichlet 2.15 e o Teorema de Hurwitz-Markov 2.16.

Solução:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \lfloor\sqrt{17}\rfloor = 4, \\
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{17}-4} = \frac{\sqrt{17}+4}{1}, \\
a_2 &= \left\lfloor\sqrt{17}+4\right\rfloor = 8, \\
x_2 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \sqrt{3}+1, \\
a_3 &= \lfloor\sqrt{3}+1\rfloor = 2, \\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{17}+4-8} = \frac{1}{\sqrt{17}-4} = x_1,
\end{aligned}
$$

como $x_2 = x_3$ concluímos que $x_3 = x_4$, logo:

$$
\sqrt{17} = 4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cdots}}} = \left[4;\overline{8}\right].
$$

Daí, os convergentes de $\sqrt{17}$, são:

$C_1 = 4;$

$C_2 = 4 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{33}{8};$

$C_3 = \dfrac{8 \cdot 33 + 4}{8 \cdot 8 + 1} = \dfrac{268}{65};$

$C_4 = \dfrac{8 \cdot 268 + 33}{8 \cdot 65 + 8} = \dfrac{2177}{528}.$

Que formam a seguinte sequência:

$$4 < \frac{268}{65} < \cdots < \sqrt{17} < \cdots < \frac{2177}{528} < \frac{33}{8},$$

equivalente à,

$$4 < 4,123076923 < \cdots < 4,123105626... < \cdots < 4,123106061 < 4,125.$$

Pelo Teorema de Dirichlet 2.15, temos para C_2:

$$\left|\sqrt{17} - \frac{33}{8}\right| < \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}.$$

Na verdade, essa aproximação é muito melhor, pois,

$$\left|\sqrt{17} - \frac{33}{8}\right| = 0,001894374... < 0,002 = \frac{1}{500} < \frac{1}{64}.$$

Também é fácil verificar o Teorema de Hurwitz-Markov 2.16, tomando três convergentes consecutivos C_1, C_2 e C_3.

Supomos a desigualdade válida para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
& \left|\sqrt{17} - 4\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 1^2} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{17} - 4 < \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{\sqrt{5}} + 4 < \sqrt{17} < \frac{1}{\sqrt{5}} + 4 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-1 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} < \sqrt{17} < \frac{1 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{81 - 8\sqrt{5}}{5} < 17 < \frac{81 + 8\sqrt{5}}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & 81 - 8\sqrt{5} < 85 < 81 + 8\sqrt{5},
\end{aligned}$$

verdadeiro, portanto válido para o primeiro convergente.

A desigualdade também é válida para $n = 2$, tomando a verificação do Teorema de Dirichlet para C_2, temos:

$$\left|\sqrt{17} - \frac{33}{8}\right| = 0,001894374... < 0,002 = \frac{1}{500} < \frac{1}{64},$$

como,

$$\frac{1}{500} < \frac{1}{64\sqrt{5}} < \frac{1}{64},$$

então,

$$\left|\sqrt{17} - \frac{33}{8}\right| < \frac{1}{64\sqrt{5}}.$$

Já para $n = 3$, temos:

$$\left|\sqrt{17} - \frac{268}{65}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 65^2}$$
$$\Rightarrow 0,000028702... < 0,000105849...$$

verdadeiro, para o terceiro convergente.

Neste caso, verdadeiro para os três primeiros convergentes.

5.2 UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA PARA DETERMINAR FRAÇÕES CONTÍNUAS

Utilizando uma calculadora científica podemos facilmente escrever a fração contínua de um número $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer, fazendo o seguinte processo.

1º. $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$;
2º. Digitando o número α, teclando $=$, aparecerá a aproximação decimal;
3º. Subtraindo a parte inteira, e clicando na tecla x^{-1}(inverso);
4º. A parte inteira do resultado obtido é a_{i+1}, onde i é o número de vezes que foi realizado o processo;
5º. Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, o processo é finito, onde repetimos o processo até resultar em um número inteiro, se $\alpha \in \mathbb{Q}^C$ o processo não termina, sendo periódico se α é algébrico

de grau 2 e não periódico se α é transcendente ou algébrico de grau distinto de 2.

5.2.1 *Número π em Frações Contínuas*

Exemplo 5.4. $\pi = 3,141592653589...$

Solução: $a_1 = \lfloor \pi \rfloor = 3$.

Tomando $\alpha = \pi$ e realizando o processo descrito em 5.2;
resultando em: 7,062513306. Logo,

$$a_2 = 7,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 15,99659441. Logo,

$$a_3 = 15,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 1,003417231. Logo,

$$a_4 = 1,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 292,6345907. Logo,

$$a_5 = 292,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 1,575818815. Logo,

$$a_6 = 1.$$

Assim,

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \cdots].$$

De onde podemos determinar os seguintes convergentes, que resultam em boas aproximações racionais do número π.

$$\begin{aligned}
C_1 &= 3;\\
C_2 &= 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,142857143;\\
C_3 &= \frac{15 \cdot 22 + 3}{15 \cdot 7 + 1} = \frac{333}{106} = 3,141509434;\\
C_4 &= \frac{1 \cdot 333 + 22}{1 \cdot 106 + 7} = \frac{355}{113} = 3,14159292;\\
C_5 &= \frac{292 \cdot 355 + 333}{292 \cdot 113 + 106} = \frac{103993}{33102} = 3,141592653.
\end{aligned}$$

Por fim, podemos observar que C_4 oferece uma excelente aproximação racional de π, na qual o erro é menor do que $\frac{1}{3000000}$.

5.2.2 *Número e em Frações Contínuas*

Utilizaremos o procedimento 5.2 para apresentarmos a bela expansão em frações contínuas do número e.

Exemplo 5.5. $e = 2,718281828459...$

Solução: $a_1 = \lfloor e \rfloor = 2$
Tomando $\alpha = e$ e realizando o processo descrito em 5.2;
resultando em: 1,392211191. Logo,

$$a_2 = 1,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 2,549646778. Logo,

$$a_3 = 2,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 1,819350244. Logo,

$$a_4 = 1,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 1,220479286. Logo,

$$a_5 = 1,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 4,535573476. Logo,

$$a_6 = 4,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 1,867157439. Logo,

$$a_7 = 1,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 1,153193129. Logo,

$$a_8 = 1,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 6,52770793. Logo,

$$a_9 = 6.$$

Assim,

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots].$$

Teorema 5.1. *A expansão em frações contínuas do número de e pode ser aproximada, como:*

$$e = [a_1; a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,]$$

$$\textit{tal que,} \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = 1, \\ a_{3k} = 2^k, & \textit{para } k \geqslant 1, \\ a_{3k+1} = a_{3k+2} = 1, \end{cases}$$

A demonstração deste Teorema é extensa e técnica, e pode ser vista no Apêndice B.1 e [4].

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 1, 16, \cdots].$$

Podemos assim, determinar os seguintes convergentes, que resultam em boas aproximações racionais do número e.

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 2;\\
C_2 &= 2 + \frac{1}{1} = 3;\\
C_3 &= \frac{2 \cdot 3 + 2}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{8}{3} = 2,\overline{6};\\
C_4 &= \frac{1 \cdot 8 + 3}{1 \cdot 3 + 1} = \frac{11}{4} = 2,75;\\
C_5 &= \frac{1 \cdot 11 + 8}{1 \cdot 4 + 3} = \frac{19}{7} = 2,714285714;\\
C_6 &= \frac{4 \cdot 19 + 11}{4 \cdot 7 + 4} = \frac{87}{32} = 2,71875;\\
C_7 &= \frac{1 \cdot 87 + 19}{1 \cdot 32 + 7} = \frac{106}{39} = 2,717948718;\\
C_8 &= \frac{1 \cdot 106 + 87}{1 \cdot 39 + 32} = \frac{193}{71} = 2,718309859;\\
C_9 &= \frac{6 \cdot 193 + 106}{6 \cdot 71 + 39} = \frac{1264}{465} = 2,71827957.
\end{aligned}
$$

O erro de aproximação do nono convergente é aproximadamente 0,000002258..., ou seja, menor que $\frac{1}{300000}$.

5.3 A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Definição 5.2. Diz-se razão áurea a divisão de um segmento AB em dois pedaços a e b, tal que, a razão entre eles, é igual a razão entre a linha inteira e o pedaço maior, ou seja,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi.$$

Proposição 5.3. *O número Φ da definição anterior é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e seu inverso $\frac{1}{\Phi}$ é igual a $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|$.*

Demonstração. Da segunda igualdade, temos que:

$$a = b\Phi,$$

substituindo na primeira igualdade, teremos:

$$\frac{b\Phi + b}{b\Phi} = \frac{b\Phi}{b} \Leftrightarrow \frac{\Phi + 1}{\Phi} = \Phi,$$

portanto,

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0. \tag{5.1}$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Definimos a raíz positiva como o número de ouro Φ, e o módulo da raíz negativa coincide com seu inverso:

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

como queríamos mostrar. □

Por sua vez, a expansão em frações contínuas do Φ, é simples e elegante.

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = 1;$$

$$x_1 = \frac{1}{\Phi - 1} = \frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = 1 = a_1;$$

assim,

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = x_1;$$

logo, concluímos que: $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ e $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$, portanto,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = [1; 1, 1, 1, \cdots],$$

e,

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}} = [0;1,1,1,\cdots] = [1,1,1,\cdots].$$

Também é possível obter a expansão em frações contínuas da raíz positiva da equação do 2º grau (5.1). A saber,

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1.$$

Como $\Phi \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi+1}{\Phi} \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{\Phi}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} \\ \Rightarrow \Phi &= 1 + \frac{1}{\Phi}. \end{aligned}$$

Substituindo Φ no 2º membro da igualdade sucessivamente, obtemos,

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}} = [1;1,1,1,\cdots].$$

Com base nas equações (2.3), (2.4) e na observação 2.1.1, sabemos que, os numeradores e denominadores dos convergentes C_n's satisfazem:

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \end{cases} \tag{5.2}$$

e

$$\begin{cases} p_1 = a_1 \quad q_1 = 1, \\ p_0 = 1 \quad q_0 = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Aplicando as equações (5.2) e (5.3) à fração contínua Φ, tem-se:

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \end{cases} \tag{5.4}$$

e

$$\begin{cases} p_1 = 1 \quad q_1 = 1, \\ p_0 = 1 \quad q_0 = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Observamos que (5.4) dá origem à conhecida sequência de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geqslant 3$ com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, de onde obtemos:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots\}.$$

Logo, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ é a sequência de Fibonacci. E, por indução, verificamos que no caso do número de ouro Φ, $p_n = q_{n+1}$.

De fato. Se, $n = 0$.
$p_0 = 1$, $q_1 = 1 \Longrightarrow p_0 = q_1$, portanto, a propriedade é válida para $n = 0$.

Se, $n = 1$.
$p_1 = a_1 = 1$ e $q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1$, portanto, a propriedade é válida para $n = 1$.

Supondo que seja válida para todo $n \in \mathbb{N}$, verificamos se vale para $n = i + 1$, $i \in \mathbb{N}$.

Supondo, $p_n = q_{n+1}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, obtemos:

$$p_{j+1} = a_{j+1} p_j + p_{j-1} = a_{j+1} q_{j+1} + q_j = q_{j+2},$$

portanto, a propriedade é válida, como queríamos mostrar.

Então, $p_n = q_{n+1} = F_{n+1}$ e $q_n = F_n$, daí, pelo Teorema 2.13:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749895...,$$

e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = \frac{1}{\Phi} = \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| = 0{,}618033988749895...$$

O que ilustramos na seguinte tabela:

n	F_n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{F_n}{F_{n+1}}$	$\frac{F_n}{F_{n+1}}$
1	1	-	-	-	-
2	1	$\frac{1}{1}$	1	$\frac{1}{1}$	1
3	2	$\frac{2}{1}$	2	$\frac{1}{2}$	0,5
4	3	$\frac{3}{2}$	1,5	$\frac{2}{3}$	$0,\overline{6}$
5	5	$\frac{5}{3}$	$1,\overline{6}$	$\frac{3}{5}$	0,6
6	8	$\frac{8}{5}$	1,6	$\frac{5}{8}$	0,625
7	13	$\frac{13}{8}$	1,625	$\frac{8}{13}$	0,615384615...
8	21	$\frac{21}{13}$	1,615384615...	$\frac{13}{21}$	0,619047619...
9	34	$\frac{34}{21}$	1,619047619...	$\frac{21}{34}$	0,617647058...
10	55	$\frac{55}{34}$	1,617647059...	$\frac{34}{5}$	$0,6\overline{18}$
11	89	$\frac{89}{55}$	$1,6\overline{18}$	$\frac{55}{89}$	0,617977528...
12	144	$\frac{144}{89}$	1,617977528...	$\frac{89}{144}$	$0,6180\overline{5}$
13	233	$\frac{233}{144}$	1,618055556...	$\frac{144}{233}$	0,618025751...
14	377	$\frac{377}{233}$	1,618025751...	$\frac{233}{377}$	0,618037135...
15	610	$\frac{610}{377}$	1,618037135...	$\frac{377}{610}$	0,618032786...
16	987	$\frac{987}{610}$	1,618032787...	$\frac{610}{987}$	0,618034447...
17	1597	$\frac{1597}{987}$	1,618034448...	$\frac{987}{1597}$	0,618033813...
18	2584	$\frac{2584}{1597}$	1,618033813...	$\frac{1597}{2584}$	0,618034055...
19	4181	$\frac{4181}{2584}$	1,618034056...	$\frac{2584}{4181}$	0,618033963...
20	6765	$\frac{6765}{4181}$	1,618033963...	$\frac{4181}{6765}$	0,618033998...

Por fim, vale observar que pelas características da expansão em frações contínuas do número Φ, a aproximação deste número pelos convergentes se dá de forma muito lenta. De fato, por serem os a_i'$s = 1$, isso pode ser observado pela estimava apresentada anteriormente.

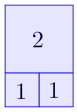
5.3.1 *Verificação Geométrica da Aproximação da Razão Áurea Obtida pela Sequência de Fibonacci*

Como vimos, quanto maior tomarmos n, melhor será a aproximação obtida com a Sequência de Fibonacci. Assim sendo, podemos construir geometricamente a Espiral de Fibonacci, que apresenta uma excelente aproximação da Espiral Áurea, como foi mostrado anteriormente com a utilização das Frações Contínuas.

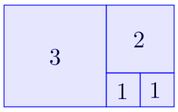
À seguir, descrevemos a construção do Retângulo de Fibonacci e da Espiral de Fibonacci.

- Tomemos dois quadrados de lado $1u$, formando um retângulo 2x1;

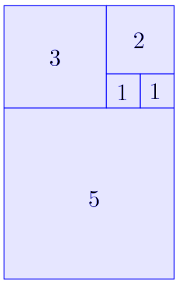
- À partir do lado superior deste retângulo construímos um quadrado de lado 2;



- Seguindo no sentido anti-horário, construímos à partir do retângulo acima um quadrado de lado 3;



- Seguindo o processo anterior descrito, tomamos um quadrado de lado 5, como na figura;



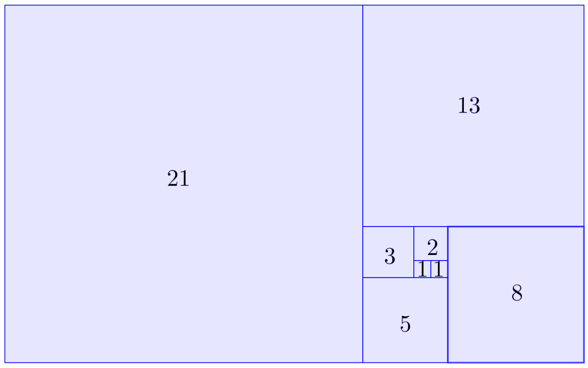


Figura 10: Retângulo de Fibonacci.

- Com esse algoritmo construímos o Retângulo de Fibonacci.

- A Espiral de Fibonacci é representada pela união dos arcos, cujo raio é o lado de cada quadrado, como ilustramos na figura à seguir.

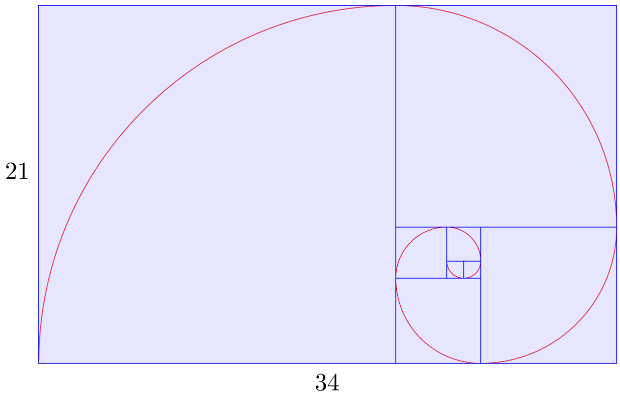
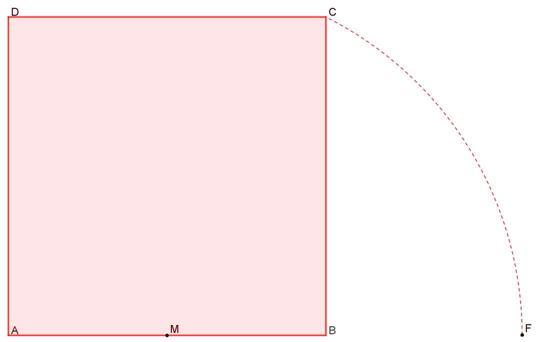


Figura 11: Espiral de Fibonacci.

À seguir, descrevemos a construção do Retângulo Áureo e da Espiral Áurea.

- Tomamos um quadrado $ABCD$ de lado a;
- Sobre AB, traçamos o ponto médio M;
- Construímos o arco CF de centro M e raio MC, chamando de F o ponto de intersecção do arco CF com a reta que contém o segmento AB;



- Construímos o retângulo $ADEF$, utilizando os pontos A, D e E como vértices, obtemos assim, o Retângulo Áureo ax$(a+b)$.

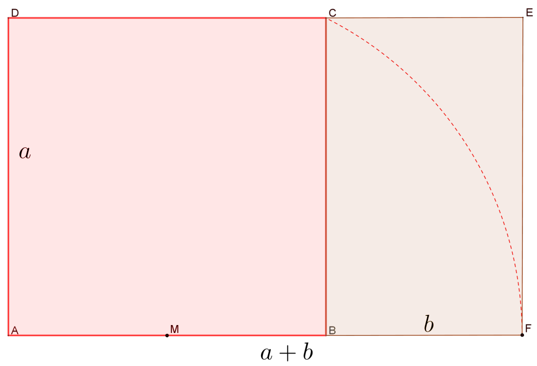


Figura 12: Retângulo Áureo

Proposição 5.4. *O retângulo da Figura 12 é retângulo áureo.*

Demonstração. Seja $AB = BC = a$, lado do quadrado $ABCD$, tomando M ponto médio de AB, então, $AM = MB = \dfrac{a}{2}$,
assim, pelo Teorema de Pitágoras podemos determinar a medida de MC;

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$MC = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

por construção $MC = MF$ e $BF = MF - MB = b$, então,

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2},$$

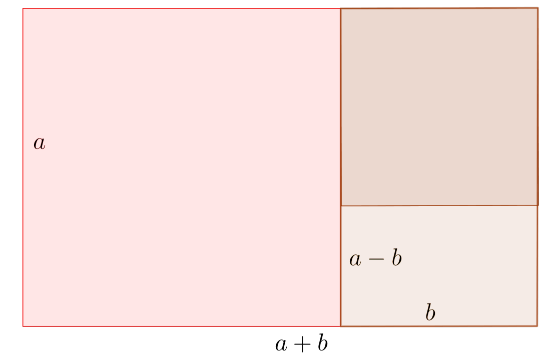
portanto, podemos definir a razão $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Um retângulo Áureo tem a seguinte propriedade, ao dividirmos o retângulo axb exatamente num quadrado de lado b e num retângulo bx$(a-b)$, este retângulo também é áureo, podendo repetir o processo tanto quanto se queira;



- A Espiral Áurea é representada pela união dos arcos, cujo raio é o lado de cada quadrado, como ilustramos na figura à seguir.

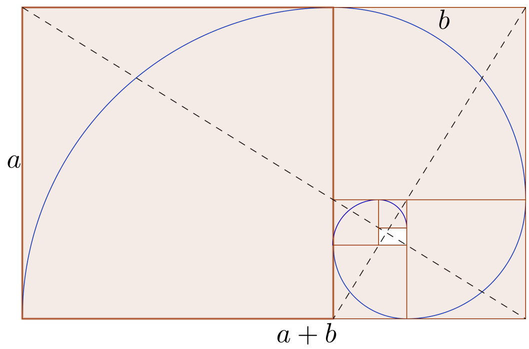


Figura 13: Espiral Áurea.

Observando a Espiral de Fibonacci e a Espiral Áurea, Figura 11 e 13 respectivamente, percebemos geometricamente à excelente aproximação racional da razão áurea, conforme Figura 14.

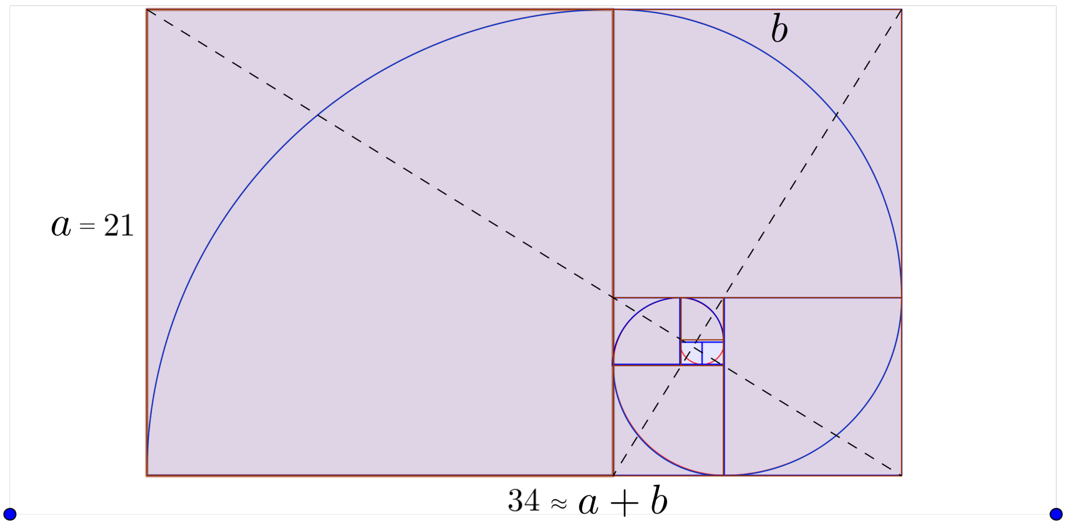


Figura 14: Espiral Áurea e Espiral de Fibonacci.

6

NÚMEROS IRRACIONAIS NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Quais os impactos da Crise da Incomensurabilidade para professores de matemática e alunos da Educação Básica [1]? Como é pensado o ensino dos números irracionais? Como é apresentado este assunto nos livros didáticos?

A seguir, apresentamos uma análise de como é tratado este assunto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2], na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, em uma coleção de livro didático para o Ensino Fundamental II e uma coleção de livro didático para o Ensino Médio da Matemática indicados, respectivamente, pelo PNLD [3]/2014 e 2015.

6.1 NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR - BNCC

A BNCC [14], no que se refere à área de matemática, diz que ela deve ser vista como um processo em permanente construção. Seu estudo não deve se prender há um aglomerado de conceitos, assim como mostra a História da Matemática, deve-se motivar o questionamento, a formulação, o teste e a validação das hipóteses, o contra exemplos, o desenvolvimento de linguagens, construindo formas de pensar que levem à reflexão

1 Educação Básica: Modalidade obrigatória dos 4 aos 17 anos de idade, compreende a pré-escola, ensino fundamental e ensino médio [6].
2 Documento em construção desde 30/07/2015, cuja 2ª versão foi apresentada em abril/2016, que visa deixar claro os conhecimentos essenciais aos quais todos os estudantes brasileiros têm o direito de ter acesso e se apropriar durante sua trajetória na Educação Básica.
3 PNLD: Programa Nacional do Livro Didático.

e ações de maneira crítica sobre as questões com que se depara.

Os objetivos de aprendizagem foram divididos em cinco eixos: Números e Operações; Geometria; Grandezas e Medidas; Álgebra e Funções; e Estatística.

Em cada ano, cada um dos eixos recebe uma ênfase diferente, valendo ressaltar que essa divisão é feita para facilitar a compreensão do conjunto de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento e como eles se relacionam, não podendo fragmentá-los, assim, as articulações devem ser o foco das atenções. O documento ressalta que a matemática nos oferece modelos para compreender a realidade, e que no ambiente escolar pode estar envolvida em diversos contextos, sejam eles oriundos de práticas sociais, de outras áreas de conhecimento ou, até mesmo, contextos da própria matemática.

As noções de conjuntos numéricos iniciam no Ensino Fundamental, com grande ênfase ao conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) desde o 1º ano, e com a introdução aos números racionais ($\mathbb{Q}$) nos anos finais do Ensino Fundamental I.

Em relação a este último, a BNCC espera que o educando associe as frações ao resultado de uma divisão e à ideia de parte de um todo, reconhecendo as características dos números naturais e decimais no que se refere à leitura, escrita e ordenação. Por sua vez, deixa de lado um aspecto histórico de grande relevância desde o tempo dos pitágoricos, que é o de tratar a fração como a razão entre dois números inteiros positivos obtidos em construções geométricas na busca de uma unidade comum para relacionar dois segmentos, desprezando inclusive o que o próprio documento propõe na área de grandezas e medidas, em que se orienta a trabalhar o conceito de medir, que é verificar quantas vezes uma unidade de medida cabe num referido comprimento, fazendo uso de unidades de medidas não convencionais.

O documento apresenta as seguintes competências que os educandos devem obter até o fim do Ensino Fundamental I:

- Compor e decompor números naturais e decimais, identificar o valor posicional dos algarismos, avaliar a magnitude de um número e a aproximação de um decimal para o número natural mais próximo;

- Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão e à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso;
- Comparar e ordenar números racionais positivos (representação fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica;
- Reconhecer as frações unitárias mais usadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ e } \frac{1}{5}\right)$ como unidade de medida menores do que uma unidade utilizando a reta numérica como recurso;
- Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos da Educação Financeira.

No Ensino Fundamental II, muitos conceitos com os quais os estudantes já vivenciaram são levados ao amadurecimento, por meio de sucessivas descobertas de possibilidades e conceitos. No campo dos números constróem-se os números inteiros negativos, os racionais e os irracionais tendo, assim, adquirido o conhecimento sobre o conjunto dos números reais, sabendo identificá-los, compará-los e ordená-los, relacionando corretamente esses números na reta numérica.

Para aprofundar a noção de número, é preciso colocá-lo diante de problemas nos quais os números racionais não sejam suficientes para resolvê-los já no oitavo ano, levando-os a perceber a necessidade dos números irracionais, que serão trabalhados de forma sistemática no nono ano, possibilitando resolver problemas como a medida das diagonais de polígonos.

Segundo a BNCC, nessa etapa é importante trabalhar com aproximação e erro, utilizando, para isso, a calculadora, que apresenta arredondamento para os números racionais, que resultam em decimais com muitas casas ou dízimas periódicas, e para os números irracionais.

Assim, nas operações aritméticas e algébricas com os irracionais, o estudande deve ser conduzido a efetuá-las seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais ou, então, no caso de radicais, operar com potências de expoente fracionários.

O documento apresenta as seguintes competências que os educandos devem obter até o fim do Ensino Fundamental II:

- Compreender a relação entre potenciação e radiciação, efetuar cálculos com potências de expoentes naturais e aplicar esse conhecimento na representação de notação científica;
- Reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio na relação com pontos na reta numérica;
- Compreender e efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes negativos e fracionários;
- Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

No Ensino Médio, os estudantes têm o direito e a necessidade de ampliar sua capacidade de abstração, tendo acesso na matemática a uma linguagem sintética, direta e objetiva, com menor grau de ambiguidade, ampliando as possibilidades de ler o mundo e interagir na vida cidadã.

No estudo das grandezas e medidas, o documento diz que é fundamental a discussão sobre a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos, principalmente dos racionais para os reais, partir da utilização de números irracionais para representação de medidas de segmentos incomensuráveis, sendo importante ampliar o conhecimento sobre a circunferência e tomar cuidado com a apresentação, por vezes inapropriada do número π como a razão entre as medidas do comprimento e do diâmetro da circunferência, sem destacar o fato de pelo menos uma dessas medidas ser um número irracional.

Espera-se que, ao fim da Educação Básica, o estudante tenha compreendido a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos dos naturais aos reais, sistematizando procedimentos de cálculo e propriedades para resolver problemas do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática. As áreas da matemática devem ser articuladas, por exemplo em relação à Numeros e Operações e Álgebra e Funções, o estudante pode ordenar números reais, localizando-os na reta numérica, compreendendo as noções de intervalo, densidade e completude do conjunto dos números reais, no contexto de equações e inequações.

O documento apresenta as seguintes competências que os educandos devem obter até o fim do Ensino Médio:

- Resolver e elaborar problemas utilizando a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras, incluindo aqueles que envolvem o cálculo das medidas de diagonais de prismas, de altura de pirâmides, e aplicar esse conhecimento em situações relacionadas ao mundo do trabalho;
- Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas de áreas e perímetros de figuras planas, incluindo o círculo e suas partes, deduzindo expressões de cálculo, aplicando-as preferencialmente, em situações cotidianas;
- Compreender as características dos diferentes conjuntos numéricos a necessidade de ampliá-los (naturais, inteiros, racionais, reais), suas operações e as propriedades das operações;
- Comparar e ordenar números reais, localizando-os na reta numérica e compreender intervalos numéricos, densidade e completude do conjunto dos números reais, os significados de módulo e de simétrico, no contexto de equações e inequações.

O documento BNCC apresenta a essência do que cada estudante tem o direito de aprender ao cursar a Educação Básica em cada uma de suas etapas e em cada componente curricular. Aqui foi apresentado, de forma sintética, as principais ideias, nas quais a utilização das Frações Contínuas não como conteúdo específico, mas sim como um facilitador para compreensão, exploração e aprofundamento dos conteúdos associados à teoria dos números, em especial o conjunto dos números reais pode desempenhar um importante papel na aquisição destes conhecimentos pelos estudantes. Vale ressaltar que o documento não substitui as Diretrizes Curriculares de cada sistema de Ensino e nem os limita.

6.2 NO CURRICULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Em 2008, a Secretaria Estadual de Educação organizou e apresentou o Currículo do Estado de SP e revisou-o em 2012. O documento foi dividido em cadernos dentro de cada área do conhecimento. Aqui apresento uma análise do Caderno Currículo do Estado de SP - Matemática e Suas Linguagens [9], Caderno do Professor de Matemática e Caderno do aluno, divididos por semestre, ano e ciclo.

Os conteúdos estão organizados em três grandes áreas e matemática pertence à Ciências da Natureza e Matemática, que ainda inclui Física, Química e Biologia.

Para os organizadores a contextualização é imprescíndivel, mas esta precisa ser equilibrada com a capacidade de abstração, criando um ciclo contextualizar/ abstrair/ contextualizar/ abstrair. A abstração é um instrumento para construir o conhecimento em todas as áreas, não se deve em nome de um utilitarismo imediatista privar os alunos de temas epistemológica e culturalmente relevantes.

A ideia de aproximação é bastante valorizada no documento, que ressalta que os números irracionais, por exemplo, só existem na realidade concreta, inclusive nos computadores, por meio de suas aproximações racionais. Destacando ainda que um cálculo aproximado, em geral, é tão digno de crédito quanto um cálculo exato, desde que cumpra procedimentos matemáticos bem explicitados, em geral, uma aproximação é ótima se, e somente se, tenhamos permanentemente condições de melhorá-la, tanto quanto se queira.

Os conteúdos básicos foram divididos em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. No que se refere aos Números, as situações de aprendizagem podem estar apoiadas na História, por exemplo, a ampliação dos números naturais para inteiros por causa das necessidades preementes do desenvolvimento comercial e financeiro dos séculos XV e XVI, ou em situações concretas de medida, em que se pode articular desde a relação entre notação decimal e fracionária de um número até a ampliação para o campo real, como a necessidade de utilizar as raízes para representar, por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado 1.

Ressaltamos que no Ensino Fundamental os números racionais surgem de relações entre os inteiros e a motivação básica para a compreensão dos irracionais envolve grandezas incomensuráveis, e ao fim desta modalidade espera-se que o estudante saiba operar no campo numérico real, o que constitui porta de entrada para aprofundar, sistematizar e estabelecer novas relações no Ensino Médio. O estudo de sucessões numéricas, números irracionais e aproximações racionais usadas em problemas práticos, bem como a extensão do campo numérico para o conjunto dos números complexos, constitui o mote central para o desenvolvimento do eixo Números no Ensino Médio.

Por fim, o documento ressalta que compreender o significado é mais importante do que a utilidade prática, sendo assim, a História da Matemática é muito importante para que os significados sejam construídos.

Na divisão dos conteúdos nos anos podemos destacar os seguintes momentos, o qual se trabalha com as seguintes habilidades:

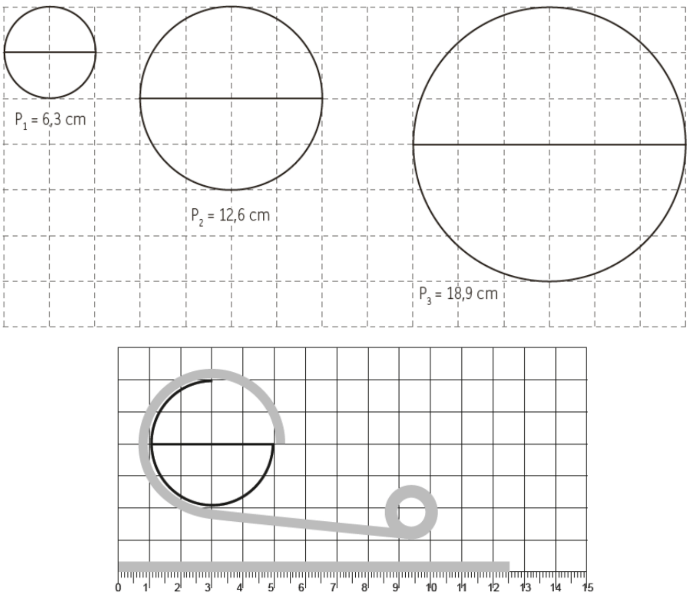
- 8º ano - 1º Bimestre: Números Racionais na transformação de decimais finitos em fração e de dízimas periódicas em fração geratriz, desenvolvendo as habilidades de relacionar frações e razões, bem como as condições nas quais uma razão pode ser expressa como dízima periódica, bem como saber calcular a fração geratriz de uma dízima;
- 9º ano - 1º Bimestre: Conjuntos Numéricos, Números irracionais e Potenciação e Radiciação de Reais. Compreendendo a necessidade da ampliação dos conjuntos numéricos, saber ordenar os números na reta real e incorporar a ideia básica de que os números irracionais só podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional;
- 9º ano - 4º Bimestre: O número π, compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e a área da circunferência;
- 1º ano - 1º Bimestre: Consolidação dos Conjuntos Numéricos, verificando e aprimorando os conceitos pertinentes ao conjunto dos números reais, tais como, densidade, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^C$, características de conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, entre outras.

6.2.1 *No Caderno do Professor e Caderno do Aluno*

O Caderno do Professor e do Aluno [13] é composto por Situações de Aprendizagem que são sugeridas com o intuito de aprofundar o conhecimento dos estudantes nos diferentes conteúdos propostos no currículo do Estado de SP.

A seguir, apresento uma análise de algumas sugestões que são propostas em diferentes momentos do Ensino Fundamental para o trabalho com Conjuntos Numéricos, sendo que, algumas dessas sugestões vão ao encontro do proposto em minha pesquisa que visa a utilização das Frações Contínuas e da História Matemática para compreensão dos estudantes da necessidade dos diferentes Conjuntos Numéricos, bem como as características presentes no Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$).

Para o 7º ano no volume 2 a Situação de Aprendizagem 3 está relacionada a proporcionalidade. Sugere-se que os alunos realizem medidas de perímetro da circunferência e de seu respectivo diâmetro, e após calculando a razão entre essas grandezas percebam que esta se aproxima de 3,14 que é o número π.

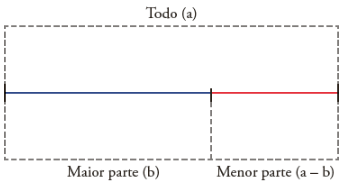


Circunferência	Comprimento C (cm)	Diâmetro D (cm)	Razão $\frac{C}{D}$
C_1	6,3	2	3,1
C_2	12,6	4	3,1
C_3	18,9	6	3,1

Figura 15: Retirado do Caderno do Professor 7º ano vol. 2 pág. 43 e 44

É importante ressaltar a dificuldade de medir com precisão o perímetro e o diâmetro da circunferência, o que justifica o "*erro*" nas aproximações desta medida e no cálculo da razão que deve se aproximar de π que é irracional, sendo assim, perímetro e/ou diâmetro também é irracional, logo só somos capazes de obter aproximações racionais, o que será melhor compreendido no 9º ano.

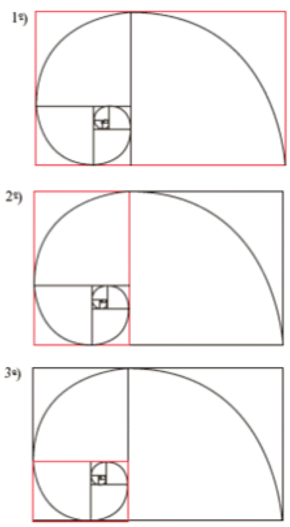
Outro número especial na matemática, que pode ser apresentado neste momento, refere-se à razão áurea, que é o número $\Phi = 1,618...$, que assim como π é irracional, o caderno sugere que seja apresentado a definição da razão áurea:

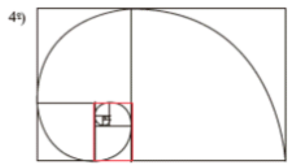


$$\frac{\text{todo}}{\text{maior}} = \frac{\text{maior}}{\text{menor}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Figura 16: Retirado do Caderno do Professor 7º ano vol. 2 pág. 47

E que a razão áurea, pode ser observada de forma aproximada por meio da razão entre os lados dos seguintes retângulos:





Retângulo	Lado maior (cm)	Lado menor (cm)	Razão
1º	6,3	3,9	1,61
2º	3,9	2,4	1,62
3º	2,4	1,5	1,6
4º	1,5	1,0	1,5
		Média	1,58

Figura 17: Retirado do Caderno do Professor 7º ano vol. 2 pág. 48

Esta situação de aprendizagem visa que os alunos sejam capazes de reconhecer a proporcionalidade em figuras geométricas, propiciando que conheçam as principais razões existentes na geometria, como a razão entre a diagonal e o lado do quadrado $\left(\sqrt{2}\right)$ e a razão entre o comprimento e o perímetro de uma circunferência (π).

Essa é mais uma etapa do trabalho de proporcionalidade. Nesse momento não irá aprofundar nas questões das grandezas incomensuráveis que dão origem aos números irracionais, mas essa sensibilização será retomada posteriormente.

No 8º ano, o caderno do professor e do aluno volume 1, na Situação de Aprendizagem 1 tem como objetivo diferenciar o que é fração e o que é razão, além disso, define melhor o conjunto dos números racionais. Por meio de um conjunto de atividades que propõe um trabalho com frações equivalentes e ressalta que cada número racional possui uma posição bem definida na reta numérica, é importante notar o curioso fato de que o Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$) é denso sem ser contínuo, ou seja, entre dois números racionais quaisquer há uma infinidade de números racionais, uma vez que ele é denso, mas não completa a reta, pois isso é uma característica do conjunto dos números reais, quando cada ponto da reta - imagem associada à continuidade - corresponderá à um número real, seja racional ou irracional.

Já no 9º ano, o caderno do Professor e do aluno volume 1, denota Situações de Aprendizagem 1, 2 e 3 o aprofundamento do conjunto dos números reais, apresentando segmentos comensuráveis e incomensuráveis, cita os números algébricos e transcendentes, e no caderno do professor há uma sugestão para utilizar frações contínuas para ampliar a compreensão de aproximação de irracionais por números racionais.

Na situação de aprendizagem 1, retoma-se as noções de conjuntos numéricos dando grande ênfase aos números irracionais, que representam grandezas incomensuráveis, que são aquelas que não podem ser representadas na forma de fração entre dois inteiros.

No caderno do aluno, temos atividades para representar números racionais e irracionais na reta real utilizando régua e compasso, também é apresentada a Espiral de

Cirene que representa os números irracionais da forma $\sqrt{N}$, com n natural e não quadrado perfeito.

Já o caderno do professor sugere aprofundar o assunto, apresentando a diagonal de um quadrado de lado 1 como grandeza incomensurável, e apresentando a prova que $\sqrt{2}$ é irracional.

A situação de aprendizagem 2, mostra que todo número racional pode ser escrito como dízima periódica, assim, temos por exemplo:

$$\frac{4}{5} = 0,8 = 0,79999\cdots$$

Esse aspecto é abordado com boa intensidade no caderno do aluno, já no caderno do professor, nas considerações sobre a avaliação, sugere-se ao professor aprofundar o trabalho com as frações contínuas no seu curso sobre os números reais, sendo esta também uma possibilidade de explorar o uso da calculadora em sala de aula, é apresentada uma breve sugestão sobre uma possível abordagem, sendo descrita três atividades (ver Apêndice A.2). Com duas atividades voltadas para representação de números racionais em frações contínuas e uma voltada para representação de números irracionais em frações contínuas, e aproximação de irracionais por racionais.

Também no caderno do professor sugere-se, sob o ponto de vista da História da Matemática, a divisão dos números irracionais entre algébricos e transcendentes. Após uma breve explicação sobre esses conceitos, justifica-se esta abordagem para que os estudantes estabeleçam a diferença entre os números irracionais como $\sqrt{2}$ e π, que é irracional algébrico e transcendente, respectivamente.

Por fim, espera-se que o aluno compreenda que a reta real é o conjunto que reúne os números racionais e irracionais ou, em outras palavras, o conjunto que reúne os números algébricos e os números tanscendentes, concluindo que todo número racional é algébrico, e nem todo número irracional é algébrico e que todo número transcendente é irracional.

Já no 1º ano do Ensino Médio, sugere-se verificar a compreensão dos alunos quanto ao conjunto dos números reais, trabalhando os conceitos que os alunos ainda não apropriaram no ensino fundamental.

6.3 NOS LIVROS DIDÁTICOS

A escolha das duas coleções de livros didáticos que irei apresentar deve-se ao fato de serem utilizadas na EE Professor Joviano Satler de Lima, escola na qual leciono o ensino da matemática. São elas, Vontade de Saber Matemática - FTD [16] e Matemática, Contextos e Aplicações - Ática [3].

6.3.1 *Ensino Fundamental*

O conjunto dos números irracionais é introduzido no 8ºano do Ensino Fundamental, o texto de introdução remete aos pitagóricos a descoberta dos números irracionais, na busca de determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. O breve texto não apresenta o conceito de grandezas incomensuráveis, e de forma muito superficial cita a comunidade pitagórica. Logo após, apresenta um número racional com representação decimal na forma de dízima periódica, e a aproximação decimal de $\sqrt{3}$, pedindo que o estudante observe que no último caso não ocorre a periodicidade, sendo essa uma característica dos números irracionais.

Em seguida, são apresentados alguns exemplos de números irracionais com suas respectivas aproximações decimais. Também é apresentado o diagrama dos conjuntos numéricos, onde pode-se observar que o conjunto dos números racionais e irracionais são disjuntos, enquanto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, mas sem aprofundar este conceito, na mesma página tem uma caixa de texto que indica que o número π é irracional, podendo ser obtido pela razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência, citando que vários povos ao longo da história realizaram aproximações para π, fazendo referência a Bíblia que apresenta aproximação de π como 3. Ainda na mesma página ilustra-se como representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica utilizando compasso.

Na primeira lista de atividades, pede-se que classifique alguns números como racionais e irracionais, atividade com a utilização da calculadora para operar com medidas de perímetro e diâmetro de circunferências e determinar a sua razão. Também é proposto um desafio, no qual se busca contextualizar o número irracional π num problema de irrigação, cujo uma área circular é irrigada por um pivô central.

Retomando conceitos teóricos, o livro apresenta a relação entre os conjuntos numéricos e destaca algumas propriedades do conjunto dos números irracionais, além da posição de diversos números reais na reta. A seguir, temos mais algumas atividades para fixar esses conceitos, e a unidade encerra, com uma atividade onde são explicitados os passos para representar $\sqrt{5}$ no *Geogebra*, percebendo algumas características geométricas, relacionando área de quadrado, medida do lado e raio de circunferência.

Observamos de forma clara que muito do que se pede na BNCC está sendo atendido no livro didático, mas é perceptível que, apesar de citar fatos da História da Matemática, não buscou-se contextualizar estes conceitos dentro da própria História. Além disso, deve-se atentar à necessidade de explicitar alguns conceitos teóricos evitando, assim, que os estudantes aprendam conceitos equivocados, por exemplo, ao relacionar o número π a razão entre o perímetro da circunferência com o seu diâmetro, não se explicitou que ao menos uma dessas grandezas é irracional, podendo levar a falsa impressão de que este número possa ser representado pela razão de dois números racionais. Ressaltamos que compreendo que no 8º ano o objetivo é introduzir o assunto que será aprofundado no 9º ano, mas entendemos que essa introdução poderia enfatizar os aspectos históricos, possibilitando aos estudandes sensibilizarem-se com as questões que motivaram o avanço da matemática.

No 9º ano, o estudo é voltado a radiciação, propriedades, simplificação, operações dos radicais e racionalização dos denominadores, relacionando alguns conceitos aos aspectos geométricos e utilizando a calculadora como apoio tecnológico. Embora reconheça a importância do domínio das técnicas operatórias que são apresentadas, falta o aprofundamento dos conjuntos numéricos, e a conceitualização das características do conjunto dos números reais de densidade e continuidade, deixa-se de lado os conceitos de números algébricos e transcendentes, enfim, muito do que fora trazido na Proposta Curricular do Estado de SP não está presente no livro didático dos anos finais do Ensino Fundamental.

6.3.2 *Ensino Médio*

Ao retomar os Conjuntos Numéricos no 1º ano do Ensino Médio, é apresentado que os Gregos do século V a.C. tinham a ideia de que os números naturais (inteiros positivos) e a razão entre eles (racionais positivos) eram suficientes para comparar duas grandezas quaisquer de mesma espécie. O texto cita a primeira grande crise no desenvolvimento da matemática, como o momento em que se percebeu que a comparação entre duas grandezas de mesma espécie nem sempre correspondia a razão entre dois números naturais, o que significava que a reta numerada continha pontos que não correspondiam a nenhum número conhecido, sendo esses novos números os números irracionais.

Para exemplificar esse novo número o texto cita o número de ouro, $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398\cdots$, e alguns exemplos de onde podemos encontrar esse número na natureza, arte e arquitetura.

Após essa sensibilização, apresenta a utilidade dos números para realizar contagem e medição, também apresenta a noção de conjunto, para, em seguida, revisar os conjuntos numéricos. Inicia a revisão com os números naturais, apresentando alguns de seus subconjuntos (exemplo: números pares), bem como aplicações, faz o mesmo com o conjunto dos números inteiros, representando-os na reta numérica.

Ao expor o conjunto dos números racionais, observa-se a possibilidade de realizar divisões que eram impossíveis no conjunto dos números inteiros, retoma a representação decimal dos números racionais, apresentando que o matemático holandês Simon Stevin(1548-1620) do século XVI, foi quem a sistematizou em seu livro "A dízima", publicado em 1585. Ainda, reapresenta a fração geratriz, relaciona os números racionais à medida de grandezas e ordena os números racionais na reta numérica.

Após, expõe os números irracionais, apresentando a ideia de segmentos de reta incomensuráveis, ilustrando essa situação com a diagonal do quadrado de lado 1, utiliza-se da representação decimal e calculadora para aproximar a $\sqrt{2}$, ilustrando assim, a ideia de aproximações sucessivas para mostrar que esse número é irracional, cita o número π e o número de ouro Φ como números irracionais, mostrando que o primeiro refere-se a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro e o segundo a razão entre dois segmento, onde $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, ilustra ainda que o número π já foi escrito com 1,2 trilhões de casa decimais e que o número de ouro fora utilizado em pinturas de Leonardo da Vinci.

O autor propõe uma leitura na qual relata a crise dos incomensuráveis no pensamento pitagórico e a resistência dos matemáticos com os números irracionais que perdurou até o século XIX, até George Cantor fundamentá-los adequadamente. Na sequência há uma demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional.

Por fim, define-se o conjunto dos números reais, apresentando a reta real, após define-se a desigualdades entre números reais, módulo de um número real e a distância entre dois pontos na reta real.

Percebe-se a preocupação nessa obra de contextualizar os conteúdos internamente à própria História da Matemática possibilitando, assim, como descrito na BNCC e na Proposta Curricular do Estado de SP o movimento de contextualizar/ abstrair/ contextualizar/ abstrair, porém, não apresenta alguns aspectos históricos como os paradoxos de Zenão (1), a proporção de Eudoxo (2), ou o corte de Dedekind (1.6), nem traz conceitos de números algébricos e transcendentes, nem conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, como também não apresenta com clareza que o número π que é a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência implica que ao menos uma destas grandezas seja irracional.

O referido livro embora apresente a ideia de que números irracionais não possuem representação na forma de fração e nem decimal, podendo apenas ser bem aproximados por estes, não apresenta uma forma sistemática de realizar boas aproximações de números irracionais por racionais, o que poderia ser feito com a utilização das frações contínuas.

7

APLICAÇÕES DE FRAÇÕES CONTÍNUAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

As atividades a seguir apresentam possibilidades de utilização das frações contínuas não como mais um conteúdo a ser trabalhado na Educação Básica, mas como facilitador para compreensão dos números racionais e irracionais, contextualizando as situações que os envolvem por meio da história da matemática, possibilitando o movimento contextualização/abstração, por meio das questões que impulsionaram diversos matemáticos ao longo da história da humanidade.

O objetivo das atividades propostas é o de possibilitar aos alunos a compreensão do conjunto dos números reais e as suas aplicações, não como um amontoado de regras operatórias e nem como aspectos históricos deixando de lado tal competência presente na matemática, mas como um caminho de pesquisa e experimentos, oportunizando aos educandos uma teia de aprendizagens, com significados dentro e fora da matemática.

Segundo Nilson José Machado [12], p.154:

> "Especialmente no que se refere ao planejamento das atividade didáticas, a concepção de conhecimento como uma teia acentrada de nós e relações significativas, em permanente transformação e atualização, conduz a uma radical mudança de perspectivas e expectativas."

Embora haja o objetivo de ampliar as possibilidades de aprendizagem, propiciando ao aluno o protagonismo como artífice deste processo, não podemos deixar de lado objetivos claros e caminhos bem traçados para o desenvolvimento das competências e habilidades dos educandos, pois estes evitam que andemos em círculos.

Ainda, segundo Machado [12], p.155:

> "... De fato, nos processos cognitivos, sempre serão necessários ordenamentos, procedimentos algorítmicos, hierarquias, ainda que o conhecimento não possa ser caracterizado apenas por estes elementos constitutivos, isoladamente ou em conjunto. Analogamente, afirma-se a flexibilidade das fronteiras diciplinares tornam-se dispensáveis; seguramente elas não o são. Parafraseando o poeta, são demais os perigos desta rede de significações, com sua multiplicidade de nós e de vias de interligação, sobretudo para aqueles que nela "navegam" com entusiasmo e paixão; são inúmeras as possibilidades de vagar à toa, de se perder. Para enfrentar tais perigos, sempre será necessário um mapeamento que oriente e articule os caminhos a seguir, que apresente um espectro não-hierárquico e acentrado de opções."

Embora apresentamos sugestões de atividades específicas para alguns anos da Educação Básica, estas podem ser utilizadas, de acordo com os objetivos estabelecidos, em outros anos, de outras formas, de acordo com o desenvolvimento dos alunos, não sendo necessário seguí-las numa sequência rígida, a ideia principal é apresentarmos uma possibilidade de construir os conceitos associados aos números reais de forma significativa.

7.1 7º ANO

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo [9] prevê para o 7º ano o trabalho com os números racionais, sendo que no ano anterior os alunos devem ter tido a experiência de representar situações na forma de frações, compará-las e ordená-las, e realizar as operações. Neste ano, espera-se que os alunos aprendam a representar as frações na forma decimal e operem com números decimais.

Ainda no 7º ano, trabalha-se com o conceito de razões constantes na geometria, dando ênfase especial a constante π na geometria.

Nas atividades apresentadas a seguir, sugerimos a apresentação do conceito de aproximação, mostrando a possibilidade de usar frações com denominadores menores, que apresentam aproximações aceitáveis da fração inicial, como motivação descrevemos o trabalho do holândes Christiaan Huygens que para construir um planetário mecânico, utilizou a aproximação racional. Este trabalho também possibilitará aos alunos estudarem conceitos relacionados à astronomia em ciências.

Já para introduzirmos o conceito de razões constantes na geometria, vamos encontrar a expansão em frações contínuas do número π.

7.1.1 *Representação de Números Racionais em Frações Contínuas*

O holândes Christiaan Huygens, no século XVI, construiu um Planetário Mecânico, um modelo reduzido do sistema solar. Ele desenvolveu uma relação entre engrenagens que simulavam o movimento de cada planeta em torno do Sol, em seu estudo ele concluiu que a razão entre os períodos da Terra e Saturno era de $\frac{77708431}{2640858}$, mas como construir engrenagens com este número de dentes?

Essa tarefa não é nem um pouco razoável, Christiaan Huygens foi o primeiro a demonstrar a aplicação de frações contínuas, explicando como usar os seus convergentes. Assim, para podermos responder a esta questão, vamos primeiro conhecer a representação de números racionais em frações contínuas.

Para isso, utilizaremos dois métodos, o geométrico e o das divisões suscessivas.

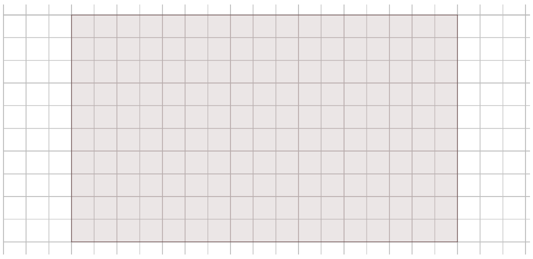
A Fração Contínua de um número racional, é uma expressão da seguinte forma:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

com $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_n \in \mathbb{N}$ para $n \geqslant 2$.

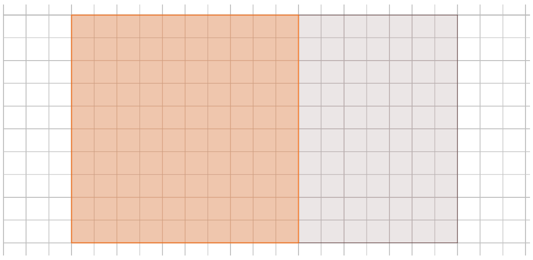
Pelo método geométrico, apresentado na seção 4.

Tomemos a fração $\frac{17}{10}$, pensemos então, em um retângulo de lados 17 e 10.



1. Qual a maior medida de lado para um quadrado contido nesse retângulo?
   Resposta: 10.

2. Quantos quadrados de lado 10 (máximo), podemos colorir nesse retângulo?
   Resposta: 1.



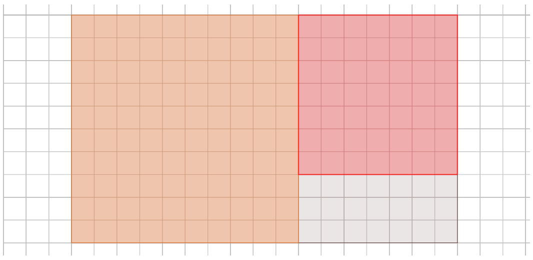
Observe que resta um retângulo de lados 10 e 7, ou seja,

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}.$$

Agora repetimos as perguntas e o processo nesse último retângulo.

1. Qual a maior medida de lado para um quadrado contido nesse retângulo (10x7)?
   Resposta: 7.

2. Quantos quadrados de lado 7 (máximo), podemos colorir nesse retângulo?
   Resposta: 1.



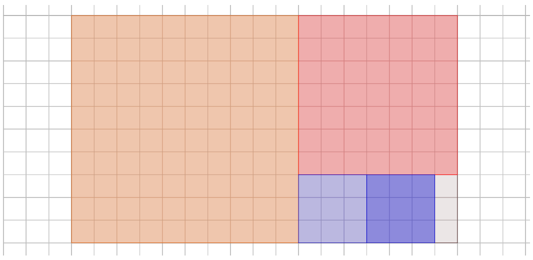
Observe que resta um retângulo de lados 7 e 3, ou seja,

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}.$$

Agora repetimos as perguntas e o processo nesse último retângulo.

1. Qual a maior medida de lado para um quadrado contido nesse retângulo (7x3)?
   Resposta: 3.

2. Quantos quadrados de lado 3 (máximo), podemos colorir nesse retângulo?
   Resposta: 2.



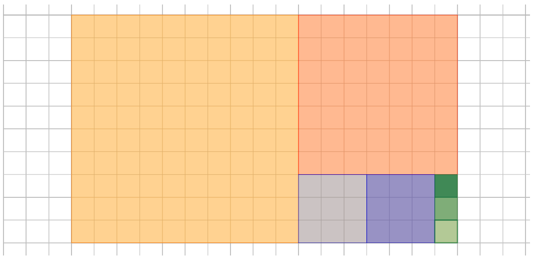
Observe que resta um retângulo de lados 3 e 1, ou seja,

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Agora repetimos as perguntas e o processo nesse último retângulo.

1. Qual a maior medida de lado para um quadrado contido nesse retângulo (3x1)?
   Resposta: 1.

2. Quantos quadrados de lado 1 (máximo), podemos colorir nesse retângulo?
   Resposta: 3.



Observe que o retângulo fora prenchido por completo, ou seja,

$$\frac{3}{1} = 3.$$

Assim, podemos reescrever a fração dada em fração contínua, veja:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}.$$

E o que ocorre se fossemos representar a fração $\frac{10}{17}$?

Isso é simples, basta perceber que no retângulo inicial não cabem quadrados de lado 17, então, a sua representação em fração contínua é:

$$\frac{10}{17} = 0 + \frac{1}{\frac{17}{10}}.$$

Como já conhecemos a representação em fração contínua de $\frac{17}{10}$, temos que:

$$\frac{10}{17} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}.$$

Agora é com você! Represente as frações a seguir em frações contínuas, com auxílio do papel quadriculado.

$a)\frac{12}{5}$ $\quad b)\frac{5}{12}$ $\quad c)\frac{18}{7}$ $\quad d)\frac{7}{18}$

Pelo método das divisões sucessivas.

Tomemos a fração $\frac{17}{10}$, novamente, agora, iremos efetuar a divisão pelo algoritmo de Euclides, assim:

$$17 = 10 \cdot 1 + 7,$$

ou seja,

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10}.$$

Reescrevemos a última fração, utilizando o conceito de inverso, aprendido anteriormente, para que a divisão resulte em um número maior que, ou igual à 1, assim:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}}.$$

Efetuando esta última divisão, obtemos:

$$10 = 7 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7},$$

ou seja,

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}}.$$

Repetimos o processo, tanto quanto for possível, assim obtemos:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}},$$

mas,

$$7 = 3 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3},$$

ou seja,

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}},$$

Assim, temos outro método para obter frações contínuas, então agora faça você, utilizando as mesmas frações do exercício anterior.

$a)\frac{12}{5}$ $\quad$ $b)\frac{5}{12}$ $\quad$ $c)\frac{18}{7}$ $\quad$ $d)\frac{7}{18}$

Agora que já sabemos representar um número em frações contínuas, vamos tentar entender como elas podem nos ajudar no problema do Planetário Mecânco de Huygens. Para isso, vamos conhecer os convergentes de um número que são obtidos pela expansão em fração contínua.

Exemplo 7.1. Tomemos como exemplo o número $\frac{17}{10}$, e a sua expansão em fração contínua:

$$\frac{17}{10} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}},$$

- O primeiro convergente é,
$$C_1 = 1;$$
- O segundo convergente é,
$$C_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2;$$
- O terceiro convergente é,
$$C_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2+1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3};$$
- O quarto convergente é,
$$C_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{6+1}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{3}{7}}}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7+3}{7}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{10}{7}} = 1 + \frac{7}{10} = \frac{10+7}{10} = \frac{17}{10}.$$

Isso é um tanto quanto óbvio, pois tomamos a fração contínua que fora gerada pelo número $\frac{17}{10}$.

Você deve ter percebido que necessitamos refazer toda a soma para cada convergente que calculamos, então observe que podemos definir um método prático para determinar os convergentes, após conhecermos os dois primeiros.

Seja,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

a expansão em fração contínua de $\frac{p}{q}$.

- O primeiro convergente é,

$$C_1 = a_1 \qquad \Longrightarrow p_1 = a_1 \qquad \text{e} \qquad q_1 = 1;$$

- O segundo convergente é,

$$C_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1a_2 + 1}{a_2} \qquad \Longrightarrow p_2 = a_1a_2 + 1 \qquad \text{e} \qquad q_2 = a_2;$$

- O terceiro convergente é,

$$C_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2a_3 + 1}{a_3}} = a_1 + \frac{a + 3}{a_2a_3 + 1}$$

$$= \frac{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3}{a_2a_3 + 1} = \frac{a_3(a_1a_2 + a_1) + a_1}{a_3a_2 + 1} = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1}$$

$$\Longrightarrow p_3 = a_3p_2 + p_1 \qquad \text{e} \qquad q_3 = a_3q_2 + q_1;$$

- O n-ésimo convergente é,

$$C_n = \frac{a_np_{n-1} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}} \qquad \Longrightarrow p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \qquad \text{e} \qquad q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

A demonstração do n-ésimo convergente pode ser vista na equação (2.3). Por ser complexa para o 7º ano não iremos fazê-la aqui, mas é importante ressaltar que existe essa prova.

Agora apresentamos a seguinte tabela, para nos auxiliar na escrita dos convergentes de uma fração contínua:

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n
p	a_1	$a_1 \cdot a_2 + 1$	$a_3 \cdot p_2 + p_1$	$a_4 \cdot p_3 + p_2$	$\cdots$	$a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}$
q	1	a_2	$a_3 \cdot q_2 + q_1$	$a_4 \cdot q_3 + q_2$	$\cdots$	$a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}$
	C_1	C_2	C_3	C_4	$\cdots$	C_n

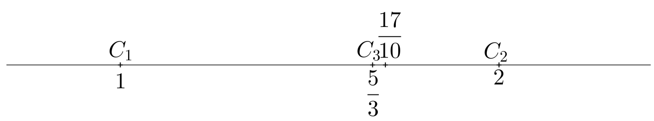
	$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 2$	$a_4 = 3$
p	1	$1 \cdot 1 + 1 = 2$	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$3 \cdot 5 + 2 = 17$
q	1	1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$3 \cdot 3 + 1 = 10$
	C_1	C_2	C_3	C_4

Agora é a sua vez de praticar. Faça a tabela e encontre os convergentes das seguintes frações contínuas:

$$a)2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} \qquad\qquad b)\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{3}}}}$$

E são os convergentes que interessavam a Huygens, veja que a sequência de convergentes se aproxima do número dado, tanto quanto queremos, observe:

$$\begin{aligned}
\text{Erro do } C_1 &: \quad \frac{17}{10} - 1 = \frac{17-10}{10} = \frac{7}{10} = 0,7; \\
\text{Erro do } C_2 &: \quad \frac{17}{10} - 2 = \frac{17-20}{10} = \frac{-3}{10} = -0,3; \\
\text{Erro do } C_3 &: \quad \frac{17}{10} - \frac{5}{3} = \frac{51-50}{30} = \frac{1}{30} = 0,0\overline{3}.
\end{aligned}$$



Como pode-se observar, quanto maior o índice do convergente mais próximo do número dado ele será, sendo que desde o primeiro convergente a diferença é menor que 1. Huygens utilizou esse processo para encontrar uma boa aproximação racional que resolvesse o seu problema, veja:

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{77708431}{2640858} &= 29+\frac{1123549}{2640858} = 29+\cfrac{1}{\cfrac{2640858}{1123549}} = 29+\cfrac{1}{2+\cfrac{393760}{1123549}}\\
&= 29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1123549}{393760}}} = 29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{336029}{393760}}}\\
&= 29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{393760}{336029}}}} = 29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1+\cfrac{57731}{336029}}}}\\
&= 29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{336029}{57731}}}}} = 29+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{47374}{57731}}}}} = \cdots
\end{aligned}$$

Termine em seu caderno a representação em fração contínua, por enquanto vamos determinar os primeiros convergentes, onde encontraremos a aproximação utilizada por Huygens.

	29	2	2	1	5
p	29	$29 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 59 + 29$	$1 \cdot 147 + 59$	$5 \cdot 206 + 147$
q	1	2	$2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 5 + 2$	$5 \cdot 7 + 5$
	$C_1 = 29$	$C_2 = \frac{59}{2}$	$C_3 = \frac{147}{5}$	$C_4 = \frac{206}{7}$	$C_5 = \frac{1177}{40}$

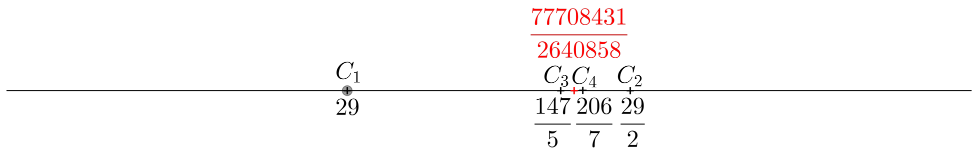
Huygens utilizou o quarto convergente. Embora C_5 seja uma aproximação melhor. No entanto, não seria razoável fazer uma engrenagem com mais de 1000 dentes.

Após terminar a expansão em fração contínua, termine também a tabela dos convergentes, e o erro de aproximação obtido em cada um dos convergentes. (Utilize calculadora).

Cálculo do Erro:

$$\frac{77708431}{2640858} = 29,42544847$$

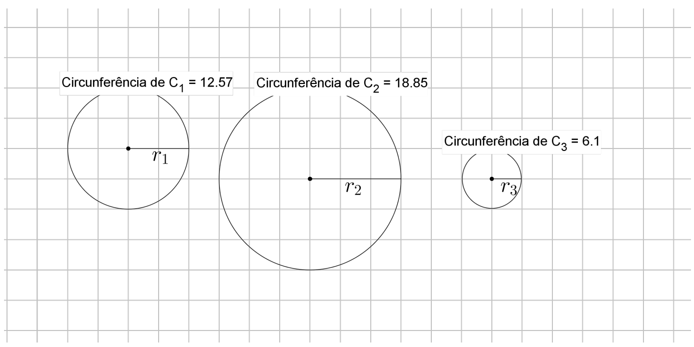
$$\begin{aligned}
\text{Erro do} \quad C_1 &: \quad 29,42544847 - 29 = 0,42544847; \\
\text{Erro do} \quad C_2 &: \quad 29,42544847 - 29,5 = -0,074551528; \\
\text{Erro do} \quad C_3 &: \quad 29,42544847 - 29,4 = 0,02544847; \\
\text{Erro do} \quad C_4 &: \quad 29,42544847 - 29,42857143 = -0,003122956; \\
\text{Erro do} \quad C_5 &: \quad 29,42544847 - 29,425 = 0,00044847.
\end{aligned}$$



Note que o erro para C_4 é menor que $\frac{1}{300}$.

7.1.2 *Razão Constante na Geometria.*

Observe as circunferências a seguir, desenhadas com auxílio do *Geogebra*. Observe pela malha quadriculada a medida do raio de cada uma das circunferências. Como temos a aproximação de seu perímetro, determine a razão entre o perímetro e o diâmetro de cada uma das circunferências. (Lembre-se que o diâmetro equivale ao dobro do raio).



$$\frac{C_1}{2 \cdot r_1} = \frac{12,57}{4} = 3,1425;$$

$$\frac{C_2}{2 \cdot r_2} = \frac{18,85}{6} = 3,141\overline{6};$$

$$\frac{C_1}{3 \cdot r_3} = \frac{6,1}{2} = 3,05.$$

A proximidade dos resultados não é um acaso. Desde a antiguidade, estudos revelaram que a razão entre o comprimentro da circunferência e o seu diâmetro é uma constante, o qual denominamos de π. Além disso, quando o raio é um número racional, seu perímetro será irracional, ou seja, só poderemos aproximá-lo por racionais. Isso explica a diferença nos resultados obtidos acima. Como o perímetro foi aproximado, o valor de π também é uma aproximação.

Os egípicios no papirode Ahmes atribuí a π o valor de $3\frac{1}{6}$, e no papiro de Rhind, temos $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4$. Já na Bíblia (1 Reis 7 : 23 e Crônica $II, 4 : 2$) encontramos que os hebreus utilizava $\pi = 3$ como aproximação.

Arquimedes, 240 a.C., concluiu que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, ou seja, $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Já Ptolomeu, 150 d.C., fez $\pi = \frac{377}{120}$, enquanto o chinês Tsu Ch'ung-chih deu a aproximação racional $\frac{355}{113}$.

Desde o século passado, computadores foram utilizados para calcular as casas decimais de π. Em 1949, o ENIAC, computador eletrônico do *Army Ballistic Research Laboratories de Aberdeen*, Maryland, calculou π com 2037 casas decimais. Em 1961, o IBM 7090 calculou com 100 265 casas decimais, e em 1973, num CDC 7600, realizaram uma aproximação de π com 1 000 000 de casas.

Em 2010, os japonese Shigeru Kando e Alexander Yee determinou 5 trilhões de casas decimais, e em 2013 *The Santa Clara University* com 8 000 000 000 000 000 de casas decimais.

Agora vamos utilizar uma calculadora científica para calcular π e verificar que os primeiros convergentes equivalem à resultados históricos. Veja:

Na calculadora científica tecle π e $=$, obtendo:

$$\pi = 3,141592654...$$

Vamos subtrair a parte inteira, e digitar a tecla inverso, obteremos o próximo coeficiente da fração contínua, e repetimos o processo, tanto quanto desejarmos, obtendo:

$$\begin{aligned}
\pi &= 3 + 0,141592654 = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,141592654}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,062513306}}} \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,996594406}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,003417231}}}}} \\
&= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cdots}}}}.
\end{aligned}$$

Agora complete a tabela dos convergentes e encontre algumas aproximações de π que equivalem à resultados históricos:

	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$	$a_5 =$
p					
q					
	$C_1 =$	$C_2 =$	$C_3 =$	$C_4 =$	$C_5 =$

Diga agora qual convergente equivale à aproximação dada por (pela):

a. Bíblia: $\pi = 3 =$

b. Arquimedes: $\pi = \frac{22}{7} =$

c. Tsu Ch'ung-chih: $\pi = \dfrac{355}{113} =$

Observe que o erro de aproximação para $\pi = \dfrac{355}{113}$ é menor que $\dfrac{1}{3\,000\,000}$.

$$\pi = 3,141592654 - \frac{355}{113} = -0,000\,000\,266,$$

esta aproximação é melhor que $\dfrac{3141592}{1\,000\,000}$, cujo erro é $0,000\,000\,654$.

7.2 8º ANO

No 8º ano, trabalha-se com equações do 1º grau, dando ênfase a resolução da equação do 1º grau, sistemas de equação do 1º grau com duas ingógnitas e resolução de problemas.

Não há na Proposta Curricular do Estado de SP [9] a sugestão de introduzir Equações Diofantinas. Aqui sugerimos apresentar as frações contínuas como método para encontrar uma solução particular para Equação Diofantina e, consequentemente, a solução geral. Dentre os objetivos da atividade a seguir destacamos que o intuito é de apenas introduzir o tema, possibilitando aos alunos verificar que algumas equações do 1º grau com duas incógnitas possuem infinitas soluções inteiras, bem como perceber mais uma aplicação das frações contínuas.

Embora não tenhamos abordado essa possilidade anteriormente nesta pissertação, acreditamos que seja pertinente introduzí-la aqui. Na seção a seguir, apresentaremos algumas demonstrações que comprovam a possibilidade de utilizar frações contínuas na resolução de equações diofantinas lineares, porém, ao levarmos esse tema aos alunos do 8ºano sugerimos que seja revisada a necessidade de todas as demonstrações, que podem dificultar a compreensão dos alunos. O principal intuito é a interpretação de situações-problemas, que envolvam as equações diofantinas lineares, utilizando as frações contínuas como método para obter uma solução particular e, consequentemente, a solução geral.

7.2.1 *Equações Diofantinas Lineares e Frações Contínuas*

A *Equação Diofantina Linear* recebe esse nome em homenagem a Diofanto de Alexandria, que viveu aproximadamente no século III d.C. [10].

Definição 7.1. Uma equação da forma

$$aX + bY = c,$$

sendo a, b e c números inteiros não nulos, é denominada Equação Diofantina Linear.

Definição 7.2. Uma solução particular da *equação diofantina linear* $aX + bY = c$, descrita anteriormente, é um par ordenado (x_0, y_0) de números inteiros tal que $ax_0 + by_0 = c$.

Uma pergunta natural é: Em quais situações as equações diofantinas lineares possuem soluções e, caso tenham, como determiná-las? As duas próximas proposições respondem à esta questão.

Proposição 7.3. *Sejam $a, b, c, \in \mathbb{Z}$ e $d = mdc(a, b)$. A equação $aX + bY = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $d|c$.*

Demonstração. Supomos que a equação $aX + bY = c$ possua solução x_0 e y_0.

Então,

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Como $mdc(a, b) = d$, então

$$d|a \Longrightarrow a = da_1; \qquad \text{e} \qquad d|b \Longrightarrow b = db_1.$$

Logo,

$$da_1x_0 + db_1y_0 = d(a_1x_0 + b_1y_o) = c.$$

Portanto $d|c$.

Como $d|c$, então $c = dc_1$ e $mdc(a, b) = d$, logo $d = ax + by$.

Multiplicando a última equação por c_1, obtemos

$$dc_1 = (ax + by)c_1 \Longrightarrow c = ac_1x + bc_1y \Longrightarrow c = aX + bY,$$

como queríamos mostrar. $\square$

Assim respondemos a primeira parte da questão.

A proposição à seguir mostra como determinar a solução geral à partir da solução particular (x_0, y_0).

Proposição 7.4. *Seja x_0, y_0 uma solução particular da equação $aX + bY = c$, onde $mdc(a, b) = 1$. Então a solução geral $x, y \in \mathbb{Z}$ da equação é*

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at; \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Demonstração. Tomemos uma solução (x, y) de $aX + bY = c$, assim,

$$ax_0 + by_0 = ax + bx = c.$$

Daí,

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y) \tag{7.1}$$

Como a e b são coprimos, então $b|(x - x_0)$. Logo, podemos fazer

$$x - x_0 = bt, \qquad \textit{para algum } t \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo $x - x_0$ na equação (7.1), segue que

$$bt = \frac{b(y - y_0)}{a} \Leftrightarrow y - y_0 = at.$$

Portanto, as soluções são do tipo exibido.

Por outro lado, (x, y) do enunciado, é solução, pois

$$ax + by = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 = c.$$

□

Agora iremos mostrar como utilizarmos frações contínuas para determinarmos a solução particular e consequentemente a solução geral de uma equação diofantina linear.

Tomemos uma equação diofantina linear do tipo $aX + bY = 1$, com a e b inteiros positivos e coprimos. Representamos o número racional $\frac{a}{b}$ como fração contínua

$$\frac{a}{b} = [a_1; a_2, \cdots, a_n].$$

Aplicando a fórmula do determinante aos dois últimos convergentes C_{n-1} e C_n, segue que

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n.$$

Como o último convergente da fração contínua é o próprio número racional $\frac{a}{b}$, substituindo p_n e q_n, obtemos

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^n.$$

Assim, se n é par $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = -p_{n-1}$ satisfazem a Definição 7.2.

Já se n é ímpar, então $x_0 = -q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$ satisfazem a Definição 7.2.

Daí, podemos determinar a solução geral, que é: $\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at; \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Que equivale à

$$\begin{cases} x = q_{n-1} + bt \\ y = -p_{n-1} - at; \qquad t \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

se n é par.

E,

$$\begin{cases} x = -q_{n-1} + bt \\ y = p_{n-1} - at; \qquad t \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

se n é ímpar.

As proposições demonstradas anteriormente, equivalem ao *Teorema de Bézout*.

Exemplo 7.2. Obter a solução particular e geral da equação $17X + 10Y = 1$.

Solução:

1º Escreva a expansão em frações contínuas de $\dfrac{17}{10}$.

$$\begin{aligned}\frac{17}{10} &= 1 + \frac{7}{10} = 1 + \cfrac{1}{1\cfrac{10}{7}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{7}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}.\end{aligned}$$

2º Determinamos os convergentes:

	$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 2$	$a_4 = 3$
p	1	$1 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 2 + 1$	$3 \cdot 5 + 2$
q	1	1	$2 \cdot 1 + 1$	$3 \cdot 3 + 1$
	$C_1 = 1$	$C_2 = 2$	$C_3 = \frac{5}{3}$	$C_4 = \frac{17}{10}$

O penúltimo convergente é $C_3 = \dfrac{5}{3}$ e n é par, então:

$$(x_0, y_0) = (q_{n-1}, -p_{n-1}) = (3, -5)$$

é solução particular, veja:

$$17 \cdot 3 + 10 \cdot (-5) = 51 - 50 = 1.$$

Como,

$$\begin{cases} x = q_{n-1} + bt \\ y = -p_{n-1} - at, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

é solução geral da equação diofantina.

Então,

$$\begin{cases} x = 3 + 10t \\ y = -5 - 17t, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

é solução geral da equação diofantina dada.

Exemplo 7.3. Obter a solução particular e geral da equação $18X + 13Y = 1$.

Solução:

1º Escreva a expansão em frações contínuas de $\frac{18}{13}$.

$$\begin{aligned}
\frac{18}{13} &= 1 + \frac{5}{13} = 1 + \cfrac{1}{1\frac{13}{5}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{5}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}.
\end{aligned}$$

2º Determinamos os convergentes:

	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 1$	$a_4 = 1$	$a_5 = 2$
p	1	$2 \cdot 1 + 1$	$1 \cdot 3 + 1$	$1 \cdot 4 + 3$	$2 \cdot 7 + 4$
q	1	2	$1 \cdot 2 + 1$	$1 \cdot 3 + 2$	$2 \cdot 5 + 3$
	$C_1 = 1$	$C_2 = \frac{3}{2}$	$C_3 = \frac{4}{3}$	$C_4 = \frac{7}{5}$	$C_5 = \frac{18}{13}$

O penúltimo convergente é $C_4 = \frac{7}{5}$ e n é ímpar, então:

$$(x_0, y_0) = (-q_{n-1}, p_{n-1}) = (-5, 7)$$

é solução particular, veja:

$$18 \cdot (-5) + 13 \cdot 7 = -90 + 91 = 1.$$

Como,

$$\begin{cases} x = -q_{n-1} + bt \\ y = p_{n-1} - at, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

é solução geral da equação diofantina.

Então,

$$\begin{cases} x = -5 + 13t \\ y = 7 - 18t, & t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

é solução geral da equação diofantina dada.

Exemplo 7.4. Obter a solução particular e geral da equação $18X + 13Y = 5$.

Solução:

Primeiro determinamos uma solução particular para $18X + 13Y = 1$.

Pelo exemplo anterior, temos que $(x_0, y_0) = (-5, 7)$, logo, a solução particular para $18X + 13Y = 5$, equivale à

$$5 \cdot (x_0, y_0) = 5 \cdot (-5, 7) = (-25, 35).$$

O que é facilmente verificável.

$$18 \cdot (-25) + 13 \cdot 35 == -450 - 455 = -5.$$

E a solução geral é:

$$\begin{cases} x = -25 + 13t \\ y = 35 - 18t, & t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

É importante que o professor oriente os alunos a determinarem a solução particular e a solução geral das equações diofantinas lineares para a ou b inteiros negativos, com $c = 1$ e $c \neq 1$, exercitanto o algoritmo e aplicando em situações problemas.

Apresentamos um último exemplo, no qual os alunos além de encontrarem uma solução particular e uma solução geral da equação diofantina linear, devem determinar uma solução que satisfaça a situação apresentada:

Exemplo 7.5. Com 100 reais, quais são as quantias que podem ser gasta para comprar carrinhos que custam 7 reais e bonecas que custam 11 reais?

Solução:

Seja a equação diofantina linear

$$11X + 7Y = 100.$$

Escrevemos a expansão em frações contínuas de $\frac{11}{7}$, que equivale à:

$$\frac{11}{7} = [1; 1, 1, 3].$$

Calculamos os convergentes, em especial $C_3 = \frac{3}{2}$, como n é par, então,

$$(x_0, y_0) = (q_{n-1}, -p_{n-1}) = (2, -3).$$

Essa solução particular satisfaz $11X + 7Y = 1$, logo,

$$100 \cdot (2, -3) = (200, -300),$$

equivale a uma solução particular da equação diofantina linear dada.

Então,

$$\begin{cases} x = 200 + 7t \\ y = -300 - 11t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

é solução geral da equação $11X + 7Y = 100$.

Como o problema só adimite solução inteira positiva, devemos determinar t que satisfaça essa condição. Como

$$-300 \div 11 = -27,\overline{27}.$$

Então, $t = -28$ satisfaz o problema. Daí,

$$\begin{cases} x &= 200 + 7t &= 200 + 7 \cdot (-28) &= 200 - 196 &= 4 \\ y &= -300 - 11t &= -300 - 11 \cdot (-28) &= -300 + 308 &= 8. \end{cases}$$

Portanto, pode-se comprar $11X$ bonecas, logo a quantia gasta com bonecas é de $11 \cdot 4 = 44$ reais. E para comprar $7Y$ carros, a quantia gasta é de $7 \cdot 8 = 56$ reais.

7.3 9º ANO

Na proposta Curricular do Estado de SP [9], neste ano intensifica-se o trabalho com o Conjunto dos Números Reais, dando ênfase aos números irracionais e a potenciação e radiciação de números reais. Em álgebra, apresenta-se a equação do 2º grau, dando prioridade a determinar suas raízes e a soluções de problemas.

Neste ano, espera-se que os alunos compreendam melhor os números racionais e irracionais, porém, muitas vezes o trabalho com os números irracionais se dá com um amontoado de regras, nem sempre contribuindo para a construção do seu real significado. Com o intuíto de contextualizar os números irracionais dentro da própria História da Matemática, sugerimos uma atividade onde os alunos explorem grandezas comensuráveis e incomensuráveis, com o auxílio das frações contínuas e a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido.

Já para o trabalho de radiciação em reais, a sugestão é de uma atividade para aproximar números irracionais por racionais utilizando frações contínuas, levando os alunos a perceberem que números racionais têm representação em frações contínuas finitas, enquanto os números irracionais têm expansão infinita, sendo periódica quando é raíz algébrica de um polinômio de grau 2.

7.3.1 *Grandezas Comensuráveis e Incomensuráveis*

Euclides viveu em Alexandria em torno de 300a.C. Em sua obra *Os Elementos*, dividida em treze livros, abriu o Livro X com a seguinte definição:

> Dizem-se grandezas comensuráveis as que se medem pela mesma medida, e incomensuráveis aquelas das quais não é possível nada tornar-se medida comum.

E em seu livro V, expôs de forma magistral a teoria das proporções de Eudoxo que é aplicável a grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

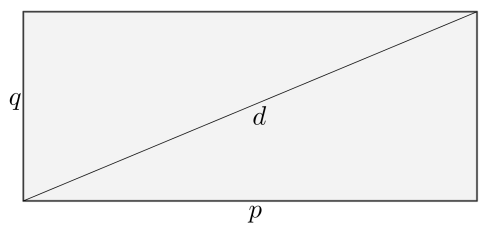
Atribui-se aos Pitagóricos a descoberta das grandezas incomensuráveis. Pitágoras viveu no século VI a.C., era profeta e místico, e fundou uma ordem, que tinha como lema "Os números governam o mundo", sendo que, para eles números eram apenas os inteiros, e as frações eram as razões desses números.

Há a ideia de que a descoberta das grandezas incomensuráveis tenha causado uma grande crise no pensamento pitagórico, não se sabe ao certo se a primeira grandeza incomensurável tenha sido obtida na tentativa de encontrar a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado, ou se entre o lado e a diagonal de um pentágono regular. Alguns historiadores atribuem esta descoberta a Hipasus de Metaponto, chegando a dizer que o mesmo teria sido expulso por ter criado tal grandeza não representável por números.

Embora não haja evidências concretas desta suposta crise, são as grandezas incomensuráveis que servem de origem para o conjunto dos números irracionais e, só em 1858, Cantor e Dedekind descreveram uma teoria que provava a continuidade da reta real, estabelecendo melhores contornos aos números irracionais.

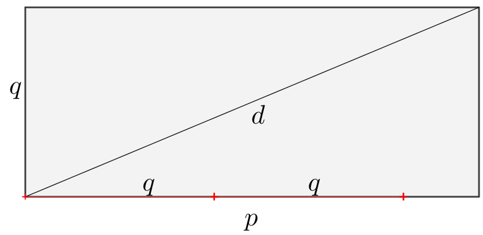
Agora vamos apresentar duas situações na busca de encontrar uma medida comum para grandezas distintas, veja:

Situação 1. Vamos utilizar a teoria da proporção de Eudoxo, para determinarmos uma medida comum entre $\frac{p}{q}$, $\frac{d}{q}$ e $\frac{d}{p}$, onde $q < p$.



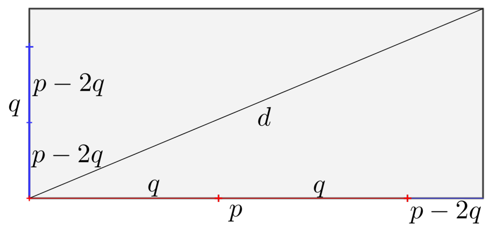
i) Com auxílio de um compasso vamos ver quantas vezes a medida q cabe em p; ou seja,

$$\frac{p}{q} = 2 + \frac{p-2q}{q} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{p-2q}};$$



ii) Agora vejamos quantas vezes a medida $p - 2q$ cabe em q; ou seja,

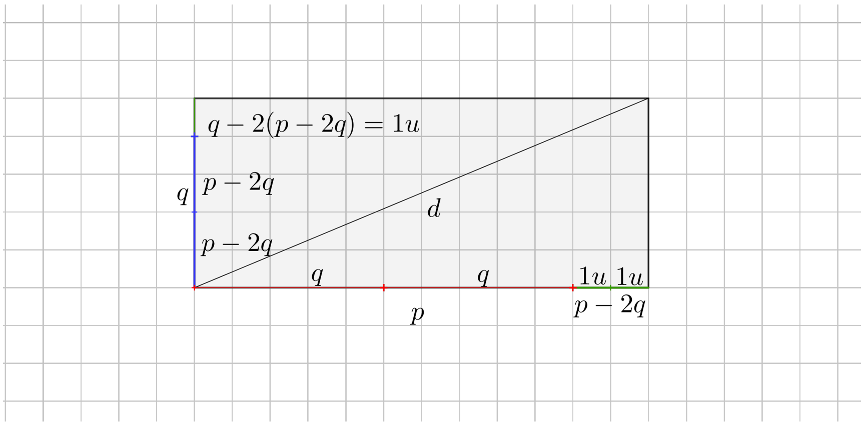
$$\frac{p}{q} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{q-2(p-2q)}{p-2q}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{p-2q}{q-2(p-2q)}}};$$



iii) Vamos ver quantas vezes a medida $q - 2(p - 2q)$ cabe em $p - 2q$; ou seja,

$$\frac{p}{q} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}.$$

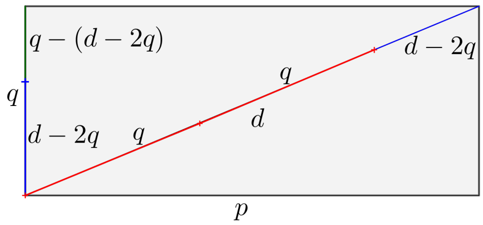
Fazendo a malha quadriculada com $1u$, podemos observar que $p = 12$ e $q = 5$, e obtemos os mesmos valores pelos convergentes da fração contínua que foi escrita pela método de eudoxo, veja:



	$a_1=2$	$a_2=2$	$a_3=2$
p	2	$2\cdot 2+1$	$2\cdot 5+2$
q	1	2	$2\cdot 2+1$
	$C_1=2$	$C_2=\frac{5}{2}$	$C_3=\frac{12}{5}$

Agora faremos $\dfrac{d}{p}$.

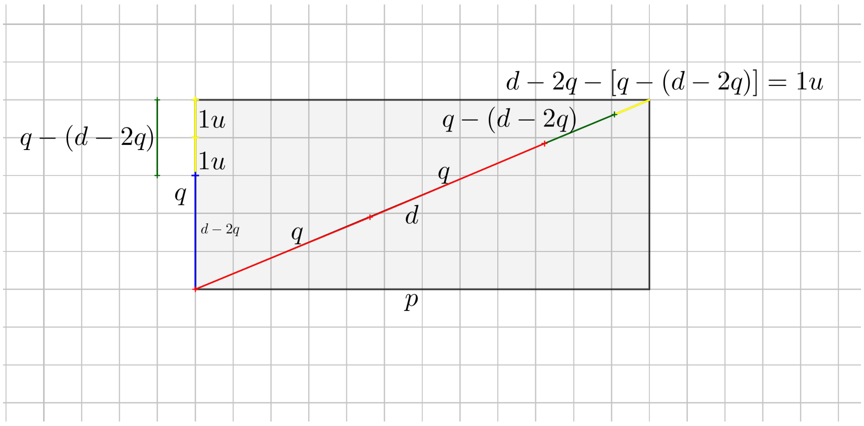
$i)$ Quantas vezes q cabe em d? quantas vezes $d-2q$ cabe em q?



ou seja,

$$\frac{d}{p}=2+\frac{d-2q}{q}=2+\frac{1}{\dfrac{q}{d-2q}}=2+\frac{1}{1+\dfrac{q-(d-2q)}{d-2q}}.$$

$ii)$ Quantas vezes $q-(d-2q)$ cabe em $d-2q$? E quantas vezes $1u$ cabe em $q-(d-2q)$?



ou seja,

$$\frac{d}{p} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{q-(d-2q)}{d-2q-[q-(d-2q)]}}}} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}.$$

Observe que pela malha quadriculada de $1u$ que:

$$q = 5u \qquad \text{e} \qquad d = 2q + 1[q-(d-2q)] + 1u,$$

mas,

$$q-(d-2q) = 2u,$$

então,

$$d = 2 \cdot 5u + 1 \cdot 2u + 1u = 13u.$$

Que também é verificável pela tabela dos convergentes,

	$a_1 = 2$	$a_2 = 1$	$a_3 = 1$	$a_4 = 2$
p	2	$1 \cdot 2 + 1$	$1 \cdot 3 + 2$	$2 \cdot 5 + 3$
q	1	1	$1 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 2 + 1$
	$C_1 = 2$	$C_2 = 3$	$C_3 = \frac{5}{2}$	$C_4 = \frac{13}{5}$

Para a razão $\dfrac{d}{p}$, basta verificarmos que:

$$q-(d-2q) = p - 2q = 2u.$$

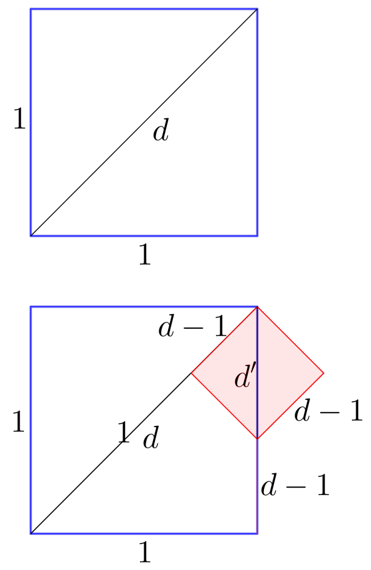
Então, $p = 12u$ e $d = 13u = p + 1u$,
nessa última igualdade dividimos tudo por p, então obtemos:

$$\frac{d}{p} = 1 + \frac{1}{12},$$

que é a expansão em frações contínuas de

$$\frac{d}{p} = \frac{13}{12}.$$

Situação 2. Vamos utilizar a teoria da proporção de Eudoxo, para determinarmos uma medida comum entre o lado 1 e a diagonal d de um quadrado.



Observe que,

$$d = 1 + d - 1 \Leftrightarrow \frac{d}{1} = 1 + \frac{d-1}{1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{d-1}}.$$

Agora quantos $d-1$ cabem em 1? Sabemos que:

$$1 = d' + d - 1,$$

fazendo, $d' = d'' + d - 1$, e substituindo d' teremos:

$$1 = d'' + 2(d-1),$$

assim,

$$\frac{1}{d-1} = 2 + \frac{d''}{d-1} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{d-1}{d''}}.$$

Proposição 7.5. *Note que,* $\dfrac{d-1}{d''} = \dfrac{1}{d-1}$.

Demonstração. Temos:
$$\frac{1}{d} = \frac{d-1}{d'},$$
pois são lado e diagonal de quadrados, (respectivamente, numerador e denominador de cada fração). Portanto, triângulos semelhantes pela caso AAA.

Da igualdade anterior, segue que:
$$\frac{1}{d-1} = \frac{d}{d'}.$$

Substituímos d' no segundo membro da igualdade, e obtemos:
$$\frac{1}{d-1} = \frac{d}{d'} = \frac{d}{d''+d-1} = \frac{\dfrac{d}{d-1}}{\dfrac{d''}{d-1}+1} = \frac{d}{d''}+1 = \frac{d+d''}{d''},$$
substituindo d'' no numerador, concluímos que:
$$\frac{1}{d-1} = \frac{d+d'-d+1}{d''} = \frac{d'+1}{d},$$
como queríamos mostrar.

□

Assim, a situação ocorre infinitamente, logo,
$$d = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}.$$

Como o processo é infinito, não temos o último convergente, logo, a diagonal de um quadrado não pode ser representada pela razão de dois números naturais.

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos determinar a diagonal do quadrado, veja:
$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2}.$$

Assim como os Pitagóricos, encontramos uma grandeza incomensurável, tentando encontrar a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado unitário.

Com a utilização da calculadora você determina uma aproximação decimal para $\sqrt{2}$, que é $1,141421356$, a fração contínua obtida acima determina ótimas aproximações para $\sqrt{2}$, veja:

	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 2$	$a_4 = 2$	$\cdots$
p	1	$2 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 3 + 1$	$2 \cdot 7 + 3$	$\cdots$
q	1	2	$2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 5 + 2$	$\cdots$
	$C_1 = 1$	$C_2 = \frac{3}{2}$	$C_3 = \frac{7}{5}$	$C_4 = \frac{17}{12}$	$\cdots$

Daí, o erro de aproximação do C_3 é:

$$\sqrt{2} - \frac{17}{12} = -0,002453104,$$

ou seja, menor que $\dfrac{1}{300}$.

Agora compare as duas situações que acabamos de estudar. Na Situação 1, conseguimos determinar as razões na forma racional, ou seja, as grandezas são comensuráveis e a expansão em fração contínua foi finita. Já na Situação 2, a razão não pode ser expressa na forma racional, ou seja, são grandezas incomensuráveis, cuja expansão em fração contínua é infinita, logo $\sqrt{2}$ é irracional.

Agora é com você. Tome dois retângulos o primeiro de lados 16 e 7, o segundo de lados $\sqrt{3}$ e 1, utilize as frações contínuas e diga em qual dos casos relacionamos grandezas incomensuráveis.

7.3.2 *Números Irracionais com Expansão em Fração Contínua Periódica*

Apresentar aos alunos o número Φ, que é raíz positiva da equação de 2º grau $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Logo, Φ é um número algébrico de grau 2, cuja expansão em frações contínuas é periódica.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}.$$

Como visto na seção 5.3.

Após apresentar outro número irracional que também é algébrico de grau 2, o $\sqrt{2}$.

Facilmente percebemos que $\sqrt{2}$ é raíz da seguinte equação:

$$x^2 - 2 = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} x^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{x+1} \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x+1}, \end{aligned}$$

substituindo x no 2º membro da igualdade, obtemos:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x+1} + 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x+1}}.$$

Como podemos substituir x infinitamente no 2º membro e como $\sqrt{2}$ é solução desta equação por construção, temos que:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}.$$

Portanto, a expansão em fração contínua de $\sqrt{2}$ é periódica.

Agora é com você! Verifique o que ocorre com $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

7.4 1^{o} ANO DO ENSINO MÉDIO

Pela Proposta Curricular do Estado de SP [9], neste ano, verifica-se o que os alunos já compreenderam nos anos anteriores sobre os conjuntos numéricos, sendo assim, todas as atividades propostas anteriormente são possibilidades de trabalho para retomada dos conjunto dos números reais, dando maior ênfase aos números racionais e irracionais.

Após a consolidação deste tema, os alunos têm uma breve revisão sobre sequências, para então introduzir o conceito de Progressão Aritmética e Geométrica. Muitas vezes, a retomada dos conjuntos numéricos é deixada de lado, dando maior ênfase ao trabalho com as progressões.

Sem diminuir a importância deste último tema, sugerimos a retomada dos conjuntos numéricos, dando ênfase aos números irracionais, que podem ser bem aproximados por racionais, pelos convergentes de suas expansões em frações contínuas, introduzindo a noção de irracionais algébricos de grau 2 pela representação em frações contínuas infinitas periódicas.

7.4.1 *Aproximações Racionais de Números Irracionais*

Para a atividade de hoje, vamos utilizar uma calculadora científica e relembrar alguns números irracionais que conhecemos nos anos anteriores.

Qual é a representação decimal para π, Φ, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e outros números irracionais que conhece?

Bem, quem pensou que π é 3,14 ou algo parecido, está levemente enganado.

Você já se perguntou qual a diferença dos números racionais e irracionais?

Vamos relembrar!

Os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, e os números irracionais são aqueles que não podem ser escritos desta forma, ou seja, não são racionais.

Agora nós vamos dividir os números irracionais em dois grupos, os algébricos e os transcedentes. São números algébricos aqueles que são raízes de um polinômio algébrico e transcendentes aqueles que não são raízes de polinômios algébricos.

Vamos agora descobrir uma maneira prática de determinarmos frações tão próximas desses números irracionais, quanto quisermos.

Para isso, pegue sua calculadora, lápis e papel!

Vamos iniciar relembrando que a expansão em fração contínua de um número α irracional é:

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}},$$

onde $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_n \in \mathbb{N}$ para $n \geqslant 2$.

Agora vamos escrever a representação de $\sqrt{2}$ em frações contínuas, façamos juntos:

Na calculadora, digite $\sqrt{2} =$, obtendo, 1,414213562.

A parte inteira desse número é a_1, ou seja, $a_1 = 1$. Subtraímos a parte inteira desse número e digitamos a tecla inverso (x^{-1}), obtendo 2,414213562.

Vamos escrever na fração contínua o que fizemos até agora:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1{,}414213562 = 1 + 1{,}414213562 - 1 = 1 + 0{,}414213562 \\ &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}414213562}} = 1 + \frac{1}{2{,}414213562}.\end{aligned}$$

Agora vamos repetir o processo!

Subtraímos a parte inteira que é 2, e digitamos a tecla inverso, o que ocorreu?

Isso mesmo! Obtivemos o mesmo resultado, você vai cansar os dedos de tanto digitar e o resultado será sempre o mesmo! Então:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + 0{,}414213562} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2{,}414213562}}.$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}.$$

Daí, podemos escrever a tabela e determinar seus primeiros convergentes, veja:

	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 2$	$a_4 = 2$	$a_5 = 2$
p	1	$2 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 3 + 1$	$2 \cdot 7 + 3$	$2 \cdot 17 + 7$
q	1	2	$2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 5 + 2$	$2 \cdot 12 + 5$
	$C_1 = 1$	$C_2 = \frac{3}{2}$	$C_3 = \frac{7}{5}$	$C_4 = \frac{17}{12}$	$C_5 = \frac{41}{29}$

Cujo erro de aproximação para os convergentes são:

. $\sqrt{2} - 1 = 0,414213562;$

. $\sqrt{2} - \dfrac{3}{2} = \sqrt{2} - 1,5 = -10085786437;$

. $\sqrt{2} - \dfrac{7}{5} = \sqrt{2} - 1,4 = 0,014213562;$

. $\sqrt{2} - \dfrac{17}{12} = \sqrt{2} - 1,41\overline{6} = -0,002453104;$

. $\sqrt{2} - \dfrac{41}{29} = \sqrt{2} - 1,413793103 = 0,000420458.$

Observe que quanto maior o índice do convergente, menor é o erro, e podemos torná-lo tão pequeno quanto se queira, bastanto para isso, tomar n adequado.

Para o C_5 o erro é menor que $\dfrac{1}{2000}$.

Agora é com você! Faça o mesmo para π, Φ e $\sqrt{5}$. Observe que o único que não tem como expansão em fração contínua infinita periódica é o π. Dos números dados, ele é o único transcendente, todos os outros são algébricos de grau 2.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como motivação ampliar a compreensão do conjunto dos numeros reais, em especial os números racionais e irracionais.

As frações contínuas, principal tema desta dissertação, é apresentada como uma importante ferramenta nesta tarefa. Houve uma grande preocupação em apresentar uma base sólida para introduzir este assundo, apresentando e provando os teoremas, proposições e corolários. Apresentamos características das frações contínuas finitas e infinitas, associadas aos números racionais e irracionais, respectivamente, dando ênfase aos convergentes, que fornecem as melhores aproximações racionais à um número real α qualquer, com erro tão pequeno, quanto se queira.

A associação dos temas ao período histórico de seu desenvolvimento não é por acaso, acreditamos que a contextualização interna dentro da própria história da matemática possibilita uma aprendizagem significativa e reflexiva. Outra característica importante deve-se à utilização da interpretação geométrica da maioria dos conceitos apresentados, sendo essa, uma importante ferramenta na aula de cada professor, pois em atividades como essas os alunos tornam-se artifícies de seu conhecimento.

Com a preocupação de propor atividades possíveis dentro do currículo que é utilizado na Educação Básica Nacional, apresentamos uma análise de como é proposto os objetivos e, consequentemente, os conteúdos associados aos números racionais e irracionais. Buscamos relacionar a Base Nacional Comum Curricular ao Currículo do Estado de São Paulo e aos livros didáticos, evidenciando possilidades de ampliar a compreensão dos assuntos, dentro dos objetivos já existentes com a utilização das frações contínuas em diversos temas. Embora tenha dado grande importância aos aspectos da matemática, o presente tema pode ser associado à outras áreas do conhecimento.

Por fim, as sugestões de atividades não limitam-se à Teoria dos Números, embora seja esse um norte da pesquisa, o leitor facilmente percebe que estas caminham pela álgebra, geometria e História da matemática.

A divisão das atividades por ano é apenas para facilitar a leitura e a exposição dos objetivos, podendo ser utilizadas e adaptadas para qualquer ano, de acordo com os objetivos especifícos e gerais de cada turma.

As atividades foram aplicadas em uma turma do 1º ano noturno do Ensino Médio público Estadual de São Paulo. Utilizei 10 aulas de 45 minutos, para apresentar aspectos históricos, as relações algébricas e geométricas presentes na aproximação racional de números racionais e irracionais por meio dos convergentes das frações contínuas.

Alternado momentos de aula expositiva e de atividades nas quais os alunos aplicavam os conhecimentos geométricos e algébricos adquiridos, percebeu-se grande empenho da turma nas atividades, e a relação álgebra/geometria facilitou a compreensão por parte dos alunos, que compreenderam a importância da generalização algébrica para aplicação dos conhecimentos em situações diversas.

Encerramos o trabalho com uma atividade avaliativa. Os resultados da turma foram muito satisfatórios, no Apêndice A.1 apresenamos esta atividade. Ressaltamos que houve a preocupação em não utilizar elementos que não são facilmente encontrados nas escolas. Utilizamos lousa, giz, caderno, lápis, borracha, lápis de cor, régua e calculadora, embora reconheçamos a importância das tecnologias e de outros materiais, mostramos que o mínimo oferecido pelas escolas já é suficiente para propiciarmos uma aprendizagem significativa aos alunos.

Acreditamos que o presente estudo possa contribuir para formação inicial e continuada de professores, possibilitando que os mesmos utilizem esse tema em suas aulas. O que defendemos como uma importante ferramenta para o ensino dos assuntos que sugerimos, bem como outros em que puderem ser utilizados. Sugerimos ainda, aos que querem se aprofundar ao tema, que consultem a bibliografia indicada.

APÊNDICE A

A.1 ATIVIDADE AVALIATIVA

Exercícios aplicados a 40 alunos do 1º ano do Ensino Médio noturno do Estado de São Paulo, no município de Suzano.

1) Dada a fração $\frac{14}{5}$, determine:

a) Sua expansão em frações continuas pelo método geométrico.

b) Seus convergentes.

c) O erro para C_1 e C_2.

2) Dada a fração $\frac{309}{17}$, determine:

a) Sua expansão em frações continuas pelo método das divisões sucessivas.

b) Seus convergentes.

c) O erro para C_1, C_2 e C_3.

3) Como $\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}$, determine:

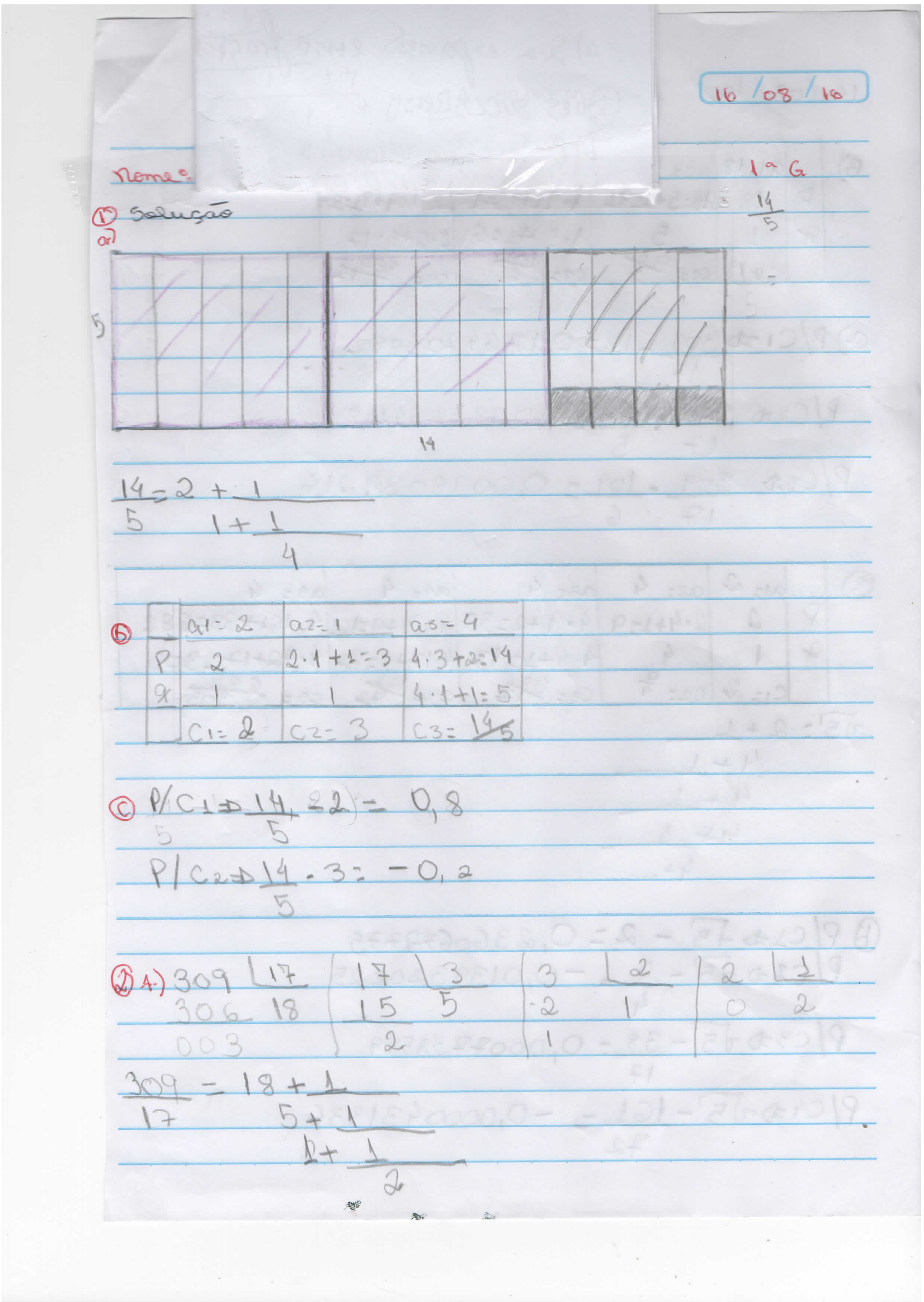
a) Seus cinco primeiros convergentes.

b) O erro para cada um destes convergentes.

4) Com suas palavras explique:

a) Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$):

b) Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{Q}^C$):



16/08/18

Nome:

1ª G

$\frac{14}{5}$

① Solução

a)

5

14

$$\frac{14}{5} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}$$

b)

	$a_1 = 2$	$a_2 = 1$	$a_3 = 4$
p	2	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$4 \cdot 3 + 2 = 14$
q	1	1	$4 \cdot 1 + 1 = 5$
	$C_1 = 2$	$C_2 = 3$	$C_3 = \frac{14}{5}$

c) P/C_1 ⇒ $\frac{14}{5} - 2 = 0,8$

P/C_2 ⇒ $\frac{14}{5} - 3 = -0,2$

② a) 309 | 17 — 306, 18, 003; 17 | 3 — 15, 5, 2; 3 | 2 — 2, 1, 1; 2 | 1 — 0, 2

$$\frac{309}{17} = 18 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

16/08/16

B)

	$a_1=18$	$a_2=5$	$a_3=1$	$a_4=2$
P	18	$18\cdot5+1=91$	$1\cdot91+18=109$	$2\cdot109+91=309$
q	1	5	$1\cdot5+1=6$	$2\cdot6+5=17$
	$c_1=18$	$c_2=\frac{91}{5}$	$c_3=\frac{109}{6}$	$c_4=\frac{309}{17}$

C) $P/C_1 \Rightarrow \frac{309}{17} - 18 = 0{,}1764705882$

$P/C_2 \Rightarrow \frac{309}{17} - \frac{91}{5} = 0{,}0235294118$

$P/C_3 \Rightarrow \frac{309}{17} - \frac{109}{6} = 0{,}0098039216$

3)

	$a_1=2$	$a_2=4$	$a_3=4$	$a_4=4$	$a_5=4$
P	2	$2\cdot4+1=9$	$4\cdot9+2=38$	$4\cdot38+9=161$	$4\cdot161+38=682$
q	1	4	$4\cdot4+1=17$	$4\cdot17+4=72$	$4\cdot72+17=305$
	$c_1=2$	$c_2=\frac{9}{4}$	$c_3=\frac{38}{17}$	$c_4=\frac{161}{72}$	$c_5=\frac{682}{305}$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}$$

B) $P/C_1 \Rightarrow \sqrt{5} - 2 = 0{,}2360679775$

$P/C_2 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{9}{4} = -0{,}0139320225$

$P/C_3 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{38}{17} = 0{,}0007738599$

$P/C_4 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{161}{72} = -0{,}0000431336$

$P/C5 = \sqrt{5} - \frac{682}{305} = 0,0000024037$

(1) A.) conjunto dos numeros racionais é aquele que pode ser representada pela fração contínua e é finita

B) conjunto dos numeros irracionais pode ser representada pela fração contínua e é infinita, ele não pode ser representado como fração nem decimas, apenas aproximado

A.2 FRAÇÕES CONTÍNUAS NO CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Apresento a sugestão colocado no Caderno do Professor [13] volume 1-9ºano, páginas 32 à 38.

Considerações sobre a avaliação

Uma vez que o professor se decida por trabalhar com as frações contínuas no seu curso sobre números reais, recomendamos que aproveite também a oportunidade para explorar o uso da calculadora em sala de aula. Utilizar a calculadora para calcular a representação decimal de números racionais e para encontrar aproximações de raízes pode ser uma interessante porta de entrada para a expansão do conhecimento numérico de um aluno do 9º ano.

Deve-se observar que nos anos anteriores já haviam aparecido representantes numéricos de todos os conjuntos; porém, entendemos que o 9º ano seja o ambiente para organizar as informações numéricas, bem como conceder novos contornos a discussão feita sem grande aprofundamento sobre números racionais e irracionais no 8º ano.

As avaliações sobre o tema tratado nesta Situação de Aprendizagem podem ser feitas por meio de listas de exercícios em que se peça para o aluno determinar frações geratrizes.

Identificado um interesse sobre o assunto por parte dos alunos, outra possibilidade de avaliação pode ser um trabalho de pesquisa em que os alunos possam se aprofundar no assunto estudado.

Frações contínuas.

Professor, caso considere adequado trabalhar as frações contínuas com seus alunos, sugerimos a abordagem e atividades apresentadas a seguir.

A fração $\frac{4}{5}$ situa-se entre os inteiros 0 e 1. Dessa forma, podemos escrever $\frac{4}{5}$ como $0+\frac{1}{x}$, sendo que $x > 1$. Se $\frac{4}{5} = 0+\frac{1}{x}$, então $x = \frac{5}{4}$, o que nos permite escrever, portanto,

$$\frac{4}{5} = 0+\frac{1}{\frac{5}{4}}. \tag{A.1}$$

Pode-se repetir o mesmo raciocinio para a fração $\frac{5}{4}$. Sabemos que $\frac{5}{4}$ é um número entre 1 e 2 e que, portanto, pode ser escrito como $1+\frac{1}{y}$, com $y > 1$. Se $\frac{5}{4} = 1+\frac{1}{y}$, então $y = 4$. Segue, portanto que

$$\frac{5}{4} = 1+\frac{1}{4}. \tag{A.2}$$

Substituindo (A.2) em (A.1) teremos

$$\frac{4}{5} = 0+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}. \tag{A.3}$$

Repetindo mais uma vez o mesmo processo para a fração $\frac{1}{4}$, teremos: $\frac{1}{\frac{4}{1}} = 0+\frac{1}{w}$, com $w > 1$, o que implica dizer que $w = 4$, portanto, $\frac{1}{4} = 0+\frac{1}{4}$. Note que esta última etapa dos cálculos não implicou uma representação diferente para a fração $\frac{1}{4}$, o que, em última análise, quer dizer que o processo está encerrado. Na prática isso sempre ocorrerá quando $x, y, w, \cdots$ for um número inteiro.

No caso do exemplo analisado, $x = \frac{5}{4}$, o que nos fez calcular y, que por sua vez é igual a $4 \in \mathbb{Z}$, encerrando assim o processo em y. Decorre do processo realizado a seguinte igualdade (A.3), que chamamos "desevolvimento do $\frac{4}{5}$ em fração contínua".

Pode-se demonstrar que todo número racional pode ser escrito como fração contínua por meio de um desenvolvimento finito, como ocorreu no exemplo anterior. Observe que o racional $\frac{7}{6}$, cuja representação decimal era explicitamente uma dízima periódica, também pode ser escrito como fração contínua por meio de um número finito de passos. O raciocínio será o mesmo utilizado para $\frac{4}{5}$:

(i) $\frac{7}{6}$ está entre 1 e 2, portanto, $\frac{7}{6} = 1+\frac{1}{x}$, com $x > 1$;

(ii) De $\frac{7}{6} = 1+\frac{1}{x}$ decorre que $x = 6$, ou seja, $\frac{7}{6} = 1+\frac{1}{6}$. Como $x = 6 \in \mathbb{Z}$, o processo está encerrado e esta é a fração contínua.

Atividade

1) Com relação ao número racional $\frac{16}{7}$, pergunta-se:

a) Utilizando o algoritmo da divisão para $16 \div 7$, encontraremos um decimal finito ou uma dízima periódica?
b) Escreva $\frac{16}{7}$ como fração contínua;
c) Escreva $\frac{30}{13}$ como fração contínua;

Em resumo, alguns dos objetivos específicos que o professor poderá levar em consideração se decidir por abordar frações contínuas para representar números racionais são:

- as frações contínuas descrevem um processo finito (por meio de frações) para a representação de todo e qualquer número racional. Sem as frações contínuas, e restritas apenas à representação decimal dos números racionais, uma dízima periódica só poderá ser representada como a soma infinita de frações;
- as frações contínuas são trabalhadas em um contexto em que se faz necessária a retomada de operações e representação de frações, o que é positivo dentro da ótica de currículo em espiral;
- o estudo das frações contínuas abre uma interessante perspectiva de interpretação e análise dos números irracionais, como veremos a seguir.

Frações contínuas e os números irracionais

Uma forma muito utilizada de se referir aos números irracionais é a de que são os números cuja representação decimal é infinita e não periódica depois da vírgula. Nesse caso, ao observarmos no visor de uma calculadora de oito dígitos o resultado $1,4142135$ de $\sqrt{2}$, sabemos, de antemão, que o número indicado é apenas uma aproximação de $\sqrt{2}$, dado que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Se fosse possível ter uma calculadora que calculasse $\sqrt{2}$ com infinitas casas, o fato de se tratar de um número irracional nos dá garantias de que não haverá formação de período em sua parte decimal. Se nos referirmos aos números irracionais dessa maneira, após a discussão da representação dos racionais por frações contínuas, surge quase naturalmente a pergunta: Existe um processo para a representação dos irracionais com frações contínuas? Veremos a seguir que, além de existir tal processo, surpreendentemente ele nos conduzirá a um tipo de representação periódica e, portanto, previsível.

A seguir, aplicaremos o mesmo processo que foi utilizado para a obtenção de frações contínuas de números racionais para o caso do número irracional $\sqrt{2}$.

I. $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2, portanto, $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$, com $x > 1$;

II. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$ decorre que:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Temos, portanto, $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$;

III. $1 + \sqrt{2}$ é um número entre 2 e 3, portanto, $1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{y}$, $y > 1$;

IV. De $1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{y}$ decorre que $y = 1 + \sqrt{2}$
e, portanto, temos:

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}};$$

V. Substituindo no resultado do passo II. o resultado obtido no passo anterior teremos:

$$1 + \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}};$$

VI. Note que $x = y = 1 + \sqrt{2}$. Se fôssemos continuar o processo, partiríamos de y e encontraríamos $w = 1 + \sqrt{2}$. Na sequência, partiríamos de $w = 1 + \sqrt{2}$ e encontraríamos $z = 1 + \sqrt{2}$, e assim sucessivamente em um processo infinito. Portanto, a fração contínua que representa $\sqrt{2}$ será:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}.$$

O processo descrito nos fornece uma sucessão de aproximações racionais para $\sqrt{2}$, bastando para isso parar em algum ponto da sequência infinita indicada na fração contínua.

- **1ª aproximação:** $\sqrt{2} \approx 1$;
- **2ª aproximação:** $\sqrt{2} \approx 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$;
- **3ª aproximação:** $\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \dfrac{7}{5} = 1,4$;
- **4ª aproximação:** $\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \dfrac{17}{12} \approx 1,4167$;
- **5ª aproximação:** $\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \dfrac{41}{29} \approx 1,4138$;

Pode-se demonstrar que as sucessivas aproximações racionais obtidas de $\sqrt{2}$ por meio da sua fração contínua formam uma sequência convergente em que seus termos são, alternadamente, aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{2}$. A tabela a seguir resume esse conjunto de informações:

Aproximação de $\sqrt{2}$	Erro	Tipo de aproximação
1	$0,4142$	Falta
$\frac{3}{2} = 1,5$	$-0,0858$	Excesso
$\frac{7}{5} = 1,4$	$0,0142$	Falta
$\frac{17}{12} \approx 1,4167$	$-0,0024$	Excesso
$\frac{41}{29} \approx 1,4138$	$0,0004$	Falta

O processo de determinação das frações contínuas dos números racionais e do número irracional $\sqrt{2}$ sinaliza para as seguintes evidências, que podem ser matematicamente demonstradas:

1. Todo número racional pode ser representado por uma fração contínua por meio de um número finito de passos.
2. Todo número irracional do tipo $\sqrt{n}$ (com n natural não quadrado perfeito) pode ser representado, por um processo finito de passos, na forma de uma fração contínua, cuja configuração é periódica.

3. Todo número real pode ser representado por uma fração contínua.

O segundo resultado enunciado é curioso porque, contrariamente às outras aproximações de $\sqrt{2}$, que envolvem infinitas frações não periódicas, ao ser expressa por uma fração contínua a representação da segunda aproximação será periódica.

A título de curiosidade, apresentamos a seguir a representação com fração contínua de dois importantes números irracionais, ou seja, a razão áurea $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e π:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

e

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}$$

Atividade

Determine a fração contínua que representa o número $\sqrt{24}$.

Finalizada esta breve apresentação sobre o assunto, queremos ressaltar, mais uma vez, que o tratamento dado na ampliação desta Situação de Aprendizagem aos números racionais e irracionais por meio de frações contínuas consiste em uma alternativa à abordagem tradicional conduzida por boa parte dos programas curriculares e livros didáticos. Deve ficar claro que a decisão sobre incorporar ou não essa abordagem (ou parte dela) caberá ao professor.

B

APÊNDICE B

B.1 A EXPANSÃO DO NÚMERO DE EULER e

À seguir transcrevo a demonstração dada por Díaz [4] nas páginas de 56 à 63.

Vejamos que a expansão em frações contínuas do número e é dada por

$$2+[1,2,1,1,4,1,1,8,1,1,16,1,1,\cdots].$$

Para isso consideremos o número Θ cuja expansão em frações contínuas é

$$\Theta = 2+[a_1,a_2,a_3,\cdots,]$$

onde $\begin{cases} a_1 = 1, & \\ a_{3k-1} = 2^k, & \text{para } k \geqslant 1. \\ a_{3k} = a_{3k+1} = 1, & \end{cases}$

Teorema B.1. $\Theta = 2+[1,2,1,1,4,1,1,8,1,1,16,1,1,\cdots] = e$

Para facilitar a leitura, explicaremos as principais etapas da prova do teorema deixando para o final deste Apêndice as partes técnicas.

Demonstração. Para provar que e é igual ao número Θ usaremos a representação do e como série de potências

$$e^x = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Fixado $m \in \mathbb{Z}$:

$$e^{\frac{1}{m}} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{m}\right)^k.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} + e^{-\frac{1}{m}}\right) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k},$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} - e^{-\frac{1}{m}}\right) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+1}.$$

Considere os números positivos

$$\xi_n = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{2^n (n+k)!}{k!(2n+2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n}. \tag{B.1}$$

Observamos que este números estão bem definidos, ou seja, que a série acima é convergente. Para isso vemos primeiro que

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \textstyle\sum_{k=o}^{\infty} \frac{k!}{k!(2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} + e^{-\frac{1}{m}}\right). \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \textstyle\sum_{k=o}^{\infty} \frac{2(1+k)!}{k!(2+2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+1} &&= \textstyle\sum_{k=o}^{\infty} \frac{2(1+k)k!}{k!(2+2k)(1+2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+1} \\ &= \textstyle\sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+1} &&= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} - e^{-\frac{1}{m}}\right). \end{aligned}$$

O seguinte lema fornece uma fórmula de recorrência para os ξ_n:

Lema B.2. *Os números ξ_n na equação* (B.1) *verificam*

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \xi_n + 2.$$

Proporemos a prova deste lema para o fim deste Apêndice.

Seja $\delta_n = \dfrac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$. Temos

$$\delta_0 = \frac{\xi_0}{\xi_1} = \frac{e^{\frac{1}{m}} + e^{-\frac{1}{m}}}{e^{\frac{1}{m}} - e^{-\frac{1}{m}}} = \frac{e^{\frac{1}{m}}(e^{\frac{1}{m}} + e^{-\frac{1}{m}})}{e^{\frac{1}{m}}(e^{\frac{1}{m}} - e^{-\frac{1}{m}})} = \frac{e^{\frac{2}{m}} + 1}{e^{\frac{2}{m}} - 1}.$$

Por outro lado, pelo Lema B.2,

$$\delta_n = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = \frac{\xi_{n+2} + m(2n+1)\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} = m(2n+1) + \frac{\xi_{n+2}}{\xi_{n+1}} = m(2n+1) + \frac{1}{\delta_{n+1}}.$$

Portanto,

$$\frac{e^{\frac{2}{m}}+1}{e^{\frac{2}{m}}-1} = \delta_0 = m + \frac{1}{\delta_1} = m + \cfrac{1}{3m + \cfrac{1}{\delta_2}} = \cdots .$$

Acabamos de obter o seguinte resultado que usaremos mais adiante.

Lema B.3. *Para $m \geqslant 1$ considere o número*

$$\Psi_m = \frac{e^{\frac{2}{m}}+1}{e^{\frac{2}{m}}-1}.$$

Então

$$\Psi_m = [m; b_2, \cdots, b_n, \cdots], \qquad b_n = (2_n+1)m.$$

Em particular, para $m = 2$ temos

$$\Psi_2 = \frac{e+1}{e-1} = 2 + [6, 10, \cdots, 2(2k+1), \cdots].$$

Seja $\dfrac{P_k}{Q_k}$ a sequência dos convergentes de Ψ_2, onde $P_{-1} = 1$ e $Q_{-1} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{P_0}{Q_0} &= \frac{2}{1} = 2,\\
\frac{P_1}{Q_1} &= \frac{b_1 P_0 + P_{-1}}{b_2 Q_0 + Q_{-1}} = \frac{13}{6},\\
\frac{P_k}{Q_k} &= \frac{b_k P_{k-1} + P_{k-2}}{b_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{2(2_k+1)P_{k-1} + P_{k-2}}{2(2_k+1)Q_{k-1} + Q_{k-2}}.
\end{aligned}$$

O seguinte resultado estabelece a relação entre o número Θ do ínicio deste Apêndice e o número Ψ_2.

Lema B.4. *Os convergentes $\dfrac{P_k}{Q_k}$ de Ψ_2 e $\dfrac{p_k}{q_k}$ de Θ verificam:*

- $p_{3k+1} = 2(2k+1)p_{3(k-1)+1} + p_{3(k-2)+1}, \qquad k \geqslant 1,$
- $q_{3k+1} = 2(2k+1)q_{3(k-1)+1} + q_{3(k-2)+1}, \qquad k \geqslant 1,$
- $p_{3k+1} = P_k + Q_k \qquad e \qquad q_{3k} = P_k - Q_k, \qquad k \geqslant 0.$

Deixaremos a prova deste lema para o fim da seção. Agora já estamos prontos para terminar a prova do Teorema B.1. Usando as relações do Lema B.4, obtemos que:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\frac{e+1}{e-1}+1}{\frac{e+1}{e-1}-1} = \frac{\Psi_2+1}{\Psi_2-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{P_k}{Q_k}+1}{\frac{P_k}{Q_k}-1} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{P_k+Q_k}{P_k-Q_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_{3k+1}}{q_{3k+1}} = \Theta. \end{aligned}$$

Assim provamos que $e = \Theta$ concluindo a prova do teorema. Agora provaremos os Lemas B.2 e B.4. □

Demonstração. **(Lema B.2):** Escrevemos $\Delta = \zeta_n - m(2n+1)\zeta_{n+1}$.

Temos

$$\begin{aligned} \Delta = & \sum_{k=o}^{\infty} \left(\frac{2^n(n+k)!}{k!(2n+2k)!} - m(2n+1)\frac{2^{n+1}(n+1+k)!}{mk!(2n+2+2k)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ = & \sum_{k=o}^{\infty} \frac{2^n(n+k)!(2n+2+2k)(2n+1+2k)}{k!(2n+2k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ & -\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(2n+1)2^{n+1}(n+1+k)!}{k!(2n+2+2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ = & \sum_{k=o}^{\infty} \frac{2^n(n+k)!2(n+1+k)(2n+1+2k)}{k!(2n+2k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ & -\sum_{k=o}^{\infty} \frac{(2n+1)2^{n+1}(n+1+k)!}{k!(2n+2+2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ = & \sum_{k=o}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}(n+1+k)!((2n+1+2k)-(2n+1))}{k!(2n+2k+2)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ = & \frac{2^{n+1}(n+1)!((2n+1)-(2n+1))}{(2n+2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}(n+1+k)!(2k)}{k!(2n+2k+2)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+2}k(n+1+k)!}{k(k-1)!(2n+2k+2)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\ = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+2}((n+2)+(k-1))!}{(k-1)!(2(n+2)+2(k-1))!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2(k-1)+(n+2)} \\ = & \zeta_{n+2}. \end{aligned}$$

Concluindo a prova do lema. □

Demonstração. **(Lema B.4):** Seja $\frac{p_k}{q_k}$ o convergente k-ésimo de Θ. Já sabemos que:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1} \qquad e \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{1}.$$

Como $a_{3k} = a_{3k+1} = 1$ e $a_{3k-1} = 2^k$, podemos obter pela equação dos convergentes (2.8), para $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
p_{3k+1} &= a_{3k+1}p_{3k} + p_{3k-1} = p_{3k} + p_{3k-1} \\
&= a_{3k}p_{3k-1} + p_{3k-2} + p_{3k-1} = 2p_{3k-1} + p_{3k-2} \\
&= 2(a_{3k-1}p_{3k-2} + p_{3k-3} + p_{3k-2} = (2(2k)+1)p_{3k-2} + 2p_{3k-3} \\
&= (2(2k)+1)p_{3k-2} + (a_{3k-1}p_{3k-4} + p_{3k-5}) + p_{3k-3} \\
&= (2(2k)+1)p_{3k-2} + (p_{3k-3} + p_{3k-4} + p_{3k-5} \\
&= (2(2k)+1)p_{3(k-1)+1} + (a_{3(k-1)+1}p_{3k-3} + p_{3k-4}) + p_{3(k-2)+1} \\
&= (2(2k)+1)p_{3(k-1)+1} + p_{3(k-1)+1} + p_{3(k-2)+1} \\
&= (2(2k+1)p_{3(k-1)+1} + p_{3(k-2)+1}
\end{aligned}$$

Concluímos assim o primeiro item do lema.

A prova para os q_k's é análoga, o que prova o segundo item do lema.

A prova do último item também é por indução. Para $k = 0$ temos que

$$P_0 + Q_0 = 2 + 1 = 3 = p_1 \qquad \text{e} \qquad P_0 - Q_0 = 2 - 1 = 1.$$

Suponha que, para todo $1 \leqslant j < k$, se verifica

$$p_{3j+1} = P_j + Q_j \qquad \text{e} \qquad q_{3j+1} = P_j - Q_j$$

Então, pela equação dos convergentes (2.8),

$$P_k + Q_k = b_k P - k - 1 + P_{k-2} + b_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Pela hipótese de indução em B.1 e pelos dois primeiros itens do lema,

$$\begin{aligned}
P_k + Q_k &= 2(2k+1)P_{k-1} + P_{k-2} + 2(2k+1)Q_{k-1} + Q_{k-2} \\
&= 2(2k+1)(P_{k-1} + Q_{k-1}) + (P_{k-2} - Q_{k-2}) \\
&= 2(2k+1)(p_{3(k-1)+1}) + (p_{3(k-2)+1}) = p_{3k+1}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} P_k - Q_k &= 2(2k+1)P_{k-1} + P_{k-2} - 2(2k+1)Q_{k-1} + Q_{k-2} \\ &= 2(2k+1)(P_{k-1} - Q_{k-1}) + (P_{k-2} - Q_{k-2}) \\ &= 2(2k+1)(q_{3(k-1)+1}) + (q_{3(k-2)+1}) = q_{3k+1}. \end{aligned}$$

Assim, terminamos a prova do lema. □

BIBLIOGRAFIA

[1] (Russian) by Herbert Eagle (english) Aleksandr Yakovlevich Khinchin, *Continued Fractions/by A. Ya. Khinchin*, 1ª ed., University of Chicago Press, Dover, 1997, ISBN 9780486696300.

[2] GONÇALVES Carlos H. B. e Claudio POSSANI, *Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga*, Revista Matemática Universitária (Dezembro,2009).

[3] Luiz Roberto Dante, *Matemática: Contexto e Aplicações*, 2ª ed., vol. 1, São Paulo, 2013.

[4] Lorenzo J. Díaz e Danielle de Rezende Jorge, *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*, 1ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2006, ISBN 9788524402661.

[5] Carlos Gustavo T. de A. Moreira; Fabio E. Brochero Martínez e Nicolau C. Saldanha, *Tópicos de Teoria dos Números*, 1ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2012, ISBN 9788585818609.

[6] Lei de Diretrizes e Bases da Educação, *LEI nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996*, Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília (Brasil).

[7] Djairo Guedes de Figueiredo, *Números Irracionais e Transcendentes*, 3ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2011, ISBN 9788585818180.

[8] José Plínio de Oliveira Santos, *Introdução à Teoria dos Números*, 3ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2010, ISBN 9788524401428.

[9] Maria Inês Fini e Nilson José Machado, *Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e Suas Tecnologias*, São Paulo: SEE (2012).

[10] Abramo Hefez, *Aritmética*, 1ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2013, ISBN 978858585818920.

[11] Elon Lages Lima, *Números e Funções Reais*, 1ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2013, ISBN 9788585818814.

[12] Nilson José Machado, *Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*, 6ª ed., Cortez, São Paulo, 2006, ISBN 8524905581.

[13] Nilson José Machado e Outros, *Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor Matemática 7º, 8º e 9º ano*, São Paulo: SEE (2014-2017).

[14] MEC, *Base Nacional Comum Curricular - 2ªversão preliminar*, http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf, 2016, "acessado em 27/05/2016".

[15] Ivan Níven, *Números Racionais e Irracionais*, 1ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2012, ISBN 9788585818685.

[16] Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro, *Vontade de Saber Matemática, 8º e 9º ano*, 2ª ed., FTD, São Paulo, 2012.

[17] Carlos Tomei, *Euclides - A conquista do espaço*, 2ª ed., Odysseus, São Paulo, 2006, ISBN 8588023857.

[18] EUCLIDES; tradução e introdução Irineu Bicudo, *Os Elementos*, 1ª ed., UNESP, São Paulo, 2009, ISBN 9788571399358.

[19] Carl B. Boyer; tradução: Elza F. Gomide, *História da Matemática*, 2ª ed., Edgard Blucher LTDA, São Paulo, 1996, ISBN 8521200234.

[20] Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues, *Introdução a História da Matemática*, 1ª ed., UNICAMP, Campinas, 2005, ISBN 8526806572.

[21] Geraldo Ávila, *Cálculo das funções de uma variável - volume 1*, 7ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 2014, ISBN 9788521613701.