UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

IGOR GOMES

ALGUMAS APLICAÇÕES CLÁSSICAS DE CONGRUÊNCIA E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

DOURADOS – MS
2016

IGOR GOMES

ALGUMAS APLICAÇÕES CLÁSSICAS DE CONGRUÊNCIA E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Msc. Rildo Pinheiro do Nascimento

DOURADOS – MS

2016

FICHA DE APROVAÇÃO

IGOR GOMES

ALGUMAS APLICAÇÕES CLÁSSICAS DE CONGRUÊNCIA E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Trabalho de conclusão de curso – TCC do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional (PROFMAT) da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

Aprovado em: 16/12/2016

____

Prof. Msc. Rildo Pinheiro do Nascimento

____

Profa. Dra. Maristela Missio

____

Profa. Dra. Irene Magalhães Craveiro

G614a Gomes, Igor

Algumas aplicações clássicas de congruência e semelhança de triângulos/ Igor Gomes. – Dourados, MS: UEMS, 2016.

54p. ; 30cm

Dissertação (Mestrado) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2016.

Orientador: Prof. Msc. Rildo Pinheiro do Nascimento.

1. Triângulos 2. Congruência de Triângulos 3. Semelhança de Triângulos I. Título

CDD 23. ed. - 516.24

Dedicatória

Dedico primeiramente a Deus que me iluminou em todos esses três anos de dedicação do curso, e aos meus avós Arlindo Gomes e Maria Pereira Gomes (in memoriam) que me criaram praticamente a vida toda e me incentivaram nessa jornada de minha vida e que se não fosse por eles eu não teria conseguido ingressar e concluir este curso.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, que foi meu maior porto seguro. Se não fosse por ele eu não teria chegado ao final dessa pequena jornada. O Cara Lá de Cima me deu toda força de vontade e coragem para ir além dos meus limites nesses três anos de dedicação exclusiva à esse Mestrado Profissional em Matemática e não deixou me abater diante de todas as dificuldades encontrada nesse período de curso e me deu forças para ir até o final e superar todas as barreiras.

Aos meus avós Arlindo Gomes e Maria Pereira Gomes (in memoriam) que me criaram a vida toda. Ambos serão responsáveis por cada conquista obtida e cada degrau avançado para o resto de minha vida. Durante todos esses anos vocês foram para mim meu porto seguro e um grande exemplo de amor, força, coragem perseverança e energia infinita para nunca me abater diante dos obstáculos e me ensinaram a sempre ser humilde diante das conquistas alcançadas durante a vida, vocês são simplesmente meus heróis as duas pessoas que mais amo nessa vida. Obrigado por estarem sempre comigo. Obrigado simplesmente por participarem comigo durante essa pequena caminhada, me ajudando a construir os alicerces de um futuro que começa agora, após três anos dedicados a uma paixão que surgiu na infância. Vocês me ensinaram direta e indiretamente lições que irei carregá-las comigo pra toda uma vida. A primeira professora que eu tive na vida. Uma mulher corajosa, forte e guerreira, fonte inesgotável de amor, carinho e incentivo que sempre esteve torcendo por mim esse tempo todo, almejando meu sucesso. A todos os meus amigos e amigas que sempre estiveram torcendo pelo meu sucesso profissional. A minha noiva Bianca Souza de Oliveira, pelo total apoio e compreensão durante esse tempo de estudo no qual foi bastante árduo e sacrificante para nós por tomar muito do meu tempo com ela. E por fim ao meu professor Rildo Pinheiro do Nascimento pela paciência nas orientações e sugestões deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho é feito inicialmente um estudo dos conceitos básicos sobre triângulos, apresentando a definição, classificações dos triângulos quanto aos lados e ângulos, desigualdade triangular, principais cevianas, pontos notáveis de um triângulo. Em seguida é apresentado os casos de congruência e semelhança de triângulos. Finalmente serão apresentadas algumas aplicações sobre os casos de congruência e semelhança de triângulos. Todas as figuras que constam neste trabalho são construídas com o auxílio do software livre Geogebra.

Palavra chave: Triângulos; Congruência de Triângulos; Semelhança de Triângulos; Geogebra.

Abstract

In this work, a study of the basic concepts about triangles is presented, presenting the definition, classifications of the triangles for the sides and angles, triangular inequality, main cevians, notable points of a triangle. Next, the cases of congruence and similarity of triangles are presented. Finally, some applications will be presented on the cases of congruence and similarity of triangles. All the figures that appear in this work are built with the help of free software Geogebra.

Keyword: Triangles; Triangles Congruence; Triangles Similarity; Geogebra.

Sumário

1. INTRODUÇÃO

As afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas.

Heródoto entendia que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação de produzir a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto.

O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Podemos fazer conjecturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. (BOYER. 2000, p.4 e 5).

Neste trabalho será feito um estudo sobre um dos mais importantes elementos da geometria, o triângulo. O objeto principal de estudo são as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos possam ser congruentes e também as condições para que dois triângulos sejam semelhantes. Antes de abordarmos estes conteúdos, iremos relembrar os principais conceitos básicos de triângulo, tais como definição de triângulo, como esses triângulos são classificados quanto a medidas de seus lados e medidas de seus ângulos, a desigualdade triangular, que mostra as condições necessárias e suficientes para a existência de um triângulo, os pontos notáveis de um triângulo, como o baricentro, circuncentro e o ortocentro, o conceito de congruência em geral e suas principais propriedades, suas principais cevianas (que são retas que passam pelo vértice de um triângulo), como: a altura, mediana, bissetriz interna e bissetriz externa, os pontos notáveis do triângulo.

Em seguida serão apresentados os casos de congruência de triângulos: L.A.L (lado, ângulo, lado), A.L.A (ângulo, lado, ângulo), L.L.L (lado, lado, lado), L.A.Ao (lado, ângulo,

ângulo oposto) e os dois casos especiais de congruência que envolve o triângulo: H.A (hipotenusa, ângulo agudo), C.H (cateto, hipotenusa), o Teorema de Tales os casos de semelhança de triângulos: L.L.L (lado, lado, lado), L.A.L (lado, ângulo, lado) e o caso A.A (ângulo, ângulo)

Finalmente, neste trabalho, serão feitas diversas aplicações clássicas dos casos de congruência e semelhança de triângulos, concluindo com os dois importantes teoremas de Ceva e de Menelaus,

O software livre Geogebra, que será utilizado em todas as construções e desenhos neste trabalho é um aplicativo muito útil e rico em funcionalidades de construções geométricas, além de ser fácil seu aprendizado com o manuseio de suas variadas funções. Ele foi criado pelo professor Markus Hohenwarter, que começou a dar vida ao seu projeto incialmente no ano de 2001, durante sua dissertação de mestrado, e posteriormente, tese de doutorado em educação matemática na Universitat Salzburg na cidade austríaca de Salzburg, porém só no período de 2006 à 2008 após passar por vários aperfeiçoamentos, ajustes e manipulações, foi concluído em outro local na Flórida Atlantic University e escolas do Condado de Broward na Flórida, e até hoje ele ainda continua sendo aperfeiçoado e atualizado anualmente com versões cada vez mais dinâmica e criativa.

2. CAPÍTULO I

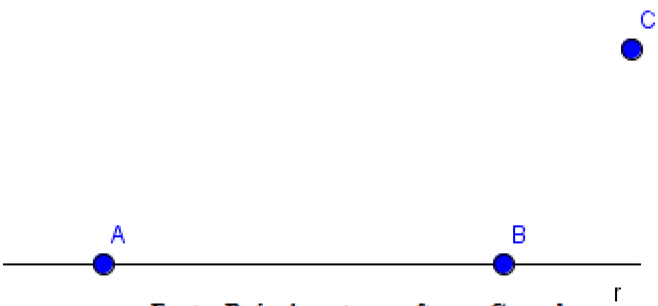
2.1 Triângulos

Introdução: Neste trabalho será feira uma revisão bibliográfica dos seguintes trabalhos: REZENDE, Eliane Quelho Frota. QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim, *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. 2ª* ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008. MUNIZ NETO, Antônio Caminha, *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. MORGADO, Augusto César, *Geometria* vol.1. Rio de Janeiro: Editora S/A, 1990. MORGADO, Augusto César, E. WAGNER, M. JORGE. *Geometria II: métrica plana.* Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002. WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P.. *Construções Geométricas.* Coleção Professor de Matemática. 4 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. BARBOSA, João Lucas Marques, *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: SBM 2000. BOYER, Carl B., *História da Matemática.* 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010. EVES, Howard, *Introdução a História da Matemática.* Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

Definição (1):

Consideremos três pontos $A, B\ e\ C$ no plano e uma reta $\overleftrightarrow{AB}$, se o ponto C estiver sobre essa reta diremos que os três pontos $A, B\ e\ C$ são colineares; caso contrário, os três pontos não serão colineares. Como segue na figura abaixo.

Figura 1.1: Pontos não colineares

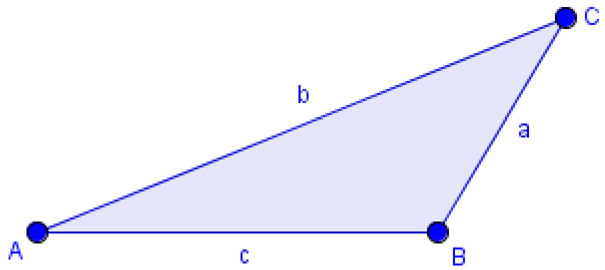


Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Definição (2):

Três pontos não colineares formam um triângulo. Neste sentido temos que a região correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A, B e C esses pontos, dizemos que A, B e C são os vértices do triângulo ABC. Como segue na figura abaixo.

Figura 1.2: Triângulo ABC



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Temos ainda em relação ao triângulo ABC acima, que os segmentos AB, AC e BC (ou comprimentos) são os lados do triângulo; de modo geral denotamos,

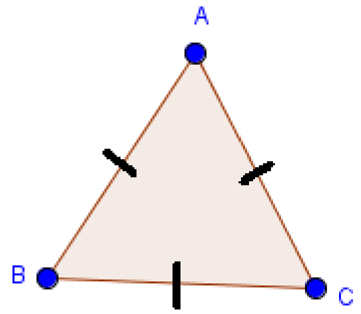
$\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, para descrever os comprimentos dos lados de um triângulo ABC qualquer.

2.2 Classificações dos triângulos:

1) Quanto aos lados:

Equilátero: Quando os três lados são congruentes, ou seja, com a mesma medida.

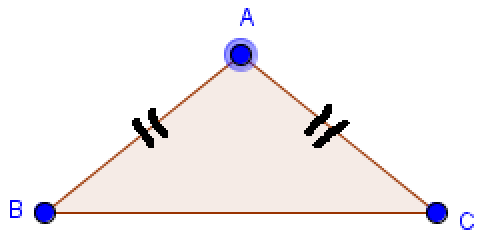
Figura 1.3: Triângulo equilátero



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Isósceles: Quando dois lados são congruentes e o terceiro lado tem medida diferente.

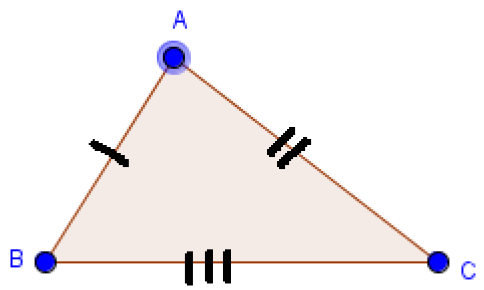
Figura 1.4: Triângulo Isósceles



Fonte: Próprio autor, softaware Geogebra

Escaleno: Quando os três lados têm medidas distintas.

Figura 1.5: Triângulo escaleno

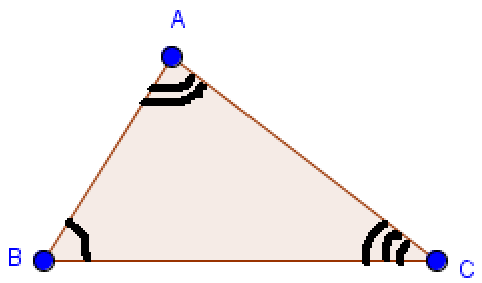


Fonte: Próprio autor, software Geogebra

2) Quanto aos ângulos:

Acutângulo: Quando os três ângulos internos agudos, ou seja, todos os ângulos são menores que 90º.

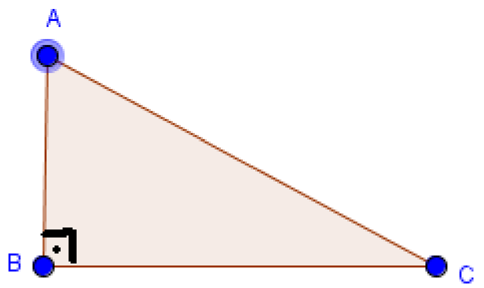
Figura 1.6: Triângulo acutângulo



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Retângulo: Quando um dos ângulos é reto, ou seja, com medida igual a 90º.

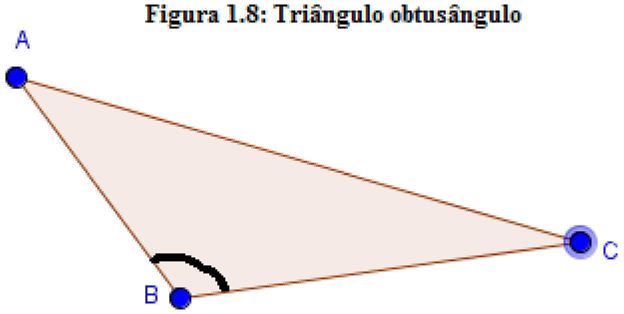
Figura 1.7: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Obtusângulo: Quando possui um dos ângulos com medida superior a 90º.

Figura 1.8: Triângulo obtusângulo



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

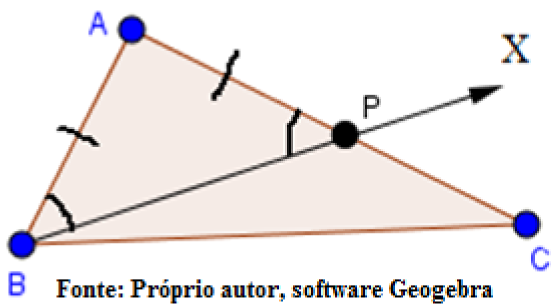
2.3 A desigualdade triangular

Proposição (1):

Se ABC é um triângulo tal que $\hat{B} > \hat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Prova:

Figura 1.9: Triângulo isósceles *ABP*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Como $\hat{B} > \hat{C}$, podemos traçar a semirreta $\overrightarrow{BX}$, intersectando o interior do triângulo ABC e tal que $C\hat{B}X = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$. Sendo P o ponto de interseção de $\overrightarrow{BX}$ com o lado AC, segue do teorema do ângulo externo que: $A\hat{P}B = C\hat{B}P + B\hat{C}P = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) + \hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$.

Mas, como $A\hat{B}P = \hat{B} - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$, segue que o triângulo ABP é isósceles de base BP. Portanto, $\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}$.

A proposição a seguir é o resultado principal desta seção, sendo conhecida como:

Proposição (2): Desigualdade Triangular.

Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Prova:

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c,\ \overline{AC} = b\ e\ \overline{BC} = a$. Mostremos que $a < b + c$, sendo a prova das demais desigualdades totalmente análoga. No triângulo ABC marquemos o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in CD\ e\ \overline{AD} = \overline{AB}$. Uma vez que $\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$, pela proposição anterior basta mostrarmos que $B\hat{D}C < D\hat{B}C$. Mas visto que $B\hat{D}A = D\hat{B}A$, temos que $B\hat{D}C = B\hat{D}A = D\hat{B}A < D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\widehat{BC}$. Sendo $a, b\ e\ c$ os comprimentos dos lados de um triângulo, segue da desigualdade triangular que: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Reciprocamente, dados seguimentos cujos comprimentos $a, b\ e\ c$ satisfazem as desigualdades acima, não é difícil provar que é sempre possível construirmos um triangulo tendo tais segmentos como lados.

Terminamos essa seção colecionando duas consequências interessantes da desigualdade triangular.

Exemplo (1):

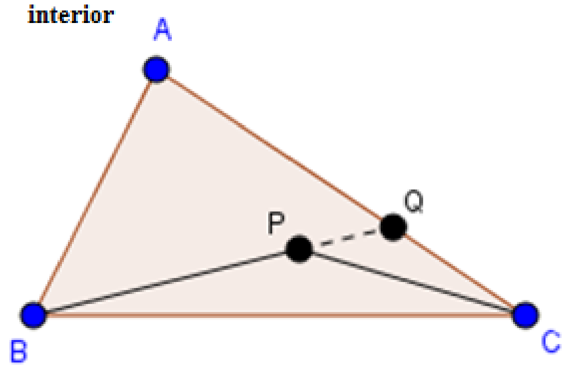
Se P é um ponto situado no interior de um triângulo ABC, então:

(a) $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

(b) $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$.

Prova item (a):

Figura 1.10: Triângulo ABC com o ponto P no seu interior



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Dado um triângulo ABC prolongue a semirreta $\overrightarrow{BP}$ até que a mesma encontre o lado AC no ponto Q. Aplicando a desigualdade triangular sucessivamente aos triângulos $CPQ\ e\ ABQ$, obtemos:

$\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{PB} + (\overline{PQ} + \overline{CQ}) = \overline{BQ} + \overline{CQ} < (\overline{AB} + \overline{AQ}) + \overline{CQ} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

Prova item (b):

Argumentando de modo análogo ao item (a), temos $\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{BC}\ \ e\ \ \overline{PA} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Somando ordenadamente essas duas desigualdades com aquela do item (a), obtemos:

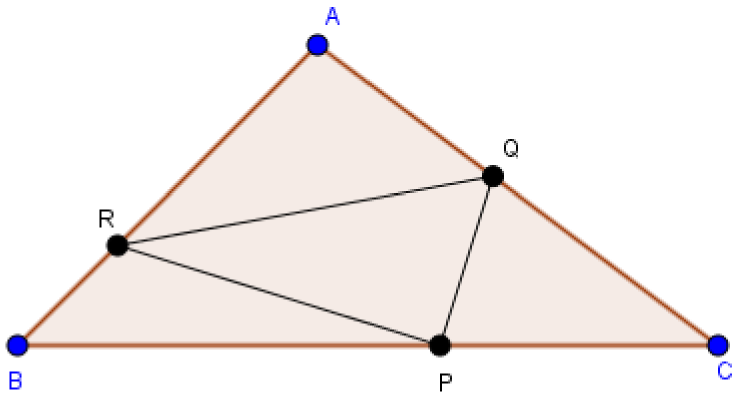
$2(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}) < 2(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$ o que implica que: $(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}) < (\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$.

Exemplo (2):

Em um triângulo ABC, escolhemos aleatoriamente pontos $P \in \overline{BC}, Q \in \overline{AC}$ e $R \in \overline{AB}$, todos diferentes dos vértices do triângulo ABC. Prove que o perímetro do triângulo PQR é menor que o perímetro do triângulo ABC.

Demonstração:

Figura 1.11: Triângulo ABC com triângulo RPQ no seu interior



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Dado o triângulo ABC acima temos os pontos R, Q e P respectivamente sobre os lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo. Agora analisando os triângulos BRP, ARQ e CQP formados por esses pontos no interior do triângulo ABC, temos pela desigualdade triangular aplicada respectivamente sobre esses triângulos:
$\overline{PR} < \overline{BR}+\overline{BP}$, $\overline{RQ} < \overline{AR}+\overline{AQ}$ e $\overline{QP} < \overline{QC}+\overline{CP}$, somando essas três desigualdades, segue: $\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QP} < \overline{BR}+\overline{BP}+\overline{AR}+\overline{AQ}+\overline{QC}+\overline{CP}$. Como o perímetro do triângulo PQR é igual à $\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QP}$, e o perímetro do triângulo ABC é dado por $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ e ainda, $\overline{AB}=\overline{BR}+\overline{AR}$, $\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{CP}$ e $\overline{AC}=\overline{AQ}+\overline{QC}$, concluímos que: $\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QP} < \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$, ou seja, que o perímetro do triângulo PQR é menor que o perímetro do triângulo ABC.

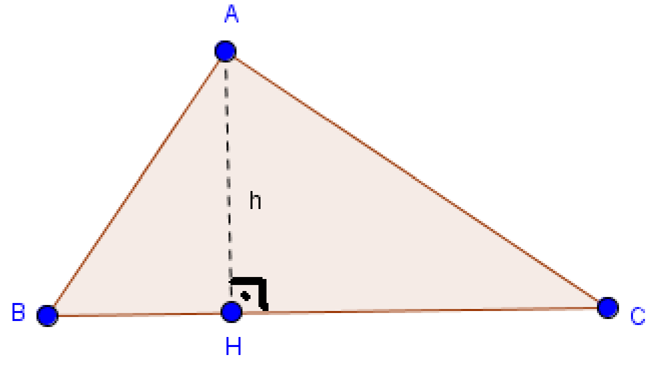
2.4 Principais cevianas

Definição (3):

Uma Ceviana é qualquer reta que passa por um vértice de um triangulo. Onde as principais são:

a) Altura (h): Segmento que liga o vértice de um triângulo ao seu lado oposto formando um ângulo de 90º.

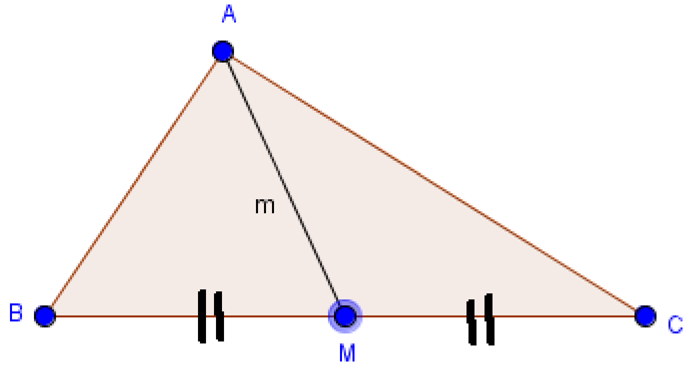
Figura 1.12: Altura do triângulo *ABC*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

b) Mediana (m): Segmento que liga um vértice do triângulo ao seu lado oposto, dividindo esse lado em duas partes iguais.

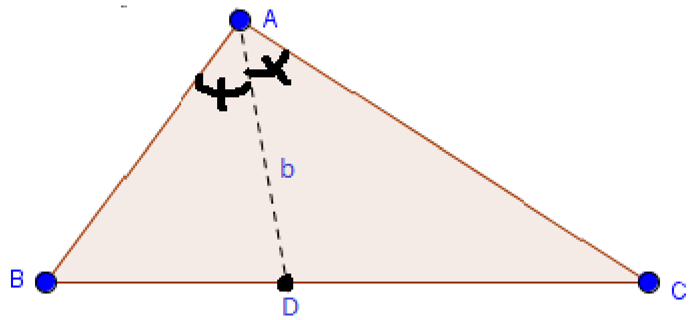
Figura 1.13: Mediana do Triângulo *ABC*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

c) Bissetriz interna (bi): Segmento que liga um vértice do triângulo ao seu lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos iguais.

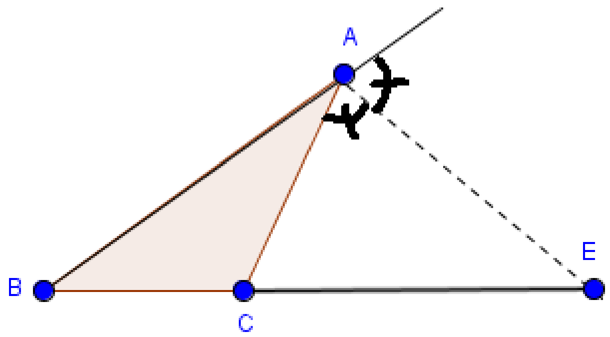
Figura 1.14: Bissetriz interna do triângulo *ABC*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

d) Bissetriz externa (be): Segmento que liga o vértice de um triângulo ao prolongamento do lado oposto desse vértice, dividindo esse ângulo em dois ângulos iguais.

Figura 1.15: Bissetriz externa do triângulo *ABC*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Lugares geométricos básicos

O conceito de lugar geométrico aqui apresentado é essencial para uma compreensão mais profunda da Geometria Euclidiana, e usualmente é conhecido como método sintético. De posse dessa noção, estaremos aptos a discutir varias propriedades notáveis de triângulos e quadriláteros, destacando dentre elas, o problema dos mesmos em circunferências.

Definição 4.

Seja P uma propriedade relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico (LG)** dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto X do plano que atende as duas condições a seguir:

(a) Todo ponto de X possui a propriedade P.

(b) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a X.

Mediatriz: Dado um semento *AB* em uma reta *r*. Chamamos mediatriz do segmento *AB*, a reta *s* perpendicular a reta *r* que passa pelo ponto médio de *AB.*

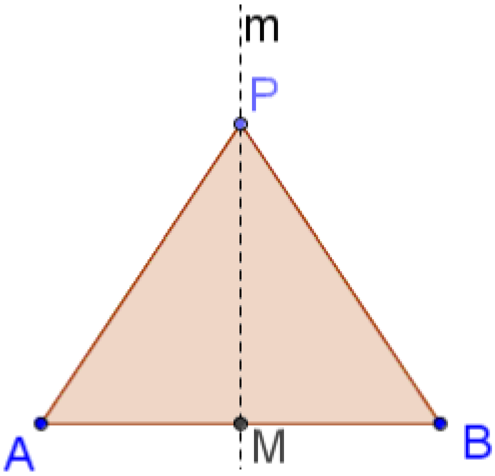
Proposição 3.

Tomamos dois pontos A e B no plano, a mediatriz de AB é o LG dos pontos do plano que equidistam de A e B.

Demonstração.

Dado M o ponto médio e m o segmento que representa a mediatriz de AB. Se $P \in m$, então, no triângulo PAB, PM é mediana e altura, respectivamente, logo isso garante que o triângulo PAB é isóscele de base AB. Disto temos que, $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Figura 1.16: Mediatriz do segmento AB



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Então o triângulo PAB é isóscele de base AB, donde segue que a mediana e a altura relativa à AB coincidem. Como a mediana de relativa à AB é o seguimento PM, segue que $PM \perp AB$, o que é o mesmo que dizer que $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de AB.

Bissetriz:

A bissetriz de um ângulo é a semi-reta com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

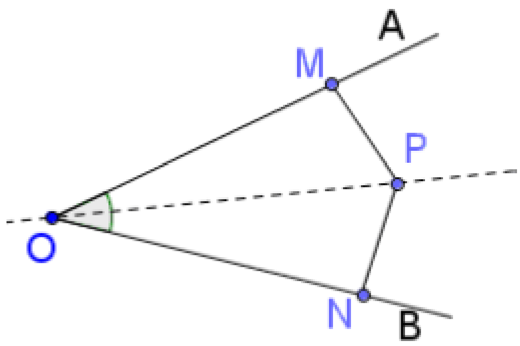
Proposição 4:

Seja $A\hat{O}B$ um ângulo dado, se P é um ponto desse ângulo, então $d\left(P, \overleftrightarrow{AO}\right) = d(P, \overleftrightarrow{BO})$ se, e somente se, P pertence a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Prova:

Suponha primeiro que P pertence a bissetriz de $A\hat{O}B$, e seja $M\ e\ N$, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P em relação as retas $\overleftrightarrow{AO}\ e\ \overleftrightarrow{BO}$. Como $M\hat{O}P = N\hat{O}P, O\hat{M}P = O\hat{N}P = 90°$ e OP é comum, segue que os triângulos $OMP\ e\ ONP$ são congruentes por LAA_O. Dai $\overline{PM} = \overline{PN}$, ou seja, $d\left(P, \overleftrightarrow{AO}\right) = d\left(P, \overleftrightarrow{BO}\right)$.

Figura 1.17: Bissetriz interna do Ângulo $A\hat{O}B$



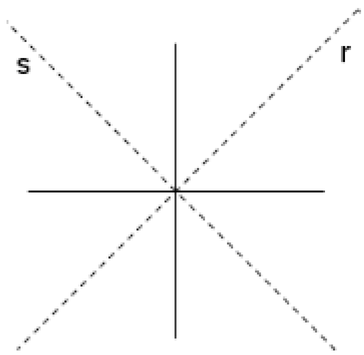
Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Reciprocamente, seja P um ponto no interior do ângulo $A\hat{O}B$, tal que $\overline{PM} = \overline{PN}$, onde $M\ e\ N$ são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às retas $\overleftrightarrow{AO}\ e\ \overleftrightarrow{BO}$. Então os triângulos $MOP\ e\ NOP$ são novamente congruentes, agora pelo caso cateto hipotenusa, $\overline{PM} = \overline{PN}$ e OP comum. Mas aí $M\hat{O}P = N\hat{O}P$, donde P está sobre a bissetriz de $A\hat{O}B$.

Exemplo (6):

Dadas no plano as retas $r\ e\ s$, concorrentes em O, temos pela proposição acima que um ponto P do plano equidista de $r\ e\ s$ se, e somente se, P estiver em uma das retas que bissectam os ângulos formados por $r\ e\ s$. Assim, o LG dos pontos do plano que equidistam de duas retas concorrentes é a união das bissetrizes dos ângulos formados por tais retas.

Figura 1.18: Retas concorrentes



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

2.5 Pontos notáveis de um triângulo

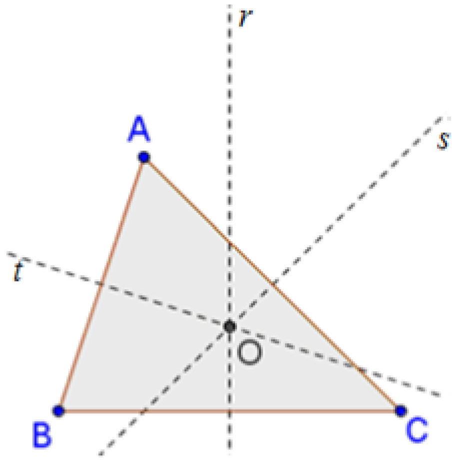
Proposição 5.

Em todo triângulo as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o que chamamos o circuncentro do mesmo.

Prova.

Sejam ABC um triângulo qualquer, $r, s\ e\ t$, respectivamente, as mediatrizes dos lados $\overline{BC}, \overline{CA}\ e\ \overline{AB}$, e O o ponto de interseção das retas $r\ e\ s$.

Figura 1.19: Circuncentro do triângulo ABC

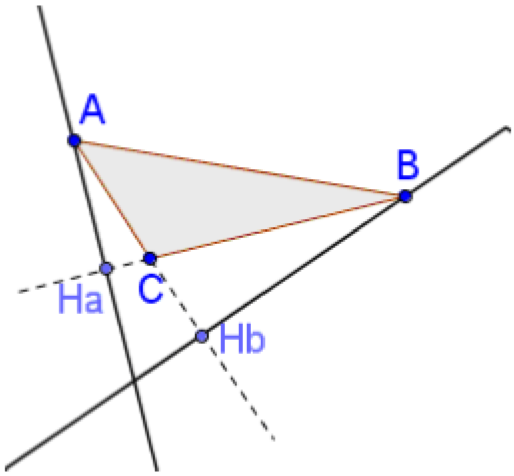


Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Pela caracterização da mediatriz de um segmento como LG, temos $\overline{OB} = \overline{OA}$ (pois $O \in s$). Portanto, $\overline{OB} = \overline{OA}$, e segue novamente da caracterização da mediatriz como LG que $O \in t$.

Como corolário da discussão acima, podemos estudar o problema da concorrência das alturas de um triângulo. Note primeiro que, caso o triângulo seja obtusângulo, as alturas que não partem do vértice do ângulo obtuso são exteriores ao mesmo.

Figura 1.20: Alturas do triângulo ABC



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Proposição 6.

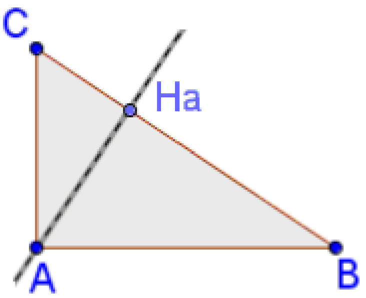
Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, que chamamos o **ortocentro** do triângulo.

Prova.

Seja ABC um triângulo qualquer. Há três casos a considerar:

(a) ABC é retângulo: suponhamos, sem perda de generalidade, que $B\hat{A}C$ = 90º. Então A é o pé das alturas relativas aos lados AB e AC. Como a altura relativa ao lado BC passa (por definição) por A , segue que as alturas de ABC concorrem em A.

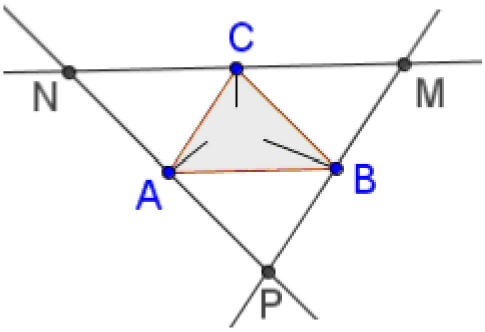
Figura 1.21: Ortocentro do triângulo retângulo *ABC*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

(b) ABC é acutângulo: trace por A, B e C, respectivamente, retas r, s e t paralelas a BC, CA e AB, também respectivamente, e seja $r \cap s = \{P\}, s \cap t = \{M\}, t \cap r = \{N\}$. Como os quadriláteros $ABCN$ e $ABMC$ são paralelogramos, segue que $\overline{CN} = \overline{AB} = \overline{CM}$, e dai C é o ponto médio de MN e A é o ponto médio de PN.

Figura 1.22: Ortocentro do triângulo acutângulo *ABC*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Reciprocamente a altura relativa a BC também é perpendicular a PN, já que BC e PN são paralelos. Do mesmo modo, as alturas relativas a AC e AB são perpendiculares respectivamente a MP e MN. Segue que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes dos lados do triângulo MNP. Mas já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, de modo que as alturas de ABC devem ser concorrentes.

(c) ABC é obtusângulo: A prova é totalmente análoga à do caso (b).

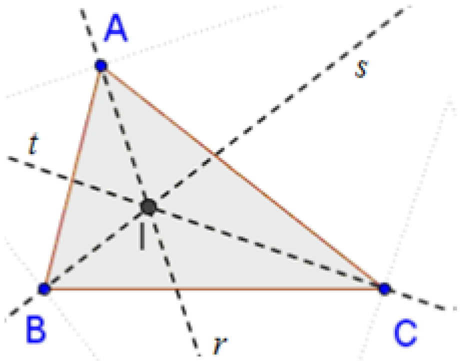
Proposição 7.

As bissetrizes internas de todo triângulo são concorrentes em um único ponto, que chamamos o **incentro** do triângulo.

Prova:

Dados duas retas r e s no plano, sejam respectivamente as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}\ e\ \hat{C}$ do triângulo ABC, e I o ponto de interseção das retas $r\ e\ s$. Como $I \in r$, segue da caracterização das bissetrizes como LG que I equidista dos lados $AB\ e\ AC$ do triângulo ABC. Analogamente, $I \in s$ garante que I é equidistante dos lados $AB\ e\ BC$. Assim, I equidista de $AC\ e\ BC$, usando novamente a referida caracterização das bissetrizes, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo $\hat{C}$, ou seja, à reta t. Portanto $r, s\ e\ t$ concorrem em I.

Figura 1.23: Incentro do triângulo ABC



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

2. 6 Conceito de congruência

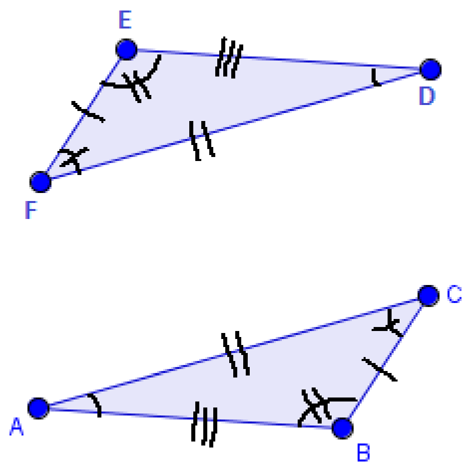
A congruência é um conceito geométrico. Mais formalmente, dois conjuntos de pontos do plano são ditos "congruentes", se e só se, um pode ser transformado no outro por isometria, ou seja, uma combinação de translações, rotações e reflexões. Na congruência quanto aos ângulos, dizemos que dois ângulos são congruentes, se sobreposto um sobre o outro, todos os seus elementos coincidem.

De maneira mais geral, de um modo intuitivo, duas figuras planas serão ditas "congruentes" se uma delas puder ser deslocada, sem que haja modificação em sua forma ou suas medidas, até que passe a coincidir com outra em todos os seus elementos. Por nomenclatura, se duas figuras $A\ e\ B$ são congruentes, isso será denotado por $A \equiv B$.

Definição (4):

Dados dois triângulos $ABC\ e\ DEF$ diremos que eles serão congruentes se for possível definir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim definida a correspondência $A \leftrightarrow D,\ B \leftrightarrow E,\ e\ C \leftrightarrow F$ entre os triângulos $ABC\ e\ DEF,$ se $\hat{A} \equiv \hat{D},\ \hat{B} \equiv \hat{E},\ \hat{C} \equiv \hat{F},\ \overline{AB} \equiv \overline{DE},\ \overline{BC} \equiv \overline{EF}\ e\ \overline{AC} \equiv \overline{DF},$ dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotamos por $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

Figura 1.24: Dois triângulos congruentes



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Para verificarmos a veracidade da congruência entre dois triângulos por definição, precisamos verificar as seis congruências entre seus elementos, que foram listadas acima.

Em decorrência das congruências de triângulos segue as três propriedades a seguir:

1º Reflexiva: Essa propriedade afirma que qualquer triângulo será congruente a si mesmo, ou seja, $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$.

2º Simetria: Se um $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, então $\Delta DEF \equiv \Delta ABC$. Isso de fato é verdade, pois se pudermos mover o ΔABC sem deformá-lo, até coincidi-lo com o ΔDEF, então certamente poderemos fazer o movimento contrário com o ΔDEF, até sobrepor sobre o ΔABC.

3º Transitividade: Se o $\Delta ABC \equiv \Delta DEF\ \ e\ \ \Delta DEF \equiv \Delta GHI$, então o $\Delta ABC \equiv \Delta GHI$. Isso porque podemos mover o ΔABC até fazê-lo coincidir com o ΔGHI por partes: primeiro, movemos o ΔABC até que ele coincida com o ΔDEF e, então, continuamos movê-lo até que coincida com o ΔGHI.

2.7 Casos de congruência de triângulos

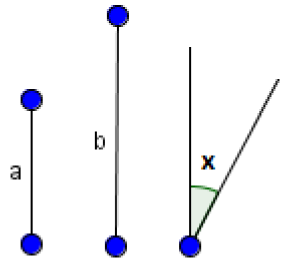
No que segue iremos abordar os vários casos de congruência de triângulos sob um ponto de vista informal. Cada caso será precedido por um problema com construção de régua e compasso, cuja solução motivará a sua formalização.

Exemplo (3):

Construa com régua e compasso o ΔABC, conhecidos $\overline{BC} = a,\ \overline{AC} = b, e\ \hat{C} = x$.

Solução:

Figura 1.25: Segmentos de medidas a e b, e ângulo com medida x



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Descrição dos passos.

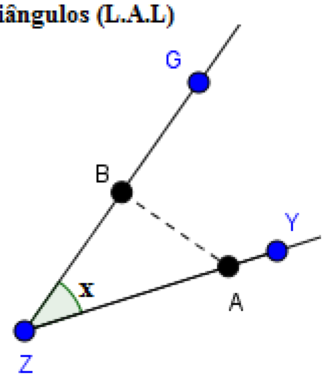
1. Marque um ponto Z no plano e, em seguida, trace uma semirreta $\overrightarrow{ZG}$ de origem Z..

2. Transporte o ângulo dado para um ângulo $G\hat{Z}Y = x,$ de vértice Z, determinando a semirreta $\overrightarrow{ZY}$ de origem Z.

3. Sobre as semirretas $\overrightarrow{ZG}\ e\ \overrightarrow{ZY}$ marque, respectivamente, os pontos $B\ e\ A$ tais que $\overline{AC} = b\ e\ \overline{BC} = a$.

Analisando os passos da construção acima percebemos que se escolhermos outra posição para o vértice C e outra direção para os lados do ângulo $G\hat{Z}Y$, a construção do ΔABC continuará determinada pelos dados do exemplo e teríamos um novo triângulo que, intuitivamente, gostaríamos de nomear como congruente ao triângulo inicial. Essa discussão motiva nosso primeiro caso de congruência, conhecido como **LAL.**

Figura 1.25.1: Construção do caso de congruência de triângulos (L.A.L)



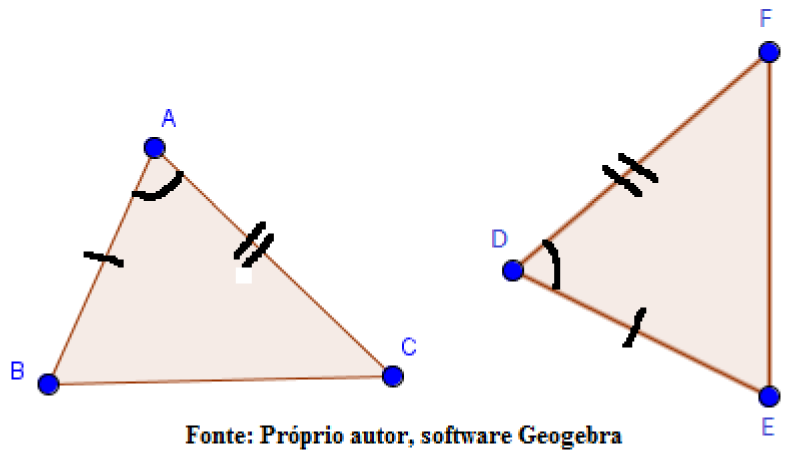
Fonte: Próprio autor, software Geogebra

1º) O caso lado, ângulo, lado (L.A.L) :

Axioma (1):

Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos serão congruentes.

Figura 1.26: Dois triângulos congruentes pelo caso (L.A.L)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados dois triângulos ABC e DEF, temos:

$\overline{AB} = \overline{DE}\,,\ \overline{BC} = \overline{EF},\ \hat{B} = \hat{E} \overset{LAL}{\Longrightarrow} ABC \equiv DEF$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D,\ B \leftrightarrow E,\ C \leftrightarrow F$. Em particular, segue, daí, que:

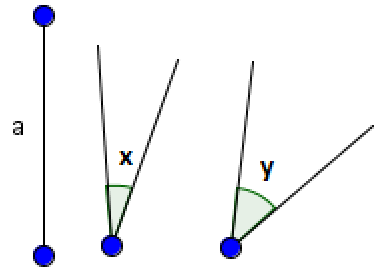
$\hat{A} = \hat{D},\ \hat{C} = \hat{F}\ \ e\ \ \overline{AC} = \overline{DF}$

Exemplo (4):

Construa com régua e compasso o $\Delta ABC,$ conhecidos $\overline{BC} = a,\ \hat{B} = x\ \ e\ \ \hat{C} = y.$

Solução:

Figura 1.27: Segmento de medida a e dois ângulos com medidas x e y



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Descrição dos passos.

1. Trace uma reta r e, sobre essa reta, marque os pontos B e C tais que $\overline{BC} = a$.
2. Construa uma semirreta $\overrightarrow{BD}$ tal que $C\hat{B}D = x$.
3. No semiplano determinado por r e D construa a semirreta $\overrightarrow{CF}$ tal que $B\hat{C}F = y$.
4. Marque o ponto A como interseção das semirretas $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CF}$.

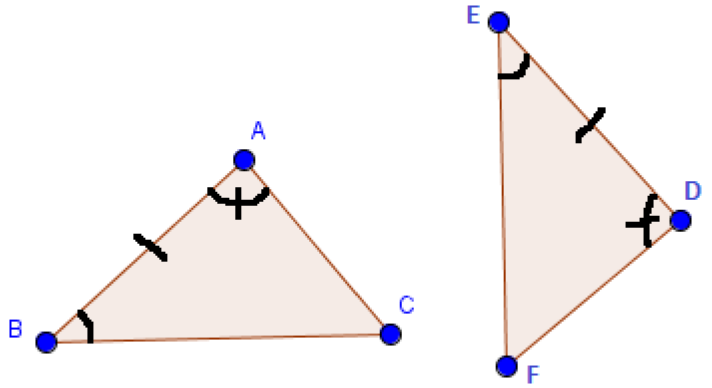
Aqui novamente, analisando os passos da construção acima, notamos que, escolhendo qualquer posição para o lado BC e mantendo $\overline{BC} = a,$ a construção do ΔABC continuará determinada pelas medidas fixas aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C},$ de modo que resultaria em um novo triângulo que será congruente ao triângulo inicial. Essa discussão motiva o nosso segundo caso de congruência, o caso **A.L.A.**

2º) O caso ângulo, lado, ângulo (A.L.A):

Axioma (2):

Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos serão congruentes.

Figura 1.28: Dois triângulos congruentes pelo caso (A.L.A)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Em símbolos, dados os triângulos ABC e DEF, temos:

$\hat{A} = \hat{D},\ \hat{B} = \hat{E},\ \ \overline{AB} = \overline{DE} \overset{ALA}{\Longrightarrow} ABC \equiv DEF$, com a correspondência de vértices

$A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F.$

Em particular, também devemos ter: $\hat{C} = \hat{F},\ \overline{AC} = \overline{DF},\ e\ \overline{BC} = \overline{EF}.$

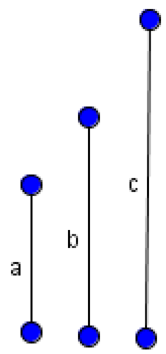
Analisaremos, agora, o exemplo que irá motivar o nosso terceiro caso de congruência, o caso **LLL.**

Exemplo(5):

Construa com régua e compasso o $\Delta ABC,$ conhecidos $\overline{AB} = c,\ \overline{AC} = b, \overline{BC} = a.$

Solução:

Figura 1.29: Três segmentos com medidas *a*, *b* e *c*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Descrição dos passos.

1. Trace uma reta r e, sobre essa reta marque os pontos $B\ e\ C$ tais que $\overline{BC} = a.$
2. Trace os círculos de centro B e raio c e de centro C e raio $b.$
3. Marque o ponto A sendo o ponto de interseção dos círculos traçados no item anterior.

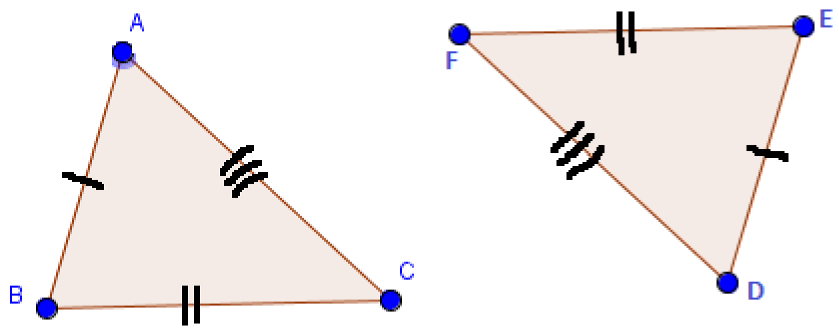
Poderíamos nesse caso acima indicar outro posicionamento para o lado BC (mantendo a condição $\overline{BC} = a$), que ainda obteríamos um triângulo que seria qualificado como sendo congruente ao triângulo inicial. Como isso surgiu a motivação do nosso terceiro caso de congruência, o caso **LLL,** enunciado a seguir.

3º) O caso lado, lado, lado (L.L.L):

Axioma (3):

Se um triângulo possui em alguma ordem, respectivamente os três lados congruentes aos três lados de outro triângulo, então esses dois triângulos serão congruentes.

Figura 1.30: Dois triângulos congruentes pelo caso (L.L.L)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

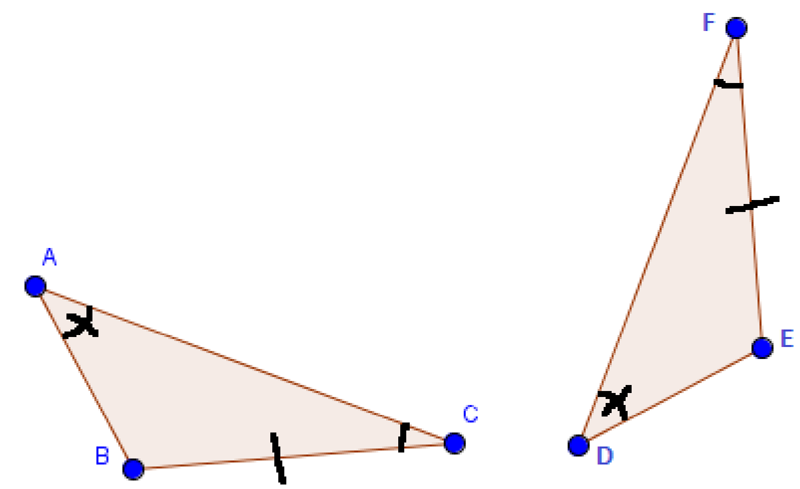
Em símbolos, dados dois triângulos ABC e DEF, temos:

$\overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{BC} = \overline{EF},\ \overline{AC} = \overline{DF} \overset{LLL}{\Longrightarrow} ABC \equiv DEF,$ com correspondência de vértices $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$. Em particular, também temos: $\hat{A} = \hat{D},\ \hat{B} = \hat{E}\ \ e\ \ \hat{C} = \hat{F}$.

4º) O caso lado, ângulo e ângulo oposto (L.A.A$_o$):

Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, respectivamente iguais, então esses dois triângulos serão congruentes.

Figura 1.31: Dois triângulos congruentes pelo caso (L.A.A.o)



Fonte: Próprio Autor, software Geogebra

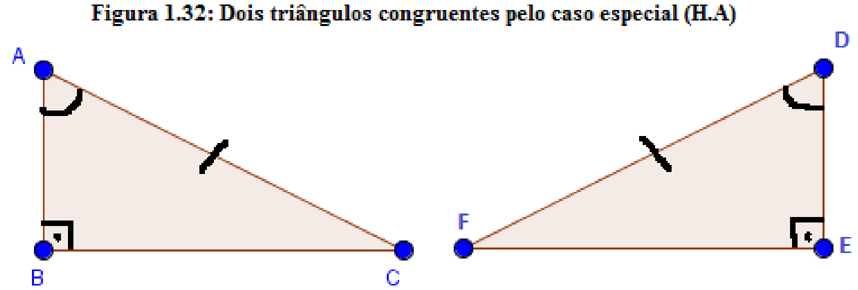
Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados dois triângulos ABC e DEF, temos: $\overline{BC} = \overline{EF},\ \hat{C} = \hat{F},\ \hat{A} = \widehat{D} \overset{LAA_O}{\Longrightarrow} ABC \equiv DEF$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$. Em particular, segue, que $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}\ e\ \hat{B} = \hat{E}$.

2.7.1 Casos especiais de congruências com triângulos retângulos:

1) Caso Hipotenusa, Ângulo agudo (H.A).

Se dados dois triângulos retângulos possuem respectivamente a medida da hipotenusa e um dos ângulos agudos iguais, então esses dois triângulos serão congruentes.

Figura 1.32: Dois triângulos congruentes pelo caso especial (H.A)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

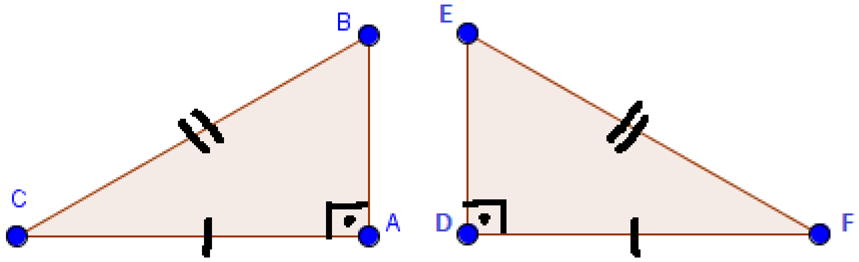
Em símbolo, dados os triângulos retângulos acima ABC e DEF, temos:

$\overline{AC} = \overline{DF},\ \hat{A} = \widehat{D} \overset{HA}{\Rightarrow} ABC \equiv DEF$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D,\ B \leftrightarrow E,\ C \leftrightarrow F.$ Em particular, também temos $\overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{BC} = \overline{EF},\ \hat{C} = \hat{F}.$

2) Caso Cateto, Hipotenusa (C.H)

Se dois triângulos retângulos possuem respectivamente a medida de um dos catetos e da hipotenusa iguais, esses dois triângulos serão congruentes.

Figura 1.33: Dois triângulos congruentes pelo caso especial (C.H)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Em símbolos, dados os triângulos retângulos acima ABC e DEF, temos:

$\overline{BC} = \overline{EF},\ \overline{AC} = \overline{DF} \overset{CH}{\Rightarrow} ABC \equiv DEF$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D,\ C \leftrightarrow F,\ B \leftrightarrow E$. Em particular, também temos: $\overline{AB} = \overline{DE},\ \hat{C} = \hat{F},\ \hat{B} = \hat{E}$.

2.8 Teorema de Tales

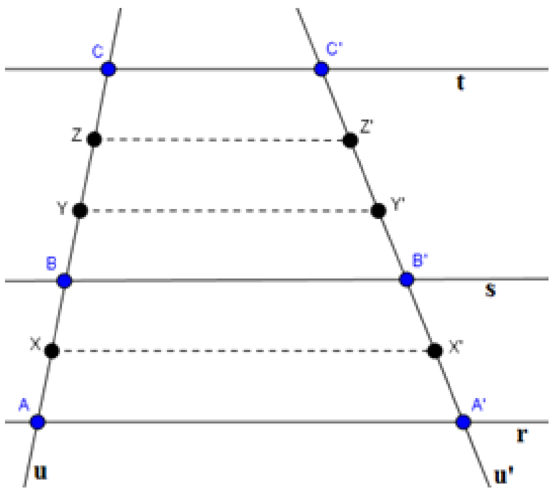
Proposição 8:

Sejam $r, s\ e\ t$ retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s\ e\ C, C' \in t$, de modo que $A, B, C\ e\ A', B', C'$ sejam dois ternos de pontos colineares. Então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Prova:

Figura 1.34: três retas paralelas cortada por duas retas transversais



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Dadas no plano três retas paralelas $r, s\ e\ t$. Traçamos, em seguida, retas $u\ e\ u'$, a primeira intersectando $r, s\ e\ t$, respectivamente, nos pontos $A, B\ e\ C$, e a segunda intersectando $r, s\ e\ t$, respectivamente, em $A', B' e\ C'$.

Se tivermos $\overline{AB} = \overline{BC}$, então pelo teorema da base média de um trapézio teremos $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. De outra forma, se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1.$$

Suponha, agora, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, digamos $\frac{2}{3}$, para exemplificar. Dividamos, então, os segmentos $AB\ e\ BC$, respectivamente, em duas e três partes iguais, obtendo os pontos $X, Y\ e\ Z$ em u, tais que: $\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$. Se traçarmos por $X, Y\ e\ Z$ paralelas às retas $r, s\ e\ t$, as quais intersectam u', respectivamente, em $X', Y'\ e\ Z'$, então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem que:
$\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$ e, dai,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}.$$

Prosseguindo com tal raciocínio, suponha, agora, que fosse $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Então, uma pequena modificação de argumentos acima (dividindo, inicialmente, $AB\ e\ BC$ em $m\ e\ n$ partes iguais, respectivamente) garantiria que: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$, de sorte que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}.$$

De outra forma, concluímos que a relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

é válida sempre que o primeiro (ou segundo) membro for um número racional.

2.9 A recíproca do Teorema de Tales

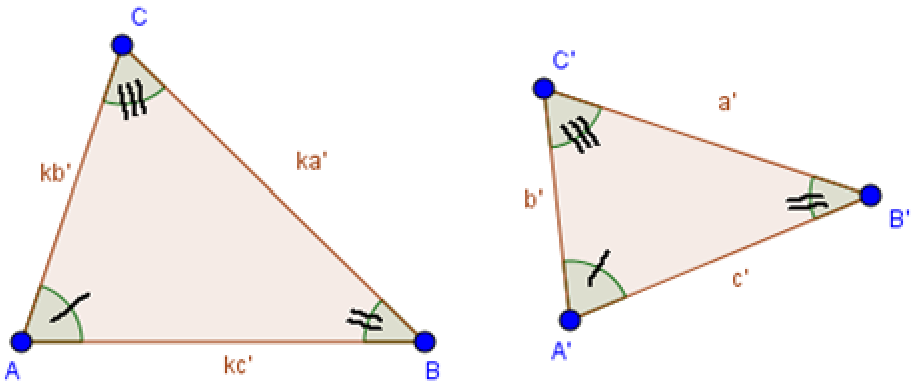
Sejam dados, no plano, retas r, s e pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$, com $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{C\}$.
Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$, então $r \parallel s$.

A demonstração pode ser encontrada no link:
http://matematicasblogs.blogspot.com.br/2013/09/teorema-de-tales-demonstracao-relacao-e.html

2.10 Casos de semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Figura 1.35: Dois triângulos semelhantes



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações.

Na figura acima, os triângulos $ABC\ e\ A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B' e\ C \leftrightarrow C'$. Assim $\hat{A} = \widehat{A}', \hat{B} = \widehat{B}'\ e\ \hat{C} = \widehat{C}'$ e existe $k > 0$ tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

Tal real positivo k é denominado **razão de semelhança** entre os triângulos $ABC\ e\ A'B'C'$ nessa ordem.

Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$ para denotar que os triângulos $ABC\ e\ A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B' e\ C \leftrightarrow C'$.

Se $ABC \sim A'B'C'$ na razão (de semelhança) k, então k é também a razão entre os comprimentos de dois seguimentos correspondentes quaisquer nos dois triângulos.

As três proposições a seguir estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Por tal razão as mesmas são conhecidas como os **casos de semelhança de triângulos** usuais.

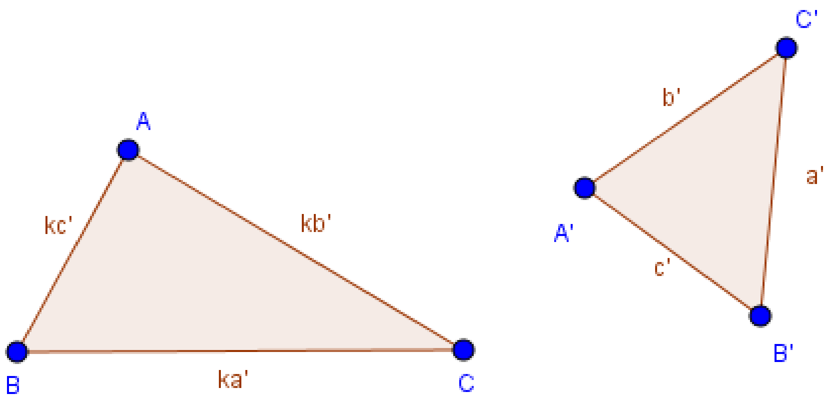
Proposição 9:

Seja $ABC\ e\ A'B'C'$ triângulos no plano, tais que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \widehat{A}', \hat{B} = \widehat{B}'$ e $\hat{C} = \widehat{C}'$.

Figura 1.36: Dois triângulos semelhantes pelo caso (L.L.L)

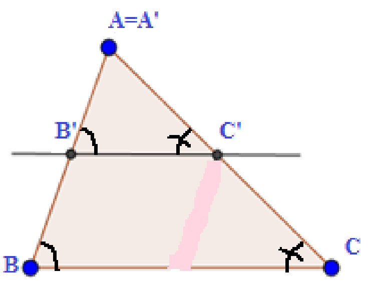


Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Prova:

Suponha sem perda de generalidade $k > 1$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$. Então, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, assim pela reciproca do Teorema de Tales, $BC \parallel B'C'$, o que implica em uma correspondência biunívoca de vértices: $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B' e\ C \leftrightarrow C'$, tal que, $\hat{A} = \widehat{A}', \hat{B} = \widehat{B}'$ e $\hat{C} = \widehat{C}'$. Portanto, $ABC \sim A'B'C'$.

Figura 1.37: Prova do caso de semelhança de triângulos (L.L.L)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

O critério para a semelhança de dois triângulos constantes da próxima proposição é conhecido como o caso L.A.L de semelhança.

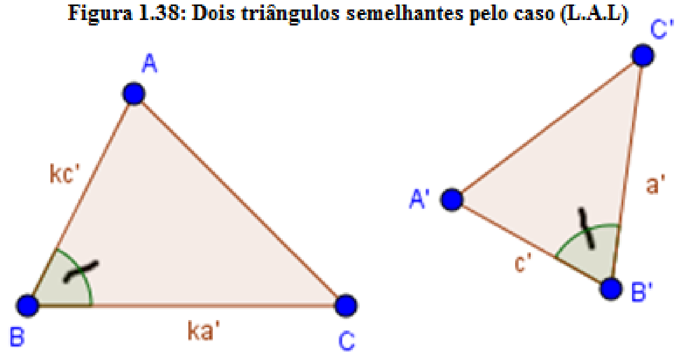
Proposição (10):

Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \ e\ \hat{B} = \hat{B}'.$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}', \hat{C} = \hat{C}' e\ \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$.

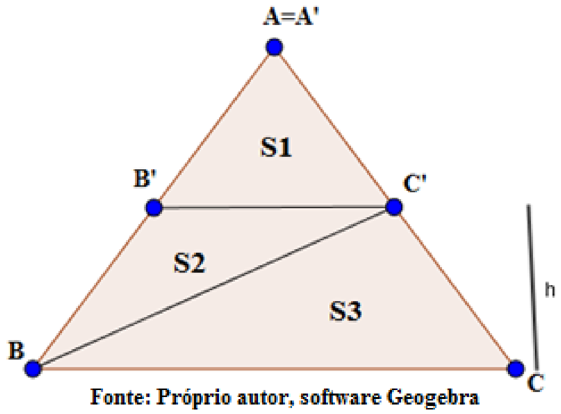
Figura 1.38: Dois triângulos semelhantes pelo caso (L.A.L)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Prova:

Figura 1.39: Prova do caso de semelhança de triângulos (L.A.L)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Suponha $k > 1$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$. Então, segue da recíproca do Teorema de Tales que $BC \parallel B'C'$. Assim existe uma correspondência biunívoca entre os vértices: $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C', \hat{B} = \widehat{B'}$ e $\hat{C} = \widehat{C'}$. Temos também que:

$\overline{AB} = k.\overline{A'B'} \Rightarrow S1 + S2 = k.S1$ (i)

$\overline{AC} = k.\overline{A'C'} \Rightarrow S1 + S2 + S3 = k(S1 + S2)$ (ii)

De (i) e (ii), temos:

$k.S1 + S3 = k.S1 + k.S2 \Rightarrow S3 = k.S2 \Rightarrow \overline{BC}.\frac{h}{2} = k.\overline{B'C'}.\frac{h}{2} \Rightarrow \overline{BC} = k.\overline{B'C'}$. Portanto,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k.$$

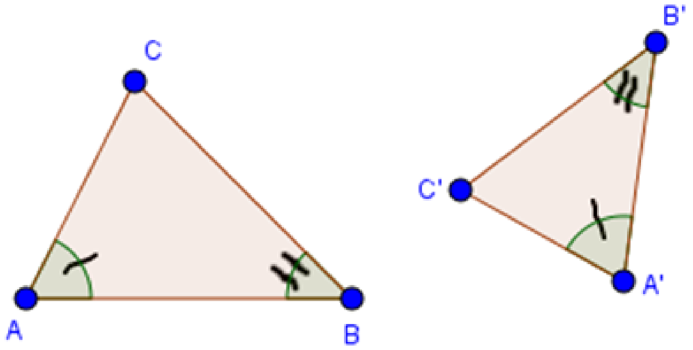
Por fim a proposição a seguir apresenta o caso A.A. de semelhança de triângulos.

Proposição (11):

Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$.

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$.

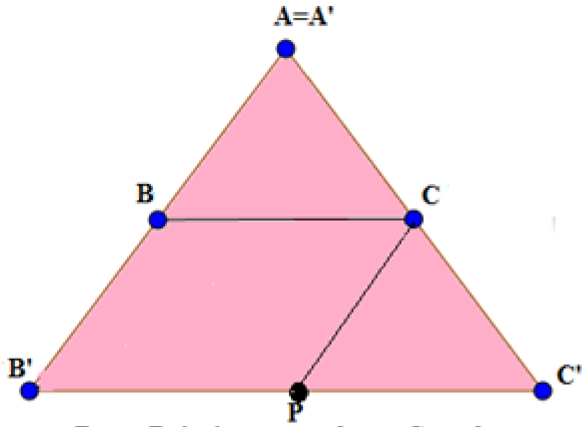
Figura 1.40: Dois triângulos semelhantes pelo caso (A.A)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Prova:

Figura 1.41: Prova do caso de semelhança de triângulos (A.A)



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Seja ABC um triângulo com $BC \parallel B'C' e\ \hat{A} = \widehat{A'}$. Então, pelo Teorema de Tales, segue:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

Seja $BCB'P$ um paralegramo com $BB' \parallel PC$, então, por Tales novamente:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{B'P}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Em consequência das duas relações de igualdade a cima, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Portanto, pela Proposição (9), segue que: $ABC \sim A'B'C'$.

3. CAPITULO 2:

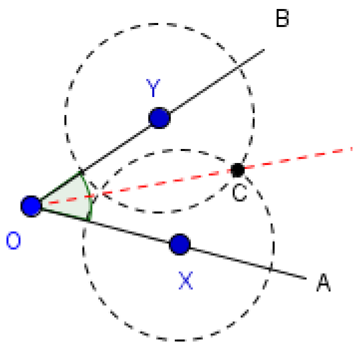
Neste capitulo iremos abordar algumas aplicações importantes dos casos de congruência e semelhança de triângulos que foram vistos no capítulo anterior. Essas aplicações serão construídas com o auxílio do software livre Geogebra.

3.1 Aplicação dos casos de congruência de triângulos

Exemplo (1):

Construir com régua e compasso a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ dado abaixo.

Figura 2.1: Bissetriz do ângulo AÔB



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Descrição dos passos:

1) Centre o compasso em O e, com uma mesma abertura r, marque pontos $X \in \overrightarrow{OA}$ e $Y \in \overrightarrow{OB}$.

2) Fixe uma abertura $s > \frac{1}{2}\overline{XY}$ e trace, dois círculos de raio s e centros em X e Y, arcos que se intersectem num ponto C. A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

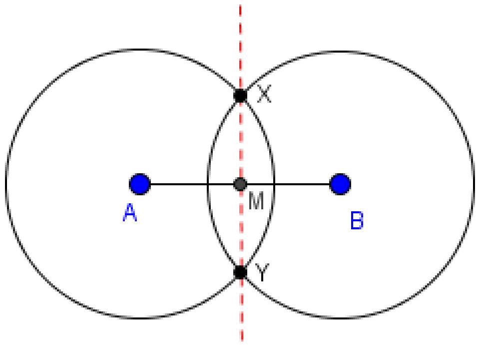
Com isso temos em relação aos ΔXOC e ΔYOC construídos acima, temos $\overline{OX} = \overline{OY} = r$ e $\overline{XC} = \overline{YC} = s$; como o lado OC é comum aos dois triângulos, pelo caso de congruência LLL segue que os $\Delta XOC \equiv \Delta YOC$. Decorre desse fato que, $X\hat{O}C = Y\hat{O}C$ ou, ainda, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$. Como queríamos demonstrar.

Outra aplicação bastante útil dos casos de congruências é a construção do ponto médio de um segmento, isto é, o ponto que o divide em duas partes iguais. O próximo exemplo mostra com essa construção é feita.

Exemplo (2):

Construir com régua e compasso o ponto médio do segmento AB.

Figura 2.2: Construção do ponto médio do segmento *AB*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Descrição dos passos:

1) Fixe uma abertura $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ e trace, dois círculos de raio r e centros A e B, arcos que se interceptam nos pontos X e Y.

2) O ponto M de interseção da reta $\overleftrightarrow{XY}$ com o segmento AB é o ponto médio de AB.

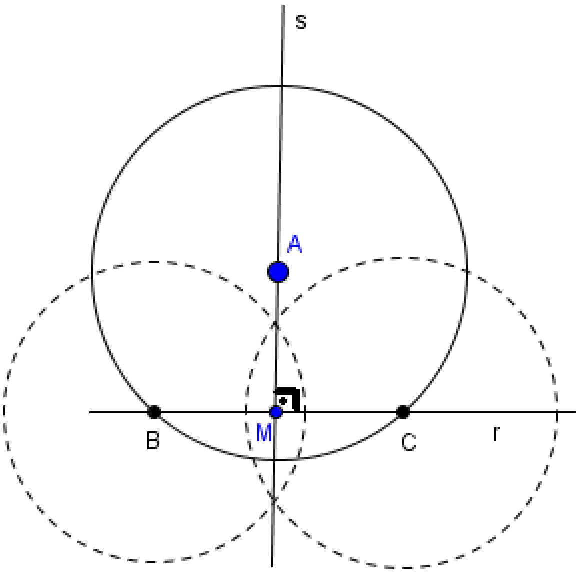
Com efeito, em relação aos ΔAXY e ΔBXY, temos $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $\overline{AY} = \overline{BY}$; como o lado XY é comum aos dois triângulos, pelo caso de congruência LLL segue que $\Delta AXY \equiv \Delta BXY$. Logo, $A\hat{X}Y = B\hat{X}Y$ e também segue que, $A\hat{X}M = B\hat{X}M$. Agora nos ΔAXM e ΔBXM, temos que $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $A\hat{X}M = B\hat{X}M$; como o lado XM é comum aos dois triângulos, segue pelo caso de congruência de triângulos LAL que $\Delta AXM \equiv \Delta BXM$. Logo, $\overline{AM} = \overline{BM}$. Com isso concluímos que o ponto M é ponto médio do segmento AB, como queríamos demonstrar.

No próximo exemplo iremos mostrar como aplicar os casos de congruência para construir uma reta perpendicular à outra reta dada e passando por um ponto também determinado.

Exemplo (3):

Seja, no plano, uma reta r e um ponto A, construir com régua e compasso uma reta s tal que $r \perp s \; e \; A \; \in s$.

Figura 2.3: Construção de dois segmentos ortogonais



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Descrição dos passos:

1) Com o compasso centrado no ponto A, faça um arco de círculo que intersecte a reta r em dois pontos distintos $B \; e \; C$.

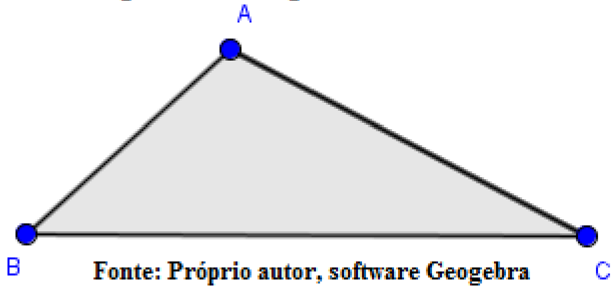
2) Faça a construção do ponto médio M de $\overline{BC}$ e faça $s = \overleftrightarrow{AM}$.

Com efeito, em relação aos $\Delta ABM \; e \; \Delta ACM$, segue que $\overline{AB} = \overline{AC}$ pois, $\overline{AB} \; e \; \overline{AC}$ são raios da mesma circunferência de centro A e $\overline{BM} = \overline{CM}$, pois o ponto M é médio do segmento $\overline{AB}$; como o lado AM é lado comum de ambos os triângulos, decorre do caso de congruência de triângulos LLL que $\Delta ABM \equiv \Delta ACM$, logo os ângulos $A\widehat{M}B \; e \; A\widehat{M}C$ são iguais. Mas, como $A\widehat{M}B \; + A\widehat{M}C = 180°$, devemos ter, então, que os ângulos $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90°$, ou melhor, $\overline{AM} \perp r$. Como queríamos demonstrar.

Exemplo (4):

Construa com régua e compasso todas as medianas do triângulo ABC dado abaixo:

Figura 2.4: Triângulo ABC



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Descrição dos passos:

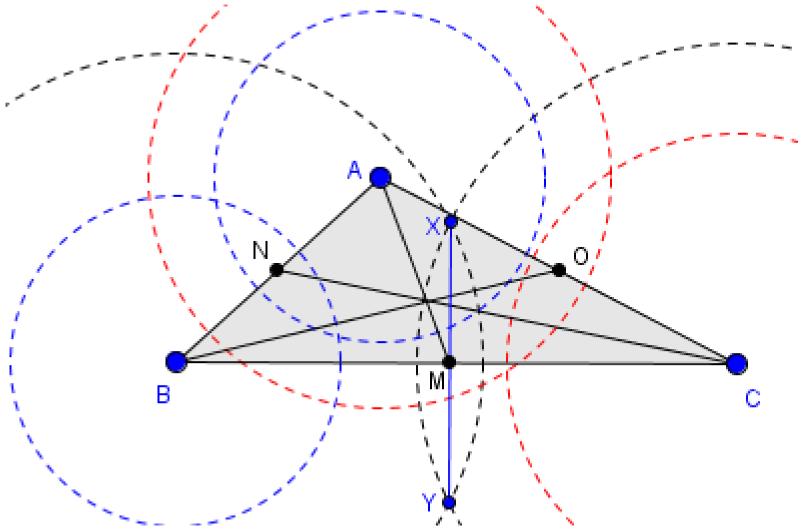
1) Fixe uma abertura $r > \frac{1}{2}\overline{BC}$ e trace dois círculos de raio r e centros $B\ e\ C$, arcos que se intersectem nos pontos $X\ e\ Y$.

2) O ponto M de interseção da reta $\overleftrightarrow{XY}$ com o segmento $\overline{BC}$ é o ponto médio de $\overline{AB}$.

3) Trace o segmento $\overline{AM}$ que por definição será a mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC.

4) Faça o mesmo procedimento nos demais lados do triângulo ABC, para encontrar as outras duas medianas.

Figura 2.5: Construção das três medianas do triângulo ABC



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

De fato, em relação aos triângulos $BXY\ e\ CXY$, temos $\overline{BX} = \overline{CX}$, pois ambos segmentos são raios do círculo com mesma abertura r e $\overline{BY} = \overline{CY}$ pelo mesmo motivo anterior; como o segmento $\overline{XY}$ é comum aos dois triângulos, segue pelo caso de congruência LLL que $\Delta BXY \equiv \Delta CXY$. Portanto, $B\hat{X}Y = C\hat{X}Y$, e ainda, $B\hat{X}M = C\hat{X}M$. Agora analisando os triângulos $BXM\ e\ CXM$, temos que $\overline{BX} = \overline{CX}\ e\ B\hat{X}M = C\widehat{XM}$; e como o lado $\overline{XM}$ é comum aos mesmos, segue pelo caso LAL que os triângulos $BXM\ e\ CXM$ são congruentes. Logo, $\overline{BM} = \overline{CM}$. Ou seja, provamos que o ponto M é de fato médio do lado BC do triângulo, com isso AM é uma mediana relativa a esse lado, esse mesmo procedimento se aplica aos outros dois lados e confirma a veracidade da construção das três medianas com régua e compasso.

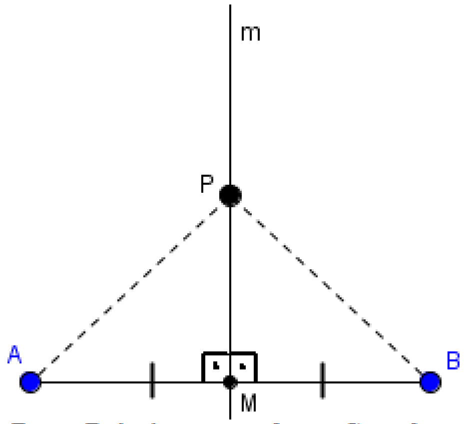
Exemplo (5):

Prove que a mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.

Prova:

Dado um segmento $\overline{AB}$ com ponto médio M. Seja ainda m a mediatriz de $\overline{AB}$ e seja P um ponto pertencente a m.

Figura 2.6: Construção da mediatriz do segmento AB



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

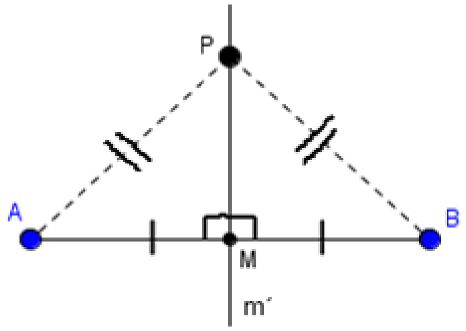
Se P está sobre o segmento $\overline{AB}$, então $P = M$ e isso implica que $PA = PB$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$. Caso o ponto P não esteja sobre $\overline{AB}$, então temos $MA = MB$, $P\widehat{M}A = P\widehat{M}B = 90°$ e PM lado comum aos dois triângulos $PMA\ e\ PMB$, Logo pelo caso de congruência

L.A.L, temos que os triângulos PMA e PMB são congruentes. Portanto $PA = PB$. Nos dois casos obtivemos que o ponto P é equidistante dos pontos A e B.

Agora, seja o ponto P equidistante dos pontos A e B. Se P está sobre $\overline{AB}$, então P coincide com o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, e portanto, P está na mediatriz m.

Analisaremos agora o caso em que o ponto P não é pertencente ao segmento $\overline{AB}$.

Figura 2.7: Demonstração dos pontos equidista de A e B



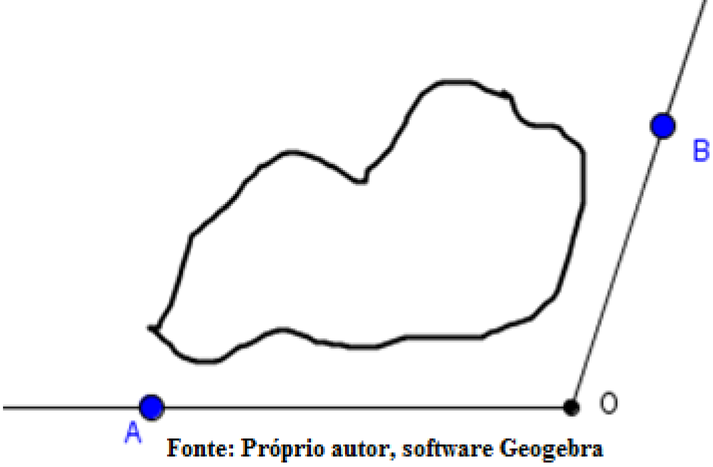
Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Seja $m´ = \overleftrightarrow{PM}$. Como $MA = MB$, $PA = PB$ e PM é lado comum aos dois triângulos PMA e PMB, logo pelo caso de congruência L.L.L os triângulos PMA e PMB serão congruentes. Com efeito disso os ângulos $P\widehat{M}A$ e $P\widehat{M}B$ são iguais. Como esses dois ângulos são suplementares, concluímos que cada um deles medem 90°, logo a reta $m´$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Pela unicidade da mediatriz temos $m = m´$ e, portanto, o ponto P está em m. Como queríamos demonstrar.

Exemplo (6):

Considere a figura abaixo. Encontre a distância entre os pontos A e B, separados por um pequeno lago, sem medir de fato a distância AB. Justifique seu procedimento.

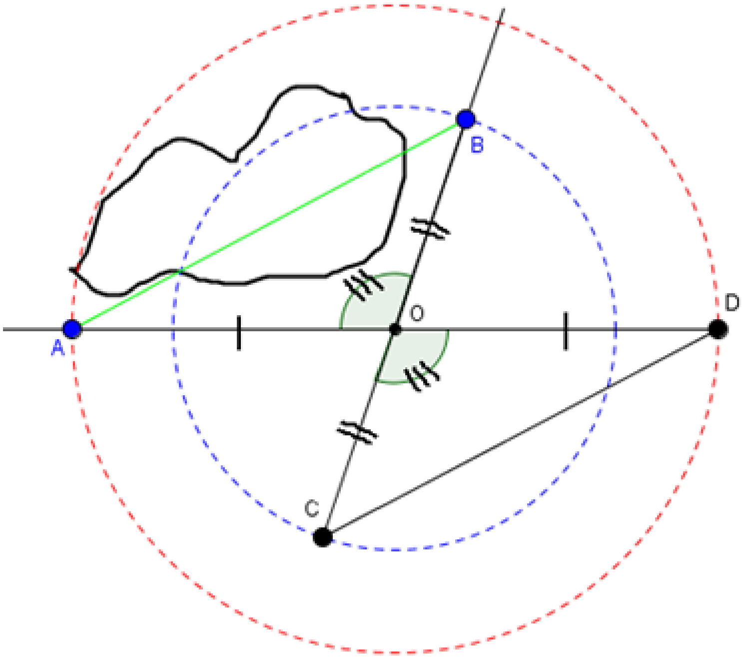
Figura 2.8: Um lago entre os pontos A e B



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Solução:

Figura 2.9: Prova do exemplo por congruência de triângulos



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

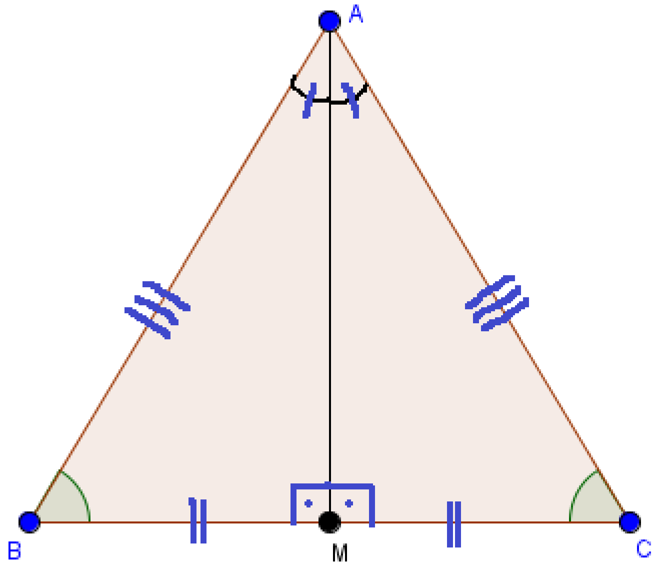
Primeiramente com centro no ponto O, construímos dois círculos de raios $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, prolongando o segmento $\overline{AO}$ até encontrar o ponto D pertencente a circunferência de raio $\overline{OA}$, do mesmo modo prolongamos o segmento $\overline{BO}$ até encontrar o ponto C pertencente a circunferência de raio $\overline{OB}$. Agora analisando os triângulos formados $AOB\ e\ COB$, temos que $\overline{AO} = \overline{OD}$ pois ambos são raios dessa circunferência, do mesmo modo os segmentos $\overline{OB}\ e\ \overline{OC}$ também são iguais pelo mesmo motivo anterior, e analisando os ângulos $A\hat{O}B\ e\ C\hat{O}D$ notamos que são ângulos opostos pelo vértice que por definição são congruentes. Sendo assim concluímos que os triângulos $ABO\ e\ COD$ são congruentes pelo caso de congruência de triângulos L.A.L, com efeito, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Ou seja, mostramos como é possível medir a distância AB sem medir de fato essa distância passando pelo rio.

Exemplo (7):

Seja um trîângulo ABC isósceles de base BC, prove que a bissetriz, a mediana e a altura relativas ao lado BC coincidem.

Solução:

Figura 2.10: Coincidencia da bissetriz, mediana e altura relativa ao lado BC do triângulo ABC



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

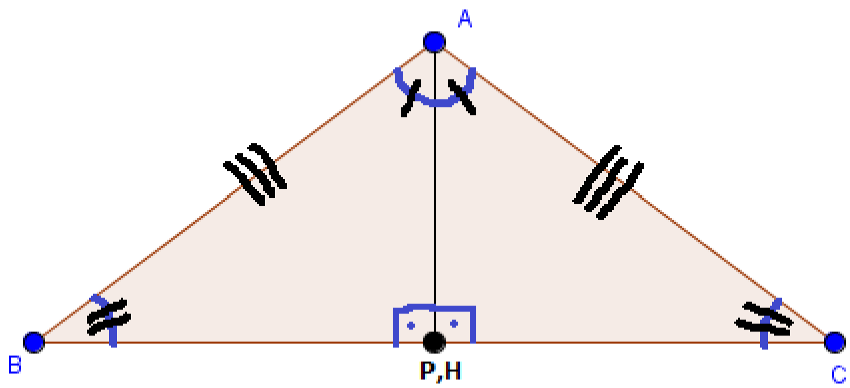
Seja M o ponto médio do lado BC, temos que AM será a mediana do triângulo relativa ao lado BC, e ainda, os triângulos $ABM\ e\ ACM$ serão congruentes pelo caso L.L.L, pois $AB \equiv AC,\ BM \equiv CM$ e AM é lado comum aos dois triângulos. Com efeito disso, os ângulos $B\hat{A}M\ e\ C\hat{A}M$ são iguais, ou seja o segmento AM é bissetriz relativa ao lado BC do triângulo. E ainda, da congruência dos triângulos $ABM\ e\ ACM$ os ângulos $A\widehat{M}B\ e\ A\widehat{M}C$ são iguais. Como esses ângulos são suplementares, ou seja, $A\widehat{M}B + A\widehat{M}C = 180°$, concluímos que cada um deles medem 90°, logo o segmento AM também será a altura do triângulo relativa ao lado BC, como queríamos demonstrar.

Exemplo (8):

Dado um triângulo ABC, com $P, M\ e\ H$ sendo respectivamente os pés da bissetriz interna, mediana e alturas relativas ao lado BC. Se $P\ e\ H$ ou $M\ e\ H$ coincidirem, prove que o triângulo ABC é isóscele de base BC.

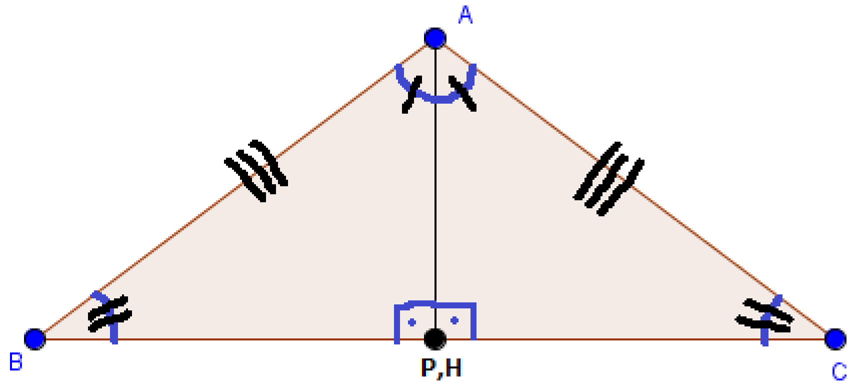
Solução:

Seja AP a bissetriz do triângulo ABC relativa ao lado BC, temos que os ângulos $B\hat{A}P\ e\ C\hat{A}P$ são iguais. E seja AH um segmento coincidente com AP a altura do triângulo ABC relativa ao lado BC, temos que os ângulos $B\hat{P}A = C\hat{P}A = 90°$. Agora analisando os triângulos $BPA\ e\ CPA$, vemos que eles são congruentes pelo caso A.L.A, pois $B\hat{A}P = C\hat{A}P$, AP é lado comum aos dois triângulos e $B\hat{P}A = C\hat{P}A$, com efeito, os lados $AB\ e\ AC$ são congruentes, assim como os ângulos $A\hat{B}P\ e\ A\hat{C}P$ também serão congruentes, concluímos então que o triângulo ABC é isósceles de base BC.



Seja AM a mediana do triângulo relativa ao lado BC, os segmentos $BM\ e\ CM$ são congruentes, e seja também AH a altura do triângulo relativa ao lado BC coincidente ao segmento AM, então os ângulos $B\widehat{M}A\ e\ C\widehat{M}A$ são ambos retos, logo são congruentes entre si. Agora analisando os triângulos $AMB\ e\ AMC$, temos que $BM = CM$, $B\widehat{M}A = C\widehat{M}A$ e AM é lado comum aos dois triângulos, logo esses triângulos serão congruentes pelo caso A.L.A, com efeito, os lados $AB\ e\ AC$ são congruentes, assim como os ângulos $A\hat{B}M\ e\ A\hat{C}M$ também são, logo o triângulo ABC será isósceles de base BC, como queríamos demonstrar.

Figura 2.11: Prova que o triângulo ABC é isósceles de base BC



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

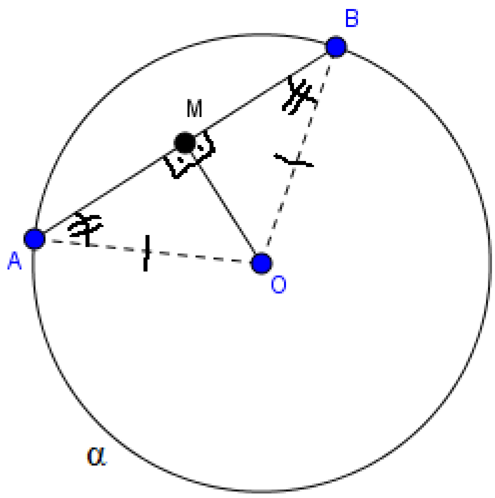
Exemplo (9):

Dado uma circunferência α de centro O e seja AB uma corda dessa circunferência. Se M é um ponto sobre AB, prove que: $OM \perp AB \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$.

Solução:

Temos que $\overline{AO} = \overline{BO}$, pois ambos são raios da circunferência, com isso o triângulo ABO será isósceles de base AB, logo os ângulos $O\hat{A}B = O\hat{A}M$ e $O\hat{B}A = O\hat{B}M$ são congruentes. Para que os triângulos AMO e BMO sejem congruentes pelo caso $L.A.L_o$ os ângulos $A\hat{M}O$ e $B\hat{M}O$ devem ser congruentes. Como esses dois ângulos são suplementares, cada um deles deve medir 90°, ou seja, o segmento OM deve ser a altura do triângulo AOB relativa ao lado AB, se e somente se isso ocorrer os triângulos AMO e BMO serão congruentes, o que implicará que $\overline{AM} = \bar{B}M$.

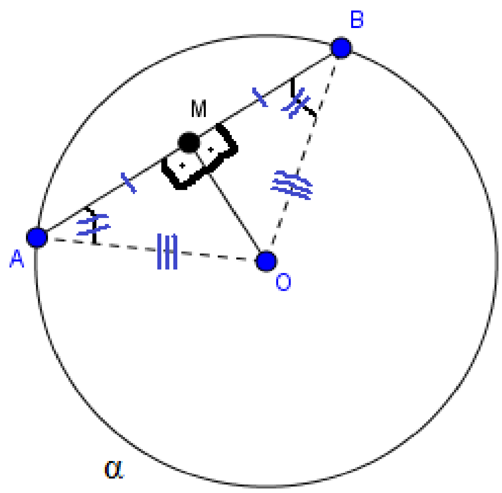
Figura 2.12: Triângulo isósceles no interior de uma circunferência



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Se $\overline{AM} = \overline{BM}$, o triângulo AOB será isósceles de base AB, com isso os ângulos $O\hat{A}B = O\hat{A}M$ e $O\hat{B}A = O\hat{B}M$ serão congruentes, com efeito teremos nos triângulos AMO e BMO, $\overline{AO} = \overline{BO},\ O\hat{A}M = \hat{B}M,\ \overline{AM} = \overline{BM}$, logo pelo caso de congruência de triângulos L.A.L, esses dois triângulos serão congruentes. Em consequência desse fato os ângulos $A\hat{M}O$ e $B\hat{M}O$ serão congruentes, como esses dois ângulos são suplementares, concluímos que cada um deles medem 90°, com isso temos que $OM \perp AB$, como queríamos demonstrar.

Figura 2.13: Prova de que o triângulo no interior da circunferência é isósceles



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

3.2 Aplicação dos casos de Semelhança de Triângulos.

3.2.1 Relações métricas no triângulo retângulo

Proposição (12):

Se ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c,\ \overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = x, \overline{BH} = y$ e $\overline{AB} = h$, então:

(a) $a.h = b.c$

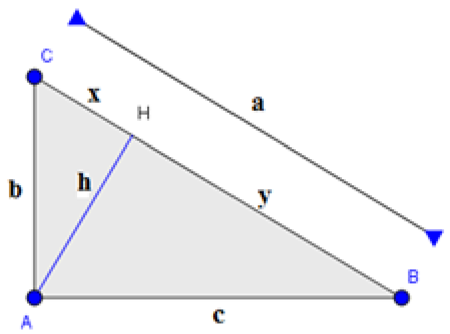
(b) $a.x = b^2$ e $a.y = c^2$

(c) $a^2 = b^2 + c^2$

(d) $x.y = h^2$

Prova:

Figura 2.14: Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

(a) e (b). Como $A\widehat{H}B = C\hat{A}B \ e \ A\hat{B}H = C\hat{B}A$, os triângulos $BAH \ e \ BCA$ são semelhantes pelo (caso AA), como a correspondência de vértices $A \leftrightarrow C,\ H \leftrightarrow A, B \leftrightarrow B$. Assim,

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \ e \ \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

ou, ainda,

$$\frac{y}{c} = \frac{c}{a} \ e \ \frac{h}{b} = \frac{c}{a}.$$

De onde $ah = bc \ e \ ay = c^2$. A relação $a.x = b^2$ é provada de maneira análoga.

(c) Somando membro a membro as duas relações do item (b), obtemos a igualdade $a(x + y) = b^2 + c^2$. Mas, uma vez que $x + y = a$, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

(d) Multiplicando membro a membro as duas relações do item (b), obtemos $a^2.xy = (bc)^2$ ou, ainda, $x.y = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 = h^2$, onde utilizamos o item (a) na última igualdade acima e concluímos a demonstração.

O item (c) da proposição acima é o T**eorema de Pitágoras.**

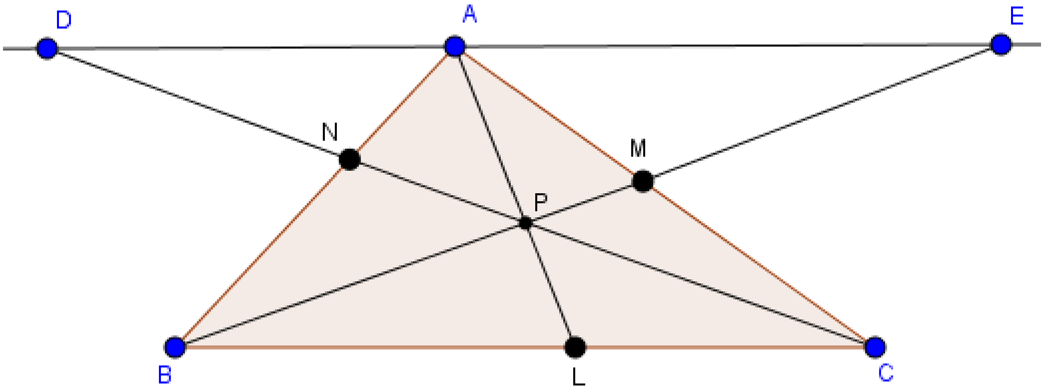
3.2.2 Teorema de Ceva

Num triângulo ABC, três cevianas $\overline{AL}, \overline{BM} \ e \ \overline{CN}$ são concorrentes, se e somente se, $\frac{AN}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA} = 1$.

Prova:

Inicialmente vamos supor que $AL, BM \ e \ CN$ sejam concorrentes em P.

Figura 2.15: Triângulo *ABC* e as três cevianas *AL*, *BM* e *CN*



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Traçando uma reta paralela ao lado BC pelo vértice A, temos que os triângulos:

$BCM \sim AEM, pelo\ caso\ de\ semelhança\ (AA). Assim, \frac{MA}{MC} = \frac{AE}{BC}$ (i)

$BCN \sim AND, pelo\ caso\ de\ semelhança\ (AA). Assim, \frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AD}$ (ii)

$LCP \sim APD, pelo\ caso\ de\ semelhança\ (AA). Assim, \frac{LC}{AD} = \frac{LP}{PA}$ (iii)

$BPL \sim APE,\ pelo\ caso\ de\ semelhança\ (AA). Assim, \frac{BL}{AE} = \frac{LP}{PA}$ (iv)

De (iii) e (iv), temos: $\frac{LC}{AD} = \frac{BL}{AE}$ (v),

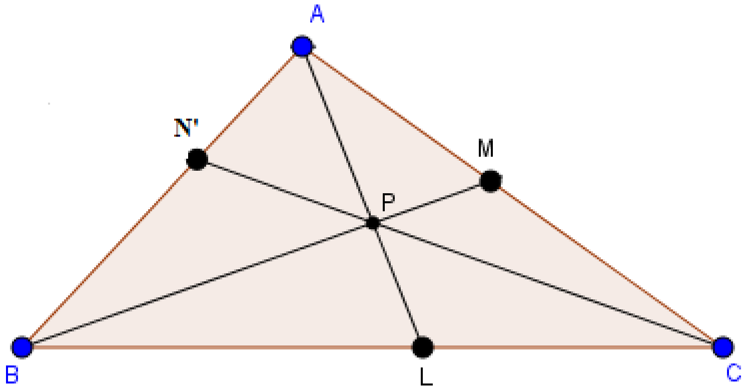
Multiplicando (i), (ii) e (v), segue que:

$\frac{MA}{MC} . \frac{NB}{NA} . \frac{LC}{BL} = \frac{AE}{BC} . \frac{BC}{AD} . \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AE} . \frac{BC}{BC} . \frac{AD}{AD}$,

Como, $\frac{AE}{AE} . \frac{BC}{BC} . \frac{AD}{AD} = 1$, então concluímos que:

$$\frac{MA}{MC} . \frac{NB}{NA} . \frac{LC}{BL} = 1$$

Figura 2.16: Recíproca do Teorema de Ceva



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Reciprocamente, vamos supor que vale: $\frac{NA}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{MC}{MA}=1$, e que $BM\cap AL=\{P\}$. Estendendo o segmento PC até o lado AB, num ponto N'. Precisamos mostrar que $N'=N$.

De fato, como $AL, BM\ e\ CN'$ são concorrentes em P, segue da parte já provada que:

$$\frac{N'A}{N'B}.\frac{BL}{LC}.\frac{MC}{MA}=1$$

Como por hipótese: $\frac{NA}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{MC}{MA}=1$, temos que:

$$\frac{N'A}{N'B}=\frac{NA}{NB}\Rightarrow N'=N$$

Portanto, as três cevianas são concorrentes.

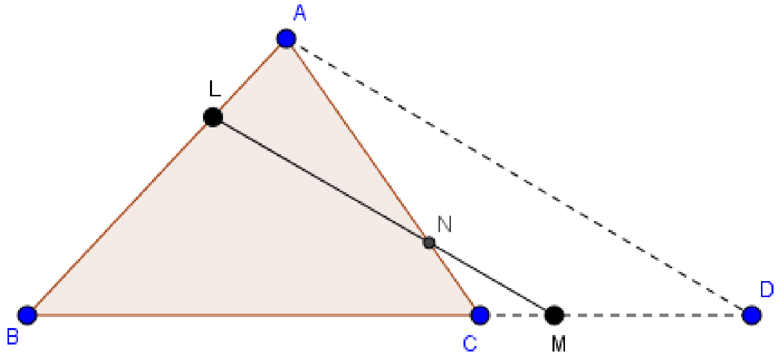
3.3 Teorema de Menelaus

Sejam três pontos $L, M\ e\ N$ localizados respectivamente nas retas suporte dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{CA}$ de um triângulo ABC qualquer, com $L, M\ e\ N$ diferentes dos vértices. Então $L, M\ e\ N$ são colineares se, e somente se:

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}}.\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=1.$$

Prova:

Figura 2.17: Triângulo ABC e duas retas suportes $LM\ e\ AD$



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Inicialmente, suponha que $L, M\ e\ N$ sejam colineares. Traçando por A uma reta paralela a $\overline{LM}$ e aplicando o Teorema de Tales, temos:

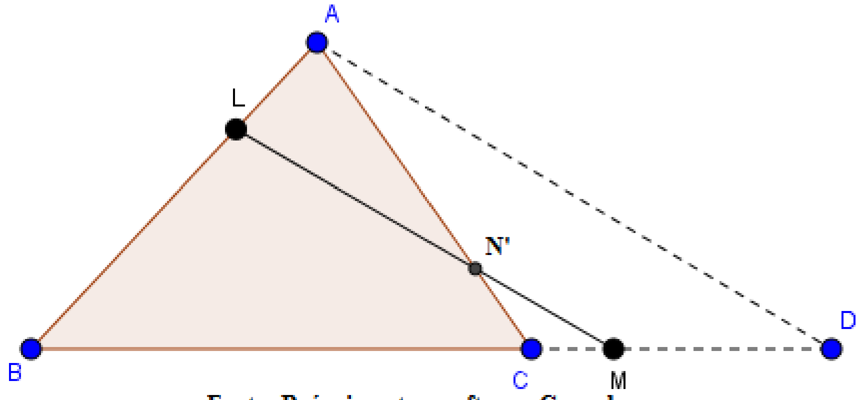
$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}}=\frac{\overline{MD}}{\overline{MB}}\Rightarrow\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}}.\frac{\overline{MB}}{\overline{MD}}=1\ \text{(i)}$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\Rightarrow\frac{\overline{MD}}{\overline{AN}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{MC}}=1\ \text{(ii)}$$

Multiplicando (i) e (ii), temos:

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{MC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$$

Figura 2.18: Recíproca da prova do Teorema de Menelaus



Fonte: Próprio autor, software Geogebra

Reciprocamente, vamos supor que vale: $\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = 1$, e que $L, M\ e\ N$ são pontos localizados, respectivamente, nas retas suportes dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{CA}$ do triângulo ABC. Vamos traçar uma reta por $L\ e\ M$ cortando o lado AC em N'. Assim, $L, M\ e\ N'$ são colineares, por construção. Logo pela parte já provada segue que:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{N'C}{N'A} = 1$$

Como por hipótese,

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

Concluímos, que:

$$\frac{N'C}{N'A} = \frac{NC}{NA} \Rightarrow N = N'.$$

Portanto, os pontos $L, M\ e\ N$ são colineares.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi feito inicialmente um estudo sobre os triângulos, suas classificações quanto aos lados e aos ângulos, a condição de existência e a desigualdade triangular, suas principais cevianas, os pontos notáveis de um triângulo como: baricentro, circuncentro e ortocentro, todos os casos de congruência e semelhança de triângulos, as relações métricas no triângulo retângulo, assim como o Teorema de Tales, de Ceva e de Menelaus.

Finalmente foram feitas várias aplicações clássicas dos casos de congruência e semelhança de triângulos, onde as construções dessas aplicações foram realizadas pelo software Geogebra.

A realização desse trabalho me proporcionou a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos nos conteúdos aqui abordados, o que contribuiu de forma significativa para a minha formação docente.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] REZENDE, Eliane Quelho Frota. QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim, *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. 2*ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

[2] MUNIZ NETO, Antônio Caminha, *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] MORGADO, Augusto César, *Geometria* vol.1. Rio de Janeiro: Editora S/A, 1990.

[4] MORGADO, Augusto César, E. WAGNER, M. JORGE. *Geometria II: métrica plana.* Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002.

[5] WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P.. *Construções Geométricas.* Coleção Professor de Matemática. 4 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[6] BARBOSA, João Lucas Marques, *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: SBM 2000.

[7] BOYER, Carl B., *História da Matemática.* 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

[8] EVES, Howard, *Introdução a História da Matemática.* Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.