UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA – PROFMAT

CÉLIO FURLANI

O USO DE CONCEITOS VETORIAIS EM GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

PONTA GROSSA
2016

CÉLIO FURLANI

O USO DE CONCEITOS VETORIAIS EM GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada como parte dos quesitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi

PONTA GROSSA
2016

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Furlani, Célio
F985 O Uso de conceitos vetoriais em geometria analítica no ensino médio com o auxílio do geogebra/ Célio Furlani. Ponta Grossa, 2016.
132f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Luciane Grossi.

1.Geometria analítica. 2.Ensino médio. 3.Vetores e GeogebraBook. I.Grossi, Luciane. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 516.3

TERMO DE APROVAÇÃO

Célio Furlani

"O USO DE CONCEITOS VETORIAIS EM GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

LGrossi

Orientadora: Prof. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Profa. Dra. Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Fabiane de Oliveira

Profa. Dra. Fabiane de Oliveira
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Ponta Grossa, 21 de Outubro de 2016.

Dedico este trabalho a minha família, esposa e meus estimados filhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar saúde e sabedoria para enfrentar os desafios e vencê-los.

A minha mãe Maria e meu pai José que sempre acreditaram em meu potencial e me incentivaram a estudar.

A minha esposa Denise e aos meus filhos Lucas e Gustavo pela paciência e compreensão nos momentos em que não estava presente, devido à dedicação aos estudos que o PROFMAT impõe.

À Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi pela dedicação e atenção que me deu durante a produção desse trabalho.

Aos meus amigos da turma 2012, pelas trocas de experiências e pelos momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos.

Aos alunos que participaram das atividades e que deram vida a este trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira e Prof.ª Dr.ª Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro, pelo tempo dedicado à análise deste trabalho e pelas importantes contribuições.

Ao corpo docente do PROFMAT da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela atenção e estímulo durante o curso.

RESUMO

Ensinar matemática para os alunos do Ensino Médio é um grande desafio, pois estes alunos encontram-se inseridos no meio digital e as aulas tradicionais não despertam atenção e interesse. Assim, a utilização de recursos tecnológicos como o computador pode ser de grande valia, pois o professor pode associar a teoria à prática e vice-versa, envolvendo-os em atividades que possibilitam uma aprendizagem significativa estimulando a curiosidade. Este trabalho tem por objetivo propor uma abordagem alternativa para o ensino de geometria analítica no ensino médio, diferente das utilizadas dos livros didáticos, e para tanto foi utilizado recursos computacionais através de uma sequência de atividades realizadas e disponibilizadas no GeogebraBook como ferramenta de construção geométrica e dinâmica; onde foram incluídos conceitos de vetores com a finalidade de facilitar o entendimento do assunto. A proposta foi desenvolvida em uma escola estadual, situada na cidade de Itararé, estado do São Paulo, onde foi sugerido aos alunos do Terceiro Ano do Ensino Médio uma série de atividades desenvolvidas pelo autor e disponibilizadas no GeogebraBook. Destaca-se a importância dos recursos tecnológicos para o ensino de matemática e o papel do professor frente aos avanços da tecnologia, como agente facilitador da interdisciplinaridade e como motivador e mediador do conhecimento.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Ensino médio, Vetores e GeogebraBook.

ABSTRACT

To teach Mathematics to highschool students is a big challenge, the traditional classes , for these students used to digital environment, don't arouse much mind and interest. So, the use of technological resourses, as the computer, can be valuable, for the teacher can connect theory to practice and vice versa; involving them in activities that enable a significant learning, stimulating the curiosity. This task has as its goal to propose an alternative approach to the Analitcs Geometry highschool students different from the ones found in the didactic books, so using computer resourses through a sequence of exercises accomplished and provided in the GeogebraBook as tool of dynamics and geometric construction. And it was included the concept of vectors in order to facilitate the understanding of the matter. The proposal was done at state school, located in Itarare, São Paulo; where it was suggested to the final years highschool students a sequence of exercises developed and provided by the GeogebraBook author.Outstanding the importance of the tecnological resourses in the Mathematics teaching and the role of the teacher forefront the technology progress, as agent that facilitates the interdisciplinarity and as knowledge mediator and motivatror.

Key-words: Analitics Geometry, Highschool, Vectors and GeogebraBook.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EaD	Educação a Distância
MEC	Ministério da Educação
OBMEP	Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCNEM+	Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Saeb	Sistema de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ensinar matemática tem se tornado uma tarefa cada vez mais difícil, primeiramente devido ao pré-conceito que se tem com a disciplina ao considerá-la difícil e enfadonha, depois pelo desafio que o professor tem de despertar o interesse dos alunos e motivar a sua participação durante suas aulas. Dessa forma, o professor deve procurar alternativas para ensinar de forma diferenciada com o intuito de chamar a atenção do aluno, tornando assim a aula atrativa e dinâmica.

De acordo com os resultados obtidos em avaliações nacionais, o ensino de matemática não tem obtido bons resultados.

Segundo Tokarnia (2016), as médias de 2015 no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) colocam os estudantes do ensino médio no nível 2 de 10, o pior desempenho dos últimos 20 anos.

Isso pode ser reflexo da desmotivação dos alunos com a disciplina ou talvez pela falta de pré-requisitos necessários para uma aprendizagem significativa. Então, qual será o motivo da desmotivação desses alunos? O que os professores devem fazer para motivar seus alunos e resgatar a importância do ensino de matemática?

Os alunos, na maioria das vezes, possuem muitas dificuldades nas atividades propostas devido à falta de conhecimentos prévios. Assim, muitos alunos possuem uma espécie de “aversão” à matemática e devido as suas dificuldades não conseguem relacionar os conteúdos com o seu cotidiano, dessa forma, não reconhecem o sentido das atividades propostas e assim não dão a devida importância ao estudo da matemática. Em consequência ao exposto, é comum o professor escutar dos alunos: Pra que serve esse conteúdo e onde vou usá-lo na minha vida?

A Geometria Analítica, por exemplo, é um conteúdo da matemática em que os alunos possuem muitas dificuldades, pois geralmente é apresentado de forma abstrata, fechada e com roteiro definido para resolução de exercícios, sendo assim, os alunos não encontram relação com o seu cotidiano e nem com o espaço em que vivem.

A atividade de ensinar matemática, muitas vezes ocorre de forma restritiva, onde o professor é o detentor do conhecimento e apresenta a sua maneira de resolução das atividades através de listas de exercícios, onde os alunos apenas fazem a reprodução dessas atividades seguindo o método do professor.

A sociedade atual está em pleno desenvolvimento, se evoluindo constantemente, onde as descobertas ocorrem aceleradamente, principalmente na área da tecnologia, a qual vem nos proporcionando muitos benefícios, melhorando nossa qualidade de vida e diversificando as formas de ter acesso ao conhecimento. A escola possui um papel essencial na sociedade e não pode desprezar o uso dos recursos tecnológicos, sendo assim o professor deve acompanhar essa evolução para atrair a atenção e cativar seus alunos de maneira que o processo ensino aprendizagem aconteça naturalmente. Vale salientar, que o papel do professor mudou, mas ainda é primordial no processo ensino aprendizagem.

A sociedade evoluiu aos longos dos anos e o papel do professor não é o mesmo, nesse sentido a busca de novas maneiras de ensinar e a adaptação aos avanços tecnológicos é fundamental para motivar os alunos e resgatar a importância do ensino da matemática. Dessa forma, o docente deve buscar capacitar-se continuamente, seja para conseguir usar os recursos tecnológicos ou para inovar sua metodologia e implantar novas maneiras de ensinar.

O eixo central deste trabalho é contribuir para o ensino de Geometria Analítica utilizando recursos tecnológicos através de atividades que conduza o aluno a atividade de pensar, conjecturar, formar hipóteses e tirar suas conclusões de forma que o professor atue como mediador do conhecimento, ou seja, que o professor deixe o aluno buscar suas respostas sem seguir um caminho imposto por ele. Para tanto, as atividades foram planejadas e aplicadas levando em consideração a formalização teórica que é exigida pela matemática.

Assim, a presente proposta de ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio foi desenvolvida em uma escola estadual, situada na cidade de Itararé no estado do São Paulo, onde abordou uma sequência de atividades utilizando o conceito de Vetores e o *software* Geogebra como ferramenta de construção geométrica e dinâmica. O Geogebra possui diversas vantagens para o ensino de matemática, pois com sua capacidade de visualização geométrica e dinâmica, permite ao aluno compreender as teorias matemáticas utilizadas nas resoluções das atividades propostas, aguçando assim a curiosidade.

Ao utilizar o Geogebra, é possível observar passo a passo o processo de construção e acompanhar as transformações ocorridas no objeto de estudo ao realizar alguma ação sobre o mesmo ou quando as figuras sofrem algumas modificações, auxiliando a compreensão dos conteúdos e dando significado ao mesmo.

Além da utilização dos recursos tecnológicos outro foco interessante deste trabalho é o uso do conceito de vetores, pois quando se usa as coordenadas dos vetores consegue-se resolver diversos problemas geométricos de forma mais simples e isso é um fator facilitador para a compreensão do conteúdo. A utilização do conceito de vetores aliado ao uso do Geogebra como ferramenta de construção dinâmica facilita a compreensão dos alunos, que podem visualizar e observar em tempo real as reações sofridas pelas figuras estudadas quando ocorrem mudanças na sua estrutura.

Vale a pena ressaltar que a utilização do Geogebra não substituirá os cálculos, sua função é de testar propriedades e auxiliar a visualização das construções geométricas para facilitar a compreensão dos conteúdos.

Diante do exposto, este trabalho apresenta sugestões de atividades práticas de forma diferenciada das apresentadas nos livros didáticos, com a inclusão do conceito de vetores para facilitar a compreensão dos conteúdos, bem como para descrever e representar o espaço em que o aluno vive, com o auxílio de recursos tecnológicos realizados no Geogebra e disponibilizados no (GeogebraBook)[1].

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral:

Inserir o conceito de vetores no conteúdo de Geometria analítica utilizando recursos tecnológicos através do Geogebra, estimulando a curiosidade, melhorando a participação, o comprometimento e o desempenho dos alunos, facilitando a compreensão dos conteúdos estudados no 3º ano do Ensino Médio, através de uma sequência de atividades realizadas no Geogebra e disponibilizadas no GeogebraBook.

[1] GeogebraBook é uma coleção de materiais e planilhas baseadas no Geogebra. Ele permite que você organize suas próprias produções do Geogebra ou seus materiais favoritos do GeogebraTube, disponibilizando-os na forma de um livro online interativo e dinâmico.

1.1.2 Objetivos Específicos:

- Investigar através de uma sequência de atividades realizadas no GeogebraBook as contribuições e as dificuldades enfrentadas pelos alunos;
- Analisar o desempenho e o envolvimento dos alunos nas atividades através de suas produções realizadas na sala de informática e na sala de aula;
- Construir animações utilizando o Geogebra e os conceitos estudados neste trabalho.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura desse trabalho foi organizada em sete capítulos, sendo um deles a introdução, outros seis capítulos referentes ao referencial teórico e desenvolvimento da proposta e o último a conclusão.

No segundo capítulo é apresentada a importância do uso das tecnologias no ensino de matemática nos dias atuais.

O terceiro capítulo aborda o papel do professor frente aos avanços tecnológicos, como agente facilitador da interdisciplinaridade e como mediador do conhecimento.

O quarto capítulo constitui-se de um breve histórico dos matemáticos que fizeram contribuições importantes no século XVII, as quais deram origem a Geometria Analítica.

No quinto capítulo é feita uma apresentação do Geogebra e de suas ferramentas, dando ênfase nas ferramentas utilizadas nas atividades realizadas nesse trabalho.

No sexto capítulo é apresentada uma sequência de atividades realizadas pelo autor, com a inclusão do conceito de vetores para facilitar a compreensão dos conteúdos. Estas atividades foram disponibilizadas no geogebraBook, com o intuito de motivar a participação e o comprometimento dos alunos, deixando a aula mais atraente.

O sétimo e último capítulo apresenta as considerações finais do trabalho, como foram aplicadas as atividades, as dificuldades encontradas e as possíveis soluções.

2 A IMPORTÂNCIA DO USO DAS TECNOLOGIAS

Uma preocupação constante dos professores é de desenvolver e implementar estratégias de ensino para que o processo de ensino aprendizagem ocorra de fato, principalmente sobre os conteúdos de matemática, pois é uma disciplina considerada difícil para os alunos devido sua simbologia e abstração. Os métodos utilizados pela maioria dos professores ainda são os tradicionais onde o professor apresenta o conceito com um exercício modelo e exercícios de fixação, não seguem a evolução da ciência e da tecnologia, ou seja, necessitam de atualização.

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBROSIO,1989, p. 15)

Percebe-se, também que muitos alunos estão desinteressados e consideram as aulas de matemática maçantes e sem sentido. Os conteúdos são apresentados apenas através de exemplos e fórmulas prontas, sem contextualização nenhuma. Nas aulas, os alunos conseguem reproduzir o conteúdo apresentado em forma de exercícios de fixação, porém quando o mesmo conteúdo é apresentado em forma de situação problema, esses alunos não possuem o mesmo desempenho.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) para as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, apontam que:

> Não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 2001, p. 43)

D'Ambrósio (1996) menciona que o rendimento dos alunos está cada vez menor. Os alunos consideram os conteúdos desinteressantes e ultrapassados. Esse cenário é preocupante, pois o envolvimento do aluno com a sua aprendizagem é essencial.

> "Na disciplina de matemática como em qualquer outra disciplina escolar o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 23)

Nesse contexto, percebe-se que as aulas usando somente o quadro de giz, sem auxílio de recursos tecnológicos, apenas reproduzindo os conteúdos dos livros didáticos não atraem a atenção dos alunos. Os recursos tecnológicos têm evoluído continuamente e com alunos cada vez mais inseridos na era digital, torna-se primordial que o professor busque novas maneiras de ensinar, adequando as metodologias utilizadas às necessidades dos alunos. A matemática precisa ser "descomplicada", os discentes precisam reconhecer sua importância e utilidade no nosso cotidiano.

D'Ambrosio & Barros (1988) afirmam que:

> Atividades com lápis e papel ou mesmo quadro e giz, para construir gráficos, por exemplo, se forem feitas com o uso dos computadores, permitem ao estudante ampliar suas possibilidades de observação e investigação, porque algumas etapas formais do processo construtivo são sintetizadas.

As atividades diferenciadas com uso da tecnologia despertam muito mais o interesse dos alunos e são vários artigos que defendem o seu uso em sala de aula.

Percebe-se que estas novas tecnologias vêm ocupando grande parte do tempo dos jovens e são essenciais no seu cotidiano. A inserção tecnológica na vida dos alunos é tanta que mesmo durante a aula, torna-se difícil controlar o uso do celular. São comuns as ocorrências de uso indevido e não pedagógico de aparelhos celulares em sala de aula mesmo havendo leis que proíbem os alunos a usarem estes aparelhos durante as aulas.

Segundo Silva (2015):

> Os professores em geral não sabem ao certo como lidar com os nativos digitais que foram criados diferentes das outras gerações. Na verdade, além de terem nascido e crescido fazendo uso das diferentes tecnologias, seus pais os criaram com muito feedback e diálogo. Sim, são alunos que impactam os seus professores, não somente pelo extremo domínio

> tecnológico mas também pelos seus novos comportamentos que são carregados de tributos interativos, pensamento não linear, capacidade multitarefa, gosto por trabalhar colaborativamente e flexibilidade frente às mudanças. São alunos que anseiam por novos modelos de aprendizagem.

Para Pretto (1999), vivemos em uma sociedade chamada de comunicação generalizada ou rede. E esta sociedade dá origem a alunos sedentos pela inclusão destas mídias na escola. Nossos alunos são os chamados nativos digitais porque nasceram e cresceram com uso de inúmeras tecnologias, como videogames, Internet, telefone celular, MP3, IPOD, entre outras. Ainda segundo o autor, o professor deve se atualizar e se capacitar, não ignorando os recursos tecnológicos.

Dessa forma, convém buscar formas alternativas de ensino que utilizem essas ferramentas como metodologia de ensino e aprendizagem.

> Não há dúvida de que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação. Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, sites educacionais, softwares diferenciados transformam a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço do ensino-aprendizagem, onde, anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro e a voz do professor. (Kenski, 2007, p. 46)

Não se pode negar que os recursos tecnológicos são importantes para o ensino, porém o professor precisa adequá-los de maneira pedagógica, utilizando-os de forma contextualizada, buscando despertar o interesse do aluno pelo conhecimento.

Segundo as Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. (PCNEM+):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (Brasil, 2002, p. 111)

Sobre a prática pedagógica, (GRAVINA e BASSO, 2012, p. 12) também pontuam que as “rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influem nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir”. Em mundo globalizado, exige-se conhecer e utilizar adequadamente os diversos recursos tecnológicos existentes. Por isso, é cabível mostrar esses recursos aos alunos na escola e ensiná-los a forma adequada de usar a tecnologia como meio de adquirir conhecimento.

Diante de todos esses pontos positivos em relação ao uso da tecnologia, conclui-se que, atualmente, o professor deve conhecer e utilizar os recursos tecnológicos para motivar os alunos a participar das aulas para conseguir bons resultados no processo ensino aprendizagem.

3 O PAPEL DO PROFESSOR

Neste capítulo é abordado o papel do professor frente aos avanços tecnológicos, é questionado qual deve ser sua conduta diante de um ambiente cada vez mais mediático e com alunos inseridos e adaptados a este meio que para muitos professores ainda é inexplorado.

3.1 FRENTE AOS AVANÇOS TECNOLÓGICOS

Os avanços tecnológicos são perceptíveis no nosso cotidiano, trouxe vários benefícios, como o conforto e a facilidade de realizar várias atividades diárias, assim, tornaram-se essenciais ao estilo de vida moderna. Os computadores e celulares estão cada vez mais evoluídos e quase todos os setores fazem o uso desses aparelhos.

No Brasil o número de celulares já ultrapassou o número de habitantes. A qualidade de vida melhorou frente a esses avanços. Na educação, os cursos de Educação a Distância (EaD) possibilitaram a muitas pessoas o acesso à educação com a facilidade de fazê-los sem sair de casa, mas, de acordo com os índices de desempenho dos alunos ainda é preciso melhorar.

Segundo os PCNEM:

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (BRASIL, 2001, p. 41)

O impacto da tecnologia exige uma mudança na Educação e para mudar é necessário que o professor faça algumas reflexões no sentido de verificar qual é o seu papel frente a esses avanços, a fim de obter uma melhora na qualidade de ensino. Dessa forma, o professor deve estar disposto a se preparar e buscar cursos de atualização para acompanhar a velocidade do desenvolvimento da tecnologia.

De acordo com Moran (2004, p.15):

> o professor agora tem que se preocupar, não só com o aluno em sala de aula, mas em organizar as pesquisas na internet, no acompanhamento das práticas no laboratório, dos projetos que serão ou estão sendo realizados e das experiências que ligam o aluno à realidade.

Diante desse momento que exige a mudança do professor e da grande utilização das tecnologias no nosso dia-a-dia e pela sociedade em geral, é importante o desenvolvimento e a utilização de recursos tecnológicos para que surjam novas práticas pedagógicas.

Esta sociedade digital convida a todos a uma reflexão, revisão e atualização do modelo de escola existente. Vários princípios, abordagens, modelos e métodos pedagógicos utilizados nas escolas precisam ser atualizados. O contexto atual exige mudanças coerentes e que surtam efeito.

Claro que não é simples fazer esta transformação e ela ocorrerá gradativamente, não surgirá pronta e acabada. Uma forma de solucionar estes problemas é valorizar a opinião dos alunos, propiciando um diálogo entre professores e alunos na busca do saber. Dessa forma, se abrirá a possibilidade de construir coletivamente e colaborativamente novas práticas pedagógicas que trarão melhorias para a educação.

O *Geogebra* pode ser uma boa alternativa de inovação das práticas pedagógicas, ele nos mostra uma nova abordagem para o conteúdo, devido ao dinamismo que ele oferece através das observações das transformações sofridas nas estruturas das figuras estudadas.

O uso desse recurso tecnológico favorece a experimentação matemática e facilita a visualização das formas geométricas e algébricas, onde o aluno pode acompanhar simultaneamente as modificações sofridas quando ocorre alguma alteração na estrutura do objeto estudado.

De acordo com Dias (2009, p.49):

> A utilização de softwares de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem de Geometria tanto pode ser mais uma ilustração para a aula como um rico material didático que instiga a curiosidade dos alunos e aguça seu espírito investigativo, levando-os a elaborar conjecturas sobre situações diversas.

Porém, o uso desses recursos deve ser muito bem pensado pelo professor que deve ter claro seus objetivos e pensar que aulas preparadas com esses recursos atraem à atenção e o interesse dos alunos que estão acostumados com as tecnologias, as quais fazem parte de suas vidas.

Segundo Silva (2015):

> [...] necessário será criar intimidade e domínio com as novas tecnologias para bem realizar o trabalho docente. Não se pode esquecer que nativos

> digitais, não são apenas muito interessados em tecnologia mas principalmente em aprender através dela. Este pessoal foi alfabetizado através da tecnologia móvel acessando complexas plataformas tecnológicas.

Sendo assim, a atualização profissional é de suma importância no processo de ensino aprendizagem, os recursos tecnológicos estão em constante evolução e os professores devem se capacitar continuamente para entender e usar esses recursos a seu favor, aguçando a curiosidade dos alunos e trocando experiências na busca do conhecimento.

3.2 COMO PROMOTOR E MEDIADOR DA INTERDISCIPLINARIDADE

Porém, apenas a atualização profissional não é suficiente, seguindo as orientações do PCNEM, o professor deve buscar a interdisciplinaridade e a contextualização dos conteúdos através de atividades desafiadoras, deixando os alunos encontrarem da sua maneira as soluções, considerando seus conhecimentos prévios.

D’Ambrosio (2009, p. 85) também ressalta a importância dos conhecimentos prévios dos alunos: “o professor não é o sol que ilumina tudo. Sobre muitas coisas ele sabe bem menos que seus alunos. É importante abrir espaço para que o conhecimento dos alunos se manifeste.”

Os PCNEM apontam que:

> Um dos pontos de partida para esse processo é tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata. Isso não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado, desde seu início, garantindo um diálogo efetivo. A partir disso, é necessário e possível transcender a prática imediata e desenvolver conhecimentos de alcance mais universal. (BRASIL, 2001 p. 7)

Os fenômenos que acontecem no mundo, não são separados por disciplinas. Eles não acontecem desconectados, porém são tão complexos que se dividem em áreas específicas do conhecimento, que são as disciplinas. Nesse sentido, o mundo é interdisciplinar e separá-lo em disciplinas específicas pode prejudicar o processo de ensino aprendizagem.

Os PCNEM+ destacam que:

> Cada disciplina ou área de saber abrange um conjunto de conhecimentos que não se restringem a tópicos disciplinares ou a competências gerais ou habilidade, mas constituem-se em sínteses de ambas as intenções formativas. Ao se apresentarem dessa forma, esses temas estruturadores do ensino disciplinar e seu aprendizado não mais se restringem, de fato, ao que tradicionalmente se atribui como responsabilidade de uma única disciplina. Incorporam metas educacionais comuns às várias disciplinas da área e das demais e, também por isso, tais modificações de conteúdo implicam modificações em procedimentos e métodos, que já sinalizam na direção de uma nova atitude da escola e do professor. (BRASIL, 2002, p.13)

A interdisciplinaridade estabelece uma intercomunicação entre as várias disciplinas do currículo escolar que pode explicar um fenômeno nas visões das disciplinas interligadas, dessa forma, os alunos podem ter visões diferentes de um mesmo objeto, dando sentido no conteúdo estudado.

De acordo com as (DCN) Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (2013, p. 28): “A interdisciplinaridade pressupõe a transferência de métodos de uma disciplina para outra. Ultrapassa-as, mas sua finalidade inscreve-se no estudo disciplinar”.

Fortes (2009, p. 4) afirma que:

> Para que ocorra a interdisciplinaridade não se trata de eliminar as disciplinas, trata-se de torná-las comunicativas entre si, concebê-las como processos históricos e culturais, e sim torná-la necessária a atualização quando se refere às práticas do processo de ensino aprendizagem.

A matemática possui grande importância em diversas áreas, sendo a base do conhecimento para outras disciplinas, dessa forma, não deve ser ensinada isoladamente.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> a vitalidade da Matemática deve-se também ao fato de que, apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária: na indústria, no comércio e na área tecnológica. Por outro lado, ciências como Física, Química e Astronomia têm na Matemática ferramenta essencial. (BRASIL, 1997, p. 23)

Com base nisto, é importante a utilização do conceito de vetores no ensino de Geometria Analítica, no sentido de obter uma aproximação das disciplinas de Matemática e Física, agindo como um fator facilitador do entendimento do assunto no processo ensino aprendizagem.

Atualmente, o uso do conceito de vetores aparece somente nas aulas de Física, mas como é um conteúdo matemático, o mesmo pode e deve ser aplicado nas aulas de matemática.

Pensando nisso, as atividades propostas neste trabalho foram organizadas em situações de aprendizagem que favorecem as diversas interações entre diferentes disciplinas, superando as possíveis fragmentações entre elas.

Diante dos aspectos aqui apontados, o professor de matemática deve buscar inovar sua metodologia, se atualizar para ampliar seus conhecimentos, tantos na sua disciplina, como em outras, para dar significado aos conteúdos. Dessa forma, deve optar por materiais didáticos diversificados que sirvam de apoio à aprendizagem a fim de relaciona-lo com outras disciplinas, buscando o sucesso no processo ensino aprendizagem.

Quando as atividades propostas em sala de aula submetem o aluno a organizar suas ideias, fazer conjecturas e não apenas dar uma resposta correta, promove o desenvolvendo do raciocínio e estimula o aluno a ter sua própria maneira de pensar e agir em busca das soluções das atividades, sem sofrer influência de respostas pré-estabelecidas pelo professor.

Vale ressaltar que, o professor não é o dono da verdade, portanto não pode apresentar um modelo ideal na resolução das atividades, mas deve deixar o aluno observar, pensar, formular hipóteses e agir da sua maneira de acordo com sua vivência.

Dessa forma, o aluno assume um papel ativo nas resoluções das atividades e o professor assume um papel de mediador, que acompanha e o estimula a explorar vários caminhos com o intuito de contribuir com o processo de ensino e aprendizagem.

> É preciso, sobretudo, e aí já vai um destes saberes indispensáveis, que o formando, desde o princípio mesmo de sua experiência formadora, assumindo-se como sujeito também da produção do saber, se convença definitivamente de que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção (FREIRE, 2010, p. 22).

O professor como mediador de conhecimentos precisa considerar os conhecimentos prévios dos alunos, seus interesses, sua realidade e o que faz parte de sua vivência cotidiana. A partir desta análise prévia, será possível trabalhar os conteúdos de forma mais contextualizada, ligando teoria e prática. O aluno precisa reconhecer a importância dos conteúdos estudados e como ele será utilizado em seu dia-a-dia, dessa forma, seu interesse será despertado.

Segundo o PCN:

> O professor para desempenhar o seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno ele precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (BRASIL, 1998, p. 36).

Dessa maneira, o professor assumirá o papel de mediador do conhecimento e motivador do processo de ensino aprendizagem, onde utiliza os recursos tecnológicos como computadores e softwares de maneira estratégica propondo atividades que faça o aluno pensar e refletir para poder tirar suas conclusões e entender os conteúdos ensinados.

4 GEOMETRIA ANALÍTICA, SUA ORIGEM HISTÓRICA

Neste capítulo é abordada uma parte da história da matemática, especificamente a partir do século XVII onde começou a desenvolver os conceitos que originaram a geometria analítica e é apresentado um breve histórico dos dois matemáticos que contribuíram para esse desenvolvimento.

O contexto histórico é tão importante que de acordo com os PCNEM+ lê-se que:

> [...] entender o mundo do século 17, que deu origem ao cartesianismo, pode ser uma excelente oportunidade para que o aluno perceba o desenvolvimento histórico do conhecimento e como certos momentos dessa história transformaram a ciência e a forma de viver da humanidade. (BRASIL, 2001, p. 124)

Antes do século XVI os egípcios e os gregos já tinham uma noção de coordenadas, onde as usavam para medir terras e confeccionar mapas.

A Geometria Analítica nasceu com transferência da investigação geométrica para a algébrica e isso aconteceu a partir do século XVII, onde a álgebra começou a se desenvolver e a sua união com a geometria deu origem a geometria analítica. Dois Franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) foram contemporâneos e fundamentais para esse novo método da geometria.

Howard Eves, no seu livro Introdução à História da Matemática, afirma que:

> As apreciações precedentes sobre a geometria analítica parecem confundir o assunto com um ou mais de seus aspectos. Mas a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem duvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens a geometria analítica e que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados. (Eves, 2011, p. 383)

Vale ressaltar que a Geometria Analítica não foi uma invenção de dois matemáticos, mas sim construída gradativamente por contribuições anteriores.

A seguir será apresentada uma breve bibliografia dos dois matemáticos que deram contribuições importantes nos conceitos que originaram a Geometria Analítica no século XVII.

4.1 RENÉ DESCARTES

Nasceu em 31 de março de 1596 em La Haye en Touraine na França. Seu pai Joachim Descartes foi conselheiro do Parlamento de Bretanha e sua mãe Jeanne Brochard morreu cedo e ele foi criado pela sua avó materna e por uma governanta.

Ficou conhecido como Renatus Cartesius (forma latinizada), foi filósofo, físico e matemático. Ingressou aos oito anos de idade numa escola jesuíta em La Fleche, onde despertou o interesse pela matemática.

Durante sua infância foi muito doente, por esse motivo lhe foi permitido que ficasse em sua cama até às 11 horas da manhã, mania que levou durante toda sua vida. Durante essas horas matinais ele buscava meditar e pensar nas formas e padrões matemáticos, tempo que considerava os mais produtivos.

Em 1616 recebe o bacharelado e a licenciatura em Direito pela Universidade de Poitiers e em 1618 ingressou na carreira militar que durou vários anos.

Em 1628 vai para a Holanda onde escreve “Regra para direção do Espírito”. Em 1629 começou a redigir “Tratado do Mundo”, uma obra física que abordava o heliocentrismo. A sua obra mais importante foi “Discurso sobre o Método para Bem Conduzir a Razão a Buscar a Verdade Através da Ciência”, onde foi dividido em três apêndices: A Dióptrica, Os Meteoros e A Geometria.

Entre os três apêndices, o que nos interessa é “A Geometria” que trata dos fundamentos da Geometria Analítica, aplicação da álgebra na geometria.

Esse apêndice tem cerca de 100 páginas e é dividido em três partes, na primeira parte Descartes já superou a matemática dos gregos, que consideravam a variável “x” como comprimento de um segmento, a área do retângulo como o produto entre duas variáveis e o volume do paralelepípedo retângulo como o produto de três variáveis.

Descartes foi além, considerava x^2 como o quarto termo da proporção $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$, dessa forma era possível estabelecer uma relação ao marcar “x” em um eixo e “y” como comprimento, com um ângulo fixo entre eles. Classificou as curvas e inventou um método para encontrar uma reta tangente a curva passando por um ponto. E fez estudos de resoluções de equações de grau maior que 2, usando notações que usamos nos dias atuais (x^3, x^4,...).

Com o estudo desse apêndice, vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Em 1692 o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolveu o sistema de coordenadas da forma que usamos hoje.

Em 1649 saiu da Holanda e foi para a Suécia a pedido da rainha Cristina. Em 11 de Novembro de 1650 morreu de pneumonia.

Existem algumas lendas sobre como Descartes teve sua ideia que deu origem a geometria analítica, entre elas, tem-se que:

> Descartes ao observar uma mosca que caminhava pelo forro de seu quarto, junto a um dos cantos. Teria chamado a sua atenção que o caminho da mosca sobre o forro poderia ser descrito se, e somente se, a relação ligando as distâncias dela as paredes adjacentes fosse conhecida. (Eves, 2011, p. 389)

De qualquer forma não podemos negar que apesar de serem apenas lendas possuem um grande valor didático para usar em sala de aula.

4.2 PIERRE DE FERMAT

Nasceu no dia 17 de agosto de 1601 em Beaumont de Lomagne na França, seu pai era comerciante de couro e segundo cônsul nessa cidade.

Estudou no monastério Franciscano local e depois na Universidade de Toulouse, em 1620 mudou-se para Bordeaux onde, apesar de não ser um matemático profissional, começou suas primeiras pesquisas matemáticas e durante esse período produziu importantes trabalhos sobre máximos e mínimos. Foi para Orléans e cursou Direito e em 1631, depois se tornou advogado e oficial do governo em Toulouse.

Na Geometria Analítica Fermat fez contribuições tão importantes quanto às de Descartes, porém sua abordagem matemática era diferente.

Segundo Howard Eves,

> Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica. (Eves, 2011, p. 389)

Por ser reservado e não publicar seus trabalhos deixou sua obra em breves manuscritos. Suas principais obras foram publicadas em “Varia Opera Mathematica”

(1679) Figura 1, pelo seu filho Samuel de Fermat depois de sua morte. Hoje em dia Pierre de Fermat é considerado um dos matemáticos mais notáveis da sua época.

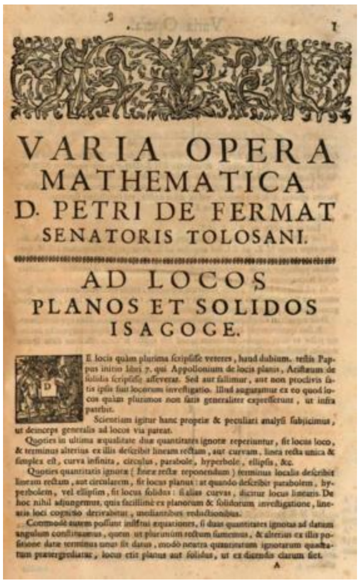

VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT
SENATORIS TOLOSANI.
AD LOCOS
PLANOS ET SOLIDOS
ISAGOGE.

Figura 1 – Varia Opera Mathematica de Fermat (1679)
Fonte: https://books.google.com.br/books?id=fvZaAAAAQAAJ&pg=PA1&dq=Varia+opera+mathematica+D+Petri+de+Ferma&hl=ptBR&sa=X&ved=0ahUKEwj07_2i0aLMAhVBlpAKHWCtCMMQ6AEIRTAE#v=onepage&q&f=true acesso: 21/04/2016

Com a finalidade de apresentar um estudo sobre Lugares Geométricos planos e sólidos, Fermat escreveu Introdução aos Lugares Planos e Sólidos (em latim, Ad Locus Planos et Solidos Isagoge), contendo um estudo sobre equações indeterminadas com duas incógnitas e grau inferior a 2.

Segundo Howard Eves,

> Ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da geometria analítica moderna, o assunto também ocupava a atenção de outro gênio matemático francês, Pierre de Fermat. A atribuição da prioridade a Fermat se apoia numa carta escrita a Roberval em setembro de 1636, na qual afirma que suas ideias já tinham então sete anos. Os detalhes a respeito apareceram no artigo *Isogoge ad locus planos et solidos*, publicado postumamente. Nele encontramos a equação geral da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérboles, elipses e parábolas. (Eves, 2011, p. 389)

Atualmente, a equação geral da reta e da circunferência, as hipérboles, as elipses e as parábolas são conteúdos tratados no Terceiro Ano do Ensino Médio e estão na grade curricular. É claro que esses conteúdos sofreram modificações até chegar da forma como eles são tratados hoje, e atualmente não são abordados de acordo com o método de Fermat, porém vale a pena ressaltar que as suas contribuições foram de grande valia para a formação dos conceitos da Geometria Analítica a qual conhecemos hoje.

Além de ter sido colaborador para o desenvolvimento da Geometria Analítica, Fermat também deu várias outras contribuições à matemática. Entre elas destacam-se a Teoria dos Números, a Teoria das Probabilidades e o Método para encontrar Máximos e Mínimos.

Fermat é mais lembrado por seu trabalho em Teoria dos Números, em especial pelo Último Teorema de Fermat. Tentativas sem sucesso de provar esse teorema nos últimos 300 anos levaram a outras descobertas matemáticas, como a teoria dos Anéis Comutativos. Em 1995 o matemático Andrew Wiles conseguiu provar o Último Teorema de Fermat.

5 GEOGEBRA

Neste capítulo é apresentado o Start Geogebra, versão online do Geogebra, como funciona as principais ferramentas utilizadas disponíveis na barra de ferramentas e a forma de obter o acesso às atividades deste trabalho que estão disponíveis no Geogebrabook.

5.1 GEOGEBRA

Geogebra é a união de um sistema de geometria dinâmico com um sistema de computação algébrica, criado pelo professor Markus Hohenwarter em sua tese de doutorado na Universidade de Salzburg para o ensino de matemática.

O software possui vários comandos que nos permite construir pontos, retas, planos, círculos, hipérboles, elipses, esferas, etc. Também realiza cálculos através das variáveis que estão vinculadas a pontos e vetores que nos permite achar funções, derivadas, integrais.

O seu uso como ferramenta pedagógica auxilia no ensino da matemática, pois através da observação das figuras geométricas construídas, facilita a compreensão dos conceitos matemáticos utilizados. Com a análise da construção gradual observam-se quais são as reações sofridas quando as figuras sofrem alterações dando, significado ao mesmo. Assim, aguçando a curiosidade e estabelecendo conexões entre a prática e a teoria.

As atividades deste trabalho são desenvolvidas no Start Geogebra, uma versão online do programa, a qual possui os mesmos recursos do *software*. Os materiais dessas atividades ficam disponíveis no site do Geogebra e estão organizados no Geogebrabook, uma espécie de livro online.

5.2 START GEOGEBRA

Atualmente, para utilizar o geogebra não é necessário instalar o *software*, basta ter acesso à internet e digitar o endereço http://www.geogebra.org/ e clicar em Start Geogebra conforme mostra a Figura 2. Os materiais disponibilizados nas atividades deste trabalho foram realizados no Start Geogebra.

Para conseguir gravar os materiais e disponibilizá-los é necessário fazer o login no site, e para isso deve-se clicar em “navigation_sign_in”, apresentado na Figura 2.

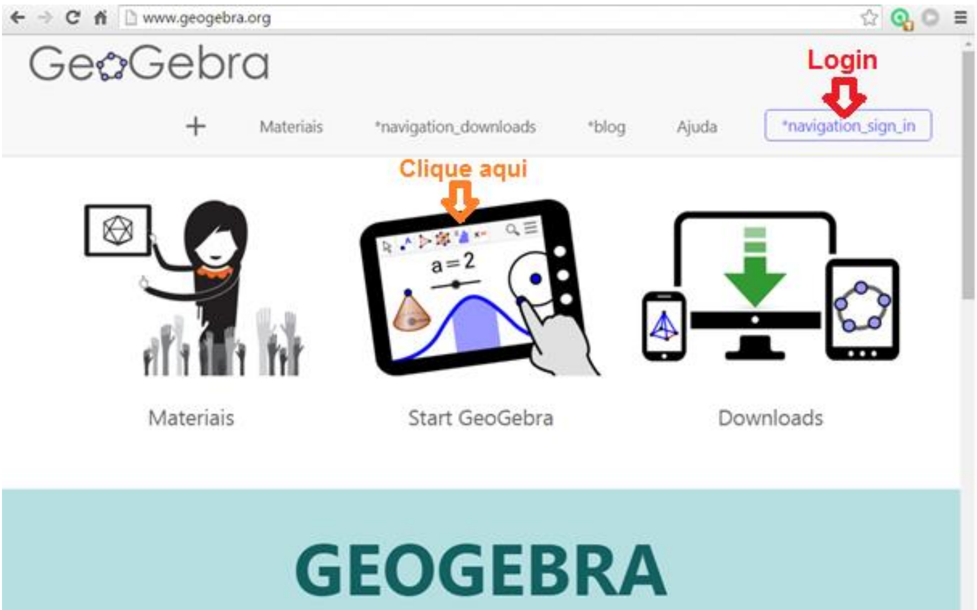


Figura 2 - Página inicial do site Geogebra
Fonte: www.geogebra.org, acesso: 22/04/2016

O login deste site pode ser efetuado usando sua conta do Google, Office 365, Microsoft, Facebook ou Twitter. A janela de interface é como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Login no site Geogebra
Fonte:
https://accounts.geogebra.org/user/signin/expiration/129600/clientinfo/website/?lang=pt_BR&url=http%3A%2F%2Fwww.geogebra.org%2F, acesso: 22/04/2016

Ao clicar em Start Geogebra, apresentado na Figura 2, o usuário é direcionado a página que disponibiliza a criação dos materiais, figura 4, onde podem ser escolhidas as janelas de Álgebra, Geometria, Planilha de Cálculos, Janela CAS, Janela 3D e Probabilidade.

Figura 4 - Janelas disponíveis no Geogebra
Fonte: https://app.geogebra.org/ acesso: 22/04/2016

Neste trabalho os materiais utilizados para realizar as atividades foram feitos na janela de Geometria conforme mostra a Figura 5 ou na janela de Álgebra conforme a Figura 6.

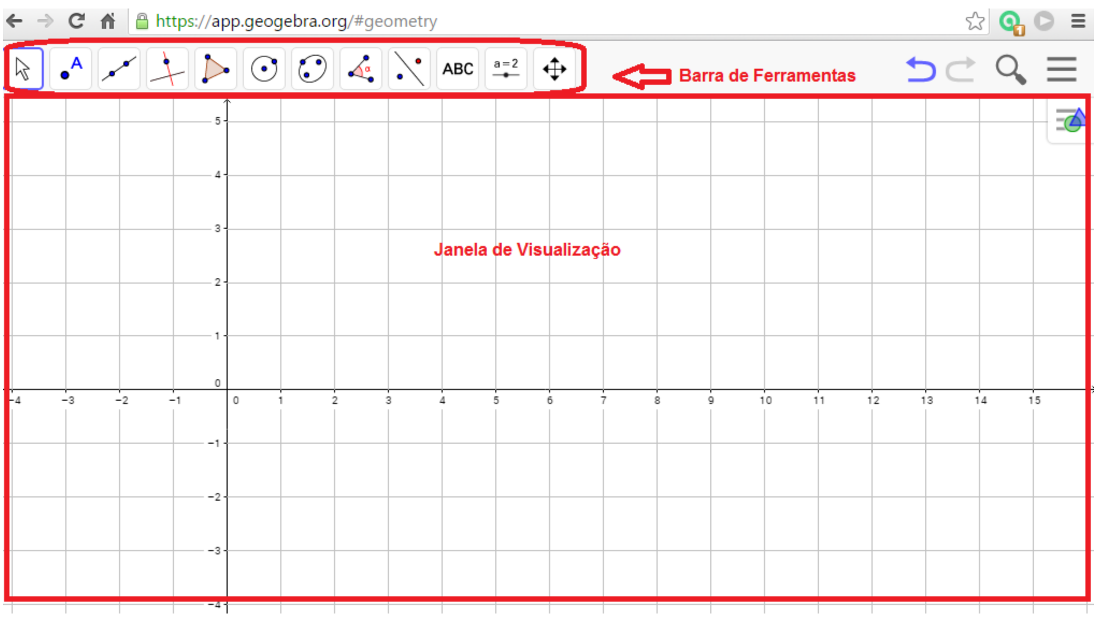


Figura 5 – Janela de Geometria
Fonte: https://app.geogebra.org/#geometry, acesso 22/04/2016

Na janela de Geometria temos a barra de ferramentas e a janela de visualização. Na janela de Álgebra além de contar com a barra de ferramentas e janela de visualização, temos a vantagem de contar com o campo de entrada.

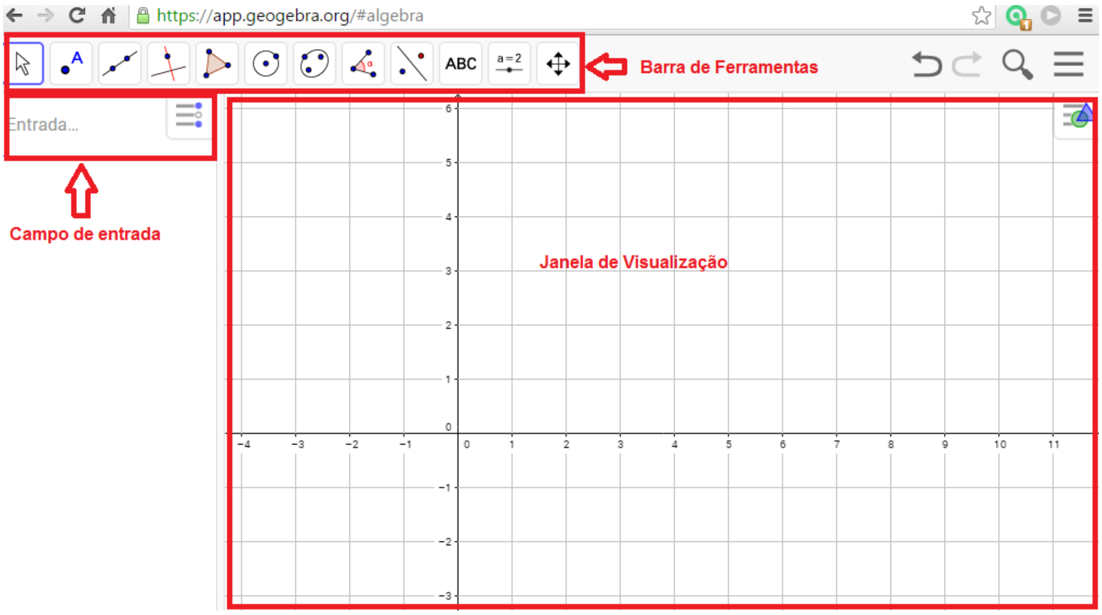


Figura 6 – Janela de Álgebra
Fonte: https://app.geogebra.org/#algebra, acesso 22/04/2016

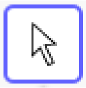
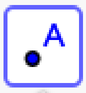
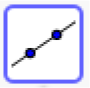
No campo de entrada podemos digitar alguns comandos, como exemplo, escrever diretamente as coordenadas dos pontos, de equações e funções. Após pressionar a tecla Enter, que o objeto aparecerá na janela de visualização. Qualquer alteração no campo de entrada será notada no objeto criado e vice-versa em tempo real, mostrando flexibilidade na manipulação do objeto.

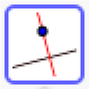
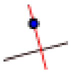
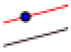
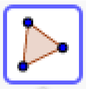
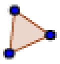
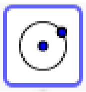
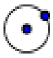
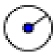
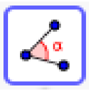
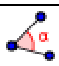
5.3 BARRA DE FERRAMENTAS

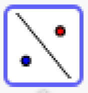
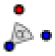
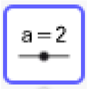
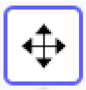
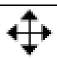
No quadro 1 são apresentadas as principais funções das ferramentas que constam na barra de ferramentas do Geogebra que serão utilizadas neste trabalho.

QUADRO 1 : Principais Ferramentas do Geogebra

Nº	APLICABILIDADE E DICAS

1 	MOVER: Arrastar um objeto com o mouse. Dica: Clique no Objeto e movimente-o na janela de visualização.
2 	PONTO: Criar um novo ponto na janela de visualização. Dica: Clique na janela de visualização para determinar o Ponto. PONTO EM OBJETO: Criar um ponto em um objeto já existente. Dica: Clique no objeto que deseja criar o Ponto. INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS: Achar a interseção entre duas retas, uma reta e uma circunferência, duas circunferências. Dica: Clique nos dois objetos para encontrar a interseção. PONTO MÉDIO OU CENTRO: Encontrar o ponto médio de segmentos. Dica: Clique nos dois pontos do segmento ou no objeto (segmento, circunferência, elipse) para encontrar o ponto médio.
3 	RETA: Encontrar a reta que passa por dois pontos. Dica: Clique duas vezes na janela de visualização ou em dois Pontos já existentes para formar a reta. SEMENTO: Encontrar o segmento de reta que passa por dois pontos. Dica: Clique duas vezes na janela de visualização ou em dois Pontos já existentes para formar o segmento de reta. VETOR: Encontrar o Vetor que passa por dois pontos. Dica: Clique em dois Pontos e crie um Vetor com origem no primeiro Ponto e Ponto Final no segundo. VETOR A PARTIR DE UM PONTO: Encontrar o Vetor equipolente a partir de um determinado Ponto. Dica: Clique no Ponto e depois no vetor que deseja para formar um vetor equipolente a partir desse Ponto.

4 	 RETA PERPENDICULAR: Criar uma reta perpendicular à outra reta passando por um determinado ponto. Dica: Clique no Ponto que deseja e depois na reta.  RETA PARALELA: Criar uma reta paralela à outra reta passando por um determinado ponto. Dica: Clique no Ponto que deseja e depois na reta.
5 	 POLÍGONO: Criar um Polígono através de seus Vértices. Dica: Clique nos Pontos que deseja e volte no primeiro Ponto para formar o Polígono.
6 	 CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS: Criar um Círculo através de seu centro e um ponto pertencente ao círculo. Dica: Clique em um Ponto para determinar o centro e em outro para formar o círculo.  CÍRCULO DADOS CENTRO E RAIO: Criar um Círculo através de seu centro e seu raio. Dica: Clique no Ponto que deseja para formar a circunferência e depois digite o valor do raio desejado.
7 	ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA NÃO FORAM UTILIZADAS NESTE TRABALHO.
8 	 ÂNGULO: Encontrar o ângulo entre dois segmentos de retas ou retas. Dica: Clique nos pontos no sentido anti-horário ou clique nos dois segmentos de retas ou retas.  DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO: Encontrar a distância entre dois pontos. Dica: Clique nos dois pontos do segmento ou no objeto para encontrar o valor de sua distância.

	 ÁREA: Encontrar a Área de Objetos. Dica: Clique no Objeto para encontrar a Área.
9 	 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO: Rodar um objeto em torno de um centro (Ponto). Dica: Clique no objeto a ser rodado, o centro de rotação e introduza o ângulo na janela de diálogo que aparecerá.  TRANSLAÇÃO POR UM VETOR: Transladar um objeto na mesma direção e sentido do vetor. Dica: Clique no objeto a ser transladado e clique no vetor.
10 	 TEXTO: Inserir texto na janela de visualização.  INSERIR IMAGEM: Inserir Imagem na janela de visualização. Dica: Clique na janela de visualização onde deseja inserir a figura e selecione a figura deseja.
11 	 CONTROLE DESLIZANTE: Variar o valor de um coeficiente de um monômio. Dica: Ative a ferramenta e clique na janela de visualização. Use as configurações padrões e clique em OK.
12 	 MOVER JANELA DE VISUALIZAÇÃO: Mudar a posição da janela de visualização. Dica: Clique na janela de visualização e arraste-a onde desejar para mudar a parte visível.  AMPLIAR: Amplia a janela de visualização. Dica: Clique na janela de visualização para aproximar da parte visível.  REDUZIR: Reduz a janela de visualização. Dica: Clique na janela de visualização para afastar da parte visível.

Fonte: O autor adaptado de Introduction to Geogebra disponível em https://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf acesso 12/04/2016

Para realizar as atividades propostas no capítulo 6 é necessário que se tenha um conhecimento das ferramentas descritas no Quadro 1 identificando o nome das ferramentas, os ícones correspondentes e as suas funções.

5.4 COMO ACESSAR AS ATIVIDADES NO GEOGEBRABOOK

Neste trabalho utilizou-se o Geogebrabook, o qual permite que se faça uma coleção de materiais interativos e dinâmicos baseados no Geogebra e que esta seja organizada na forma de um livro online.

O acesso é através do endereço eletrônico, http://www.geogebra.org/, ao acessá-lo, aparecerá a página inicial mostrada na Figura 7.

Figura 7: Acesso aos Materiais
Fonte: www.geogebra.org, acesso: 22/04/2016

As atividades desenvolvidas neste trabalho estão disponíveis nos Materiais e para acessá-las deve-se clicar no ícone Materiais, direcionando a outra página conforme mostra a figura 8, onde poderá ser feita uma pesquisa dos materiais disponíveis neste site. Para encontrar as atividades deste trabalho é necessário digitar o nome do autor, Célio Furlani, no campo de pesquisa.

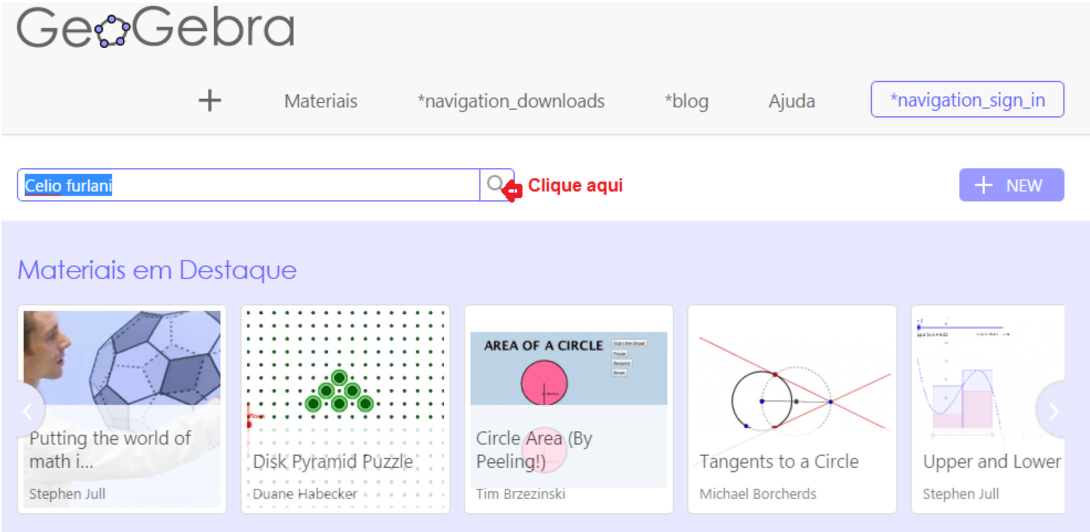


Figura 8: Pesquisa no Geogebra
Fonte: http://www.geogebra.org/materials/ acesso: 22/04/2016

Seguindo os passos mencionados, o usuário será direcionado aos conteúdos desenvolvidos pelo autor. Tomando por exemplo que deseja-se estudar o assunto vetores, este deve clicar no conteúdo Geometria Analítica (vetores), conforme apresentado na Figura 9.

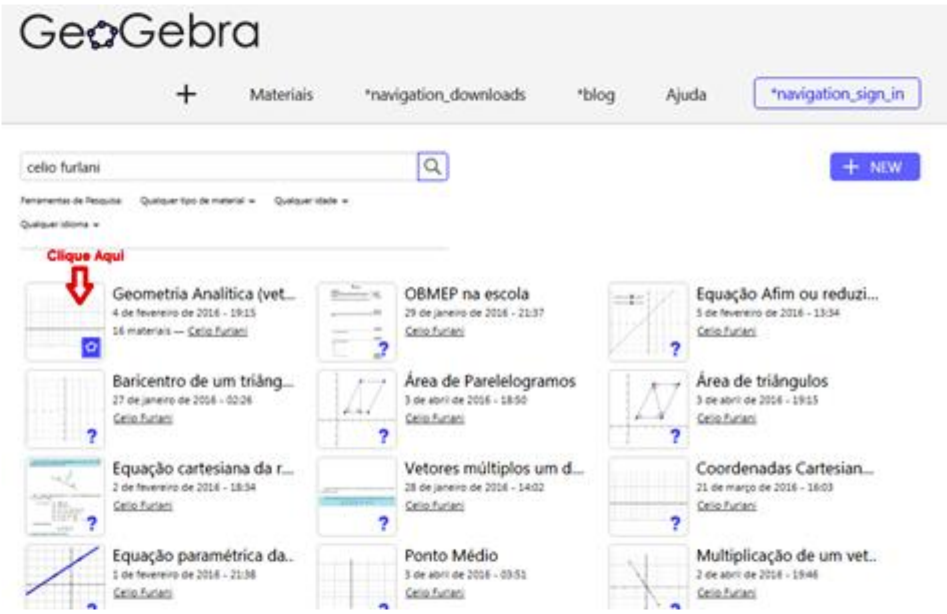


Figura 9: Conteúdos disponíveis no Geogebra.
Fonte: http://www.geogebra.org/search/perform/search/celio%20furlani/materials/ acesso: 22/04/2016

Dessa forma, tem-se o acesso à página onde se encontram todos os materiais organizados de acordo com as atividades desenvolvidas pelo autor, como mostra a Figura 10.

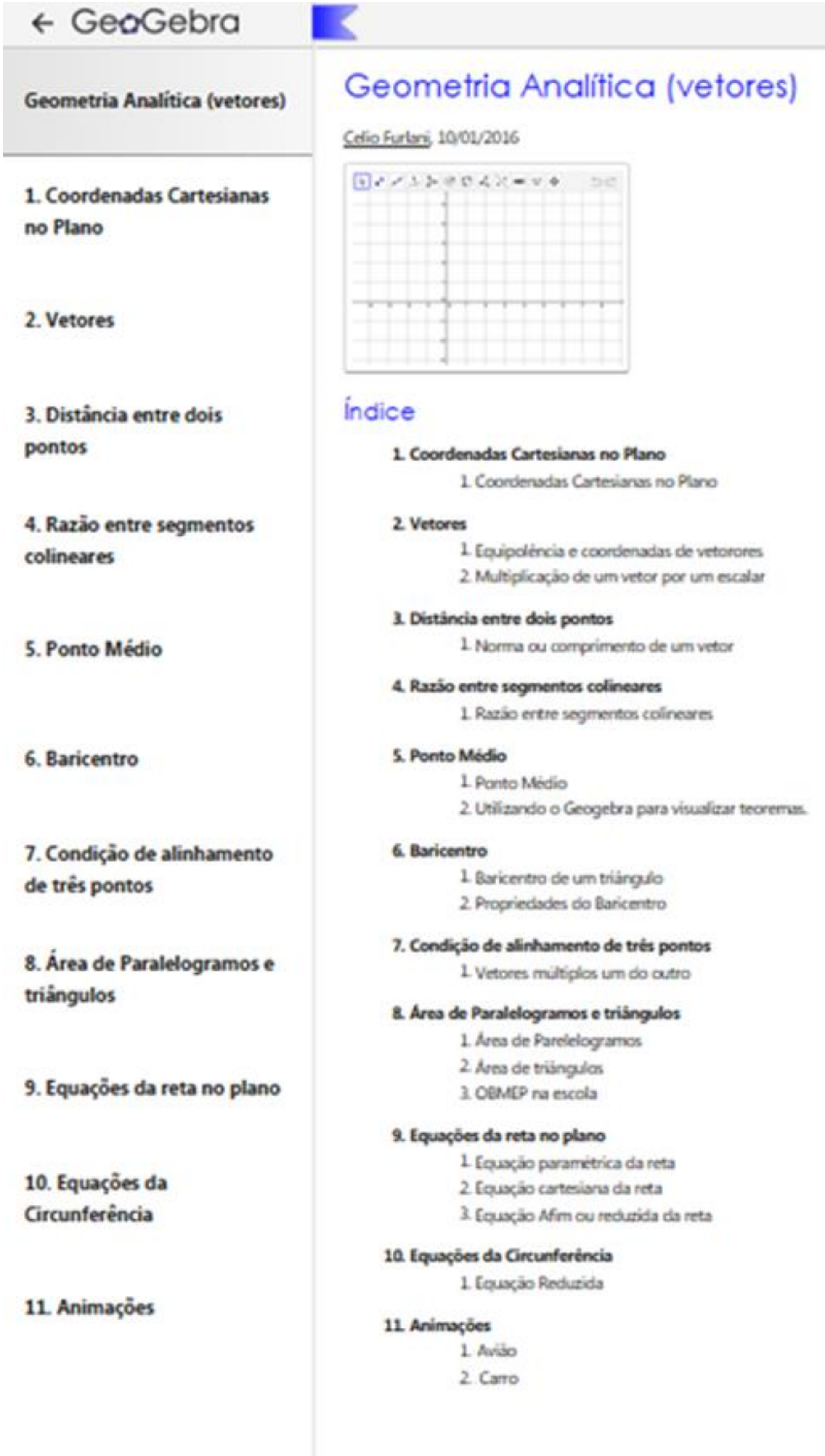


Figura 10: Atividades organizadas no GeogebraBook
Fonte: http://www.geogebra.org/material/simple/id/2412995 acesso: 22/04/2016

A utilização do GeogebraBook oferece várias vantagens, os conteúdos são fáceis de acessar e ficam disponibilizados de forma organizada como um livro online, sem a necessidade de instalação do software e também pode-se acessá-lo pelo celular. Os alunos podem facilmente achar onde pararam de fazer as suas atividades e continuar seus estudos.

Os conceitos das atividades disponibilizadas no GeogebraBook devem ser trabalhados em sala de aula para que os alunos consigam resolver as atividades no caderno e depois possam conferir se os resultados estão corretos através do Geogebra, o qual também será útil nas visualizações de algumas propriedades e de alguns teoremas importantes no desenvolvimento dos conceitos.

6 ATIVIDADES COM O CONCEITO DE VETORES.

Neste capítulo são tratadas as atividades do conteúdo de Geometria Analítica utilizando o conceito de vetores no plano cartesiano, assim como foram organizadas e disponibilizadas no GeogebraBook. Espera-se que a visualização das construções geométricas dos objetos estudados auxilie na compreensão das teorias matemáticas utilizadas.

6.1 COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

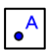
As atividades desenvolvidas a seguir têm a finalidade de mostrar como encontrar um Ponto no Plano Cartesiano através de suas coordenadas e identificar as coordenadas dos Pontos já localizados no Plano Cartesiano.

ATIVIDADE 1

Localize os pontos abaixo no plano cartesiano, lembrando que o primeiro número representa a abscissa (x) e o segundo a ordenada (y):

a) A=(2,3)
b) B=(-1,5)
c) C=(-3,-2)
d) D=(4,-2)
e) E=(5/2,9/2)
f) F=(-3/2,-1/2)
g) G=(0,-2)
h) H=(-3,0)
i) I=(4,0)
j) J=(0,5)

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre os pontos de acordo com as coordenadas dadas.
2) Selecione o ícone  (Texto) e clique perto dos pontos e identifique-os.

As disposições dos pontos da atividade 1 no plano cartesiano podem ser vistos na Figura 11 que representa a resposta dada pelo aluno 01 do terceiro ano do Ensino Médio, utilizando o procedimento.

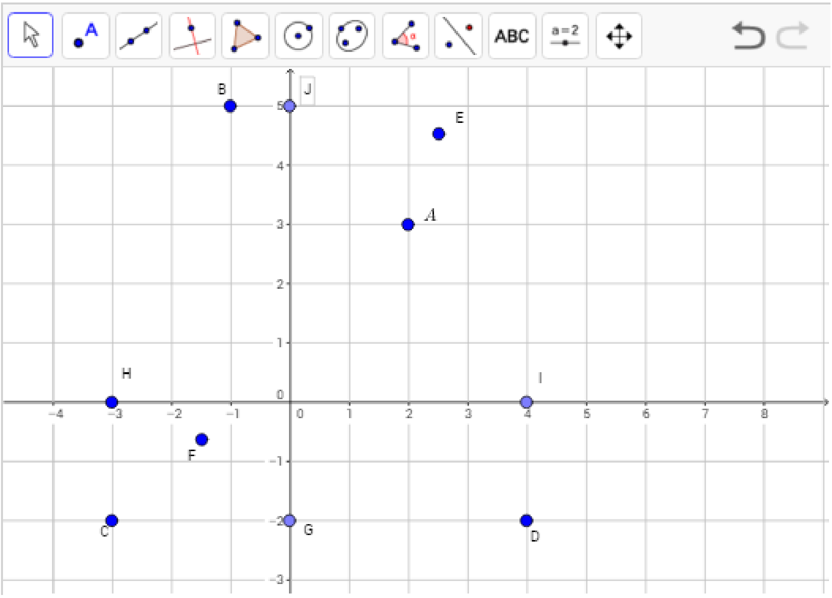


Figura 11: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.1
Fonte: Aluno 01 – 3 A, 2016

ATIVIDADE 2

Encontre as coordenadas cartesianas dos pontos representados no gráfico da Figura 12.

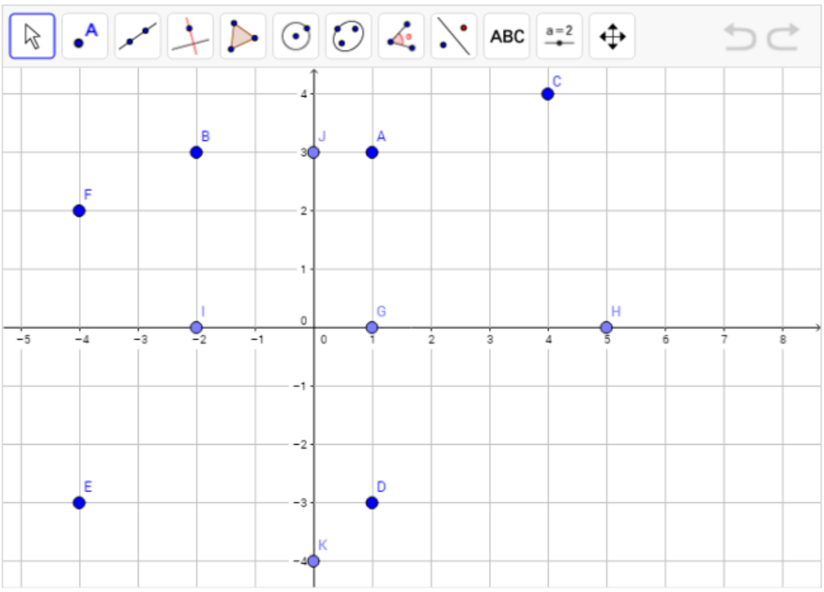


Figura12: Atividade 2 – Cap. 6.1
Fonte: O Autor, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone ABC (Texto) e digite o par ordenado (x, y) com as coordenadas dos pontos que estão representados no plano cartesiano.

As coordenadas dos pontos da atividade 2 no plano cartesiano podem ser vistas na Figura 13 que representa a resposta dada pelo aluno 05 do terceiro ano do Ensino Médio, utilizando o procedimento.

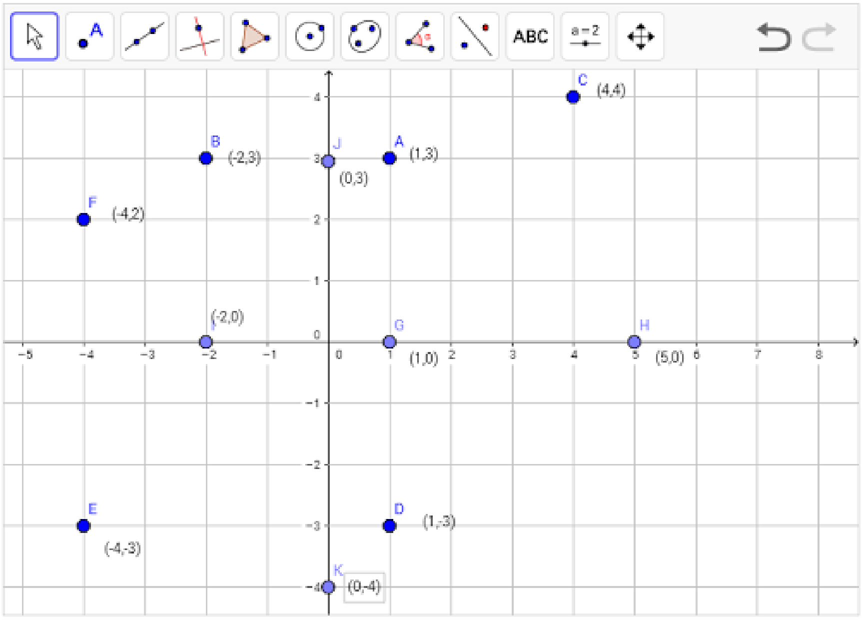


Figura 13: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.1
Fonte: Aluno 05 – 3 B, 2016

Durante a execução das atividades acima os alunos não tiveram dificuldade, por se tratar de um conteúdo já vivenciado por eles. Os conceitos de coordenadas cartesianas já foram trabalhados em séries anteriores no ensino de Funções. O erro frequente e a maior dificuldade foram encontrar os pontos cujas coordenadas são frações.

6.2 VETORES NO PLANO

A representação dos pontos através de suas coordenadas cartesianas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos. A utilização de Vetores permite resolvê-los de forma mais simples e direta.

6.2.1 Coordenadas do Vetor

As atividades desenvolvidas a seguir têm a finalidade de mostrar como encontrar a coordenada de um vetor no Plano Cartesiano e entender o significado de segmentos equipolentes e consequentemente a igualdade de vetores.

Os conceitos foram trabalhados em sala de aula e depois as atividades foram corrigidas na sala de informática utilizando o GeogebraBook, onde as atividades estão disponibilizadas.

Para melhor compreensão da próxima atividade considere os ponto A=(a,b) e B=(c,d), as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são encontradas, fazendo o seguinte cálculo: B-A=(c-a,d-b)

ATIVIDADE 1

Dados os pontos no plano cartesiano A=(1,2), B=(3,1) e C=(-2,-3) da Figura 14. Determine as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}$. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são iguais? Justifique.

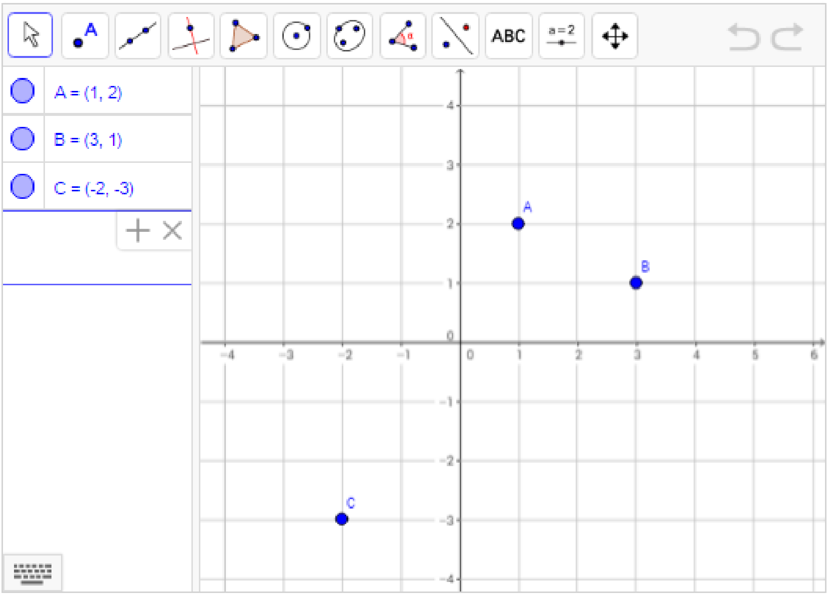


Figura 14: Atividade 1 – Cap. 6.2.1
Fonte: O Autor, 2016

A Figura 15 apresenta o desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 04 do terceiro ano do Ensino Médio, e percebe-se que na sua justificativa, onde disse que “suas coordenadas tem os mesmos números”, na verdade deveria dizer: suas coordenadas tem os mesmos algarismos. Porém os objetivos de encontrar as coordenadas do vetor foram alcançados.

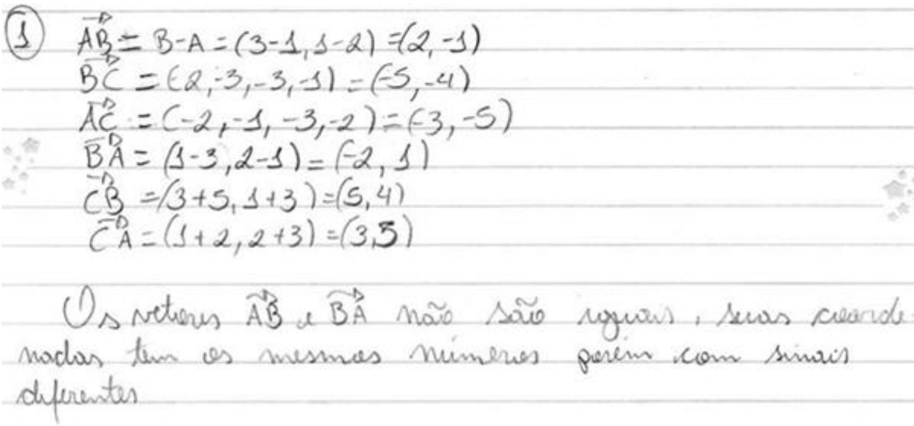


Figura 15: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.2.1
Fonte: Aluno 04 – 3 B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Vetor) e para fazer o vetor $\overrightarrow{AB}$, clique no ponto A depois no B e nessa ordem. Para os outros vetores faça o mesmo procedimento, não esqueça que a ordem é importante.

Nota-se na Figura 16 o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 04 do terceiro ano do Ensino Médio, e que o aluno encontrou as coordenadas dos vetores e concluiu que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ tem o mesmo comprimento, porém são de direções contrárias, utilizando o procedimento.

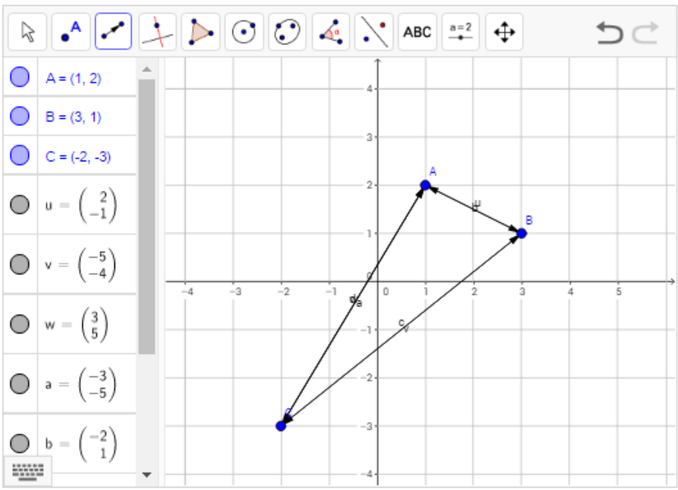


Figura 16: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.2.1
Fonte: Aluno 04 – 3 B, 2016

6.2.2 Equipolência de Segmentos Orientados

Para o desenvolvimento das próximas atividades é necessário definir o conceito de segmentos equipolentes para entender a igualdade entre vetores.

Definição 1: Dizemos que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes, quando:

a) possui o mesmo comprimento;

b) são paralelos ou colineares;

c) têm a mesma direção ou sentido.

Podemos escrever AB≡CD, isto é, o segmento AB é equipolente à CD.

Definição 2: Seja AB segmento orientado. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB.

Definição 3: Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesmo comprimento, de mesmo sentido e mesma direção.

Definição 4: Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, representam o mesmo vetor, isto é: AB≡CD ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

ATIVIDADE 1

Dados os pontos A=(1,2), B=(3,4), C=(4,1) e D=(x,y) apresentado na Figura 17. Determine a coordenada do ponto D=(x,y) sabendo que AB≡CD. Encontre a resposta fazendo as contas em seu caderno e depois confirme utilizando o geogebra.

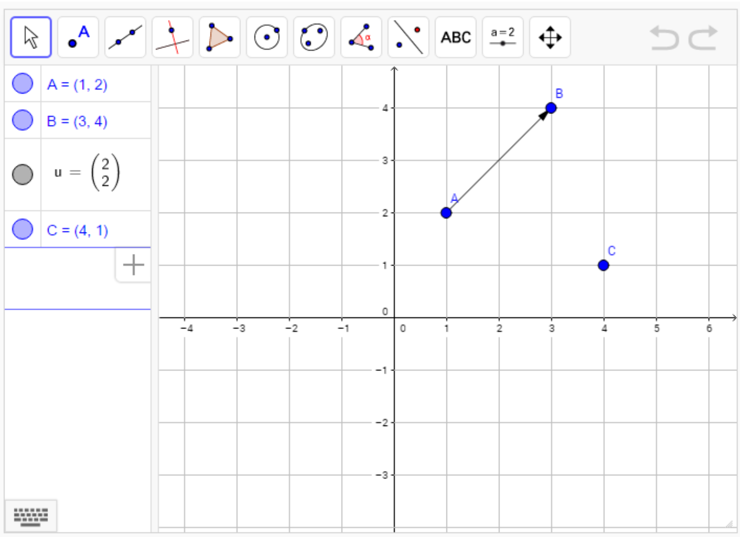


Figura 17: Atividade 1 – Cap. 6.2.2
Fonte: O autor, 2016

A Figura 18 trata-se do desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 08 do terceiro ano do Ensino Médio, e percebe-se que o aluno conseguiu realizar a atividade usando o conceito de igualdade de vetores.

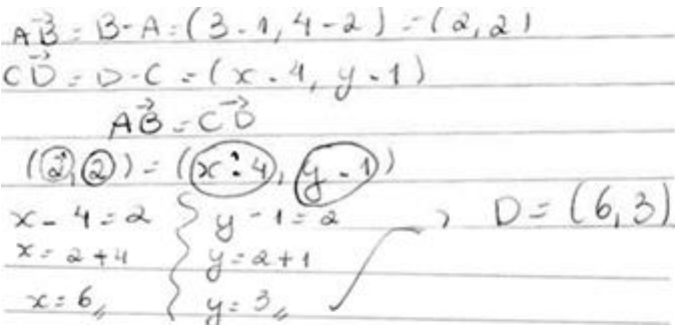


Figura 18: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.2.2
Fonte: Aluno 08 – 3 A, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Vetor a Partir de um Ponto), clique no ponto C e depois no vetor $\overrightarrow{AB}$.

Assim, na Figura 19, observa-se o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 08 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno utilizando o procedimento, encontrou os segmentos equipolentes.

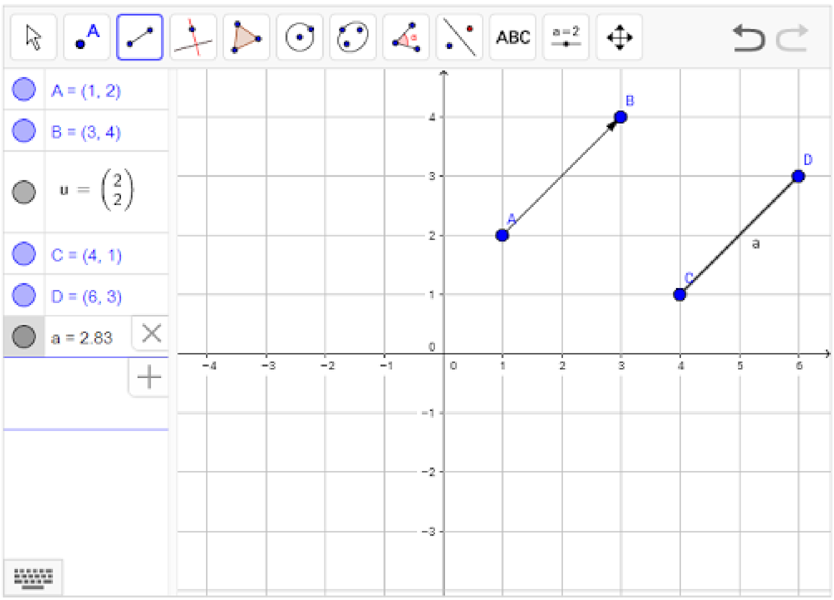
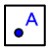


Figura 19: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.2.2
Fonte: Aluno 08 - 3 A, 2016

ATIVIDADE 2

Use o Geogebra para localizar os pontos A=(-2,2), B=(1,1), C=(1,3), D=(3,4), E=(3,2), F=(6,1), G=(3,1), H=(1,0), I=(-2,-2), J=(-4,-4), K=(1,-3), L=(-3,4), M=(3,-2). Quais segmentos são equipolentes?

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre os pontos de acordo com as coordenadas dadas.
2) Para encontrar os segmentos equipolentes selecione o ícone  (Vetor) e encontre os vetores que possuem as mesmas coordenadas.

A Figura 20 apresenta o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou os vetores que possuem as mesmas coordenadas e consequentemente encontrou os segmentos equipolentes.

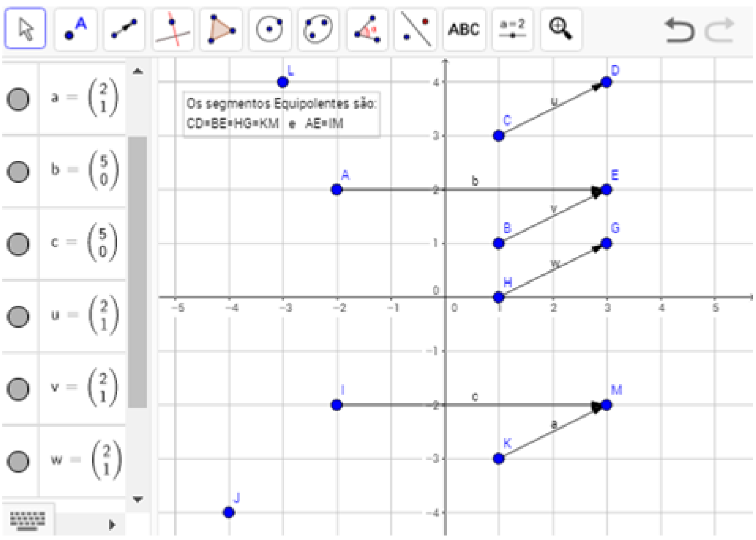


Figura 20: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.2.2
Fonte: Aluno 10 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 3 – TRANSLAÇÃO

Faça a translação do triângulo ABC de coordenadas A=(-4,2), B=(-2,5) e C=(-1,2), com relação ao eixo Oy. Utilize o ponto D=(1,2). Registre suas observações.

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. No campo de entrada:

1) Digite A=(-4,2), B=(-2,5) e C=(-1,2). Na barra de ferramentas:

2) Selecione o ícone (Ponto) e encontre os pontos A=(-4,2), B=(-2,5) e C=(-1,2).

3) Selecione o ícone (Vetor) e encontre os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$.

4) Para fazer a translação com relação ao eixo Oy, encontre o ponto D=(1,2) e selecione o ícone (Vetor a Partir de um Ponto), depois clique no ponto D e no vetor $\overrightarrow{AB}$, clique no ponto D`e no vetor $\overrightarrow{BC}$ e clique no ponto D'' e no vetor $\overrightarrow{CA}$.

A Figura 21, apresenta o desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 09 do terceiro ano do Ensino Médio e observa-se que o aluno através da compreensão dos segmentos equipolentes e da igualdade entre vetores conseguidos nas atividades anteriores e através da visualização das distâncias entre os lados do triângulo e das coordenadas dos pontos obtidos na figura no Geogebra, o aluno conseguiu fazer a translação do triângulo sem dificuldades e compreendeu a igualdade de vetores, utilizando o procedimento.

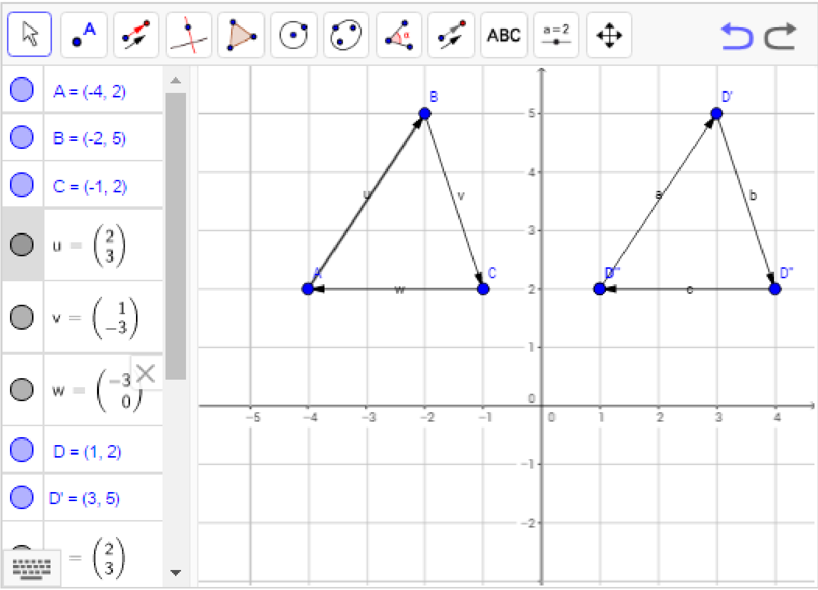


Figura 21: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.2.2
Fonte: Aluno 9 – 3 A, 2016

A Figura 22, trata-se do desenvolvimento da atividade 3 feita no caderno pelo aluno 09 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno através da visualização das distâncias entre os lados do triângulo e das coordenadas dos pontos obtidos na figura no Geogebra, o aluno conseguiu compreender a translação do triângulo através da análise dos segmentos equipolentes e da igualdade dos vetores.

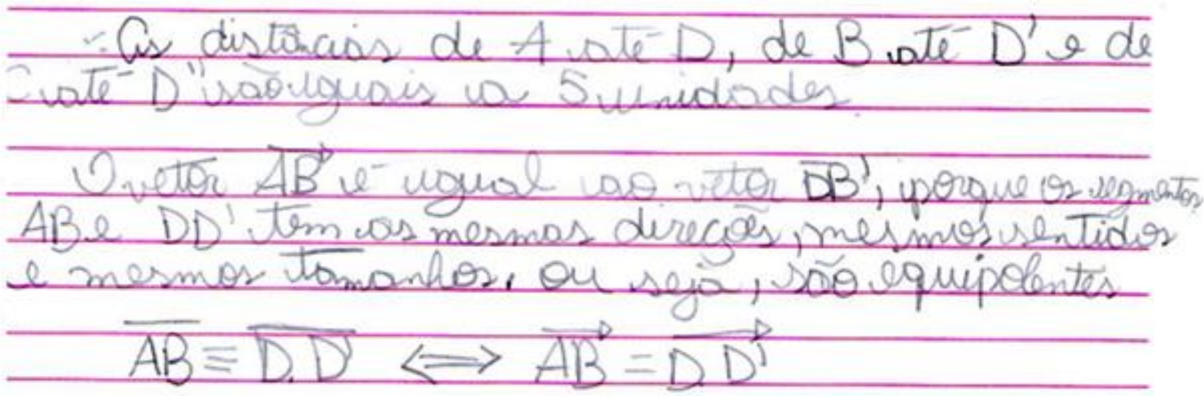


Figura 22: Resposta no caderno – Atividade 3 – Cap. 6.2.2
Fonte: Aluno 9 – 3 A, 2016

6.2.3 Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Para o desenvolvimento das próximas atividades é necessário definir o conceito de produto do vetor por um escalar.

Definição 5: Seja $\vec{v}$ um vetor e k um escalar, o produto do vetor $\vec{v}$ com o escalar k é representado por $k\vec{v}$.

Então, se:

i) para k maior que zero, os vetores $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são equiversos, ou seja, têm o mesmo sentido.

ii) para k menor que zero, os vetores $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são contraversos, ou seja, têm sentidos contrários.

ATIVIDADE 1

Dados os vetores $\vec{v}$ =(-2,3) e os escalares k=2, m=-3, n=-1 e t=4, encontre os valores de $k\vec{v}, m\vec{v}, n\vec{v}$, $t\vec{v}$. Registre suas observações. O que acontece quando você multiplica um vetor por um escalar positivo ou por um negativo?

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. No campo de entrada:

1) Digite v=(-2,3). Para encontrar $k\vec{v}$, como k=2, digite 2v, faça o mesmo para os outros valores pedidos.

Nota-se na Figura 23 o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 11 do terceiro ano do Ensino Médio, que o aluno encontrou os vetores resultantes da multiplicação por um escalar.

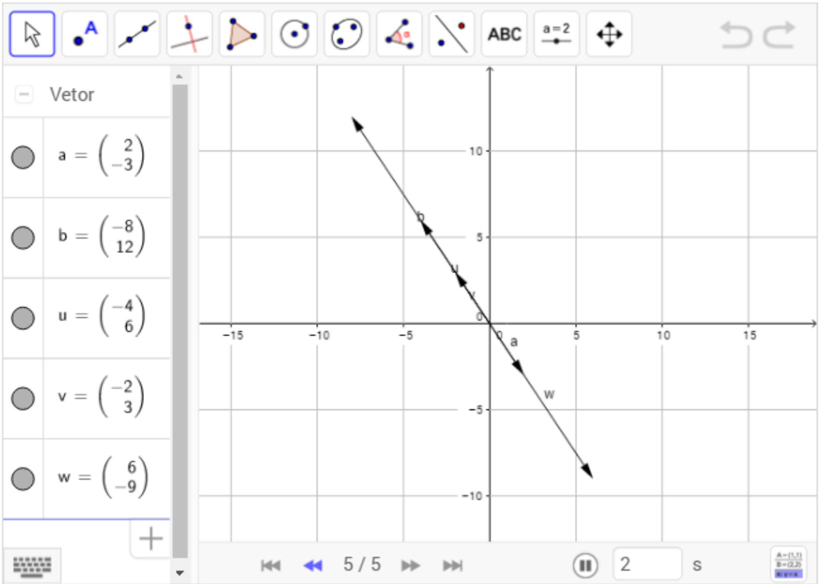


Figura 23: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.2.3
Fonte: Aluno 11 – 3 A, 2016

Nota-se na Figura 24 o desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 11 do terceiro ano do Ensino Médio, e pode-se observar que o aluno compreende o que acontece quando multiplica um vetor por um escalar positivo ou por um negativo, porém se confunde dizendo que o comprimento do vetor é IGUAL ao escalar, pois isso só seria possível se o vetor fosse unitário. Seria correto dizer PROPORCIONAL, foi o que ele fez anteriormente quando descreveu o que acontece com o escalar era positivo.

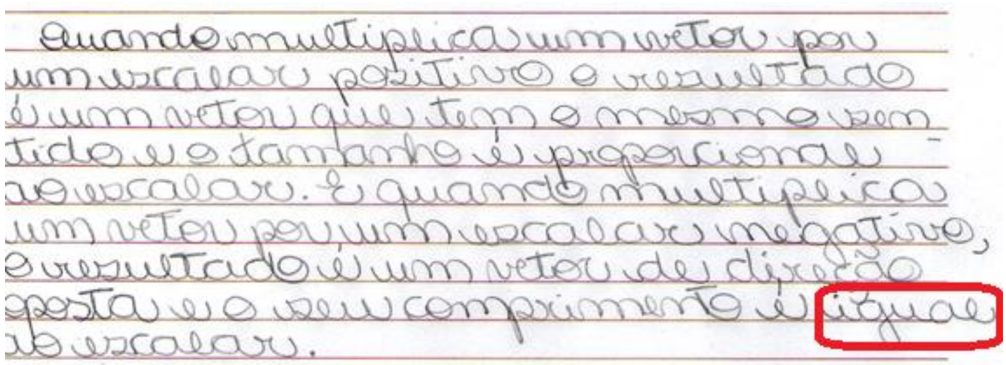


Figura 24: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.2.3
Fonte: Aluno 11 – 3 A, 2016

ATIVIDADE 2 - AMPLIAÇÃO

Faça a ampliação do triângulo ABC de coordenadas A=(-4,2), B=(-2,5) e C=(-1,2), com relação ao eixo Oy, dobrando o tamanho dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$. Utilize o ponto D=(1,2). Registre suas observações.

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. No campo de entrada:

1) Digite A=(-4,2), B=(-2,5) e C=(-1,2). Na barra de ferramentas:

2) Selecione o ícone  (Vetor) e encontre os vetores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{BC} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{CA} = \vec{w}$. No campo de entrada:

3) (Digite 2u, 2v e 2w)[2]. Observe que 2u=a, 2v=b e 2w=c.

4) Encontre o ponto D digitando D=(1,2). Na barra de ferramentas:

5) Selecione o ícone  (Vetor a Partir de um Ponto) clique no ponto D e no vetor $\vec{a}$, clique no ponto D' e no vetor $\vec{b}$ e por fim clique no ponto D" e no vetor $\vec{c}$.

Nota-se na Figura 25 o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 11 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno utilizando o procedimento, encontrou os vetores responsáveis pela ampliação da figura.

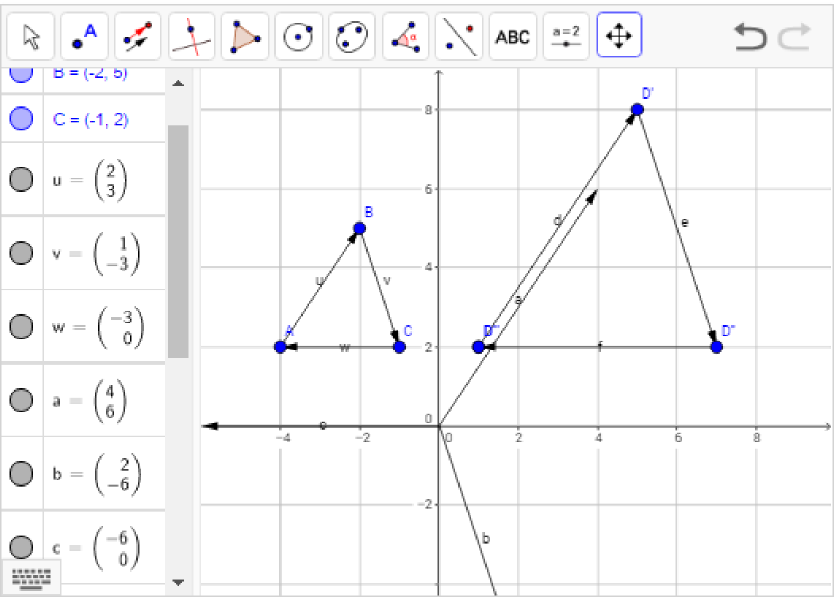


Figura 25: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.2.3
Fonte: Aluno 11 – 3 A, 2016

[2] Para digitar o vetor no campo de entrada do Geogebra não se usa a flecha acima da letra.

Enquanto que na Figura 26 tem-se o desenvolvimento da atividade 2 feita no caderno pelo aluno 11 do terceiro ano do Ensino Médio, e nota-se que o aluno compreende o que acontece quando multiplica um vetor por dois, dobrando o tamanho desse vetor e o que pode acontecer se multiplicar os vetores por outros números.

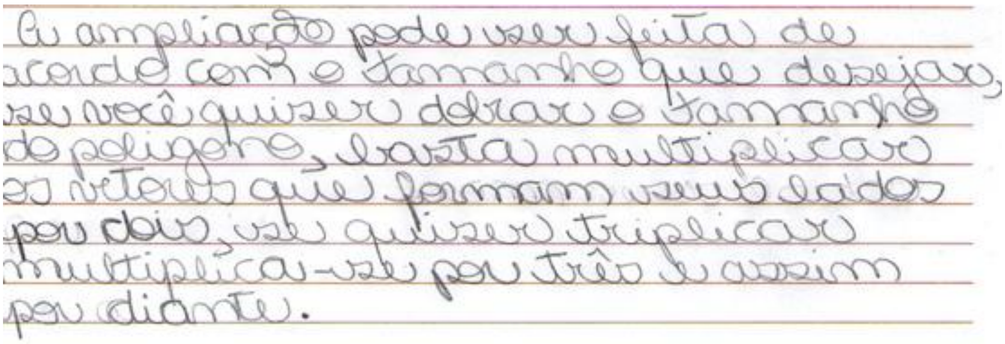

A ampliação pode ser feita de acordo com o tamanho que desejar, se você quiser dobrar o tamanho do polígono, basta multiplicar os vetores que formam seus lados por dois, se quiser triplicar multiplica-se por três e assim por diante.

Figura 26: Resposta no caderno – Atividade 2 – Cap. 6.2.3
Fonte: Aluno 11 – 3 A, 2016

6.3 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Para o desenvolvimento das próximas atividades para encontrar a distância entre dois pontos é necessário desenvolver o conceito de norma ou comprimento do vetor.

A distância entre o ponto A e B, pode ser calculada através da norma ou comprimento de um segmento representado pelo vetor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$**.**

Sendo o vetor $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$$

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$$

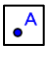
EXEMPLO 1

Dados A=(2,4) e B=(-1,3) determine a norma do vetor .

Solução: $\vec{\mathrm{v}}$ =B-A=(-1-2,3-4)=(-3,-1)

$$\|\vec{\mathrm{v}}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = 3{,}16$$

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e adicione os pontos A e B.

2) Selecione o ícone  (Vetor) e clique no ponto A e depois no ponto B.

3) Selecione o ícone  (Distância, Comprimento ou Perímetro) e clique no ponto A e B.

Nota-se na Figura 27 o desenvolvimento do exemplo 1 feito no Geogebra pelo autor, em que o aluno encontrou a distância entre os pontos A e B, a qual tem o mesmo comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$.

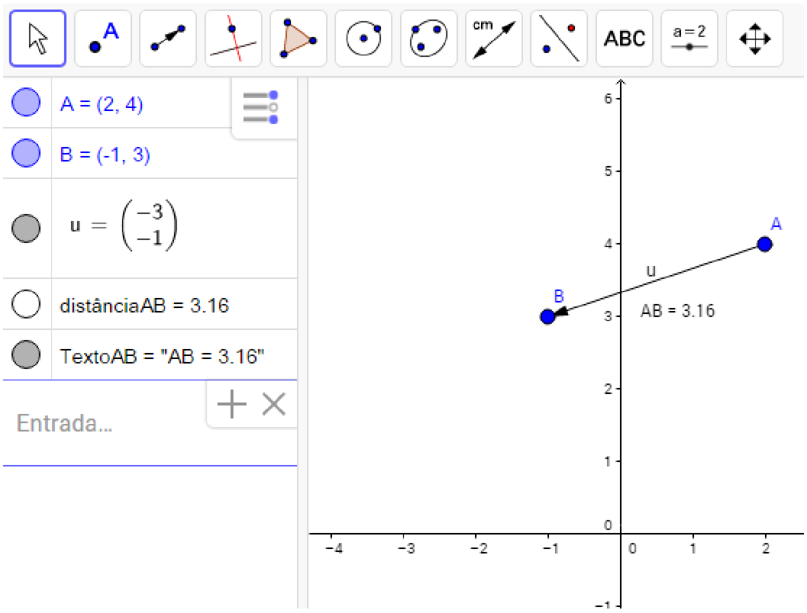


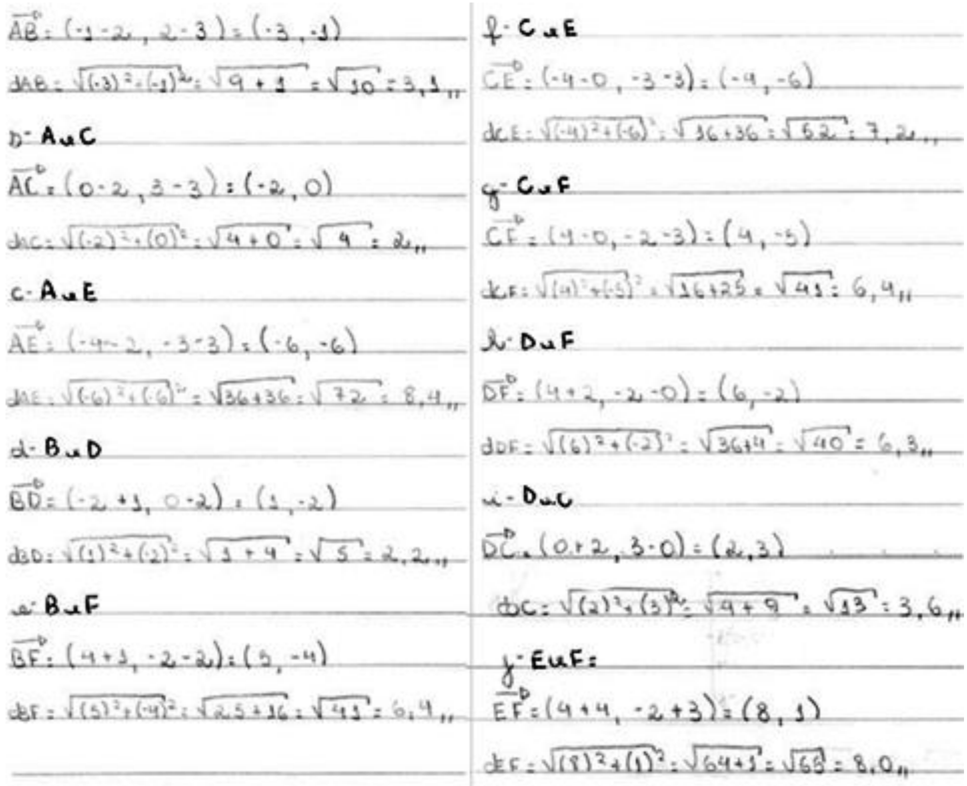
Figura 27: Resposta no Geogebra – Exemplo 1 – Cap. 6.3
Fonte: O autor, 2016

ATIVIDADE 1

Dados os pontos A=(2,3), B=(-1,2), C=(0,3), D=(-2,0), E=(-4,-3) e F=(4,-2). Determine a distância entre os pontos: A e B, A e C, A e E, B e D, B e F, C e E, C e F, D e F, D e C, E e F.

Resolva em seu caderno e depois confira o resultado, para isso encontre os pontos indicados, visualize os vetores e encontre a distância entre eles. Siga as orientações do exemplo 1.

A Figura 28 trata-se do desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 13 do terceiro ano do Ensino Médio, onde observa-se que o aluno consegue encontrar a coordenada do vetor e calcular a distância entre os pontos.



$\vec{AB} = (-1-2, 2-3) = (-3, -1)$
$d_{AB} = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = 3,1$
b- A e C
$\vec{AC} = (0-2, 3-3) = (-2, 0)$
$d_{AC} = \sqrt{(-2)^2+(0)^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$
c- A e E
$\vec{AE} = (-4-2, -3-3) = (-6, -6)$
$d_{AE} = \sqrt{(-6)^2+(-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 8,4$
d- B e D
$\vec{BD} = (-2+1, 0-2) = (1, -2)$
$d_{BD} = \sqrt{(1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = 2,2$
e- B e F
$\vec{BF} = (4+1, -2-2) = (5, -4)$
$d_{BF} = \sqrt{(5)^2+(-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = 6,4$
f- C e E
$\vec{CE} = (-4-0, -3-3) = (-4, -6)$
$d_{CE} = \sqrt{(-4)^2+(-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{52} = 7,2$
g- C e F
$\vec{CF} = (4-0, -2-3) = (4, -5)$
$d_{CF} = \sqrt{(4)^2+(-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} = 6,4$
h- D e F
$\vec{DF} = (4+2, -2-0) = (6, -2)$
$d_{DF} = \sqrt{(6)^2+(-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 6,3$
i- D e C
$\vec{DC} = (0+2, 3-0) = (2, 3)$
$d_{DC} = \sqrt{(2)^2+(3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3,6$
j- E e F:
$\vec{EF} = (4+4, -2+3) = (8, 1)$
$d_{EF} = \sqrt{(8)^2+(1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} = 8,0$

Figura 28: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.3
Fonte: Aluno 13 – 3 B, 2016

Na Figura 29 tem-se o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 13 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno utiliza a dica do exemplo 1 e consegue encontrar a coordenada do vetor e calcular a distância entre os pontos.

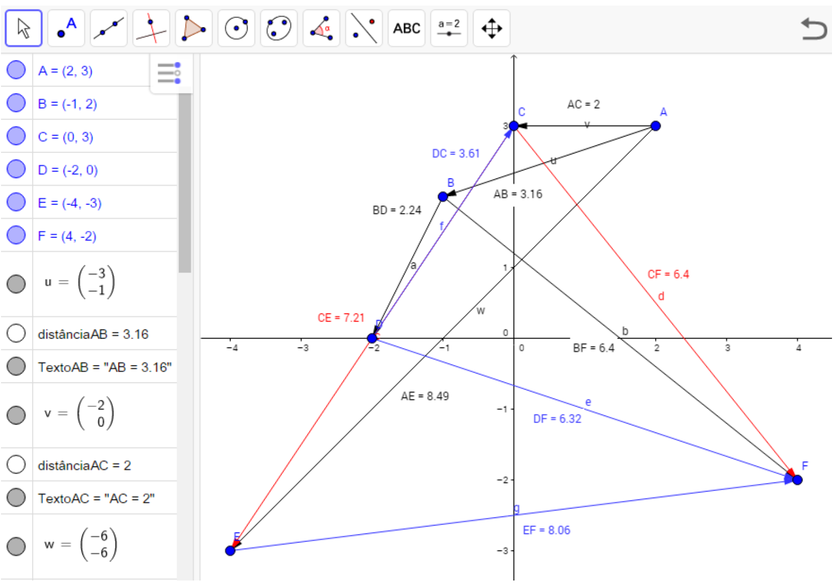


Figura 29: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.3
Fonte: Aluno 13 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 2

Construa um triângulo ABC, de coordenadas A=(-3,4), B=(5,-2) e C=(2,-3). Verifique se esse triângulo é escaleno, isósceles ou equilátero.

A Figura 30 apresenta o desenvolvimento da atividade 2 feita no caderno pelo aluno 13 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno consegue encontrar a coordenada do vetor e calcular a distância e achar o perímetro do triângulo.

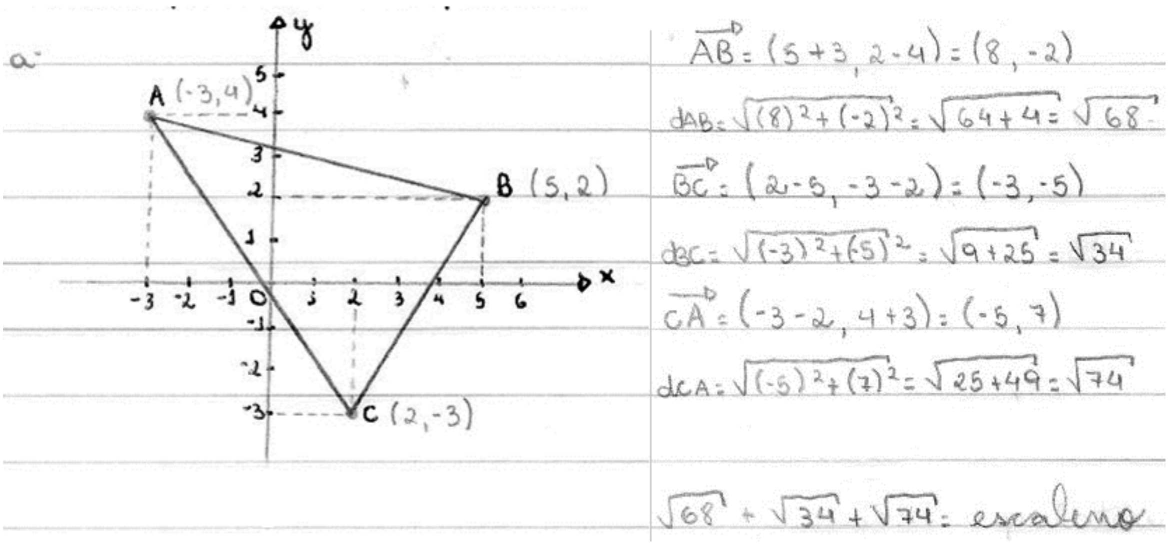
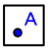
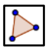


Figura 30 : Resposta no caderno – Atividade 2 – Cap. 6.3
Fonte: Aluno 13 – 3 B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e adicione os pontos A, B e C.

2) Selecione o ícone ícone  (Polígonos) e clique nos pontos encontrados..

3) Selecione o ícone  (Distância, Comprimento ou Perímetro) e encontre as distâncias dos três lados desse triângulo.

A Figura 31 apresenta o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 13 do terceiro ano do Ensino Médio, nota-se que o aluno utilizando o procedimento, consegue encontrar as coordenadas do Triângulo e calcular a distância dos seus lados.

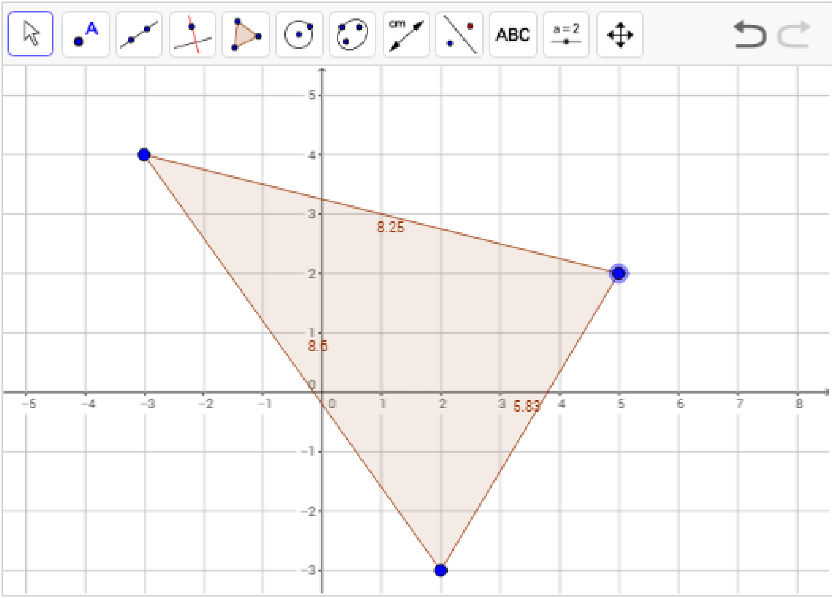


Figura 31: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.3
Fonte: Aluno 13 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 3 – REFLEXÃO

Faça a reflexão do triângulo ABC de coordenadas A=(-3,3), B=(-2,5) e C=(-1,1), com relação ao eixo Oy e também com relação ao eixo Ox,. Registre suas observações.

Para realizar esta atividade deve-se seguir os seguintes passos no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e adicione os pontos A=(-3,3), B=(-2,5) e C=(-1,1).
2) Selecione o ícone  (Vetor) e encontre os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.
3) Para fazer a reflexão em relação ao eixo Oy, mude os sinais das coordenadas das abscissas dos pontos A, B e C, como exemplo o ponto A=(-3,3) altere para D=(3,3).
4) Faça o mesmo nos pontos B e C e encontre os pontos E e F e os vetores $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}$e $\overrightarrow{FD}$. Dessa forma foi feita a reflexão em relação ao eixo Oy.
5) Agora faça a reflexão referente ao eixo OX seguindo o mesmo procedimento e mudando o sinal das coordenadas das ordenadas dos pontos A, B e C.

A Figura 32 trata-se do desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 09 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno conseguiu fazer a reflexão do triângulo mudando as coordenadas necessárias seguindo as dicas e utilizando o procedimento.

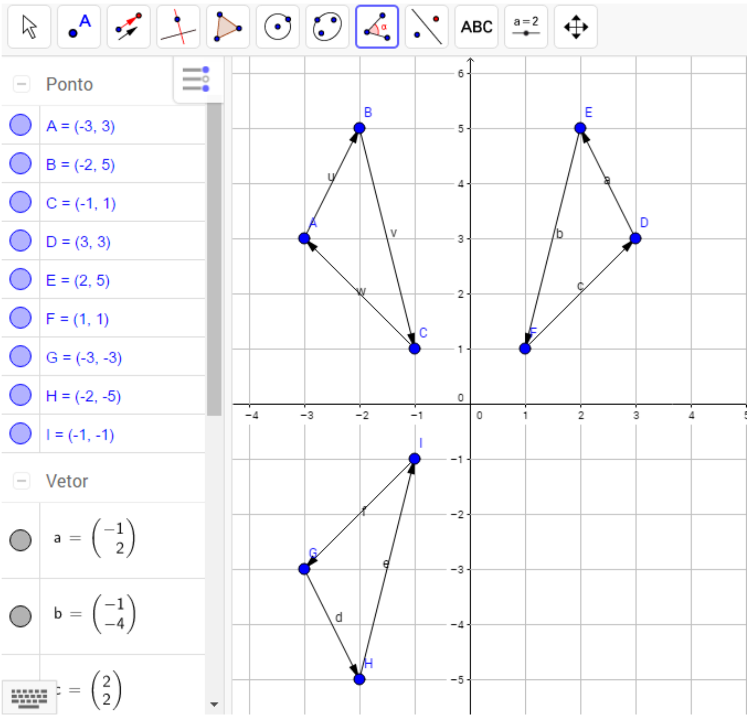


Figura 32: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.3
Fonte: Aluno 9 – 3 A, 2016

Enquanto a Figura 33 apresenta o desenvolvimento da atividade 3 feita no caderno pelo aluno 09 do terceiro ano do Ensino Médio, onde mostra que o aluno entendeu os conceitos necessários para fazer a reflexão do triângulo.

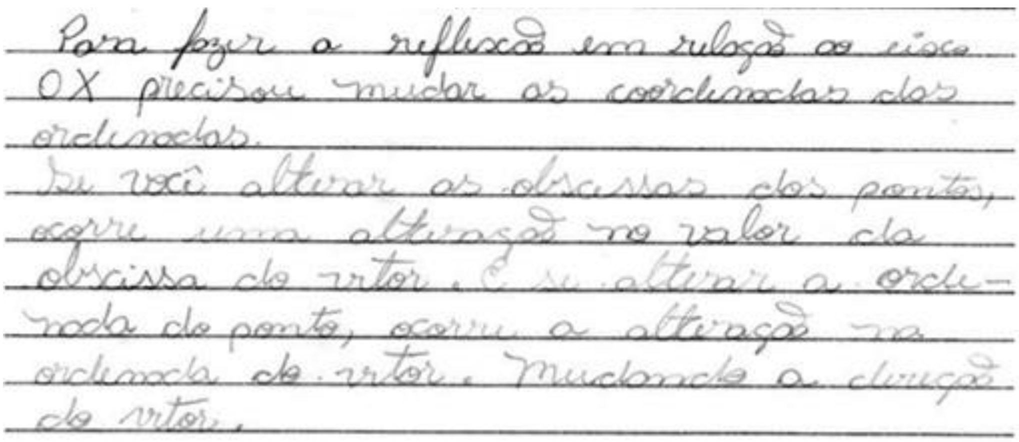

Para fazer a reflexão em relação ao eixo
OX precisou mudar as coordenadas das
ordenadas.
Se você alterar as abscissas dos pontos,
ocorre uma alteração no valor da
abscissa do vetor. E se alterar a orde-
nada do ponto, ocorre a alteração na
ordenada do vetor. Mudando a direção
do vetor.

Figura 33: Resposta no caderno – Atividade 3 – Cap. 6.3
Fonte: Aluno 9 – 3 A, 2016

6.4 RAZÃO ENTRE SEGMENTOS COLINEARES

Para o desenvolvimento das próximas atividades e saber se os pontos estão alinhados é necessário definir o conceito de razão entre segmentos colineares.

Definição 6: Dados três pontos colineares A, B e C (com A≠B≠C), chama-se razão entre segmentos orientados $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ o número real R tal que:

$$\mathrm{R} = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|}$$

EXEMPLO 1

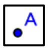
Dados os pontos colineares A=(-2,3), B=(0,-1) e C=(1,-3). Encontre a razão

$$\mathrm{R} = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|}$$

Resolução:

$$\mathrm{R} = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|} = \frac{\sqrt{(2)^2 + (-4)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$$

Para resolver o exemplo 1, deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e adicione os pontos A=(-2,3), B=(0,-1) e C=(1,-3).
2) Selecione o ícone  (Vetor) e encontre os vetores $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
3) Selecione o ícone  (Distância, comprimento ou Perímetro) e encontre o comprimento do vetor de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
4) Divida o valor do comprimento dos vetores conforme a razão dada.

Nota-se na Figura 34 o desenvolvimento do exemplo 1 feito no Geogebra pelo autor, que após encontrar a distância dos segmentos AB e BC, os valores encontrados foram divididos, dando origem a razão procurada.

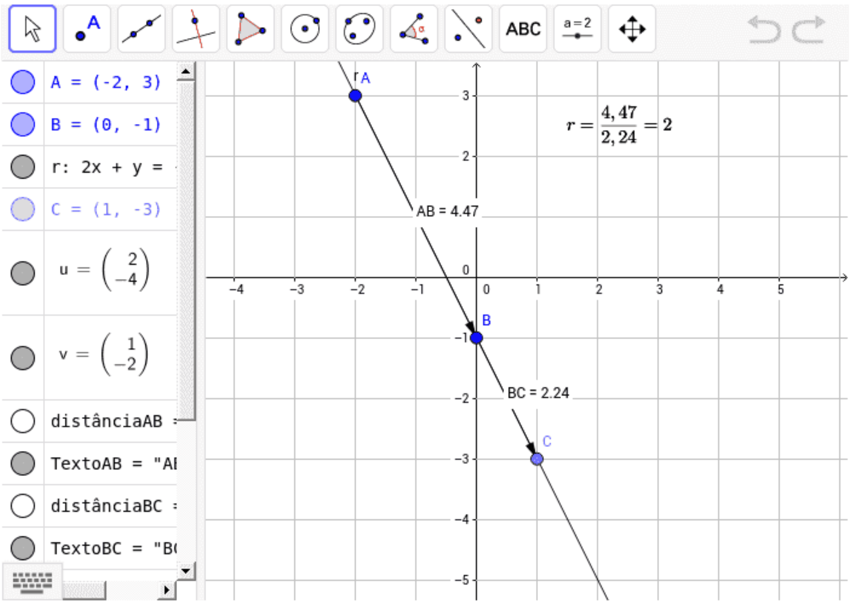


Figura 34: Resposta no Geogebra – Exemplo 1 – Cap. 6.4
Fonte: O autor, 2016

ATIVIDADE 1

Calcule a razão $\mathrm{R} = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\|}$, dados os pontos A=(1,4), B=(1/2,3) e C=(-2,-2).

A Figura 35 apresenta o desenvolvimento da atividade 3 feita no caderno pelo aluno 19 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno mostra que entendeu os conceitos necessários para fazer a razão entre os segmentos colineares.

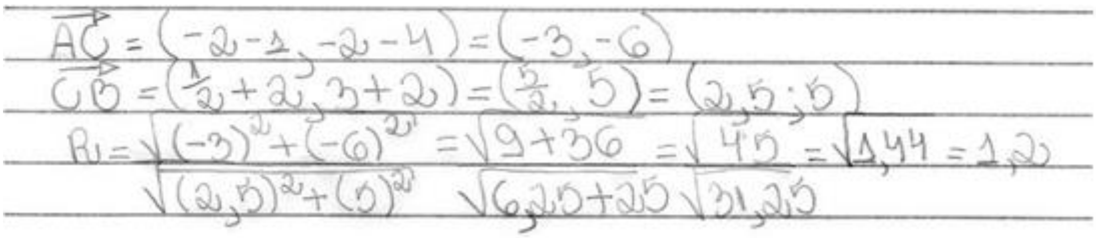


Figura 35: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.4
Fonte: Aluno19 – 3 A, 2016

Enquanto a Figura 36 trata-se do desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 19 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno utiliza a dica do exemplo 1 e consegue encontrar a razão entre os segmentos colineares através do uso da calculadora para dividir o comprimento do vetor $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ pelo vetor $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ encontrados no Geogebra, dessa forma, pode verificar se os cálculos realizados no caderno estão corretos.

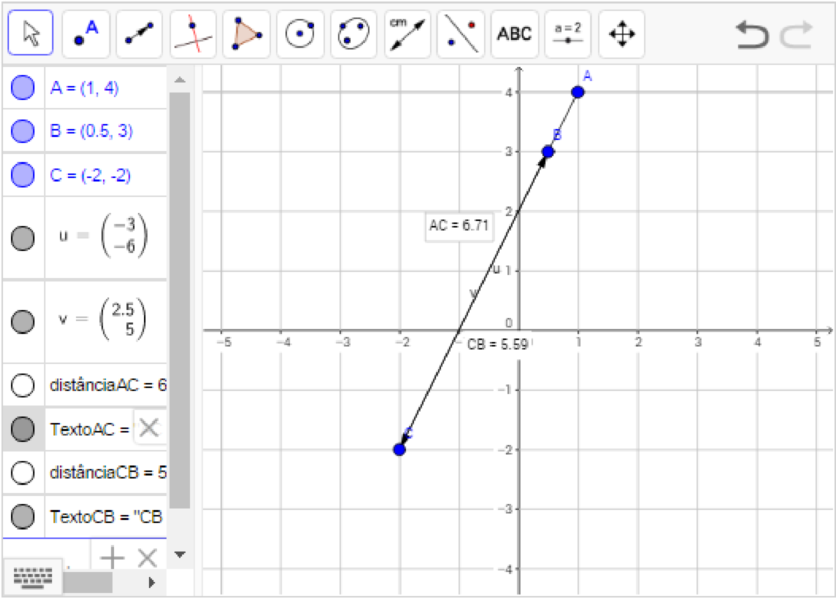


Figura 36: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.4
Fonte: Aluno19 – 3 A, 2016

ATIVIDADE 2

Dados A=(5,3) e B=(-1,-3), seja C=(2,0) a interseção da reta AB com o eixo das abscissas. Calcule a razão $R = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|}$.

Nota-se na Figura 37 o desenvolvimento da atividade 2 feita no caderno pelo aluno 19 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou o ponto de interseção e utilizou o conceito de razão entre os segmentos colineares.

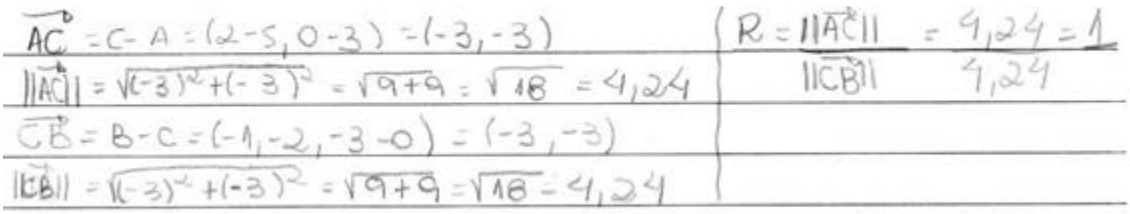
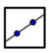
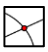


Figura 37: Resposta no caderno – Atividade 2 – Cap. 6.4
Fonte: Aluno19 – 3 A, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e adicione os pontos A=(5,3) e B=(-1,-3).

2) Selecione o ícone  (Reta) e clique no ponto A e depois no ponto B.

3) Selecione o ícone  (Interseção de Dois Objetos) clique na reta e no eixo x e encontrará o ponto C.

4) Selecione o ícone  (Distância, comprimento ou Perímetro) e encontre a distância de A até C e depois de C até B.

5) Divida o valor das distâncias conforme a razão dada.

A Figura 38 apresenta o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 19 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno consegue encontrar a interseção da reta com o eixo das abscissas e a razão entre os segmentos colineares, utilizando o procedimento.

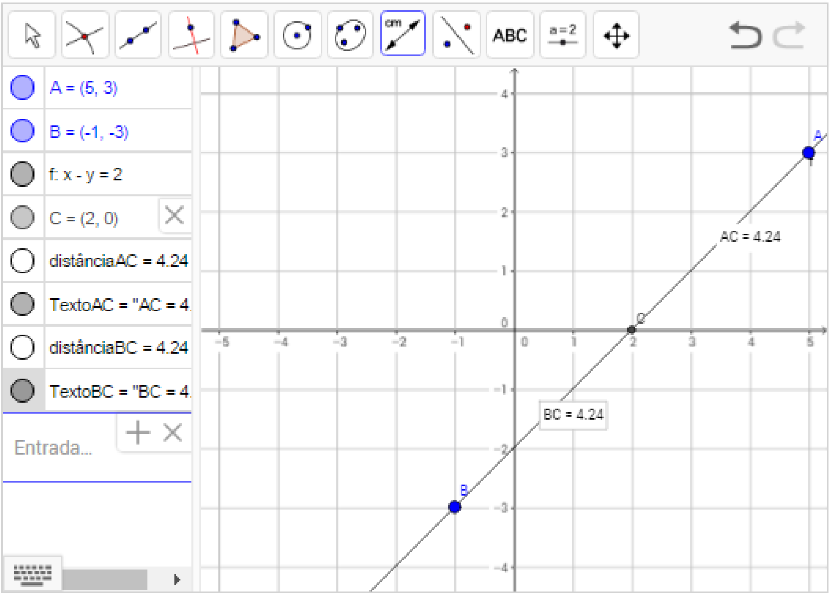
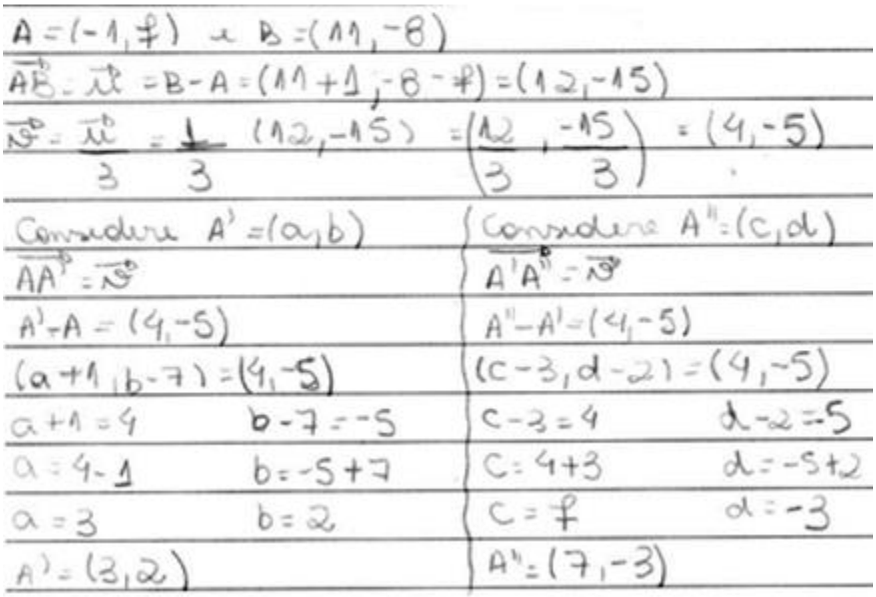


Figura 38: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.4
Fonte: Aluno19 – 3 A, 2016

ATIVIDADE 3

Determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em três partes iguais, sabendo que A=(-1,7) e B=(11,-8).

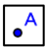
Nota-se na Figura 39 o desenvolvimento da atividade 3 feita no caderno pelo aluno 19 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou o vetor com 1/3 do comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$ e as coordenadas que dividem o segmento AB em três partes iguais.



$A=(-1,7)$ e $B=(11,-8)$	
$\overrightarrow{AB}=\vec{u}=B-A=(11+1,-8-7)=(12,-15)$	
$\vec{v}=\frac{\vec{u}}{3}=\frac{1}{3}(12,-15)=\left(\frac{12}{3},\frac{-15}{3}\right)=(4,-5)$	
Considere $A'=(a,b)$	Considere $A''=(c,d)$
$\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$	$\overrightarrow{A'A''}=\vec{v}$
$A'-A=(4,-5)$	$A''-A'=(4,-5)$
$(a+1,b-7)=(4,-5)$	$(c-3,d-2)=(4,-5)$
$a+1=4$ $\quad$ $b-7=-5$	$c-3=4$ $\quad$ $d-2=-5$
$a=4-1$ $\quad$ $b=-5+7$	$c=4+3$ $\quad$ $d=-5+2$
$a=3$ $\quad$ $b=2$	$c=7$ $\quad$ $d=-3$
$A'=(3,2)$	$A''=(7,-3)$

Figura 39: Resposta no caderno – Atividade 3 – Cap. 6.4
Fonte: Aluno19 – 3 A, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e adicione os pontos A=(-1,7) e B=(11,-8).
2) Selecione o ícone  (Vetor) e clique no ponto A e depois no ponto B, o qual resultará no vetor $\vec{u}$. No campo de entrada:
3) Digite $\vec{u}/3$, o que nos fornecerá o vetor $\vec{v}$. Na barra de ferramentas:
4) Selecione o ícone  (Vetor a Partir de um Ponto) clique no vetor $\vec{v}$, e depois no ponto A, o que resultará no ponto A'. Logo após, faça o mesmo procedimento citado acima e clique no vetor $\vec{v}$ e no ponto A', o que resultará no ponto A". Os pontos A' e A" são os pontos procurados.

A Figura 40 denota o desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 19 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno consegue encontrar o vetor com um terço do comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$ e as coordenadas que dividem o segmento AB em três partes iguais.

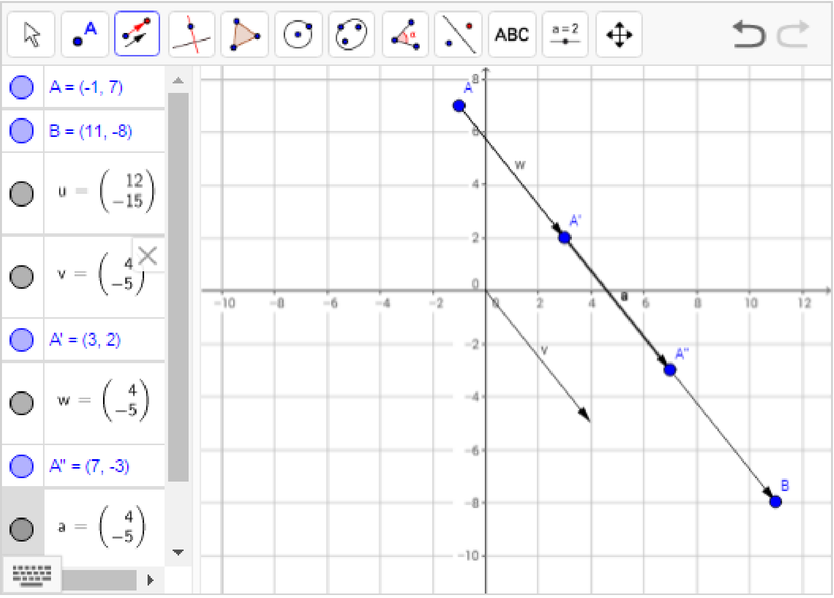


Figura 40: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.4
Fonte: Aluno19 – 3 A, 2016

6.5 PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA

Para o desenvolvimento das próximas atividades foi utilizado o conceito de razão entre segmentos colineares para desenvolver o conceito de ponto médio de um segmento de reta.

O Ponto Médio $M = (x_m, y_m)$, do ponto $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, pode ser obtido pela razão:

$$r = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(x_m - x_a, y_m - y_a)}{(x_b - x_a, y_b - y_a)} = \frac{1}{2}$$

$$2(x_m - x_a, y_m - y_a) = 1(x_b - x_a, y_b - y_a)$$

$$(2x_m - 2x_a, 2y_m - 2y_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

$$(2x_m, 2y_m) = (x_b + x_a, y_b + y_a)$$

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

ATIVIDADE 1

Calcule o ponto médio do segmento AB, dado A=(2,4) e B= (-1,5).

A Figura 41 trata-se do desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno entendeu os conceitos necessários para encontrar o ponto médio do segmento AB.

$$M=\left(\frac{2-1}{2},\frac{4+5}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)=(0,5;4,5)$$

Figura 41: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.5
Fonte: Aluno10 – 3 B

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone (Ponto) e adicione os pontos A=(2,4) e B= (-1,5).
2) Selecione o ícone (Ponto Médio ou Centro) e clique no ponto A e depois no ponto B.

Assim, a Figura 42 apresenta o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno consegue encontrar o ponto médio do segmento AB.

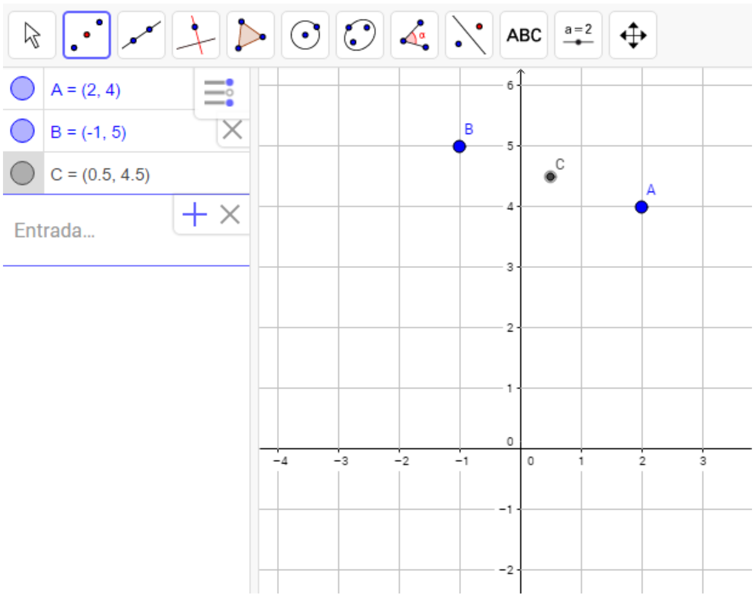
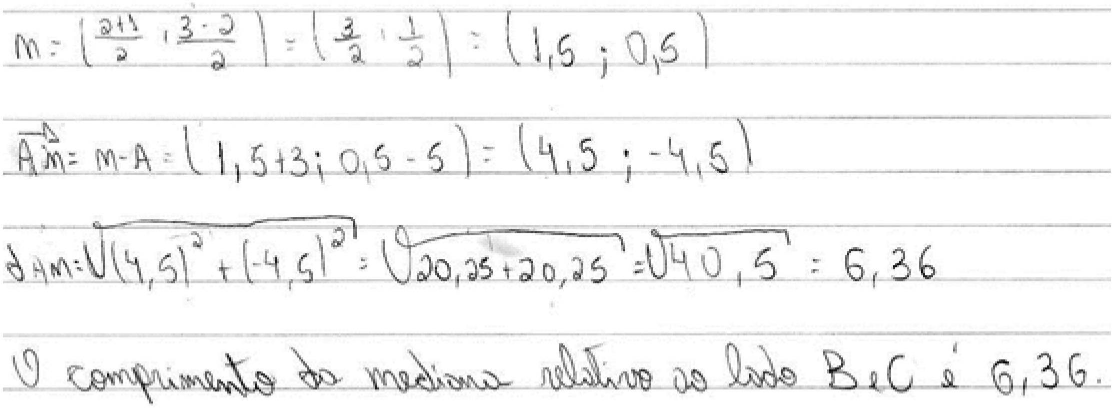


Figura 42: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.5
Fonte: Aluno10 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 2

Calcule o comprimento da mediana relativa ao lado BC do triângulo, cujas coordenadas dos vértices são: A=(-3,5), B=(2,3) e C=(1,-2).

A Figura 43, exibe o desenvolvimento da atividade 2 feita no caderno pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, e observa-se que o aluno entendeu os conceitos necessários para encontrar o ponto médio do segmento BC e encontrar a mediana AM e o valor de seu comprimento.



$m = \left(\frac{2+1}{2} ; \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right) = (1,5 ; 0,5)$

$\vec{Am} = m - A = (1,5+3 ; 0,5-5) = (4,5 ; -4,5)$

$d_{AM} = \sqrt{(4,5)^2 + (-4,5)^2} = \sqrt{20,25+20,25} = \sqrt{40,5} = 6,36$

O comprimento da mediana relativo ao lado B e C é 6,36.

Figura 43: Resposta no caderno – Atividade 2 – Cap. 6.5
Fonte: Aluno10 – 3 B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone (Ponto) e adicione os pontos A=(-3,5), B=(2,3) e C=(1,-2).
2) Selecione o ícone (Polígono) e clique no ponto A, B, C e A, nesta orgem.
3) Selecione o ícone (Ponto Médio) e clique no ponto B e depois o C o que nos dará o ponto D como ponto médio, clique nesse ponto e mude para ponto M.
4) Selecione o ícone (Segmento) e faça a mediana AM.
5) Selecione o ícone (Distância) e selecione essa mediana.

Nota-se na Figura 44 o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno consegue encontrar o ponto médio do segmento BC e encontrar a mediana AM e o valor de seu comprimento.

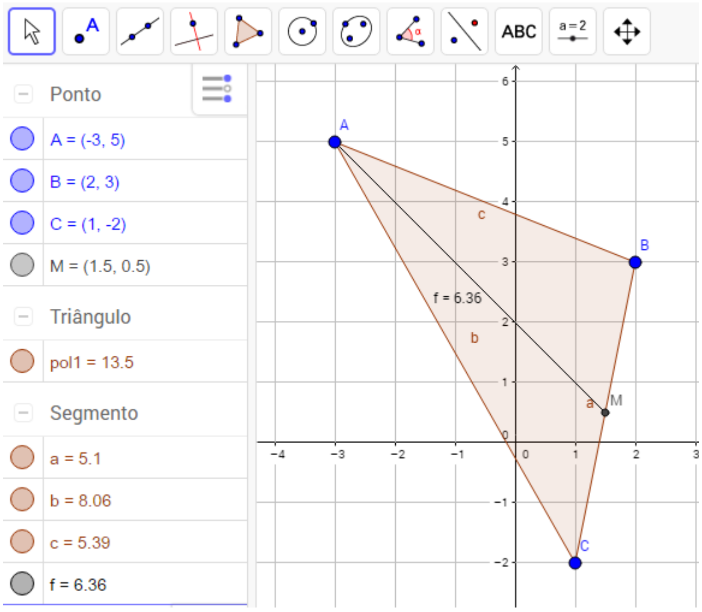


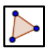
Figura 44: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.5
Fonte: Aluno10 – 3 B, 2016

6.5.1 Utilizando o Geogebra para Visualizar Teoremas.

A finalidade de utilizar o teorema da base média de um triângulo é mostrar que a base do triângulo é o dobro do comprimento da base formada pelos segmentos formados pelos pontos médios relativos aos lados desse triângulo. Em seguida, partimos para a demonstração de que as medianas no triângulo se interceptam no ponto G (baricentro) do triângulo, onde as medianas seguem a razão de 2:1. Esses conceitos são importantes na demonstração do conceito do Baricentro.

ATIVIDADE 1 – VISUALIZANDO O TEOREMA DA BASE MÉDIA DO TRIÂNGULO

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Polígonos) e construa um triângulo ABC com qualquer medida.

2) Selecione o ícone  (Ponto Médio ou Centro) encontre o ponto médio de dois lados desse triângulo. Sendo D o ponto médio do segmento AB e E o ponto médio do segmento BC.

3) Selecione o ícone  (Segmento) e trace o segmento de reta DE.

4) Selecione o ícone (Distância) e encontre a comprimento dos segmentos AC e DE.

5) Selecione o ícone (Mover) e mova o ponto A ou C e observe a relação do comprimento da base AC do triângulo com o segmento DE.

6) O segmento AC é a base e o segmento DE é a base média, a relação de equivalência entre esses segmentos é de 2:1.

Assim, na Figura 45, nota-se o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 15 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno consegue encontrar o ponto médio dos segmentos AB e BC e encontrar a base médio DE do triângulo e o valor do seu comprimento e da base, utilizando o procedimento. Com a alteração da base pode-se observar que sempre o valor da base média será a metade do valor da base.

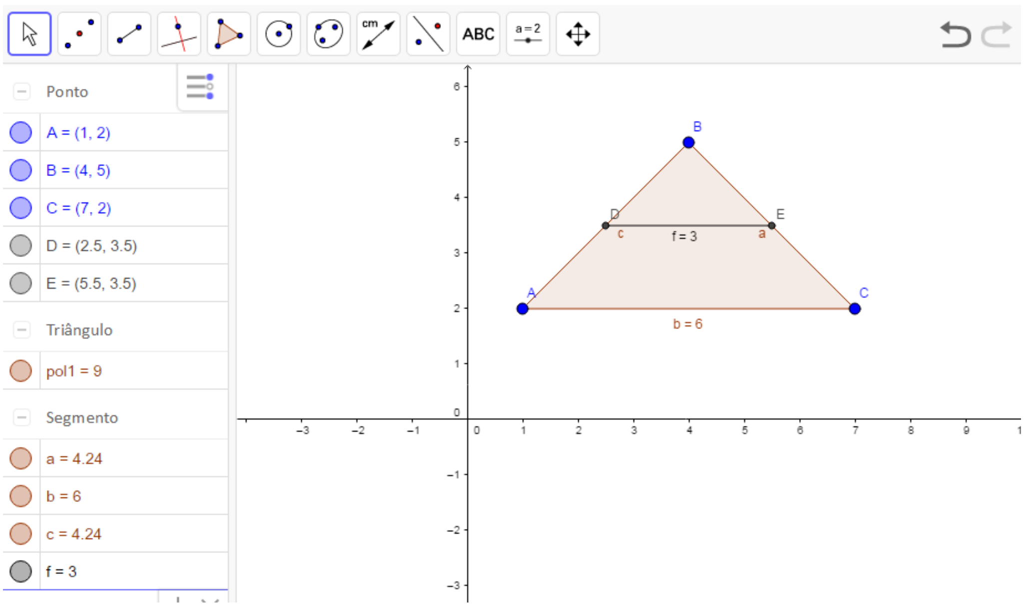


Figura 45: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.5.1
Fonte: Aluno15 – 3 A, 2016

ATIVIDADE 2 - VISUALIZANDO QUE O BARICENTRO DO TRIÂNGULO DIVIDE AS MEDIANAS NUMA RAZÃO DE 2:1

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Partindo do teorema da base média, ou seja, após utilizar o procedimento da atividade 1. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone (ponto Médio) e encontre o ponto médio E do lado AC.

2) Selecione o ícone (Segmento) e trace a mediana AE e CD.

3) Selecione o ícone (Interseção de Dois Objetos) e clique nas medianas AE e CD para encontrar o ponto G.

4) Selecione o ícone (Ângulos) e encontre todos os ângulos dos triângulos AGC e DGE, observe a relação entre esses triângulos.

5) Selecione o ícone (Distância) e encontre o comprimento de DE e AC.

6) Selecione o ícone (Mover) e mova o ponto B e observe a relação da distância de DE e AC.

7) Selecione o ícone (Segmento) e trace a mediana BF.

8) Selecione o ícone (Distância) e encontre o comprimento de BG e GF.

9) Selecione o ícone (Mover) e mova o ponto B, observe a relação entre os segmentos BG e GF.

A Figura 46 apresenta o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 15 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno segue o procedimento e verifica que o valor do segmento BG é o dobro do valor do segmento GF.

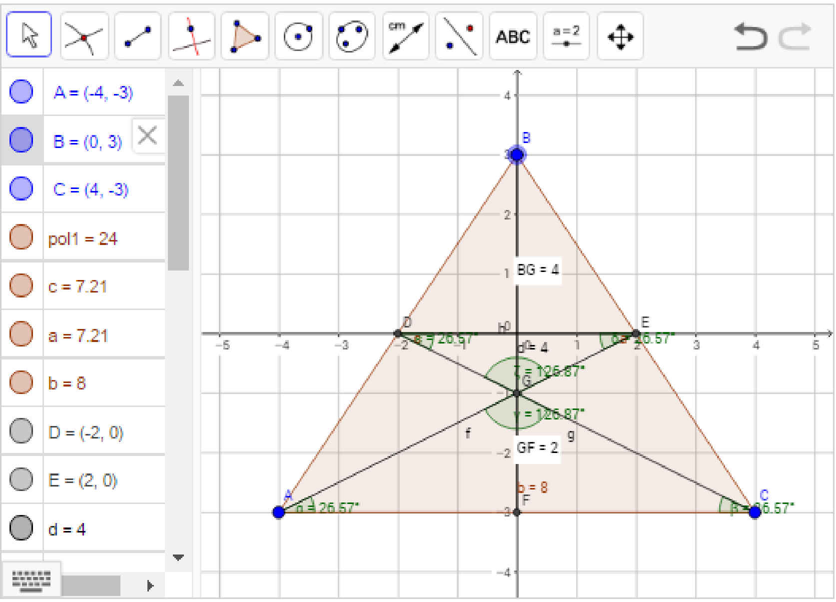


Figura 46: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.5.1
Fonte: Aluno15 – 3 A, 2016

As visualizações desses teoremas têm importância na resolução de diversas situações problemas, bem como para dar suporte na demonstração da fórmula do baricentro de um triângulo.

6.6 BARICENTRO DE POLÍGONOS

As atividades desenvolvidas a seguir têm a finalidade de mostrar como encontrar o baricentro de um triângulo e de polígonos com maior número de lados e mostrar suas propriedades.

6.6.1 Baricentro de um Triângulo

Para o desenvolvimento das próximas atividades é necessário utilizar as propriedades e os conceitos das atividades anteriores, visualizadas com o auxílio do Geogebra, para desenvolver o conceito do baricentro de um triângulo.

Dessa forma, usando uma das medianas do triângulo, podemos escrever a razão:

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AE}} = \frac{2a}{3a}$$

$$\frac{(x_g - x_a, y_g - y_a)}{(x_e - x_a, y_e - y_a)} = \frac{2}{3}$$

$$3(x_g - x_a, y_g - y_a) = 2(x_e - x_a, y_e - y_a)$$

Como E=(x_e, y_e) é o ponto médio de BC, então E=$\left(\frac{x_b+x_c}{2}, \frac{y_b+y_c}{2}\right)$

$$(3x_g - 3x_a, 3y_g - 3y_a) = \left(2\frac{x_b + x_c}{2} - 2x_a, 2\frac{y_b + y_c}{2} - 2y_a\right)$$

$$(3x_g, 3y_g) = (x_b + x_c + x_a, y_b + y_c + y_a)$$

$$(x_g, y_g) = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)$$

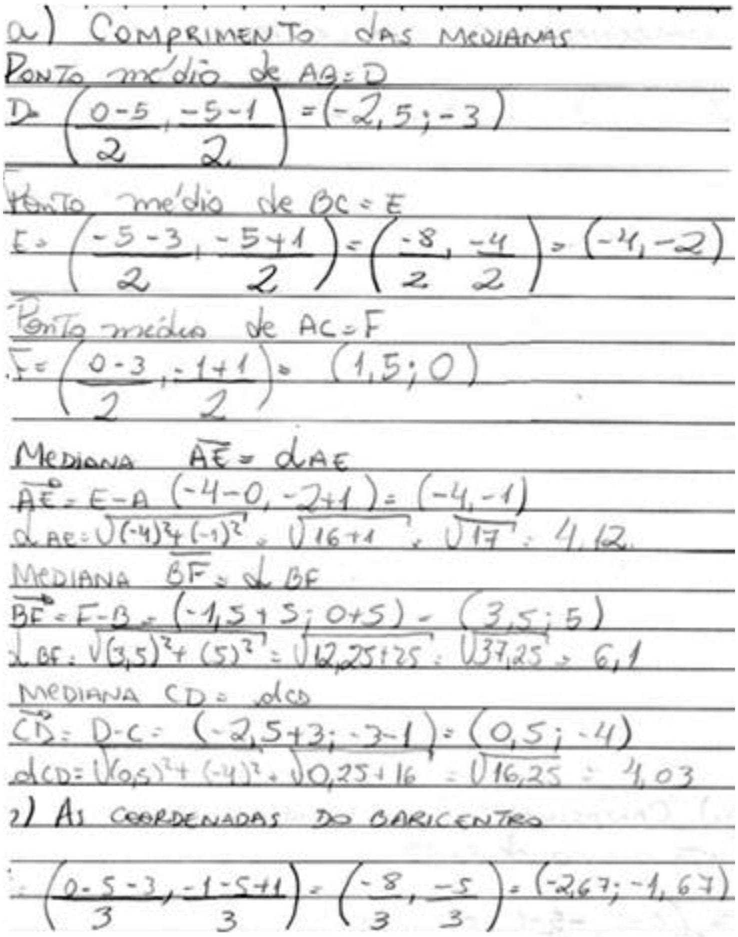
ATIVIDADE 1

Dado o triângulo de vértices A=(0,-1),B=(-5,-5) e C=(-3,1), determine:

a) Comprimento das medianas.

b) As coordenadas do baricentro.

A Figura 47, trata-se do desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 17 do terceiro ano do Ensino Médio, onde observa-se que o aluno entendeu os conceitos necessários para encontrar o comprimento das medianas e as coordenadas do baricentro do triângulo.



a) COMPRIMENTO DAS MEDIANAS

PONTO médio de AB = D

$D = \left(\frac{0-5}{2}, \frac{-5-1}{2}\right) = (-2,5; -3)$

Ponto médio de BC = E

$E = \left(\frac{-5-3}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = \left(\frac{-8}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (-4, -2)$

Ponto médio de AC = F

$F = \left(\frac{0-3}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (1,5; 0)$

MEDIANA $AE = d_{AE}$

$\vec{AE} = E - A \; (-4-0, -2+1) = (-4, -1)$

$d_{AE} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 4,12$

MEDIANA $BF = d_{BF}$

$\vec{BF} = F - B = (-1,5+5; 0+5) = (3,5; 5)$

$d_{BF} = \sqrt{(3,5)^2 + (5)^2} = \sqrt{12,25+25} = \sqrt{37,25} = 6,1$

MEDIANA $CD = d_{CD}$

$\vec{CD} = D - C = (-2,5+3; -3-1) = (0,5; -4)$

$d_{CD} = \sqrt{(0,5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{0,25+16} = \sqrt{16,25} = 4,03$

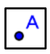
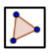
2) AS COORDENADAS DO BARICENTRO

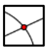
$\left(\frac{0-5-3}{3}, \frac{-1-5+1}{3}\right) = \left(\frac{-8}{3}, \frac{-5}{3}\right) = (-2,67; -1,67)$

Figura 47: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.6.1

Fonte: Aluno17 – 3 B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre os pontos A=(0,-1),B=(-5,-5) e C=(-3,1).
2) Selecione o ícone  (Polígonos) e construa o triângulo ABC.
3) Selecione o ícone  (Ponto Médio ou Centro) e encontre os pontos médios D, E e F dos segmentos AB, BC e AC.
4) Selecione o ícone  (Segmento) e trace as medianas AE, BF e CD.
5) Selecione o ícone  (Distância) e clique nas medianas encontradas.

6) Selecione o ícone  (Interseção de Dois Objetos) e clique nas medianas para encontrar o ponto G (baricentro).

A Figura 48, exibe o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 17 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno segue o procedimento e encontra o valor das medianas e do baricentro.

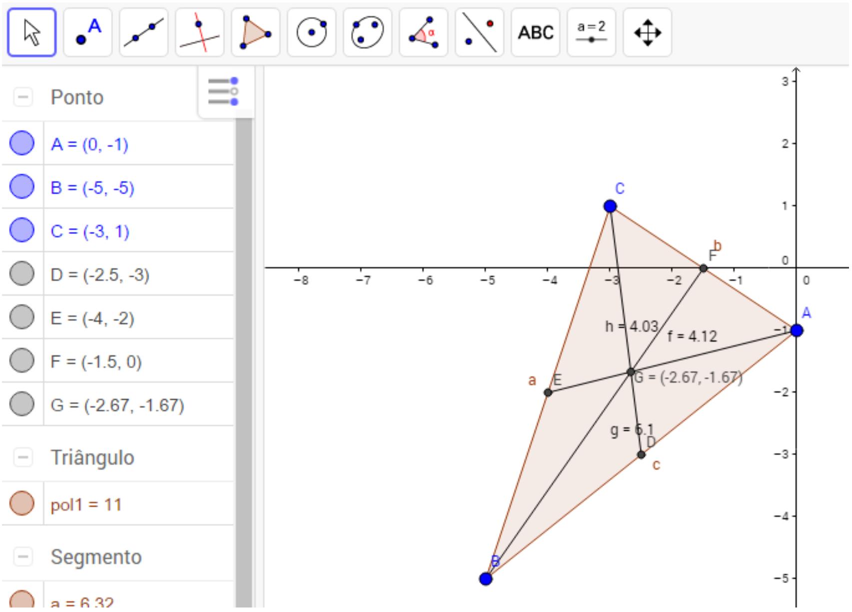


Figura 48: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.6.1
Fonte: Aluno17 – 3 B, 2016

6.6.2 Propriedades do Baricentro

Para o desenvolvimento das próximas atividades e entender as propriedades do baricentro é necessário fazer n=3, n=4 e n=5 para generalizar e chegar a conclusão que vale para todo n $\in \mathbb{N}$, n≥3.

De acordo com Gómez; Frensel e Crissaff (2013), “seja n $\in \mathbb{N}$, n≥ 3 e sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ pontos não colineares no plano. Consideremos a região polinomial P delimitada pelos n segmentos adjacentes $A_1A_2, A_2A_3 \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$. O centro de massa (ou centro de gravidade ou ponto de equilíbrio) de p é o ponto G caracterizado pela identidade: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}\right)$.”

Note que quando n=3, G é o baricentro do triângulo $A_1A_2A_3$. Verifique as seguintes propriedades:

(a) G não depende da escolha do ponto O.

(b) G é caracterizado, também pela identidade:

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

(c) Quando n=3 e P é um triângulo, o centro de gravidade G fica no interior de P. Entretanto, se n≥4 pode ocorrer que G fique no exterior de P.

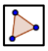
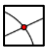
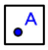
Elabore alguns exemplos usando o Geogebra.

ATIVIDADE 1

Para n=3, tem-se:

Seja O um ponto no plano. Então o ponto G, tal que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ não depende da escolha do ponto O, mas apenas dos pontos A,B e C.

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Para resolver a alternativa (a): Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Polígonos) e construa o triângulo ABC.
2) Selecione o ícone  (Ponto Médio ou Centro) e encontre os pontos médios D, E e F dos segmentos AB, BC e AC.
3) Selecione o ícone  (Segmento) e trace as medianas AE, BF e CD.
4) Selecione o ícone  (Interseção de Dois Objetos) e clique nas medianas para encontrar o ponto G (baricentro).
5) Selecione o ícone  (Ponto) e escolha um ponto qualquer no plano, formando o ponto H, clique com o botão direito do mouse, em cima do ponto H, escolha a opção renomear e mude o nome para o ponto O.
6) Selecione o ícone  (Vetor) e faça os vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, formando os vetores u, v e w.
7) Selecione o ícone  (Mover) e mova o ponto O, verifique se o baricentro G mudou sua posição. No campo de entrada:
8) Digite a soma dos vetores: u+v+w. Verifique se o vetor g resultante dessa soma é o triplo do comprimento do vetor $\overrightarrow{OG}$, ou seja, que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

   Para resolver a alternativa (b):

9) Mova o ponto O até que coincida com o baricentro G do triângulo. O que aconteceu com o vetor g resultante da soma dos vetores u, v e w?

Para resolver a alternativa (c):

10) Quando n=3 o centro de gravidade fica no interior. Mova os pontos A, B ou C para verificar.

A Figura 49, trata-se do desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno segue o procedimento e encontra o valor das medianas e do baricentro escolhe o ponto O exterior do triângulo e verifica que o vetor $\overrightarrow{OG}$ indica sempre o baricentro mesmo mudando a posição do ponto O.

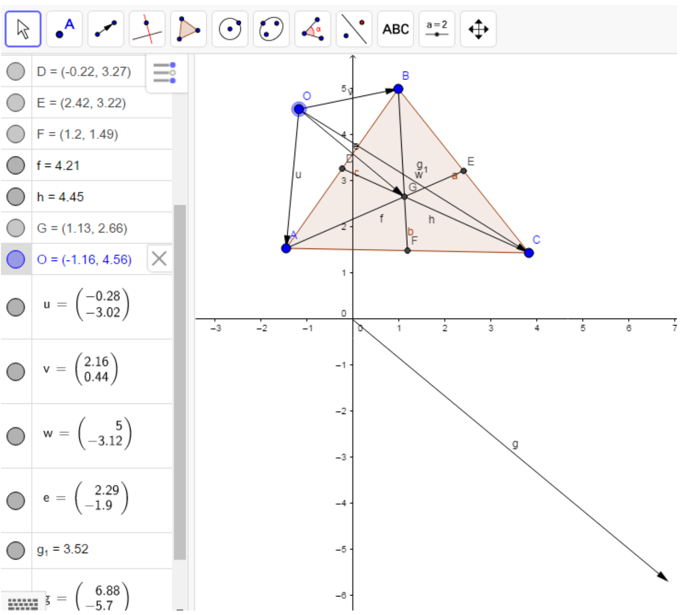


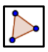
Figura 49: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.6.2
Fonte: Aluno 7 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 2

Para n=4, tem-se:

Seja O um ponto no plano. Então o ponto G, tal que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ não depende da escolha do ponto O, mas apenas dos pontos A, B e C.

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Para realizar a alternativa (a). Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Polígonos) e construa o polígono ABCD.

2) Selecione o ícone (Ponto) e escolha um ponto qualquer no plano, formando o ponto E, clique com o botão direito do mouse, em cima do ponto H, escolha a opção renomear e mude o nome para o ponto O.

3) Selecione o ícone (Vetor) e faça os vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ formando os vetores u, v, w, e.

4) Selecione o ícone (Mover) e mova o ponto O, verifique se o baricentro G mudou sua posição. No campo de entrada:

5) Digite a soma dos vetores: u+v+w+e. Verifique se o vetor g resultante dessa soma é quatro vezes maior que o comprimento do vetor $\overrightarrow{OG}$, ou seja, que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$.

Para realizar a alternativa (b):

6) Mova o ponto O até que coincida com o baricentro G do triângulo. O que aconteceu com o vetor g resultante da soma dos vetores u, v, w, e?

Para realizar a alternativa (c):

7) Quando n=4 o centro de gravidade pode ficar no interior e no exterior do polígono. Mova os pontos A, B, C ou D para verificar.

Nota-se na Figura 50 o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno segue o procedimento e encontra o baricentro escolhendo o ponto O exterior do polígono e verifica que quando aproxima o ponto D do ponto B o baricentro fica no exterior da figura.

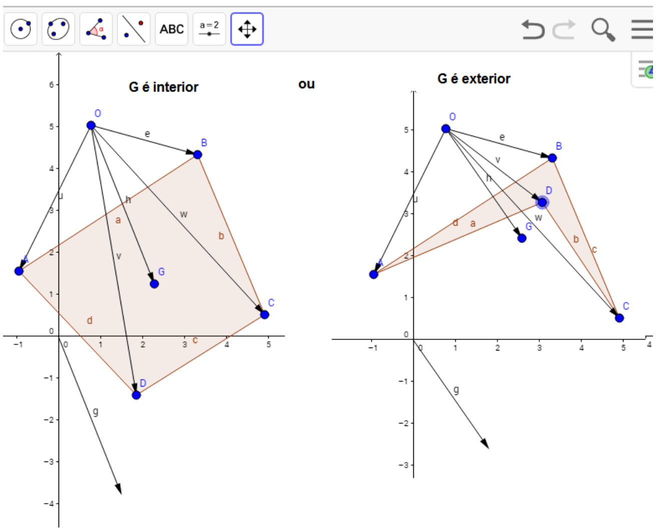


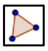
Figura 50: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.6.2
Fonte: Aluno 7 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 3

Para n=4, tem-se:

Seja O um ponto no plano. Então o ponto G, tal que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)$ não depende da escolha do ponto O, mas apenas dos pontos A,B e C.

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Para realizar a alternativa (a). Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Polígonos) e construa o polígono ABCDE.
2) Selecione o ícone  (Ponto) e escolha um ponto qualquer no plano, formando o ponto E, clique com o botão direito do mouse, em cima do ponto H, escolha a opção renomear e mude o nome para o ponto O.
3) Selecione o ícone  (Vetor) e encontre os vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ formando os vetores u, v, w, f, g.
4) Selecione o ícone  (Mover) e mova o ponto O, verifique se o baricentro G mudou sua posição. No campo de entrada:
5) Digite a soma dos vetores: u+v+w+f+g. Verifique se o vetor g resultante dessa soma é cinco vezes maior que o comprimento do vetor $\overrightarrow{OG}$, ou seja, que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}},\right)$.

   Para realizar a alternativa (b):
6) Mova o ponto O até que coincida com o baricentro G do triângulo. O que aconteceu com o vetor g resultante da soma dos vetores u, v, w, f, g? Para realizar a alternativa (c):
7) Quando n=5 o centro de gravidade pode ficar no interior e no exterior do polígono. Mova os pontos A, B, C ou D para verificar.

A Figura 51, trata-se do desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno segue o procedimento e encontra o baricentro escolhendo o ponto O exterior do polígono e verifica que quando aproxima o ponto E do ponto B o baricentro fica no exterior da figura.

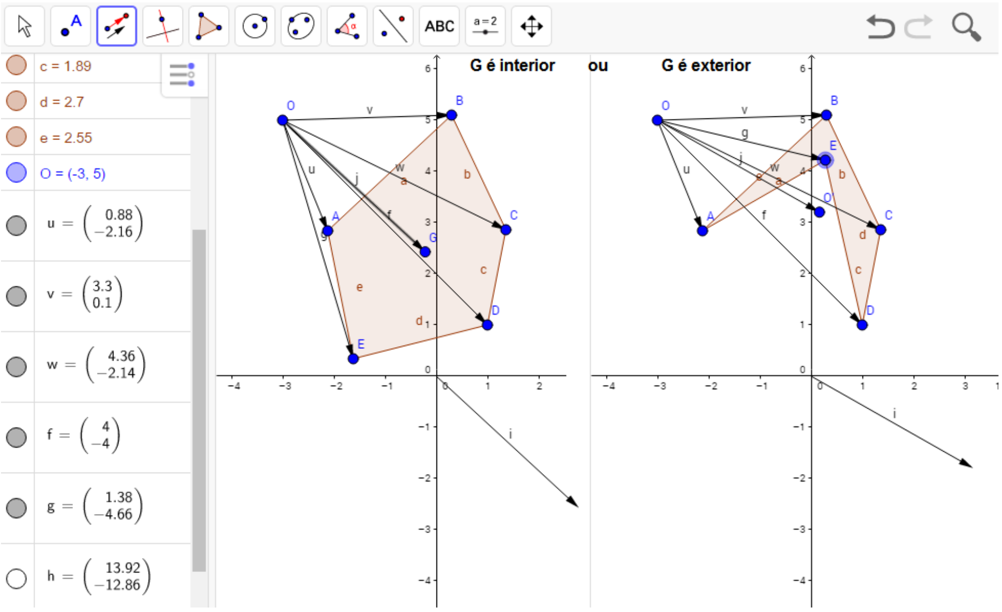


Figura 51: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.6.2
Fonte: O autor, 2016

Percebe-se com o desenvolvimento das atividades que para n=3 o baricentro é interno e para o valor de n maior que 3 o baricentro pode ser interior ou exterior e isso vale para todo n $\in \mathbb{N}$, n≥3.

6.7 CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Quando os vetores são múltiplos um do outro, significa que os pontos que formam esses vetores estão na mesma reta, ou seja, estão alinhados.

Para o desenvolvimento das próximas atividades e entender a condição de alinhamento de três pontos é necessário saber quando um vetor é múltiplo um do outro. A seguir a definição fornece um critério para determinar quando um vetor é múltiplo de outro.

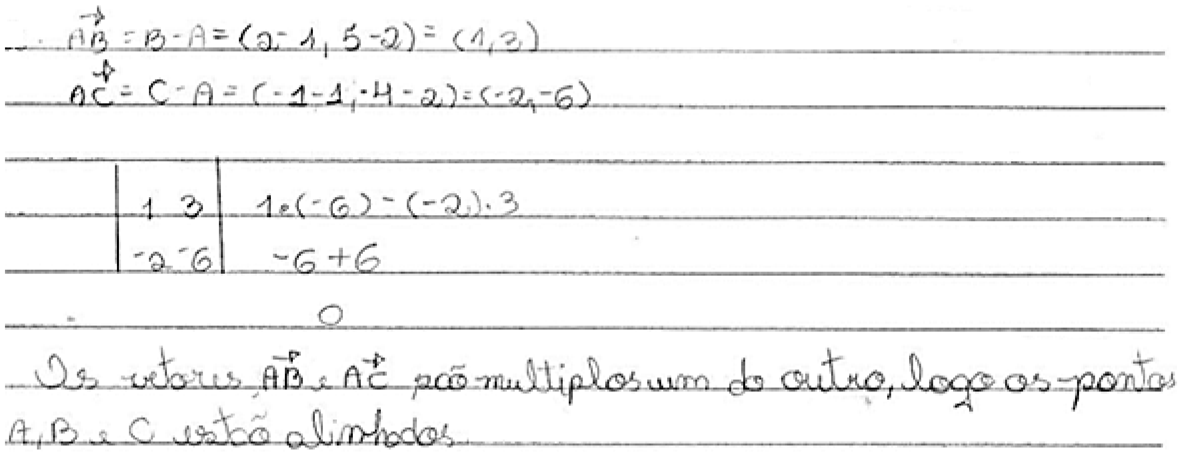
Definição 7: Um dos vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$ é múltiplo um do outro se, e só se,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0$$

ATIVIDADE 1

Dado os pontos A=(1,2), B=(2,5) e C=(-1,-4), verifique se estão alinhados, ou seja, se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos um do outro.

Nota-se na Figura 52 o desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno encontra os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e verifica que eles são múltiplos um do outro, e assim os pontos A, B e C estão alinhados, ou seja, são colineares.



$\vec{AB} = B - A = (2-1, 5-2) = (1,3)$

$\vec{AC} = C - A = (-1-1, -4-2) = (-2,-6)$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$ $1 \cdot (-6) - (-2) \cdot 3$

$-6+6$

0

Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são multiplos um do outro, logo os pontos A, B e C estão alinhados

Figura 52: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.7
Fonte: Aluno12 – 3 A, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone (Ponto) e encontra os pontos A=(1,2), B=(2,5) e C=(-1,-4).

2) Selecione o ícone (Vetor) e faça os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, dessa forma, você pode verificar se eles formam uma reta.

A Figura 53, apresenta o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 12 da terceira série do Ensino Médio, onde o aluno segue o procedimento e verifica que os vetores estão sobre uma reta.

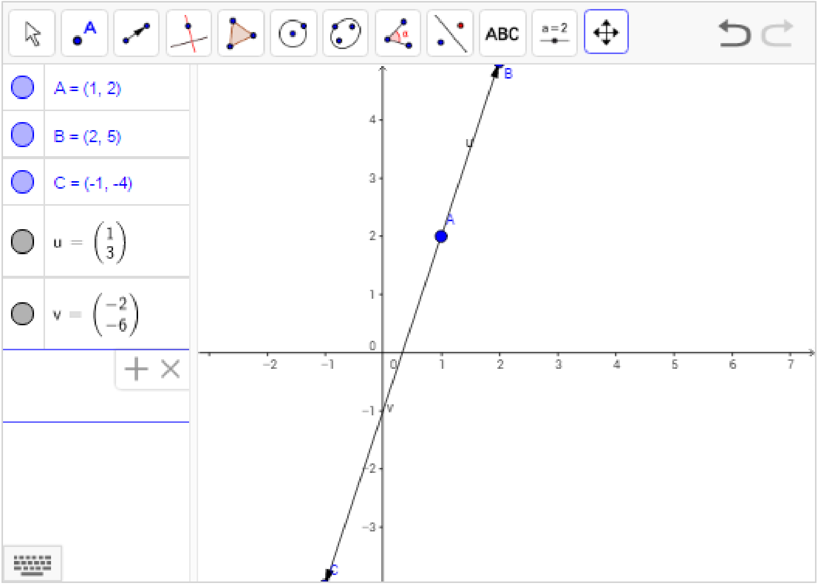


Figura 53: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.7
Fonte: Aluno12 – 3 A, 2016

ATIVIDADE 2

Determine y para que os pontos A=(3,5), B=(-3,8) e C=(4,y) sejam colineares.

A Figura 54, exibe o desenvolvimento da atividade 2 feita no caderno pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontra os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e utiliza os conceitos para verificar se os vetores são múltiplos um do outro, encontrando o valor desconhecido.

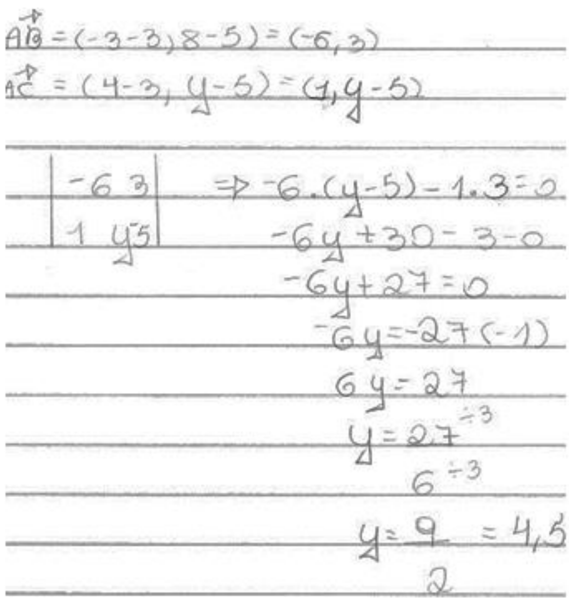


Figura 54: Resposta no caderno – Atividade 2 – Cap. 6.7
Fonte: Aluno12 – 3 A, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone (Ponto) e encontra os pontos A=(3,5), B=(-3,8).
2) Selecione o ícone (Reta) e clique no ponto A e depois no B formando a reta, dessa forma, você pode verificar se eles formam uma reta.
3) Selecione o ícone (Ponto) e encontre o ponto C=(4,0).
4) Selecione o ícone (Reta Perpendicular) e clique no ponto C e no eixo das abscissas.
5) Selecione o ícone (Interseção de Dois Objetos) e clique nas duas retas, originando o ponto D. O valor da ordenada desse ponto é o valor procurado.

A Figura 55, trata-se do desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno segue o procedimento e encontra o valor procurado.

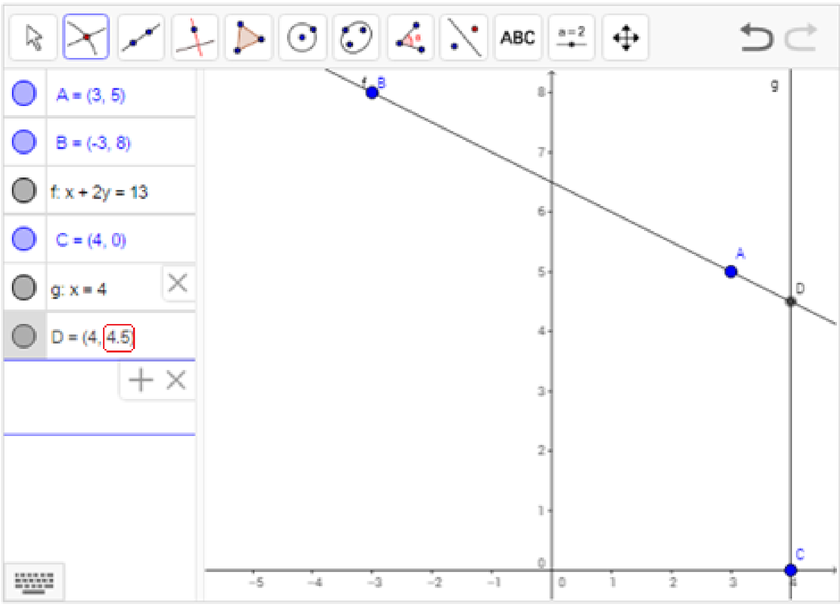


Figura 55: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.7
Fonte: Aluno12 – 3 A, 2016

ATIVIDADE 3

O ponto P(3,m) é interno a um dos lados do triângulo A=(1,2), B=(3,1) e C=(5,-4). Determine m.

Obs: Os pontos A, P e C são colineares.

Nota-se na Figura 56 o desenvolvimento da atividade 3 feita no caderno pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, sabendo que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos, o aluno utiliza os conceitos para verificar se os vetores são múltiplos um do outro, encontrando o valor desconhecido.

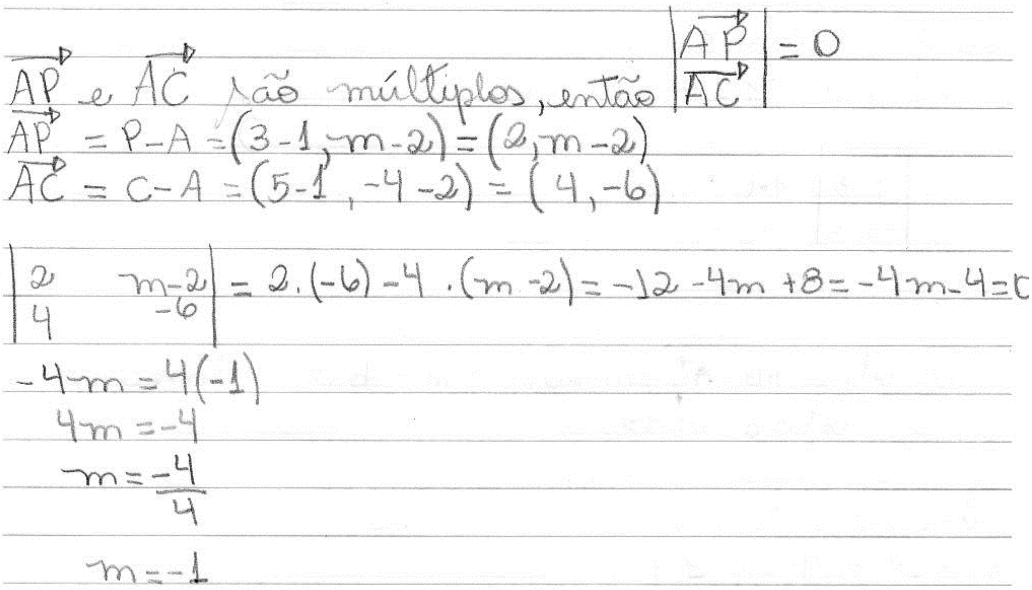
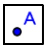
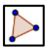
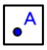


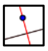
Figura 56: Resposta no caderno – Atividade 3 – Cap. 6.7
Fonte: Aluno12 – 3 A, 2016

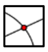
Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontra os pontos A=(1,2), B=(3,1) e C=(5,-4).

2) Selecione o ícone  (Polígono) e clique nos pontos A, B e C.

3) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto D=(3,0).

4) Selecione o ícone  (Reta Perpendicular) e clique no ponto D e no eixo das abscissas.

5) Selecione o ícone  (Interseção de Dois Objetos) e clique na reta f e no lado AC do triângulo. O valor da ordenada desse ponto é o valor procurado.

A Figura 57, mostra o desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno segue o procedimento e encontra o valor procurado.

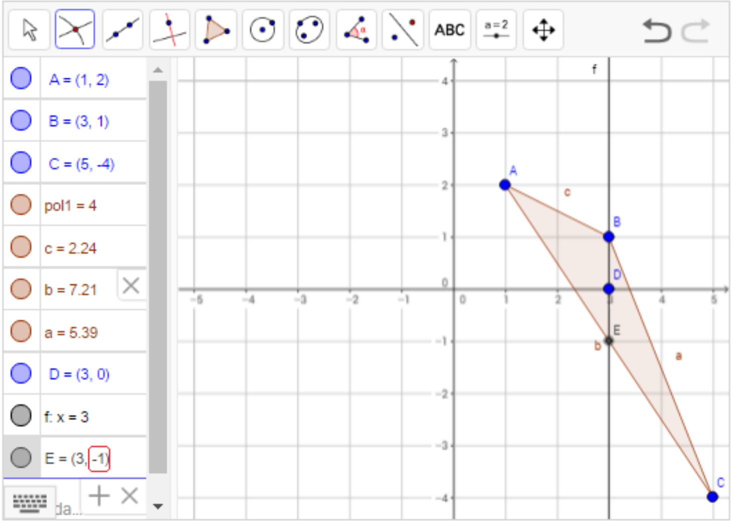


Figura 57: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.7
Fonte: Aluno12 – 3 A, 2016

6.8 ÁREA DE PARALELOGRAMOS E TRIÂNGULOS

As atividades desenvolvidas a seguir têm a finalidade de mostrar como encontrar a área de paralelogramos e de triângulos através de seus conceitos em atividades resolvidas no caderno e confirmar as respostas obtidas no Geogebra.

6.8.1 Área de Parelelogramos

Para o desenvolvimento das próximas atividades e encontrar a área de paralelogramos é necessário desenvolver o conceito de como obter a sua área através das coordenadas de seus vértices.

Considere a Figura 58, onde S é a área do paralelogramo ABCD.

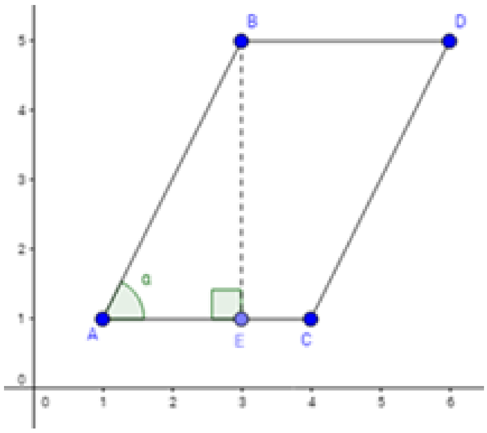


Figura 58: Área do paralelogramo
FONTE: O autor, 2016

Note que: $sen \propto = \frac{\|\overrightarrow{BE}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, assim: $\|\overrightarrow{BE}\| = \|\overrightarrow{AB}\|. sen \propto$

Para calcular a área do paralelogramo vamos usar a área de um triângulo com base na trigonometria:

$$S^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2. \|\overrightarrow{AB}\|^2. sen^2 \propto$$

$$S^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2. \|\overrightarrow{AB}\|^2. (1 - \cos^2 \propto)$$

$$S^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2. \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2. \|\overrightarrow{AB}\|^2. \cos^2 \propto$$

$$S = \sqrt{\|\overrightarrow{AC}\|^2. \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle^2}$$

Considerando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ e $\overrightarrow{AC} = (c, d)$, onde o produto interno desses vetores é denotado por $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$ e pode ser calculado da seguinte maneira: $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = a.c + b.d$

$$S = \sqrt{(c^2 + d^2). (a^2 + b^2) - (ac + bd)^2}$$

$$S = \sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 - a^{2c^2} - 2acbd - b^2d^2}$$

$$S = \sqrt{a^2d^2 - 2acbd - b^2c^2}$$

$$S = \sqrt{(ad - bc)^2}$$

$$S = |ad - bc|$$

Assim, encontra-se que a área do paralelogramo é igual ao determinante da matriz formada pelas coordenadas dos vetores, ou seja:

$$S = \left| \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|$$

$$S = \left| \det \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} \right|$$

ATIVIDADE 1

Determine a área do paralelogramo ABCD, dados A=(-2,1), B=(1,5), C=(3,-2) e D=(6,2).

Nota-se na Figura 59 o desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou o valor dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e utilizou os conceitos necessários para encontrar a área do paralelogramo.

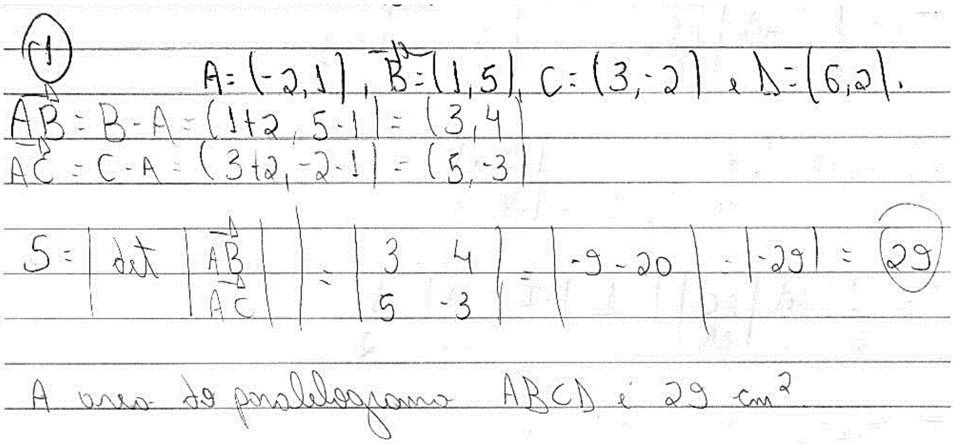
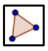


Figura 59: Resposta no caderno – Atividade 1 – Cap. 6.8.1
FONTE: Aluno10 – 3 B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontra os pontos A=(-2,1), B=(1,5), C=(3,-2) e D=(6,2).

2) Selecione o ícone  (Polígono) e clique nos pontos A, B, C e D.

3) Selecione o ícone  (Área) e clique no polígono ABCD.

A Figura 60, exibe o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou o valor dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e encontrou área do paralelogramo.

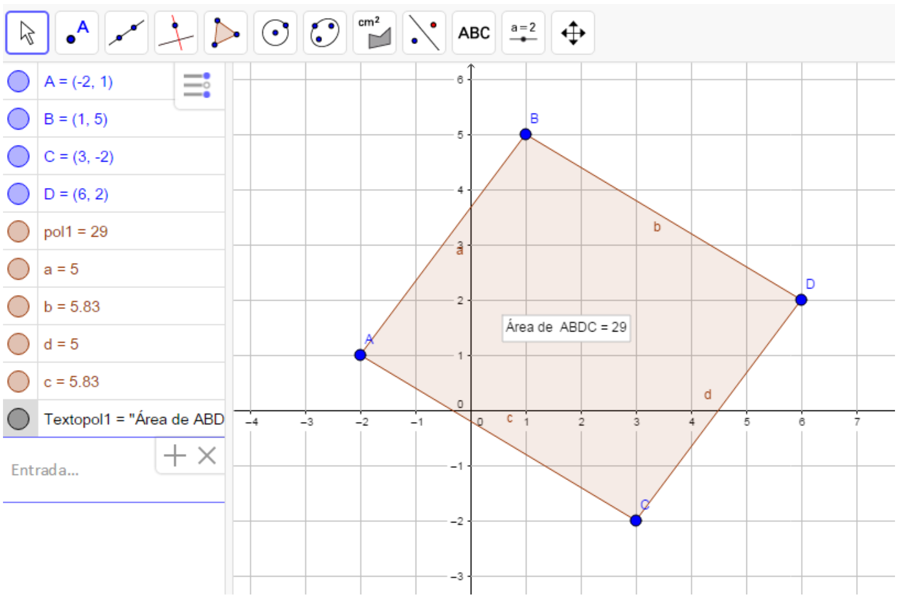


Figura 60: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.8.1
FONTE: Aluno10 – 3 B, 2016

6.8.2 Área de Triângulos

Para o desenvolvimento das próximas atividades e encontrar a área de triângulos é necessário desenvolver o conceito de como obter a sua área através das coordenadas de seus vértices.

Considere T como a área do triângulo ABC, apresentado na Figura 61.

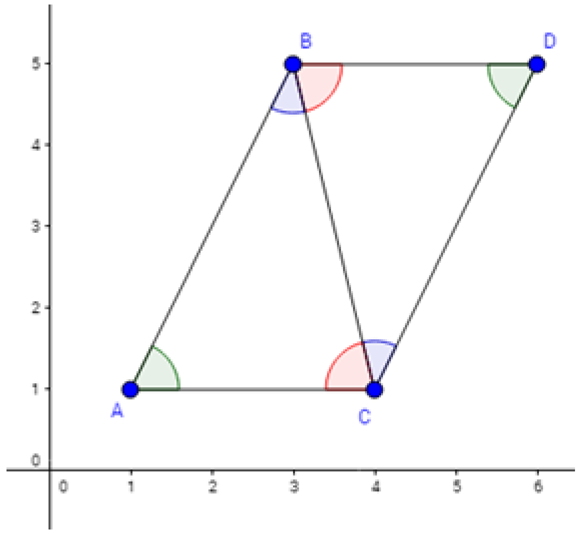


Figura 61: Área do triângulo
FONTE: O autor, 2016

Note que os triângulos ABC e BCD são congruentes por AAA, assim suas áreas são iguais e como a área S do paralelogramo é igual à soma dessas áreas, então a área do triângulo T é a metade da área do paralelogramo S, ou seja, $T = \frac{S}{2}$:

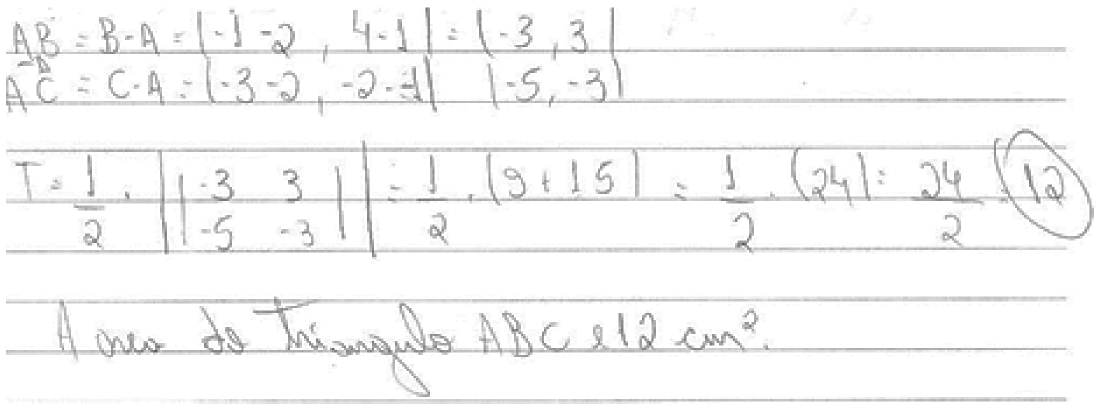
$$T = \frac{S}{2} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|$$

$$T = \frac{1}{2}\left|\det\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix}\right|$$

ATIVIDADE 2

Determine a área do triângulo ABC, dados A=(2,1), B=(-1,4), C=(-3,-2).

Nota-se na Figura 62 o desenvolvimento da atividade 2 feita no caderno pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, que o aluno encontrou o valor dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e utilizou os conceitos necessários para encontrar a área do triângulo.



$\vec{AB} = B - A = |-1-2,\ 4-1| = |-3, 3|$

$\vec{AC} = C - A = |-3-2,\ -2-1|\ |-5, -3|$

$T = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |9 + 15| = \frac{1}{2} \cdot (24) = \frac{24}{2}\ 12$

Area do triângulo ABC é 12 cm².

Figura 62: Resposta no caderno – Atividade 2 – Cap. 6.8.2
FONTE: Aluno10 – 3 B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone (Ponto) e encontra os pontos A=(2,1), B=(-1,4), C=(-3,-2).

2) Selecione o ícone (Polígono) e clique nos pontos A, B e C.

3) Selecione o ícone (Área) e clique no triângulo ABC.

Na Figura 63 tem-se o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou o valor dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e encontrou a área do triângulo.

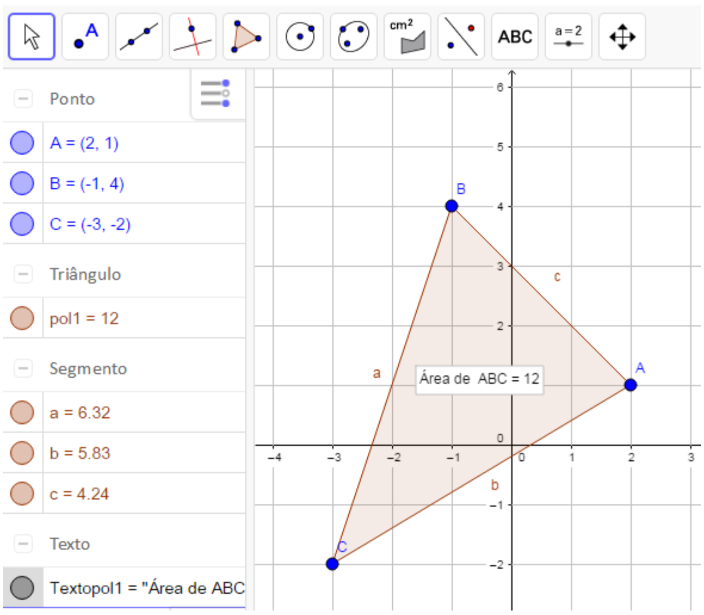
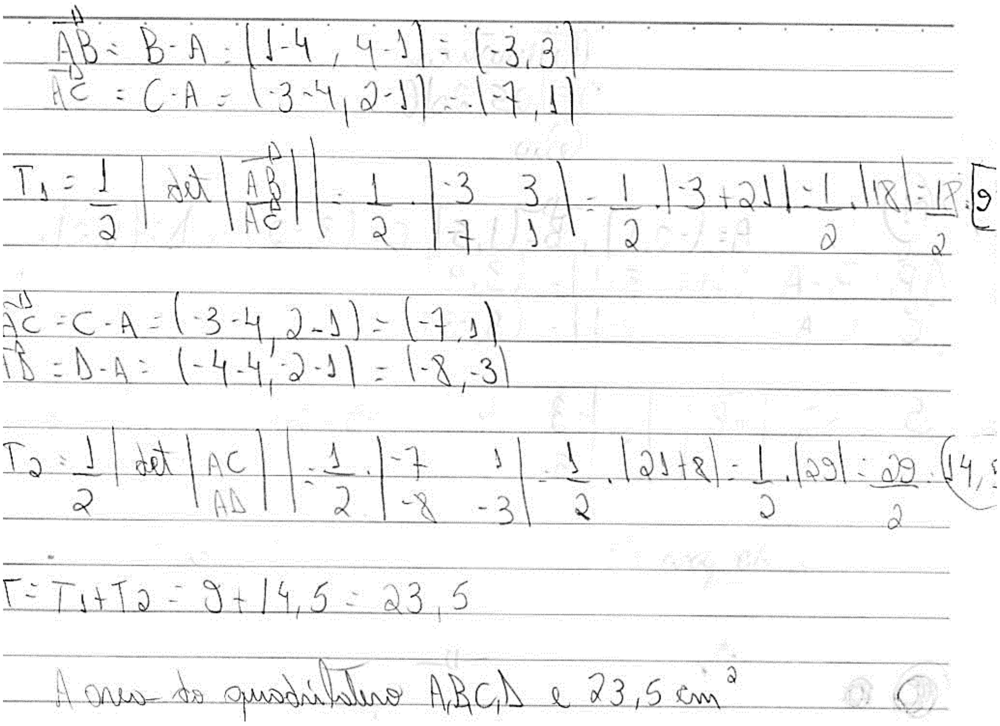


Figura 63: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.8.2
FONTE: Aluno10 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 3

Determine a área do quadrilátero ABCD, dados A=(4,1), B=(1,4), C=(-3,2) e D=(-4,-2). Dica: Divida o quadrilátero em dois triângulos.

A Figura 64, apresenta o desenvolvimento da atividade 3 feita no caderno pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou o valor dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e utilizou os conceitos necessários para encontrar a área do quadrilátero formado pelos dois triângulos.


$\vec{AB} = B - A = (1-4, 4-1) = (-3, 3)$

$\vec{AC} = C - A = (-3-4, 2-1) = (-7, 1)$

$T_1 = \frac{1}{2} \left| \det \begin{vmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-3+21| = \frac{1}{2} \cdot |18| = \frac{18}{2} = \boxed{9}$

$\vec{AC} = C - A = (-3-4, 2-1) = (-7, 1)$

$\vec{AD} = D - A = (-4-4, -2-1) = (-8, -3)$

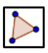
$T_2 = \frac{1}{2} \left| \det \begin{vmatrix} AC \\ AD \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |21+8| = \frac{1}{2} \cdot |29| = \frac{29}{2} = 14,5$

$T = T_1 + T_2 = 9 + 14,5 = 23,5$

A área do quadrilátero ABCD é $23,5 \text{ cm}^2$

Figura 64: Resposta no caderno – Atividade 3 – Cap. 6.8.2
FONTE: Aluno10 – 3B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontra os pontos A=(4,1), B=(1,4), C=(-3,2) e D=(-4,-2).
2) Selecione o ícone  (Polígono) e clique nos pontos A, B, C e D.
3) Selecione o ícone  (Segmento) e clique no ponto A e depois no C.
4) Selecione o ícone  (Área) e clique no triângulo ABC e depois no triângulo ACD.

Assim, a Figura 65 trata-se do desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 10 do terceiro ano do Ensino Médio, que o aluno encontrou a área do quadrilátero formado pelos dois triângulos.

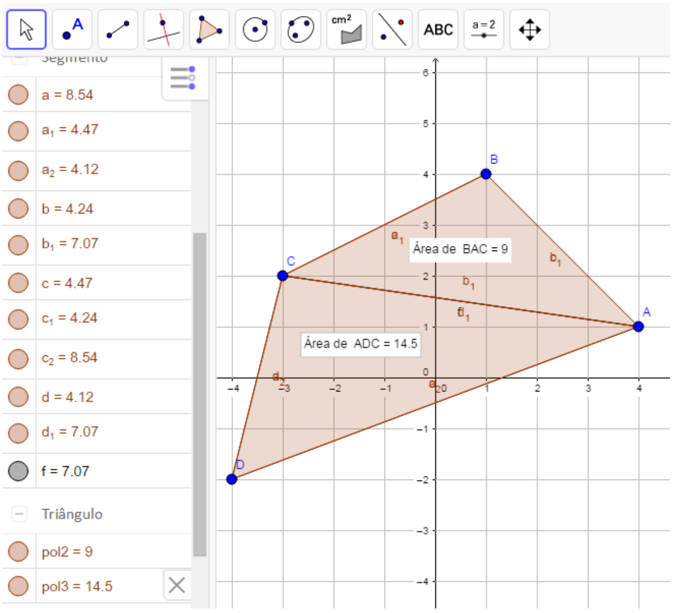


Figura 65: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.8.2
FONTE: Aluno10 – 3 B, 2016

ATIVIDADE 4 - OBMEP NA ESCOLA - QUESTÃO 2

Na Figura 66, AEFD é um quadrado e o retângulo ABCD tem lados AB=3 e AD=2. Seja G um ponto qualquer do segmento DE e x a distância de G ao segmento AB.

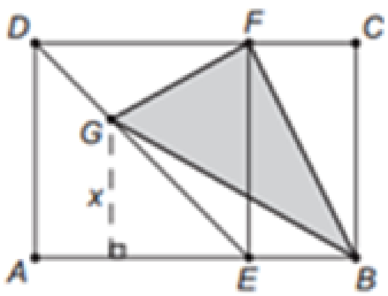


Figura 66: Obmep na escola
FONTE: http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/314790.o acesso: 29/01/2016

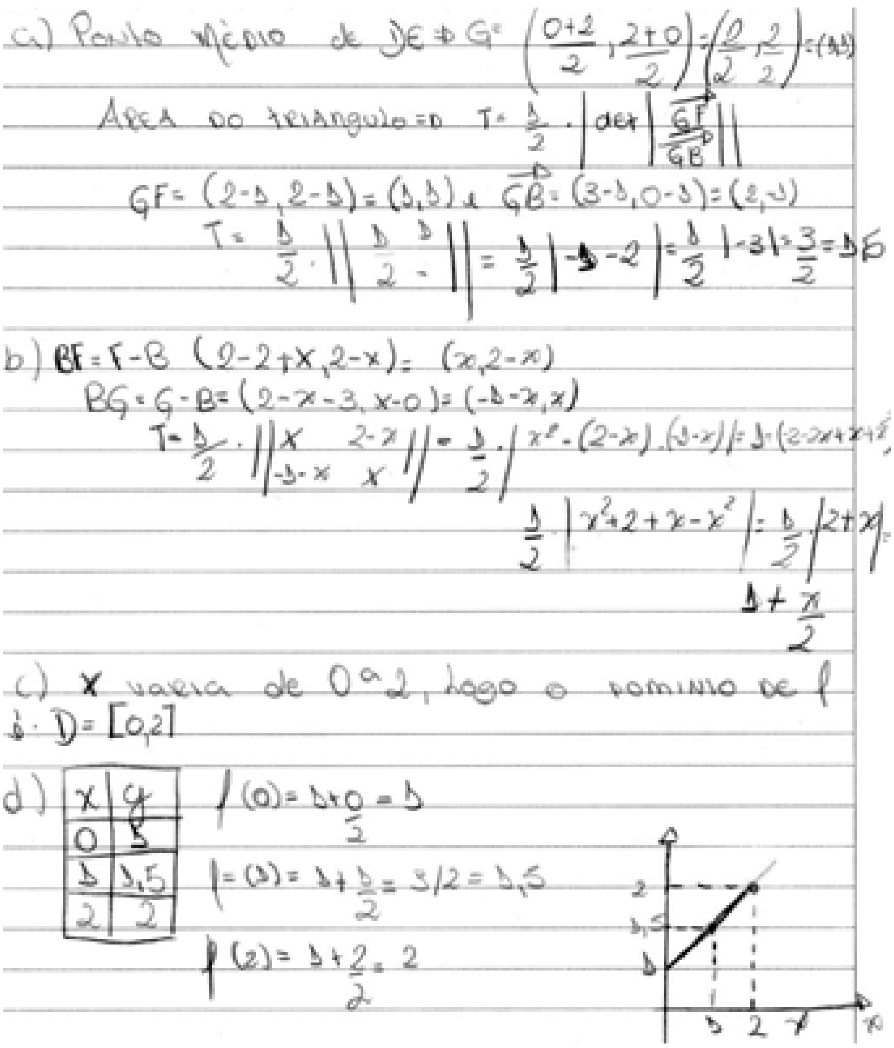
a) Calcule a área do triângulo BFG quando G é o ponto médio do segmento DE.

b) Seja f a função que associa a cada valor de x a área f(x) do triângulo BFG. Escreva uma expressão para f(x).

c) Qual o domínio da função f?

d) Desenhe o gráfico da função f.

Nota-se na Figura 67 o desenvolvimento da atividade 4 feita no caderno pelo aluno 11 do terceiro ano do Ensino Médio, que o aluno utilizou um sistema de coordenadas de origem A=(0,0) e sendo o lado AD=2 encontrou o ponto D=(0,2) e como AEFD é um quadrado o lado AE=2 e o ponto E=(2,0) e assim calculou o ponto médio do segmento DE que chamou de G, logo após encontrou os vetores $\overrightarrow{GF}$ e $\overrightarrow{GB}$ para calcular a área do triângulo BFG. Utilizou G=(2-x,x) e encontrou os vetores $\overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{BG}$ para calcular a área do triângulo BFG onde resultou o valor da função f(x). Analisou o valor do eixo das abscissas para determinar o seu domínio e desenhou o gráfico utilizando a função f(x) de acordo com o domínio.



a) Ponto médio de DE ⇒ G = $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1,1)$

Área do triângulo ⇒ $T = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{vmatrix} \overrightarrow{GF} \\ \overrightarrow{GB} \end{vmatrix} \right|$

$\overrightarrow{GF} = (2-1, 2-1) = (1,1)$ e $\overrightarrow{GB} = (3-1, 0-1) = (2,-1)$

$T = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} |-1-2| = \frac{1}{2} |-3| = \frac{3}{2} = 1,5$

b) BF = F-B $(2-2+x, 2-x) = (x, 2-x)$

BG = G-B = $(2-x-3, x-0) = (-1-x, x)$

$T = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x & 2-x \\ -1-x & x \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot | x^2 - (2-x)(-1-x) | = \frac{1}{2} (2-2x+x+x^2$

$\frac{1}{2} | x^2+2+x-x^2 | = \frac{1}{2} |2+x|$

$1 + \frac{x}{2}$

c) x varia de 0 a 2, logo o domínio de f é D = [0,2]

d)

x	y
0	1
1	1,5
2	2

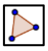
$f(0) = 1 + \frac{0}{2} = 1$

$f(1) = 1 + \frac{1}{2} = 3/2 = 1,5$

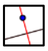
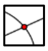
$f(2) = 1 + \frac{2}{2} = 2$

Figura 67: Resposta no caderno – Atividade 4 – Cap. 6.8.2
FONTE: Aluno 11 – 3 B, 2016

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Para realizar a alternativa (a). Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontra os pontos os pontos A=(0,0), B=(3,0), C=(2,2), D=(0,2), E=(2,0), F=(2,2).
2) Selecione o ícone  (Segmento) e faça os segmentos AB, BC, CD, AD, FE e DE.
3) Selecione o ícone  (Ponto Médio ou Centro) e encontre o ponto médio G do segmento DE.
4) Selecione o ícone  (Polígonos) e clique nos pontos B, F e G fazendo o triângulo BFG.
5) Selecione o ícone  (Área) e selecione o polígono BFG.

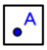
Para realizar a alternativa (b):

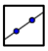
1) Selecione o ícone  (Reta Perpendicular) e clique no ponto G e no eixo das abscissas formando a reta l.
2) Selecione o ícone  (Interseção de Dois Objetos) e clique na reta l e no eixo das abscissas formando o ponto H.
3) Selecione o ícone  (Vetor) e faça o vetor $\overrightarrow{HG}$.
4) Selecione o ícone  (Mover) e clique na reta l com o botão direito do mouse e vá até propriedades e altere o estilo da reta para tracejado. No campo de entrada:
5) Digite: k=Comprimento[Vetor[H,G]] e aperte o Enter.
6) Digite: S=Área[B,F,G] e aperte o Enter.
7) Digite: P=(k,S) e aperte o Enter.
8) Clique com o botão direito do mouse no ponto G e habilite o rastro e altere a cor para vermelho. Na barra de ferramentas:
9) Selecione o ícone  (Mover) e mova o ponto G e observe o movimento do ponto P. É o caminho desse ponto que descreve o gráfico da área S.

Para realizar a alternativa (c).

1) O domínio assume somente os valores das abscissas. Observe o maior e o menor valor que P pode assumir nesse eixo.

Para realizar a alternativa (d).

1) Selecione o ícone  (Ponto) e acrescente o ponto I=(0,1).

2) Selecione o ícone  (Reta) e clique no ponto I e F, formando a reta n.

3) Clique com o botão direito do mouse e escolha a equação y=ax+b.

4) Clique na reta n com o botão direito do mouse e vá até propriedades e altere o estilo da reta para tracejado.

A Figura 68 apresenta o desenvolvimento da atividade 4 feita no Geogebra pelo aluno 11 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou a área do triângulo BFG quando G é o ponto médio do segmento DE, achou a função f(x) e visualizou o domínio e o gráfico utilizando o procedimento.

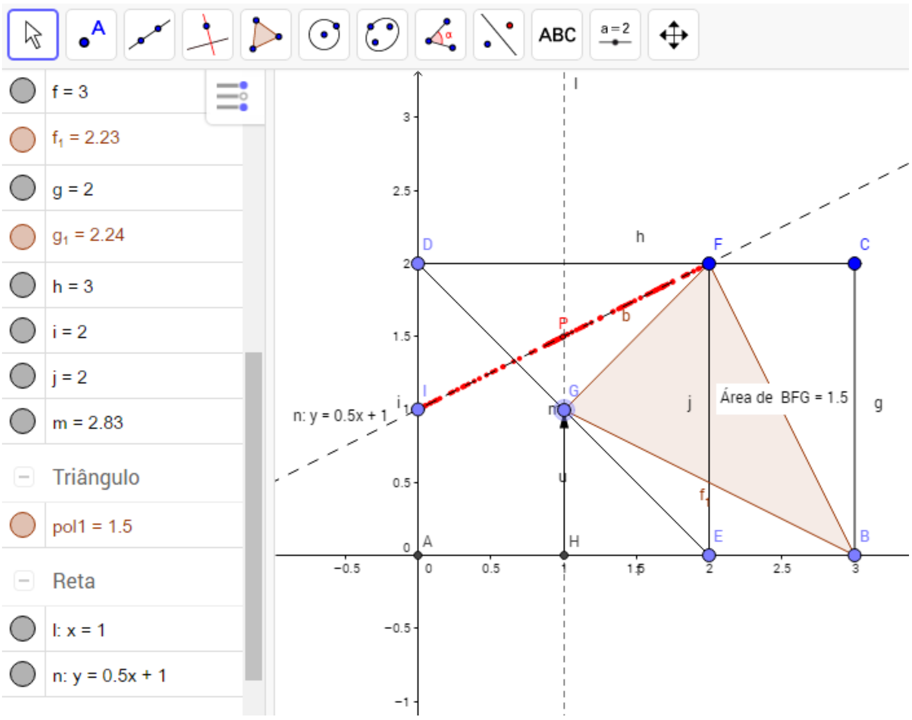


Figura 68: Resposta no Geogebra – Atividade 4 – Cap. 6.8.2
FONTE: Aluno11 – 3 B, 2016

6.9 EQUAÇÕES DA RETA NO PLANO

As atividades desenvolvidas a seguir tem a finalidade de mostrar os três tipos de equações da reta no plano, utilizando os conceitos de vetor e de retas paralelas e perpendiculares.

6.9.1 Equação Paramétrica da Reta

Para o desenvolvimento das próximas atividades e encontrar a equação paramétrica da reta é necessário desenvolver o seu conceito para realizar as atividades no caderno.

Seja r a reta que passa pelos pontos A e B, e seja P um ponto que pertence a essa reta, como os pontos são colineares então os vetores $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\mathrm{v}}$ e são múltiplos um do outro. Assim, podemos escrever:

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\mathrm{P} - \mathrm{A} = \lambda\vec{\mathrm{v}}$$

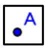
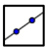
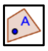
$$\mathrm{P} = \mathrm{A} + \lambda\vec{\mathrm{v}}$$

é a forma paramétrica da reta, onde A é um ponto e $\vec{\mathrm{v}}$ é o vetor diretor da reta.

EXEMPLO 1

Dados A=(-2,1) , B=(1,3) e P um ponto pertencente a reta que passa pelos pontos A e B. Qual a equação paramétrica dessa reta?

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Para realizar a alternativa (a). Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontra os pontos A=(-2,1) , B=(1,3).
2) Selecione o ícone  (Vetor) e clique nos pontos A e depois no B.
3) Selecione o ícone  (Reta) e clique no ponto A e depois no B.
4) Selecione o ícone  (Ponto em Objeto) e clique na reta.
5) Clique nesse ponto com o botão direito do mouse e escolha renomear e mude o nome do ponto para P, escolha Habilitar Rastro e Animar.

Assim, a Figura 69, apresenta o desenvolvimento do exemplo 1 feito no Geogebra pelo autor, e nota-se através da visualização no Geogebra, que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é responsável pelo sentido da reta, a qual passa pelos pontos A e B.

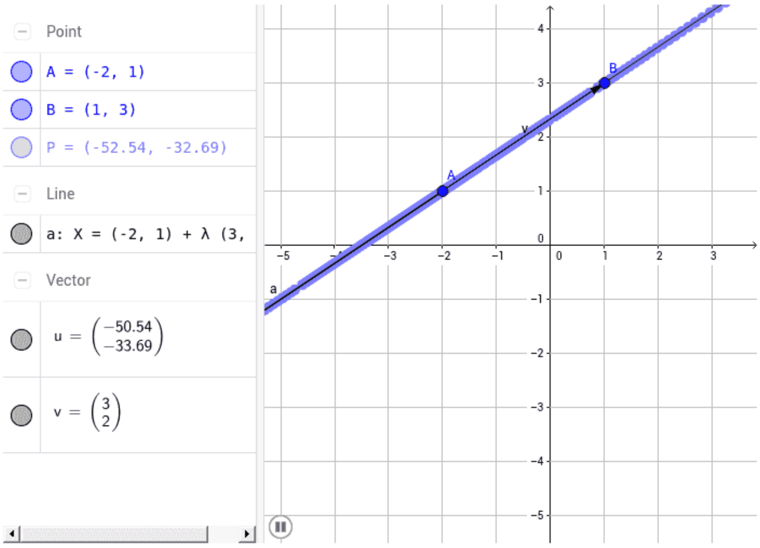


Figura 69: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.9.1
FONTE: O autor, 2016

A seguir são elencadas as seguintes atividades:

ATIVIDADE 1

Dados A=(-2,1) e o vetor diretor da reta $\vec{v} = (3,2)$, encontre a equação paramétrica da reta r.

ATIVIDADE 2

Determine a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos A=(2,-3) e B=(-1,4).

ATIVIDADE 3

Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto A=(3,-1) e é normal (perpendicular) ao vetor $\vec{w} = (1,2)$.

Dica: Utilize que o vetor $\vec{v} = (a, b)$ é o vetor direção, então podemos encontrar o vetor perpendicular ao vetor direção fazendo $\vec{w} = (-b, a)$.

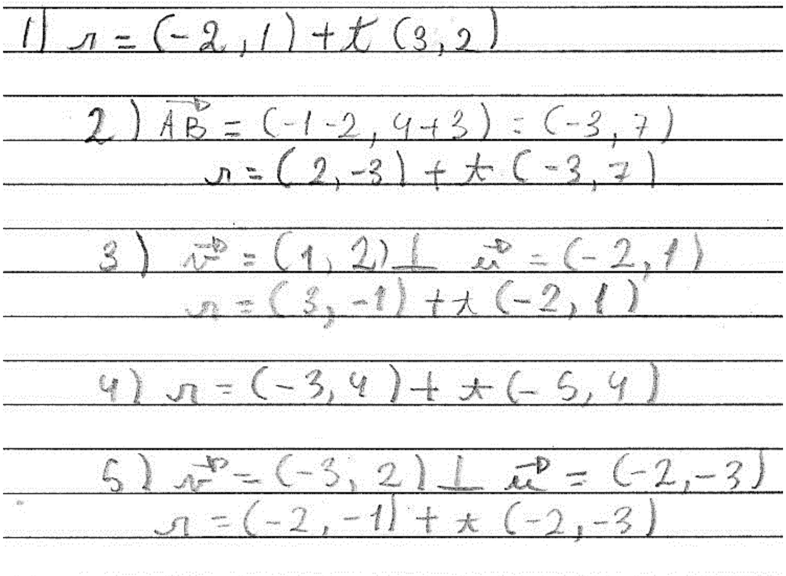
ATIVIDADE 4

Encontre a reta r que passa pelo ponto A=(-3,4) e é paralela a reta s: (x,y)=(4,1)+λ(-5,4).

ATIVIDADE 5

Determine a equação da reta paramétrica que passa pelo ponto A=(-2,-1) e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (-3,2)$.

Nota-se na Figura 70 o desenvolvimento das atividades 1, 2, 3, 4 e 5 feitas no caderno pelo aluno 6 do terceiro ano do Ensino Médio, onde encontrou as equações utilizando os conceitos de equações paramétricas da reta.



1) $r = (-2,1) + t(3,2)$

2) $\vec{AB} = (-1-2, 4+3) = (-3,7)$
$r = (2,-3) + t(-3,7)$

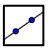
3) $\vec{v} = (1,2) \perp \vec{u} = (-2,1)$
$r = (3,-1) + t(-2,1)$

4) $r = (-3,4) + t(-5,4)$

5) $\vec{v} = (-3,2) \perp \vec{u} = (-2,-3)$
$r = (-2,-1) + t(-2,-3)$

Figura 70: Resposta no caderno – Atividades 1, 2, 3, 4 e 5 – Cap. 6.9.1
FONTE: Aluno 6 – 3 A, 2016

Para realizar a atividade 1 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(-2,1). No campo de entrada:
2) Digite o vetor v=(3,2). Na barra de ferramentas:
3) Selecione o ícone (Vetor a Partir de um Ponto) e clique no ponto A e no vetor $\vec{v}$, formando o ponto A´.
4) Selecione o ícone  (Reta) e clique no ponto A e depois no A´, formando a reta f: -2x+3y=7 na sua forma cartesiana, para visualizá-la na forma paramétrica, clique com o botão direito do mouse na reta e selecione forma Paramétrica e aparecerá f: X=(-2,1)+λ(3,2).

A Figura 71, apresenta o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 6 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno encontrou a equação paramétrica da reta procurada.

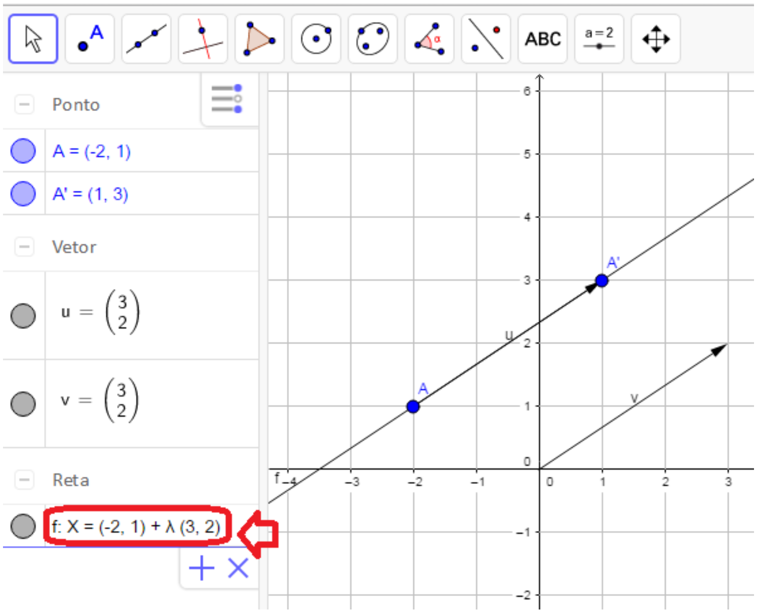
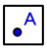
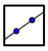


Figura 71: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.9.1
FONTE: Aluno 6 – 3 A, 2016

Para realizar a atividade 2 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(2,-3) e B=(-1,4).

2) Selecione o ícone  (Reta) e clique no ponto A e depois no B, formando a reta f: -7x-3y=-5 na sua forma cartesiana, para visualizá-la na forma paramétrica, clique com o botão direito do mouse na reta e selecione forma Paramétrica e aparecerá f: X=(2,-3)+λ(-3,7).

Nota-se na Figura 72 o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 6 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou a equação paramétrica da reta.

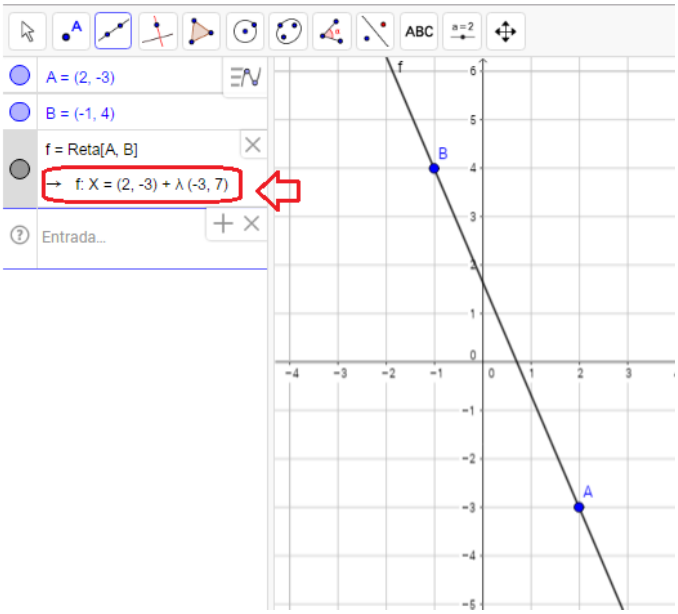
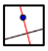


Figura 72: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.9.1
FONTE: Aluno 6 – 3 A, 2016

Para realizar a atividade 3 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(3,-1). No campo de entrada:
2) Digite o vetor v=(1,2). Na barra de ferramentas:
3) Selecione o ícone  (Reta Perpendicular) e clique no ponto A e depois no vetor $\vec{v}$, formando a reta f: -x-2y=-1 na sua forma cartesiana, para visualizá-la na forma paramétrica, clique com o botão direito do mouse na reta e selecione Forma Paramétrica e aparecerá f: X=(3,-1)+λ(-2,1).

A Figura 73, exibe o desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 6 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou a equação paramétrica da reta.

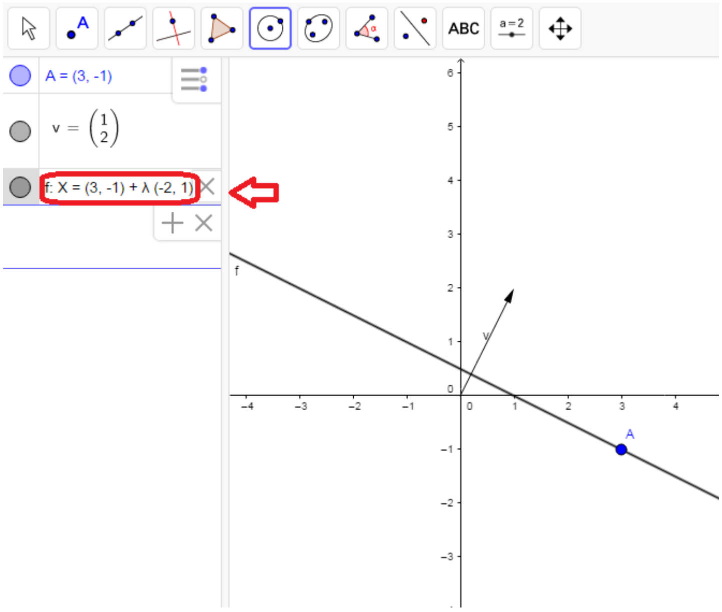
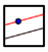


Figura 73: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.9.1
FONTE: Aluno 6 – 3 A, 2016

Para realizar a atividade 4 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(-3,4). No campo de entrada:
2) Digite: X= (4,1)+λ (-5,4) e aparecerá a reta s: X= (0,4.2)+λ (-5,4) substituindo o ponto D=(4,1) pelo ponto B=(0,4.2), note que os dois pontos pertencem a reta s, logo a equação paramétrica da reta s pode iniciar por qualquer ponto que pertença a essa reta. Na barra de ferramentas:
3) Selecione o ícone  (Reta Paralela) e clique no ponto A e depois na reta s, formando a reta g: X= (-3,4)+λ(-5,4). No campo de entrada:
4) Digite o vetor v=(-5,4), note que esse vetor é responsável pela direção da reta.

Nota-se na Figura 74 o desenvolvimento da atividade 4 feita no Geogebra pelo aluno 6 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno encontrou a equação paramétrica da reta.

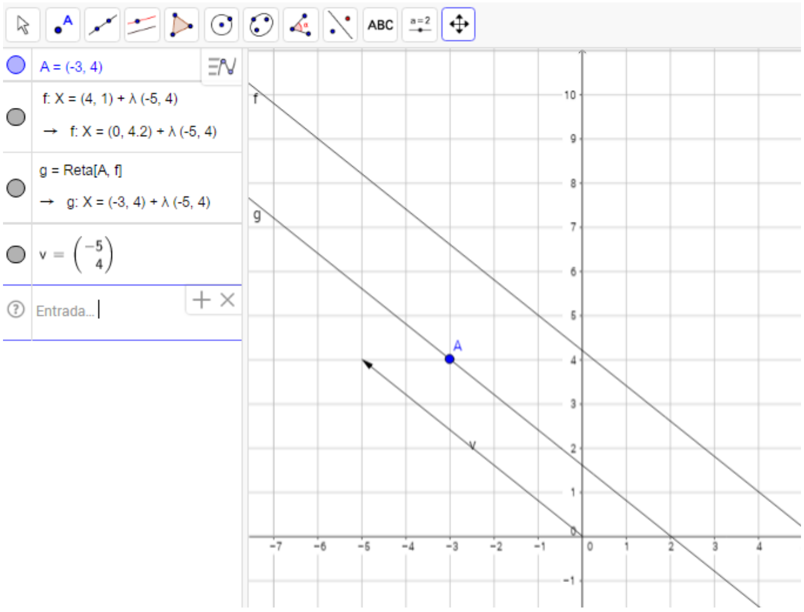
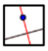


Figura 74: Resposta no Geogebra – Atividade 4 – Cap. 6.9.1
FONTE: Aluno 6 – 3 A, 2016

Para realizar a atividade 5 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(-2,-1). No campo de entrada:
2) Digite: o vetor v=(-3,2). Na barra de ferramentas:
3) Selecione o ícone  (Reta Perpendicular) e clique no ponto A e depois no vetor $\vec{v}$, formando a reta f: 3x-2y=-4 na sua forma cartesiana, para visualizá-la na forma paramétrica, clique com o botão direito do mouse na reta e selecione Forma Paramétrica e aparecerá f: X=(-2,-1)+λ (-2,-3).

A Figura 75, trata-se do desenvolvimento da atividade 5 feita no Geogebra pelo aluno 6 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno utilizando o procedimento, encontrou a equação paramétrica da reta.

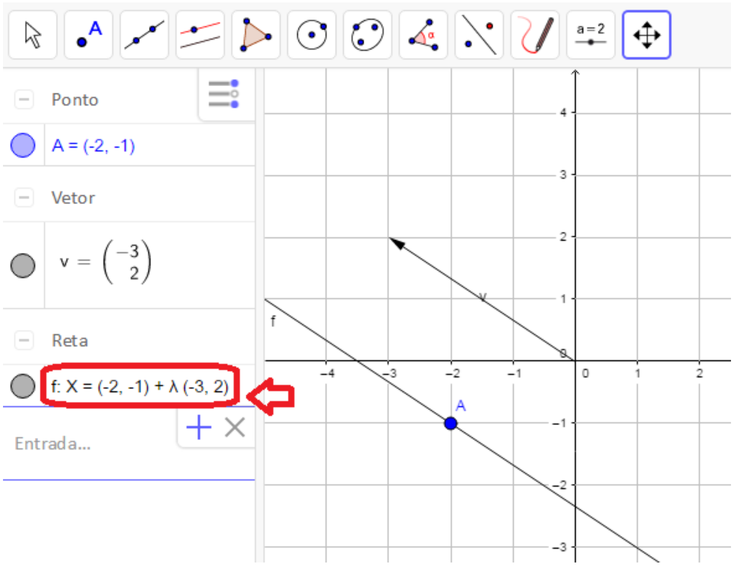


Figura 75: Resposta no Geogebra – Atividade 5 – Cap. 6.9.1
FONTE: Aluno 6 – 3 A, 2016

6.9.2 Equação Cartesiana da Reta

Para o desenvolvimento das próximas atividades e encontrar a equação cartesiana da reta é necessário desenvolver o seu conceito para realizar as atividades no caderno.

Uma reta cartesiana é caracterizada por uma reta normal ou perpendicular a uma direção dada (vetor), assim vamos utilizar o produto interno para caracterizar algebricamente essa reta.

Dois vetores são perpendiculares se, e só se, o seu produto interno é zero: $\overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$ ($\overrightarrow{AP}$ perpendicular à $\vec{u}$) $\leftrightarrow$ $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0$ (produto interno é zero)

Definição 9: Um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é normal ou perpendicular a uma reta r (Figura 76) se $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ ($\vec{u}$ perpendicular à $\overrightarrow{AB}$), quaisquer que sejam os pontos A, B ∈ r.

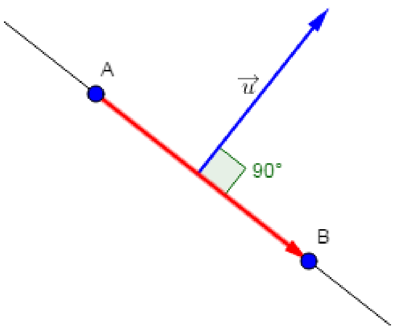


Figura 76: Vetor normal da reta – Cap. 6.9.2
FONTE: O autor, 2016

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (a, b) \neq \vec{0}$. Então:

Se P pertence à reta r, temos uma relação de equivalência em que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é perpendicular ao vetor $\vec{u}$, e assim o produto interno é zero.

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \; &\leftrightarrow \; \overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \\ &\leftrightarrow \; \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\leftrightarrow \; \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\ &\leftrightarrow a(x - x_0) + b(\, y - y_0) \; = 0 \\ &\leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \\ &\leftrightarrow ax + by = c \end{aligned}$$

Onde c = $ax_0 + by_0$

Assim, equação é dada por: r: ax + by = c, e é chamada equação cartesiana da reta r.

Para contemplar este assunto as seguintes atividades foram propostas:

ATIVIDADE 1

Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A=(-1,2) e é normal ao vetor $\vec{v} = (3{,}5)$.

ATIVIDADE 2

Determine a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto A=(-3,-2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2{,}3)$.

ATIVIDADE 3

Determine a equação cartesiana da reta r: (x,y)=(1,2)+(-2,3)t

Nota-se na Figura 77 o desenvolvimento das atividades 1, 2, e 3 feitas no caderno pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, onde encontrou as equações utilizando os conceitos de equações cartesianas da reta.

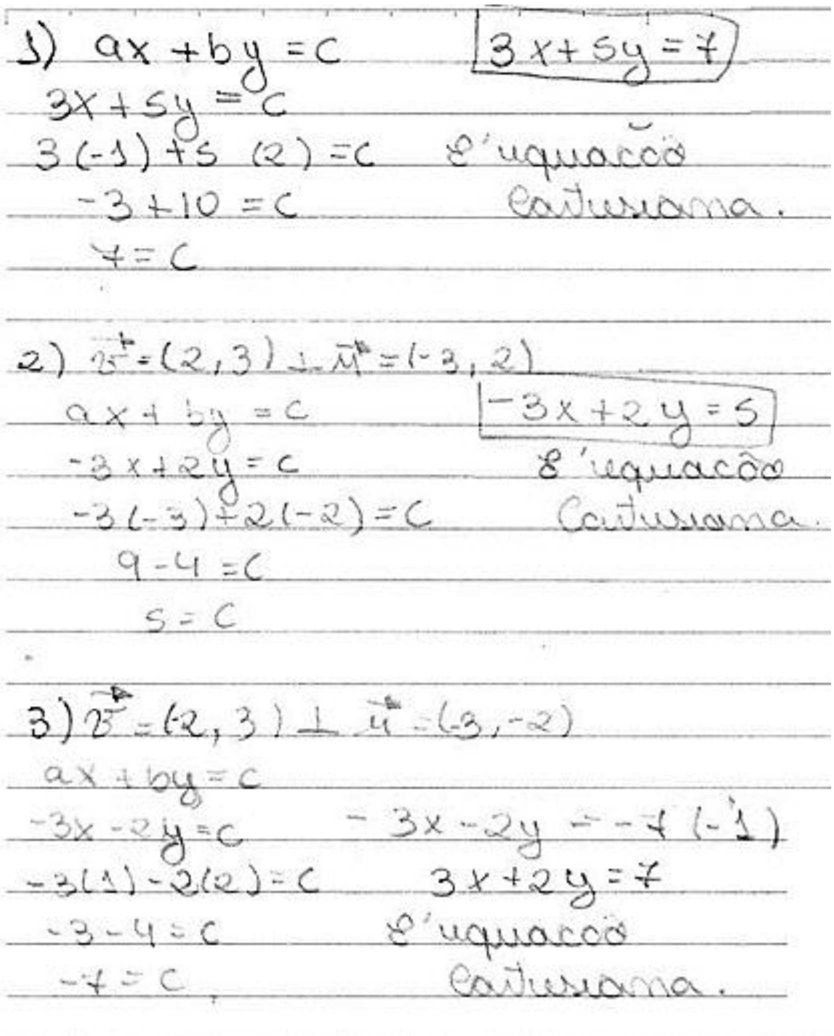


Figura 77: Resposta no caderno – Atividades 1,2 e 3 – Cap. 6.9.2

FONTE: Aluno 12, 3 B, 2016

Para realizar a atividade 1 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone (Ponto) e encontre o ponto A=(-1,2). No campo de entrada:
2) Digite: v=(3,5). Na barra de ferramentas:
3) Selecione o ícone (Reta Perpendicular) e clique no ponto A e depois no vetor $\vec{v}$, formando a reta f: -3x-5y=-7 na sua forma cartesiana.

A Figura 78 apresenta o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno encontrou a equação cartesiana da reta.

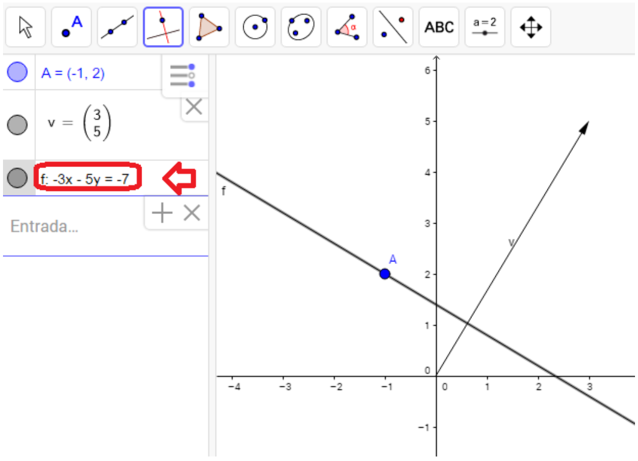
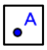
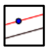


Figura 78: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.9.2
FONTE: Aluno 12, 3 B, 2016

Para realizar a atividade 2 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(-3,-2). e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2{,}3)$. No campo de entrada:
2) Digite v=(2,3). Na barra de ferramentas:
3) Selecione o ícone  (Reta Paralela) e clique no ponto A e depois no vetor $\vec{v}$, formando a reta f: -2x-3y=7 na sua forma cartesiana.

Nota-se na Figura 79 o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno encontrou a equação cartesiana da reta.

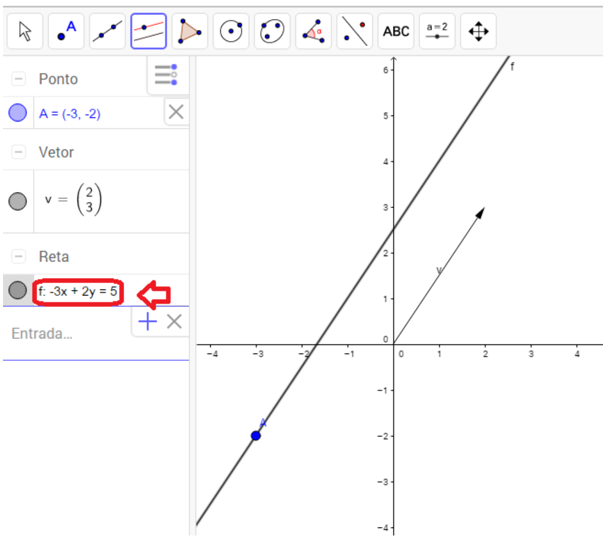


Figura 79: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.9.2
FONTE: Aluno 12, 3 B, 2016

Para realizar a atividade 3 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. No campo de entrada:

1) Digite: X=(-2,-1)+λ (-3,2) na sua forma Paramétrica, para visualizá-la na forma cartesiana, clique com o botão direito do mouse na reta e selecione a forma cartesiana e aparecerá f: -3x-2y=-7.

Por fim, a Figura 80 trata do desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 12 do terceiro ano do Ensino Médio, onde o aluno encontrou a equação cartesiana da reta.

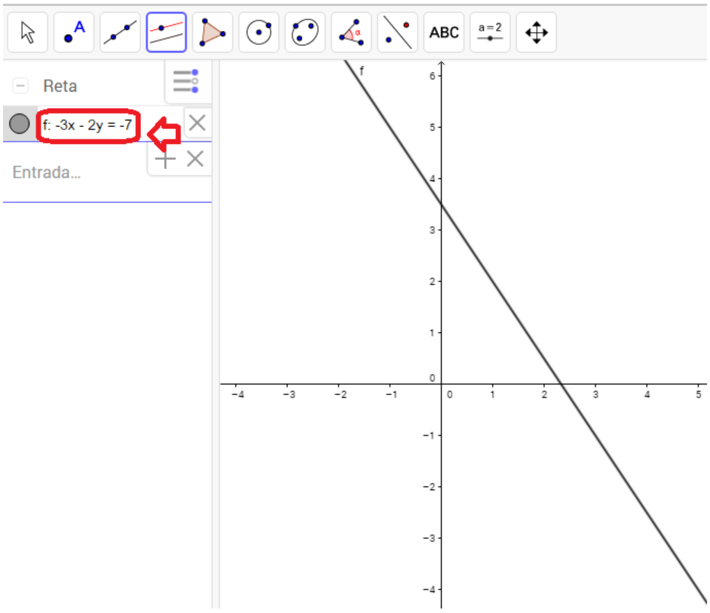


Figura 80: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.9.2
FONTE: Aluno 12, 3 B, 2016

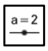
6.9.3 Equação Afim ou Reduzida da Reta

Para o desenvolvimento das próximas atividades e encontrar a equação reduzida da reta é necessário desenvolver o seu conceito para realizar as atividades no caderno.

Definição: Partindo da equação cartesiana da reta r: ax+by=c, se b≠0 , temos: by=-ax+c $\rightarrow y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(\frac{c}{b}\right)$ → y=mx+n é a equação reduzida da reta, onde $m = -\frac{a}{b}$ é o coeficiente angular e $n = \frac{c}{b}$ é o coeficiente linear da reta.

EXEMPLO 1

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra que será utilizado para construir a equação reduzida e sua representação é observada na Figura 81. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Controle Deslizante) e clique no local que desejar na janela de visualização para inserir o controle deslizante a, mude seu nome para m, clique em outro local para inserir o controle deslizante b, mude seu nome para n. No campo de entrada:
2) Digite: y=mx+n. Altere os valores de m e n utilizando os controles deslizantes. Observe o que acontece quando você altera o valor de m e depois o valor de n.

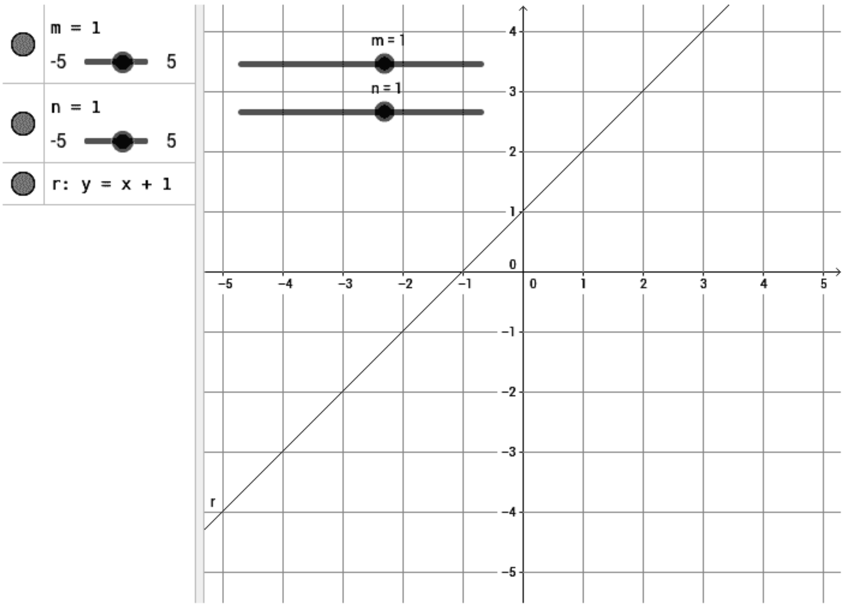


Figura 81: Resposta no Geogebra – Exemplo 1 – Cap. 6.9.3
FONTE: O autor, 2016

Através da observação do Exemplo 1, o aluno observou que quando altera o valor do coeficiente angular m, a reta sofre uma alteração na sua inclinação e quando o coeficiente linear n sofre a alteração a inclinação da reta se mantém, porém a reta passa pelo valor de n.

Para contemplar este assunto as seguintes atividades foram propostas:

ATIVIDADE 1

Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A=(1,-1) e B=(2,1).

ATIVIDADE 2

Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A=(1,3) e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (-2,1)$.

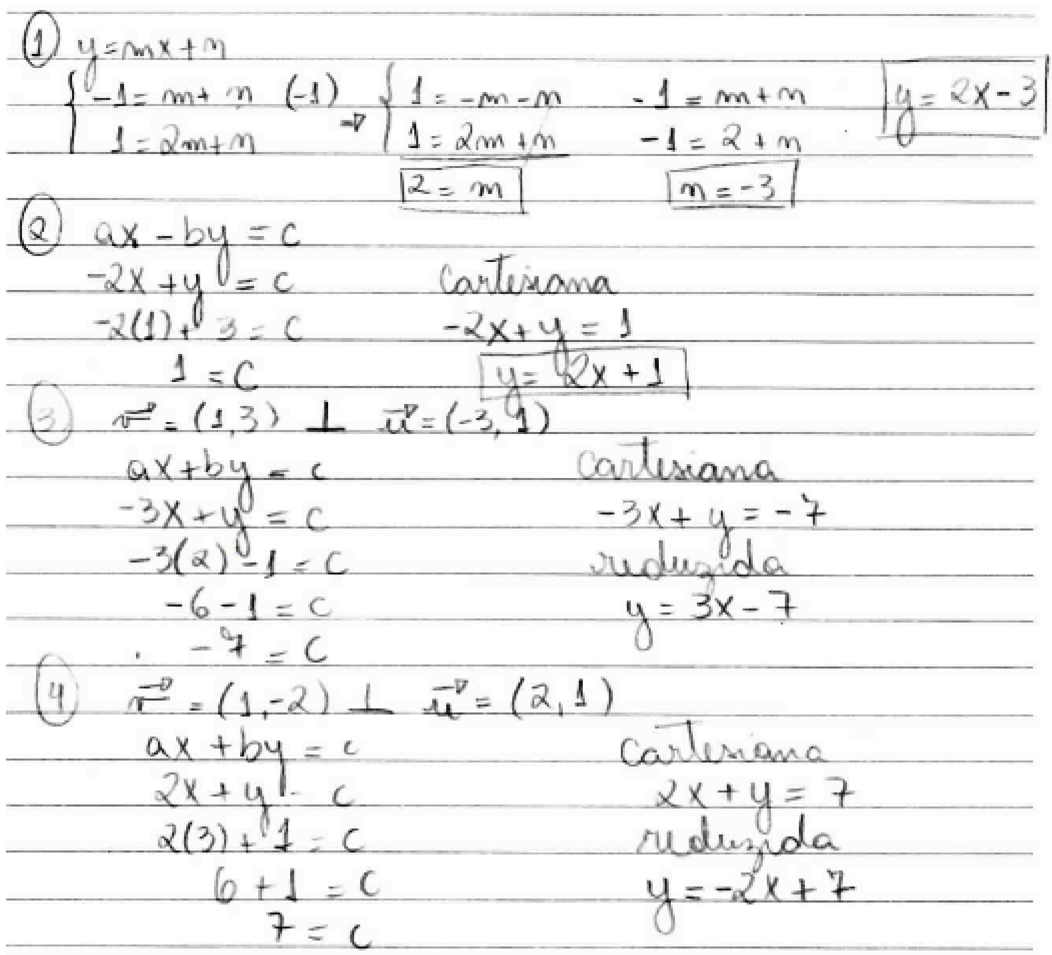
ATIVIDADE 3

Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A=(2,-1) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (1,3)$.

ATIVIDADE 4

Determine a equação reduzida da reta r: X=(3,1)+(1,-2)t.

A Figura 82 trata-se do desenvolvimento das atividades 1, 2, 3 e 4 feitas no caderno pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, em que encontrou as equações utilizando os conceitos de equações reduzidas da reta.



1) $y = mx + n$

$\begin{cases} -1 = m + n \quad (-1) \\ 1 = 2m + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = -m - n \\ 1 = 2m + n \end{cases}$ $\boxed{2 = m}$

$-1 = m + n$

$-1 = 2 + n$

$\boxed{n = -3}$

$\boxed{y = 2x - 3}$

2) $ax - by = c$

$-2x + y = c$

$-2(1) + 3 = c$

$1 = c$

Cartesiana

$-2x + y = 1$

$\boxed{y = 2x + 1}$

3) $\vec{v} = (1,3) \perp \vec{u} = (-3,1)$

$ax + by = c$

$-3x + y = c$

$-3(2) - 1 = c$

$-6 - 1 = c$

$-7 = c$

cartesiana

$-3x + y = -7$

reduzida

$y = 3x - 7$

4) $\vec{v} = (1,-2) \perp \vec{u} = (2,1)$

$ax + by = c$

$2x + y = c$

$2(3) + 1 = c$

$6 + 1 = c$

$7 = c$

cartesiana

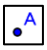
$2x + y = 7$

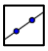
reduzida

$y = -2x + 7$

Figura 82: Resposta no caderno – Atividades 1, 2, 3 e 4 – Cap. 6.9.3
FONTE: Aluno 7, 3 A, 2016

Para realizar a atividade 1 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(1,-1) e B=(2,1).

2) Selecione o ícone  (Reta) e clique nos pontos A e B, formando a reta f: -2x+y=-3 na sua forma cartesiana. Agora clique com o botão direito do mouse nesta reta e altere para reta sua forma reduzida, formando a reta f: y=2x-3.

A Figura 83, apresenta o desenvolvimento da atividade 1 feita no Geogebra pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou a equação reduzida da reta.

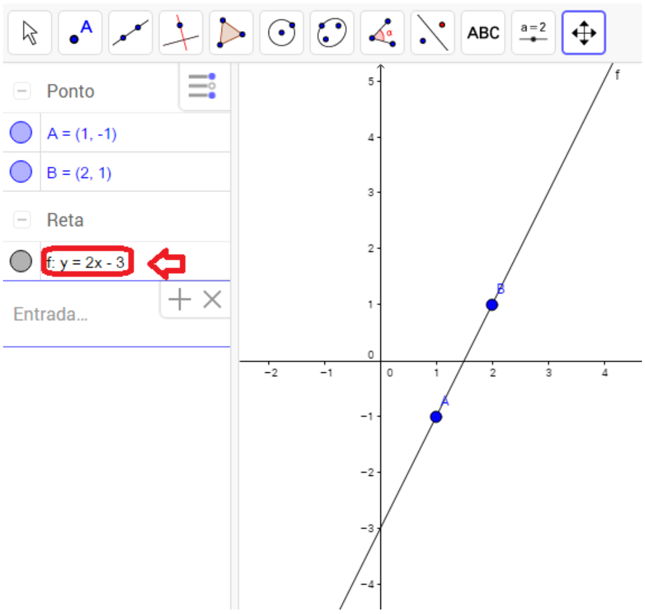
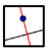


Figura 83: Resposta no Geogebra – Atividade 1 – Cap. 6.9.3
FONTE: Aluno 7, 3 A, 2016

Para realizar a atividade 2 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(1,3). No campo de entrada:

2) Digite: v=(-2,1). Na barra de ferramentas:

3) Selecione o ícone  (Reta Perpendicular) e clique no ponto A e depois no vetor $\vec{v}$, formando a reta f: 2x-y=-1 na sua forma cartesiana. Agora clique com o botão direito do mouse nesta reta e altere para reta na forma reduzida, formando a reta f: y=2x+1.

Nota-se na Figura 84 o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno utilizando o procedimento, encontrou a equação reduzida da reta.

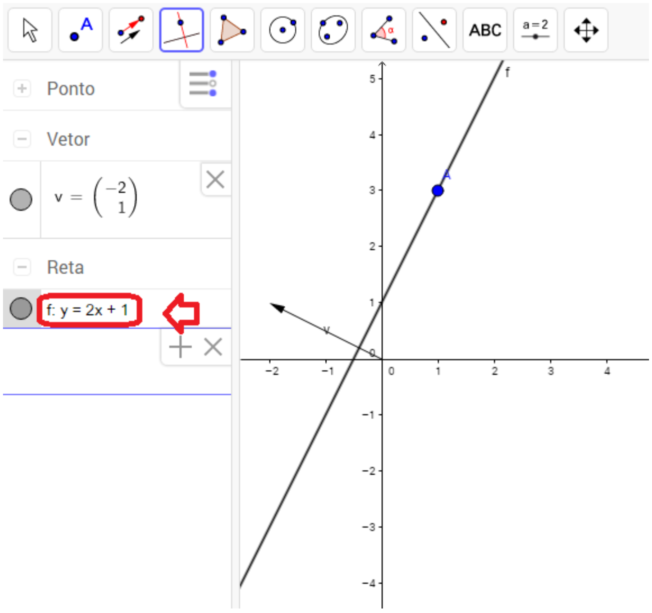
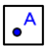
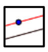


Figura 84: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.9.3
FONTE: Aluno 7, 3 A, 2016

Para realizar a atividade 3 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(2,-1). No campo de entrada:
2) Digite: v=(1,3). Na barra de ferramentas:
3) Selecione o ícone  (Reta Paralela) e clique no ponto A e depois no vetor $\vec{v}$, formando a reta f: -3x+y=-7 na sua forma cartesiana. Agora clique com o botão direito do mouse nesta reta e altera para reta na forma reduzida, formando a reta f: y=3x-7.

A Figura 85 trata-se do desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou a equação reduzida da reta.

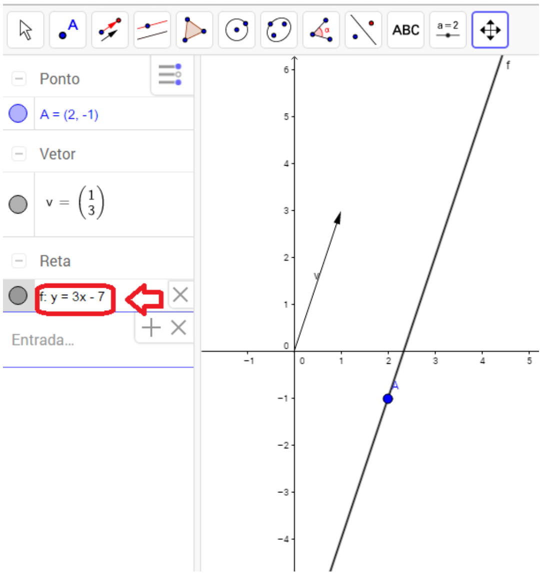


Figura 85: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.9.3
FONTE: Aluno 7, 3 A, 2016

Para realizar a atividade 4 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. No campo de entrada:

1) Digite: X=(3,1)+λ (1,-2) na sua forma Paramétrica, para visualizá-la na forma reduzida, clique com o botão direito do mouse na reta e selecione a forma reduzida e aparecerá f: y=-2x+7.

Nota-se na Figura 86 o desenvolvimento da atividade 4 feita no Geogebra pelo aluno 7 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou a equação reduzida da reta.

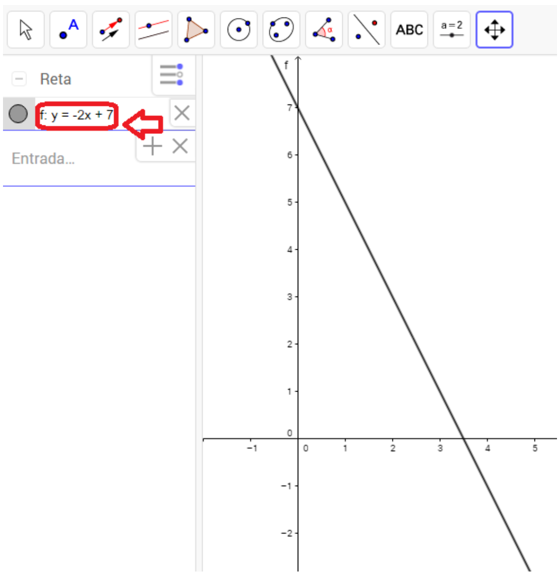


Figura 86: Resposta no Geogebra – Atividade 4 – Cap. 6.9.3
FONTE: Aluno 7, 3 A, 2016

6.10 EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

As atividades desenvolvidas a seguir têm a finalidade de mostrar os dois tipos de equações da circunferência no plano.

6.10.1 Equação Reduzida da Circunferência

Para o desenvolvimento das próximas atividades e encontrar a equação reduzida da circunferência é necessário definir o seu conceito para realizar as atividades no caderno.

Definição 9: Dado um ponto C pertencente a um plano π, e uma distância r diferente de zero, chama-se circunferência o lugar geométrico dos pontos de π que estão à distância *r* do ponto C=(a,b).

$$\mathrm{P} \in \pi \Leftrightarrow \mathrm{PC} = \mathrm{r} \Leftrightarrow \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{b})^2} = \mathrm{r}$$

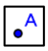
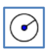
Elevando ao quadrado, tem-se a equação reduzida da circunferência:

$$(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{b})^2 = \mathrm{r}^2$$

EXEMPLO 1

Determine a equação geral da circunferência de centro C=(2,2) e raio r=2.

Para realizar esta atividade deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra que será utilizado para construir a equação reduzida da circunferência e sua representação e animação é observada na Figura 87. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(2,2). Clique com o botão direito do mouse nesse ponto selecione propriedades e mude seu nome para C.
2) Selecione o ícone  (Circulo dado Centro e Raio) e clique no Centro e digite o valor do raio r=2.
3) Selecione o ícone  (Ponto em Objeto) e clique na circunferência. Clique com o botão direito do mouse nesse ponto selecione propriedades e mude seu nome para P.
4) Selecione o ícone  (Vetor) e clique no centro C e no ponto P.
5) Clique com o botão direito do mouse no ponto P selecione Habilitar Rastro e depois Animar.

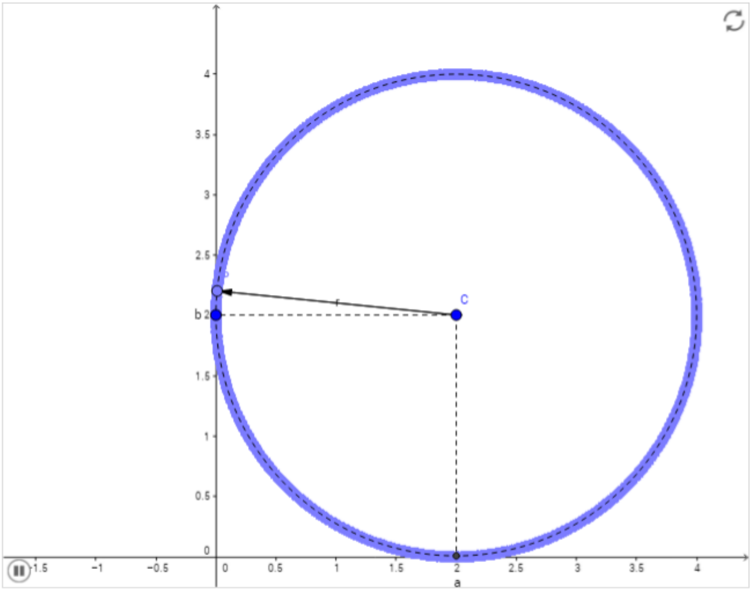


Figura 87: Equação Reduzida da circunferência – Cap. 6.10.1
FONTE: O autor, 2016

ATIVIDADE 1

Determine a equação reduzida das circunferências representadas na Figura 88.

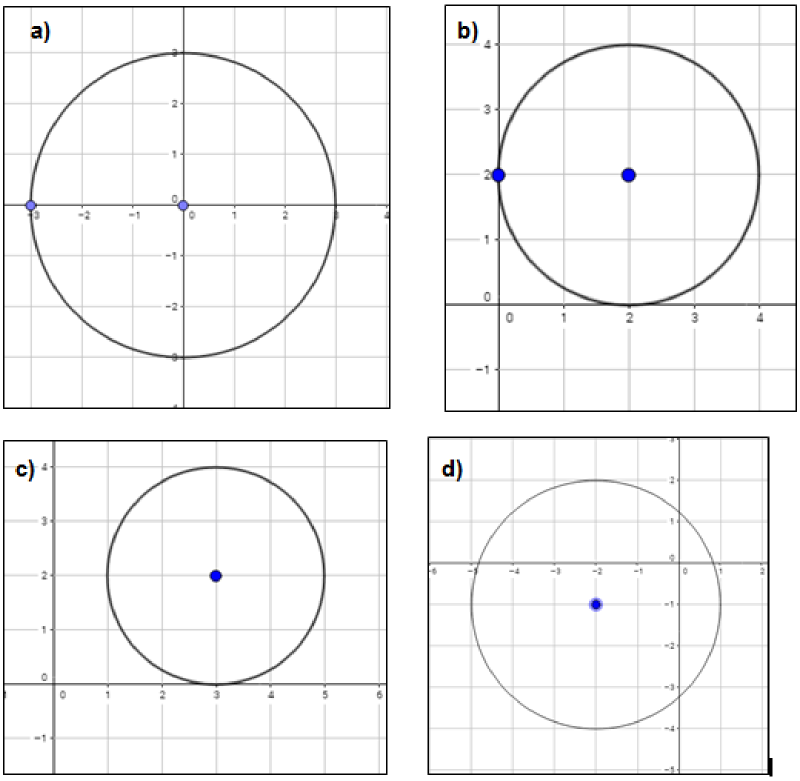


Figura 88: Atividade 1 – Cap. 6.10.1
FONTE: O autor, 2016

A Figura 89, apresenta o desenvolvimento da atividade 1 feita no caderno pelo aluno 8 do terceiro ano do Ensino Médio, em que encontrou as equações utilizando os conceitos de equações reduzidas da circunferência.

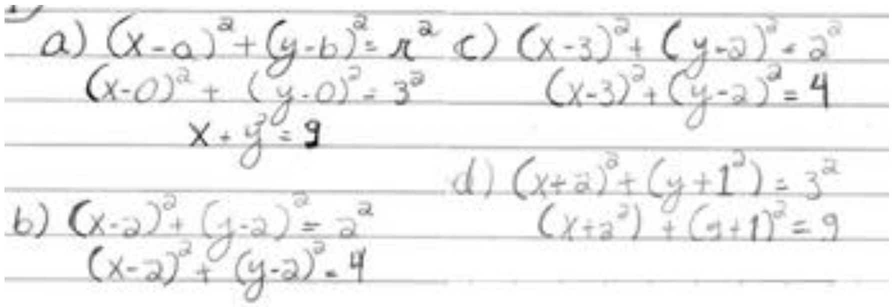


Figura 89: Resposta no caderno - Atividade 1 – Cap. 6.10.1
FONTE: Aluno 8, 3 B, 2016

ATIVIDADE 2

Determine a equação geral da circunferência de centro C e raio r nos seguintes casos:

a) C=(2,3) e r=2

b) C=(-1,3) e r=3

c) C=(0,2) e r=1

d) C=(2,-1) e r=4

Na Figura 90, tem-se o desenvolvimento da atividade 2 feita no caderno pelo aluno 8 do terceiro ano do Ensino Médio, em que utilizou os conceitos de equações reduzidas da circunferência para encontrar a equação geral da circunferência.

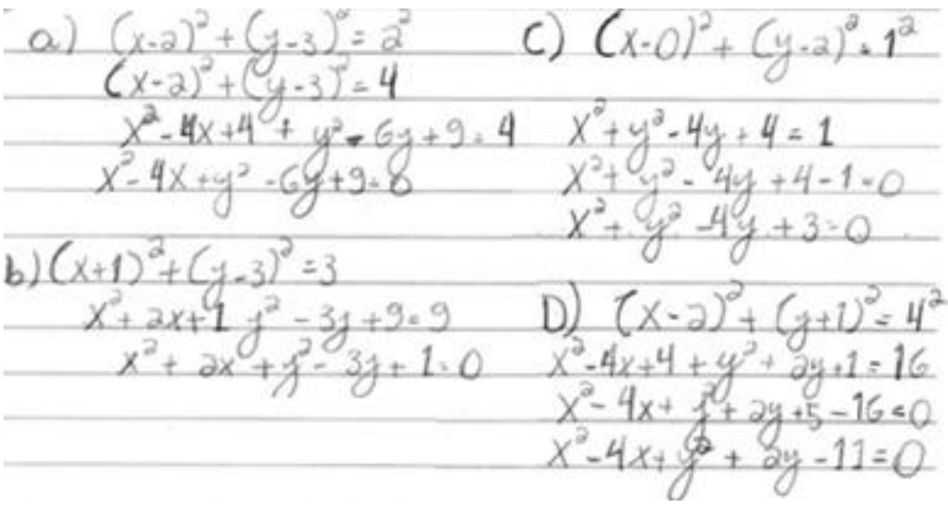
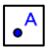


Figura 90: Resposta no caderno – Atividade 2 – Cap. 6.10.1
FONTE: Aluno 8, 3 B, 2016

Para realizar a atividade 2 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o Centro da circunferência.

2) Selecione o ícone  (Circulo dado Centro e Raio) e clique no Centro e digite o valor do raio, formando a cônica na sua forma reduzida. Agora clique com o botão direito do mouse nesta cônica e altera para sua forma geral.

Nota-se na Figura 91 o desenvolvimento da atividade 2 feita no Geogebra pelo aluno 8 do terceiro ano do Ensino Médio, que o aluno encontrou a equação geral da circunferência utilizando o procedimento.

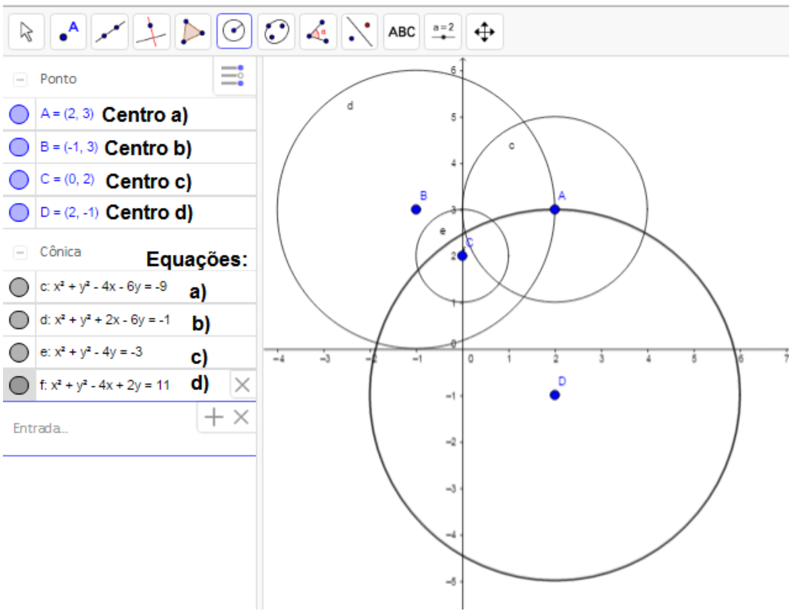
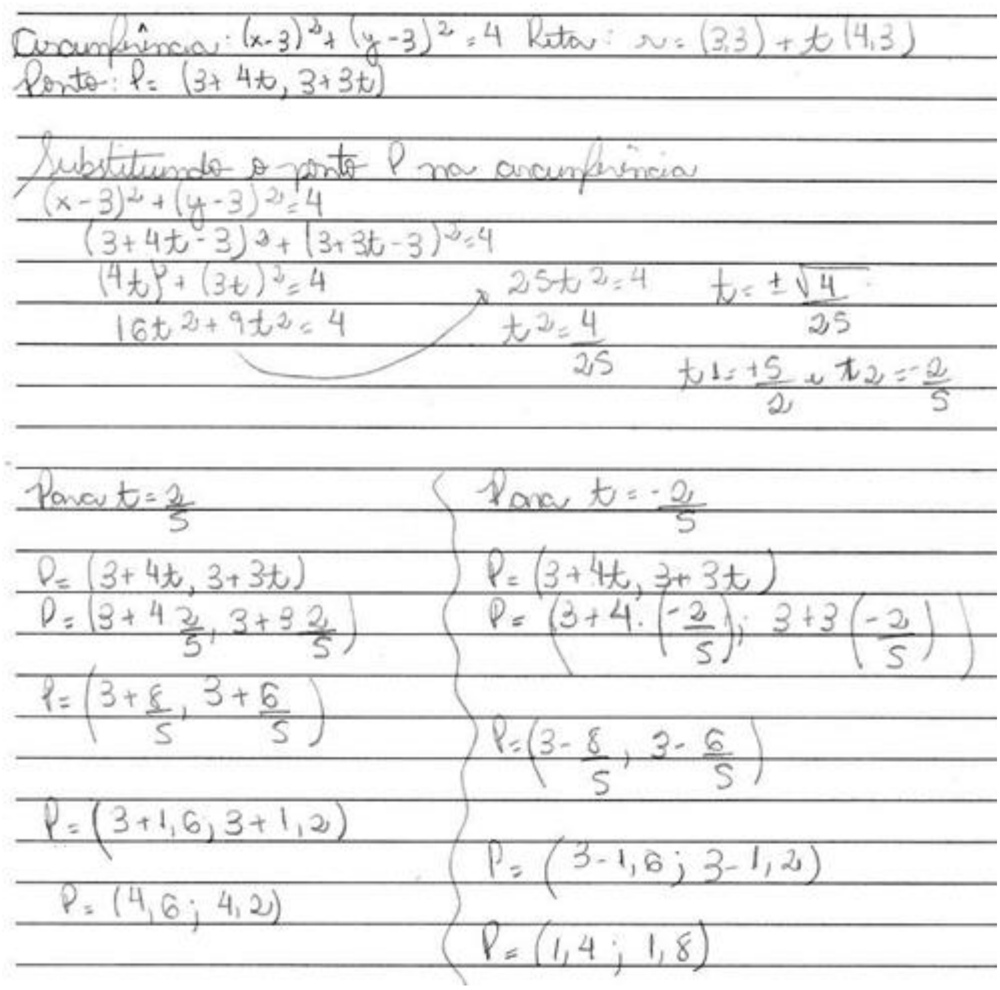


Figura 91: Resposta no Geogebra – Atividade 2 – Cap. 6.10.1
FONTE: Aluno 8, 3 B, 2016

ATIVIDADE 3

Dada a circunferência de centro C=(3,3) e raio igual a 2. Encontre a interseção dessa circunferência com a reta que passa pelo seu centro e pelo ponto A=(-1,0).

A Figura 92 exibe o desenvolvimento da atividade 3 feita no caderno pelo aluno 5 do terceiro ano do Ensino Médio, em que utilizou os conceitos de equações reduzidas da circunferência e de equações paramétricas da reta para encontrar os pontos de interseções da reta com a circunferência.



Circunferência: $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ Reta: $r=(3,3)+t(4,3)$

Ponto: $P=(3+4t, 3+3t)$

Substituindo o ponto P na circunferência

$(x-3)^2+(y-3)^2=4$

$(3+4t-3)^2+(3+3t-3)^2=4$

$(4t)^2+(3t)^2=4$

$16t^2+9t^2=4$

$25t^2=4$

$t^2=\frac{4}{25}$

$t=\pm\sqrt{\frac{4}{25}}$

$t_1=+\frac{2}{5}$ e $t_2=-\frac{2}{5}$

Para $t=\frac{2}{5}$

$P=(3+4t, 3+3t)$

$P=(3+4\frac{2}{5}, 3+3\frac{2}{5})$

$P=(3+\frac{8}{5}, 3+\frac{6}{5})$

$P=(3+1,6; 3+1,2)$

$P=(4,6; 4,2)$

Para $t=-\frac{2}{5}$

$P=(3+4t, 3+3t)$

$P=(3+4\cdot(-\frac{2}{5}); 3+3(-\frac{2}{5}))$

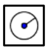
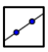
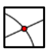
$P=(3-\frac{8}{5}, 3-\frac{6}{5})$

$P=(3-1,6; 3-1,2)$

$P=(1,4; 1,8)$

Figura 92: Resposta no caderno – Atividade 3 – Cap. 6.10.1
FONTE: Aluno 5, 3 A, 2016

Para realizar a atividade 3 deve-se seguir o seguinte procedimento no Geogebra. Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o Centro C=(3,3) da circunferência.
2) Selecione o ícone  (Circulo dado Centro e Raio) e clique no Centro e digite o valor do raio r=2.
3) Selecione o ícone  (Ponto) e encontre o ponto A=(-1,0).
4) Selecione o ícone  (Reta) e clique no centro C e no ponto A.
5) Selecione o ícone  (Interseção de Dois Objetos) e clique na circunferência e depois na reta, formando os pontos B e D procurados.

Assim, a Figura 93 trata-se do desenvolvimento da atividade 3 feita no Geogebra pelo aluno 5 do terceiro ano do Ensino Médio, em que o aluno encontrou os pontos de interseção da reta que passa pelo ponto A e pelo centro da circunferência.

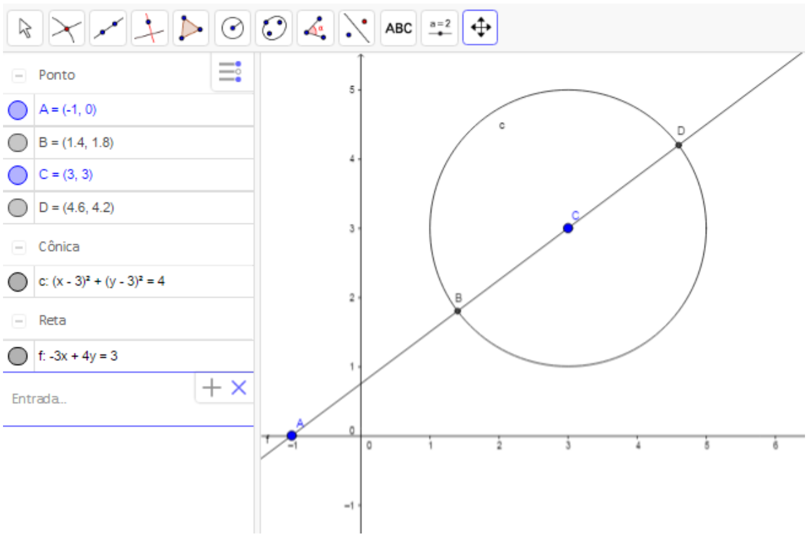
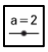


Figura 93: Resposta no Geogebra – Atividade 3 – Cap. 6.10.1
FONTE: Aluno 5, 3 A, 2016

6.11 ANIMAÇÕES COM O GEOGEBRA

Nesta seção alguns procedimentos para a criação de animações no Geogebra são desenvolvidos utilizando os conceitos de vetores na geometria analítica estudados neste trabalho. O procedimento do Quadro 2 trata-se da animação de um avião representado na Figura 94.

Quadro 2: Animação – Avião

Procedimento no Geogebra
Na barra de ferramentas: 1) Selecione a opção  (Controle Deslizante) altere o intervalo min=0 e max=15 e na barra de animação altere em “Repetir”: oscilando para crescente e Velocidade: 1 para 2. 2) Selecione o ícone  (Mover Janela de Visualização) e mova a origem do plano cartesiano para o canto inferior esquerdo de modo que apareça nos eixos das ordenadas e das abscissas o número 15. 3) Selecione o ícone  (Vetor) e faça o vetor $\overrightarrow{AB}$, utilizando o ponto

A=(0,15) e B=(1,2), depois modifique o ponto B para B=(a,a).

4) Faça uma imagem de um avião e cole (ctrl v) na janela de visualização próximo do ponto A. Defina o tamanho e a inclinação da imagem através do ponto C ou D, para isso selecione o ícone (Mover) e mova os pontos citados da forma que desejar.
5) Selecione o ícone Translação por um Vetor e clique na imagem criada e no vetor $\overrightarrow{AB}$, formando outra imagem a qual será transladada por este vetor.
6) Selecione o ícone (Mover) e clique na primeira imagem com o botão direito do mouse e apague esta imagem clicando em Exibir Objeto. Faça o mesmo com os pontos C e D.
7) Insira uma imagem para plano de fundo e aumenta ou diminua do tamanho que desejar e clique com o botão direito do mouse e selecione propriedades e marque a opção Plano de Fundo. No Campo de Entrada:
8) Clique opção Controle Deslizante com o botão direito do mouse e escolha a opção Animar.

FONTE: O autor adaptado de Introduction to Geogebra. Disponível em https://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf. Acesso 12/04/2016

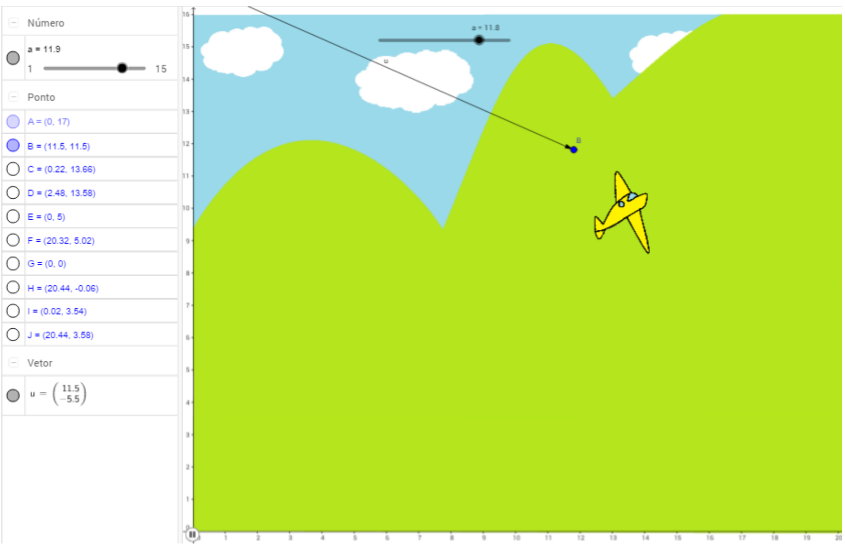


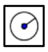
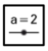
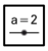
Figura 94: Animação - Avião – Cap. 6.11
FONTE: O Autor, 2016

O próximo procedimento descrito no Quadro 3 trata-se da animação de um carro representado pela Figura 95.

Quadro 3: Animação – Carro

Procedimento no Geogebra

Na barra de ferramentas:

1) Selecione o ícone  (Ponto) e insira os pontos A=(2,1) e B=(6,1).
2) Selecione o ícone  (Círculo dados Centro e Raio) e clique no ponto A e depois raio 1, depois clique no ponto B e raio 1. No campo de entrada:
3) Digite o valor dos pontos: C=(2,0), D=(3,1), E=(2,2), F=(1,1), G=(6,0), H=(7,1), I=(6,2) e J=(5,1). Na barra de ferramentas:
4) Selecione a opção  (Controle Deslizante) e altere o intervalo min=0 e max=15 e na barra de animação altere em “Repetir”: oscilando para crescente e Velocidade: 1 para 2.
5) Selecione o ícone  (Rotação em Torno de um Ponto) e clique nos pontos C e A e altere o valor do ângulo de 45º para a letra a e escolha o sentido horário, faça o mesmo com os pontos F e A, E e A, D e A, o que originou os pontos C’,F’, E’ e D’. Agora vamos fazer o mesmo procedimento na outra circunferência, para isso clique no G e B, J e B, I e B, H e B, formando os pontos G’, J’, I’, H’.
6) Selecione o ícone  (Segmento) e faça os segmentos C’E’, F’D’, G’I’ e J’H’.
7) Selecione a opção  (Controle Deslizante) altere o intervalo min=0 e max=15 e na barra de animação altere em “Repetir”: oscilando para crescente e Velocidade: 1 para 2.
8) Selecione o ícone  (Vetor) e faça o vetor $\overrightarrow{KL}$ e com o ponto K=(2,14) e B=(5,14), depois modifique o ponto L para L=(b,14).
9) No Controle deslizante b, deixe b=10.
10) Selecione o ícone  (Translação por um Vetor) e clique no círculo c: e no vetor $\overrightarrow{KL}$, formando o círculo c’, agora clique no círculo d: e no vetor $\overrightarrow{KL}$, formando o círculo d’. O mesmo procedimento nos segmentos C’E’, F’D’, G’I’ e J’H’, formando os segmentos C”E”, F”D”, G”I” e J”H”.

11) Agora você pode desenhar um carro utilizando Polígonos ou pode inserir uma imagem, para adicionar a imagem faça um desenho de um carro no Paint e copie, depois cole com o comando (Ctrl v) na janela de visualização, depois arraste a imagem onde desejar.

12) Selecione o ícone  (Translação por um Vetor) e clique na imagem criada e no vetor $\overrightarrow{KL}$, dando origem a imagem semelhante transladada pelo vetor $\overrightarrow{KL}$.

13) Clique na primeira imagem com o botão direito do mouse e desmarque a opção Exibir Objeto, faça o mesmo com as primeiras circunferências c: e d: bem como os primeiros segmentos de retas e pontos.

14) Insira uma imagem para plano de fundo e aumenta ou diminua do tamanho que desejar e clique com o botão direito do mouse e selecione propriedades e marque a opção Plano de Fundo.

15) Nos Controles Deslizantes a e b clique em Animar.

FONTE: O autor adaptado de Auto em movimento com geogebra Explicado com passos. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=WCOEbdrZrdk&nohtml5=False. Acesso em: 16/04/2016

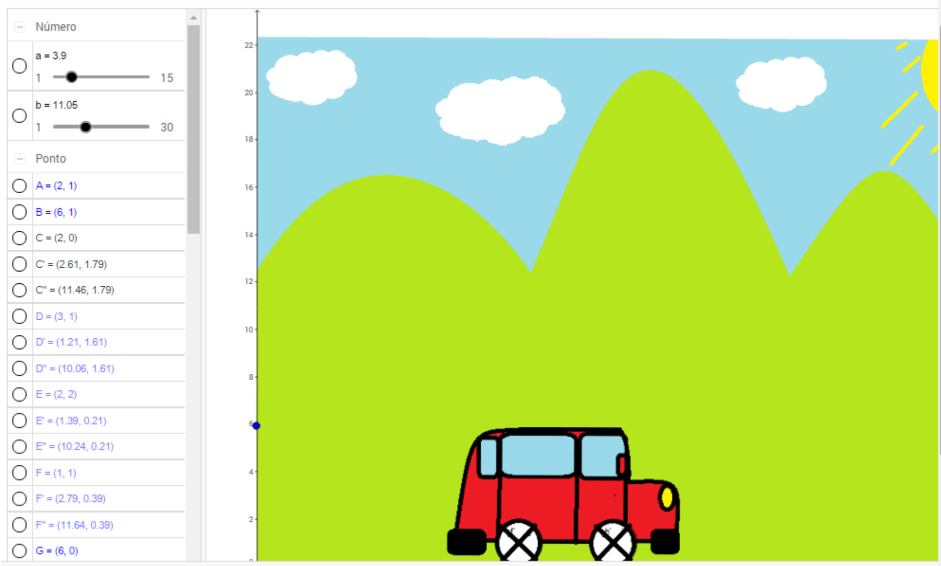


Figura 95: Animação – Carro – Cap. 6.11
FONTE: O Autor, 2016

As criações das animações no Geogebra utilizando os conceitos estudados neste trabalho despertou o interesse e motivou a participação dos alunos durante as atividades, mostrando que o conteúdo pode ser usado no seu cotidiano, evidenciando a sua importância, tornando assim a aula mais atrativa e dinâmica.

6.12 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES E RESULTADOS OBTIDOS

As atividades propostas foram aplicadas em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Estado de São Paulo no período da manhã. Uma turma com 22 alunos frequentes e a outra com 20 alunos. Tais atividades foram realizadas no primeiro semestre de 2016, aprendendo os conceitos na sala de aula e usando-os nas atividades disponibilizadas no GeogebraBook utilizando os computadores da Sala de Informática.

Atualmente muitos alunos se encontram desmotivados durante as aulas de matemática, devido à falta de conhecimentos prévios e aos métodos ultrapassados que muitos professores utilizam, que não despertam o interesse, pois não acompanham a evolução da tecnologia.

Por isso é importante motivar os alunos através dos recursos tecnológicos existentes na escola, possibilitando um aprendizado significativo através de uma visão diferenciada da Geometria Analítica com a inclusão do conceito de vetores com o auxílio do Geogebra.

Pensando no fato de que os conceitos de vetores facilitam os cálculos e que os alunos prestam mais atenção nas aulas quando se utiliza recursos tecnológicos como ferramenta auxiliar de ensino, pois de acordo com as notas obtidas pelos alunos durante a aplicação das atividades, os resultados foram satisfatórios.

Na unidade 1, foi apresentado o sistema de coordenadas cartesianas, conteúdo que já visto em séries anteriores, o qual foi utilizado para representar pontos no espaço. Durante a execução dessa atividade os alunos não tiveram dificuldade.

Na unidade 2, o foco do estudo foram as coordenadas dos vetores, as quais serviram de base para outros conteúdos, foram vistos também a equipolência de segmentos orientados e suas especificações, bem como a sua relação com a igualdade de vetores e a ideia de multiplicação de um vetor por um escalar. Os alunos conseguiram resolver as atividades no caderno e seguiram os procedimentos no Geogebra e fizeram questionamentos relevantes durante essa atividade.

Na unidade 3, as distâncias entre dois pontos foram apresentadas através dos conceitos de norma ou comprimento de um vetor. Como os alunos já conseguem calcular as coordenadas dos vetores, os cálculos para efetuar a distância entre dois pontos são menores e dessa forma ficou mais fácil resolvê-los.

Na unidade 4, foi apresentada a razão entre segmentos colineares que foi obtida através da divisão entre as distâncias encontradas entre os segmentos que estão em um a mesma reta, dessa forma os alunos também não tiveram dificuldades em resolver essas atividades, pois basta dividir as distâncias entre os pontos, conteúdo já utilizado na unidade anterior.

Na unidade 5, foi apresentado o Ponto Médio de um segmento de reta e para o desenvolvimento do seu conceito foi utilizado a razão entre segmentos colineares, os alunos não tiveram dificuldades com esse conteúdo, pois os cálculos não são complicados, pois basta fazer as médias entre as coordenadas de dois pontos. Também tiveram a oportunidade de visualizar e observar alguns teoremas importantes na demonstração do conceito do baricentro de um triângulo.

Na unidade 6, foi realizado o estudo do baricentro de polígonos, como encontrar o baricentro de um triângulo, os alunos resolveram as atividades no caderno e puderam conferir o resultado no Geogebra sem dificuldades. Também tiveram a oportunidade de visualizar e observar algumas propriedades do baricentro de polígonos com o número de lados maior que 3.

Na unidade 7, foi necessário definir o conceito de condição de alinhamento de três pontos, os alunos não tiveram dificuldades em efetuar os cálculos, pois conseguem encontrar as coordenadas dos vetores e para verificar se os pontos estão alinhados, basta resolver um determinante de segunda ordem.

Na unidade 8, procurou-se encontrar a área de paralelogramos e triângulos, após a definição dos conceitos necessários para resolver as atividades, verificou-se que para calcular a área basta resolver um determinante de segunda ordem, assim a resolução dessa atividade ficou parecida com a atividade anterior e dessa forma os alunos também não tiveram dificuldade em resolvê-la.

Na unidade 9, o foco do estudo foram os três tipos de equações da reta, as condições de paralelismo e perpendicularismo. Com a utilização dos conceitos de vetores temos a noção de direção da reta, assim o estudo da reta se torna mais fácil, pois para saber se as retas são paralelas devemos observar se os vetores são múltiplos um do outro, e para saber se obter uma reta perpendicular, basta trocar as coordenadas do vetor (a, b) por (-b, a).

Na unidade 10, foi apresentada a equação da circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas. Através da observação no Geogebra, pode-se compreender melhor a equação que dá origem a reta e assim os cálculos possuem sentido e apenas substituindo os pontos do centro da circunferência e o seu raio podemos obter a equação reduzida ou geral de forma mais simples.

Na unidade 11, as animações com os conceitos de vetores e o uso do Geogebra foram apresentadas com o intuito de mostrar a utilidade da matemática e sua importância, principalmente na área da tecnologia.

Para ajudar na análise deste trabalho foi aplicado um questionário com objetivo verificar se os conceitos de vetores facilitaram a compreensão do conteúdo e se o uso do GeoGebra despertou o interesse dos alunos, contribuindo no processo ensino aprendizagem. Onde os alunos poderiam escolher as opções: Concordo Totalmente, Concordo Parcialmente, Discordo Totalmente e Discordo Parcialmente.

Um total de 40 alunos responderam, com uma média de idade igual a 17,2 anos. Sendo 45% meninos e 55% meninas.

Questão 1: Os conceitos de vetores facilitaram os cálculos efetuados no caderno?

Resultado: 65% Concorda Totalmente, 20% Concorda Parcialmente, 10% Discorda Totalmente e 5% Discorda Parcialmente.

Dessa forma, percebe-se que a maioria dos alunos não tiveram dificuldades em resolver os cálculos no caderno utilizando os conceitos de vetores, pois 85% concordam totalmente ou parcialmente.

Questão 2: Foi fácil encontrar as coordenadas dos vetores e resolver as atividades?

Resultado: 55% Concorda Totalmente, 25% Concorda Parcialmente, 15% Discorda Totalmente e 5% Discorda Parcialmente.

Dessa maneira, percebe-se que a maioria dos alunos não tiveram dificuldades em encontrar as coordenadas dos vetores e resolver as atividades utilizando os conceitos de vetores, pois 80% concordam totalmente ou parcialmente.

Questão 3: O GeoGebra torna as aulas de Matemática mais interessantes?

Resultado: 52,5% Concorda Totalmente, 47,5% Concorda Parcialmente, 0,00% Discorda Totalmente e 0,00% Discorda Parcialmente.

De acordo com o resultado percebe-se que a maioria absoluta dos alunos acham que o Geogebra torna as aulas mais interessantes, pois 100% concordam totalmente ou parcialmente.

Questão 3: Aprendo melhor os conteúdos quando o professor utiliza o GeoGebra para ensinar?

Resultado: 50% Concorda Totalmente, 30% Concorda Parcialmente, 12,5% Discorda Totalmente e 7,5% Discorda Parcialmente.

Analisando o resultado percebe-se que a maioria dos alunos acreditam que o uso do Geogebra ajuda a melhorar o entendimento dos conteúdos, assim o seu uso despertou o interesse dos alunos e contribuiu no processo ensino aprendizagem.

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou a importância do uso das tecnologias no ensino de matemática nos dias atuais. Abordou a importância do papel do professor frente aos avanços tecnológicos, como agente facilitador da interdisciplinaridade e como mediador do conhecimento, também apresentou uma breve bibliografia dos matemáticos que fizeram contribuições importantes no século XVII, as quais deram origem a Geometria Analítica. O foco principal foi o desenvolvimento de uma sequência de atividades realizadas pelo autor, utilizando o conceito de vetores com o auxílio do Geogebra e disponibilizadas no geogebraBook, a qual permitiu uma melhor compreensão dos conceitos apresentados, através das visualizações das transformações ou modificações sofridas pelos objetos estudados de forma dinâmica e em tempo real.

Durante a execução das atividades foram observados o comprometimento, o envolvimento e a participação dos alunos. Através da realização das atividades propostas, os alunos puderam sedimentar os conhecimentos teóricos adquiridos pela prática através de construções geométricas. Os resultados obtidos nas atividades realizadas no caderno e no Geogebra foram satisfatórios, os alunos puderam compreender a relação existente entre a escrita algébrica e a construção geométrica. Os alunos mostraram facilidade em seguir os procedimentos no Geogebra e fizeram questionamentos relevantes na construção dos conceitos almejados.

O uso do conceito de Vetor auxiliou na interpretação das atividades do caderno, facilitando os cálculos. Este conceito geralmente é tratado somente nas aulas de Física, mas como é um conteúdo matemático deve ser aplicado nas aulas de matemática. É importante a utilização do conceito de vetores no ensino de Geometria Analítica, no sentido de obter uma aproximação das disciplinas de Matemática e Física, agindo como um fator facilitador do entendimento do assunto no processo ensino aprendizagem.

Através da aplicação das atividades o autor percebeu que a utilização de recursos computacionais como recursos didáticos proporcionou a sedimentação dos conceitos de geometria analítica, possibilitando aos alunos aplicar diferentes propriedades, de explorar e vivenciar diferentes situações, resgatando a cada tópico as propriedades e conceitos vistos anteriormente e dessa forma, contemplando a teoria do conteúdo estudado.

Diante do exposto, acreditamos que os recursos tecnológicos podem contribuir para a aprendizagem dos conceitos de Geometria Analítica, mas somente a sua utilização não é suficiente, as atividades também precisam ser pensadas num olhar teórico, com atividades resolvidas no caderno e corrigidas no geogebra e vice-versa, porém, não se trata de um modelo ideal de atividades para utilizar em sala de aula, mas uma alternativa de possibilidades que podem ser feitas no Geogebra.

Dessa forma, acreditamos que as atividades propostas aos alunos utilizando o conceito de vetor na Geometria Analítica com o auxílio do Geogebra foi bem proveitosa e contribuiu significativamente no processo de ensino aprendizagem deste assunto.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Tendo como base a utilização do Geogebra para auxiliar o entendimento dos conceitos que serão estudados, motivando os alunos a participarem mais das aulas, com atividades feitas no caderno e corrigidas no Geogebra, sugere-se aplicar outras atividades contemplando outros temas como: elipse, hipérbole e parábola. Outra proposta é trabalhar geometria espacial utilizando os conceitos de geometria analítica vetorial.

REFERÊNCIAS

Auto em movimento com geogebra Explicado com passos. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=WCOEbdrZrdk&nohtml5=False>. Acesso em: 16 abr. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: Ensino de primeira à quarta série**. Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2016.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: Ensino de quinta à oitava série**. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2016.

______. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2001. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2016.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 01 abr. 2016.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: **Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2016.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática.** Campinas, SP: Papirus, 1996.

___________, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. P. 15-19. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 21 fev. 2016.

DIAS, M. S. da S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio**

geométrico. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009, p.49.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FORTES, C. **Interdisciplinaridade: Origem, Conceito e Valor.** 2009,11 f. (Artigo do Curso em especialização em Gestão Educacional) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2009.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à pratica educativa**. Paz e Terra. São Paulo, 2010.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, et al. (Orgs). **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.** Porto Alegre: Evangraf, 2012. 180 p.

GÓMEZ, J. J. D.; Frensel K. R.; CRISSAFF L. dos S. **Geometria Analítica, Coleção Profmat.** Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M. **Introduction to GeoGebra.** Disponível em: <https://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf>. Acesso: 12 abr. 2016.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação.** 6ª edição, Campinas: Papirus, 2007.

MORAN, J. M. **Os novos espaços de atuação do professor com as tecnologias.** Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 4, n. 12, p.15, Mai/Ago 2004.

OBMEP, **Obmep na escola: Prova de Habilitação.** Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/314790.o>. Acesso em: 29 jan. 2016.

PONTE, J. P; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PRETTO, N. de L. **Políticas Públicas Educacionais: dos materiais didáticos aos multimídias.** Trabalho apresentado na Reunião Anual da ANPEd, 22ª. Caxambu, Minas Gerais, 1999. Anais ... São Paulo/SP: ANPEd, 1999.

SILVA, L. **Alunos Digitais e Professores Analógicos. O que fazer?**,2015. Disponível em: <http://www.educacao-a-distancia.com/alunos-digitais-e-professores-analogicos/>. Acesso em: 28 mai. 2016.

TOKARNIA, M. **Desempenho de estudantes do ensino médio é menor que os de 20 anos atrás**, 2016. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2016-09/desempenho-de-estudantes-do-ensino-medio-e-menor-que-o-de-20-anos-atras>. Acesso em: 19 set. 2016.

APÊNDICE

APÊNDICE A – Termo de consentimento informado

Termo de consentimento informado

Eu,____, RG_________, aluno(a) da turma___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada " O uso de conceitos vetoriais em Geometria Analítica no Ensino Médio com o auxílio do Geogebra", desenvolvido pelo professor Célio Furlani.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade da minha participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais são:

- Investigar através de uma sequência de atividades realizadas no GeogebraBook as contribuições e as dificuldades enfrentadas pelos alunos;
- Analisar o desempenho e o envolvimento dos alunos nas atividades através de suas produções realizadas na sala de informática e na sala de aula.

Fui esclarecido(a) de que os usos de informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc), não identificando o meu nome.

A minha participação se fará por meio do meu envolvimento nas atividades propostas neste trabalho, em que serei observado e minha produção analisada. No caso de fotos das minhas produções do caderno, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas sem minha identificação.

Itararé, ____ de _____________de 2016

Assinatura do aluno(a) ou Responsável:____________________________

____

Professor Célio Furlani

RG 22 656 179-3

APÊNDICE B – Questionário: O uso dos conceitos de vetores e do Geogebra

Questionário: O uso dos conceitos de vetores e do Geogebra

Nome (opcional):____

Idade:________ Sexo: (   ) Masculino

(   ) Feminino

Questão 1: Os conceitos de vetores facilitaram os cálculos efetuados no caderno?

(   ) Concordo Totalmente.

(   ) Concordo Parcialmente.

(   ) Discordo Totalmente.

(   ) Discordo Parcialmente.

Questão 2: Foi fácil encontrar as coordenadas dos vetores e resolver as atividades?

(   ) Concordo Totalmente.

(   ) Concordo Parcialmente.

(   ) Discordo Totalmente.

(   ) Discordo Parcialmente.

Questão 3: O GeoGebra torna as aulas de Matemática mais interessantes?

(   ) Concordo Totalmente.

(   ) Concordo Parcialmente.

(   ) Discordo Totalmente.

(   ) Discordo Parcialmente.

Questão 4: Aprendo melhor os conteúdos quando o professor utiliza o GeoGebra para ensinar?

(   ) Concordo Totalmente.

(   ) Concordo Parcialmente.

(   ) Discordo Totalmente.

(   ) Discordo Parcialmente.