



Ronaldo Dias

Terceiro Problema de Hilbert e Teorema de Dehn

São José do Rio Preto

2013

Ronaldo Dias

Terceiro Problema de Hilbert e Teorema de Dehn

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Parham Salehyan

São José do Rio Preto

2013

AGRADECIMENTOS

A **DEUS**, por mais esta etapa vencida.

Ao meu orientador Professor Dr. Parham Salehyan, cujo estímulo aliado ao exemplo profissional me tornou mais ciente de minha responsabilidade.

Aos idealizadores deste Mestrado Profissional em Matemática, pela coragem em criar um programa nacional de Mestrado neste país continental chamado Brasil.

Aos colegas e professores da turma 2011 do Profmat-Mestrado em Matemática que colaboraram direta ou indiretamente para a realização desta obra, em especial aos colegas Anderson Leandro e Eduardo pela amizade fortalecida a cada dia.

Aos amigos José Miguel e Evandro pela paciência e companheirismo nas viagens para São José do Rio Preto.

Aos meus pais Paulo Dias Fuzinato e Amara Zampieri Dias por sempre acreditar e incentivar os meus estudos.

Aos meus filhos Pedro, João Miguel e Mariana pelos momentos de angústia e horas roubadas de seu convívio.

Em especial à minha esposa Alessandra pelo incentivo nas horas que parecia fraquejar, pelo AMOR demonstrado neste período e por sempre acreditar que este momento era uma realidade que estava ao meu alcance.

Sumário

Introdução e Abstract	5
1 Existência e unicidade da função área	6
1.1 Medida e área	6
Congruência por corte.....	8
Terminologia para congruência por corte	8
1.2 Área	10
1.2.1 Existência e unicidade da função área.....	11
Teorema 1.2.2.....	11
Teorema 1.2.3.....	13
2 Congruência por corte para polígonos	16
Teorema 2.1(Bolyai-Gerwien)	17
2.2 Algumas particularidades sobre congruência por corte para figuras planas.....	19
2.2.1 Quadratura do círculo.....	19
2.2.2 Um retângulo pode ser dividido em um número finito de quadrados?	19
3 Congruência por corte para poliedros	24
Teorema 3.1 (Dehn)	25
3.2 Invariantes	25
3.3 Construção de invariantes para poliedros	27
3.4 Prova do Teorema de Dehn	32
3.5 Paradoxo de Banach-Tarski.....	34
4 Atividades a serem desenvolvidas envolvendo a teoria apresentada nos capítulos 1, 2 e 3	35
Bibliografia	40

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é provar o Teorema de Dehn. Esse teorema é resposta ao Terceiro Problema de Hilbert, este problema refere-se à seguinte situação: Se dois poliedros possuem o mesmo volume eles são congruentes por corte, ou seja, é sempre possível tomar dois poliedros de mesmo volume e decompor um em poliedros menores de tal maneira que os reorganizando seja possível montar o outro. A resposta para esta questão é negativa e sua prova ficou conhecida como teorema de Dehn.

Inicialmente estudaremos conceitos de área, volume e congruência por corte para figuras planas e no espaço. Nesta etapa discutiremos a decomposição de figuras em polígonos e poliedros.

Em seguida usando algumas propriedades de funções aditivas e os ângulos diedros de um poliedro, construiremos um invariante que será a ferramenta principal na demonstração do Teorema de Dehn.

Como considerações finais, cito o Paradoxo de Banach-Tarski, uma vez que o mesmo é relacionado naturalmente ao problema de congruência por corte e decomposição de figuras no espaço e apresento um capítulo com algumas atividades que podem ser desenvolvidas na educação básica.

ABSTRACT

The main object of this work is study the Third Problem of Hilbert and the Dehn Theorem.

Capítulo 1

Existência e unicidade da função área

1.1 Medida e área

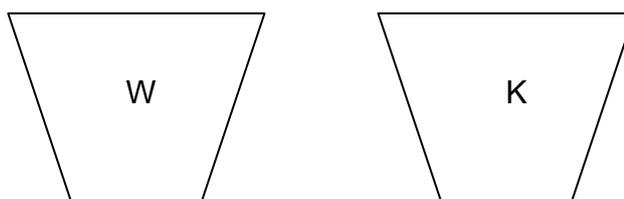
O termo medida é comumente usado na linguagem cotidiana, enquanto que o termo área foi elevado ao nível de um conceito matemático. Usamos o termo "área" em linguagem diária também, no entanto, "área" dá uma medição precisa de uma figura, enquanto a medida tem a conotação de indefinição devido à sensação subjetiva do observador, onde que uma quantidade de área tem um significado objetivo. Termos com significados objetivos que podem ser expressos matematicamente são chamados de "conceitos matemáticos". No processo de transformação da "medida" para o termo "área", isto é, no processo de transformação da "linguagem cotidiana" em um conceito matemático, vemos a história da matemática que se desenrolou diante dos nossos olhos. Na verdade, é bastante difícil estabelecer o conceito preciso de uma palavra que assumimos no nível do senso comum. Precisamos determinar claramente o escopo abrangente do conceito em questão, no entanto, esta não é uma tarefa fácil.

Vamos discutir como noções de senso comum como medida são transformados em conceitos matemáticos como área.

A noção de medida apareceu a mais de 5000 anos atrás, na época das antigas civilizações mais precisamente no Egito, Mesopotâmia e China. Os povos dessa época precisavam saber a medida de figuras e compará-las. Por exemplo, no antigo Egito, uma civilização surgiu às margens do Rio Nilo e a atividade predominante era a agricultura, ou seja, trabalhar a terra. De acordo com o livro "History" escrito pelo Grego Heródoto (484 – 425 A.C. aproximadamente) os governantes tiveram que distribuir a terra igualmente entre os agricultores do reino e, com as cheias do Rio Nilo, era necessário refazer constantemente a divisão, isto fez com que desenvolvessem técnicas para fazer a divisão das terras surgindo então a "Geometria" (medida da terra).

Imagine a seguinte situação, no antigo Egito existem dois agricultores cada um com um lote de terra. Suponha agora que queremos mostrar que os seus lotes possuem a mesma quantidade de terra, mesmas medida. A medida de um lote de

terra era tão importante no antigo Egito como nos tempos atuais, pois os impostos eram cobrados de acordo com a produção de cada proprietário, logo se possuem a mesma quantidade de terra imagina-se que suas produções sejam equivalentes e o imposto a ser cobrado será o mesmo. Se mostrarmos que suas parcelas são iguais nenhum irá se sentir injustiçado.



Na Geometria, as figuras que têm a mesma forma e tamanho são chamadas *congruentes*. Isto é, se duas figuras possuem ângulos e lados correspondentes com medidas iguais elas são congruentes. As condições suficientes para congruência de figuras triangulares são: LAL (lado, ângulo, lado), ALA (ângulo, lado, ângulo) e LLL (lado, lado, lado).

Com estes critérios de congruência de triângulos é possível mostrar que dois lotes de terra são congruentes, para isto precisamos dividir os dois lotes em triângulos congruentes e assim concluir que são congruentes, ou então, dividir em figuras que sejam congruentes, se todas as partes de uma figura podem ser reajustadas de tal modo que assuma a forma da outra teremos mostrado que estas figuras possuem a mesma medida.

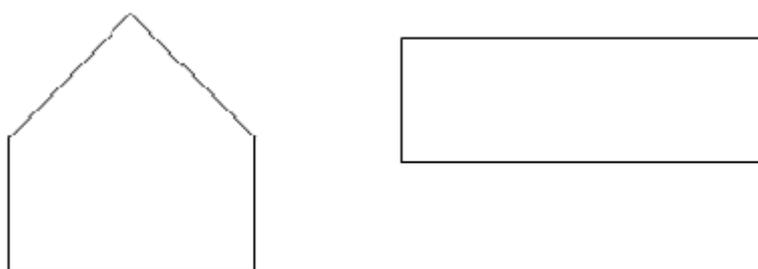


Figura 1.1

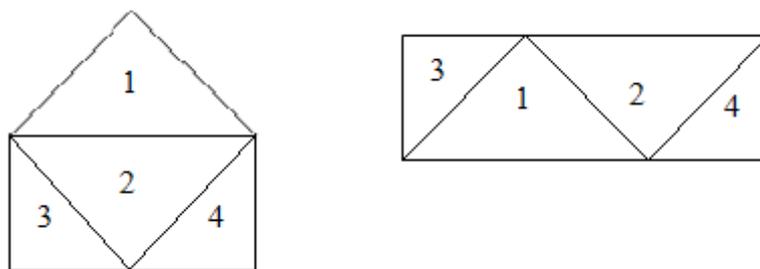


Figura 1.2

Mesmo para as figuras mais complicadas, podemos decompô-las em partes menores de tal forma que cada parte de uma seja congruente a uma parte da outra mostrando assim que as figuras têm a mesma medida. O termo matemático para este método é “*Congruência por Corte*”.

TERMINOLOGIA 1: Duas figuras K_1 e K_2 são chamadas congruentes se tiverem ângulos e medidas correspondentes idênticos. Neste caso escrevemos: $K_1 \cong K_2$.

TERMINOLOGIA 2: Se um polígono K pode ser decomposto em n polígonos K_1, K_2, \dots, K_n então escrevemos que $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$. (Ver figura 1.3)

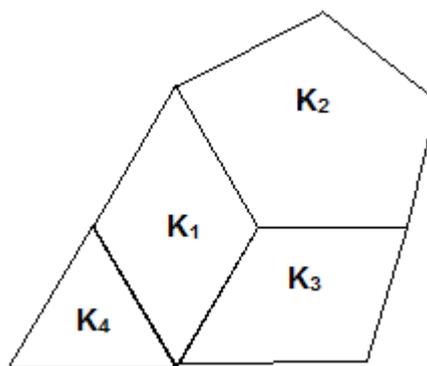


Figura 1.3

TERMINOLOGIA 3: Dois polígonos W e H são Congruentes por Corte e escrevemos $W \sim H$, se um dos polígonos (por exemplo W) pode ser decomposto em um número finito de peças poligonais de tal modo que possam ser rearranjadas para a construção do outro polígono (H). Ou seja, se

$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$, $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$ e $W_i \equiv H_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

O seguinte teorema garante a existência de polígonos congruentes por corte!

Teorema 1.1.1. Cada triângulo é congruente por corte com algum retângulo.

Em particular a três retângulos cada um deles com um dos lados igual ao lado do triângulo e o outro lado igual à metade da altura relativa ao lado considerado do triângulo.

Demonstração: Seja o triângulo ABC com base BC e M e N pontos médios de AB e AC, respectivamente. Trace o segmento MN e, em seguida, o segmento AH perpendicular ao segmento MN no ponto H, assim teremos o triângulo ABC dividido em três partes:

- (1) Triângulo MHA;
- (2) Triângulo NHA;
- (3) Trapézio BCNM.

Reorganizando estas três partes de tal modo que BM fique sobreposto com AM e CN sobreposto com NA teremos o retângulo BCHH' cuja área é igual a do triângulo ABC. (Ver Figura 1.4)

Justificativa para que a figura seja um retângulo.

Observando (1) triângulo MHA, temos:

- Os ângulos BMN e AMN são suplementares;
- O triângulo MHA é reto em H logo os ângulos AMH e HAM são complementares, temos ainda que os ângulos AMH e ABC são congruentes pois MN é paralelo a BC (MN é base média do triângulo ABC). Logo os ângulos ABC e HAM são complementares formando assim um ângulo de 90°.

Temos a mesma situação para (2) triângulo NHA.

Teremos assim que as medidas dos ângulos BH'H, H'HC, HCB e CBH' são retos e, portanto, o quadrilátero BCHH' é retângulo.

Veja a Figura 1.4.

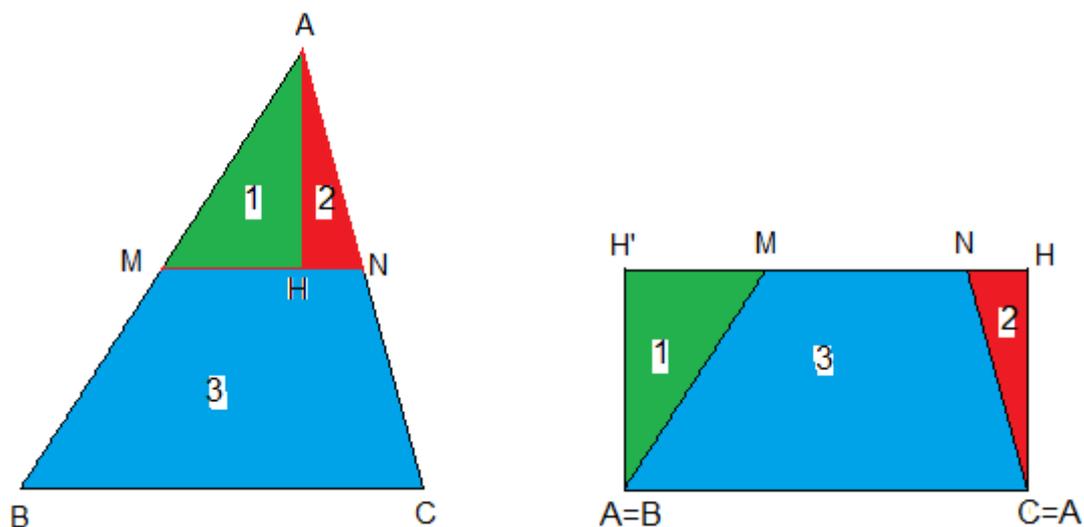


Figura 1.4

1.2 Área

Para mostrar que duas figuras ocupam a mesma quantidade do plano podemos utilizar o processo de congruência por corte. No entanto, este processo não é muito conveniente de acordo com o tamanho da figura, pois poderia levar muito tempo para desenhar as partes pesquisadas.

Portanto, faz sentido procurarmos outro critério. Uma idéia é associar um número a cada figura plana, ou seja, definir uma função que possa ser utilizada para verificar se duas figuras são congruentes por corte.

Para alcançar nosso objetivo, essa função, que será chamada de função área, deverá satisfazer as seguintes propriedades. Para cada figura plana K , seja $m(K)$ sua área. Então

1ª) Positiva: $m(K) > 0$.

2ª) Invariância: Se as figuras poligonais K_1 e K_2 são congruentes por corte então $m(K_1) = m(K_2)$.

3ª) Aditiva: Se K for decomposto em n polígonos K_1, K_2, \dots, K_n temos que $m(K) = m(K_1) + m(K_2) + \dots + m(K_n)$.

4ª) Para o quadrado padrão K , $m(K) = 1$.

1.2.1 Existência e unicidade da função área

Pela propriedade (3) e pelo fato que cada polígono pode ser decomposto em triângulos no plano, a área do polígono será determinada a partir das áreas de triângulos. Pelo teorema 1.1.1, basta determinar a área de triângulos.

Unicidade:

Seja $k(a, b)$ um retângulo com largura a e comprimento b . Mostraremos que $m(k(a, b)) = ab$, ou seja, a área é uma função de a e b .

Seja $m(k(a, b)) = f(a, b)$ então a função f é uma função de duas variáveis a e b e claramente:

- Se $k(a, b) = k(b, a)$ então $f(a, b) = f(b, a)$.

- Se $k(a, b)$ é decomposto em $k(a_1, b)$ e $k(a_2, b)$ onde $a = a_1 + a_2$ aplicando a 3ª propriedade temos $f(a, b) = m(k(a, b)) = m(k(a_1, b)) + m(k(a_2, b)) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$.

Então para f vale as seguintes propriedades:

- 1- $f(a, b) > 0$ (positividade)
- 2- $f(a, b) = f(b, a)$ para $a, b > 0$ (invariância)
- 3- $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$ para a_1, a_2 e $b > 0$ (aditiva)
- 4- $f(1, 1) = 1$

Teorema 1.2.2 Se uma função f satisfaz as condições 1, 2, 3 e 4 então $f(a, b) = ab$ para todo a e b , sendo uma função área para polígonos.

Demonstração: 1º passo: Provar que $f(m, n) = mn$ para m e n números naturais.

Se m e n são números naturais então pela propriedade aditiva temos:

$$f(am, bn) = mn \cdot f(a, b)$$

pois $f(am, bn) = f(\underbrace{a + \dots + a}_m, bn) = mf(a, bn) = mf(bn, a) = mnf(b, a) = mnf(a, b)$.

Como $f(1, 1) = 1$, então $f(m, n) = mn$.

2º passo: Provar que $f(a, b) = ab$ para a e b números racionais.

Seja $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ sendo p, q, r e s números naturais com $r \neq 0$ e $s \neq 0$. Então:

$$f(a, b) = f\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = prf\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

Por outro lado:

$$f(1, 1) = f\left(q\left(\frac{1}{q}\right), s\left(\frac{1}{s}\right)\right) = qsf\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{s}\right) \quad (2)$$

Dividindo (1) por (2):

$$f(a, b) = \frac{pr}{qs} f(1, 1) = ab.$$

3º passo: Provar que se $a \leq a'$ e $b \leq b'$ então $f(a, b) \leq f(a', b')$.

Podemos provar isso da seguinte maneira:

Se $a = a'$ e $b = b'$ o resultado é óbvio.

Se $a < a'$ e $b = b'$ então $f(a', b) = f(a + (a' - a), b) = f(a, b) + f((a' - a), b) > f(a, b)$.

Se $a = a'$ e $b < b'$ então $f(a, b') = f(b', a) > f(b, a) = f(a, b)$.

Se $a < a'$ e $b < b'$ então $f(a', b') > f(a, b') > f(a, b)$.

4º passo: Provar que $f(a, b) = ab$ para a e b números reais positivos.

Seja o número positivo ε então existem os números racionais positivos a_1, a_2, b_1 e b_2 tais que:

$$a - \varepsilon < a_1 \leq a \leq a_2 < a + \varepsilon \quad \text{e} \quad b - \varepsilon < b_1 \leq b \leq b_2 < b + \varepsilon.$$

Logo $f(a_1, b_1) \leq f(a, b) \leq f(a_2, b_2)$ e

$$(a - \varepsilon)(b - \varepsilon) < a_1 b_1 \leq f(a, b) \leq a_2 b_2 < (a + \varepsilon)(b + \varepsilon).$$

Portanto, $ab - \varepsilon(a + b - \varepsilon) < f(a, b) < ab + \varepsilon(a + b + \varepsilon)$. Fazendo ε um número cada vez mais próximo de zero obtemos $f(a, b) = ab$.

Pelo resultado anterior, se a função área existe e é única, então a área de um retângulo é o produto das medidas de sua largura e seu comprimento. Consequentemente:

Teorema 1.2.3 *Se existe e é única a função área m então a área do triângulo é $(base) \times (altura) / 2$.*

Portanto pela aditividade, para duas funções áreas m_1 e m_2 temos $m_1(k) = m_2(k)$ para todo triângulo k . Como todo polígono pode ser decomposto em triângulos a função área deve ser determinada de forma exclusiva, sendo provado assim a unicidade da função área.

Para sermos mais precisos, devemos verificar que a área de triângulo não depende da escolha da base. Considere a seguinte figura, onde AD, BE e CF são as alturas. Verificaremos que $AB \times CF = AC \times BE = AD \times BC$.

Os triângulos AEB e AFC são semelhantes pelo critério AA~(ângulo ângulo) pois o ângulo em A é comum e os ângulos em E e F são retos.

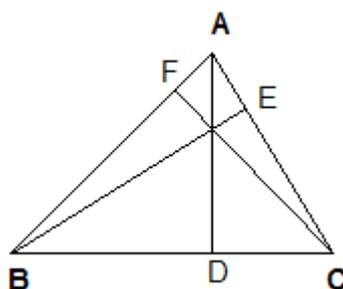


Figura 1.6

Logo, as outras igualdades são verificadas da mesma forma.

Para concluir a unicidade da função área, falta mostrar que a área de um polígono não depende de uma triangulação escolhida.

Faremos esta demonstração para um quadrilátero convexo. A ideia da demonstração no caso geral é basicamente a mesma.

Considere o quadrilátero ABCD. É evidente que ABCD pode ser decomposto em dois triângulos por uma de suas diagonais, ou seja, pode ser no mínimo decomposto em dois triângulos. Vamos considerar para a demonstração as duas triangulações pelas suas diagonais por serem a menor triangulação possível.

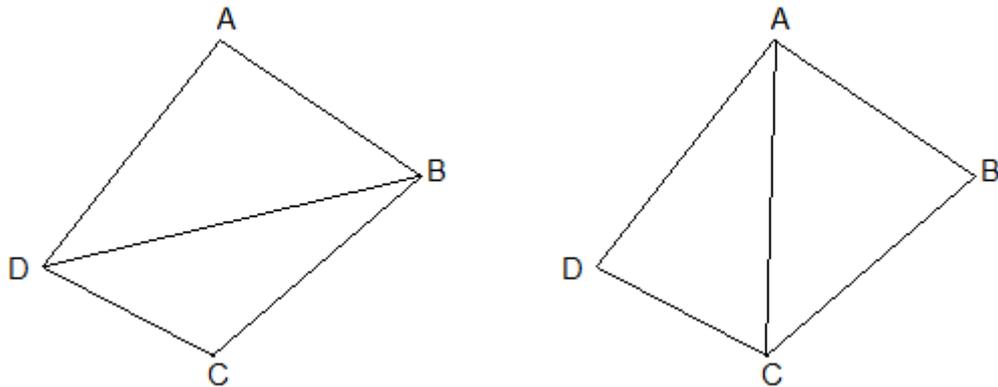


Figura 1.7

Sejam $\theta_1 = \angle ABD$, $\theta_2 = \angle BCD$, $\theta_3 = \angle ADC$ e $\theta_4 = \angle CBA$. Sendo E o ponto de intersecção entre as diagonais AC e BD,

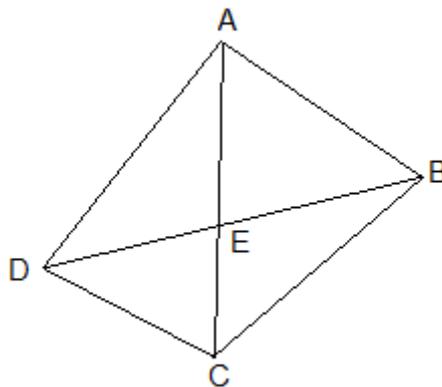


Figura 1.8

$\beta_1 = \angle ADE$, $\beta_2 = \angle AEB$, $\beta_3 = \angle DCE$ e $\beta_4 = \angle CBE$ concluímos

$$\theta_1 = \beta_1 + \beta_2, \quad \theta_2 = \beta_3 + \beta_4, \quad \theta_3 = \beta_1 + \beta_3, \quad \theta_4 = \beta_2 + \beta_4.$$

Demonstraremos que vale a igualdade $m(\theta_1) + m(\theta_2) = m(\theta_3) + m(\theta_4)$.

Como $m(\theta_1) = m(\beta_1) + m(\beta_2)$, $m(\theta_2) = m(\beta_3) + m(\beta_4)$, $m(\theta_3) = m(\beta_1) + m(\beta_3)$ e $m(\theta_4) = m(\beta_2) + m(\beta_4)$

Concluimos

$$m(\beta_1) + m(\beta_2) + m(\beta_3) + m(\beta_4) = m(\beta_1) + m(\beta_3) + m(\beta_2) + m(\beta_4).$$

Portanto, a área de um quadrilátero não depende da decomposição, isto mostra que a função área é única. Adotaremos isto válido para qualquer polígono.

Existência:

Mostrar que a função m definida é de fato uma função área.

Se m é uma função área deverá satisfazer as quatro propriedades da pag.11.

A 1ª Positiva e a 2ª invariância são evidentes pela definição. Para o quadrado K sendo adotado como unidade padrão é evidente que $m(k) = 1$, logo a 4ª propriedade também é válida. Para a 3ª propriedade (aditiva), seja o polígono k decomposto em n polígonos K_1, \dots, K_n , agora decompondo adicionalmente cada polígono K_i ($i = 1, \dots, n$) em triângulos tais que $K_i = K_{i1} + \dots + K_{im}$ temos o conjunto de triângulos K_{ij} com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ como sendo uma triangulação do polígono k , logo:

$$\begin{aligned} m(K) &= m(K_{11}) + \dots + m(K_{1m_1}) \\ &+ m(K_{21}) + \dots + m(K_{2m_2}) + \dots \\ &+ m(K_{n1}) + \dots + m(K_{nm_n}) = m(K_1) + \dots + m(K_n). \end{aligned}$$

Demonstrando assim a propriedade aditiva.

Sendo assim a função área $m(K)$ para um polígono K é definida e não há nenhuma outra função área como já foi demonstrado. Portanto a função área existe e é única.

Capítulo 2

Congruência por corte para polígonos

No capítulo anterior vimos que a congruência por corte de dois polígonos implica a igualdade das áreas. É natural perguntarmos se vale a recíproca. A resposta para a pergunta é positiva e foi demonstrado por Farkas Wolfgang Bolyai em 1832 e, independentemente, por P. Gerwien em 1833. Farkas Bolyai foi o pai do famoso matemático húngaro János Bolyai, criador da Geometria Hiperbólica (também criada por Lobatchevski e Gauss).

Teorema 2.1 (Bolyai-Gerwien) *Se dois polígonos K e W possuem a mesma área, ou seja, $m(K) = m(W)$, então K e W são congruentes por corte.*

Para provar este teorema precisamos do Teorema 1.1.1 e os seguintes lemas.

Lema 2.1.2 Sejam $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$ e $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ decomposições de K e W , respectivamente tal que K_m e W_m são congruentes por corte para todo $m = 1, \dots, n$. Então K e W são congruentes por corte. (Este lema é evidente então omitiremos a prova)

Lema 2.1.3. A congruência por corte é uma relação de equivalência.

Demonstração: As propriedades reflexivas e simétricas são evidentes. Apresentaremos a demonstração da propriedade transitiva. Supõe L, K e W polígonos tais que $K \sim L$ e $L \sim W$ mostremos que $K \sim W$.

Seja L_1, L_2, \dots, L_m decomposição de L , ou seja, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$, e o polígono K construído usando as partes K_1, K_2, \dots, K_m que são congruentes as partes L_1, L_2, \dots, L_m da decomposição de L . Então $K = K_1 + K_2 + \dots + K_m$ com $K_j \equiv L_j$ ($j = 1, \dots, m$).

Sejam L'_1, L'_2, \dots, L'_n outra decomposição de L , então $L = L'_1 + L'_2 + \dots + L'_n$ e o polígono W construído usando as partes W_1, W_2, \dots, W_n que são congruentes as partes L'_1, L'_2, \dots, L'_n da decomposição de L . Então $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ com $W_i \equiv L'_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Considere a decomposição de L obtida por uma combinação das duas decomposições citadas acima, ou seja, L será formada pelas partes $L_{ij} = L'_i \cap L_j$ ($i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, m$)

Considerando o índice j de L_{ij} como uma constante e variando o índice i obtemos uma nova decomposição de L_j , como a decomposição de L_j corresponde à decomposição de K_j obtemos um refinamento $\{K_{ij}\}$ da decomposição $\{K_j\}$ de K .

Considerando o índice i de L_{ij} como uma constante e variando o índice j obtemos uma nova decomposição de L'_i , como a decomposição de L'_i corresponde à decomposição de W_i obtemos um refinamento $\{W_{ij}\}$ da decomposição $\{W_i\}$ de W . Logo, $K_{ij} \equiv W_{ij}$ e os polígonos K e W são congruentes por corte. \square

Lema 2.1.4 Todo paralelogramo é congruente por corte com um retângulo com comprimento horizontal igual ao comprimento da base do paralelogramo e comprimento vertical igual ao comprimento da altura do paralelogramo.

Demonstração: Observe a Figura 2.1 e considere que a medida CD seja igual a medida $C'D'$ e a altura do paralelogramo $ABCD$ seja igual a medida $C'B'$. Vamos mostrar que $ABCD$ é congruente por corte com $A'B'C'D'$. Na Figura 2.2, a medida $B'C$ (altura do paralelogramo) é igual a medida $B''C$ (comprimento vertical do retângulo) e a medida CD (base do paralelogramo) é igual a medida $C'D'$ (comprimento horizontal do retângulo). Logo, movendo o triângulo $CB'B$ de tal modo que AD coincida com CB obtemos o retângulo $DCB''B'$ que é congruente ao retângulo $A'B'C'D'$ pois $CD \equiv C'D'$ e $CB'' \equiv CB' \equiv C'B'$. Portanto o paralelogramo $ABCD$ é congruente por corte ao retângulo $A'B'C'D'$. \square

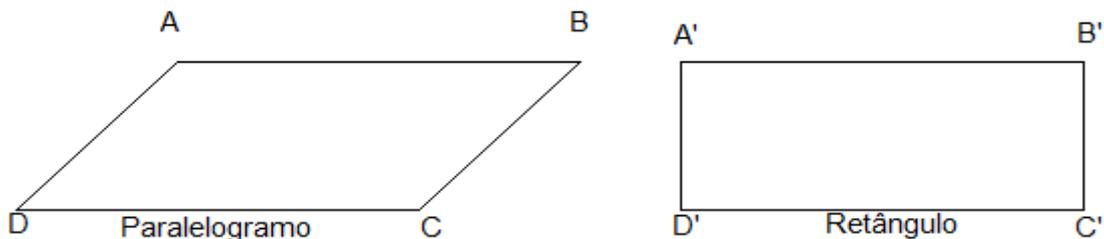


Figura 2.1

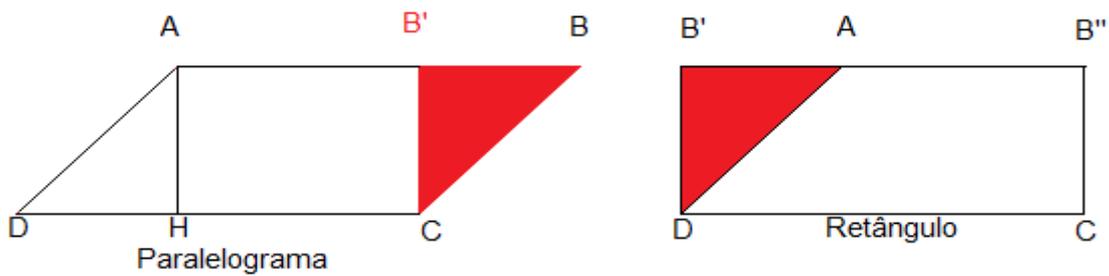
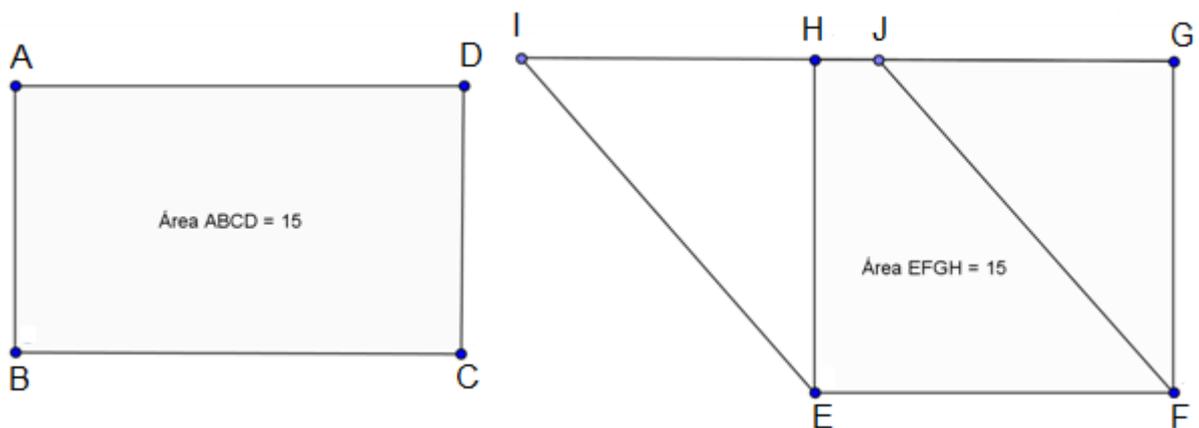


Figura 2.2

Lema 2.1.5 Dois retângulos com mesma área são congruentes por corte.

Demonstração: Sejam os retângulos $ABCD$ e $EFGH$ com mesma área. Vamos considerar que, em relação aos segmentos AB , BC , EF e FG , o segmento BC seja o maior. Construindo uma semirreta GH com extremidade em G e que passa por H tomemos em GH o ponto I de tal modo que EI possua a mesma medida de BC . Traçando por F uma reta paralela a EI que intercepta GH em J temos assim o paralelogramo $EFJI$ que é congruente por corte ao retângulo $EFGH$ (Lema 2.1.4). A área do retângulo $ABCD$ é igual à área do paralelogramo $EFJI$ e suas bases possuem a mesma medida ($\text{med}(BC) = \text{med}(EI)$) então a altura de $ABCD$ é igual a de $EFJI$. Logo, $ABCD$ é congruente por corte a $EFJI$ e, pelo Lema 2.1.4, $ABCD$ é congruente por corte com $EFGH$. (Ver figura) \square



Pelo Lema 2.1.5, concluímos que todo retângulo K é congruente por corte com um retângulo de comprimento horizontal 1 e o comprimento vertical $m(K)$.

Agora estamos prontos para demonstrar o *Teorema 2.1*.

Demonstração do Teorema 2.1:

1º. Todo polígono pode ser decomposto em triângulo.

2º. Todo triângulo é congruente por corte com um retângulo. (Teorema 1.1)

3º. Considere as decomposições de K e W da seguinte forma:

$K = R_1 + R_2 + \dots + R_n$, $W = R_1^* + R_2^* + \dots + R_m^*$, onde R_k^* e $R_{k'}$, $k = 1, \dots, n$ e $k' = 1, \dots, m$ são retângulos.

Pelo Lema 2.1.5, para todo retângulo R_t ($t = 1, 2, \dots, n$), considerando o retângulo Q_t com comprimento horizontal igual a 1 e comprimento vertical igual a $m(R_t)$, então R_t e Q_t possuem a mesma área e daí são congruentes por corte. Se empilharmos os retângulos Q_t com $t = 1, \dots, n$, construiremos um retângulo Q com comprimento horizontal 1 que será congruente por corte com K (Lema 2.1.3). Note que o comprimento vertical de Q é $m(K)$.

Aplicando o mesmo processo para os retângulos R_l^* ($l = 1, 2, \dots, m$), obteremos o retângulo Q_1 com comprimento horizontal 1 congruente por corte com W . Note que o comprimento vertical de Q_1 é $m(W)$. Como $m(K) = m(W)$ temos $Q \sim Q_1$ e, pelo lema 2.1.3, K é congruente por corte com W ($K \sim W$). \square

2.2 Algumas particularidades sobre congruência por corte para figuras planas.

2.2.1 Quadratura de círculo

Um dos problemas que perturbou por muito tempo os matemáticos foi a quadratura do círculo: *É possível construir um quadrado de lado l , usando apenas régua e compasso, cuja área é igual à área do círculo de raio r ?*

A resposta negativa para este problema foi dada por Carl Louis Ferdinand Von Lindemann em 1882. De fato ele provou que π é um número transcendente, isto é, não existe um polinômio não nulo com coeficientes racionais tal que π seja sua raiz. A demonstração desse resultado pode ser encontrada nos livros sobre a teoria de Galois.

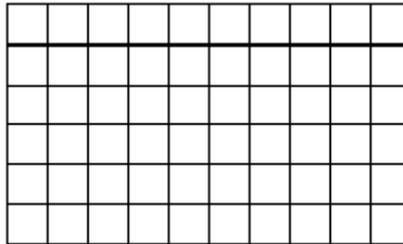
2.2.2 Um retângulo pode ser dividido em um número finito de quadrados?

Esta pergunta nos remete aos seguintes teoremas:

Teorema 2.2.3 Seja $\frac{a}{b}$ um número racional onde $a, b \in \mathbb{Z}_+$, então o retângulo $K(a, b)$ pode ser dividido em um número finito de quadrados.

1ª demonstração: Seja $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ (m e n números naturais primos entre si e $n \neq 0$).

Dividimos o retângulo verticalmente em m partes todos com largura igual a $\frac{a}{m}$ e em n partes horizontais todas com comprimento igual a $\frac{b}{n}$. Como $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, denotando $\frac{b}{n} = c$, teremos o retângulo $K(a, b)$ decomposto em mn quadrados $K(c)$.



2ª demonstração: Considere a decomposição com um número menor de quadrados. Seja $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. Então $K(a, b)$ é semelhante a $K(m, n)$, logo é suficiente considerar a decomposição de $K(m, n)$. Considerando, sem perda de generalidade, $m \geq n$, pelo algoritmo da divisão, existem q_0 e r_1 tais que $m = q_0 n + r_1$, $0 \leq r_1 < n$.

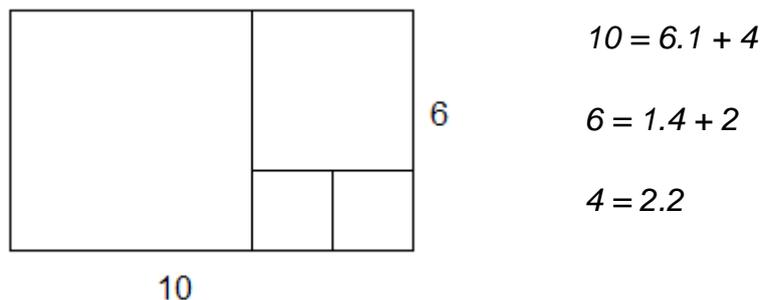
Se $r_1 \neq 0$, dividimos n por r_1 e encontramos os números q_1 e r_2 tais que $n = q_1 r_1 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$. Se $r_2 \neq 0$, dividimos r_1 por r_2 e encontramos os números q_2 e r_3 tais que $r_1 = q_2 r_2 + r_3$, $0 \leq r_3 < r_2$. Se $r_3 \neq 0$ dividimos r_2 por r_3 e encontramos os números q_3 e r_4 tais que $r_2 = q_3 r_3 + r_4$, $0 \leq r_4 < r_3$.

Repetindo o processo um número finito de vezes obtemos uma sequência decrescente de números não negativos $r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geq 0$. Certamente existe um número l tal que $r_{l-2} = r_{l-1} q_{l-1} + r_l$, $0 < r_l < r_{l-1}$, $r_{l-1} = r_l q_l$, $r_{l+1} = 0$.

Pelo algoritmo da divisão podemos afirmar que o retângulo $K(m, n)$ pode ser dividido em $q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_l$ quadrados com tamanhos diferentes. Com efeito, no retângulo $K(m, n)$ o quadrado $K(n)$ está contido exatamente q_0 vezes em $K(m, n)$.

A região restante de $K(m, n)$ é um retângulo $K(m - q_1n, n) = K(r_1, n)$ e, neste retângulo, temos que o quadrado $K(r_1)$ está contido exatamente q_1 vezes. Continuando com este processo concluiremos que o número de quadrados dentro do retângulo $K(m, n)$ é realmente $q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_l$ como havíamos afirmado.

Exemplo 2.1



Observação: Se m e n são números naturais então, o número r_l é o maior divisor comum de m e n . O método utilizado para o cálculo do maior divisor comum é chamado *Algoritmo de Euclides*.

A decomposição em quadrados descrita na 2ª demonstração do teorema 2.2.3 é chamada de *Decomposição Canônica* em quadrados.

Após as duas demonstrações provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.4 $mn \geq q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_l$, com a igualdade apenas para $n = 1$, ou seja, $l = 0$.

Demonstração: Calculando a área de cada quadrado obtido pela segunda prova da decomposição de $K(m, n)$, área é

$$mn = q_0n^2 + q_1r_1^2 + q_2r_2^2 + \dots + q_lr_l^2.$$

Como $q_0n^2 + q_1r_1^2 + q_2r_2^2 + \dots + q_lr_l^2 \geq q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_l$,

então $mn \geq q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_l$. A igualdade vale se

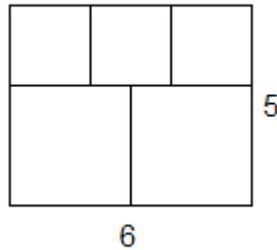
$$q_0n^2 + q_1r_1^2 + q_2r_2^2 + \dots + q_lr_l^2 = q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_l,$$

ou, $q_0(n^2 - 1) + q_1(r_1^2 - 1) + \dots + q_l(r_l^2 - 1) = 0$. Como todos os termos são positivos, $q_0(n^2 - 1) = q_1(r_1^2 - 1) = \dots = q_l(r_l^2 - 1) = 0$, ou seja, $n = 1$.

Será que na decomposição canônica temos o menor número de quadrados possíveis? A resposta é negativa. Por exemplo, para o retângulo $K(6, 5)$, então

$$6 = 5 \cdot 1 + 1 \quad \text{e} \quad 5 = 1 \cdot 5$$

Teríamos assim $1 + 5 = 6$ quadrados, no entanto é possível dividir o retângulo em cinco quadrados, dois com lado medindo 3 e três com lado medindo 2:



O próximo teorema garante que a racionalidade de a/b é uma condição necessária para dividir o retângulo $K(a, b)$ em um número finito de quadrados.

Teorema 2.2.5 Se $\frac{a}{b}$ é um número irracional o retângulo $K(a, b)$ não pode ser dividido em um número finito de quadrados. No entanto, sempre é possível decompor o retângulo K em um número infinito de quadrados.

Demonstração: Utilizaremos um método similar ao da divisão algorítmica.

Sejam $a > b > 0$ e $q_0 = \left[\frac{a}{b} \right]$. Então $q_0 b \leq a < (q_0 + 1)b$. Sendo $\frac{a}{b}$ um número irracional, nesta desigualdade acima $q_0 b < a$. Consequentemente

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b}, \quad 0 < \frac{r_1}{b} < 1.$$

Usando o método descrito na 2ª demonstração do teorema 2.2.3, em $K(a, b)$ existem q_0 quadrados e a região retangular restante é $K(a - q_0 b, b) = K(r_1, b)$.

$$1) \quad b = q_1 r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1, \quad \frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 < \frac{r_2}{r_1} < 1$$

$$2) \quad r_1 = q_2 r_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2, \quad \frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}, \quad 0 < \frac{r_3}{r_2} < 1$$

...

$$l) \quad r_{l-1} = q_l r_l + r_{l+1}, \quad 0 < r_{l+1} < r_l, \quad \frac{r_{l-1}}{r_l} = q_l + \frac{r_{l+1}}{r_l}, \quad 0 < \frac{r_{l+1}}{r_l} < 1$$

Este processo continua infinitamente e dentro do retângulo $K(a, b)$ existe: q_0 quadrados $K(b)$, q_1 quadrados $K(r_1)$, q_2 quadrados $K(r_2), \dots$. Após o retângulo ser dividido em $q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{l-1}$ quadrados a região restante $K(q_l, q_{l+1})$ é retangular, repetindo o processo anterior infinitamente para o retângulo $K(q_l, q_{l+1})$ temos dentro de $K(a, b)$ uma infinidade de quadrados para este processo apresentado. \square

Capítulo 3

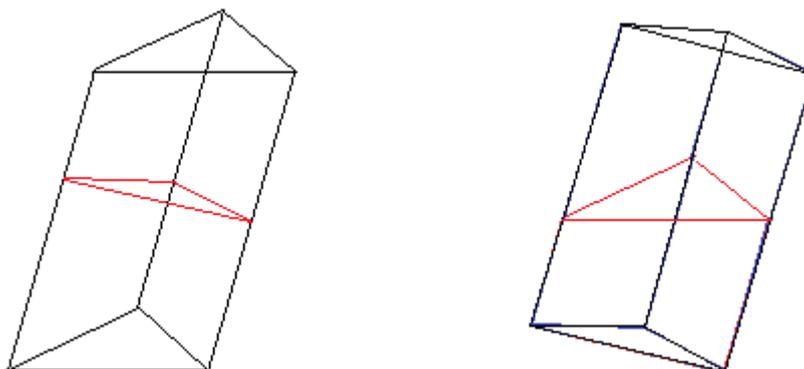
Congruência por corte para poliedros

A congruência por corte para poliedros é semelhante à congruência por corte para polígonos discutida no Capítulo 2.

Se o poliedro K for decomposto em pequenas partes poliédricas K_1, K_2, \dots, K_n , então $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$, do mesmo modo que em polígonos.

Dois poliedros K e H são chamados de congruentes por corte se um for decomposto em um número finito de poliedros menores de tal forma que reorganizando estes poliedros menores possamos formar o outro. Mais precisamente, se $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$ e $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$, onde $K_i \cong H_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, então K e H são congruentes por corte e denotamos por $K \sim H$.

Exemplo: Todo prisma é congruente por corte a um paralelepípedo retângulo. Já demonstramos que todo polígono é congruente por corte com algum retângulo, logo a base poligonal do prisma será congruente por corte com uma base retangular o que nos remete a concluir que todo prisma é congruente por corte a um paralelepípedo retângulo. Caso o prisma seja oblíquo seccionamos ele por um plano ortogonal às arestas laterais dividindo-o em duas partes. Movendo a parte superior de modo a colocar a base superior sobreposta à inferior formamos um novo prisma reto sendo assim congruente por corte a um paralelepípedo retângulo.



Discutindo sobre congruência por corte para poliedros surge à seguinte pergunta: “Sendo dois poliedros de mesmo volume, eles são congruentes por corte?”. O problema acima foi apresentado pelo matemático alemão David Hilbert

em 1900, no Congresso Internacional de Matemática. Hilbert apresentou 23 problemas em aberto onde o terceiro é o problema acima. Ainda em 1900, Max Dehn que era aluno de Hilbert apresentou a resposta negativa para este problema. Dehn provou que um tetraedro regular com volume igual a um cubo não pode ser decomposto em um número finito de poliedros de maneira que a decomposição de um seja reajustada para formar o outro. Esta prova ficou conhecida como Teorema de Dehn.

Teorema 3.1 (Dehn) O tetraedro regular não é congruente por corte a um cubo.

Para demonstrar este teorema precisamos de um resultado sobre funções aditivas. Lembre-se que uma função $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ onde $x, y \in R$ é chamada função aditiva. É fácil provar que se f uma função aditiva, então $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para α um número racional e x um número real.

Teorema 3.2 Para números reais θ_1 e θ_2 diferentes de zero, tais que $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ é um número irracional e números arbitrários a_1 e a_2 então existe uma função aditiva f tal que $f(\theta_1) = a_1$ e $f(\theta_2) = a_2$.

Observe que a função encontrada no teorema acima não é necessariamente linear. Por exemplo sejam $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = \sqrt{2}$. Então existe uma função aditiva tal que $f(1) = 0$ e $f(\sqrt{2}) = 1$. Esta função não é linear, pois supondo $f(x) = ax$:

$$a = f(1) = 0, a\sqrt{2} = f(\sqrt{2}) = 1. \text{ Contradição, pois } 0 = a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.2 Invariantes

Seja X uma aplicação que associa a cada poliedro K um número real denominado por $X(K)$. O número $X(K)$ é chamado de invariante se satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) Se K_1 e K_2 são congruentes por corte, então $X(K_1) = X(K_2)$.
- (2) Se o poliedro K for decomposto em poliedro menores K_1, K_2, \dots, K_n , ou seja, $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$, então $X(K) = X(K_1) + X(K_2) + \dots + X(K_n)$.

Definimos a função volume da forma análoga à função área: satisfazendo as propriedades positividade, invariância e aditividade. A função volume então é um invariante de acordo com a definição acima.

Teorema 3.2.1 *Dados um tetraedro regular K_1 e um paralelepípedo retângulo K_2 existe um invariante X tal que $X(K_1) \neq X(K_2)$.*

O Teorema de Dehn é consequência deste teorema. Se um tetraedro regular K_1 é congruente por corte a um paralelepípedo retângulo K_2 então tomando o invariante do Teorema 3.2.1 existe uma invariante X tal que $X(K_1) = X(K_2)$. No entanto, de acordo com o Teorema 3.2.1 $X(K_1) \neq X(K_2)$. Tendo aqui uma contradição, então o tetraedro regular não é congruente por corte com um paralelepípedo retângulo.

Para construir um invariante para o Teorema 3.2.1 utilizamos a função aditiva do Teorema 3.2.

Antes de determinarmos este invariante vamos determinar invariantes para polígonos. A definição de invariante para polígonos é a mesma definida para poliedros. Podemos calcular estes invariantes da seguinte maneira:

Seja X um invariante de polígonos. Então existe uma função aditiva f tal que $X(K) = f(m(K))$ para todos os polígonos K , sendo m a função área do polígono K .

Isto é, invariantes de polígonos são essencialmente a função área.

Demonstração: Sendo X o invariante. Se K_1 e K_2 são congruentes por corte, então $X(K_1) = X(K_2)$.

Sabemos que K é congruente por corte com um retângulo. Pelo Lema 2.1.5 podemos considerar o retângulo $K(1, a)$ onde $a = m(K)$ e 1 é a largura. Portanto, $X(K) = X(K(1, a))$, $a = m(K)$.

Seja $g(a) := X(K(1, a))$. Então g é uma função aditiva definida somente para $a > 0$. Esta função pode ser estendida a uma função aditiva f definida em \mathbb{R} :

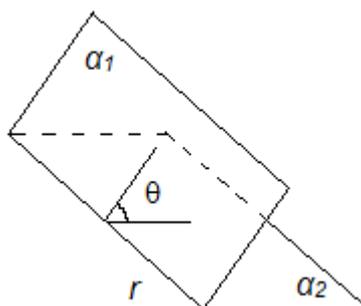
$$f(a) = \begin{cases} g(a) & \text{para } a > 0 \\ -g(a) & \text{para } a < 0 \\ 0 & \text{para } a = 0 \end{cases}$$

Claramente f é uma função aditiva e $X(K) = f(m(K))$. □

3.3 Construção de invariantes para poliedros.

Para construir invariantes para poliedros primeiro vamos definir ângulo diedro.

Definição. Sejam α_1 e α_2 planos e r a reta de interseção de α_1 e α_2 . O ângulo θ construído pela interseção ortogonal de um plano β com a reta r e os planos α_1 e α_2 é chamado ângulo diedro.



Se o ângulo θ for o ângulo diedro então o seu suplemento também é um ângulo diedro. Adotaremos a medida do ângulo diedro em radianos.

Para um poliedro K os ângulos diedros são formados pela interseção de duas faces de K que se interceptam em uma aresta. Na realidade existem dois ângulos diedros formados pela interseção de duas faces e iremos considerar apenas os ângulos diedros que estão internos ao poliedro. Usando os ângulos diedros construiremos um invariante da seguinte maneira:

Considere os ângulos diedros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, medidos em radianos, e a_1, a_2, \dots, a_n os comprimentos das arestas correspondentes a cada ângulo diedro do polígono K . Dada uma função aditiva f , defina

$$X_f(K) := X(K) := a_1 f(\theta_1) + a_2 f(\theta_2) + \dots + a_n f(\theta_n).$$

Por definição se K_1 e K_2 são congruentes, então os comprimentos de suas arestas e ângulos diedros são iguais. Logo, $X_f(K_1) = X_f(K_2)$. Portanto, disto e da aditividade provada, segue que se $K \sim W$ então $X_f(K) = X_f(W)$.

Para a função X_f construída para ser um invariante, as seguintes condições devem ser impostas sobre a função aditiva f .

Teorema 3.3.1 (Hadwiger) *Se uma função aditiva satisfaz $f(\pi) = 0$, então X_f é um invariante, isto é, se $K \sim W$ então $X_f(K) = X_f(W)$, dado um poliedro K e sua decomposição $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$,*

$$X_f(K) = X_f(K_1) + X_f(K_2) + \dots + X_f(K_n),$$

para qualquer função aditiva f tal que $f(\pi) = 0$.

Demonstração: Mostraremos primeiro a propriedade aditiva. Seja $K_0 = K$. Considere todas as arestas das partes K_0, K_1, \dots, K_n . Seja $L_j(i)$, $j = 1, 2, \dots, n_i$ as arestas do poliedro K_i , $i = 1, 2, \dots, n$, onde n_i é o número de arestas de K_i . Em cada segmento pode haver outros vértices do poliedro K_i , ou seja, pontos de interseção entre as arestas de poliedros diferentes de K_i . Decompondo $L_j(i)$ por esses pontos da seguinte maneira:

$$L_j(i) = L_{j1}(i) + L_{j2}(i) + \dots + L_{jn_{ij}}(i).$$

O número n_{ij} é o número de vértices no interior de cada aresta $L_j(i)$. Os pequenos segmentos $L_{jk}(i)$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n_i; k = 1, 2, \dots, n_{ij}$) são chamados cadeias. Escolhendo uma cadeia $L_{jk}(i)$ que seja uma aresta do poliedro K_i de modo que $a_{jk}(i)$ seja o comprimento de $L_{jk}(i)$ e $\theta_{jk}(i)$ o ângulo diedro correspondente à aresta $L_{jk}(i)$ do poliedro K_i , chamamos $a_{jk}(i) \cdot f(\theta_{jk}(i))$ o valor da cadeia $L_{jk}(i)$ em relação ao poliedro K_i . Se $a_j(i)$ e $\theta_j(i)$ são o comprimento da aresta $L_j(i)$ e a medida do ângulo diedro relativa a $L_j(i)$ respectivamente então $a_j(i)$ e $\theta_j(i)$ são expressos por:

$$\theta_j(i) = \theta_{jk}(i), k = 1, 2, \dots, n_{ij},$$

$$a_j(i) = a_{j1}(i) + a_{j2}(i) + \dots + a_{jn_{ij}}(i).$$

Considere todas as cadeias das arestas do poliedro K_i e o valor de cada cadeia. A soma de todos os valores é obviamente igual a $X_f(K_i)$, de fato:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} a_{jk}(i) \cdot f(\theta_{jk}(i)) &= \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} a_{jk}(i) \cdot f(\theta_j(i)) = \\
&= \sum_{j=1}^{n_i} a_j(i) \cdot f(\theta_j(i)) \\
&= X_f(K_i).
\end{aligned}$$

Temos que provar que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} a_{jk}(i) \cdot f(\theta_{jk}(i)) = X(K_0) \quad (3)$$

Após provarmos esta igualdade,

$$\sum_{i=1}^N X_f(K_i) = X(K_0),$$

que completa a prova.

A ideia para a prova é usar a propriedade que $f(\pi) = 0$, isto demonstrará que as cadeias dentro do poliedro não contribuem em nada para os valores.

Vamos nos concentrar em uma cadeia L . Sendo a o comprimento de L .

Na soma (3) vamos considerar os termos que correspondam a L , ou seja, todos os termos (i, j, k) tais que $L = L_{jk}(i)$ ($1 \leq i \leq N$), e denotamos (i_1, j_1, k_1) , (i_2, j_2, k_2) , ..., (i_s, j_s, k_s) para cada (i, j, k) . Aqui a cadeia L está contida em cada aresta dos poliedros $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}$. A soma parcial da série (3) no que diz respeito aos termos descritos acima é dada pela soma abaixo:

$$\begin{aligned}
&a_{j_1 k_1}(i_1) \cdot f(\theta_{j_1 k_1}(i_1)) + a_{j_2 k_2}(i_2) \cdot f(\theta_{j_2 k_2}(i_2)) + \dots + a_{j_s k_s}(i_s) \cdot f(\theta_{j_s k_s}(i_s)) \\
&= a\{f(\theta_{j_1 k_1}(i_1)) + f(\theta_{j_2 k_2}(i_2)) + \dots + f(\theta_{j_s k_s}(i_s))\}.
\end{aligned}$$

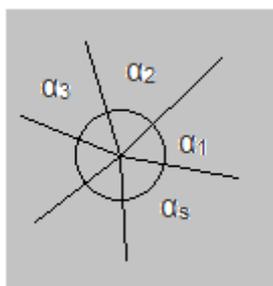
Para simplificar a expressão usaremos a seguinte notação:

$$\theta_{j_1 k_1}(i_1) = \alpha_1, \quad \theta_{j_2 k_2}(i_2) = \alpha_2, \quad \dots, \quad \theta_{j_s k_s}(i_s) = \alpha_s.$$

Para examinar o que aconteceu em torno da cadeia L vamos considerar três casos.

(I) Quando a cadeia L está contida no interior do poliedro K_0 (sem pontos em seus extremos) e, neste caso, iremos considerar duas situações:

(a) A situação em que não existem outros poliedros além de $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$ que contém nas suas arestas a cadeia L (se K_0 é seccionado por um plano ortogonal à cadeia L então a secção resultante do poliedro é descrita na figura abaixo.

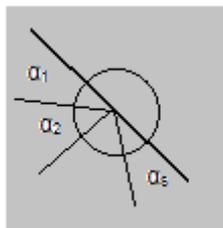


Então $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = 2\pi$. Consequentemente,

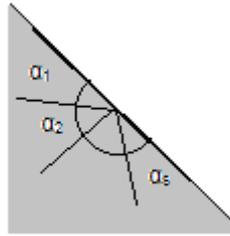
$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = 2f(\pi) = 0.$$

(b) No caso em que existe poliedro diferente de $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$ que contém em uma de suas faces a cadeia L (na realidade, tal poliedro é único) a soma dos ângulos diedros será $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \pi$. Consequentemente,

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\pi) = 0.$$



(II) Quando a cadeia L está contida em uma face do poliedro K_0 mas não em suas extremidades. Este caso é igual a situação (b) do caso (I). Consequentemente, $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\pi) = 0$.



(III) Quando a cadeia L está contida na aresta $L_j(0)$ de K_0 . Então existe um poliedro K tal que $L = L_{jk}(0)$. Portanto, $a = a_{jk}(0)$. Temos aqui duas situações a considerar.

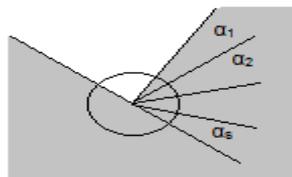
(a) Se, além de K_0 , não existem outros poliedros como $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$ que contém em uma de suas faces a cadeia L (ver figura abaixo).



Então, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \theta_j(0) = \theta_{jk}(0)$. Consequentemente,

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\theta_{jk}(0)).$$

(b) Se, além de K_0 , existem outros poliedros como $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots, K_{i_s}$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq N$ que contém em uma de suas faces a cadeia L (Ver figura abaixo).



Então, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = \theta_j(0) = \theta_{jk}(0)$. Consequentemente,

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_s) = f(\theta_{jk}(0)).$$

Portanto, os termos da soma (3) que surgiram apenas no caso (III), isto é, que são diferentes de zero será $a_{jk}(0) \cdot f(\theta_{jk}(0))$.

Sendo os restantes termos da soma (3) iguais a zero,

$$\sum_{j=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{n_{0j}} a_{jk}(0) \cdot f(\theta_{jk}(0)) = X_f(K_0).$$

Portanto vale a propriedade aditiva da definição de invariante. Agora, observando que por definição, se K_1 e K_2 são congruentes então o comprimento de suas arestas e ângulos diedros são iguais o $X_f(K_1) = X_f(K_2)$. Portanto disto e da aditividade provada, segue que se $K \sim W$ então $X_f(K) = X_f(W)$.

3.4 Prova do Teorema 3.2.1

Como todos os ângulos diedros do tetraedro regular ABCD são iguais, denotando este ângulo diedro por θ , vamos determinar o valor do $\cos \theta$. Para determinar o ângulo θ , traçamos a reta perpendicular à base ABC que contém o vértice D. Seja E o ponto de intersecção desta perpendicular com a base ABC, o ponto E é baricentro do triângulo eqüilátero ABC, o ponto F de intersecção da reta AE com a aresta BC é ponto médio de BC e o segmento DF é mediana do triângulo BCD. O comprimento do segmento EF é 1/3 da mediana AF (AF=DF)(ver figura 3.7).

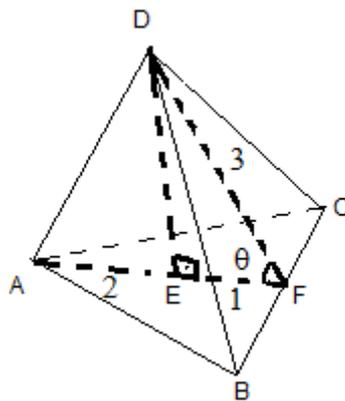


Figura 3.7

Portanto, observando o triângulo DEF, concluímos que $\cos \theta = 1/3$.

Lema 3.4.1 Se n é um número natural, então $\cos(n\theta) = \frac{c}{3^n}$, onde c é um número inteiro não divisível por 3.

A demonstração é feita facilmente por Indução Finita.

Lema 3.4.2 $\frac{\pi}{\theta}$ é um número irracional.

Demonstração: Vamos provar por absurdo. Suponha $\frac{\pi}{\theta}$ um número racional igual a $\frac{m}{n}$. Assumindo que m e n são positivos então $-n\pi + m\theta = 0, m\theta = n\pi$ e $\cos(m\theta) = \cos(n\pi) = \pm 1$. O resultado contraria o lema 3.4.1, portanto a suposição é falsa, logo $\frac{\pi}{\theta}$ é irracional. \square

Finalmente vamos provar o Teorema 3.2.1 (*Teorema de Dehn*). Sendo $\frac{\pi}{\theta}$ um número irracional (Lema 3.4.2), pelo Teorema 3.2 existe a função aditiva f tal que $f(\pi) = 0$ e $f(\theta) = 1$.

Definindo $X_f(K)$ para todo poliedro K como a equação da Seção 3.3, uma vez que a função f satisfaz a propriedade $f(\pi) = 0$ (Teorema 3.3.1) temos que X_f é um invariante do poliedro K .

O valor do invariante para um tetraedro regular K_1 é dado pela equação da Seção 3.3 como abaixo:

$$X_f(K_1) = 6af(\theta) = 6a(1) = 6a \neq 0. \quad (1)$$

Por outro lado, o invariante para o paralelepípedo retângulo K_2 é dado por:

$X_f(K_2) = 4(b + c + d)f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4(b + c + d)\frac{1}{2}f(\pi) = 2(b + c + d)f(\pi) = 0$ (2), onde b , c e d a medida do comprimento, largura e altura de K_2 . Assim, por (1) e (2) temos $X_f(K_1) \neq X_f(K_2)$. \square

Com esta prova Dehn estabeleceu que a condição necessária para que dois poliedros sejam congruentes por corte é:

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ os ângulos diedros dos poliedros K_1 e K_2 respectivamente. Se K_1 e K_2 são congruentes por corte então deve existir uma sequência de números naturais a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n e um número inteiro N tal que $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) - (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \dots + b_n\beta_n) = N\pi$.

A prova original do Teorema de Dehn foi obtida utilizando esta condição.

Em 1965 Sydler provou que dois poliedros são congruentes por corte se possuem o mesmo volume e o mesmo invariante de Dehn. Para obter esta prova Sydler demorou aproximadamente 20 anos.

3.5 Paradoxo de Banach-Tarski

Até o momento discutimos a congruência por corte apenas para polígonos e poliedros. Este problema é estudado para figuras mais gerais, ou seja, sem restrição de decomposições somente em polígonos e poliedros. Um resultado interessante e ao mesmo tempo polêmico é o paradoxo de Banach-Tarski.

O Paradoxo de Banach–Tarski estabelece que é possível dividir uma esfera sólida tridimensional em um número finito de pedaços (em um caso particular Raphael M. Robinson dividiu em exatamente cinco pedaços), e com estes pedaços construir duas esferas, do mesmo volume da original. É considerado um paradoxo por ser um resultado contra-intuitivo, mas não por ser contraditório ou por introduzir contradições.

Trata-se de uma abstração matemática. A demonstração prova a existência teórica de uma forma de repartir a esfera com estas características. Não há uma prova construtivista, isto é, que descreva a maneira pela qual a esfera deve ser repartida. A demonstração faz uso do axioma da escolha.

Banach e Tarski propuseram este paradoxo como uma evidência para se rejeitar o axioma da escolha, mas os matemáticos apenas consideram que o axioma da escolha tem consequências bizarras e contra-intuitivas.

Capítulo 4

Atividades a serem desenvolvidas envolvendo a teoria apresentada nos capítulos anteriores.

Atividade 4.1

Relacionada à congruência por corte entre triângulos e retângulos.

Conteúdos a serem abordados: Condição de existência de um triângulo, ponto médio de um segmento, base média do triângulo, retas perpendiculares, retas paralelas, ângulo reto, altura, áreas, congruência de figuras planas e semelhança de triângulos.

Passos:

1º Construir um triângulo ABC com qualquer medida para seus lados.

2º Determinar os pontos médios H e E de dois dos lados do triângulo.

3º Traçar o segmento EH.

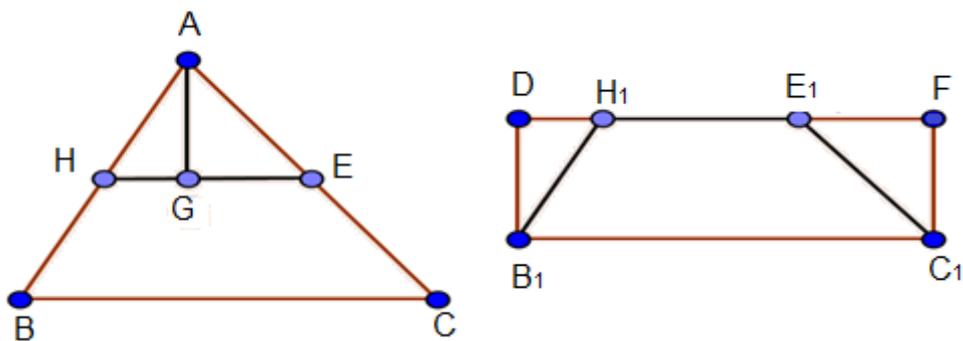
4º Traçar a altura do triângulo ABC de maneira que seja perpendicular a reta EH.

5º Com o compasso comparar a medida da altura do triângulo ABC com a altura do triângulo EHA.

6º Recortar o triângulo de maneira que as peças recombinadas formem um retângulo.

7º Definir a fórmula para a área do triângulo sendo a do retângulo (comprimento)x(largura).

Esboço das figuras



Perguntas referentes a atividade 4.1:

- 1- Os lados AB, AC e BC do triângulo construído poderia ser 4 cm, 5 cm e 10 cm? Justifique sua resposta.
- 2- Qual a relação entre a medida EH e o lado BC? Podemos concluir que EH e BC são retas paralelas?
- 3- Qual a relação entre a altura do triângulo EHA e ABC?
- 4- Por que os triângulos AGH e AGE encaixam perfeitamente para formar o retângulo BCFD?

Atividade 4.2

Relacionada à congruência por corte de retângulos e quadrados.

Conteúdos a serem abordados: Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência, relações métricas do triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, perímetro, radiciação, números racionais e irracionais, proporção, semelhança de triângulos e ângulo inscrito em uma circunferência.

Passos:

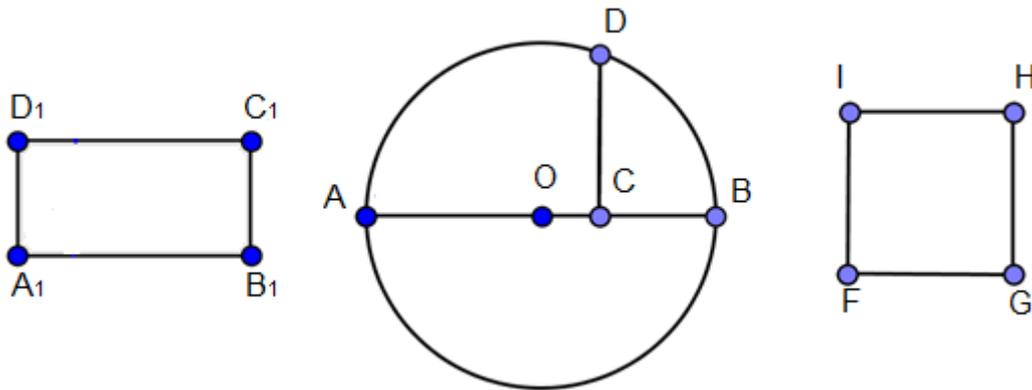
1º Construir um retângulo com comprimento a e largura b de modo que $a \neq b$.

2º Construir uma circunferência com diâmetro igual à metade do perímetro do retângulo.

3º A partir de um dos extremos A de um diâmetro medir sobre ele o comprimento a e marcar o ponto C, traçando pelo ponto C uma reta perpendicular ao diâmetro de modo que intercepte a circunferência no ponto D.

4º Construir um quadrado com lado congruente a DC.

Esboço das figuras



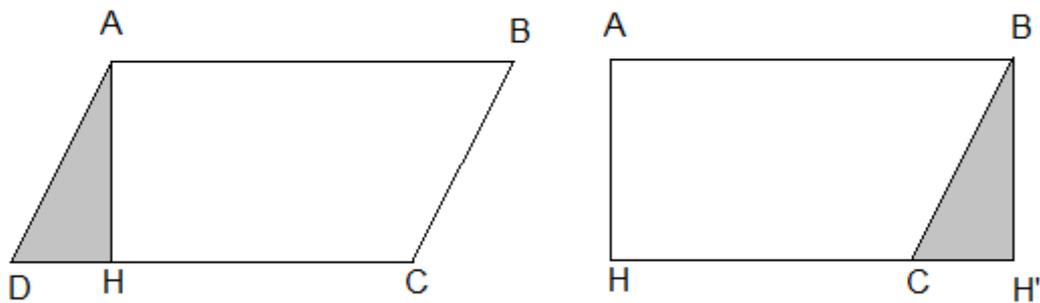
Perguntas referentes a atividade 2:

- 1- Podemos afirmar que o triângulo ABD é retângulo em D? Justifique.
- 2- Calcule a medida do segmento DC em função dos segmentos $AC = a$ e $CB = b$ sendo B o outro extremo do diâmetro. Para demonstrar a semelhança utilize ângulos inscritos em uma circunferência.
- 3- Por semelhança de triângulos que relações existem entre os lados dos triângulos ABD, ACD e BCD?
- 4- A medida do lado do quadrado FGHI é um número racional ou irracional? Justifique.
- 5- O que podemos concluir quanto as áreas do retângulo e do quadrado? Justifique.

Atividade 4.3

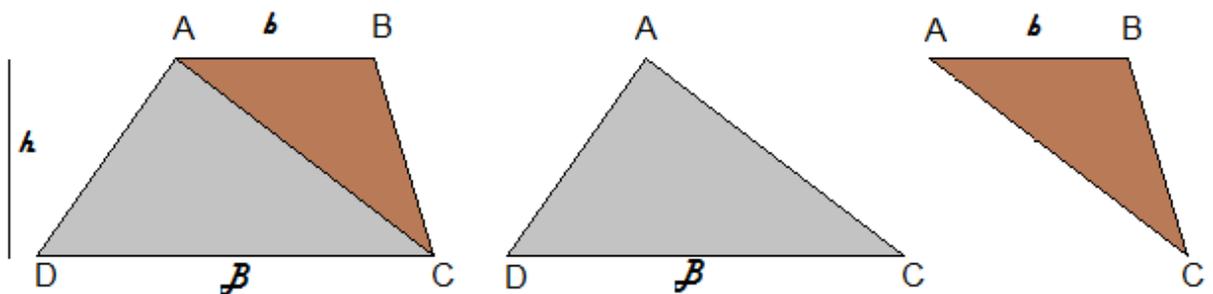
Relacionada ao cálculo da área de algumas figuras planas com base na área do retângulo e triângulo demonstrados no capítulo 1:

- a) Área do paralelogramo:



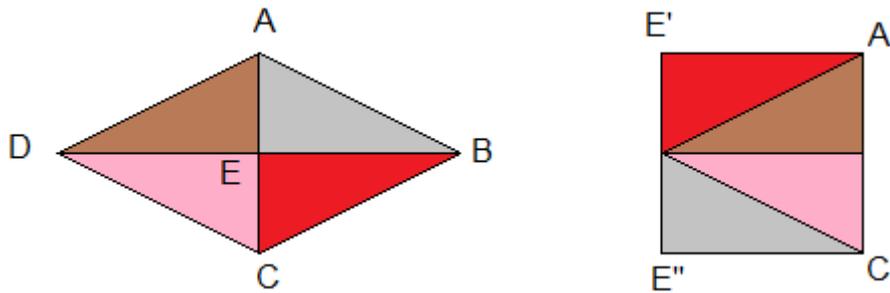
Construindo o paralelogramo ABCD e traçando sua altura AH ele fica dividido em dois polígonos, o triângulo AHD e o trapézio ABCH. Deslocando o triângulo AHD de tal maneira que AD coincida com BC formaremos o retângulo ABH'H cuja área será $med(HH') * med(AH)$ como $med(HH') = med(HC) + med(CH') = med(CH) + med(HD) = med(CD)$ a área do paralelogramo será $med(CD) * med(AH)$, ou seja, *base * altura*.

b) Área do trapézio:



Construindo o trapézio ABCD, em seguida, traçamos sua diagonal AC dividindo-o em dois triângulos: ABC e ACD. A área do trapézio então será igual à soma da área dos dois triângulos, pois a altura de ambas as figuras é igual a h , a medida CD igual a B e a medida AB igual a b . Como a área dos triângulos ABC e ACD são respectivamente igual a $\frac{med(CD)*altura}{2}$ e $\frac{med(AB)*altura}{2}$ a área do trapézio ABCD será $\frac{med(CD)*altura}{2} + \frac{med(AB)*altura}{2} = \frac{med(CD)+med(AB)}{2} * altura$, ou seja: $[(B+b).h]/2$.

c) Área do losango:



Construímos o losango ABCD, em seguida, traçamos suas diagonais dividindo o losango em quatro triângulos retângulos congruentes. Reorganizando os triângulos, formamos o retângulo ACE''E' com largura igual a medida da diagonal AC e comprimento igual a metade da medida da diagonal DB do losango. Logo, considerando as medidas das diagonais do losango $D = med(DB)$ e $d = med(AC)$, sua área será:

$$\frac{med(DB)}{2} * med(AC) = \frac{D*d}{2}.$$

Bibliografia

1. Shiga K., Sunada T., A Mathematical Gift, III, ed. AMS, 1996.
2. Lima E.L, Carvalho P.C.P, Wagner E. e Morgado A.C., A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, Ed. SBM, 9ª edição mar. 2011.
3. Lima E.L, Carvalho P.C.P, Wagner E. e Morgado A.C., A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, Ed. SBM, 9ª edição mar. 2011.
4. Boltianskii V.G., Terceiro problema de Hilbert, traduzido por R. A. Silverman, 1978.
5. Sallum E.M.-UFMS-USP, Decomposição de figuras geométricas, disponível em < <http://www.rpm.org.br/5e/docs/of13.pdf>>.
6. Kagoiki, F. Y., Figuras Equidecomponíveis, TCC Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis 2001.
7. Stewart, I.N., Galois Theory, Ed. Chapman&Hall/CRC Mathematics Series, 3ª edição jul. 2003.
8. Revista Brasileira História da Matemática (RBHM), Vol. 3, nº 5, p. 41 - 59, 2003
9. Sites:
<http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/polequi/retqua.htm>

<www.seabd.bco.ufscar.br/.../index.php>

<http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ26/CabriJava/polequi.htm>