Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Clair Teresinha Birck
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Novembro de 2016

A recíproca do Teorema de Pitágoras

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Clair Teresinha Birck e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 18/11/2016.

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Martinho da Costa Araujo
Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira
Prof. Dr. Rute da Cunha

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

B617r Birck, Clair Teresinha.
A recíproca do Teorema de Pitágoras / Clair Teresinha Birck. -- 2016
xii, 37 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Martinho da Costa Araujo.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Recíproca do Teorema de Pitágoras. 3. Exemplos de aplicação. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em dezoito de novembro de dois mil e dezesseis e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Martinho da Costa Araujo

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira

Prof. Dr. Rute da Cunha

Aos estudiosos da Matemática que anseiam em contribuir para a melhoria da educação, relembro a frase atribuída a Pitágoras: "Não é livre quem não consegue ter domínio sobre si mesmo".

Agradecimentos

Agradeço

pela existência.

pela oportunidade de terminar este estudo.

pela possibilidade de compartilhar ideias.

Muito obrigado a todos que fizeram, fazem e farão parte da minha caminhada.

O processo de explicação do fracasso escolar tem sido uma busca de culpados - ... Os educadores, todos nós, precisamos não encontrar culpados mas encontrar as formas eficientes de ensino e aprendizagem em nossa sociedade.

Schliemann et al. (2003)

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma forma de tratar a recíproca do Teorema de Pitágoras. Faremos uma das muitas provas do teorema, uma prova da sua recíproca em que usamos o teorema e por fim, uma prova da recíproca sem usar o teorema, apenas usando propriedades algébricas e geométricas.

Para haver bom norteamento, inicialmente enfocaremos um pouco da parte histórica da geometria que discutimos com os alunos, geralmente, no oitavo ano do ensino fundamental.

Apresentaremos no segundo capítulo, conceitos básicos de geometria e álgebra para que se tenha uma melhor compreensão do problema proposto. Com isso pretendemos oferecer uma visão mais aprofundada de um material que poderá ser usado por professores do ensino fundamental e que possam influenciar positivamente no aprendizado dos nossos alunos.

Palavras chave: Teorema de Pitágoras, Recíproca do Teorema de Pitágoras, exemplos de aplicação.

Abstract

In this work we present a way of treating the converse of the Pythagoras Theorem. We will make one of the many proofs of the theorem, a proof of its converse in that we use the theorem and, finally, a proof of converse without using the theorem, only using algebraic and geometric properties.

In order, we will initially focus a little on the historical part of geometry we discussed with students, usually in the eighth year of elementary school.

We will present in the second chapter, basic concepts of geometry and algebra to have a better understanding of the proposed problem. With this, we intend to offer a more in-depth view of a material that can be used by elementary school teachers and that can positively influence the learning of our students.

Keywords: Theorem of Pythagoras, Converse of the Pythagoreas Theorem, application examples.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

> *"Does the World realy need another article about phytagorean triples?"*
>
> McCullough (2009)

Com o pensamento voltado ao questionamento de McCullough (2009), iniciou-se a pesquisa de forma a garantir a resposta afirmativa, não somente sobre triplas pitagóricas, mas sobre o assunto Teorema de Pitágoras de forma geral.

Durante anos em exercício na educação básica, observamos que a geometria poucas vezes se torna atraente aos olhares dos alunos. E, muitas vezes, esta falta de atenção especial a um dos conteúdos matemáticos dos mais antigos, é uma característica de formação do próprio profissional que atua com essas turmas, podendo estar relacionado ao contexto em que o mesmo esteve inserido na sua longa caminhada escolar de formação, muito embora o processo de formação seja complexo e diverso.

Motivos não faltam para crer que o tema da pesquisa abordado tem espaço amplo ainda vago para discussões, aquisição de conhecimentos, revelação de pontos obscuros, tudo no intuito de valorizar mais a geometria e a álgebra, aspectos muitas vezes relegados a um plano de pouca abordagem e significação.

Para procurar dar sentido ao trabalho realizado, procuramos enfocar primeiramente a contextualização histórica, tanto do famoso Pitágoras, quanto do seu Teorema e sua recíproca.

Num segundo capítulo, abordamos os conhecimentos básicos de geometria e álgebra, necessários para a boa compreensão e posterior uso do conteúdo aqui trazido.

No terceiro capítulo evidenciamos o Teorema de Pitágoras, uma de suas provas, dentre as mais usadas e enunciamos em seguida, a recíproca desse Teorema e sua prova que faz uso do próprio Teorema. Para finalizar faremos a demonstração da recíproca sem o uso do Teorema, sugerindo-se a possibilidade de ter ocorrido primeiramente a recíproca e com ela ter se chegado ao tão famoso e importante Teorema.

Nas considerações finais procuramos destacar todo o trabalho de pesquisa, dando primordial importância à valorização e difusão dos conhecimentos, com o fito de implementar as atividades desenvolvidas pelos profissionais da educação no ensino de geometria e álgebra.

O estudo teve como base trabalhos de Wagner (2009), que, com muita habilidade aborda a questão do Teorema, enfocando no aspecto inerente às áreas. Bem ainda, teve apoio na produção de Bastian (2000) que fundamenta-se em grande parte nos estudos de Berté (1995), desenvolvidos na França.

Também buscamos apoio na literatura norte americana, com trabalhos de McCullough (2009) e fundamentalmente em Casey (2008) principal fonte da abordagem sobre a prova da recíproca do Teorema de Pitágoras sem uso do Teorema.

Os objetivos que buscamos atingir são o de reconhecer a importância de Pitágoras e seu Teorema, apresentar o Teorema de Pitágoras e uma de suas provas, e enunciar a recíproca do Teorema de Pitágoras e sua respectiva prova sem uso do Teorema.

Capítulo 1

Um breve histórico: Pitágoras e o Teorema.

1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo faremos um breve retrospecto sobre Pitágoras, sua importante contribuição para a Matemática, bem como de outras influências que auxiliaram no uso e divulgação do Teorema de Pitágoras, considerado um dos mais importantes e mais abordados temas em termos de conhecimento nesta área.

A grande maioria dos alunos, ao terminar o ensino médio, quando questionados sobre conhecimentos de matemática adquiridos, menciona o Teorema de Pitágoras. Isto porque a grande maioria dos professores, senão a totalidade, inclui em seus planos de ensino este conteúdo. Todavia, observamos que tal disciplina é enfocada geralmente apenas pela regra trazida e sua aplicação com exercícios em que se apresentam figuras e triângulos nas quais são indicadas as medidas de dois lados e pede-se ao aluno que calcule o valor da medida que falta.

Em várias ocasiões são feitos poucos exercícios mostrando a aplicação desse conteúdo com problemas transcritos de livros que nem sempre condizem com a realidade dos alunos e suas experiências vivencias.

A importância do conhecimento histórico do Teorema de Pitágoras e sua contribuição para a matemática, por muitas vezes relegada a segundo plano, deve ser resgatada e fortalecida para que as gerações vindouras tenham sempre em mente a necessidade de apropriar-se desse conhecimento, do qual a sociedade atual é fruto, enriquecendo sobremaneira o aprendizado, porque possibilita a compreensão de sua relevância em diferentes tempos históricos.

Este motivo nos força a apresentar um breve histórico de Pitágoras, destacando a sua importante influência nos estudos da Matemática.

1.2 Pitágoras e seus estudos

Em conformidade com o site http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html, Pitágoras teria nascido na ilha de Samos, perto de Mileto onde 50 anos antes teria nascido outro matemático importante: Tales.

A mesma fonte informa que naquela época (569 a.C.), as ciências tinham pouco conhecimento padronizado. Sempre instigado pela sua curiosidade, diz-se que Pitágoras fez diversas viagens e conheceu culturas bem ecléticas como egípcias, babilônias e possivelmente indianas.

Quando da sua volta ao mundo grego, teria fundado um grupo de estudos que objetivava ampliar conhecimentos filosóficos e matemáticos. Entretanto, tal conduta não teria sido bem recebida no meio social, por isso o grupo se encontrava secretamente, o que dificulta, entre outros fatores, a falta de mais informações precisas a seu respeito.

Conforme Wagner (2009), levantamentos históricos narram a descoberta da demonstração do famoso teorema, contudo não há registros suficientes para provar se foi mesmo o próprio Pitágoras que efetivou essa descoberta ou não. Ademais, os grupos de estudo - escola da época - eram comunitários e sempre se atribuía ao mestre as grandes descobertas, sendo impossível também saber qual foi a primeira forma utilizada para a demonstração desse teorema.

Nos estudos de Boyer (1974), H.Eves (1995), Singh (1998), entre outros, encontramos relatos de que civilizações antigas faziam uso da relação e até mesmo já a tinham testado para alguns triângulos retângulos. Mas a confirmação da sua validade para todo e qualquer triângulo retângulo só teria ocorrido com a demonstração matemática atribuída a Pitágoras.

Os mesmos autores acima relatam que há provas concretas de que bem antes de Pitágoras, na Babilônia, já se conhecia o teorema. Inscrições em placas de barro, encontradas por pesquisadores contém ternas de números que atendem às características do teorema de Pitágoras.

Uma dessas provas, o tablete chamado de Tábua de Plimton 322, se encontra na Universidade de Columbia, nos Estados Unidos. Nela são encontradas inscrições de números em notação sexagesimal usada na babilônia, conforme figura 1.1.

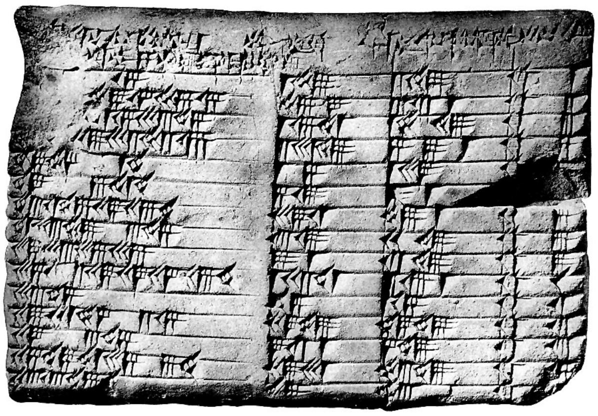

Figura 1.1: Tábua Plimton 322.

Os mesmos estudos demonstram que as inscrições referem-se a números que formam ternas pitagóricas e que esse pedaço de história remonta aos anos de 1800 a 1600 a.C..

Há outras provas encontradas com inscrições que remetem ao conhecimento e uso das ternas pitagóricas tanto em forma de números como em forma de figuras geométricas, que é o caso de um tablete guardado no Museu Britânico em que se encontram inscrições sobre uma forma de encontrar ternas pitagóricas e outro guardado no museu da Universidade Yale, que contém inscrições de quadrados e suas diagonais.

Segundo historiadores, os babilônios conheciam alguma forma de encontrar os números que formam ternas pitagóricas, fundamentados em restos de escritas, dentre os quais, o tablete guardado hoje no Museu Britânico, em que se lê várias frases que levam a conclusão do formato do teorema de Pitágoras.

Na pesquisa de Wagner (2009) não são mencionadaas demonstrações, apenas receitas que davam certo e com elas resolviam inúmeros problemas, mesmo porque certamente não havia interesse em generalizar suas receitas naquela época.

É importante destacar, que mesmo encontrando relatos históricos que antigas civilizações tenham testado esses recursos matemáticos, conforme elencamos anteriormente, os registros comprovam que somente no período atribuído a Pitágoras é que se iniciou o uso de demonstrações válidas.

Capítulo 2

Conceitos básicos

Neste capítulo abordaremos todo o conteúdo necessário para a compreensão do problema e sua solução, que posteriormente desenvolveremos.

Em cada item do conteúdo explicitaremos de forma concisa e objetiva os conceitos de geometria extraídos de Dolce e Pompeo (1993), inerentes e as teorias envolvidas, bem como exemplos de sua aplicação através da descrição e, sempre que possível e/ou necessário, por ilustrações condizentes.

2.1 Reta, semirreta e segmento de reta

Reta é uma das noções primitivas da geometria adotada como conceito sem definição. Entretanto a ideia que fazemos de reta é um conjunto de infinitos pontos Semirreta é uma parte da reta limitada por um ponto. Segmento de reta é uma parte da reta limitada por dois pontos. Dados os pontos A e B sobre uma reta, a distância entre tais pontos é o comprimento do segmento AB e denotado por $\overline{AB}$.

2.2 Ângulo

Dadas duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ no plano, um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das regiões do plano limitadas por estas semirretas.

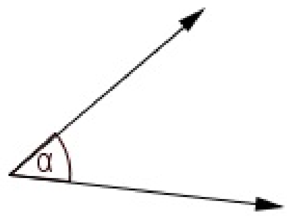

Figura 2.1: Ângulo formado por duas semirretas.

Consideremos duas semirretas de mesma origem, não opostas, contidas num plano π. Elas separam o plano π em duas regiões, uma convexa que denominamos ângulo convexo, outra côncava que denominamos ângulo côncavo.

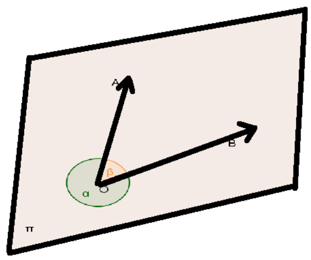

Figura 2.2: Ângulo formado no plano.

Devemos dizer que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo e fazem parte dele. Se houver ambiguidade na identificação do ângulo pela notação tradicional $\angle AOB$, devemos providenciar nomes exclusivos para cada um deles, α e β como na figura, ou especificar de qual dos ângulos estamos falando.

Caso as semirretas sejam opostas, teremos o plano dividido em dois semi planos. Denominamos cada um deles de ângulo raso. Se as semirretas são coincidentes, dizemos que temos um par de ângulos: um ângulo nulo que se reduz a semirreta e um ângulo de uma volta que é o plano todo. Aqui devemos notar a existência dos lados coincidentes. Em todos os casos o ponto O é o vértice do ângulo.

Em seguida atribuímos medida ao ângulo, definindo então o grau sexagesimal, que é a principal unidade de medida de ângulos, resultante da divisão de uma circunferência em 360 partes iguais, a partir do seu centro.

Ângulos convexos apresentam medidas menores do que $180\,^\circ$, ângulos côncavos, medidas maiores do que $180\,^\circ$.

Ao ângulo raso atribuímos $180\,^\circ$, ao ângulo nulo, $0\,^\circ$ e ao ângulo de uma volta, $360\,^\circ$.

2.2.1 Classificação dos ângulos

Dado o ângulo $\angle AOB$, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ oposta à semirreta $\overrightarrow{OA}$ e a semirreta $\overrightarrow{OB}$ determinam um ângulo $\angle BOC$ que se chama ângulo suplementar adjacente ou suplemento adjacente de $\angle AOB$.

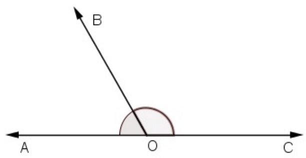

Figura 2.3: Ângulos suplementares $\angle AOB$ e $\angle BOC$.

Ângulo Reto é todo ângulo congruente, ou seja, que tem a mesma medida, a seu suplementar.

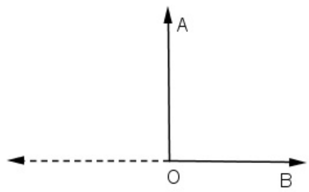

Figura 2.4: Ângulo reto.

Ângulo agudo é um ângulo menor que o ângulo reto.

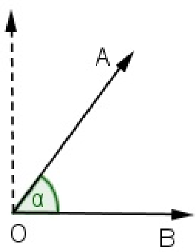

Figura 2.5: Ângulo agudo.

Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

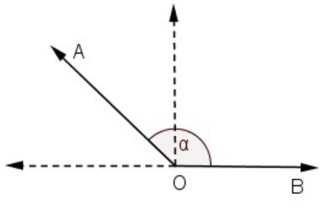

Figura 2.6: Ângulo obtuso.

2.3 Ângulos com relação a um triângulo

2.3.1 Ângulo interno

Ângulo interno é o ângulo localizado no interior do triângulo, formado por dois de seus lados, parte de uma aresta comum a outra dentro dele. Um triângulo, por definição, tem três ângulos internos.

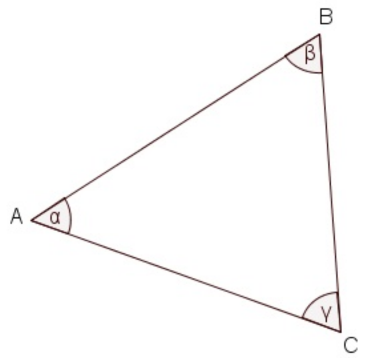

Figura 2.7: Ângulos internos.

2.3.2 Ângulo externo

Um ângulo externo de um triângulo é o ângulo formado pelo prolongamento de um de seus lados e o lado oposto ao lado prolongado.

Por definição temos que $e + \gamma = 180^\circ$, ou seja, um ângulo que é adjacente e suplementar a um dos três ângulos internos de um triângulo.

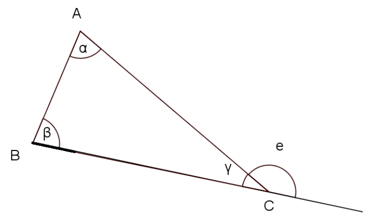

Figura 2.8: Ângulo externo.

2.3.3 Ângulo oposto ao maior lado

Oposto ao maior lado do triângulo sempre estará o maior ângulo e vice-versa.

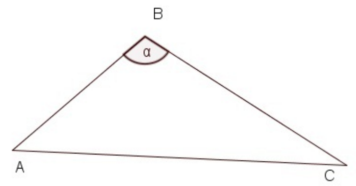

Figura 2.9: Ângulo maior oposto ao maior lado.

2.4 Propriedade de ângulo externo a um triângulo

Em qualquer triângulo, um ângulo externo é sempre maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes.

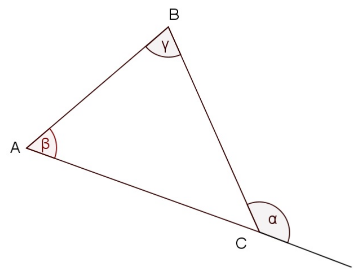

Figura 2.10: Ângulo externo de um triângulo maior que os internos não adjacentes.

Na figura acima observamos que o ângulo α é maior que o ângulo β e que o ângulo α é também maior que o ângulo γ.

$$\alpha > \beta$$

e

$$\alpha > \gamma$$

2.4.1 Ângulo externo de um triângulo e os internos

Em qualquer triângulo, um ângulo externo é igual à soma dos outros dois internos - não adjacentes - e a soma dos três internos é 180°.

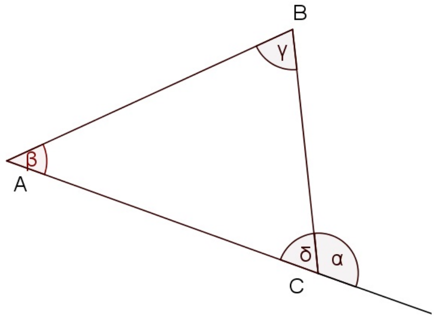

Figura 2.11: Ângulo externo e internos de um triângulo.

De fato, observando a figura 2.11 podemos estabelecer estas relações como

$$\alpha > \beta$$

e,

$$\alpha > \gamma$$

e ainda,

$$\alpha = \beta + \gamma$$

bem como concluímos que

$$\beta + \gamma + \delta = 180\,^\circ$$

2.5 Polígonos

Segundo Lima (2014), chamamos polígono a uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais.

O polígono é chamado convexo quando a região por ele limitada é uma figura plana convexa. Segue-se desta definição que toda diagonal de um polígono convexo está inteiramente contida na região por ele limitada.

2.6 Áreas de triângulo e quadrado

As áreas de figuras planas correspondem à superfície contida no seu interior, tendo seus contornos definidos pelos segmentos.

2.6.1 Triângulos

A área de um triângulo qualquer pode sempre ser calculada com uso a fórmula

$$S = \frac{b.h}{2},$$

onde b é a base e h é a altura (distância da base ao vértice oposto), conforme mostra a figura abaixo.

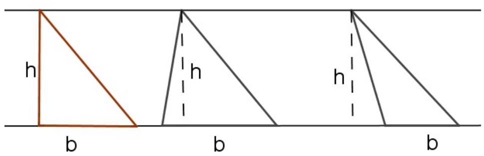

Figura 2.12: Alturas de triângulos.

Entretanto, do desenvolvimento destas fórmulas, utilizando diversas relações geométricas, são estabelecidas outras várias fórmulas para cálculo da área dos triângulos, mas que não serão abordadas neste trabalho.

2.6.2 Quadrados

A área de um quadrado é calculada como o produto do comprimento dos seus lados. Sabendo que quadrados tem lados todos congruentes, obteremos sua área.

$$A = l.l = l^2$$

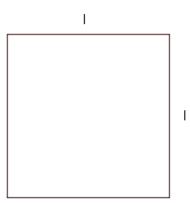

Figura 2.13: Área do quadrado.

2.7 Classificação de triângulos

Os triângulos podem ser classificados de acordo com sua natureza, em relação aos seus lados ou em relação aos seus ângulos.

2.7.1 Quanto aos lados

Podemos classificá-los como segue.

– Equilátero - Se todos os lados forem congruentes.

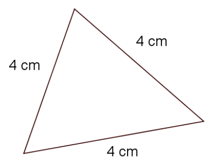

Figura 2.14: Triângulo equilátero.

– Isósceles - Se somente dois de seus lados forem congruentes.

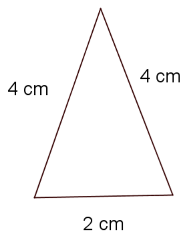

Figura 2.15: Triângulo isósceles.

– Escaleno - Se as três medidas dos lados não forem congruentes.

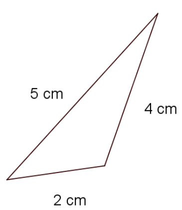

Figura 2.16: Triângulo escaleno.

2.7.2 Quanto aos ângulos

Com relação aos seus ângulos a classificação vem a seguir.

– Acutângulo - ângulos internos menores que 90° (agudos).

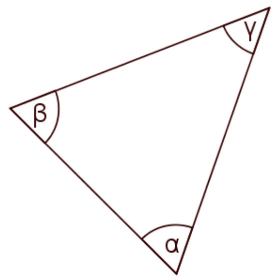

Figura 2.17: Triângulo acutângulo.

$$\alpha < 90^\circ$$

$$\beta < 90^\circ$$

$$\gamma < 90^\circ$$

– Retângulo - um ângulo interno medindo 90°.

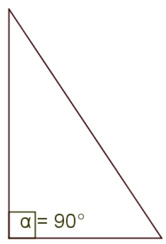

Figura 2.18: Triângulo retângulo.

– Obtusângulo - um ângulo interno maior que 90° (obtuso).

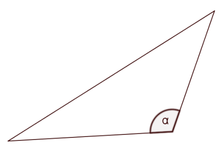

Figura 2.19: Triângulo obtusângulo.

$$\alpha > 90^\circ$$

2.8 Semelhança e congruência de triângulos

Dois polígonos são semelhantes quando for possível estabelecer uma correspondência entre os lados por proporcionalidade e entre os ângulos por congruência.

Como triângulos são polígonos, então podemos dizer que para dois triângulos serem semelhantes deve ser possível estabelecer uma correspondência entre os lados por proporcionalidade e entre os ângulos por congruência.

Existem três casos específicos de semelhança em triângulos, a saber.

1º) AA Dois triângulos quaisquer que tenham dois ângulos correspondentes congruentes são semelhantes. De fato, se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, o terceiro ângulo de ambos também será congruente.

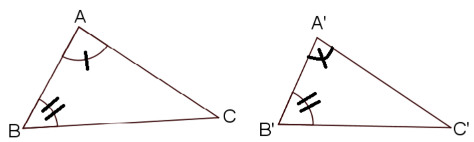

Figura 2.20: Triângulos semelhantes pelo caso AA.

Na figura acima temos que o ângulo $\angle BAC$ é congruente ao ângulo $\angle B'A'C'$ e o ângulo $\angle ABC$ é congruente ao ângulo $\angle A'B'C'$.

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C' \quad e \quad \angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

2º) LLL Dois triângulos quaisquer que tenham lados correspondentes proporcionais são semelhantes.

Na figura podemos relacionar

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

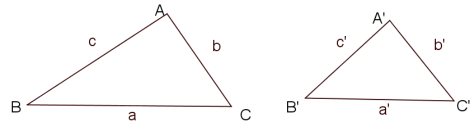

Figura 2.21: Triângulos semelhantes pelo caso LLL.

3º) LAL Dois triângulos quaisquer que tenham dois lados correspondentes respectivamente proporcionais e o ângulo compreendido entre eles congruente, são semelhantes.

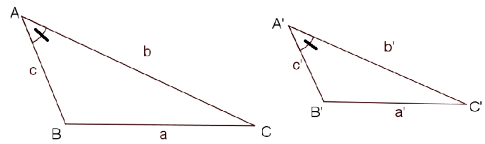

Figura 2.22: Triângulos semelhantes pelo caso LAL.

Na figura acima temos que o ângulo $\angle BAC$ é congruente ao ângulo $\angle B'A'C'$

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

e que

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

sendo assim, os dois triângulos são semelhantes, observando-se lados proporcionais e ângulo entre eles de mesma medida.

2.8.1 Teorema Fundamental da Semelhança - Teorema de Tales

Dado o triângulo ABC e a reta r. Se a reta r intersecta os lados AB e AC, nos pontos D e E desse triângulo, paralelamente ao lado AC, então os triângulos ABC e ADE são semelhantes.

O teorema fundamental da semelhança - TFS - garante que todo segmento de reta paralelo a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.

Então vejamos a figura.

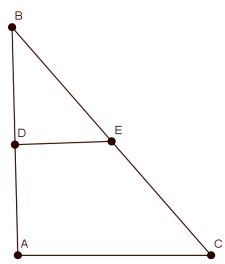

Figura 2.23: Teorema Fundamental de Semelhança.

No triângulo ABC, temos os pontos D e E que definem o segmento de reta DE paralelo a AC, então podemos concluir que os triângulos ABC e DBE são semelhantes, pois é possível demonstrar pelo caso LLL, 1 O ângulo do vértice B é comum aos dois triângulos;

2 Os segmentos BD e BA são proporcionais aos segmentos BE e BC,

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

Exemplo. Na figura, sabendo que o segmento DE é paralelo ao segmento AC, descubra o valor de h.

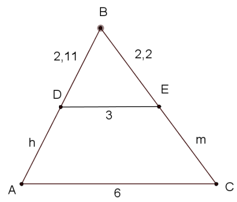

Figura 2.24: Exemplo de uso do Teorema Fundamental de Semelhança.

Como DE é paralelo à AC, pelo TFS podemos escrever

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

Substituindo pelos valores da figura obtemos

$$\frac{2,11}{(2,11+h)} = \frac{2,2}{(2,2+2,19)} = \frac{3}{6}$$

Utilizando

$$\frac{2,11}{(2,11+h)} = \frac{3}{6}$$

Calculamos h

$$2,11.6 = 3.(h+2,11)$$

$$12,66 = 3.h + 6,33$$

$$3h = 12,66 - 6,33$$

$$h = \frac{6,33}{3}$$

$$h = 2,11$$

2.9 Razão e proporção

Tudo o que pode ser medido é considerado um grandeza. Quando comparamos duas grandezas fazendo uma divisão entre elas, estamos estabelecendo a sua razão.

Assim é que se um dos catetos de um triângulo retângulo mede 5 cm e sua hipotenusa mede 12 cm, a razão entre este cateto e a hipotenusa é de

$$\frac{5}{12}$$

ou

$$5 : 12,$$

lê-se cinco para doze.

Na situação acima, o número cinco é chamado de antecedente e o doze de consequente.

De outra forma, quando comparamos duas razões, estabelecemos uma proporção. Portanto, proporção é a comparação entre duas razões em que cada um dos números envolvidos é chamado de termo.

Em se tratando de razões, quando cada um dos termos é multiplicado por um mesmo número obtemos uma proporção.

Analogamente, ao dividirmos dois membros de uma igualdade por um mesmo termo, obtemos também proporção, que, em álgebra trata-se de um recurso comumente utilizado para simplificações e conclusões.

Para as proporções é válida sua propriedade fundamental, a seguir. O produto dos meios é igual ao produto dos extremos, observando-se em

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

que A (antecedente da primeira razão) e D (consequente da segunda razão) são os meios e, B (consequente da primeira razão) e C (antecedente da segunda razão) são os extremos.

A divisão de A por B, e a divisão de C por D dão origem a um mesmo valor k chamado de constante de proporcionalidade.

2.9.1 Razão de semelhança em triângulos

A razão é muito utilizada em cálculos com triângulos. Uma vez estabelecida a semelhança, identificados os pares de lados correspondentes, podemos calcular os valores de alguns dos lados escrevendo a razão entre as medidas de todos os seus lados, como no exemplo mencionado na figura 2.23 acima.

Dados dois triângulos, temos que determinar a correspondência dos vértices de um triângulo com o do outro triângulo, pois assim determinaremos a correspondência dos lados e dos ângulos entre estes dois triângulos.

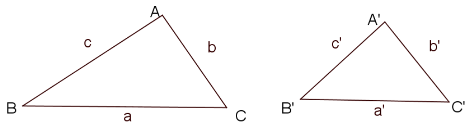

Figura 2.25: Triângulos semelhantes.

Os vértices A, B, C correspondem, respectivamente, aos vértices A', B', C'. Sendo assim, montaremos as razões de proporcionalidade entre os lados correspondentes.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

2.10 Operações algébricas básicas dos números reais

Considere $\Re$ como sendo o conjunto dos números reais com suas operações básicas de adição (+) e multiplicação (.).

Dadas as expressões algébricas $ax + by$ e $a'x + b'y$, onde a, b, a' e $b' \in \Re$ e x e y são variáveis em $\Re$, temos,

(i) $(ax + by) + (a'x + b'y) = (a + a')x + (b + b')y$

(ii) $(ax + by).(a'x + b'y) = (a.a')x^2 + (ab' + a'b)xy + (b.b')y^2$.

Exemplos.

(i) $2x + 5x = 7x$

(ii) $7y + 4y - 12y = -y$

(iii) $3x.7x = 21x^2$

(iv) $(x^2)^4 = x^2.x^2.x^2.x^2 = x^8$

2.10.1 Produtos Notáveis

Definem-se algumas operações algébricas com maior ênfase e por ese motivo são chamadas de produtos notáveis.

2.10.1.1 Quadrado da soma

Tomando-se dois números a e b, sua soma elevada ao quadrado resultará em

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$$

$$(a+b).(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b$$

Somando-se os termos semelhantes, obteremos

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo somado, ao quadrado do segundo termo.

2.10.1.2 Quadrado da diferença

Tomando-se dois números a e b em que multiplicamos a soma entre eles pela sua diferença resultará em

$$(a-b)^2 = (a-b).(a-b)$$

$$(a-b).(a-b) = a.a - a.b - b.a + b.b$$

Somando-se os termos semelhantes, obteremos

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, somado ao quadrado do segundo termo.

2.10.1.3 Produto da soma pela diferença

Tomando-se dois números a e b, sua soma elevada ao quadrado resultará em

$$(a - b).(a + b) = a.a - a.b + b.a + b.b$$

Somando-se os termos semelhantes, obteremos

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

O produto da soma de dois números pela diferença entre eles é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Há ainda outros produtos denominados de notáveis, mas apenas os três primeiros já bastam ao nosso estudo.

As definições e exemplos apresentados servirão de base para a realização dos cálculos que serão utilizados no próximo capítulo.

Capítulo 3

O Teorema, sua recíproca e as provas

A questão proposta para ser apresentada neste trabalho é a de que podemos fazer a prova da recíproca do Teorema de Pitágoras sem qualquer uso ou menção ao mesmo, passando a recíproca a ser uma forma de se provar o Teorema de Pitágoras.

Assim passaremos a expor uma abordagem desse importante conteúdo da matemática que encontra-se ausente da maioria dos livros didáticos brasileiros do ensino fundamental e médio.

3.1 O Teorema de Pitágoras

Em quase todos os livros didáticos do ensino fundamental e médio encontramos o Teorema de Pitágoras enunciado da seguinte forma,

Teorema. *Se ABC é um triângulo retângulo, com lados de comprimentos a, b, c, e sendo c a hipotenusa, então $a^2 + b^2 = c^2$.*

Há várias literaturas que apresentam mais de 200 provas do Teorema de Pitágoras, mas vamos optar pela seguinte.

Prova. *Traçando um quadrado em que cada um de seus lados são divididos em duas medidas a e b, obtemos a figura:*

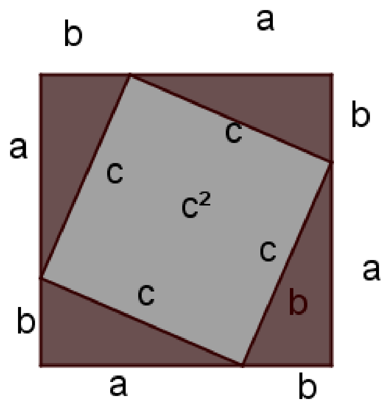

Figura 3.1: Prova do Teorema de Pitágoras.

Consideremos os seguintes fatos.

(i) *A área do maior quadrado é* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) *A área de qualquer triângulo na figura é* $\dfrac{ab}{2}$*. Temos quatro triângulos retângulos onde a soma de suas áreas é* $4.\dfrac{ab}{2} = 2ab$

(iii) *A área do quadrilátero central é dada por* $a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$

(iv) *Precisamos mostrar que o quadrilátero central é um quadrado. Sabemos que os seus lados tem comprimento* c*, logo precisamos mostrar que os ângulos são retos. A soma dos ângulos internos de cada triângulo é* $180\,^{\circ}$*. A soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é* $90\,^{\circ}$*. Portanto cada ângulo do quadrilátero mede* $90\,^{\circ}$*, e assim temos que o quadrilátero é um quadrado. Portanto sua área é então* $a^2 + b^2 = c^2$*.*

Dentre tantas demonstrações já publicadas de que se tem notícias, escolhemos a apresentada acima, na tentativa de exemplificar a validade deste teorema, que é considerado um dos principais e mais estudados assuntos matemáticos de todos os tempos, através da geometria e álgebra. Observemos os exemplos.

Exemplo. *Uma rodovia cruza uma hidrovia perpendicularmente por meio de uma ponte. Ambas podem ser consideradas retilíneas. No mesmo instante em que um carro cruza a ponte, a uma velocidade constante de* $100km/h$*, uma barcaça passa sob a ponte a* $60Km/h$ *e prossegue a viagem a essa velocidade. Após* 15 *minutos, qual será a distância aproximada entre o automóvel e a barcaça, supondo que ambas estejam no mesmo plano horizontal?*

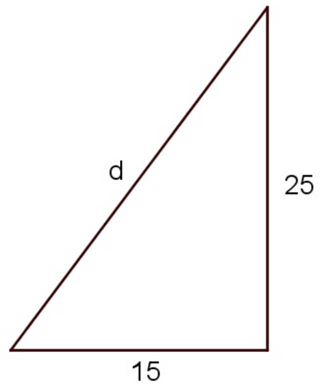

Figura 3.2: Cruzamento na ponte.

Em princípio, com a velocidade de $100Km/h$*, conseguimos calcular, usando regra de proporcionalidade, que,*

$$100km/h = 100km \quad emcada60minutos$$

Assim,

$$\frac{100}{60} = \frac{?}{15}$$

Obtendo que nesse período de tempo, o carro percorreu $25km$*. E, da mesma forma, a barcaça terá percorrido* $15km$*.*

Assim, utilizando a definição do Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 25^2 + 15^2$$

$$d^2 = 625 + 225$$

$$d^2 = 900$$

$$d = 30km$$

Exemplo. *Um bambu é quebrado pelo vento a* $4,8m$ *de altura. Ele tomba de modo que sua ponta toca o chão a* $3,6m$ *de sua base. Vamos determinar a altura desse bambu.*

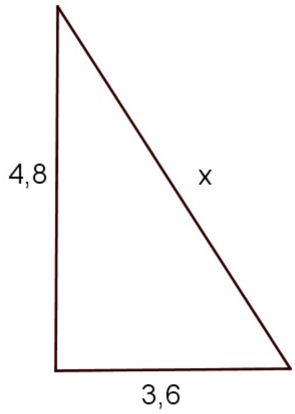

Figura 3.3: Bambu quebrado.

Aplicando o Teorema de Pitágoras às medidas apresentadas:

$$x^2 = 4,8^2 + 3,6^2$$

$$x^2 = 23,04 + 12,96$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6m$$

Como a medida do bambu é a soma do valor de x *com* $4,8$*, temos que a medida do bambu é de* $4,8m + 6m = 10,8m$.

3.2 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Durante a pesquisa fizemos a observação de vários livros didáticos de diferentes autores e identificamos que pouquíssimos livros abordam a recíproca do Teorema de Pitágoras cujo enunciado pode ser escrito, como abaixo.

Teorema. *Sejam* a*,* b *e* c *os comprimentos dos lados de um triângulo* ABC *que satisfazem a equação* $c^2 = b^2 + a^2$*, então o triângulo é retângulo em* C*.*

Geralmente a prova dessa recíproca é feita assumindo o próprio Teorema de

Pitágoras como a seguir.

Prova. *Dado o triângulo ABC cujo comprimento dos lados são a, b e c, tal que*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

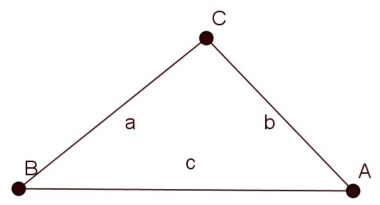

Figura 3.4: Triângulo ABC.

Construa o Triângulo XYZ tal que $x = a$, $y = b$ e o ângulo $\angle XZY = 90°$,

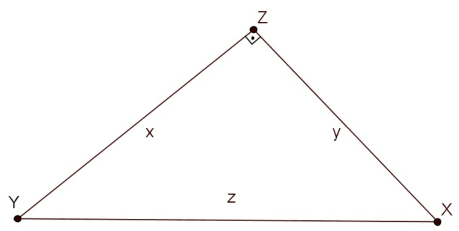

Figura 3.5: Triângulo XYZ.

Pelo Teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

Logo,

$$z = c$$

Portanto o triângulo ABC e o triângulo XYZ são congruentes (LLL), ou seja,

$$\angle ACB = \angle XZY = 90°$$

Mostraremos a seguir que é possível provar a recíproca do Teorema de Pitágoras sem ter como hipótese o próprio Teorema de Pitágoras.

Tomemos um triângulo ABC em que o comprimento de seus lados a, b e c satisfaçam a condição

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Queremos provar que, então, o ângulo $\angle ACB$ é um ângulo reto.

Marque-se um ponto X sobre o segmento $\overline{AB}$ de forma que $\angle CXA = \angle ACB$. Usando contradição, inicialmente será provado que tal ponto X certamente é interno a AB.

Suponhamos que X esteja à direita do segmento $\overline{AB}$, portanto externo ao triângulo à direita.

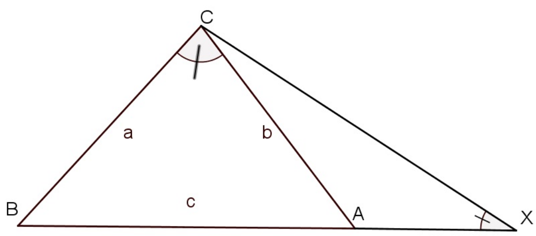

Figura 3.6: Triângulo ABC com X à direita de A.

Se é verdade que $a^2 + b^2 = c^2$, então C é o maior ângulo desse triângulo uma vez que ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Assim,

$$\angle ACB \qquad \textbf{é maior do que } \angle CAB$$

O ângulo $\angle CAB$ é externo ao triângulo CAX e, portanto,

$$\angle CAB \qquad \textbf{é maior do que } \angle CXA,$$

Por transitividade,

$$\angle ACB \qquad \textbf{é maior do que } \angle CXA$$

O que é uma contradição, tendo em vista que $\angle CXA = \angle ACB$ foi assumido inicialmente como verdadeiro.

Desta forma fica provado que A não pode estar entre B e X. Analogamente provamos que B não pode estar entre A e X.

Desta forma, fica provado que A não pode estar entre X e B. E que B não pode ficar entre X e A.

Concluindo-se, assim, que a única forma de se atender ao proposto, é fazer a construção com X entre A e B, como ilustra a figura.

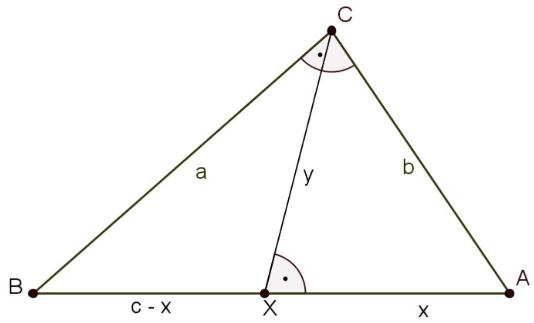

Figura 3.7: Triângulo ABC, com X entre A e B.

O triângulo ACB é semelhante ao triângulo AXC pois, por definição $\angle ACB = \angle CXA$ e $\angle XAC$ é comum a $\angle CAB$ por conseguinte, $\angle ABC = \angle ACX$.

A partir daí, podemos estabelecer as relações

$$\frac{XA}{CA} = \frac{CX}{BC} = \frac{CA}{BA}$$

Com as medidas sugeridas podemos escrever

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{a} = \frac{b}{c} \tag{3.1}$$

Comparando $\frac{x}{b}$ com $\frac{b}{c}$, obtemos

$$b^2 = cx$$

Como $b^2 = c^2 - a^2$, encontramos

$$c^2 - a^2 = cx$$

e

$$c^2 - cx = a^2$$

Dividindo ambos os termos por ac

$$\frac{c^2 - cx}{ac} = \frac{a^2}{ac}$$

Obtém-se

$$\frac{c-x}{a} = \frac{a}{c} \tag{3.2}$$

Também, partindo de (3.1), usando as regras de proporcionalidade, temos

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{c} \tag{3.3}$$

Comparando-se (3.2) e (3.3) verifica-se

$$\frac{c-x}{a} = \frac{a}{c} = \frac{y}{b}$$

O que, tomando como base a figura 3.8, nos fornece as seguintes proporções de seus segmentos.

$$\frac{XB}{CB} = \frac{CB}{AB} = \frac{CX}{CA}$$

Assim, provamos que o triângulo BXC é semelhante ao triângulo ABC, e concluimos que

$$\angle BXC = \angle ACB = \angle CXA$$

Entretanto, sabe-se que

$$\angle BXC + \angle CXA = 180^\circ$$

Então,

$$\angle BCA = \angle BXC = \angle CXA = 90^\circ$$

Provando, assim que o triângulo BCA é retângulo em C, com hipotenusa c, como se pretendia.

Corolário. *A recíproca do teorema implica no Teorema de Pitágoras.*

Prova. *Iniciamos supondo que as medidas a, b e c de um triângulo que satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$ impliquem em C ser um ângulo reto.*

Dado um triângulo denominado XYZ em que o ângulo $XZY = 90^\circ$, quer-se provar que $x^2 + y^2 = z^2$.

Construa-se o triângulo ABC com $a = x$, $b = y$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ conforme descrito no capítulo 2 deste trabalho.

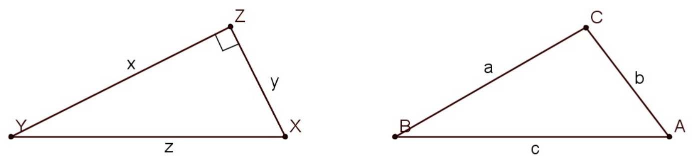

Figura 3.8: Triângulo XYZ e triângulo ABC.

Desta forma, construindo $c^2 = a^2 + b^2$, *o ângulo* $< ACN = 90°$ *e os triângulos* XYZ *e* ABC *são congruentes pelo caso* LAL *e*

$$z^2 = c^2 = a^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

Como queríamos provar.

3.3 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de aplicação do Teorema de Pitágoras e sua recíproca.

Exemplo. *A diagonal de um quadrado mede* $32m$*. qual é a área desse quadrado?*

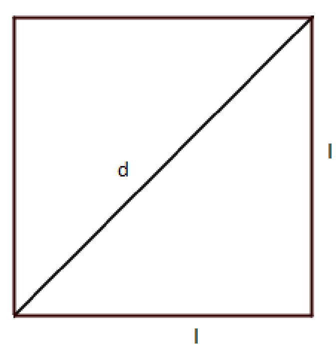

Figura 3.9: Quadrado e sua diagonal.

Sabemos que um quadrado tem medidas dos lados iguais. Ao observarmos a figura 3.11*, vemos que dois dos lados do quadrado e sua diagonal formam um triângulo sabidamente retângulo, posto que os ângulos internos de um quadrado são de* $90°$*.*

Como queremos saber a área do quadrado calculada pelo produto de seus lados

$A = l.l = l^2$, *aplicando o teorema de Pitágoras, teremos*

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$32^2 = 2.l^2$$

$$\frac{32^2}{2} = l^2$$

$$\frac{(2^5)^2}{2} = l^2$$

$$\frac{2^{10}}{2} = l^2$$

$$2^9 = l^2$$

Como l^2 *é o valor da área procurada, temos que essa medida é resultante de* $2^9 = 512m^2$

Exemplo. *O comprimento dos lados de um triângulo retângulo são inteiros e consecutivos. Quais são esses inteiros?*

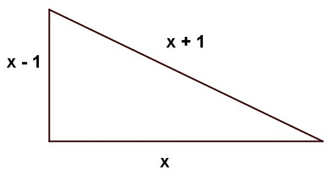

Figura 3.10: Triângulo com medidas dos lados números consecutivos.

Supondo que os lados desse triângulo tenham valores $x-1$, x *e* $x+1$, *como ilustra a figura* 3.11, *calcularemos, usando o Teorema de Pitágoras, o valor de* x, *sabendo que ele é inteiro.*

Então,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2$$

Utilizando as regras de produtos notáveis, obtemos.

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - x^2 - x^2 + 2x + 2x + 1 - 1 = 0$$

$$-x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x.(x-4) = 0$$

O que nos leva a definir que

$$x = 0$$

$$ou$$

$$x = 4$$

Como se tratam de medidas de um triângulo, 0 *não é uma solução possível, restringindo a solução de* x *a* 4 *e, portanto,*

$$x = 4$$

$$x + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$x - 1 = 4 - 1 = 3$$

O que nos dá como medida dos lados de um triângulo cujos valores são inteiros e consecutivos como sendo 3*,* 4 *e* 5*.*

Exemplo. *Usar a recíproca do teorema de Pitágoras para determinar se cada um dos triângulos a seguir é retângulo.*

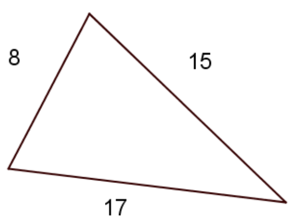

Figura 3.11: Exemplo de Triângulo 1.

Queremos saber se as medidas 8*,* 15 *e* 17 *satisfazem a condição* $a^2+b^2 = c^2$*, onde* $a = 8$*,* $b = 15$ *e* $c = 17$*.*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$8^2 + 15^2 = 17^2?$$

$$64 + 225 = 289?$$

$$289 = 289$$

Portanto, esse triângulo é retângulo, com hipotenusa 17.

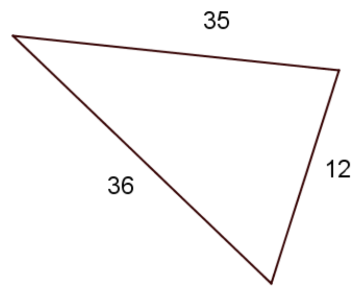

Figura 3.12: Exemplo de Triângulo 2

Igualmente, queremos saber se as medidas 12*,* 35 *e* 36 *satisfazem a condição* $a^2 + b^2 = c^2$*, onde* $a = 12$*,* $b = 35$ *e* $c = 36$*.*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$12^2 + 35^2 = 36^2?$$

$$144 + 1225 = 1296?$$

$$1439 \neq 1296$$

Portanto, esse triângulo não é retângulo.

Exemplo. *Um triângulo cujos lados medem* $9m$*,* $12m$ *e* $18m$ *é um triângulo retângulo.*

Queremos saber se as medidas $9m$*,* $12m$ *e* $18m$ *satisfazem a condição* $a^2+b^2 = c^2$*, onde* $a = 9$*,* $b = 12$ *e* $c = 18$*.*

Inicialmente construiremos um esboço da figura.

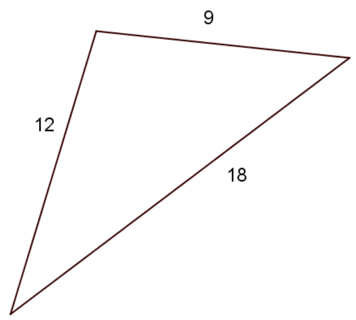

Figura 3.13: Esboço do triângulo

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$9^2 + 12^2 = 18^2?$$

$$81 + 144 = 324?$$

$$225 \neq 289$$

Portanto, esse triângulo não é retângulo.

Considerações finais

Durante este estudo, observamos que de fato é extremamente importante fazermos alguns direcionamentos em sala de aula sobre o assunto Teorema de Pitágoras, para buscar melhorar a compreensão dos alunos com relação a este tópico.

Há uma necessidade de se instigar o aluno a pensar mais e ajudá-lo a empoderar-se desses conhecimentos, de forma que ele não somente decore regras e aplique fórmulas, mas que construa conceitos e argumentos, para desenvolver competências sobre a recíproca do Teorema de Pitágoras, assim como todas as fórmulas do ensino da matemática. Neste sentido,

O desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e a familiarização com sentenças lógicas, com os quantificadores lógicos, são importantíssimos para a vida social e intelectual, tendo aplicações em toda ação. Todos os alunos precisam, para isto, extensas experiências ouvindo, falando, escrevendo, lendo, refletindo, conjecturando, justificando, demonstrando idéias geométricas.

(Maranhão, 1991)

Desta forma, atingindo um objetivo particular de buscar formas de real intervenção na atuação do profissional da educação de matemática, conseguimos vislumbrar uma fonte clara de interferência significativa e positiva, com a possibilidade de construir caminhos de compreensão e, de certa forma aperfeiçoar os recursos a serem empregados como o objetivo de ressignificar a prática de sala de aula no ensino da matemática.

Estudar o Teorema de Pitágoras é uma abordagem que dificilmente é deixada de lado nas ações de sala de aula dos professores de matemática. Contudo, elaborar uma releitura, verificando a reciprocidade desse teorema, sua demonstração e possibilidade de aplicações são raras vezes utilizadas. Porque além de não estar contemplado nos livros, uma parcela mínima de profissionais busca suporte extra curricular para efetivar na prática de sala de aula.

Por outro lado, sua importância é fundamental, tanto que, como dito de início, são raros os ex-alunos que ao serem questionados sobre estudos de matemática não citem como exemplo o teorema de Pitágoras.

Referências Bibliográficas

Bastian, I. V. (2000). O teorema de pitágoras. *São Paulo: PUCSP*.

Berté, A. (1995). Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15:83–130.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Edgard Blücker, S. PaOIulo.

Casey, S. (2008). 92.47 the converse of the theorem of pythagoras. *The Mathematical Gazette*, 92(524).

Dolce, O. e Pompeo, J. N. (1993). Fundamentos de matemática elementar. *São Paulo: Atual*, 9:7.

H.Eves (1995). *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas.

Lima, E. L. (2014). Qual é mesmo a definicão de polígono convexo? Disponível em `http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2014/11/elon1` Acesso em: 16/06/2016.

Maranhão, M. C. S. A. (1991). Coleção magistério, 2º grau, série formação geral: Matemática.

McCullough, D. (2009). The height and the excess of pythagorean triples. *Mathematics Magazine*, 78:26–44.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., e Carraher, T. N. (2003). *Na vida dez, na escola zero*. Cortez, S. Paulo.

Singh, S. (1998). *Oúltimo teorema de Fermat*. Record, Rio de Janeiro.

Wagner, E. (2009). Teorema de pitágoras e áreas. *Programa de Iniciação Cientifica da*.