Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Aplicações do conceito de simetria na Matemática

Júlio Cesar Campanholo

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

dezembro de 2016

Aplicações do conceito de simetria na Matemática

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Júlio Cesar Campanholo e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 1 de fevereiro de 2017.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

C186a Campanholo, Júlio Cesar.
Aplicações do conceito de simetria na Matemática / Júlio Cesar Campanholo. -- 2016
x, 43 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Simetrias. 2. Transformações geométricas. 3. Resolução de problemas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de dezembro de 2016 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza

Prof. Dr. Edgar Nascimento

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi

À minha esposa, que amo, pela parceria, incentivo, apoio e cooperação nessa árdua jornada; a meu filho, melhor de todos os presentes que Deus me conferiu e ao melhor de todos os amigos, meu pai (in memoriam), que nunca mediu esforços para fazer de mim uma pessoa melhor.

Agradecimentos

A Deus pela sua presença, dando-me as ferramentas necessárias para enfrentar todos os obstáculos que surgem em minha vida.

À minha esposa que abraçou a minha causa, e permitiu-me abrir mão, algumas vezes, de minhas responsabilidades de pai e marido para que pudesse dedicar-me inteiramente ao mestrado.

À minha família que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis. Em especial, à minha mãe que se manteve permanentemente em vigília nas suas orações, para que eu pudesse suportar todas as adversidades que aparecessem, e a minha irmã Leila Mara que, acompanhou-me, muito de perto, durante o meu estudo, desejando-me sorte a cada exame realizado, ouvindo-me e aconselhando-me nos momentos mais delicados.

Aos colegas de curso que sempre se pautaram no espírito coletivo visando, principalmente, ao sucesso de todos.

A todos os professores do PROFMAT pela retidão e dedicação, sempre dispensadas a nós, discentes.

Ao meu orientador, professor Doutor Aldi Nestor de Souza que, a meu ver, preenche todos os atributos necessários para um grande educador: generosidade, humildade e sabedoria.

A educação tem raízes amargas,
mas os seus frutos são doces.

Aristóteles

Resumo

Apresentaremos, neste trabalho, proposta de resolução de problemas matemáticos, utilizando simetria. Trabalharemos, inicialmente, com os conceitos relativos ao tópico citado, acompanhados de atividades que abrangem alguns conteúdos do Ensino Fundamental e Médio e apresentam a simetria em seus resultados. Destacaremos, ainda, duas sequências de atividades: a primeira, com jogos em que o conhecimento de simetria pode determinar o vencedor e, a segunda, com atividades lúdicas e presentes em nosso cotidiano. Por fim, abordaremos a incidência de questões de simetria no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM - e nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP.

Palavras chave: Simetria. Transformações geométricas. Resolução de problemas.

Abstract

This paper presents a proposal for solving mathematical problems using symmetry. We will work initially with concepts related to the topic aforementioned, followed by activities that include some content of the Elementary School and High School and show the symmetry in its results. We will also highlight two sequences of activities: the first one with games in which having knowledge about symmetry may determine the winner, and the second one, with games and playful activities present in our daily lives. Finally, we will discuss the incidence of symmetry questions at the National Secondary Education Examination (ENEM) and at the Brazilian Public School Math Olympics - OBMEP.

Keywords: Symmetry. Geometric transformations. Problem-solving.

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Introdução **1**

1 Transformações Geométricas **3**

1.1 Transformações Geométricas no Plano 4

1.1.1 Definição 4

1.2 Homotetia 5

1.2.1 Definição 5

1.3 Isometria 7

1.3.1 Definição 7

1.3.2 Rotação do ângulo θ em torno da origem 8

1.3.3 Translação em $\mathbb{R}^2$ 11

1.3.4 Reflexão em $\mathbb{R}^2$ relativa a uma reta dada 14

2 Simetria no plano **19**

2.1 Definição 19

2.2 Eixo de simetria 19

2.2.1 Definição 19

2.3 Simetria de polígonos 19

3 Jogos de Recreação e Simetria **22**

3.1 Sugestões de atividades 28

4 Simetria no ENEM e OBMEP **37**

Considerações finais **40**

Referências Bibliográficas **42**

Introdução

Há quase três décadas atuando como professor de Matemática no Ensino Básico, presenciamos, principalmente na década de 1990, conteúdos matemáticos trabalhados de forma estanque, com prevalência à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos. Nos livros didáticos, os tópicos de Geometria constavam apenas, nos últimos capítulos, e, na maioria das vezes, eram trabalhados parcialmente pelos docentes da disciplina. Por conseguinte, a maioria dos alunos, notadamente, os de escolas públicas, tiveram pouco ou nenhum contato com conceitos básicos de Geometria. Conforme consta nos Parâmetros Nacionais Curriculares - PCN:

> *Nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna. (...) O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de matemática. No entanto, essas reformas deixaram de considerar um ponto básico que viria tornar-se seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental. O ensino passou a ter preocupações excessivas com formulações, distançiando-se das questões práticas. (BRASIL, 1998, P. 19)*

A partir de 1997, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e com os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN) que subsidiam as escolas em seus programas curriculares, professores de todo País, insatisfeitos com o desempenho dos discentes, passam a reavaliar a educação matemática aplicada nas escolas e, de forma gradual, reconhecem na Geometria seu protagonismo. Diante disso, muitos autores de livros didáticos reformulam suas obras e apresentam, em suas coleções, Álgebra, Aritmética e Geometria, conteúdos coexistentes.

> *O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contrubui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 19)*

No entanto, essas novas orientações curriculares não foram suficientes para mudar o estado de ânimo dos alunos frente a disciplina. Como é sabido, temos, hoje, discentes desinteressados e com muitas dificuldades na matéria. Um dos motivos para essa apatia pode se dar à falta de contextualização dos conteúdos apresentados nos livros didáticos e que são levados, muitas vezes, à risca pelos professores.

Diante do exposto, apresentaremos a professores e alunos a relevância da utilização dos conceitos de Simetria na resolução de problemas, por ela integrar diversos conteúdos matemáticos, deixando-os menos abstratos, mais lúdicos e, consequentemente, mais suscetíveis a uma boa aprendizagem. E, ainda, pela história que a acompanha desde os primórdios da humanidade; sua presença na natureza; nos artesanatos; nas obras de arte; na arquitetura e no cotidiano dos discentes e docentes.

O presente trabalho está assim distribuido: nos capítulos 1 e 2 tratamos da definição de transformações geométricas no plano, de homotetia, de isometria e de simetria; no capítulo 3, por meio de uma série de exemplos e atividades, aplicamos o conceito de simetria em problemas do cotidiano. Finalizamos o trabalho no capítulo 4, citando a frequência com que esse conceito aparece nos exames nacionais: ENEM e OBMEP.

Capítulo 1

Transformações Geométricas

Quando, professores de Matemática de escola básica, elencam as transformações geométricas em seus planos de ensino, referem-se a elas, na maioria das vezes, como congruências e semelhanças de figuras planas, em especial, nos triângulos, destacando a congruência dos ângulos e a proporcionalidade dos lados de figuras, trabalhados apenas no ensino fundamental.

No entanto, as transformações geométricas, pela sua relevância histórica na Matemática e em outros campos da natureza, podem se tornar ao professor um campo valioso de conexões com outros ramos da disciplina e do conhecimento, como ferramenta para resolver problemas e fazer demonstrações.

Defendemos, que os alunos tenham um contato maior com o tema, não somente por conta de suas denominações e propriedades, mas, prioritariamente, pela capacidade de observar o que está ao seu redor e o de perceber a natureza das formas. Se por um lado a Geometria é a parte da Matemática mais intuitiva e visual, nas escolas ela é trabalhada, ainda, com um extenso grau de formalismo, portanto, fora do contexto do aluno.

Neste capítulo, trataremos das transformações geométricas, particularmente, das homotetias e isometrias abordadas por meio da reflexão, rotação e translação, as quais serão exemplificadas, por atividades que articulam, de forma gradual, tópicos das séries do ensino fundamental e médio com conteúdos em que elas estão presentes.

1.1 Transformações Geométricas no Plano

1.1.1 Definição

Uma transformação geométrica no plano $\mathbb{R}^2$ é uma função bijetiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto P do plano um ponto P', tal que:

$$P' = T(P) \;\; ou \;\; (x', y') = T(x, y)$$

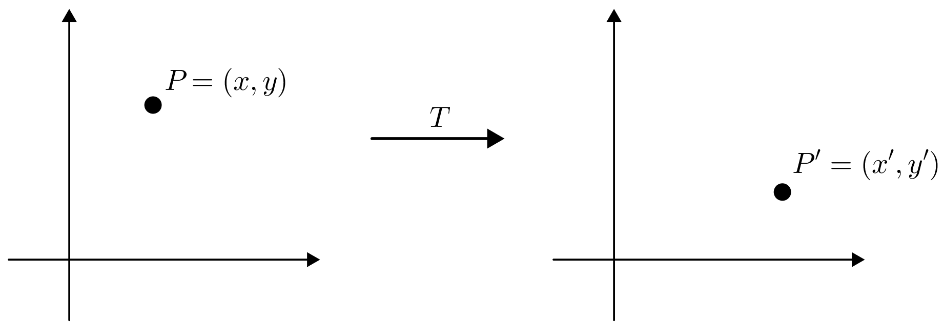


Figura 1.1:

Na figura abaixo, o quadrado $(ABCD)$ é transformado no quadrado $(A'B'C'D')$ pela transformação geométrica $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

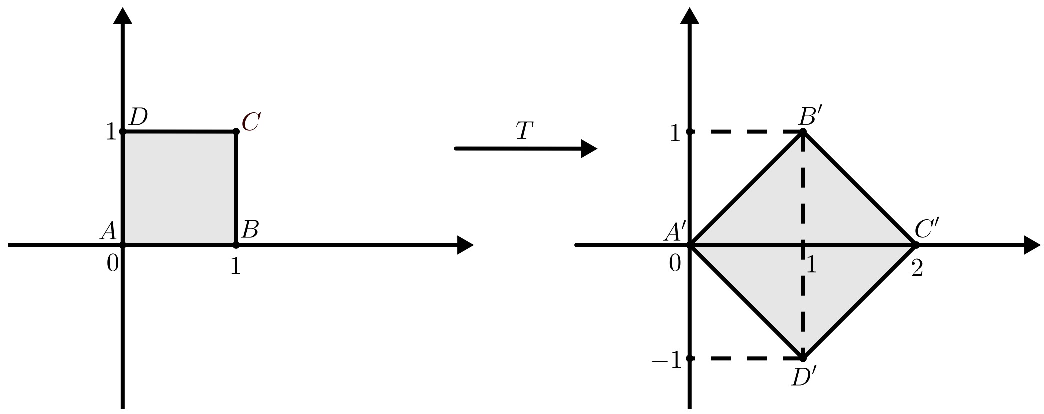


Figura 1.2:

1.2 Homotetia

1.2.1 Definição

Fixado $k \neq 0$, uma homotetia de razão k é uma transformação geométrica $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(v) = k \cdot v$ ou, se $v = (x, y)$, $T(x, y) = (k \cdot x, k \cdot y)$.

Duas figuras F_1 e F_2 são ditas semelhantes se, existe uma homotetia T, tal que, $T(F_1) = F_2$.

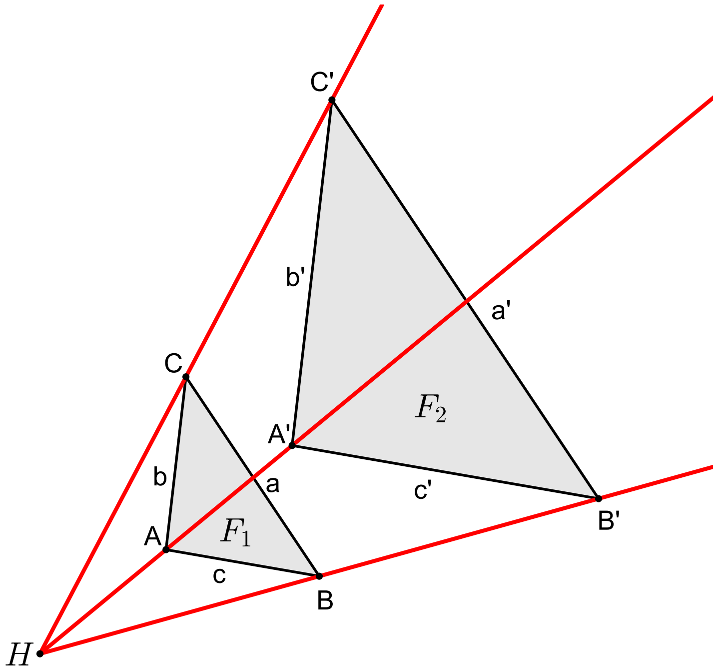


Figura 1.3:

Da definição acima, dado o ponto $P = (0, 0)$, as coordenadas (x', y') do ponto P' são dadas pelo sistema:

$$P' = \begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$$

e sua representação matricial é da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{bmatrix}$$

onde, $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ é a matriz de transformação.

Exemplo: Dado o triângulo (ABC) em que $A = (2, 3)$, $B = (4, 1)$ e $C = (6, 4)$. A homotetia definida pelo centro $O = (0, 0)$ e razão $k = 2$ transforma o triângulo citado de modo que o seu transformado terá coordenadas:

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

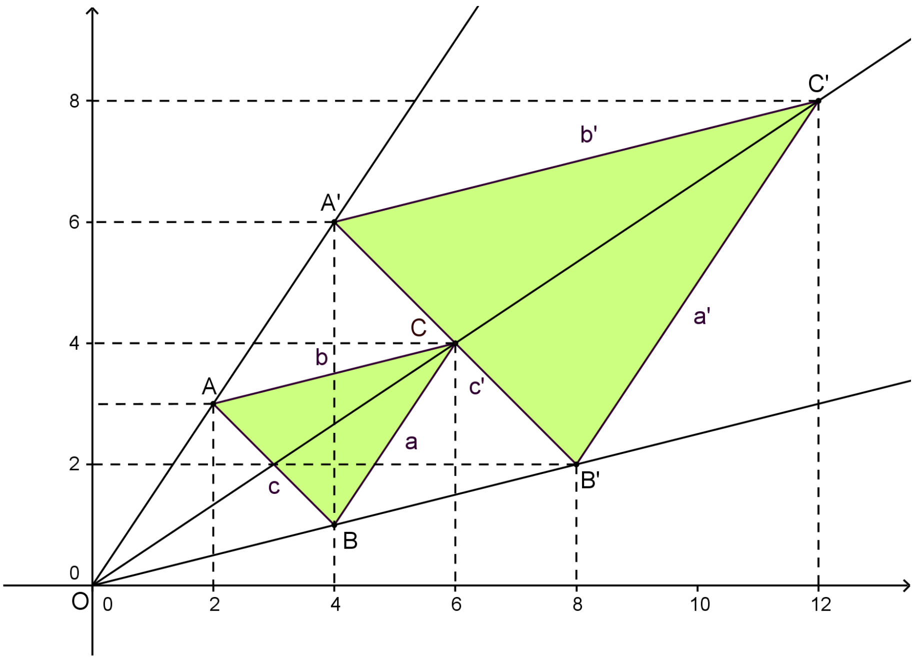


Figura 1.4:

1.3 Isometria

1.3.1 Definição

Isometria, ou movimento rígido, é uma transformação geométrica que preserva distância, ou seja, para quaisquer pontos P e Q, $d(P,Q) = d\left(T(P), T(Q)\right)$, onde $d(A,B)$ é a distância entre os pontos A e B.

Duas figuras F_1 e F_2 são isométricas ou congruentes, se existir uma isometria T, tal que:

$$T(F_1) = F_2$$

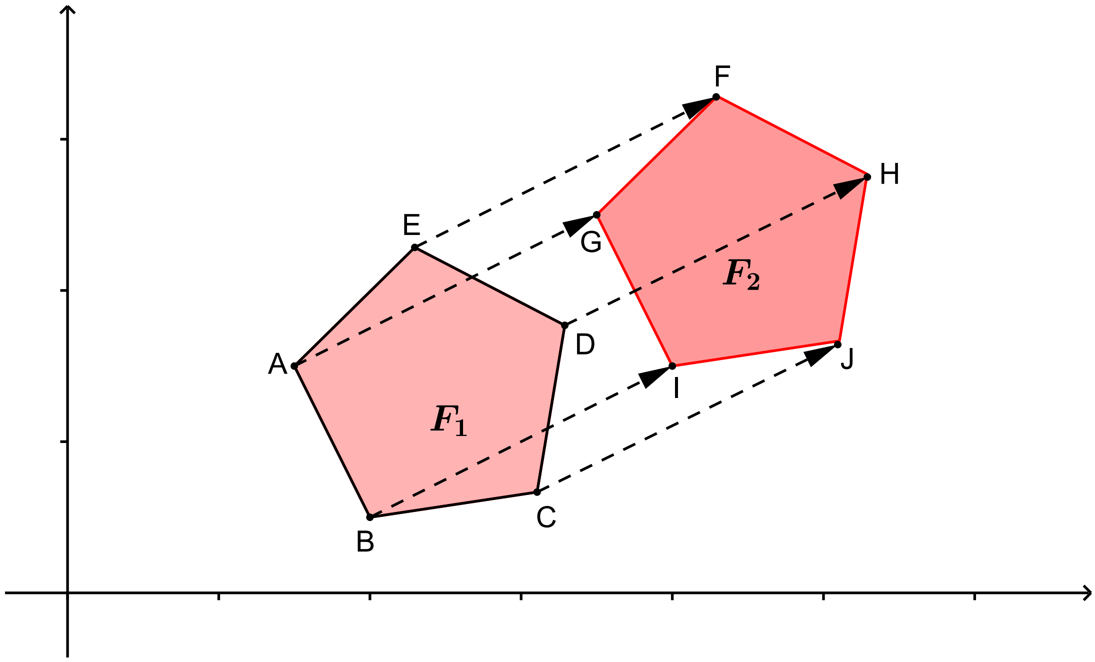


Figura 1.5:

Os movimentos rígidos no plano são os seguintes: rotação de um ângulo θ, translação, reflexão em torno de uma reta e a composição entre estes.

Observação: A prova desse fato está acima do escopo desse trabalho e não a faremos aqui.

1.3.2 Rotação do ângulo θ em torno da origem

1.3.2.1 Definição

Rotação é um tipo de isometria, que mantendo um ponto fixo O (centro de rotação), desloca cada ponto P do objeto a um ponto P' sob um ângulo fixo $P\hat{O}P'$, denominado θ.

Seja $P = (x, y)$ um ponto que é levado por uma rotação de centro na origem do sistema de coordenadas e ângulo θ, no sentido anti-horário, ao ponto $P' = (x', y')$.

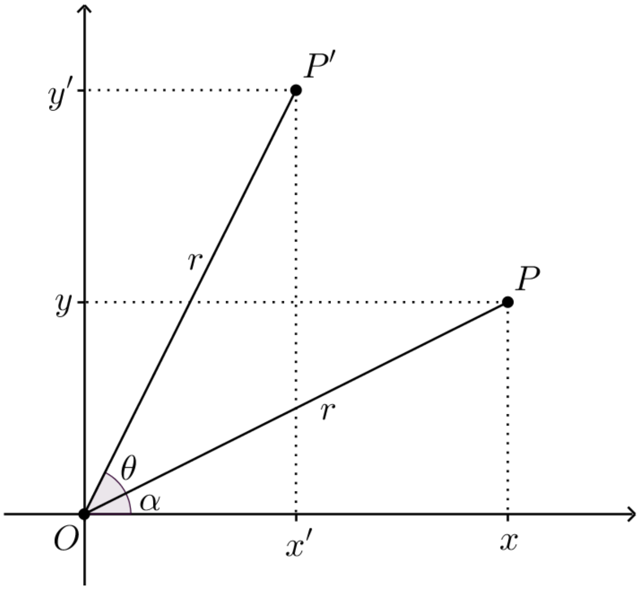


Figura 1.6:

Como a rotação é uma isometria, então $d(OP) = d(OP')$ que consideraremos igual a r.

Tomando $\theta = P\hat{O}P'$, α a medida do ângulo do eixo OX com o segmento OP e aplicando as razões trigonométricas, em relação ao sistema de eixos OXY, temos que:

$$\cos\alpha = \frac{cateto\,adjacente}{hipotenusa} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad\Rightarrow\quad x = r\cdot\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\,oposto}{hipotenusa} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \quad\Rightarrow\quad y = r\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Das somas dos arcos, sabemos que:

$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\,\theta \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Logo,

$$\cos(\alpha+\theta) = \frac{x'}{r} \quad \Rightarrow \quad x' = r\cdot\cos(\alpha+\theta) \quad \Rightarrow$$

$$x' = r\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta) \quad \Rightarrow$$

$$x' = r\cdot\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta) \quad \Rightarrow$$

Como,

$$x = r\cdot\cos\alpha \text{ e } y = r\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Fazendo a substituição, obtemos:

$$x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\operatorname{sen}\theta.$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \frac{y'}{r} \quad \Rightarrow \quad y' = r\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \quad \Rightarrow$$

$$y' = r\cdot(\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta + \cos\,\theta\cdot\operatorname{sen}\alpha) \quad \Rightarrow$$

$$y' = r\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta + r\cdot\cos\,\theta\cdot\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos:

$$y' = x\cdot\operatorname{sen}\theta + y\cdot\cos\,\theta.$$

Portanto,

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\operatorname{sen}\,\theta \\ y' = x\cdot\operatorname{sen}\theta + y\cdot\cos\,\theta \end{cases}$$

Daí, a rotação do ângulo θ é dada pelo produto de matrizes:

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo: Fazer uma rotação, no sentido anti-horário, de $90°$ em torno da origem $O = (0,\,0)$ no quadrilátero (ABCD), cujas coordenadas são $A = (1,\,2)$, $B = (2,\,1)$, $C = (4,\,2)$ e $D = (2,\,4)$.

Seja $\theta = 90°$, pela representação matricial, obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A' = (-2, 1)$.

$$B' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $B' = (-1, 2)$.

$$C' = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Portanto, $C' = (-2, 4)$.

$$D' = \begin{bmatrix} x'''' \\ y'''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x'''' \\ y'''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $D' = (-4, 2)$.

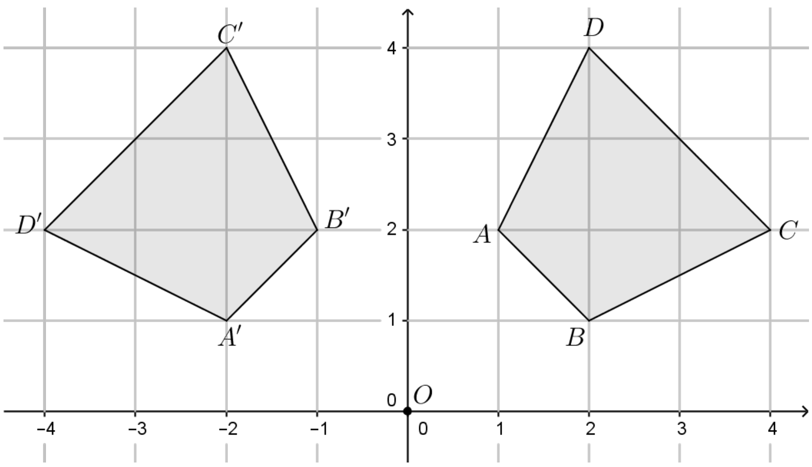


Figura 1.7:

1.3.3 Translação em $\mathbb{R}^2$

1.3.3.1 Definição

Fixado um vetor $\vec{v}$ do plano, uma translação com direção $\vec{v}$ é uma isometria T definida por $T(P) = P + \vec{v}$, ou se $\vec{v} = (a, b)$ e $P = (x, y)$, então $T(x, y) = (x + a, y + b)$.

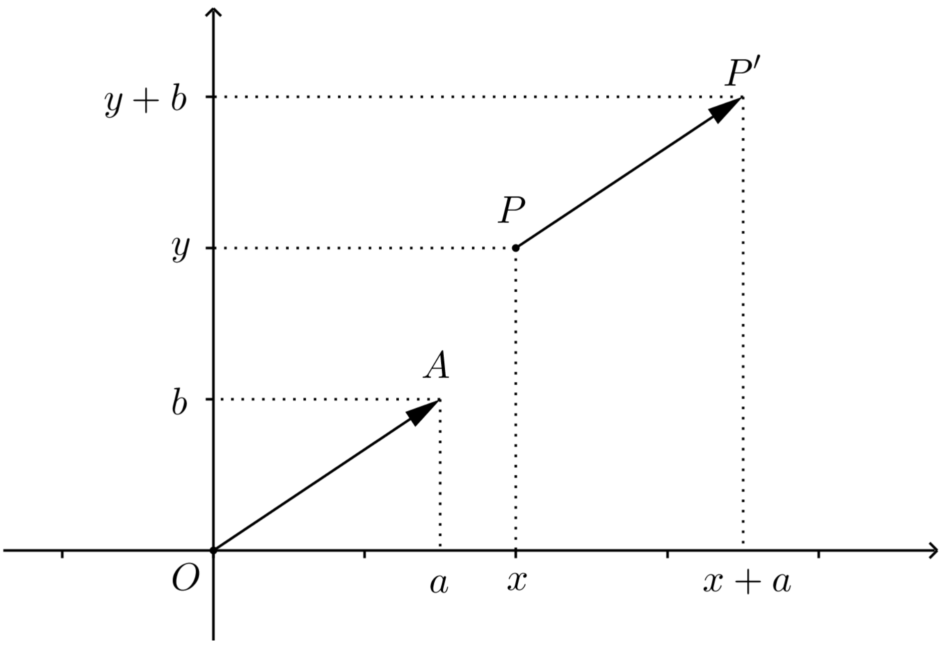


Figura 1.8:

Exemplo: Sejam os pontos $A = (-6, -1)$, $B = (-3, 2)$ e $C = (-3, -2)$, vértices do triângulo (ABC) e o vetor $\vec{v} = (8, 3)$. O triângulo $(A'B'C')$, transladado de (ABC), terá como vértices:

$$A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A' = (2, 2)$

$$B' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Portanto, $B' = (5, 5)$

$$C' = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $C' = (5,1)$

A figura 1.9 abaixo ilustra esse fato.

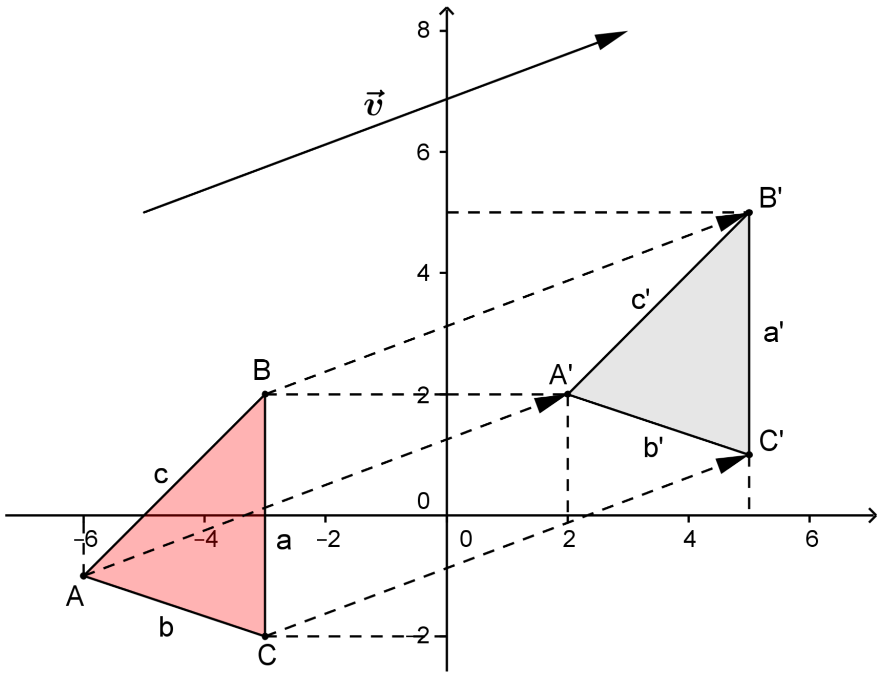


Figura 1.9:

1.3.3.2 Composição de rotações com translações em $\mathbb{R}^2$

Apresentamos, na rotação, a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

para rotacionar figuras no plano cartesiano em torno da origem $O = (0,0)$.

Na translação, vimos que, a figura transladada pode ser calculada por intermédio da equação matricial:

$$P' = P + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A composição de rotações em torno da origem seguida de uma translação, em $\mathbb{R}^2$, resultará na expressão geral:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Situação 1: Rotacionar 180° em torno da origem $O = (0,0)$ e, em seguida, aplicar o vetor $\vec{v} = (4,-2)$, para transladar o quadrado $(ABCD)$, cujos vértices são: $A = (2,2)$, $B = (2,0)$, $C = (4,0)$ e $D = (4,2)$.

Pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

temos:

$$A'' = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A'' = (2,-4)$

$$B'' = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $B'' = (2,-2)$

$$C'' = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $C'' = (0,-2)$

$$D'' = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Portanto, $D'' = (0, -4)$

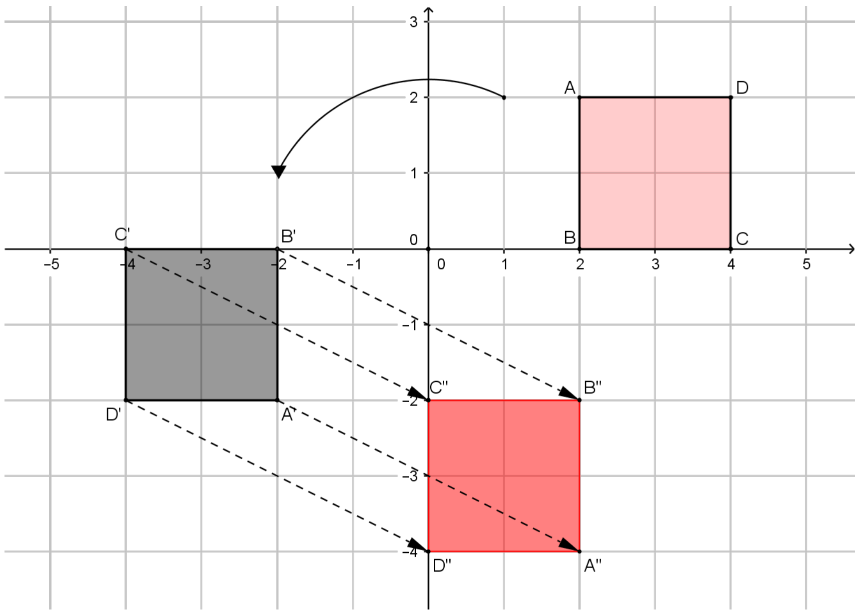


Figura 1.10:

1.3.4 Reflexão em $\mathbb{R}^2$ relativa a uma reta dada

1.3.4.1 Definição

Seja r uma reta em $\mathbb{R}^2$. Uma reflexão em torno de r é uma isometria T, tal que, $T(P) = P'$, onde $d(P, r) = d(P', r)$. Aqui $d(P, r)$ é a distância do ponto P à reta r.

Se P pertence à reta e, então P e a sua imagem P' são coincidentes.

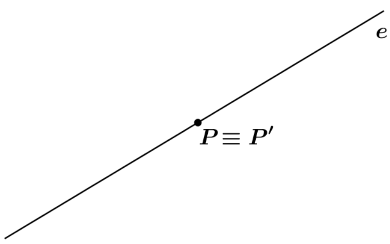


Figura 1.11:

Agora, se P é um ponto do plano que não pertence à reta e, a imagem de P é um ponto P', tal que, e seja a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.

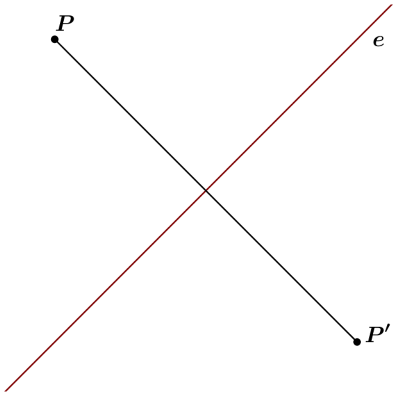


Figura 1.12:

Generalização

Seja $P_1 = (x_1, y_1)$ um ponto levado por uma reflexão em torno da reta e de equação $y = m \cdot x$, que passa pela origem, no ponto $P_2 = (x_2, y_2)$.

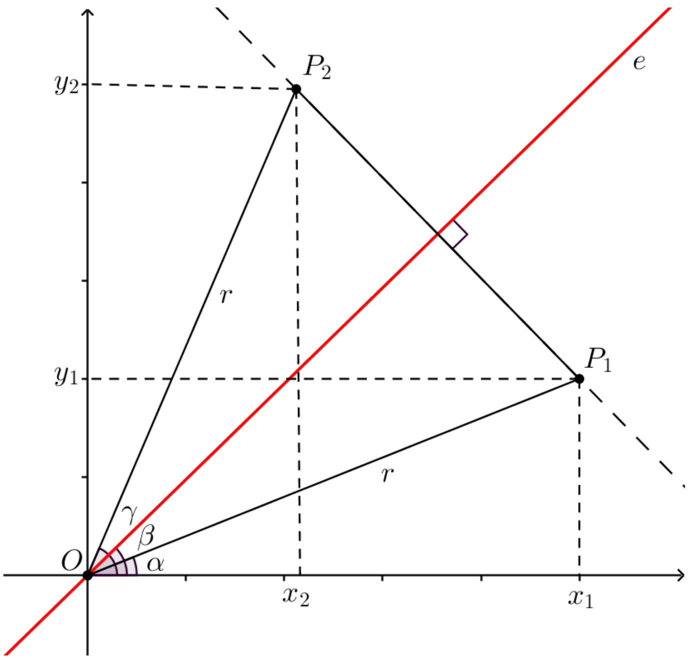


Figura 1.13:

Considerando $d(OP_1) = d(OP_2) = r$, temos:

$\cos\alpha = \dfrac{x_1}{r} \quad \Rightarrow \quad x_1 = r\cos\alpha$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y_1}{r} \quad \Rightarrow \quad y_1 = r\operatorname{sen}\alpha$

Como $\gamma = 2\beta - \alpha$, obtemos:

$$\cos\gamma = \cos(2\beta - \alpha) = \frac{x_2}{r} \quad \Rightarrow \quad x_2 = r\cos(2\beta - \alpha) \quad \Rightarrow$$

$x_2 = r(\cos 2\beta \cos\alpha + \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}\alpha) = r\cos 2\beta\cos\alpha + r\operatorname{sen} 2\beta\operatorname{sen}\alpha$

Fazendo as substituições, teremos:

$x_2 = x_1 \cos 2\beta + y_1 \operatorname{sen} 2\beta$

e

$$\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(2\beta - \alpha) = \frac{y_2}{r} \quad \Rightarrow \quad y_2 = r\operatorname{sen}(2\beta-\alpha) \quad \Rightarrow$$
$$y_2 = r(\cos\alpha\operatorname{sen} 2\beta - \cos 2\beta\operatorname{sen}\alpha) = r\cos\alpha\operatorname{sen} 2\beta - r\cos 2\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Fazendo as substituições:

$y_2 = x_1 \operatorname{sen} 2\beta - y_1 \cos 2\beta$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Assim, usando os conceitos e as propriedades de matrizes, obtemos a reflexão de uma figura em relação a uma reta e - eixo de simeria - que passa pela origem.

Dado um ponto $P = (x, y)$, no plano cartesiano, o seu simétrico $P' = (x', y')$ em relação ao eixo das ordenadas (OY) é dado por:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, $P' = (-x, y)$

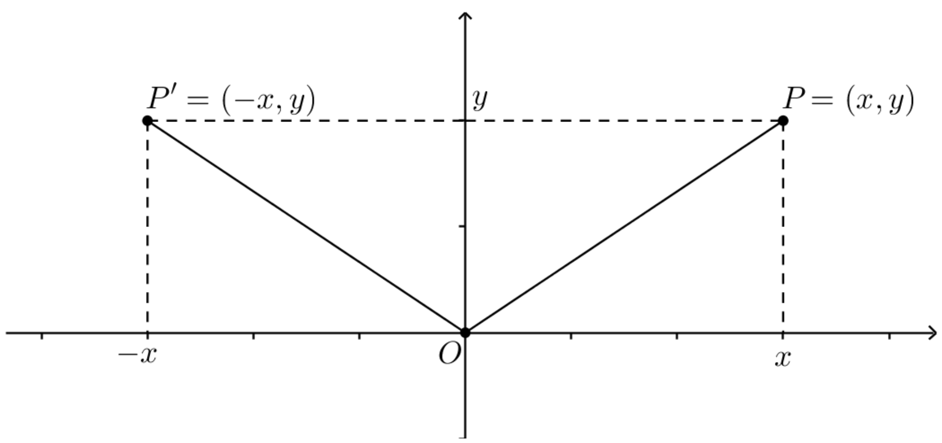


Figura 1.14:

Já, para determinar o simétrico de $P = (x, y)$ em relação ao eixo das abscissas (OX), $P' = (x', y')$ é dado por:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Logo, $P' = (x, -y)$

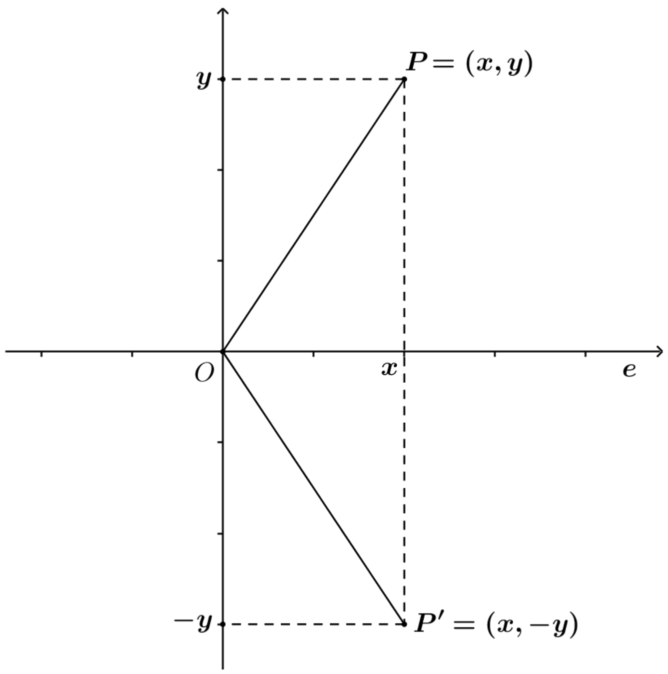


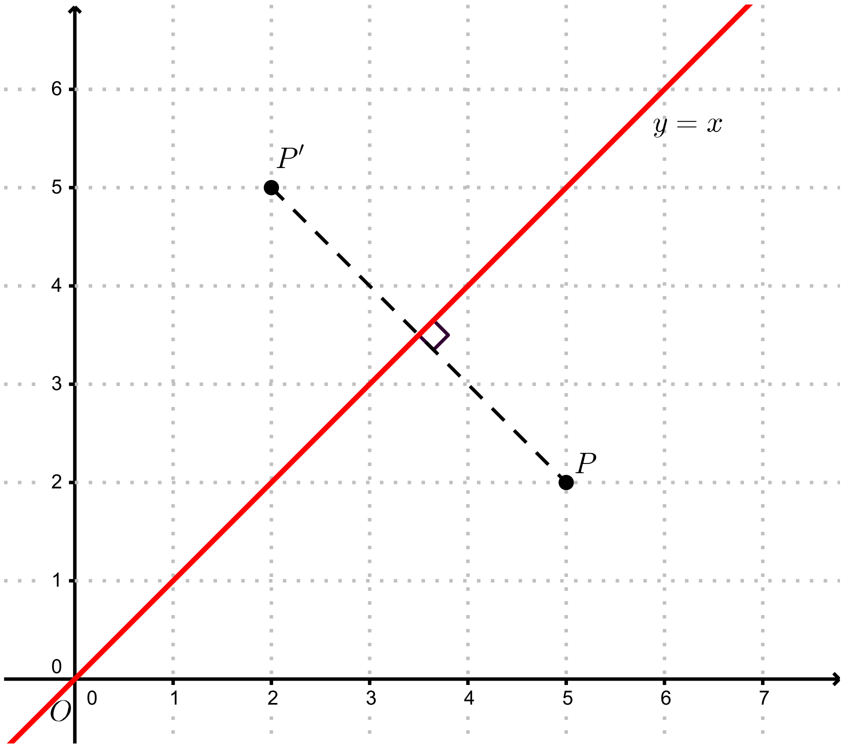
Figura 1.15:

Exemplo: Fazer a reflexão do ponto $P = (5, 2)$ em torno da reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes 1 e 3).

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin\, 2\beta \\ \sin\, 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2 \cdot 45° & \sin\, 2 \cdot 45° \\ \sin\, 2 \cdot 45° & -\cos 2 \cdot 45° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Portanto, $P' = (2, 5)$



$y = x$
P'
P
O
0
1
2
3
4
5
6
7

Capítulo 2

Simetria no plano

2.1 Definição

Simetria de uma figura F é uma Isometria T do plano, que a deixa invariante, isto é, $T(F) = F$.

2.2 Eixo de simetria

2.2.1 Definição

Eixo de simetria é o conjunto de pontos de uma figura F que fica fixo por uma simetria de T.

2.3 Simetria de polígonos

Abaixo, exporemos algumas figuras, com algumas de suas simetrias e de seus respectivos eixos de simetria:

- Seja F, o triângulo isósceles abaixo, e r, sua altura, relativa à base $\overline{AB}$.

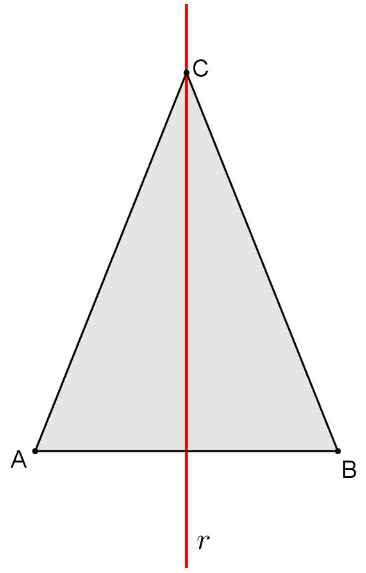


Figura 2.1:

A reflexão em torno de r é uma simetria de F. A reta r é o seu eixo de simetria.

- Seja F, o quadrado da figura abaixo.

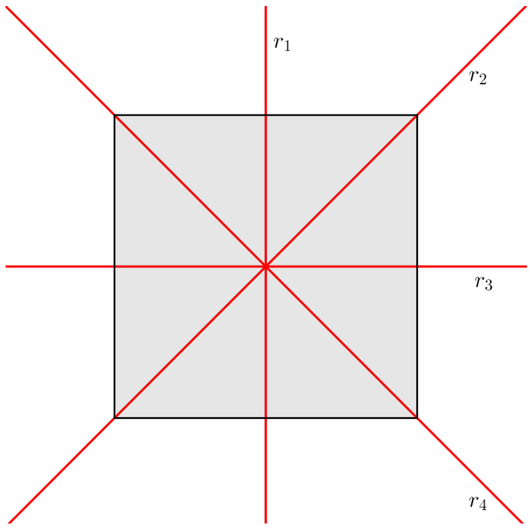


Figura 2.2:

As reflexões em torno das retas r_1, r_2, r_3 e r_4 e as rotações R_0, $R_{\frac{\pi}{2}}$ R_π e $R_{\frac{3\pi}{2}}$ são simetrias do quadrado.

No caso das reflexões, as retas r_1, r_2, r_3 e r_4 são, respectivamente, os eixos de simetria.

- No círculo, há infinitos eixos de simetria.

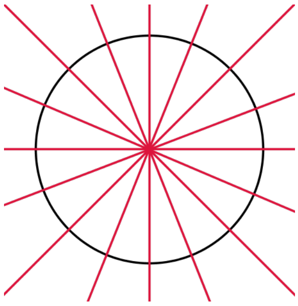


Figura 2.3:

Cada reta r, que passa pelo centro do círculo, é eixo de simetria da reflexão em torno dessa reta.

Capítulo 3

Jogos de Recreação e Simetria

As brincadeiras e as recreações são inerentes ao ser humano. Em todos os períodos históricos e nas mais diversas culturas, guardadas as suas peculiaridades, os jogos estavam presentes desde a tenra idade até os mais idosos, ante a necessidade de cada indivíduo ao lazer. Daí a infinidade de jogos conhecidos e praticados.

Na maioria da escolas públicas, os jogos ainda são poucos explorados pelos professores. Talvez por desconhecerem atividades lúdicas relacionadas aos conteúdos ministrados ou por julgarem haver conflito entre o rigor que a aprendizagem exige no desenvolvimento dos tópicos e as brincadeiras que podem dispersar os alunos e desviar a sua finalidade.

No entanto, estudos revelam que, na maioria das vezes, a falta de atenção e o baixo rendimento por parte dos alunos nas aulas residem, principalmente, no fato de não terem nenhuma percepção e compreensão da utilização dos conteúdos que estão estudando. Segundo os Parâmetros Nacionais curriculares:

> *Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL,1998, p.47)*

Por isso, defendemos nas aulas de Matemática, quando possível, interação entre a formalidade que o tópico exige atrelado à ludicidade com que pode ser apresentado. Apresentaremos nesta seção, alguns exemplos de situações-problemas em que o conhecimento de Simetria determina o vencedor do jogo. Seguiremos [5].

Problema 1: Dois jogadores se revezam colocando moedas de um centavo em uma mesa redonda, sem as empilhar. Aquele, que não conseguir colocar a sua moeda, perde.

Tutorial: independente do tamanho da mesa, o primeiro jogador pode vencer, desde que utilize conceitos de simetria.

1º passo: o primeiro jogador deverá colocar sua moeda de modo que o centro dessa coincida com o da mesa;

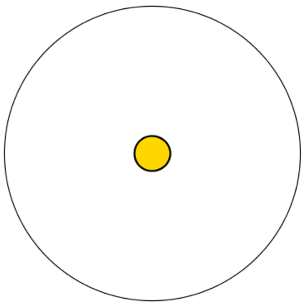


Figura 3.1:

2º passo: a partir daí, a cada jogada feita pelo adversário, o primeiro jogador traça uma reta imaginária, que passa pelos centros da mesa e da moeda do oponente, jogando de forma espelhada à moeda do adversário em relação ao centro da mesa.

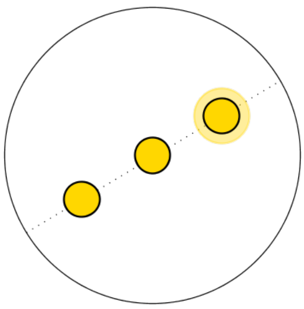


Figura 3.2:

Observação: esse "espelhamento" em Matemática denomina-se simetria central (rotação de 180° em torno de um ponto fixo O) ou reflexão em torno de um ponto.

Conclusão: tendo em vista o exposto acima, se houver a possibilidade do segundo jogador depositar sua moeda, então, também, existirá um local, posição simétrica em relação à moeda do centro da mesa, para o primeiro jogador colocar a sua. Portanto, seguindo essa estratégia, sempre o jogador que inicia a partida, a vencerá.

Problema 2: Temos duas pilhas, cada uma delas com 50 pedras. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar quantas pedras quiser, mas só de uma das pilhas. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Solução: O segundo jogador pode garantir a vitória, se jogar de forma simétrica ao primeiro, ou seja, a cada retirada do primeiro jogador em uma das pilhas, o segundo deve retirar a mesma quantidade de pedra da outra pilha. Daí, se o primeiro jogador consegue jogar, o segundo também consiguirá.

Problema 3: Dois jogadores se revezam colocando bispos em um tabuleiro de xadrez, de modo que não possam se capturar mutuamante (os bispos podem ser colocados em quadrados de qualquer cor). Perde o jogador que não puder fazer sua jogada.

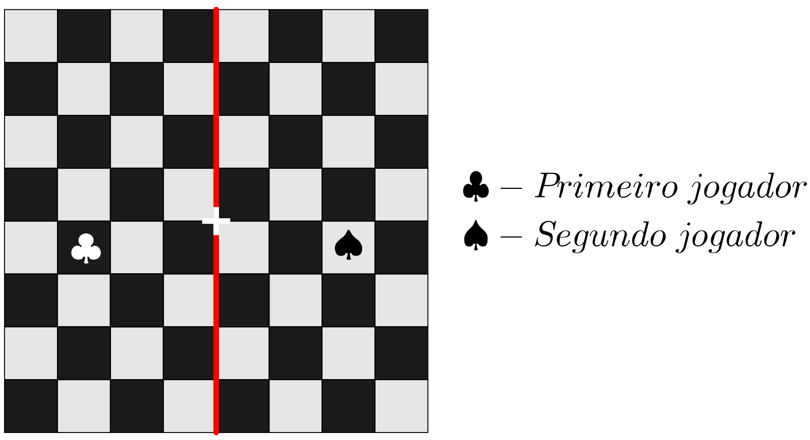
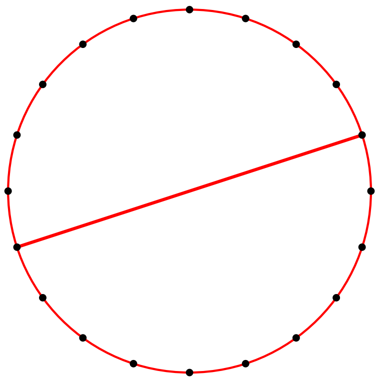


Figura 3.3:

Solução: Consideremos um tabuleiro 8×8, com tantos bispos quantos forem necessários e que possam ser movimentados somente pelas diagonais, em um único sentido. O segundo jogador pode vencer o jogo, se levar em consideração um dos eixos de simetria, diferentes das diagonais. Assim, a cada jogada do primeiro jogador, o segundo posiciona seu bispo na posição simétrica, casa de cor distinta, em relação ao eixo escolhido (simetria de reflexão). Portanto, a última jogada será feita pelo segundo jogador.

Problema 4: São colocados 20 pontos em um circunferência. Os jogadores se revezam unindo dois dos pontos com um segmento de reta que não cruza outro segmento já desenhado. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.



Solução: O primeiro jogador vence. Para isso, é necessário desenhar uma corda que separa os pontos em dois grupos de 9. Depois, ele replica simetricamente a cada jogada do seu adversário (simetria de reflexão). Note que esta estratégia não depende de como os pontos estão distribuídos no círculo.

Problema 5: Temos dois montes de pedras. Um com 30 pedras e o outro com 20. Os jogadores se revezam removendo quantas pedras quiserem, mas só de um dos montes. Vence o jogador que remover a última pedra.

Solução: O primeiro jogador vencerá, se iniciar o jogo tornando os dois montes iguais, e depois, adotar a estratégia de repetir as jogadas do seu adversário.

Problema 6: Uma margarida tem: (a) 12 pétalas; (b) 11 pétalas. Os jogadores se revezam retirando uma única pétala ou duas que estejam uma ao lado da outra. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

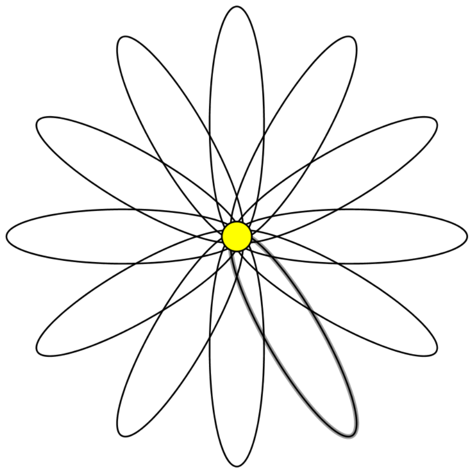


Figura 3.4:

Solução: O segundo vence em ambos os casos. Independente de como o primeiro jogador começa, o segundo jogador pode responder de modo a deixar duas fileiras idênticas de pétalas na flor. Depois, ele pode seguir uma estratégia simétrica (simetria central).

Problema 7: Dois jogadores se revezam escrevendo **X** e **O** em um papel quadriculado 9×9. O primeiro jogador escreve **X** e o segundo, **O**. Ao final do jogo, o primeiro jogador ganha um ponto por cada linha ou coluna que contém mais **X** do que **O**, enquanto o segundo ganhará um ponto por cada linha ou coluna que contém mais **O** do que **X**. Vence o jogador que fizer mais pontos.

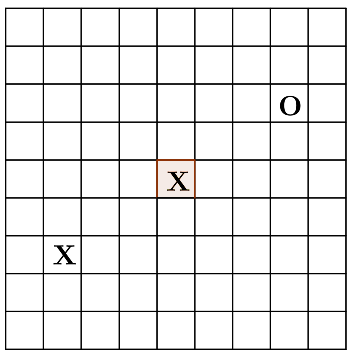


Figura 3.5:

Solução: O primeiro jogador poderá garantir a vitória se colocar seu primeiro **X** no quadrado central e depois responder a cada jogada do segundo jogador com um **X**

colocado simetricamente em relação ao quadrado central (simetria central).

Problema 8: Dois jogadores se revezam retirando pedaços de um chocolate consistindo em 5×10 quadradinhos. Em cada jogada, eles quebram ao longo das divisões dos quadradinhos. Vence o jogador que obtiver primeiro um único quadradinho de chocolate.

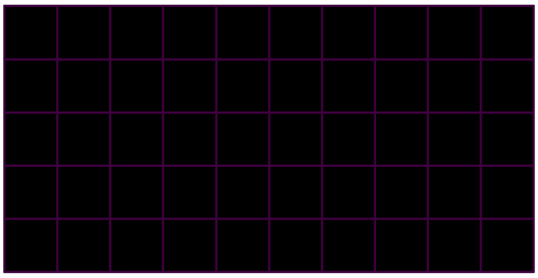


Figura 3.6:

Solução: Perde o jogador que retirar um retângulo de largura 1. O primeiro jogador vencerá, se começar cortando a barra de chocolate em dois pedaços 5×5. Depois disso, ele joga simetricamente (simetria de reflexão).

Problema 9: Coloca-se uma peça em cada quadrado de um tabuleiro de damas 11×11. Os jogadores se revezam retirando um número arbitrário de peças vizinhas ao longo de uma linha ou de uma coluna. Vence o jogador que retirar a última peça.

Solução: O primeiro jogador vence se começar removendo a peça no centro do tabuleiro e depois seguir uma estratégia de simetria em relação a um ponto.

Problema 10: Dois jogadores se revezam colocando cavalos em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se atacar mutuamente. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Solução: Como o cavalo sempre se movimenta de um quadrado preto para um branco ou vice-versa, o segundo jogador pode vencer usando simetria em relação a um ponto ou em relação a uma reta.

3.1 Sugestões de atividades

Propomos, nesta seção, algumas sugestões de atividades que podem ser exploradas pelos professores durante as aulas sobre Simetria. Nosso objetivo, com esses exercícios, é chamar atenção dos discentes, por meio da ludicidade, da importância da matéria, que está presente no cotidiano deles.

Situação 1: [14] - Dona Clementina vai todas as tardes regar sua horta. Sai de casa (ponto C) com seu regador, enche-o em um rio, próximo de sua casa, e, depois, dirige-se à horta (ponto H). Pergunta-se: em qual ponto P da margem do rio, que denominaremos de eixo e, permite o menor trajeto para dona Clementina regar sua horta?

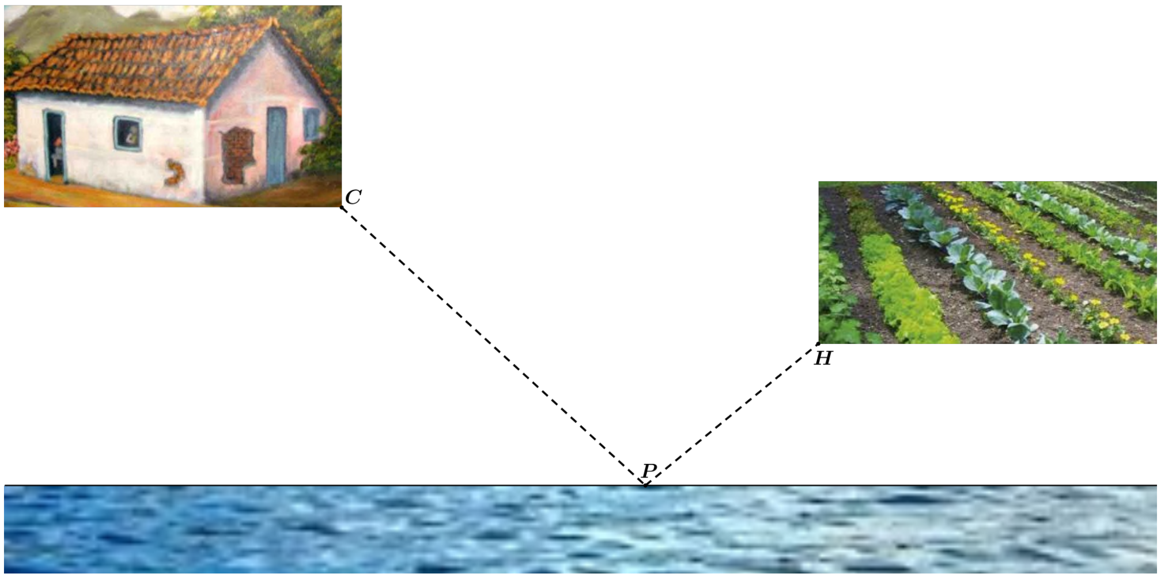


Figura 3.7:

Para encontrarmos a menor distância percorrida por Dona Clementina, localizamos o simétrico de H em relação à margem do rio - eixo de simetria - com $\overline{HH'} \perp e$. Traçamos, em seguida, segmento CH', obtendo o ponto P - interseção do segmento CH' com a margem do rio. Daí, concluímos que o menor trajeto percorrido pela Dona Clementina é $\overline{CP} + \overline{PH}$ (simetria de reflexão).

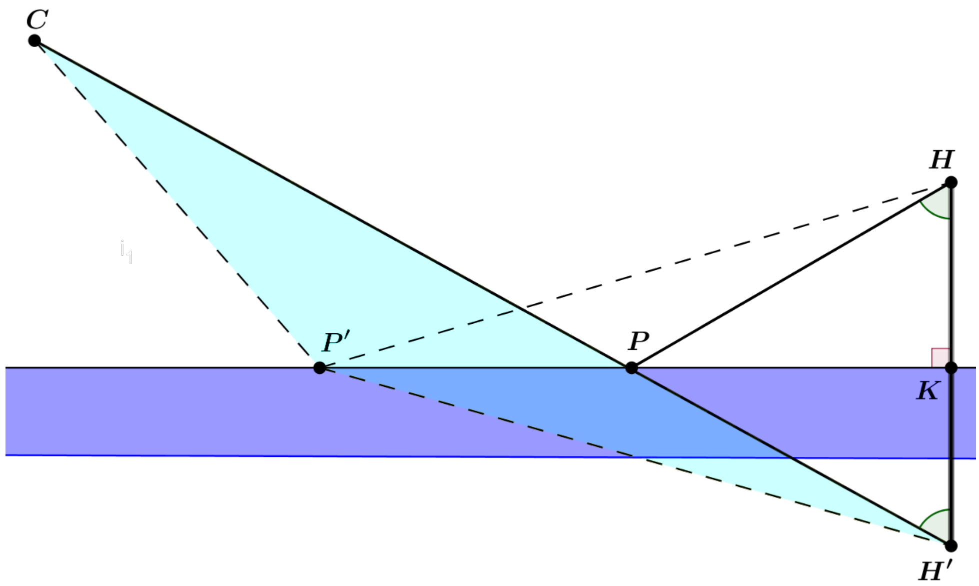


Figura 3.8:

Verificação da unicidade de P

Tomemos um ponto P' qualquer, com $P' \in e$ e $P' \neq P$.

Como a linha da margem do rio ($eixo\, e$) é a mediatriz do segmento HH', temos que:

$PH = PH'$, $P'H = P'H'$ e $HK = H'K$.

Os pontos C, P e H' são colineares, e, pela desigualdade triangular no triângulo ($CP'H'$), temos que:

$CP' + P'H' > CH' = CP + PH' = CP + PH$

Portanto, $CP + PH$ é a menor distância percorrida por Dona Clementina para regar suas plantas.

Situação 2: [14] - Entre duas cidades A e D, existe um rio de margens paralelas, representado na figura seguinte. Pretende-se construir uma ponte BC no rio, perpendicular às margens, em uma posição, tal que, o trajeto entre as duas cidades - linha poligonal $ABCD$ - tenha o menor comprimento possível.

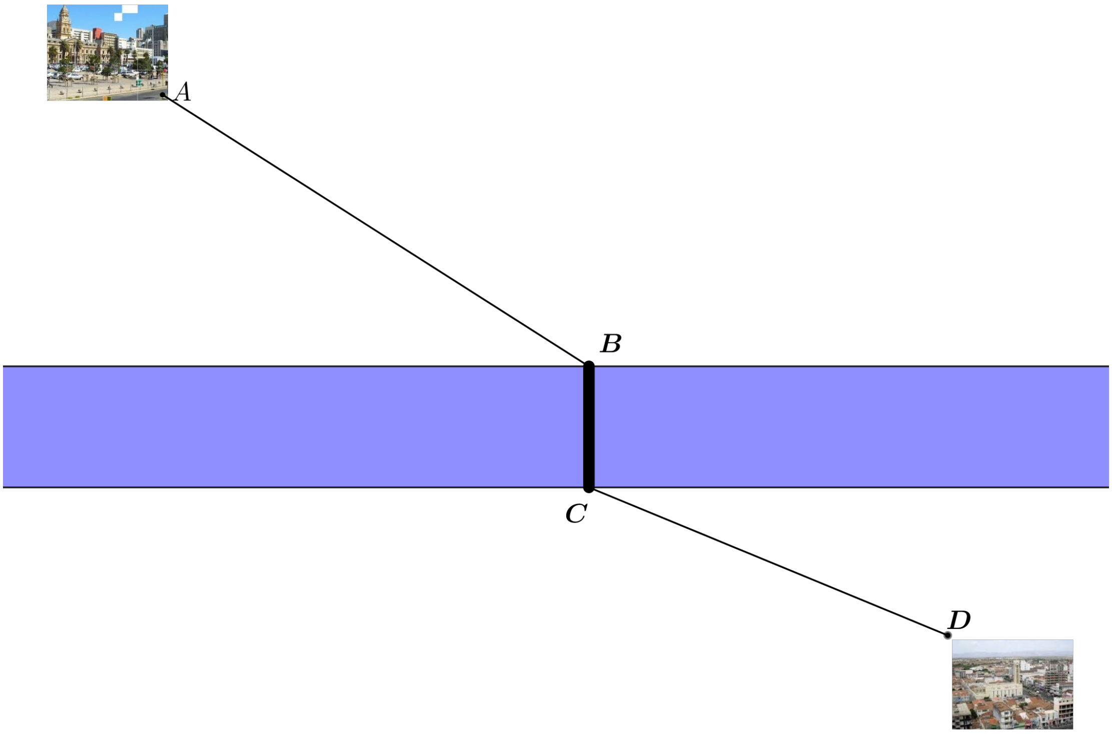


Figura 3.9:

Para isso, traçamos, por D, uma reta perpendicular ao rio, encontrando o ponto E, onde $\overline{DE} = \overline{HH'}$ (largura do rio). Em seguida, traçamos o segmento AE. A interseção de $\overline{AE}$ com a margem do rio da cidade A deve ser o ponto B, cabeceira da ponte.

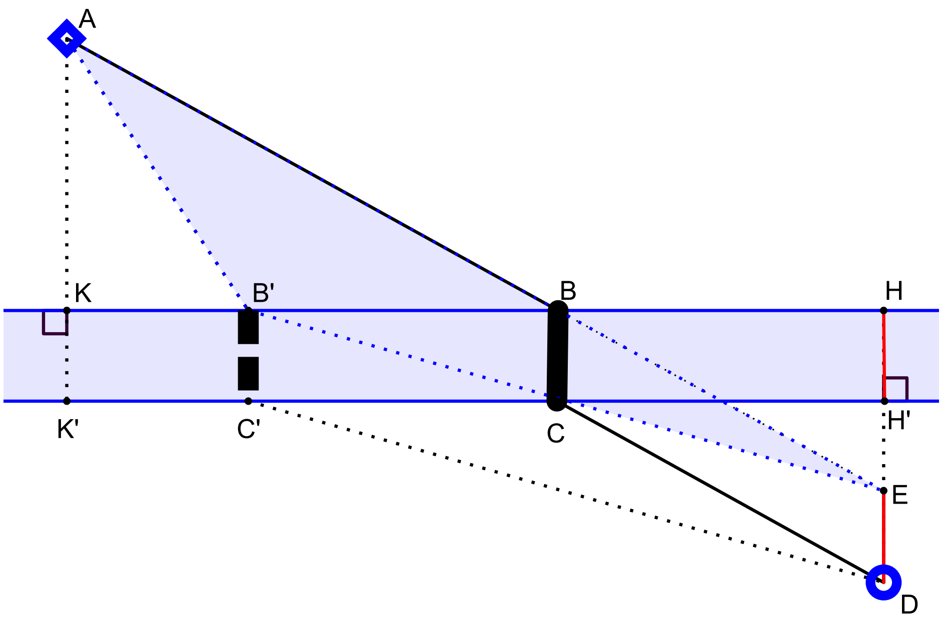


Figura 3.10:

Note que, se $B' \neq B$ é um ponto da reta KH, margem do rio da cidade A, e, C' é o pé da perpendicular baixada por B' sobre a reta $K'H'$, margem do rio da cidade D, então, pela desigualdade triangular, temos que:
$\overline{AB'} + \overline{B'E} = \overline{AB'} + \overline{C'D} > \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AB} + \overline{CD}$ (simetria de translação).

Situação 3: Construa uma figura geométrica no geoplano e, em seguida, troque com um colega para que faça uma ampliação ou redução da figura em questão.

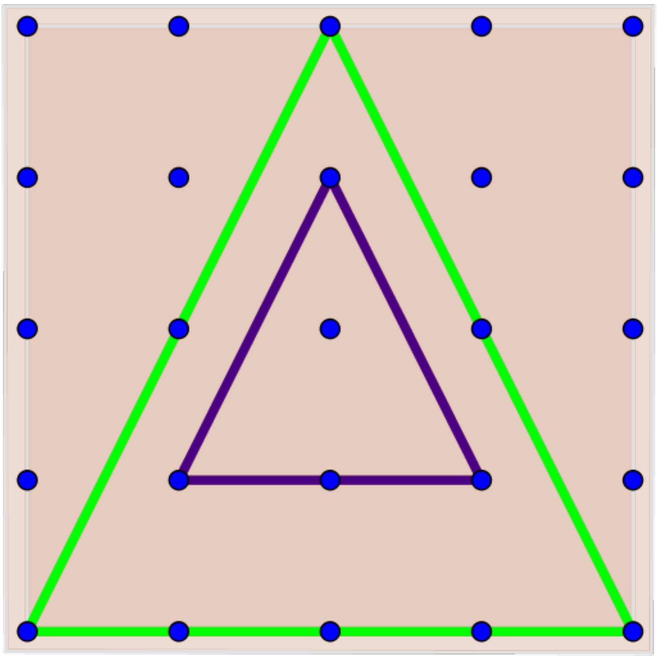


Figura 3.11:

Sutuação 4: Faça a ampliação e a redução do desenho abaixo, utilizando os espaços quadriculados apropriadamente.

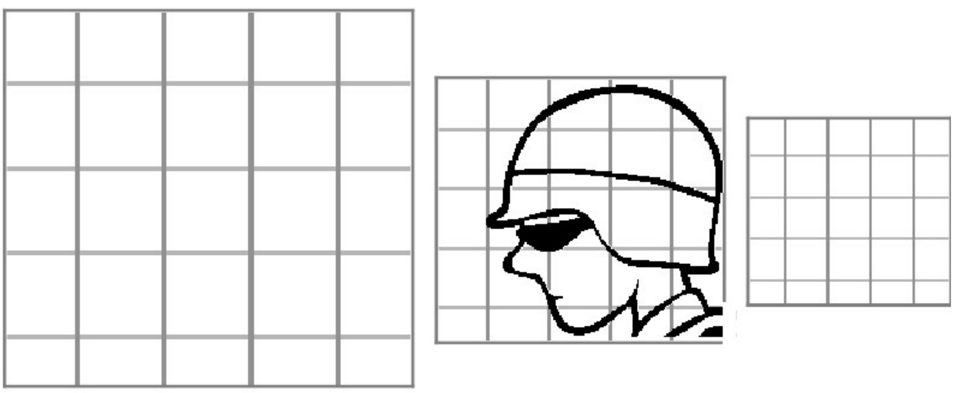


Figura 3.12:

Situação 5: [7] - É possível traçar uma curva com linhas retas?

Veja como:

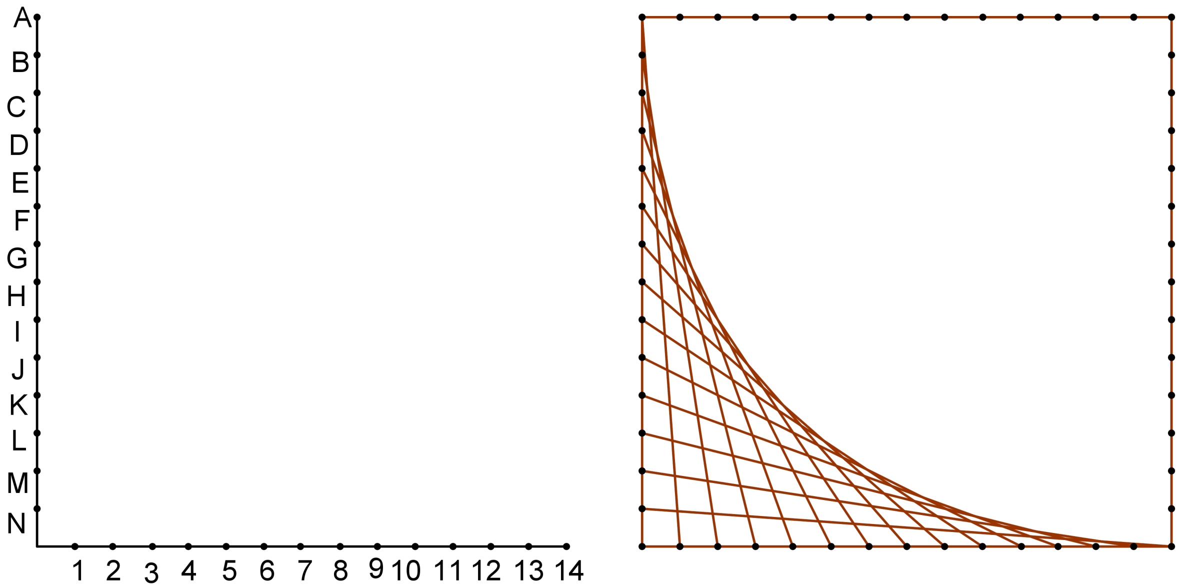


Figura 3.13:

Usando régua e esquadro, podemos fazer figuras como a acima com o cuidado de fazer as marcas das bordas em espaços regulares e com a mesma quantidade de marcas nas duas linhas (horizontal e vertical). Note que, ligamos A com 1, B com 2, C com 3 e assim por diante. À medida que as linhas retas vão se cruzando, fica a impressão que elas estão se curvando.

Na imagem abaixo, determine quais simetrias (rotação, translação e reflexão) foram utilizadas e quantos eixos de simetrias podemos encontrar?

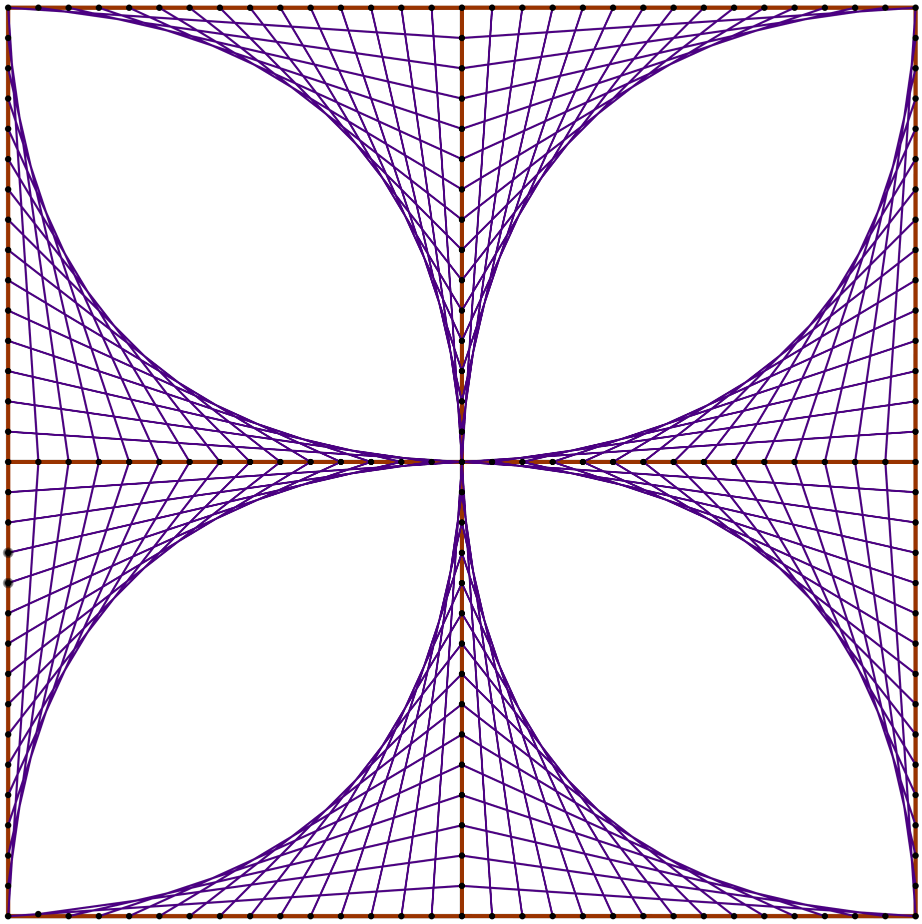


Figura 3.14:

Situação 6: [8] - No papel quadriculado abaixo, faça os simétricos do barquinho em relação aos eixos e_1 e e_2.

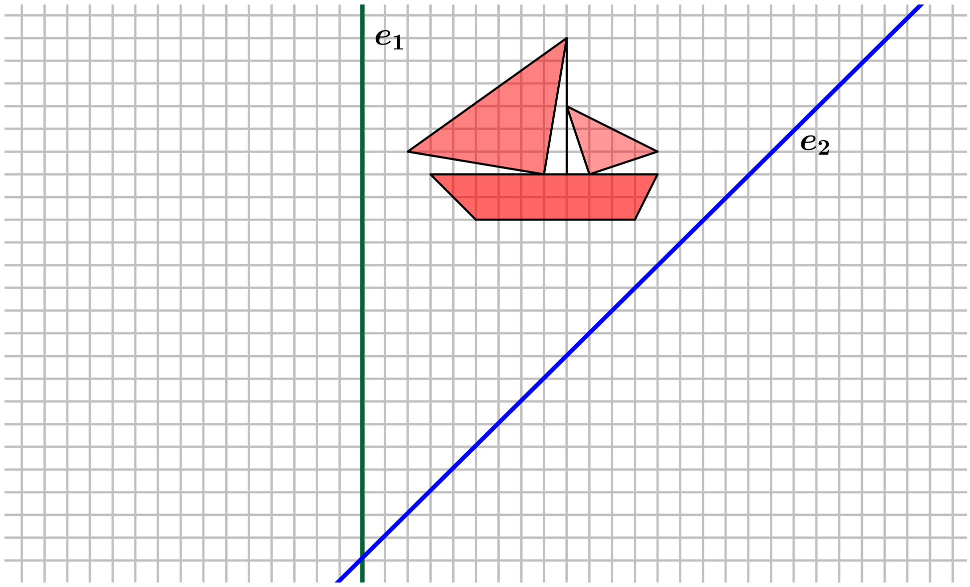


Figura 3.15:

Situação 7: [1] - Imagine um plano coberto por polígonos sem deixar buracos e sem sobreposição de polígonos. Quando isso ocorre, tem-se uma pavimentação do plano ou ladrilhamento. Das figuras apresentadas abaixo, quais permitem um ladrilhamento perfeito?

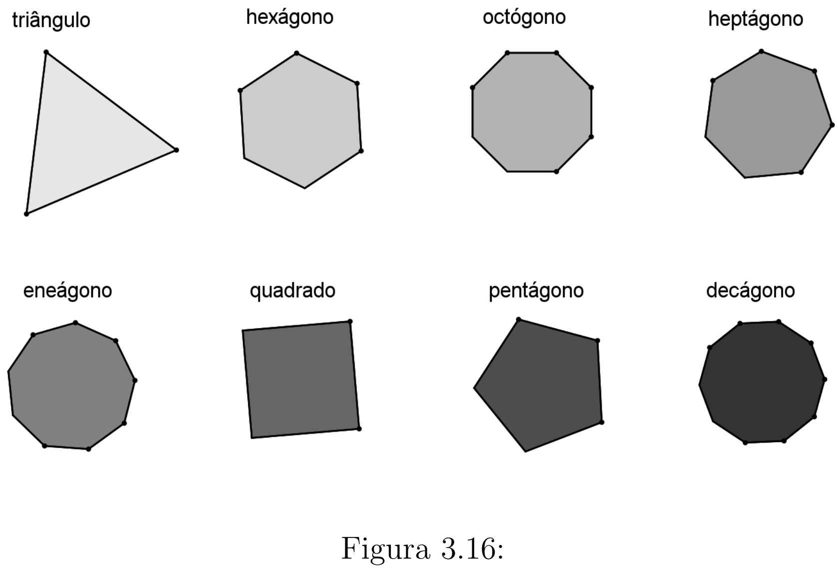


Figura 3.16:

Situação 8: [1] - Considere o alfabeto A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z.

a) Quais são as letras que têm eixo de simetria horizontal?

b) Quais são as letras que têm eixo de simetria vertical?

c) Quais são as letras que têm os dois eixos de simetria?

d) Quais são as letras que não têm eixo de simetria?

e) Escreva uma palavra formada só por letras que têm eixo de simetria horizontal.

e) Escreva uma palavra formada só por letras que têm eixo de simetria vertical.

Situação 9: [1] - O Corpo de Bombeiros de uma determinada cidade renovou sua frota de ambulâncias. Para facilitar o reconhecimento dos veículos, o chefe da corporação ordenou a pintura da palavra RESGATE na parte frontal das ambulâncias. Dessa maneira, todos os motoristas poderiam identificá-la pelos seus retrovisores. De que maneira a palavra RESGATE deve ser pintada nas ambulâncias para que o motorista do carro que estiver à frente consiga ler corretamente a palavra pintada pelo seu retrovisor?

Figura 3.17:

Situação 10: De acordo com a definição trazida por Houaiss, em seu dicionário, Mosaico é: “Imagem ou padrão visual criado pela incrustação de pequenas peças coloridas (de pedra, mármore, vidro, esmalte ou cerâmica) sobre uma superfície (...)”.

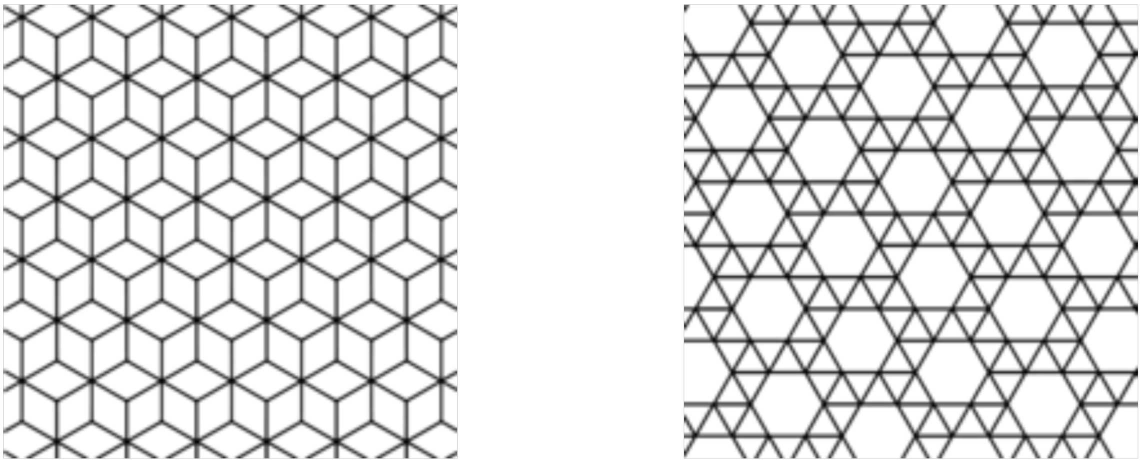


Figura 3.18:

Agora é com você! Construa, na malha quadriculada abaixo, um mosaico com figuras geométricas, como foi feito nas duas imagens da figura acima.

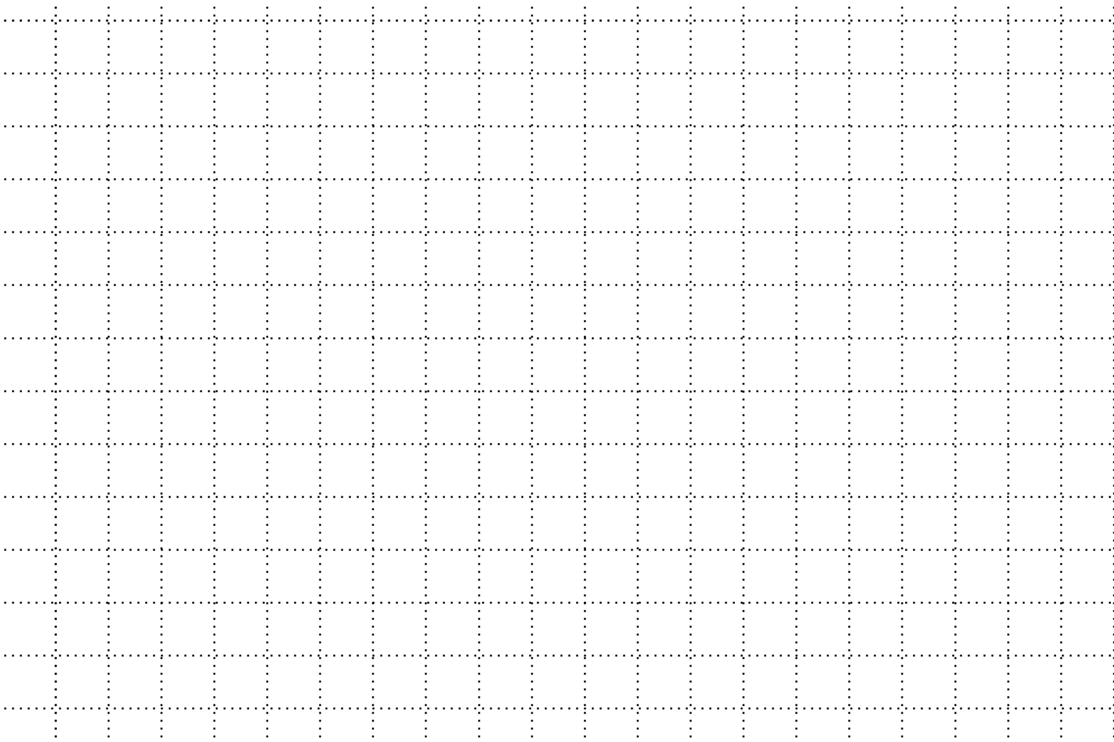


Figura 3.19:

Capítulo 4

Simetria no ENEM e OBMEP

O ENEM faz parte, direta ou indiretamente, da vida da grande maioria dos brasileiros na busca: do ensino superior em instituições públicas ou em faculdades particulares por meio de bolsas integrais ou parciais; cursos de formação técnica como o Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego (Pronatec); participação do programa Ciência sem fronteiras para os alunos que já ingressaram no curso superior; certificação de conclusão do ensino médio aos alunos com 18 anos ou mais, que não terminaram o segundo grau; desde que alcancem nota mínima de 450 pontos em cada uma das quatro disciplinas de conhecimento e 500 na redação.

A Matemática, que responde por um quarto da prova objetiva do ENEM, é fundamental para as pretensões de qualquer aluno que deseja alcançar seus objetivos. Por isso, ela não pode ser ignorada, nem mesmo por aqueles que procuram cursar faculdades, que tenham o mínimo de contato com a disciplina, ante dificuldade que julgam ter com a matéria. Pois, sem uma quantidade razoável de acertos em Matemática, no exame, o resultado pode ficar comprometido.

Dentre os onteúdos de Matemática exigidos no ENEM, a Geometria, principalmente a espacial e a plana, se destaca pela grande quantidade de questões contempladas. Como nosso objeto de estudo é a Simetria, tópico da Geometria, tivemos o interesse em observar sua incidência nos exames do ENEM e OBMEP. Notamos a ênfase que a banca organizadora dessas provas dá à simetria, principalmente, por intermédio do artista M. C. Escher (1898 – 1972), que dedicou sua existência e trabalho às artes gráficas.

A prova do ENEM, criada em 1998, a princípio, para avaliar o desempenho dos estudantes ao fim da educação básica, continha 63 questões, sendo, em média, 12 questões de Matemática. Em 2009, foi introduzida a proposta de unificar o concurso vestibular das universidades federais, e a prova passou a contar com 180 questões objetivas, das quais, 45 são de Matemática.

De 1998 a 2008, contabilizamos 16 questões resolvidas apenas com conhecimento de noções básicas de Simetria (rotação, translação e reflexão) ou com a ajuda dela. Ou seja, sua incidência é de 16 questões em 11 provas aplicadas, resultando em aproximadamente $1,45$ exercício, relacionado à simetria, por prova. De 2009 a 2015, a incidência de questões em que a ela aparece é de 9 exercícios em 7 exames, portanto, está presente em aproximadamente $1,3$ exercício a cada prova.

Já, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), promovida pelo Ministério de Ciência e Tecnologia (MCT) e pelo Ministério da Educação (MEC), é realizada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A prova é dirigida aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio das escolas públicas municipais, estaduais e federais que concorrem aos prêmios: medalha de ouro (500); de prata (1500); de bronze (4500); certificado de menção honrosa (46200); Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) aos 6500 medalhistas de ouro, prata ou bronze e, ainda, o Programa de iniciação Científica e de Mestrado (PICME) para os medalhistas de ouro, prata ou bronze de qualquer edição da OBMEP, matriculados no ensino superior poderá se candidatar ao PICME. Professores, escolas e secretarias municipais de educação dos alunos participantes também concorrem a prêmios.

Os principais objetivos da OBMEP são: estimular o estudo entre os alunos; melhorar a qualidade da Educação Básica; identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas; incentivar o aperfeiçoamento dos professores, contribuindo com sua valorização profissional e contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas.

Os alunos participantes são divididos em três níveis de acordo com seu grau de escolaridade. No Nível 1, são matriculados os alunos do 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental; no Nível 2, os alunos do 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental e no Nível 3, qualquer aluno do Ensino Médio. A prova é realizada em duas etapas. Na primeira fase, a prova é formada por 20 questões objetivas e, na segunda, o exame é composto por 6 questões discursivas, aplicado aos alunos classificados na primeira fase.

De acordo com o levantamento que fizemos nas provas da primeira fase, desde 2005, quando a OBMEP foi criada, a quantidade de questões relacionadas à Simetria é, ainda, maior do que a do ENEM, provavelmente por conta dos objetivos mais específicos do programa, tais como: identificação dos jovens talentos, e, também, pelo fato de a prova ser aplicada por níveis (faixa etária menor entre os alunos) favorecendo muitas ilustrações. Os resultados obtidos, em nossa pesquisa, mostram que o percentual de exercícios que envolvem simetria, nos três níveis da OBMEP, está na ordem de:

- Nível 1: 13,75%;
- Nível 2: 13,33% aproximadamente;
- Nível 3: 12,5%.

Ver [9] e [11].

Considerações finais

.

Há vários anos atuando como professor de Matemática do Ensino Básico, constatamos nos alunos, com inquietação, a maneira de como eles reagem à apresentação de alguns conteúdos matemáticos. Alguns parecem não se incomodar com a abstração ou não desses tópicos. No entanto, uma parcela significativa deles, frente a assuntos que não remetem significado aparente em seus cotidianos, torna-se, muitas vezes, desmotivada e pode até criar aversão pela disciplina, difícil de ser revertida.

A abordagem ao tema, em nosso trabalho, é fruto dessa inquietação. Optamos pela Simetria, principalmente, pelo significado que o conteúdo tem em nosso cotidiano. Acreditamos que o estudo dela constitui uma ferramenta salutar das isometrias, que permite desenvolver o conhecimento matemático dessas transformações geométricas bem como o de fornecer, consequentemente, instrumentos bastante úteis na resolução de problemas geométricos. E, ainda, desenvolver a capacidade de visualização mais dinâmica à Geometria.

No decorrer do trabalho, procuramos demonstrar, de maneira simples, a enorme contribuição que a Simetria confere a vários conteúdos matemáticos, tais como: vetor, funções inversas, números complexos, círculo trigonométrico e, principalmente, nas operações com matrizes, justificadas em todas as isometrias.

Vimos que, O GeoGebra, muito utilizado em nosso trabalho e pouco explorado nas escolas por professores e alunos, é uma ferramenta muito interessante, quando possível, ser desenvolvido em sala de aula, a ser trabalhado concomitantemente aos conteúdos. Pois, o programa favorece: a compreensão dos conceitos, as relações geométricas, a possibilidade de relacionar figuras e operar com elas.

Por fim, destacamos a relevância de se trabalhar situações-problemas, que despertem a curiosidade dos alunos, justamente, por elas aproximarem-se ao dia a dia deles.

Nossa experiência mostra, ainda, que diante de alguns jogos, exercícios contextualizados, engraçados e lúdicos, relacionados aos conteúdos ministrados nas aulas de matemática, tendem a envolver os discentes, daí, as chances de assimilação se tornam evidentes.

Referências Bibliográficas

[1] Bigode, Antonio Jose Lopes, Matemática hoje é feita assim, 2000, FTD

[2] BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais, matemática, Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, 1998

[3] CHIRÉIA, José Vagner, Transformações geométricas e a Simetria: Uma proposta para o Ensino Médio, 2013

[4] Dante, Luiz Roberto, Tudo é matemática: 7º ano, São Paulo: Ática, 2008

[5] Fomin, Dmitri and Genkin, Sergey and Itenberg, Ilia, Círculos Matemáticos: A experiência russa, Rio de Janeiro, Impa, 2010

[6] GIESTA, LFM, Dando movimento à forma: as transformações geométricas no plano, na formação continuada à distância de professores de Matemática. 123 f, 2012, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Severino Sombra, Vassouras

[7] Giovanni, Jose R and de Medeiros Parente, Eduardo Afonso, Aprendendo matemática, 2002, FTD

[8] Imenes, Luiz Marcio Pereira and Lellis, Marcelo Cestari Terra, Matemática, 2009, Moderna

[9] INEP–Disponıvel em: http://www. enem. inep. gov. br/arquivos, Básico, ENEM-Documento, Docbasico. pdf

[10] Paiva, Manoel, Matemática Paiva.(vol. 1, 2, 3), 2009, São Paulo: Moderna

[11] PORTAL OBMEP, Disponıvel em: http://www. OBMEP. gov. br/arquivos

[12] Reis, Elisandra Regina Sampaio dos, Estudo de simetria e seu ensino no nível fundamental e médio, 2013, Universidade de São Paulo

[13] Stormowski, Vandoir, Estudando matrizes a partir de transformações geométricas, 2008, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

[14] Veloso, Eduardo, Simetria e transformações geométricas, Textos de Geometria para professores. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2012