Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

PROFMAT

UFPB

O Número de Euler †

por

Ramon Formiga Figueira

sob a orientação do

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Janeiro/2017
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

F475n Figueira, Ramon Formiga.
O Número de Euler / Ramon Formiga Figueira.- João Pessoa, 2017.
79f. : il.
Orientador: Eduardo Gonçalves dos Santos
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Número de Euler. 3. Logaritmo natural. 4. Fatorial. 5. Fórmula de Stirling.

UFPB/BC CDU: 51(043)

O Número de Euler

por

Ramon Formiga Figueira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Eduardo Gonçalves dos Santos.

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Rodrigo Genuino Clemente

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente - UFRPE

Janeiro/2017

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelas maravilhas realizadas na minha vida. Este trabalho é, com certeza, mais uma prova de que Ele está no comando. Obrigado, Senhor, por se fazer presente durante toda a trajetória que me trouxe até aqui.

Aos meus pais, Eduardo e Maria Gorette, e a minha irmã, Rebeca, por estarem sempre ao meu lado, incentivando-me e ajudando-me a realizar meus sonhos.

A minha esposa, Mayara, por suportar com paciência e serenidade as dificuldades enfrentadas durante a realização deste trabalho, e ser para mim um porto seguro.

Aos meus colegas de curso, em especial aos amigos Rômulo, David, Diego, Maillson, José Carlos, Manoel e Erielson, por todo apoio durante nossa árdua caminhada no PROFMAT.

Aos professores do curso, Bruno, Carlos Bocker, Elisandra, Miriam, Flank, Napoleon, Lizandro e Lenimar, por todos os ensinamentos.

Ao professor Eduardo, por ter aceitado o desafio de ser meu orientador e ter me auxiliado, sempre com paciência e disponibilidade, nessa conquista.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais, Eduardo e Maria Gorette.

Resumo

O Número de Euler, denotado por e e correspondente à base dos Logaritmos Naturais, apesar de ser uma das constantes mais importantes da Matemática, tanto pela variedade de suas implicações matemáticas quanto pela quantidade de suas aplicações práticas, permanece desconhecido por muitos. É comum encontrarmos estudantes de Engenharia, ou até mesmo das Ciências Exatas, que só tomaram conhecimento da existência do e após um curso de Cálculo. Também não é difícil nos depararmos com alunos que, mesmo após tal contato, parecem nunca terem percebido a importância desse número. O e é uma constante versátil. Apesar de, em geral, aparecer relacionado a resultados envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral, ele se faz presente em diversos problemas de diferentes áreas da Matemática. Podemos encontrá-lo, além da Análise e Teoria de Funções, na Matemática Financeira, na Análise Combinatória, na Probabilidade, na Trigonometria, na Geometria, na Estatística, na Teoria dos Números. Neste trabalho, realizamos uma breve análise histórica sobre o descobrimento do Número de Euler, exibimos sua definição, além de formas alternativas de caracterizá-lo através de somas e produtos infinitos, e abordamos dois interessantes problemas nos quais ele se faz presente: o da contagem do número de partições de um conjunto não vazio finito e o da obtenção de uma aproximação para o fatorial de um número natural, no qual nos deparamos com a Fórmula de Stirling.

Palavras-chave: Número de Euler, Logaritmo Natural, Fatorial, Fórmula de Stirling.

Abstract

The Euler's Number, denoted by e and corresponding to the base of the Natural Logarithms, despite being one of the most important constants in Mathematics, both by the variety of its mathematical implications and by the number of its practical applications, remains unknown to many people. It is common to find Engineering or even Exact Sciences students who only became aware of the existence of e after taking a Calculus Course. It is also not difficult to find students who, even after such contact, seem to never realize the importance of this number. The e is a versatile constant. Although, in general, it appears related to results involving Differential and Integral Calculus, it is present in several problems of different Mathematics areas. We can find it, besides Analysis and Function Theory, in Financial Mathematics, Combinatorial Analysis, Probability, Trigonometry, Geometry, Statistics, Number Theory. In this work, we make a brief historical analysis about the discovery of the Euler's Number, we present its definition, as well as alternative ways of characterizing it through infinite sums and products. We also address two interesting problems in which it is present: the counting of the number of partitions of a finite non-empty set and obtaining an approximation for the factorial of a natural number, in which we find the Stirling's Approximation.

Keywords: Euler's Number, Natural Logarithm, Factorial, Stirling's Approximation.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Em sala de aula, é comum, quando estamos apresentando os conjuntos numéricos, questionarmos os alunos sobre a existência de números irracionais e pedirmos para que eles nos deem exemplos de tais números, de acordo com a sua própria experiência matemática. Não surpreendentemente, na maioria das vezes, a constante que representa a razão entre o comprimento de uma dada circunferência e seu diâmetro, a qual denominamos de π, se faz presente entre os exemplos, nos quais também se incluem os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Em algumas turmas, chegam a citar o Número de Ouro, ϕ, que, considerado por estudiosos a mais agradável proporção entre dois segmentos ou medidas, é utilizado na arte e arquitetura desde a Antiguidade. No entanto, um dos números irracionais mais importantes da Matemática dificilmente se mostra conhecido pelos estudantes: o Número de Euler.

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar aos interessados em Matemática, sejam eles professores, alunos ou simplesmente curiosos apaixonados por tal ciência, esse número tão relevante que permanece desconhecido por muitos, contando um pouco da sua história e exibindo alguns problemas de diferentes ramos nos quais ele se faz presente, por vezes até inesperadamente. Para isso, estruturamos o conteúdo em quatro capítulos, nos quais, além de definirmos o e, como o Número de Euler também é conhecido, buscamos revelar sua presença analisando algumas situações interessantes na Matemática Discreta.

No primeiro capítulo, tratamos de apresentar ao leitor, de maneira propriamente dita, o e. Inicialmente, buscamos situar o surgimento desse número na história da Matemática, realizando uma síntese contendo os principais elementos que constituem essa parte da história. Em seguida, apresentamos a sua definição como o limite da sequência cujo termo geral é dado por $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e provamos que ele pode ser representado pela série[1] $\sum \frac{1}{n!}$ ou, ainda, caracterizado como a base dos Logaritmos Naturais. A representação do Número de Euler por meio da série citada é a chave principal da demonstração de sua irracionalidade apresentada neste capítulo.

Nos capítulos que se seguem, inicia-se a apresentação de problemas nos quais o número e surge de modo inusitado. No segundo capítulo, apresentamos uma maneira

[1] Com a finalidade de simplificar a escrita, durante todo o trabalho, utilizaremos, por vezes, a notação $\sum \frac{1}{n!}$ para nos referirmos à série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

de calcular o número de partições de um conjunto não vazio finito a partir de uma equação na qual aparece o Número de Euler. O terceiro capítulo, por sua vez, é inteiramente dedicado à famosa Fórmula de Stirling, uma expressão matemática que nos dá uma aproximação para o fatorial de um número natural em função tanto de e quanto de π, o que é um resultado surpreendente.

No quarto e último capítulo, apresentamos três maneiras distintas de representar o número e como um produto infinito. Dentre tais representações encontram-se duas interessantes expressões, conhecidas como Fórmula de Pippenger e Fórmula de Catalan.

Capítulo 1

Conhecendo o Número de Euler

Este capítulo é destinado à apresentação do Número de Euler. Nele, contamos um pouco da história que envolve o surgimento desse número e apresentamos sua definição e algumas outras formas de caracterizá-lo.

1.1 Um pouco de história

Diferentemente do número π, do qual já se tinha conhecimento desde a Antiguidade, o Número de Euler, denotado por e e aproximadamente igual a $2,71828$, só veio a ser descoberto na Idade Moderna. De acordo com Maor (1994, p.16), o primeiro reconhecimento explícito do papel do número e na Matemática parece ter sido feito em 1618, na segunda edição da tradução de Edward Wright para a obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*[1] de John Napier, o inventor, ou melhor, descobridor dos logaritmos.

O contexto de nascimento do capitalismo e consequente crescimento do comércio internacional na Idade Moderna, muito provavelmente, foi o agente motivador para a descoberta do Número de Euler, apesar de, na mesma época, outras questões, como a quadratura da hipérbole equilátera, conduzirem ao mesmo número. Mas, como esse crescimento comercial motivou o surgimento do e?

Segundo Maor (1994, p.26), o aparecimento do Número de Euler poderia estar diretamente ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos. Se um capital inicial de R$ 1,00 for investido a uma taxa de juros anual de 100% capitalizados anualmente, ao fim do primeiro ano o montante obtido será dado por $M = (1+1)^1 = 2$. Caso a capitalização fosse realizada semestralmente, esse valor passaria a ser $M = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$. Da mesma forma, se a capitalização ocorresse a cada trimestre, teríamos $M = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2,44$. De maneira geral, realizando a capitalização n

[1] Em um dos apêndices desta obra, aparece o equivalente da declaração de que $\log_e 10 = 2,302585$ (MAOR, 1994, p.16).

vezes em um ano, obteríamos $M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. É esta última expressão que relaciona a Matemática Financeira ao Número de Euler.

Mesmo que o conceito de limite, propriamente dito, só tenha sido desenvolvido posteriormente, a partir da segunda metade do século XVII, por meio dos trabalhos de Newton e Leibniz, é provável que na época de Napier, início desse mesmo século, alguém já tenha se perguntado o que acontece com M quando aumentamos indefinidamente o valor de n. O processo de verificação do comportamento da função que representa o montante à medida que n cresce conduziu os matemáticos ao encontro do e. Por meio da Tabela 1.1 é possível inferir esse comportamento. Como os valores de M apresentados são aproximações com, no máximo, 5 casas decimais, não conseguimos enxergar a variação que ocorre, por exemplo, quando passamos de $n = 1000000$ para $n = 10000000$ e, intuitivamente, somos tentados a concluir que com o crescimento do valor de n essa variação tenderá a acontecer em casas decimais cada vez mais distantes da vírgula. Consequentemente, é natural pensar que, mesmo aumentando indefinidamente o valor de n, o montante resultará em um número real bem definido, o Número de Euler.

n	$M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	$2,25$
3	$2,37037$
4	$2,44141$
5	$2,48832$
10	$2,59374$
50	$2,69159$
100	$2,70481$
1000	$2,71692$
10000	$2,71815$
100000	$2,71827$
1000000	$2,71828$
10000000	$2,71828$

Tabela 1.1: Comportamento do montante com o aumento do valor de n.

Como afirmamos anteriormente, os trabalhos relacionados à quadratura da hipérbole equilátera, isto é, ao cálculo da área sob a curva $y = \frac{1}{x}$, também conduziram os matemáticos do século XVII a se depararem com o e. O conhecido matemático Pierre de Fermat, em torno do ano 1640 (cerca de trinta anos antes do desenvolvimento do Cálculo Integral por Newton e Leibniz), demonstrou que a área delimitada pelas retas $x = 0$ e $x = a$, pelo eixo das abscissas e pela curva de equação $y = x^n$, com $n \neq -1$, é dada por $\frac{a^{n+1}}{n+1}$. Esse resultado foi muito importante, pois possibilitava a quadratura não somente de uma curva, mas de toda uma família de curvas. Apesar disso, a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ permaneceu fora dessa grande família contemplada, já que para $n = -1$ o denominador $n+1$ da expressão se torna igual a 0. Como dito por Maor (1994, p.66), a frustração de Fermat por sua expressão não ter coberto este caso tão importante deve ter sido grande.

Coube a um contemporâneo de Fermat, Grégoire de Saint-Vincent, resolver, pelo menos em parte, o problema da quadratura da hipérbole equilátera. Em seu trabalho intitulado *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, Grégoire mostrou que a área sob a hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$ num intervalo $[a, b]$ é igual à área sob esta mesma curva num intervalo $[c, d]$, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Assim, se percorrermos o eixo das abscissas no sentido positivo, a partir de um ponto situado a uma distância d em relação a uma certa referência, digamos o ponto $x = 1$, ao dobrarmos progressivamente essa distância, isto é, ao passarmos pelos pontos cujas distâncias em relação a $x = 1$ são $2d, 4d, 8d, 16d$, e assim sucessivamente, a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ no intervalo de 1 até os pontos citados passa a ser $2A, 3A, 4A, 5A$, e assim por diante (considerando, obviamente, que a área sob a hipérbole no intervalo de 1 ao ponto de distância d é dada por A). Desta forma, é possível observar que à medida que as distâncias crescem em progressão geométrica, a área sob a curva cresce em progressão aritmética. Este resultado implica que a relação entre a área e a distância é logarítmica. Foi justamente para expressar explicitamente essa relação que um dos alunos de Saint-Vincent, Alfonso Anton de Sarasa, fez uso, talvez pela primeira vez na história da Matemática, de uma função logarítmica (até então, os logaritmos eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo) (MAOR, 1994, p.67).

Levando em consideração o resultado de Saint-Vincent e denotando por $A(t)$ a área sob a hipérbole compreendida no intervalo de $x = 1$ até um ponto variável $x = t$, podemos escrever $A(t) = \log t$, onde log não representa o logaritmo de base 10, mas um logaritmo de base desconhecida. O que Alfonso fez foi justamente escrever uma expressão desse tipo, e, assim como fizemos, ele não explicitou qual seria a base do logaritmo utilizado. A própria matemática desenvolvida nos séculos XVII e XVIII encarregou-se de revelar que tal base correspondia ao Número de Euler.

Diversos outros grandes nomes da Matemática deixaram sua marca na história, que continua sendo construída, do número e. Seria um desleixo deixar de citar os matemáticos Jacob Bernoulli (1654-1705), que, em 1683[2], estudando o problema da capitalização contínua, mostrou que o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende a infinito se encontra entre os números 2 e 3, e Leibniz (1646-1716), responsável pela primeira aparição propriamente dita do número e, em 1690[3]. Apesar de existirem muitos outros matemáticos que contribuíram imensamente para que o número e viesse a se tornar tão importante para a Matemática quanto é hoje, para os fins deste trabalho, é suficiente que falemos da contribuição de apenas mais um deles: Leonhard Euler.

Euler é uma figura da Matemática que dispensa comentários. Uma breve pesquisa na internet é suficiente para revelar, até mesmo ao mais desatento leitor, o quão importante este homem foi para o desenvolvimento dessa ciência (se pesquisarmos rapidamente por listas contendo os dez matemáticos mais influentes de todos os tempos, é muito provável que ele esteja no topo em todas elas). Nascido em 1707, na cidade suíça de Basileia, durante seus 76 anos de vida, Euler contribuiu para o crescimento de diversas áreas da Matemática, tanto pura quanto aplicada, além da Física e da Astronomia, chegando a publicar mais de 500 artigos (BOYER, 2010, p.304). Além de suas contribuições em termos de conteúdo, ele foi um dos matemáticos que mais exerceram influência sobre as notações que são utilizadas hodiernamente. De acordo com Boyer (2010, p.305), Euler "foi o construtor de notação mais bem-sucedido em todos os tempos". Foi ele quem utilizou primeiramente o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$ e tornou largamente conhecido o uso da letra π para expressar a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, apesar de não ter sido o primeiro a utilizar essa notação. O uso da letra $\sum$ para indicar um somatório e do símbolo $f(x)$ para uma função de x também são devidos a Euler.

Até aqui, durante todo o texto, utilizamos a expressão "Número de Euler" ou o símbolo "e" para tratar de um número que, como discutimos, corresponde a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ou à base dos logaritmos naturais. O termo "Número de Euler" não é utilizado por acaso. Apesar de, na história da Matemática, o número que é tema desta dissertação ter sido descoberto no século XVII, somente no século XVIII, após Euler ter empregado o símbolo e para se referir a ele, surgiu uma notação padronizada para representá-lo. Segundo Boyer (2010, p.305), em uma exposição manuscrita dos resultados de experiências sobre disparo de canhões, em 1727 ou 1728, Euler utilizou a letra e "mais de uma dúzia de vezes para representar a base do sistema de logaritmos naturais". Além disso, em uma carta a Goldbach em 1731, o matemático usou o e para expressar "aquele número cujo logaritmo hiperbólico = 1" (BOYER,

[2]Nessa época a conexão entre $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e os logaritmos naturais ainda não havia sido identificada.

[3]Apesar do e, já ter aparecido, como mencionado anteriormente, em trabalhos do início do século XVII, foi numa carta de Leibniz endereçada a Huygens, que se usou pela primeira vez uma notação para ele, revelando que naquela época ele já era claramente reconhecido. Em sua carta, Leibniz utilizou a letra b para denotá-lo.

2010, p.305). Em suas publicações, Euler também não abria mão de utilizar a letra e para se referir à base dos logaritmos naturais. Foi em sua obra intitulada *Mechanica*, de 1736, que o e apareceu impresso pela primeira vez (BOYER, 2010, p.305). Na Figura 1.1, é apresentado um trecho de uma edição de 1922 de uma de suas obras mais conhecidas, a *Introductio in analysin infinitorum*[4], publicada pela primeira vez em 1748, no qual ele utiliza a notação e e apresenta uma aproximação com 23 casas decimais para esse número, obtida por meio da série $\sum \frac{1}{n!}$.

128 TOMI PRIMI CAPUT VII § 122—123 [90

qui termini, si in fractiones decimales convertantur atque actu addantur, praebebunt hunc valorem pro *a*

$$2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,028,$$

cuius ultima adhuc nota veritati est consentanea.

Quodsi iam ex hac basi logarithmi construantur, ii vocari solent logarithmi *naturales* seu *hyperbolici*, quoniam quadratura hyperbolae per istiusmodi logarithmos exprimi potest. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 18284 59 etc. constanter litteram

$$e,$$

quae ergo denotabit basin logarithmorum naturalium seu hyperbolicorum [1]), cui respondet valor litterae $k = 1$; sive haec littera *e* quoque exprimet summam huius seriei

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc. in infinitum.}$$

Figura 1.1: Trecho da obra *Introductio in analysin infinitorum*, de Leonhard Euler.

1.2 Definição

A partir desta seção, deixamos um pouco de lado a história do Número de Euler e passamos a tratar do cálculo matemático propriamente dito. Aqui, mostramos que a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ possui limite quando n tende a infinito, e definimos o número e como sendo justamente esse limite. Para isto, utilizamos o importante resultado da Análise Matemática o qual garante que

[4]Nesta obra, Euler demonstrou que o número e, considerado a base dos logaritmos naturais, também correspondia ao limite da sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende a infinito, e podia ser obtido por meio da série $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$.

toda sequência monótona e limitada é convergente. Ao leitor menos familiarizado tanto com o resultado citado quanto com os termos "sequência numérica", "limite", "sequência monótona", "sequência limitada" e "sequência convergente", aconselhamos que leia o conteúdo do Apêndice A antes de continuar a leitura deste capítulo.

Proposição 1.1 *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Demonstração: A inequação apresentada pode ser facilmente demonstrada utilizando-se a conhecida desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Sabemos que

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Além disso,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Desta forma, como $\left(1-\frac{1}{m+1}\right) < 1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)$ para todo todo $m, n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\sqrt[m+n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+(m+1)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)}{m+n+1} = 1$$

e, portanto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} < 1, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

■

Proposição 1.2 *A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, é monótona crescente.*

Demonstração: Pela Proposição 1.1, temos

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Portanto,

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Assim, como

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n = \left(\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right)^n = \frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n},$$

obtemos

$$\frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1}.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Logo,

$$x_n < x_{n+1}.$$

■

Pela Proposição 1.1, temos que a sequência de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é limitada, já que, tomando, por exemplo $m = 1$,

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (1+1)^2 = 4, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, como, pela Proposição 1.2, tal sequência também é monótona, concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente (ver Teorema A.3 do Apêndice A). Isto significa que existe um número real que corresponde a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Definição 1.1 *O Número de Euler é o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é,*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Existem diversas outras maneiras de caracterizar o número e, apesar da definição 1.1 ser a mais usual. Neste capítulo, mostraremos que o e pode ser caracterizado por meio da série $\sum \frac{1}{n!}$ e que também corresponde à base do logaritmo que denominamos de natural.

1.3 O número *e* como limite de uma série numérica

Proposição 1.3 *O número e é o limite da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por*

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

isto é,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Demonstração: Utilizando a expressão de expansão do Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Como cada fator entre parênteses no membro direito da igualdade acima é não-negativo e menor do que 1, pode-se concluir que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, fixando $k \geq 1$ arbitrário, temos que, se $n > k$ então

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Assim, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = s_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq e, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} s_n \leq e.$$

Concluímos, desta forma, que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$. ■

A caracterização dada pela Proposição 1.3 nos permite calcular, de uma maneira mais conveniente, aproximações de e.

Exemplo: Para $n = 10$, temos que

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = 2,7182818\overline{011463844797178130 5},$$

que já é uma aproximação para o valor de e com precisão de 7 casas decimais.

1.3.1 Irracionalidade de e

A seguir, na Proposição 1.4, é apresentado um resultado que nos possibilita demonstrar a irracionalidade do Número de Euler.

Proposição 1.4 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}, \text{ com } 0 < \theta_n < 1.$$

Demonstração: Pela Proposição 1.3, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= s_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^2 \cdot n!} \\ &= \frac{n+2}{(n^2+2n+1) \cdot n!} \\ &= \frac{n+2}{[n(n+2)+1] \cdot n!} \\ &= \frac{n+2}{[(n+2)(n+\frac{1}{n+2})] \cdot n!} \\ &= \frac{1}{(n+\frac{1}{n+2}) \cdot n!} \\ &< \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\theta_n \in \mathbb{R}$, com $0 < \theta_n < 1$, tal que

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}.$$

■

Proposição 1.5 *O Número de Euler é irracional.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que e seja um número racional, ou seja, que existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$e = \frac{p}{q}.$$

A partir dessa suposição, concluímos que $q! \cdot e$ é um número natural. Assim, de acordo com a Proposição 1.4, fazendo $n = q$ obtemos

$$\begin{aligned} q! \cdot e &= q! \cdot \left(s_q + \frac{\theta_q}{q \cdot q!} \right) \\ &= q! \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta_q}{q \cdot q!} \right) \\ &= q! + q! + \frac{q!}{2} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta_q}{q}. \end{aligned}$$

Como $q! + q! + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{q!} \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{\theta_q}{q} = q! \cdot e - \left(q! + q! + \tfrac{q!}{2!} + \cdots + \tfrac{q!}{q!} \right) \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição, pois $0 < \frac{\theta_q}{q} < 1$. Logo, nossa suposição não pode ser verdadeira e, portanto, $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. ■

A demonstração da irracionalidade do número e aqui apresentada pode ser encontrada no trabalho de Kuz'min e Shirshov (1999, p.113).

1.4 O número *e* e os Logaritmos Naturais

Nesta seção, é apresentada uma série de resultados que nos conduzem à demonstração de que o Número de Euler é a base dos Logaritmos Naturais.

Definição 1.2 *Considere a função $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 1/x$. Seja H o gráfico de h, isto é,*

$$H = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right); x > 0 \right\}.$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, denominamos faixa da hipérbole o conjunto H_a^b do plano limitado pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abcissas e pela hipérbole H.

Proposição 1.6 *Para todo $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.*

Demonstração: Considere, sem perda de generalidade, $a < b$ e seja $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$, uma partição do intervalo $[a, b]$, na qual todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ possuem mesmo comprimento, igual a $\frac{b-a}{n}$. Temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} \leq \text{área } H_a^b \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}.$$

Dado $k > 0$, considere a partição $ak = x_0k < x_1k < \cdots < x_{i-1}k < x_ik < \cdots < x_nk = bk$, na qual cada subintervalo $[x_{i-1}k, x_ik]$ tem comprimento igual a $\frac{k(b-a)}{n}$. Temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k(b-a)}{nx_ik} \leq \text{área } H_{ak}^{bk} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{k(b-a)}{nx_{i-1}k}.$$

Assim, a partir das inequações anteriores, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{nx_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{nx_{i-1}} \leq \text{área } H_a^b - \text{área } H_{ak}^{bk} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{nx_{i-1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{nx_i}.$$

Logo,

$$-\frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \leq \text{área } H_a^b - \text{área } H_{ak}^{bk} \leq \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right).$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{(b-a)}{ab},$$

temos que

$$-\frac{(b-a)^2}{(ab)n} \leq \text{área } H_a^b - \text{área } H_{ak}^{bk} \leq \frac{(b-a)^2}{(ab)n}.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$0 \leq \text{área } H_a^b - \text{área } H_{ak}^{bk} \leq 0.$$

Portanto, área $H_a^b =$ área H_{ak}^{bk}. ■

Por conveniência, trabalharemos com a noção de "área orientada", ou seja, provida de sinal + ou −, e convencionaremos que a área da faixa da hipérbole será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando $a = b$. Utilizaremos a notação a seguir.

$$\text{ÁREA } H_a^b = \begin{cases} \text{área } H_a^b > 0, & \text{se } a < b \\ -\text{área } H_a^b < 0, & \text{se } b < a \\ 0, & \text{se } a = b \end{cases}.$$

Note que ÁREA $H_a^b = -$ÁREA H_b^a.

Proposição 1.7 *Dados* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{ÁREA } H_a^b + \text{ÁREA } H_b^c = \text{ÁREA } H_a^c.$$

Demonstração: Analisando cada um dos seis casos possíveis, temos:

(i) Se $a \leq b \leq c$, então

$$\text{ÁREA } H_a^c = \text{área } H_a^c = \text{área } H_a^b + \text{área } H_b^c = \text{ÁREA } H_a^b + \text{ÁREA } H_b^c.$$

(ii) Se $a \leq c \leq b$, então

$$\text{ÁREA } H_a^b = \text{área } H_a^b = \text{área } H_a^c + \text{área } H_c^b = \text{ÁREA } H_a^c - \text{ÁREA } H_b^c.$$

(iii) Se $b \leq a \leq c$, então

$$\text{ÁREA } H_b^c = \text{área } H_b^c = \text{área } H_b^a + \text{área } H_a^c = -\text{ÁREA } H_a^b + \text{ÁREA } H_a^c.$$

(iv) Se $b \leq c \leq a$, então

$$-\text{ÁREA } H_a^b = \text{área } H_b^a = \text{área } H_b^c + \text{área } H_c^a = \text{ÁREA } H_b^c - \text{ÁREA } H_a^c.$$

(v) Se $c \leq a \leq b$, então

$$-\text{ÁREA } H_b^c = \text{área } H_c^b = \text{área } H_c^a + \text{área } H_a^b = -\text{ÁREA } H_a^c + \text{ÁREA } H_a^b.$$

(vi) Se $c \leq b \leq a$, então

$$-\text{ÁREA } H_a^c = \text{área } H_c^a = \text{área } H_c^b + \text{área } H_b^a = -\text{ÁREA } H_b^c - \text{ÁREA } H_a^b.$$

Portanto, dados $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{ÁREA } H_a^b + \text{ÁREA } H_b^c = \text{ÁREA } H_a^c.$$

■

Definamos uma função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, pondo, para cada $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \text{ÁREA } H_1^x.$$

Claramente, f é uma função crescente e, portanto, monótona injetiva. Além disso, para cada $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(xy) = \text{ÁREA } H_1^{xy} = \text{ÁREA } H_1^x + \text{ÁREA } H_x^{xy}.$$

Como ÁREA H_x^{xy} = ÁREA H_1^y, obtemos

$$f(xy) = \text{ÁREA } H_1^x + \text{ÁREA } H_1^y = f(x) + f(y).$$

Desta forma, pelo Teorema de caracterização das funções logarítmicas (ver Apêndice B), existe $a > 0$, tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$. Escreveremos $\ln x$ em vez de $\log_a x$ e chamaremos o número $\ln x$ de *Logaritmo Natural* de x.

Como, por definição, temos claramente que $f(x) = \ln x$ é uma função crescente, de acordo com o que foi comentado anteriormente, concluímos que a base dos Logaritmos Naturais é um número real maior do que 1, ou seja, $a > 1$ (pois $f(a) = 1 > 0 = f(1)$). Provaremos a seguir que essa base corresponde ao Número de Euler.

Proposição 1.8 *O número e é a base dos Logaritmos Naturais.*

Demonstração: Considere a Figura 1.2.

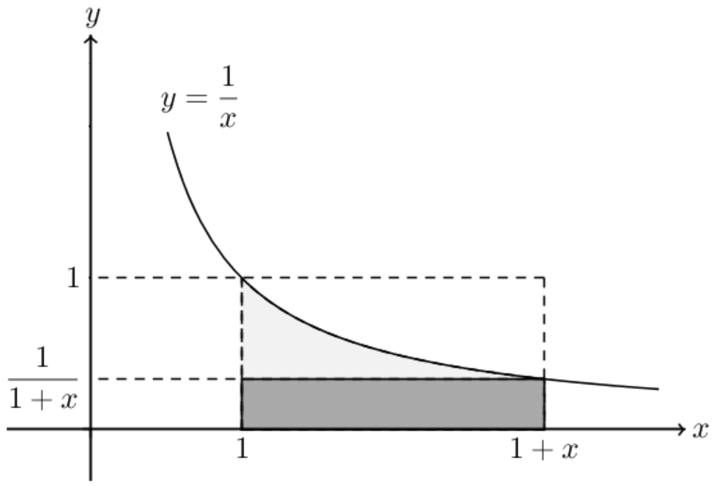

Figura 1.2: Representação da faixa da hipérbole H_1^{1+x} para estimativa de $\ln(1+x)$.

Nela, podemos identificar um retângulo menor, com base e altura de medidas x e $\frac{1}{1+x}$ respectivamente, a faixa H_1^{1+x}, e um retângulo maior, cuja base mede x e cuja altura é igual a 1. Comparando as áreas dessas três regiões do plano, temos que, para todo $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo cada membro desta inequação por x, obtemos

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, se tomarmos $x = \frac{1}{n}$, temos

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Logo, como $\ln k = \log_a k$, com $a > 1$,

$$a^{\frac{n}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a.$$

Como $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1 quando n cresce indefinidamente, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$a \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq a,$$

e, portanto,

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

■

A caracterização do Número de Euler como a base dos Logaritmos Naturais nos permite provar um importante resultado: a função exponencial de base e é igual à sua própria derivada.

1.4.1 Uma consideração sobre a função exponencial de base *e*

Nesta subseção, utilizamos a interpretação geométrica do Logaritmo Natural para demonstrar que a função $f(x) = e^x$ e sua derivada são iguais.

Proposição 1.9 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função definida por $f(x) = e^x$. A derivada de f é dada por*

$$f'(x) = e^x.$$

Demonstração: Sabemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Considere a Figura 1.3, na qual é apresentada a faixa da hipérbole $H_1^{e^h}$ para $h > 0$.

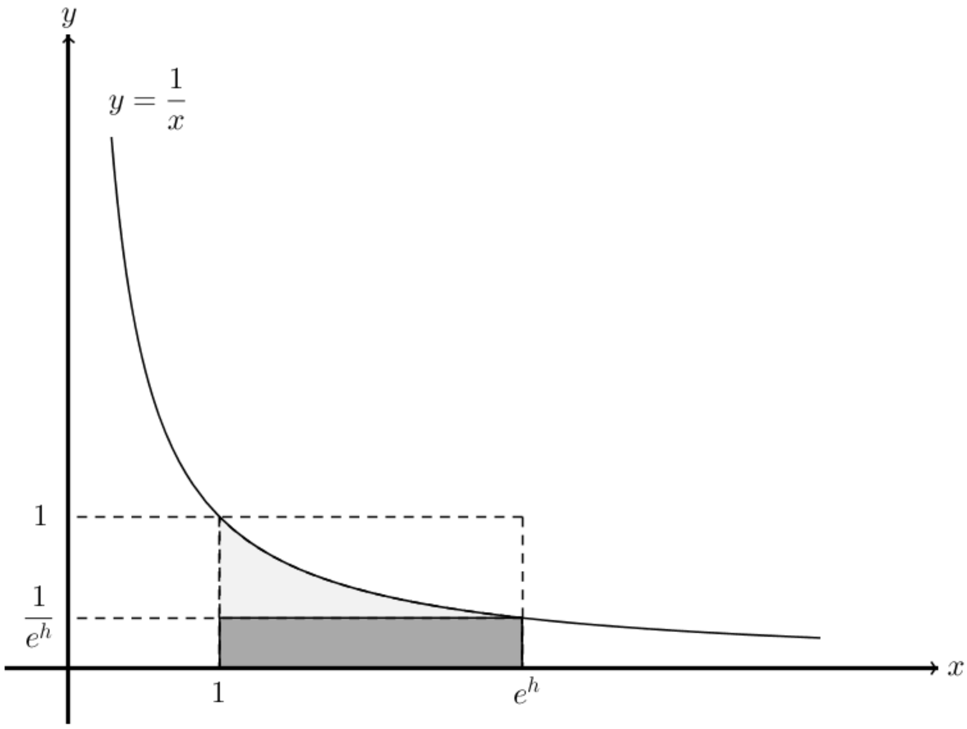

Figura 1.3: Representação da faixa da hipérbole $H_1^{e^h}$ para $h > 0$.

Como é possível observar, a área do retângulo de base $e^h - 1$ e altura $\frac{1}{e^h}$ é menor do que a área da faixa da hipérbole $H_1^{e^h}$, dada por $\ln(e^h) = h$. Além disso, a área do retângulo de base $e^h - 1$ e altura igual a 1 é maior do que as áreas citadas anteriormente. Desta forma, temos que

$$\frac{e^h - 1}{e^h} < h < e^h - 1.$$

Já que $h > 0$, dividindo os membros das desigualdades por $e^h - 1$, obtemos

$$\frac{1}{e^h} < \frac{h}{e^h - 1} < 1.$$

Assim,

$$1 < \frac{e^h - 1}{h} < e^h.$$

Fazendo $h \to 0$, obtemos

$$1 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} e^h = 1,$$

e, portanto,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Considere, agora, a Figura 1.4, na qual é apresentada a faixa da hipérbola $H_1^{e^h}$ para $h < 0$.

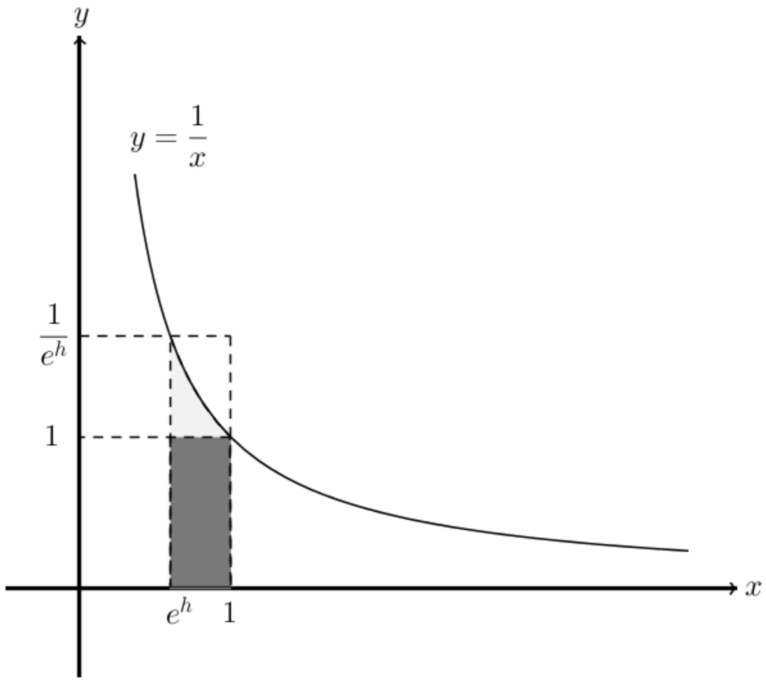

Figura 1.4: Representação da faixa da hipérbole $H_1^{e^h}$ para $h < 0$.

Utilizando o mesmo raciocínio, podemos concluir que

$$1 - e^h < -h < \frac{1 - e^h}{e^h}.$$

Como $h < 0$, dividindo os membros das desigualdades por $1 - e^h$, obtemos que

$$1 < \frac{-h}{1 - e^h} < \frac{1}{e^h},$$

e, portanto,

$$e^h < \frac{e^h - 1}{h} < 1.$$

Assim, fazendo $h \to 0$, obtemos

$$1 = \lim_{h\to 0^-} e^h \leq \lim_{h\to 0^-} \frac{e^h - 1}{h} \leq 1.$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1 = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Concluímos, então, que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Por fim, obtemos que

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h\to\infty} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

■

Capítulo 2

O Número de Euler e a Análise Combinatória

O Número de Euler, apesar de aparecer com maior frequência no estudo da Análise e Teoria de Funções, surge de maneira inusitada na resolução de problemas em diversas outras áreas da Matemática. Neste capítulo é apresentado um problema de Combinatória no qual o número e aparece inesperadamente[1].

2.1 O problema das partições

Definição 2.1 *Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que a família de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ de A é uma **partição** se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$.
2. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A$.
3. $A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow A_i = A_j$.

Exemplo: Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Os conjuntos

$$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}\} \text{ e } \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}\}$$

são exemplos de partições de A.

Tendo definido o que seria uma partição, estamos interessados em responder a seguinte pergunta: *Dado um conjunto não vazio finito, quantas partições esse conjunto possui?*

[1]Este problema é abordado por Kuz'min e Shirshov (1999, pp.113-115).

Denotemos por $\tau(n)$ o número de partições de um conjunto não vazio com n elementos. É fácil verificar que $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 2$ e $\tau(3) = 5$. Mas, à medida que n aumenta, a tarefa de contar o número de partições torna-se cada vez mais trabalhosa. Será que é possível encontrarmos uma expressão que nos informe diretamente o valor de $\tau(n)$ a partir de um n dado?

Proposição 2.1 *O número de partições de um conjunto não vazio finito com n elementos é dado pela seguinte relação de recorrência:*

$$\tau(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \tau(k),$$

com $\tau(0) = 1$.

Demonstração: Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito com n elementos. Considere $\omega_{x_1}(k)$ o número de partições de X nas quais o subconjunto que contém x_1 possui k elementos, com $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Claramente, temos

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{x_1}(k).$$

Para obtermos uma partição de X na qual o subconjunto que contém x_1 possua k elementos, realizamos o seguinte procedimento:

(i) Escolhemos $k-1$ elementos do conjunto $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, os quais constituirão, juntamente com x_1, um subconjunto $Y \subset X$ com k elementos (o que pode ser feito de $\binom{n-1}{k-1}$ maneiras distintas);

(ii) Escolhemos uma partição do conjunto $X - Y$ (o que pode ser feito de $\tau(n-k)$ modos distintos, considerando $\tau(0) = 1$).

Desta forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem, concluímos que

$$\omega_{x_1}(k) = \binom{n-1}{k-1} \tau(n-k),$$

e, portanto,

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \tau(n-k).$$

Como $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$, podemos escrever

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{n-k} \tau(n-k) = \binom{n-1}{n-1} \tau(n-1) + \binom{n-1}{n-2} \tau(n-2) + \cdots + \binom{n-1}{0} \tau(0).$$

Logo,

$$\tau(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \tau(k).$$

■

Proposição 2.2 *O número de partições de um conjunto não vazio finito com n elementos é dado por*

$$\tau(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Demonstração: Utilizaremos o Segundo Princípio da Indução Finita para provar que

$$e \cdot \tau(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, n \geq 1.$$

(i) Para $n = 1$, temos que a sentença é válida, já que

$$\begin{aligned} e \cdot \tau(1) &= e \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!} + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \cdots + \frac{k}{k!} + \frac{k+1}{(k+1)!} + \cdots\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}. \end{aligned}$$

(ii) Supondo que ela seja válida para todo inteiro positivo menor do que ou igual a n, obtemos

$$\begin{aligned} e \cdot \tau(n+1) &= e \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tau(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [e \cdot \tau(k)] \\ &= \binom{n}{0} [e \cdot \tau(0)] + \binom{n}{1} [e \cdot \tau(1)] + \cdots + \binom{n}{n} [e \cdot \tau(n)] \\ &= \binom{n}{0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + \binom{n}{1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} + \cdots + \binom{n}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \end{aligned}$$

Como, pela hipótese de indução, cada uma das séries na equação anterior é convergente, pois

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{k!} = e \cdot \tau(m), \forall m \in \{1, 2, 3, \dots n\},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
e \cdot \tau(n+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n}{0}\frac{1}{k!}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{n}{1}\frac{k}{k!}\right] + \cdots + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{n}{n}\frac{k^n}{k!}\right] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{n}{0}\frac{1}{k!}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{n}{1}\frac{k}{k!}\right] + \cdots + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{n}{n}\frac{k^n}{k!}\right] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{n}{0}\frac{1}{k!} + \binom{n}{1}\frac{k}{k!} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{k^n}{k!}\right] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}k + \cdots + \binom{n}{n}k^n\right] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(1+k)^n \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{n+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{1^{n+1}}{1!} + \frac{2^{n+1}}{2!} + \frac{3^{n+1}}{3!} + \cdots + \frac{k^{n+1}}{k!} + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$e \cdot \tau(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, n \geq 1.$$

Concluímos, portanto, que o número de partições de um conjunto não vazio finito com n elementos é dado por

$$\tau(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

∎

Apesar de termos encontrado uma expressão que informa diretamente o valor de $\tau(n)$ a partir de um n dado (respondendo a pergunta feita no início deste capítulo), é importante atentarmos para o fato de que tal expressão representa uma fórmula inconveniente para o cálculo de $\tau(n)$, devido à presença da série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. No entanto, para os propósitos deste trabalho, o resultado apresentado na Proposição 2.2 é bastante satisfatório, tendo em vista o objetivo de mostrar que o Número de Euler se faz presente inusitadamente no problema de contar a quantidade de partições de um dado conjunto não vazio finito.

Capítulo 3

Uma aproximação para o fatorial de um número natural

O principal objetivo deste capítulo é apresentar uma importante expressão que nos dá uma aproximação para o fatorial de um número natural, a famosa Fórmula de Stirling, desenvolvida independentemente em 1730 pelos matemáticos James Stirling (1692-1770) e Abraham De Moivre (1667-1754) (YOUNG, 1992, p.266). O que torna essa expressão tão relevante para o nosso estudo é o surpreendente fato de que tal aproximação envolve o Número de Euler, além do conhecido número π. Neste capítulo, apresentamos uma série de resultados que nos conduzem à demonstração dessa fórmula, baseando-nos na sugestão de Young (1992, p.267).

3.1 A Fórmula de Wallis

Para demonstrarmos a Fórmula de Stirling de acordo com os passos sugeridos por Young (1992, p.267), precisamos utilizar uma forma alternativa de um resultado que, assim como a expressão de James Stirling e De Moivre, também é bastante conhecido e nos permite calcular aproximações para o número π, a Fórmula de Wallis, atribuída ao matemático inglês John Wallis (1616-1703).

O Produto de Wallis, como também é conhecida essa fórmula, em geral, é apresentado da seguinte forma:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

Veremos, no entanto, que esse resultado pode ser expresso como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{\pi}.$$

É essa segunda forma para a Fórmula de Wallis que nos será útil na demonstração da Fórmula de Stirling.

Em sua obra *Arithmetica infinitorum*, publicada em 1656, Wallis, na busca pelo cálculo da área do círculo de raio unitário, computou, utilizando o método dos indivisíveis de Cavalieri, as áreas, no intervalo de 0 a x, sob as curvas de equações do tipo

$$y = (1 - x^2)^n, n \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

obtendo os seguintes resultados para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, respectivamente,

$$\begin{aligned}
&x,\\
&x - \frac{1}{3}x^3,\\
&x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,\\
&x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7,\\
&x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9,\\
&\qquad\quad\vdots
\end{aligned}$$

Como a expressão analítica da circunferência de centro na origem e raio unitário é dada por $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, Wallis, achou que, a partir dos resultados obtidos, válidos para expoentes inteiros não negativos, poderia encontrar uma maneira de calcular a área do círculo de raio igual a 1. Essa tentativa o levou a desenvolver um método de interpolação que o conduziu à descoberta da fórmula que leva seu nome.

Se calcularmos os valores das áreas das curvas do tipo $y = (1 - x^2)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, no intervalo de 0 a 1, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
1 &= 1,\\
1 - \frac{1}{3} &= \frac{2}{3},\\
1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5},\\
1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7},\\
1 - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{4}{7} + \frac{1}{9} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}.
\end{aligned}$$

As frações que aparecem no lado direito das igualdades já começam a revelar a expressão que Wallis encontrou. Desta forma, avaliar a integral da função $f(x) =$

$(1-x^2)^n$, definida no intervalo $[0,1]$, nos parece ser um bom ponto de partida para demonstrarmos a Fórmula de Wallis.

Proposição 3.1 *Seja*

$$I(n) = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx.$$

Para todo número real $n \geq 1$, a seguinte relação de recorrência é válida:

$$I(n) = \frac{2n}{2n+1} \cdot I(n-1).$$

Demonstração: Utilizando a técnica de integração por partes, temos que, para todo real $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I(n) &= \left[x\left(1-x^2\right)^n\right]_0^1 + 2n\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n-1} dx. \\ &= 2n\int_0^1 \left(1-\left(1-x^2\right)\right)\left(1-x^2\right)^{n-1} dx \\ &= 2n\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n-1} dx - 2n\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \\ &= 2n \cdot I(n-1) - 2n \cdot I(n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I(n) = \frac{2n}{2n+1} \cdot I(n-1).$$

■

Proposição 3.2 *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$I(n) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

Demonstração: Mostraremos que a sentença apresentada é válida utilizando o Primeiro Princípio da Indução Finita (ver Axioma C.1 do Apêndice C).

(i) Para $n=1$, temos que

$$I(1) = \frac{2}{2+1} \cdot I(0) = \frac{2}{2+1}\int_0^1 dx = \frac{2}{2+1}.$$

(ii) Supondo que a proposição seja válida para um natural n fixado, obtemos

$$\begin{aligned} I(n+1) &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \cdot I(n) \\ &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2(n+1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2(n+1)+1)}. \end{aligned}$$

Logo, ela também é válida para $n+1$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$I(n) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

∎

Proposição 3.3 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$I\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Demonstração: Provaremos a validade da sentença apresentada por meio do Primeiro Princípio da Indução Finita.

(i) Para $n = 1$, temos que

$$I\left(1 - \frac{1}{2}\right) = I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Como o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ representa uma semicircunferência centrada na origem e de raio igual a 1, o valor desta última integral corresponde à metade da área delimitada pela semicircunferência e o eixo das abscissas. Portanto,

$$I\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Supondo que a proposição seja válida para um natural n fixado, obtemos

$$\begin{aligned} I\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)=I\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)+1}\cdot I\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)-1\right) \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}\cdot I\left(n-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n+1)-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(n+1)}\cdot\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Logo, ela também é válida para $n+1$. Portanto, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$I\left(n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

■

Proposição 3.4 *A seguinte relação é válida para todo* $n\in\mathbb{N}$*:*

$$I(n)\le I\left(n-\frac{1}{2}\right)\le I(n-1).$$

Demonstração: Para todo $x\in[0,1]$, temos que

$$0\le 1-x^2\le 1.$$

Assim, dados $n_1,n_2\in[0,+\infty)$,

$$n_1>n_2\Rightarrow 0\le\left(1-x^2\right)^{n_1}\le\left(1-x^2\right)^{n_2}\le 1.$$

Logo, dado $n\in\mathbb{N}$,

$$0\le\left(1-x^2\right)^n\le\left(1-x^2\right)^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\le\left(1-x^2\right)^{n-1}\le 1,\forall x\in[0,1],$$

e, portanto, pela monotonicidade da integral,

$$0\le\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx\le\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}dx\le\int_0^1\left(1-x^2\right)^{n-1}dx\le\int_0^1 dx=1.$$

Concluímos, então, que

$$I(n)\le I\left(n-\frac{1}{2}\right)\le I(n-1),\forall n\in\mathbb{N}.$$

■

Por meio da Figura 3.1 é possível interpretar geometricamente o resultado da Proposição 3.4. Note que, à medida que n aumenta, o valor de $I(n)$ diminui.

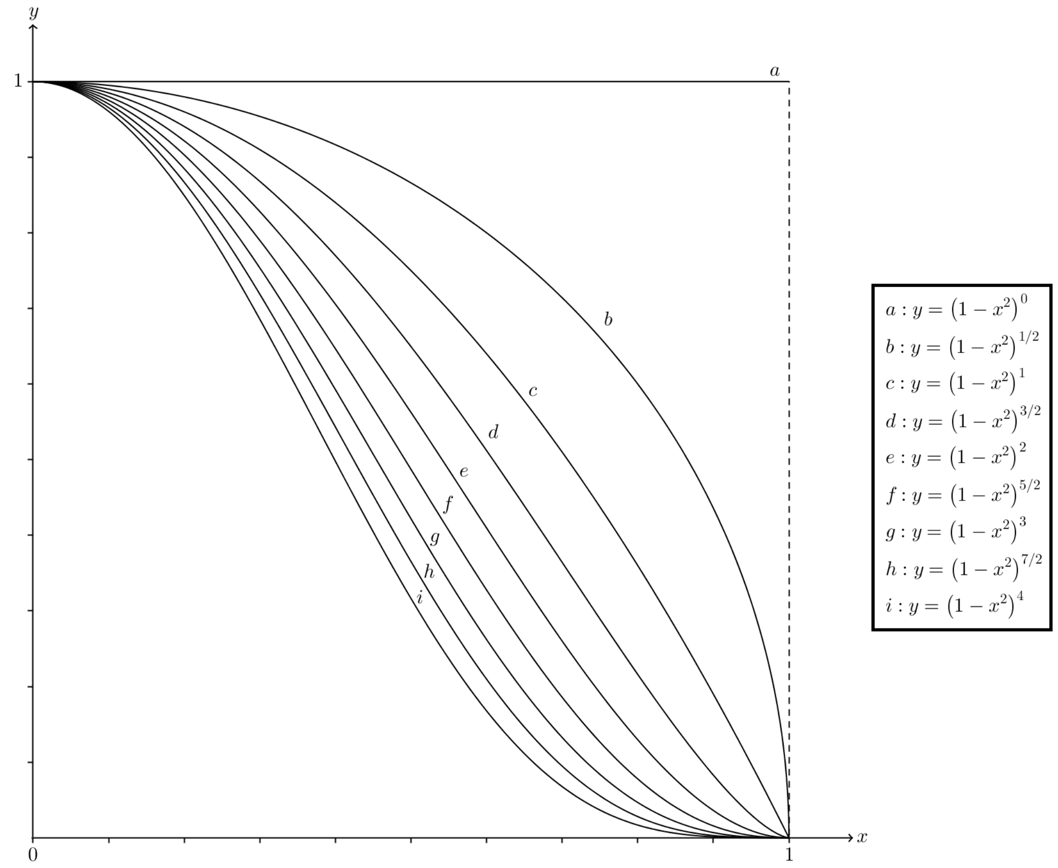

Figura 3.1: Gráfico de $y = (1-x^2)^n$ para $n = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4$.

Proposição 3.5 (Fórmula de Wallis) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demonstração: Pela Proposição 3.4, temos que

$$I(n) \leq I\left(n - \frac{1}{2}\right) \leq I(n-1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, utilizando os resultados das Proposições 3.2 e 3.3, obtemos

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} \leq \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}.$$

A desigualdade da esquerda nos dá

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{n} = \pi\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Por outro lado, pela desigualdade da direita, temos

$$\pi \leq \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

Assim, obtemos

$$\pi \leq \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\leq \pi\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Extraindo a raiz quadrada em cada membro, podemos escrever a sentença anterior como a seguir:

$$\sqrt{\pi}\leq \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2n}}.$$

Logo, fazendo $n\to\infty$, concluímos que

$$\sqrt{\pi}\leq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)=\sqrt{\pi},$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{\pi}.$$

■

Como afirmamos no início desta seção, o limite encontrado na Proposição 3.5 é uma maneira diferente de expressar o que conhecemos por Produto de Wallis. Note que se tomarmos a desigualdade

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\leq\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}\leq\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)},$$

a qual deu origem ao nosso resultado, podemos escrever

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}\leq\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\leq\frac{\pi}{2}.$$

Fazendo $n\to\infty$, obtemos

$$\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\leq\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)\leq\frac{\pi}{2}.$$

Portanto, como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)=1$, concluímos que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2},$$

que é o Produto de Wallis em sua forma mais usual.

3.2 A Fórmula de Stirling

Como já foi mencionado, a Fórmula de Stirling é o principal resultado que queremos apresentar neste capítulo. Dada por

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

tal expressão revela o interessante fato de que é possível aproximar $n!$, o qual trata-se de um número natural, a partir dos números e e π, que são ambos irracionais.

O símbolo "$\sim$" que aparece na fórmula significa "é assintoticamente igual a" e é utilizado para indicar que a razão entre a expressão a sua esquerda e a expressão a sua direita "tende a 1" quando "n tende ao infinito".

Na Tabela 3.1, são apresentados os valores exatos de $n!$ para $n = 1, 5, 10, 15$, assim como os valores aproximados obtidos por meio da Fórmula de Stirling. É importante notar, com base nos erros relativos, também informados na tabela, que à medida que o valor de n aumenta o erro percentual diminui, como era de se esperar.

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$	Erro relativo (%)
1	1	$0,922137009$	$7,7863$
5	120	$118,0916800$	$1,5903$
10	3628800	$3598695,619$	$0,8296$
15	1307674368000	1300430722199	$0,5539$

Tabela 3.1: Aproximando $n!$ pela Fórmula de Stirling.

Nesta seção, demonstramos a Fórmula de Stirling seguindo os 3 passos sugeridos por Young (1992, p.267). São eles:

I. Provar que $\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n) - n + c_n$, onde $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ existe e é finito.

II. Concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = e^c$.

III. Utilizar a Fórmula de Wallis na forma $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{\pi}$ para mostrar que $c = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$.

Deste modo, optamos por apresentar uma série de proposições, seguidas por suas respectivas demonstrações, e, ao final, obter a Fórmula de Stirling como uma consequência direta dessas proposições.

Na Proposição 3.6, apresentamos um resultado que nos permitirá realizar a demonstração referente ao passo I.

Proposição 3.6 *Seja f uma função crescente, diferenciável e não negativa para $x \geq 1$, cujo gráfico possua concavidade voltada para baixo. A sequência de termo geral*

$$a_n = \int_1^n f(x)dx - \left[\frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2}\right],$$

é convergente.

Demonstração: Geometricamente, para $n > 1$, o termo geral da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa a soma das áreas de $n-1$ regiões, $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$, como as que estão sombreadas na Figura 3.2.

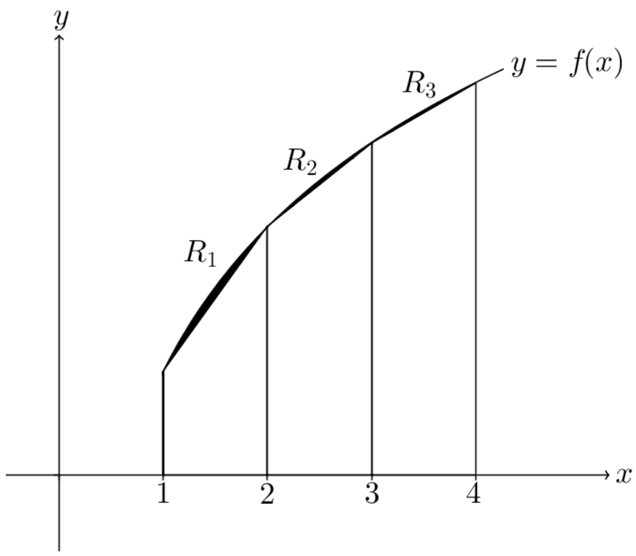

Figura 3.2: Interpretação geométrica do resultado da Proposição 3.6.

De fato, o valor da soma de $n-1$ áreas construídas da forma apresentada é dado pela diferença entre a área delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = 1$ e $x = n$, e a soma das áreas dos $n-1$ trapézios existentes na construção, isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} R_k &= \int_1^n f(x)dx - \left[\frac{f(1)+f(2)}{2} + \frac{f(2)+f(3)}{2} + \cdots + \frac{f(n-1)+f(n)}{2}\right] \\ &= \int_1^n f(x)dx - \left[\frac{f(1)}{2} + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2}\right].\end{aligned}$$

Logo, para $n > 1$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} R_k \geq 0$, e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} R_k$. Desta forma, afirmar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente equivale a dizer que a soma das infinitas áreas obtidas conforme apresentado na Figura 3.2 é finita.

Considere a Figura 3.3, na qual construímos as retas $y = g(x)$ e $y = h(x)$ tangentes à curva $y = f(x)$ nos pontos $(k, f(k))$ e $(k+1, f(k+1))$ respectivamente.

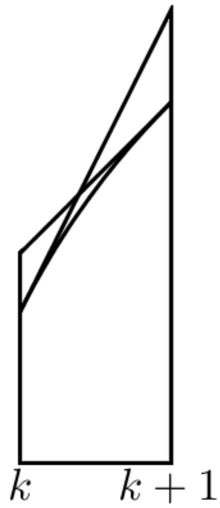

Figura 3.3: Trecho da curva $y = f(x)$ limitado pelas retas $x = k$ e $x = k+1$.

Como as áreas dos trapézios obtidos são maiores do que a área da região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = k$ e $x = k+1$, a média aritmética dessas áreas trapezoidais também é maior que a área dessa região.

Como a reta $y = g(x)$ é tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(k, f(k))$, concluímos que ela possui coeficiente angular dado por $f'(k)$ e passa pelo ponto $(k, f(k))$. Desta forma,

$$f'(k) = \frac{g(x) - f(k)}{x - k} \Rightarrow g(x) = f'(k) \cdot x + [f(k) - f'(k) \cdot k] .$$

De modo análogo, como a reta $y = h(x)$ é tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(k+1, f(k+1))$, concluímos que ela possui coeficiente angular dado por $f'(k+1)$ e passa pelo ponto $(k+1, f(k+1))$. Portanto,

$$f'(k+1) = \frac{h(x) - f(k+1)}{x - (k+1)} \Rightarrow h(x) = f'(k+1) \cdot x + [f(k+1) - f'(k+1) \cdot (k+1)] .$$

Assim, obtemos que

$$g(k+1) = f'(k) \cdot (k+1) + [f(k) - f'(k) \cdot k] = f'(k) + f(k)$$

e

$$h(k) = f'(k+1) \cdot k + [f(k+1) - f'(k+1) \cdot (k+1)] = f(k+1) - f'(k+1).$$

Logo, a média aritmética, $M(k)$, das áreas trapezoidais é dada por:

$$
\begin{aligned}
M(k) &= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{g(k+1)+f(k)}{2}+\frac{f(k+1)+h(k)}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{f'(k)+f(k)+f(k)}{2}+\frac{f(k+1)+f(k+1)-f'(k+1)}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{f'(k)+2f(k)}{2}+\frac{2f(k+1)-f'(k+1)}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[f(k)+f(k+1)+\frac{f'(k)-f'(k+1)}{2}\right]\\
&= \frac{f(k)+f(k+1)}{2}+\frac{f'(k)-f'(k+1)}{4}.
\end{aligned}
$$

Como o valor de $M(k)$ é maior que o valor da área da região delimitada pela curva $y=f(x)$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x=k$ e $x=k+1$, para todo $k\in\mathbb{N}$, temos que, para $n>1$,

$$
\begin{aligned}
M(1)+M(2)+\cdots+M(n-1) &\geq \int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx\\
&= \int_1^n f(x)dx.
\end{aligned}
$$

Além disso, como

$$
M(1)+M(2)+\cdots+M(n-1)=\left[\frac{f(1)}{2}+f(2)+\cdots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2}\right]+\frac{f'(1)-f'(n)}{4},
$$

concluímos que

$$
\left[\frac{f(1)}{2}+f(2)+\cdots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2}\right]+\frac{f'(1)-f'(n)}{4}\geq\int_1^n f(x)dx,
$$

e, portanto,

$$
\frac{f'(1)-f'(n)}{4}\geq\int_1^n f(x)dx-\left[\frac{f(1)}{2}+f(2)+\cdots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2}\right]=\sum_{k=1}^{n-1}R_k.
$$

Já que f é uma função crescente cujo gráfico possui concavidade voltada para baixo, para $x\geq 1$, temos que

(*i*) $f'(x)>0, \forall x\geq 1.$

(*ii*) $1<x_1<x_2\Rightarrow f'(1)>f'(x_1)>f'(x_2).$

Assim, $0 < f'(n) < f'(1)$, para todo $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, e

$$\frac{f'(1)}{4} > \frac{f'(1) - f'(n)}{4} \geq \sum_{k=1}^{n-1} R_k \geq 0.$$

Logo, a sequência $\sum\limits_{k=1}^{n-1} R_k$ é limitada e, como $R_k \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, concluímos que ela também é monótona não decrescente. Portanto, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} R_k$ e, consequentemente, (a_n) convergem. ■

Proposição 3.7 *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n) - n + c_n,$$

em que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Demonstração: Sabemos que a função $f(x) = \ln(x)$ é crescente, diferenciável e não negativa para $x \geq 1$. Além disso, como

$$f''(x) = -\frac{1}{x} < 0, \forall x > 0,$$

temos que f possui concavidade voltada para baixo. Desta forma, aplicando o resultado da Proposição 3.6, obtemos que a sequência de termo geral

$$a_n = \int_1^n \ln(x)dx - \left[\frac{\ln(1)}{2} + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) + \frac{\ln(n)}{2}\right]$$

é convergente.

Utilizando a técnica de integração por partes e manipulando algebricamente a expressão de a_n, obtemos

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_1^n \ln(x)dx - \left[\frac{\ln(1)}{2} + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) + \frac{\ln(n)}{2}\right] \\
&= [x \cdot \ln(x)]_1^n - \int_1^n dx - \left[\frac{\ln(1)}{2} + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) + \frac{\ln(n)}{2}\right] \\
&= n \cdot \ln(n) - \ln(1) - (n-1) - \left[\frac{\ln(1)}{2} + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) + \frac{\ln(n)}{2}\right] \\
&= n \cdot \ln(n) - n + 1 - [\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n-1) + \ln(n)] + \frac{\ln(1) + \ln(n)}{2} \\
&= n \cdot \ln(n) - n + 1 - \ln(1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) + \frac{\ln(n)}{2} \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n) - n + 1 - \ln(n!).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n) - n + (1 - a_n).$$

Fazendo $c_n = 1 - a_n$, obtemos

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n) - n + c_n.$$

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Assim,

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} (1 - a_n) = 1 - \lim_{n \to \infty} a_n = 1 - a.$$

Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c.$$

■

Proposição 3.8 *Considerando c_n e c como na Proposição 3.7, temos que*

$$\frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = e^{c_n} \text{ e } \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = e^c.$$

Demonstração: Sabemos, pela Proposição 3.7, que

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n) - n + c_n,$$

em que $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
n! &= e^{\left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n) - n + c_n} \\
&= e^{\left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \ln(n)} \cdot e^{-n} \cdot e^{c_n} \\
&= \left(e^{\ln(n)}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-n} \cdot e^{c_n} \\
&= n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-n} \cdot e^{c_n} \\
&= n^n \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-n} \cdot e^{c_n} \\
&= \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot e^{c_n}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$e^{c_n} = \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

Concluímos, por fim, que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} e^{c_n} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} c_n} = e^c.$$

■

Proposição 3.9 *O número real c das Proposições 3.7 e 3.8 é dado por*

$$c = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right).$$

Demonstração: De acordo com a Proposição 3.8,

$$e^{c_n} = \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{(e^{c_n})^2}{e^{c_{2n}}} &= \frac{\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\dfrac{e}{n}\right)^n\right)^2}{\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2n}} \cdot \left(\dfrac{e}{2n}\right)^{2n}} \\
&= \frac{\dfrac{(n!)^2}{n} \cdot \left(\dfrac{e}{n}\right)^{2n}}{\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} \cdot \dfrac{1}{2^{2n}} \left(\dfrac{e}{n}\right)^{2n}} \\
&= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{2}}{(2n)! \cdot n} \\
&= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{2^{2n} \cdot (1 \cdot 2 \cdots n)^2}{1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot 2n} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado da Proposição 3.5, a Fórmula de Wallis, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(e^{c_n})^2}{e^{c_{2n}}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sqrt{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(e^{c_n})^2}{e^{c_{2n}}} &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (e^{c_n})^2}{\lim\limits_{n\to\infty} e^{c_{2n}}} \\
&= \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} e^{c_n}\right)^2}{e^{\lim\limits_{n\to\infty} c_{2n}}} \\
&= \frac{\left(e^{\lim\limits_{n\to\infty} c_n}\right)^2}{e^{\lim\limits_{n\to\infty} c_{2n}}} \\
&= \frac{(e^c)^2}{e^c} \\
&= e^c.
\end{aligned}$$

Logo,

$$e^c = \sqrt{2\pi}$$

e, consequentemente,

$$c = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right).$$

■

Proposição 3.10 (Fórmula de Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$

Demonstração: Pela Proposição 3.8, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = e^c.$$

Além disso, pela Proposição 3.9,

$$e^c = \sqrt{2\pi}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = \sqrt{2\pi}.$$

Assim, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

ou seja,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

■

Capítulo 4

Representando o Número de Euler por um produto infinito

Neste capítulo, são apresentadas algumas expressões que nos permitem representar o Número de Euler como produtos de infinitos termos.

4.1 Um produto infinito para e^m

Na Seção 1.3, no Capítulo 1, demonstramos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Nesta seção, generalizamos esse resultado, provando que

$$e^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!}, \forall m \in \mathbb{N},$$

e utilizamo-lo para obter uma representação de e^m em termos de um produto infinito.

Proposição 4.1 *Para todo $m \in \mathbb{N}$,*

$$e^m = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n.$$

Demonstração: Na demonstração da Proposição 1.8, no Capítulo 1, vimos que, para todo $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Tomando $x = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\frac{n}{n+m} < \ln\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} < 1.$$

Logo,

$$e^{\frac{n}{n+m}} < \left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} < e.$$

Fazendo $n \to \infty$, concluímos que

$$e \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \leq e,$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = e.$$

Obtemos, por fim, que

$$e^m = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n}.$$

■

A Proposição 4.2, apresentada a seguir, é uma generalização da Proposição 1.3.

Proposição 4.2 *Para todo* $m \in \mathbb{N}$,

$$e^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!}.$$

Demonstração: Pela expressão de expansão do Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n} &= 1 + n\cdot\frac{m}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{m^2}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{m^k}{n^k} + \cdots + \frac{m^n}{n^n}\\ &= 1 + m + \frac{m^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{m^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots\\ &\quad + \frac{m^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Como cada fator entre parênteses no segundo membro da igualdade anterior é não-negativo e menor do que 1, concluímos que

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n} \leq 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \cdots + \frac{m^n}{n!}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, fixando $k \geq 1$ arbitrário, temos que, se $n > k$, então

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n} > 1 + m + \frac{m^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{m^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Fazendo $n \to \infty$ e utilizando a Proposição 4.1, obtemos

$$e^m = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^n \geq 1+m+\frac{m^2}{2!}+\cdots+\frac{m^k}{k!}, \forall m,k \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^n \leq 1+m+\frac{m^2}{2!}+\cdots+\frac{m^n}{n!} \leq e^m, \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Proposição 4.1,

$$e^m = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!} \leq e^m.$$

Concluímos, então, que

$$e^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

■

A seguir, apresentamos o principal resultado desta seção, uma expressão que nos dá e^m como um produto de infinitas parcelas.

Proposição 4.3 *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sequência definida pela seguinte relação de recorrência:*

$$u_1 = 1; u_{n+1} = (n+1)(u_n + m^n).$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$*,*

$$e^m = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{u_n + m^n}{u_n}.$$

Demonstração: Dado $m \in \mathbb{N}$, considere $(s_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ a sequência de termo geral

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{m^k}{k!}.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
s_n &= s_0 \cdot \frac{s_1}{s_0}\cdot\frac{s_2}{s_1}\cdots\frac{s_n}{s_{n-1}} \\
&= s_0 \cdot \left(\frac{s_1}{s_0}\cdot\frac{s_2}{s_1}\cdots\frac{s_n}{s_{n-1}}\right) \\
&= s_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{s_k}{s_{k-1}} \\
&= s_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{s_{k-1}+\frac{m^k}{k!}}{s_{k-1}} \\
&= s_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{k!\cdot s_{k-1}+m^k}{k!\cdot s_{k-1}}
\end{aligned}$$

Considerando $u_k = k! \cdot s_{k-1}$, temos que

$$u_1 = 1! \cdot s_0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (k+1)! \cdot s_k \\ &= (k+1) \cdot (k!) \cdot \left(s_{k-1} + \frac{m^k}{k!} \right) \\ &= (k+1) \cdot \left(k! \cdot s_{k-1} + m^k \right) \\ &= (k+1) \cdot \left(u_k + m^k \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= s_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot s_{n-1} + m^n}{n! \cdot s_{n-1}} \\ &= s_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + m^n}{u_n}. \end{aligned}$$

Como $s_0 = 1$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + m^n}{u_n}.$$

Pela Proposição 4.2, concluímos que

$$e^m = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + m^n}{u_n},$$

com $u_1 = 1$ e $u_{n+1} = (n+1)(u_n + m^n)$. ■

Utilizando o resultado da Proposição 4.3, podemos representar o Número de Euler pela seguinte igualdade envolvendo um produto infinito:

$$e = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{16}{15}\right) \cdot \left(\frac{65}{64}\right) \cdot \left(\frac{326}{325}\right) \cdot \left(\frac{1957}{1956}\right) \cdots .$$

A Proposição 4.3 nos permite, ainda, representar as potências de base e e expoente natural como produtos com infinitos fatores. A seguir, apresentamos as expressões para e^2, e^3 e e^4.

$$e^2 = \left(\frac{3}{1}\right) \cdot \left(\frac{10}{6}\right) \cdot \left(\frac{38}{30}\right) \cdot \left(\frac{168}{152}\right) \cdot \left(\frac{872}{840}\right) \cdot \left(\frac{5296}{5232}\right) \cdots ,$$

$$e^3 = \left(\frac{4}{1}\right)\cdot\left(\frac{17}{8}\right)\cdot\left(\frac{78}{51}\right)\cdot\left(\frac{393}{312}\right)\cdot\left(\frac{2208}{1965}\right)\cdot\left(\frac{13977}{13248}\right)\cdots,$$
$$e^4 = \left(\frac{5}{1}\right)\cdot\left(\frac{26}{10}\right)\cdot\left(\frac{142}{78}\right)\cdot\left(\frac{824}{568}\right)\cdot\left(\frac{5144}{4120}\right)\cdot\left(\frac{34960}{30864}\right)\cdots.$$

4.2 Revisitando a Fórmula de Stirling

Vimos no Capítulo 3 que o número e aparece de maneira inusitada na Fórmula de Stirling, uma expressão que nos dá uma aproximação assintótica para o fatorial de um número natural. Nesta seção, utilizamos as Proposições 3.8 e 3.9, por meio das quais provamos a Fórmula de Stirling, para demonstrar um resultado que nos será útil posteriormente.

Proposição 4.4 $e = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Demonstração: De acordo com as Proposições 3.8 e 3.9, temos que

$$e^{c_n} = \frac{n!}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N},$$

com $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$. Assim,

$$e^n = \sqrt{n}\cdot e^{c_n}\cdot\frac{n^n}{n!},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} e &= \left(\sqrt{n}\cdot e^{c_n}\cdot\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[n]{e^{c_n}}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}. \end{aligned}$$

Fazendo n tender a infinito, obtemos

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[n]{e^{c_n}}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty} e^{\frac{c_n}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} c_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$, concluímos que

$$\begin{aligned} e &= (1)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)\cdot 0} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}. \end{aligned}$$

■

Por meio da Proposição 4.4, é possível demonstrar um interessante resultado envolvendo as médias aritmética e geométrica e o Número de Euler, como apresentado por McCartin (2006, p.14).

Sejam A_n e G_n as médias aritmética e geométrica dos n primeiros números naturais, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{G_n} &= \frac{\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}} \\ &= \frac{\left(\dfrac{(n+1)\cdot n}{2\cdot n}\right)}{\sqrt[n]{n!}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{G_n} &= \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right). \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{G_n} &= \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \\ &= \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Apesar da Proposição 4.4 nos conduzir a esse surpreendente resultado, o principal objetivo de apresentá-la neste capítulo é poder utilizá-la para provar a validade da Fórmula de Pippenger (PIPPENGER, 1980, p.391), abordada na Seção 4.3.

4.3 A Fórmula de Pippenger

Na Seção 3.1, apresentamos um resultado por meio do qual é possível calcular aproximações para o número π, a Fórmula de Wallis. Como vimos, o Produto de Wallis é dado por

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots .$$

Nesta seção, demonstramos a validade de uma expressão similar à Fórmula de Wallis que nos permite representar o número e como um produto infinito. Essa igualdade, conhecida como Fórmula de Pippenger, é apresentada a seguir.

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15}\right)^{\frac{1}{16}} \cdots .$$

Note que os fatores que constituem o produto no segundo membro da igualdade podem ser obtidos por meio da sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termo geral

$$p_n = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{para } n = 1 \\ \left(\dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} \cdot \dfrac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} \cdot \dfrac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+3} \cdots \dfrac{2^n-2}{2^n-3} \cdot \dfrac{2^n-2}{2^n-1} \cdot \dfrac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}}, & \text{para } n \geq 2 \end{cases}.$$

Na Proposição abaixo, mostramos que é possível escrever p_n em termos de fatoriais e potências de base 2.

Proposição 4.5 *Para $n \geq 2$,*

$$p_n = \left(\frac{2^{2^n-1} \cdot (2^{n-1}!)^6}{(2^{n-2}!)^4 \cdot (2^n!)^2}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Demonstração: Sabemos que, para $n \geq 2$,

$$p_n = \left(\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} \cdot \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} \cdot \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+3} \cdots \frac{2^n-2}{2^n-3} \cdot \frac{2^n-2}{2^n-1} \cdot \frac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Agrupando as parcelas que se repetem no numerador e no denominador, obtemos

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\frac{2^{n-1} \cdot (2^{n-1}+2)^2 \cdot (2^{n-1}+4)^2 \cdots (2^n-2)^2 \cdot 2^n}{(2^{n-1}+1)^2 \cdot (2^{n-1}+3)^2 \cdots (2^n-3)^2 \cdot (2^n-1)^2}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\ &= \left(\frac{2^{n-1} \cdot ((2^{n-1}+2) \cdot (2^{n-1}+4) \cdots (2^n-2))^2 \cdot 2^n}{((2^{n-1}+1) \cdot (2^{n-1}+3) \cdots (2^n-3) \cdot (2^n-1))^2}\right)^{\frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

Portanto, manipulando algebricamente a expressão, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
p_n &= \left(\frac{2^{n-1} \cdot \left((2^{n-1}+2) \cdot (2^{n-1}+4) \cdots (2^n-2) \right)^2 \cdot 2^n}{\left(\dfrac{(2^{n-1}+1) \cdot (2^{n-1}+2) \cdot (2^{n-1}+3) \cdots (2^n-3) \cdot (2^n-2) \cdot (2^n-1)}{(2^{n-1}+2) \cdot (2^{n-1}+4) \cdots (2^n-2)} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \left(\frac{2^{n-1} \cdot \left((2^{n-1}+2) \cdot (2^{n-1}+4) \cdots (2^n-2) \right)^4 \cdot 2^n}{\left((2^{n-1}+1) \cdot (2^{n-1}+2) \cdot (2^{n-1}+3) \cdots (2^n-3) \cdot (2^n-2) \cdot (2^n-1) \right)^2} \right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \left(\frac{\left(2 \cdot (2^{n-2}+1) \cdot 2 \cdot (2^{n-2}+2) \cdots 2 \cdot (2^{n-1}-1) \right)^4 \cdot 2 \cdot \left(2^{n-1}\right)^2}{\left((2^{n-1}+1) \cdot (2^{n-1}+2) \cdot \cdots \cdot (2^n-1) \right)^2} \right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \left(\frac{\left((2^{n-2}+1) \cdot (2^{n-2}+2) \cdots (2^{n-1}-1) \cdot 2^{n-1} \right)^4}{\left((2^{n-1}+1) \cdot (2^{n-1}+2) \cdot \cdots \cdot (2^n-1) \cdot 2^n \right)^2} \cdot \frac{2 \cdot \left(2^{2^{n-2}-1} \right)^4 \cdot (2^n)^2}{\left(2^{n-1}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \left(\frac{\left(\dfrac{2^{n-1}!}{2^{n-2}!} \right)^4}{\left(\dfrac{2^n!}{2^{n-1}!} \right)^2} \cdot \frac{2 \cdot 2^{2^n-4} \cdot 2^{2n}}{2^{2n-2}} \right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \left(\frac{\left(2^{n-1}!\right)^4}{\left(2^{n-2}!\right)^4} \cdot \frac{\left(2^{n-1}!\right)^2}{\left(2^n!\right)^2} \cdot 2^3 \cdot 2^{2^n-4} \right)^{\frac{1}{2^n}} .
\end{aligned}
$$

Logo, para $n \geq 2$,

$$
p_n = \left(\frac{2^{2^n-1} \cdot \left(2^{n-1}!\right)^6}{\left(2^{n-2}!\right)^4 \cdot \left(2^n!\right)^2} \right)^{\frac{1}{2^n}} .
$$

■

Proposição 4.6 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$
\prod_{k=1}^{n} p_k = 2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}!}{2^n!} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} .
$$

Demonstração: Utilizaremos o Primeiro Princípio da Indução Finita para provar a validade da sentença apresentada.

(i) Para $n = 1$, temos que

$$p_1 = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}-1} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2^1}} \cdot \left(\frac{2^{1-1}!}{2^1!}\right)^{\frac{1}{2^{1-1}}}.$$

(ii) Supondo que a sentença seja válida para $n \in \mathbb{N}$ fixado e utilizando o resultado da Proposição 4.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} p_k &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdot p_{n+1} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right) \cdot p_{n+1} \\
&= \left(2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}!}{2^n!}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\right) \cdot \left(\frac{2^{2^{n+1}-1} \cdot (2^n!)^6}{(2^{n-1}!)^4 \cdot (2^{n+1}!)^2}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \\
&= 2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}!}{2^n!}\right)^{\frac{2}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{2^{n+1}-1} \cdot (2^n!)^6}{(2^{n-1}!)^4 \cdot (2^{n+1}!)^2}\right)^{\frac{1}{2\cdot 2^n}} \\
&= 2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{(2^{n-1}!)^2}{(2^n!)^2}\right)^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{2^n} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (2^n!)^3}{(2^{n-1}!)^2 \cdot (2^{n+1}!)}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= 2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot 2 \cdot 2^{-\frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \left(\frac{2^n!}{2^{n+1}!}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= 2^{n+1} \cdot 2^{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \left(\frac{2^n!}{2^{n+1}!}\right)^{\frac{1}{2^n}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} p_k &= 2^{n+1} \cdot 2^{\frac{2-1}{2^{n+1}}} \cdot \left(\frac{2^n!}{2^{n+1}!}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= 2^{n+1} \cdot 2^{\frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \left(\frac{2^n!}{2^{n+1}!}\right)^{\frac{1}{2^n}}.
\end{aligned}$$

Logo, a sentença também é válida para $n + 1$. Por (i) e (ii), concluímos que

$$\prod_{k=1}^{n} p_k = 2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}!}{2^n!}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

A Proposição 4.7, apresentada a seguir, é o principal resultado desta seção. Para demonstrá-la utilizamos as Proposições 4.4 e 4.6.

Proposição 4.7 (Fórmula de Pippenger)

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\right)^{\frac{1}{16}} \cdots .$$

Demonstração: Pela Proposição 4.6, temos que

$$\prod_{k=1}^{n} p_k = 2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}!}{2^n!}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Essa expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} p_k &= 2^n \cdot 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}!}{2^n!}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\
&= 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{(2^n)^2}{2^n} \cdot \frac{(2^{n-1}!)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}{(2^n!)^{\frac{1}{2^{n-1}}}} \\
&= 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} \cdot \frac{(2^{n-1}!)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}{(2^n!)^{\frac{2}{2^n}}} \\
&= 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^n}{(2^n!)^{\frac{1}{2^n}}}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2^{n-1}!)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}{2^{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^n}{(2^n!)^{\frac{1}{2^n}}}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2^{n-1}!)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}{2^{n-1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{(2^n!)^{\frac{1}{2^n}}}\right)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2^{n-1}!)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}{2^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Considerando $u = 2^n$ e $v = 2^{n-1}$, temos que se n tende a infinito então u e v também tendem a infinito. Logo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{(2^n!)^{\frac{1}{2^n}}}\right)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2^{n-1}!)^{\frac{1}{2^{n-1}}}}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}} \cdot \lim_{u\to\infty} \left(\frac{u}{(u!)^{\frac{1}{u}}}\right)^2 \cdot \lim_{v\to\infty} \left(\frac{(v!)^{\frac{1}{v}}}{v}\right). \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^0 \cdot \lim_{u\to\infty} \left(\frac{u}{\sqrt[u]{u!}}\right)^2 \cdot \lim_{v\to\infty} \left(\frac{\sqrt[v]{v!}}{v}\right).\end{aligned}$$

De acordo com a Proposição 4.4, concluímos que

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^2 \cdot \frac{1}{e},$$

e, portanto,

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15}\right)^{\frac{1}{16}} \cdots.$$

■

4.4 A Fórmula de Catalan

Nesta seção, utilizamos a Fórmula de Pippenger para demonstrar outra expressão que nos permite representar o número de Euler por meio de um produto infinito, a Fórmula de Catalan[1] (CATALAN, 1873, p.200).

Proposição 4.8 (Fórmula de Catalan)

$$e = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{16}{15}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$

[1] Apesar de, neste trabalho, utilizarmos a Fórmula de Pippenger para demonstrar a Fórmula de Catalan, é importante evidenciar o fato de que esta última foi descoberta em 1873, mais de um século antes do surgimento da primeira, que ocorreu em 1980 (SONDOW; YI, 2010, p. 912).

Demonstração: Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência apresentada na Seção 4.3 e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de termo geral

$$c_n = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{1}\right), & \text{para } n = 1 \\ \left(\dfrac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\dfrac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3}\cdots\dfrac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}, & \text{para } n \geq 2 \end{cases}.$$

Temos que

$$c_1 = \left(\frac{2}{1}\right) = \left(\frac{2^2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\cdot\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot p_1.$$

Além disso, para $n \geq 2$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
c_n &= \left(\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3}\cdots\frac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\
&= \left(\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3}\cdots\frac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{2}{2^n}} \\
&= \left(\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3}\cdot\frac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3}\cdots\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \left(\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3}\cdot\frac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3}\cdots\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{2\cdot 2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \left(2\cdot\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+3}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-3}\cdot\frac{2^n-2}{2^n-1}\cdot\frac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= 2^{\frac{1}{2^n}}\cdot\left(\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+3}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-3}\cdot\frac{2^n-2}{2^n-1}\cdot\frac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}} \\
&= 2^{\frac{1}{2^n}}\cdot p_n.
\end{aligned}$$

Assim,

$$c_n = 2^{\frac{1}{2^n}}\cdot p_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} c_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{1}{2^n}}\cdot p_n\right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2^n}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n} p_n
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2^n}} &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2^2}} \cdot 2^{\frac{1}{2^3}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}} \\ &= 2^{1-\frac{1}{2^n}},\end{aligned}$$

obtemos

$$\prod_{k=1}^{n} c_n = \left(2^{1-\frac{1}{2^n}}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} p_n$$

Fazendo n tender a infinito, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} c_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(2^{1-\frac{1}{2^n}}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} p_n \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(2^{1-\frac{1}{2^n}}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_n \\ &= 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_n \\ &= 2^{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_n \\ &= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_n.\end{aligned}$$

Além disso, pela Fórmula de Pippenger (Proposição 4.7),

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_n = \frac{e}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} c_n &= 2 \cdot \frac{e}{2} \\ &= e.\end{aligned}$$

Como

$$\prod_{k=1}^{n} c_n = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1} \cdot \frac{2^{n-1}+4}{2^{n-1}+3} \cdots \frac{2^n}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}},$$

concluímos, por fim, que

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{1}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{15}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} c_n \\ &= e.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Considerações finais

Neste trabalho apresentamos uma pequena parte do universo da Matemática que envolve o Número de Euler. Contamos um pouco da história do surgimento desse número, apresentamos sua definição como o limite da sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e mostramos que ele corresponde à base dos Logaritmos Naturais. Além disso, vimos que o número e é irracional e pode ser representado pela série $\sum \frac{1}{n!}$ e por diversos produtos infinitos, como, por exemplo, o Produto de Pippenger e o Produto de Catalan.

Vimos também que o Número de Euler surge inusitadamente na resolução de alguns problemas em diversas áreas da Matemática. Destacamos em nosso texto a presença do e na expressão do número de partições de um dado conjunto não vazio finito, e sua surpreendente aparição na Fórmula de Stirling, que nos dá uma aproximação assintótica para o fatorial de um número natural.

Apesar de nos atermos a apresentar exemplos da Matemática Discreta, durante a execução desse trabalho de pesquisa ficou claro que o Número de Euler é umas das constantes mais importantes da Matemática e está presente praticamente em todos os campos que constituem essa ciência. Desta forma, aqui, não tivemos, de maneira alguma, a pretensão de abordar tudo o que se sabe sobre o e (realizar tal tarefa deve ser impossível). Buscamos, na verdade, revelar que mesmo em situações simples esse número pode aparecer de maneira grandiosa, e acreditamos ter alcançado nosso objetivo.

Apêndices

Apêndice A

Sequências e séries numéricas

Neste apêndice, apresentamos as definições de sequência e série numéricas, assim como alguns resultados importantes que são utilizados ao longo dos capítulos deste trabalho[1].

A.1 Sequências

Definição A.1 *Uma **sequência** de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que associa a cada número natural* n *um número real* x_n*, denominado o **n-ésimo termo** da sequência.*

Denotamos uma sequência cujo n-ésimo termo é x_n por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n).

Observação A.1 *É importante não confundir a sequência* (x_n) *com o conjunto de seus termos,* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*. A sequência* $(-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots)$*, por exemplo, é diferente do conjunto* $\{-1, 0, 1\}$*.*

Definição A.2 *Uma sequência* (x_n) *é dita **limitada inferiormente** quando o conjunto de seus termos é limitado inferiormente, ou seja, quando existe um número real* a *tal que* $x_n \geq a$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definição A.3 *Uma sequência* (x_n) *é dita **limitada superiormente** quando o conjunto de seus termos é limitado superiormente, ou seja, quando existe um número real* b *tal que* $x_n \leq b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definição A.4 *Uma sequência* (x_n) *é dita **limitada** quando o conjunto de seus termos é limitado inferiormente e superiormente, ou seja, quando existem números reais* a, b *tais que* $a \leq x_n \leq b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

[1] Caso o leitor deseje se aprofundar no tema, sugerimos consultar Lima (2013).

Quando uma sequência (x_n) não é limitada, dizemos que ela é **ilimitada**.

Observação A.2 *Como todo intervalo $[a, b]$ está contido em um intervalo da forma $[-k, k]$, com $k > 0$, pode-se concluir que uma sequência é limitada se, e somente se, existe um número real $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo: A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente. De fato, $x_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: A sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1-n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente. De fato, $y_n \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: A sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. De fato, $|z_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação A.3 *Apesar de ser limitada inferiormente, a sequência $(x_n) = (n)$ é ilimitada, já que não existe um número real k tal que $n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, a sequência $(y_n) = (1-n)$, apesar de ser limitada superiormente, também é ilimitada.*

A.2 Limite de uma sequência

Definição A.5 *Uma sequência (x_n) **possui limite a** (ou **converge para a**) quando dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, é possível obter um $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n \geq n_0$.*

Em termos de símbolos, escreve-se:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

As sequências que possuem limite são denominadas *convergentes*, enquanto as sequências que não possuem limite são chamadas de *divergentes*.

Observação A.4 *Utilizamos também a notação $\lim x_n = a$ ou $x_n \to a$ para indicar que a sequência (x_n) converge para a.*

Exemplo: A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{1}{n} = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Portanto,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\left(n_0 > \frac{1}{\varepsilon}\right); n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Teorema A.1 (Unicidade do limite) *Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a$ e $x_n \to b$. Então $a = b$.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2 \text{ (pois } x_n \to a\text{);}$$
$$n \geq n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon/2 \text{ (pois } x_n \to b\text{).}$$

Assim, se tomarmos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ obtemos

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \Rightarrow |a - b| &= |a - x_n + x_n - b| \\ &\leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &= |x_n - a| + |x_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $a = b$. De fato, se supormos que $a \neq b$, então $|a - b| > 0$. Tomando $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ obtemos que $|a - b| > \varepsilon > 0$, o que é uma contradição, já que $|a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. ■

Teorema A.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente com $\lim x_n = a$. Temos que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Em particular, para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < 1$, para todo $n \geq n_0$. Logo, se $n \geq n_0$, então

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - a + a| \\ &\leq |x_n - a| + |a| \\ &< 1 + |a|. \end{aligned}$$

Desta forma, tomando $k = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$, temos que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, portanto, (x_n) é limitada. ■

Definição A.6 *Uma sequência (x_n) é dita **monótona** se satisfaz uma das condições a seguir:*

(i) $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(não decrescente)*

(ii) $x_n \geq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(não crescente)*

(iii) $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(crescente)*

(iv) $x_n > x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(decrescente).*

Teorema A.3 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Temos que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ é não vazio e limitado, e, portanto, pelo Axioma da Completeza[2], existem $a = \sup X$ e $b = \inf X$.

Afirmação 1: Se (x_n) é não-decrescente, então $\lim x_n = a$.
Prova: Como $a = \sup X$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, se (x_n) é não-decrescente, para $n \geq n_0$, temos que $x_{n_0} \leq x_n$. Logo,

$$n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Potanto, $\lim x_n = a$.

Afirmação 2: Se (x_n) é não-crescente, então $\lim x_n = b$.
Prova: Como $b = \inf X$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \leq x_{n_0} < b + \varepsilon$. Assim, se (x_n) é não-crescente, para $n \geq n_0$, temos que $x_{n_0} \geq x_n$. Logo,

$$n \geq n_0 \Rightarrow b - \varepsilon < b \leq x_n \leq x_{n_0} < b + \varepsilon \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Potanto, $\lim x_n = b$. ■

A.3 Propriedades aritméticas dos limites

Teorema A.4 *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada, então* $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência convergente, com $\lim x_n = 0$, e (y_n) uma sequência limitada. Existe $k > 0$ tal que $|y_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Logo,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. ■

[2]O Axioma da Completeza estabelece que $\mathbb{R}$ é um corpo completo. Isto significa que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$. Consequentemente, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{R}$.

Teorema A.5 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então*

(i) $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$*;*

(ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$*;*

(iii) $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$*, se* $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*, e* $b \neq 0$*.*

Demonstração: Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$.

(i) Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}; n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}; n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Obtemos

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim(x_n + y_n) = a + b$. De maneira análoga, temos

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n - y_n) - (a - b)| &= |(x_n - a) - (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim(x_n - y_n) = a - b$.

(ii) Temos que

$$\begin{aligned} \lim(x_n \cdot y_n - a \cdot b) &= \lim(x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b) \\ &= \lim[x_n \cdot (y_n - b) + b \cdot (x_n - a)] \\ &= \lim[x_n \cdot (y_n - b)] + \lim[b \cdot (x_n - a)]. \end{aligned}$$

Como (x_n) é limitada (pois é convergente) e $\lim(y_n - b) = \lim(x_n - a) = 0$, pelo Teorema A.4, concluímos que

$$\lim(x_n \cdot y_n - a \cdot b) = 0.$$

Portanto,

$$\lim(x_n \cdot y_n) - \lim(a \cdot b) = 0 \Rightarrow \lim(x_n \cdot y_n) - a \cdot b = 0 \Rightarrow \lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

(iii) Temos que

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) \quad = \quad \lim\left(\frac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b}\right)$$

Note que a sequência $\left(\dfrac{1}{y_n \cdot b}\right)$ é limitada. De fato, como $\lim(y_n \cdot b) = b^2 > 0$, para $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \quad &\Rightarrow \quad |y_n \cdot b - b^2| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |y_n \cdot b - b^2| < \frac{b^2}{2} \\ &\Rightarrow \quad b^2 - \frac{b^2}{2} < y_n \cdot b < b^2 + \frac{b^2}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{b^2}{2} < y_n \cdot b < \frac{3b^2}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{3b^2} < \frac{1}{y_n \cdot b} < \frac{2}{b^2}. \end{aligned}$$

Sendo

$$k = \min\left\{\frac{1}{y_1 \cdot b}, \frac{1}{y_2 \cdot b}, \ldots, \frac{1}{y_{n_0-1} \cdot b}, \frac{2}{3b^2}\right\}$$

e

$$k' = \max\left\{\frac{1}{y_1 \cdot b}, \frac{1}{y_2 \cdot b}, \ldots, \frac{1}{y_{n_0-1} \cdot b}, \frac{2}{b^2}\right\},$$

concluímos que

$$k \leq \frac{1}{y_n \cdot b} \leq k', \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, como $\lim(x_n \cdot b - y_n \cdot a) = a \cdot b - b \cdot a = 0$, pelo Teorema A.4,

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) - \lim\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

■

Teorema A.6 (do Sanduíche) *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências numéricas. Se $x_n \leq y_n \leq z_n$ e $\lim x_n = \lim z_n = a$, então $\lim y_n = a$.*

Demonstração: Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ e $\lim x_n = \lim z_n = a$. Temos que, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{array}{c} n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \\ n \geq n_2 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \end{array}$$

Desta forma, sendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, obtemos

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \quad &\Rightarrow \quad a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |y_n - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim y_n = a$. ∎

A.4 Séries

Seja (x_n) uma sequência de números reais. Denominamos de **série numérica** $\sum x_n$ a "soma infinita" dos termos de (x_n), ou seja,

$$\sum x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

A parcela x_n é chamada de *n-ésimo termo* ou *termo geral* da série $\sum x_n$.

Considere a sequência (s_n), denominada de *sequência das somas parciais de* (x_n), definida por

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

Dizemos que a série $\sum x_n$ é **convergente** e possui *soma* s (ou converge para s) se $s = \lim\limits_{x \to \infty} s_n$ existe. Se o limite de (s_n) não existe, ou seja, se a sequência das somas parciais de (x_n) não converge, então a série $\sum x_n$ é dita **divergente**.

Exemplo: Considere a sequência (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Temos

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Logo,

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Concluímos, assim, que a série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge para 1.

Exemplo: A sequência cujo termo geral é dado por $x_n = (-1)^n$ é divergente. De fato, a sequência das somas parciais de (x_n) é dada por

$$s_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \\ -1 & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Como (s_n) não converge, concluímos que a série $\sum(-1)^n$ diverge.

A.5 Operações com séries

Teorema A.7 *Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ duas séries convergentes tais que $\sum x_n = a$ e $\sum y_n = b$. Então*

(i) $\sum(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

(ii) $\sum cx_n = c\sum x_n = ca$.

Demonstração: Sejam (s_n) e (t_n) as sequências das somas parciais de (x_n) e (y_n) respectivamente. Temos

(i) $\sum(x_n \pm y_n) = \lim \sum_{k=1}^{n}(x_k \pm y_k) = \lim \sum_{k=1}^{n} x_k \pm \lim \sum_{k=1}^{n} y_k = \lim s_n \pm \lim t_n = a \pm b$.

(ii) $\sum cx_n = \lim \sum_{k=1}^{n} cx_k = c \lim \sum_{k=1}^{n} x_k = c \lim s_n = ca$.

■

Teorema A.8 *Se $\sum x_n$ é uma série convergente, então $\lim x_n = 0$.*

Demonstração: Seja (s_n) a sequência das somas parciais de (x_n). Como $\sum x_n$ é uma série convergente, existe $s = \lim s_n = \lim s_{n-1}$. Logo,

$$\lim x_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

Observação A.5 *A recíproca do Teorema A.8 não é verdadeira. De fato, considere a série* $\sum \frac{1}{n}$*, conhecida como* ***série harmônica****. Temos*

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\
&= 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, (s_{2^n}) *não é limitada superiormente e, consequentemente, diverge. Assim, a sequência das somas parciais* (s_n) *diverge, pois* (s_{2^n}) *é uma subsequência divergente. Logo, apesar de termos* $\lim \frac{1}{n} = 0$*, a série* $\sum \frac{1}{n}$ *é divergente.*

Apêndice B

Teorema de caracterização das funções logarítmicas

Neste apêndice, enunciamos e demonstramos o Teorema de caracterização das funções logarítmicas, apresentado por Lima (2014, pp.168-169).

Teorema B.1 (Teorema de Caracterização das funções logarítmicas) *Seja* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Então existe $a > 0$ *tal que* $f(x) = \log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração: Para demonstrar o teorema apresentado vamos admitir que f seja crescente (o outro caso é tratado igualmente). Temos que

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1),$$

e, portanto, $f(1) = 0$. Como $1 < 2$, concluímos que $0 = f(1) < f(2) = b$, já que f é crescente.

Considere a função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x)/b.$$

Claramente, g é crescente, pois, dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x > y \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{b} > \frac{f(y)}{b} = g(y).$$

Além disso,

$$g(xy) = \frac{f(xy)}{b} = \frac{f(x) + f(y)}{b} = \frac{f(x)}{b} + \frac{f(y)}{b} = g(x) + g(y).$$

Como $g(2) = f(2)/b = f(2)/f(2) = 1$, temos que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$g(2^m) = g(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{m \text{ vezes}}) = \underbrace{g(2) + g(2) + g(2) + \cdots + g(2)}_{m \text{ vezes}} = m \cdot g(2) = m.$$

Temos ainda

$$0 = g(1) = g(2^m \cdot 2^{-m}) = g(2^m) + g(2^{-m}) = m + g(2^{-m}).$$

Logo, $g(2^{-m}) = -m$.

Se $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $r \cdot n = m$. Portanto,

$$m = g\left(2^m\right) = g\left(2^{r \cdot n}\right) = g\left((2^r)^n\right) = n \cdot g(2^r),$$

e daí $g(2^r) = \frac{m}{n} = r$.

Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ então, para $r, s \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$r < x < s \Rightarrow 2^r < 2^x < 2^s \Rightarrow g(2^r) < g(2^x) < g(2^s) \Rightarrow r < g(2^x) < s.$$

Com isso, podemos concluir que $g(2^x) = x$. De fato, suponhamos por absurdo que $g(2^x) \neq x$. Se $g(2^x) > x$, então existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < g(2^x)$. Mas isso é um absurdo, pois, como vimos, se $x < p$ então $g(2^x) < p$. Analogamente, se $g(2^x) < x$, então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $g(2^x) < q < x$, o que também é um absurdo, já que se $q < x$ então $q < g(2^x)$.

Segue-se que $g(2^y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Logo,

$$g(x) = \log_2 x, \forall x > 0.$$

Temos, portanto, que

$$x = 2^{g(x)} = 2^{f(x)/b} = \left(2^{1/b}\right)^{f(x)} = a^{f(x)},$$

com $a = 2^{1/b} > 0$. Concluímos, por fim, que

$$f(x) = \log_a x.$$

■

Apêndice C

Princípio da Indução Finita

Neste apêndice, apresentamos o Princípio da Indução Finita.

C.1 O Primeiro Princípio da Indução Finita

Axioma C.1 (Primeiro Princípio da Indução Finita) *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que*

(i) $P(1)$ é válida.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é válida então $P(n+1)$ é válida.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

C.2 O Segundo Princípio da Indução Finita

A partir da apresentação do *Primeiro Princípio da Indução Finita* como axioma, podemos demonstrar a validade de uma variante sua, conhecida como *Princípio da Indução Completa* ou *Segundo Princípio da Indução Finita.*

Teorema C.1 (Segundo Princípio da Indução Finita) *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que*

(i) $P(1)$ é válida.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $P(k)$ é válida, para todo natural $k \leq n$, então $P(n+1)$ é válida.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Considere a sentença aberta

$$Q(n) : P(k) \text{ é válida, para todo natural } k \leq n.$$

Por (i), temos que $P(1)$ é válida. Assim, $Q(1)$ também é válida. Suponhamos agora que $Q(n)$ seja válida. Isto significa que $P(k)$ é válida, para todo natural $k \leq n$. Por (ii), temos que $P(n+1)$ é válida, e, portanto, $P(k)$ é válida, para todo natural $k \leq n+1$. Logo, $Q(n+1)$ é válida. Pelo Axioma C.1, temos que $Q(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos, então, que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl. B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[2] CATALAN, E. *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet*. Comptes Rendus des Déances de L'Académie des Sciences, 77, pp. 198-201, 1873.

[3] EULER, Leonhard. *Introductio in Analysin Infinitorum*. Opera Mathematica, vol. VIII, 1922.

[4] KUZ'MIN, E.; SHIRSHOV, A. I. *On the Number e*. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, I, pp. 111-119. American Mathematical Society, 1999.

[5] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. vol. 1, 14. ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[6] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[7] MAOR, Eli. *e: The Story of a Number*. New Jersey: Princenton University Press, 1994.

[8] MCCARTIN, Brian J. *e: The Master of All*. The Mathematical Intelligencer, vol. 28, nº 2, pp. 10-21, 2006.

[9] PIPPENGER, Nicholas. *An Infinite Product for e*. The American Mathematical Monthly, vol. 87, nº 5, p. 391, 1980.

[10] YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: An Interplay of the Continuous and the Discrete*. The Mathematical Association of America, 1992.