

# UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS VIA GEOMETRIA ESFÉRICA

Mateus do Nascimento<sup>1</sup>  
Silvio Antonio Bueno Salgado<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste artigo faremos uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos por meio da Geometria Esférica, a qual são apresentados conceitos básicos. Vamos começar estudando historicamente este problema, citando os personagens envolvidos e apresentando exemplos. Acreditamos que os materiais disponíveis para a Educação Básica não trazem uma boa prova deste fato historicamente conhecido, isso motivou a busca por uma demonstração de fácil entendimento. Esta fórmula nos dá uma relação entre o número de faces, de vértices e de arestas de um poliedro convexo. Dessa forma, enxergamos também, que a mesma proposta possa ser aplicada em outros conteúdos, para que seja proporcionado um ensino de qualidade e incentivador da continuidade nos estudos.

**Palavras-chave:** Teorema de Euler. Poliedros. Geometria esférica. Fórmula de Girard.

## 1 Introdução

Após análise de vários materiais escritos para o ensino de Matemática na Educação básica, especificamente na parte dedicada à aprendizagem do Teorema de Euler para poliedros convexos, notou-se a carência de uma prova consistente e plausível de sua legitimidade.

Em geral, os livros didáticos do Ensino médio abordam este teorema com o nome de Relação de Euler para poliedros e o fazem apenas com a introdução de exemplos, afirmando, logo de imediato, que a mesma é válida para todo poliedro convexo com  $V$  vértices,  $F$  faces e  $A$  arestas.

Alguns livros analisados não comentam porque o número  $V - A + F$  é igual a 2, alguns dizem que sempre é igual a dois, o que é um erro se o conceito de poliedro não ficar bem definido. Apenas para uma classe especial de poliedros temos que  $V - A + F = 2$ .

É costume chamarmos o número  $V - A + F$  de característica de Euler-Poincaré do poliedro  $P$  denotada por  $\chi(P)$ . É fácil encontrarmos exemplos de poliedros em que  $\chi(P) = -2$  ou  $\chi(P) = 0$ , por exemplo.

---

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011  
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ  
E-mail: mateusnascido@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso  
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ  
E-mail: silviosalgado@ufs.edu.br

Neste trabalho apresentaremos uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via Geometria Esférica. No caso de poliedros convexos, há demonstrações elementares e corretas do Teorema de Euler. Tal demonstração foi obtida por A. M. Legendre com base na fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Acredita-se que essa demonstração, apresentada na seção 4, seja de fácil entendimento pelos alunos e professores do Ensino Médio, permitindo um aprendizado sólido e veraz a respeito deste fato matemático.

## 2 Breve histórico do teorema de Euler

O Teorema de Euler, descoberto em 1758, diz que se um poliedro tem  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces, então  $V - A + F = 2$ . O número  $V - A + F = 2$  costuma ser chamado de Característica de Euler-Poincaré, denotado por  $\chi(P)$ .

Com relação a este tema, antes de Euler, há um manuscrito de Descartes, escrito por volta de 1639, que foi encontrado por Leibniz em 1675, onde há resultados que como consequência poderia obter-se a relação  $V - A + F = 2$ . Mas até onde se sabe, Descartes não o fez.

A demonstração mais divulgada dessa relação é creditada a Cauchy, porém ela é bastante limitada, uma vez que a mesma serve apenas para *poliedros convexos* e *homeomorfos* à esfera, conceitos que veremos com detalhes mais adiante.

O teorema de Euler faz parte da matriz curricular da educação básica e é ensinado, geralmente, nas aulas de Geometria Espacial no segundo ano do ensino médio. Ele torna-se bastante atraente ao ser ensinado devido a sua simplicidade e facilidade de ilustração através de exemplos palpáveis aos alunos. Considere por exemplo um tetraedro, figura tridimensional, na qual há quatro vértices, seis arestas e quatro faces, ou um cubo, também tridimensional, porém com oito vértices, doze arestas e seis faces, ou ainda, um dodecaedro, também tridimensional, com vinte vértices, trinta arestas e doze faces. Nos três casos, temos:  $V - A + F = 2$ .

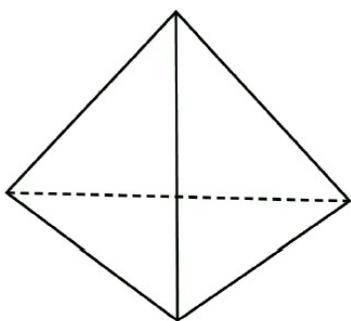


Figura 1: Tetraedro

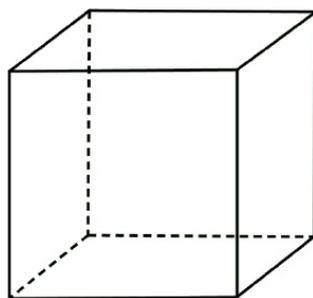


Figura 2: Cubo

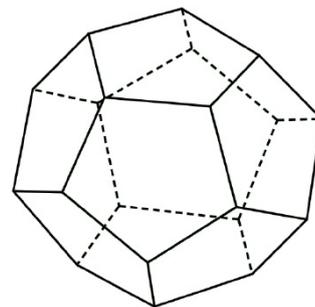


Figura 3: Dodecaedro

Euler enganou-se ao generalizar a fórmula  $V - A + F = 2$  para qualquer poliedro, pois não é difícil encontrarmos exemplos em que  $V - A + F \neq 2$ .

A figura 4, logo abaixo, exibe um exemplo onde isso ocorre. Note que  $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0 \neq 2$ .

Uma saída para esse impasse é restringir classes de poliedros e investigar, uma por uma, qual é a sua característica. O que pode ser bem trabalhoso.

Então nos perguntamos: não há uma maneira mais econômica e concisa de fazermos isto? A resposta é sim.

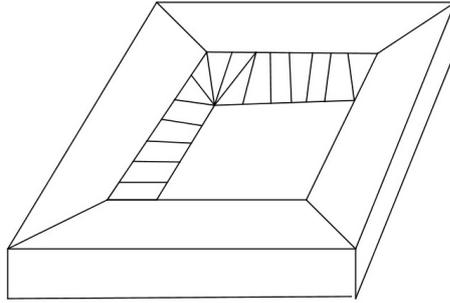


Figura 4:

Segundo Lima [5], a discussão sobre o teorema de Euler durou mais de um século, sendo encerrada por Poincaré, em 1893 com o desenvolvimento de uma área da Matemática chamada *Topologia algébrica*. Poincaré notou que o teorema de Euler não era um problema de Geometria, e sim, de Topologia, percebeu também que o número  $V - A + F$  é um *invariante topológico*.

Para explicarmos *invariante topológico* precisamos definir *homeomorfismo*. Dizemos que duas figuras, P e Q, são homeomorfas quando existe uma bijeção contínua,  $f : P \rightarrow Q$ , cuja a inversa,  $f^{-1} : Q \rightarrow P$ , também seja contínua (chamamos  $f$  de *homeomorfismo* de P sobre Q).

Podemos entender *homeomorfismo* de maneira intuitiva. Assuma que o poliedro seja feito de borracha infinitamente inflável, e uma vez feito isso, ele se transformará em outra figura. Para ilustrar tal transformação, imagine um tetraedro, feito com esta borracha, sendo inflado, espera-se que ele se transforme em uma esfera, assim como um cubo ou ainda um dodecaedro, ambos pelo mesmo processo, mas se fizermos o mesmo processo com o sólido da figura 2, ele se transformará em figura chamada toro (semelhante à uma câmara de ar de um pneu). De maneira formal, duas figuras se dizem *homeomorfas* ou *topologicamente equivalentes*, se for possível passar de uma para outra por um processo consistindo em esticar, contrair, torcer (sem rasgar ou colar) e fazer cortes, se assim desejar, desde que, nesse último caso, se rejuntem as bordas de cada uma de maneira a não deixar alterações.

Diremos, a partir daqui, através deste processo intuitivo, que poliedros que se transformam em esferas, toros, ou ainda, bitoros, são homeomorfos à esfera, ao toro e ao bitoro, respectivamente.

Nos dias de hoje, é de praxe chamarmos  $\chi(P) = V - A + F$  de *característica de Euler-Poincaré* do poliedro P e  $\chi(P)$  é um *invariante topológico*.

Poincaré mostrou que se o poliedro P, com V vértices, A arestas e F faces é homeomorfo ao poliedro P', com V' vértices, A' arestas e F' faces, então, V, A e F são diferentes de V', A' e F', respectivamente, mas  $V - A + F = V' - A' + F'$ .

Por exemplo, se P é um tetraedro,  $\chi(P) = 2$ . Logo, todo poliedro homeomorfo ao tetraedro, ou seja, à uma esfera, tem característica Euler-Poincaré igual a 2.

Na verdade, o fato supracitado ocorre com todo poliedro convexo P, pois projetando-o a partir de um ponto interior, sobre uma esfera S que contenha P, obtemos um homeomorfismo  $f : P \rightarrow S$ .

### 3 Noções de Geometria Esférica

Nesta seção trataremos de conceitos elementares de Geometria Esférica, estes por sua vez, serão utilizados, em seguida, na demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. A Geometria Esférica foi elaborada, principalmente, por Adrien-Marie Legendre, a fim de ser possível o estudo geométrico em áreas esféricas, onde a Geometria Euclidiana não atende adequadamente e não pode ser usada de forma precisa.

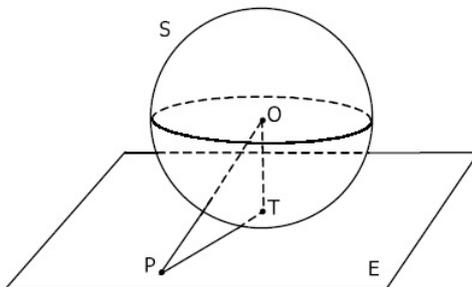
**Definição 3.1 (Superfície esférica)** *Seja  $O$  um ponto e  $r$  um número real positivo. A superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço, cuja distância a  $O$  é igual a  $r$ .*

Os pontos do espaço cuja distância ao ponto  $O$  é menor que  $r$ , são interiores, e aqueles cuja distância é maior que  $r$ , são chamados de exteriores à superfície esférica, respectivamente. A reunião da superfície esférica com seus pontos interiores denomina-se *esfera* de centro  $O$  e raio  $r$ . O segmento que une o centro a qualquer ponto da superfície esférica é denominado *raio da superfície esférica*, já o segmento que une dois pontos distintos da mesma, é denominado *corda*.

**Teorema 3.1** *Um plano é perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica se, e somente se, é tangente à mesma.*

**Demonstração.**

Seja  $E$  um plano perpendicular ao raio  $\overline{OT}$  em  $T$ , vamos mostrar que nenhum outro ponto de  $E$  está na superfície esférica.

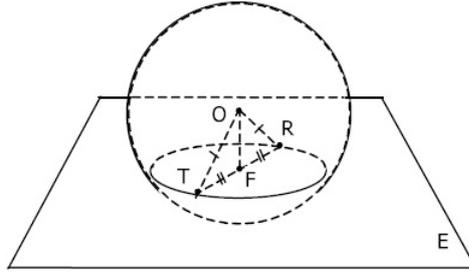


Seja  $P$  um ponto qualquer de  $E$ ,  $P$  distinto de  $T$ . Como  $E$  é perpendicular a  $\overline{OT}$  temos que  $\triangle OPT$  é um triângulo retângulo com hipotenusa  $\overline{OP}$  e catetos  $\overline{OT}$  e  $\overline{PT}$ . Logo  $OP > OT = r$  e, portanto,  $P$  não está na superfície esférica.

Reciprocamente, seja  $E$  um plano tangente à superfície esférica no ponto  $T$ . Suponha, por absurdo, que  $E$  não seja perpendicular ao raio  $\overline{OT}$ . Vamos mostrar que essa hipótese nos leva a uma contradição.

Seja  $F$  o pé da perpendicular ao plano  $E$ , traçada a partir de  $O$ , temos  $F \neq T$ , pois  $E$  não é perpendicular a  $\overline{OT}$ . Seja  $R$  o ponto da reta  $\overline{FT}$ , tal que,  $T-F-R$  e  $FR = FT$ . Então,  $\triangle OFR \cong \triangle OFT$  ( pelo critério LAL de congruência de triângulos ), de modo que,  $OR = OT = r$  e, portanto,  $R$  está na superfície esférica. Logo  $E$  intersecta a superfície esférica em um ponto  $R$  distinto de  $T$ . Isso é impossível, pois  $E$  é um plano tangente.

□



A intersecção de um plano secante à *superfície esférica* de raio  $r$ , passando pelo centro  $O$ , determina uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . De maneira mais geral, se um plano contém um ponto interior à *superfície esférica*, esta intersecção é uma circunferência, tal que, seu centro é o pé da perpendicular ao plano secante, traçada a partir do centro da *superfície esférica*.

**Observação 3.1** *Em Geometria Esférica e Geometria Euclidiana os conceitos de reta são bastante diferentes. A intersecção da superfície esférica com um plano, passando pelo centro, é chamada de circunferência máxima ou geodésica, que é definida como reta em Geometria Esférica. Na figura a seguir,  $ACA'$  e  $ADA'$  são retas, ambas perpendiculares à reta  $BCDE$ .*

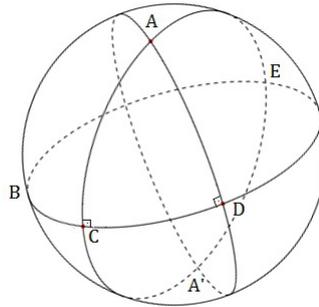


Figura 5: Retas perpendiculares

Ainda na figura acima, considerando as duas retas,  $ACA'$  e  $ADA'$ , e os pólos  $A$  e  $A'$  dessas retas, temos, na Geometria Euclidiana, que a distância de qualquer reta ao pólo é constante e igual a quatro vezes a distância polar, para todas as retas. Perceba que, na Geometria Esférica, não existem retas paralelas, e esta, por sua vez, tem comprimento finito.

**Definição 3.2 (Segmento de reta na Geometria Esférica)** *Dados dois pontos sobre a superfície esférica, o menor comprimento entre eles é dado por um trecho de reta denominado arco de circunferência máxima, que é definido como segmento de reta na Geometria Esférica.*

Para obtermos a medida desse comprimento, basta sabermos o ângulo central  $A\hat{O}B$ , já que o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, temos então, que a distância entre  $A$  e  $B$  é:

$$\frac{2\pi r \alpha}{360} \quad (1)$$

onde  $r$  é o raio da superfície esférica e  $\alpha$  é o ângulo central dado em graus.

**Definição 3.3 (Ângulo esférico)** *O ângulo esférico é a interseção de duas retas e, sua medida, é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes à superfície esférica com vértice no ponto de interseção.*

Uma outra forma de definir ângulo esférico, é o ângulo diedral entre os semi-planos que contém as semi-circunferências máximas.

**Definição 3.4 (Polígono esférico)** *A porção da superfície esférica, limitada exclusivamente por segmentos de reta, é chamada polígono esférico.*

Neste trabalho, um polígono que nos interessa bastante, é o triângulo esférico, visto que ele é elemento fundamental na demonstração do Teorema de Euler, e é formado pela união de três segmentos geodésicos de uma esfera, onde cada segmento geodésico é o arco de círculo máximo da esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Na figura a seguir, os pontos A, B e C determinam o triângulo esférico ABC, de lados BC, AC e AB, que doravante chamaremos de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, e os ângulos internos do triângulo ABC, são:  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$ .

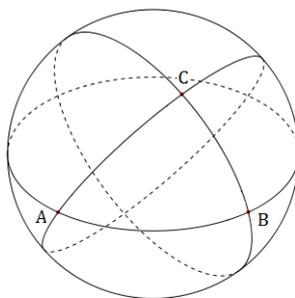


Figura 6: Triângulo Esférico

A Geometria Esférica independe do quinto postulado de Euclides, o qual postula que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual a  $180^\circ$ , ao invés disso, temos esta soma variando de  $180^\circ$  a  $540^\circ$ , dependendo do triângulo considerado.

Assim como a soma das medidas dos ângulos internos, em relação à soma das medidas dos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  do triângulo esférico, persiste, também, uma faixa de variação de extremos  $180^\circ$  e  $360^\circ$ . Note que isso nos dá a possibilidade de termos um triângulo esférico com três ângulos, medindo cada um,  $90^\circ$ .

## 4 O Teorema de Euler

Faremos nesta seção a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via Geometria de Legendre. Trata-se da primeira demonstração compreensível a ser publicada deste Teorema. Segundo Lima, trata-se de um assunto simples, claro e de fácil exposição.

A motivação para escolha de tal caminho, vem da simplicidade pela qual a demonstração é apresentada, o que a torna atraente e instrutiva.

Para que não haja ambiguidade quanto aos termos que empregaremos, é conveniente relembrar algumas definições.

**Definição 4.1 (Conjunto convexo)** *Um conjunto  $C$ , do plano ou do espaço, diz-se convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ .*

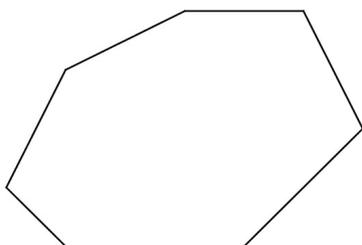


Figura 7: Conjunto convexo no plano

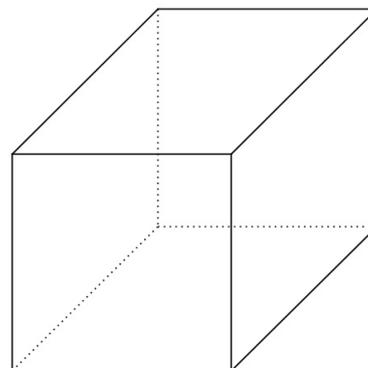


Figura 8: Conjunto convexo no espaço

**Definição 4.2 (Polígono convexo)** *Um polígono é a parte do plano que encontra-se no interior da curva feita por um número finito de segmentos. Estes segmentos são chamados de arestas e os pontos onde elas se encontram chamados de vértices. Diz-se que um polígono é convexo quando ele limita uma figura do plano no sentido da definição de conjunto convexo.*

**Definição 4.3 (Poliedro convexo)** *Um poliedro é uma reunião finita de polígonos convexos, chamados as faces do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro. Exige-se ainda, que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro, seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia. Diz-se que um poliedro é convexo quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição de conjunto convexo.*

Seja  $P$  um poliedro convexo, com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces.

Convenientemente, suporemos que todas as faces de  $P$  são triângulos, não alterando o número  $V-A+F$ . De fato, se a face não for um triângulo, basta traçarmos diagonais até que a mesma fique decomposta em apenas triângulos, isso traz comodidade na demonstração, uma vez que, ao traçar uma diagonal, não alteramos o número  $V$  de vértices, o que aumenta são as faces e as arestas, no entanto, ambas em mesma quantidade, mantendo assim, a relação  $V-A+F$ , constante.

Consideremos uma esfera  $E$ , de raio  $r$ , cujo centro  $O$  é um ponto situado no interior do poliedro  $P$ . Se projetarmos  $P$  radialmente sobre  $E$ , obtemos uma decomposição de  $E$  em *triângulos esféricos*, de modo parecido com  $P$ , porém cada face passa a ter um formato abaulado. Com essa transformação,  $E$  fica recoberta por  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices.

A interseção de  $E$  com qualquer plano  $L$  é um círculo ou um ponto, quando  $L$  for tangente à  $E$ . Chamamos esta interseção de *círculo máximo*, quando  $L$  passa pelo centro  $O$  de  $E$ .

A projeção radial de um segmento de reta  $\overline{AB}$  é um arco de círculo máximo  $\widehat{ab}$  sobre a esfera  $E$ , exceto quando,  $A$ ,  $B$  e  $O$  pertencem a uma mesma reta.

**Teorema 4.1 (Fórmula de Girard)** *Se os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de um triângulo esférico forem medidos em radianos, então,*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2} \quad (2)$$

onde  $a$  é a área do triângulo esférico, pertencente à esfera de raio  $r$ .

**Demonstração.**

A demonstração desse resultado pode ser encontrada no livro *Meu Professor de Matemática e outras histórias* [1].

□

**Teorema 4.2 (Euler)** *Para todo poliedro convexo, vale a relação  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro.*

**Demonstração.**

Para demonstrar o teorema de Euler, Legendre fundamentou-se no teorema de Girard.

Retornando à esfera, a qual ficou decomposta em  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices, para cada um desses triângulos esféricos vale o teorema de Girard, ou seja,

$$s_t = \pi + \frac{a_t}{r^2} \quad (3)$$

onde  $s_t$  é a soma dos ângulos internos e  $a_t$  é a área do triângulo esférico  $t$ .

Temos um total de  $F$  faces, nas quais vale a relação acima, de modo que,

$$s_{t_1} + s_{t_2} + \dots + s_{t_n} = \pi F_1 + \frac{a_{t_1}}{r^2} + \pi F_2 + \frac{a_{t_2}}{r^2} + \dots + \pi F_n + \frac{a_{t_n}}{r^2} \quad (4)$$

onde  $s_{t_i}$  é a soma dos ângulos internos,  $F_i$  é a face e  $a_{t_i}$  é a área de cada triângulo esférico respectivamente.

Reescrevendo (4), teremos:

$$\sum_{i=1}^n s_{t_i} = \pi(F_1 + F_2 + \dots + F_n) + \frac{\sum_{i=1}^n a_{t_i}}{r^2} \quad (5)$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n s_{t_i} = \pi F + \frac{\sum_{i=1}^n a_{t_i}}{r^2} \quad (6)$$

Mas,  $\sum_{i=1}^n s_{t_i} = 2\pi V$ , uma vez que a soma dos ângulos em torno de cada vértice é  $2\pi$  (volta completa). Sabemos também que  $\sum_{i=1}^n a_{t_i} =$  área de todos os triângulos esféricos = área da superfície esférica  $E = 4\pi r^2$ . Portanto, podemos reescrever (6) e teremos:

$$2\pi V = \pi F + \frac{4\pi r^2}{r^2} \quad (7)$$

ou seja,

$$2\pi V = \pi F + 4\pi \quad (8)$$

ou ainda,

$$2V = F + 4 \quad (9)$$

que é o mesmo que,

$$2V - F = 4 \quad (10)$$

Observemos, atentamente, que todo triângulo têm três lados, e toda aresta é lado de dois triângulos simultaneamente. Logo,  $3F = 2A$ , que pode ser reescrito como  $F + 2F = 2A$ , de modo que:

$$F = 2A - 2F \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10) obteremos:

$$2V - (2A - 2F) = 4 \quad (12)$$

onde,

$$2V - 2A + 2F = 4 \quad (13)$$

finalmente, dividindo toda a equação anterior por 2, finalmente, temos:

$$V - A + F = 2$$

□

## 5 Considerações finais e agradecimentos

Os saberes geométricos estão presentes na vida cotidiana dos alunos e seus familiares, não se restringindo a um campo de conhecimentos unicamente escolar. Os deslocamentos realizados em viagens e na própria cidade em que residimos, as brincadeiras e as atividades profissionais, produzem saberes matemáticos, como os geométricos.

A Geometria é parte integrante do nosso mundo e do currículo das escolas, é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio, já que possui expressão gráfica das formas e relações matemáticas.

O ensino da Geometria Espacial na Educação Básica é feito com base na memorização de fórmulas e em uma infinidade de aplicações repetitivas. Há a ilusão que, deste modo, o aluno esteja aprendendo, quando na verdade, ele está apenas memorizando uma sequência de operações pré-definidas.

Acredita-se, então, que o ensino da Geometria tenha uma base insuficiente, precisando ser melhorado, para que o educando aprenda e dê significado ao que foi aprendido, sendo capaz de fazer críticas e de argumentar sobre o referido assunto.

Há a necessidade de inserir no cotidiano escolar elementos da cultura e da vida dos alunos, para enriquecer a prática pedagógica, centrando no estudo e no ambiente que os cerca, fazendo uso das noções e dos conhecimentos geométricos. O estudo da Geometria se torna importante ao facilitar as percepções espaciais dos estudantes, contribuindo para uma melhor apreciação das construções e dos trabalhos artísticos, dos seres humanos e da natureza.

A transição do plano para o espaço traz dificuldades aos alunos, uma vez que, no plano, a visualização é fácil e rápida, e no espaço torna-se mais difícil apresentar figuras com fatos abstratos. Não é impossível, porém, é inviável para todo conteúdo a ser explorado.

Neste trabalho abordamos a demonstração de uma parte da ementa de Geometria Espacial, acreditando que algo parecido possa ser feito no restante do conteúdo, haja vista a complexidade existente nas relações entre figuras espaciais.

Vale lembrar que a Geometria, tal qual a conhecemos hoje, levou mais de 2000 anos para ser formulada corretamente. Devemos ter habilidade no seu manuseio.

Tais fatos precisam de alternativas rigorosas ao serem ensinados, e não, meros exemplos exaustivos.

Da mesma forma que apresentamos, neste trabalho, a demonstração do Teorema de Euler via Geometria Esférica de Legendre, enxergamos a necessidade de alternativas para outros conteúdos da Educação Básica.

Por fim, agradeço, primeiro a Deus, por ter me dado forças para chegar até aqui, à minha família que foi compreensiva durante esses dois anos de estudo intenso, aos colegas de curso que contribuíram nas soluções das infundáveis e ótimas listas de exercícios, em especial, aos professores do DEMAT-UFSJ, que gentilmente repartiram parte do seu conhecimento, os quais levarei para vida toda, aos amigos sinceros que torceram para que eu concluísse este curso com sucesso, à coordenação nacional, por acreditar que o projeto PROFMAT era possível, e à CAPES, por custear minhas despesas neste período.

## Referências

- [1] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
  
- [2] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio - volume 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
  
- [3] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.
  
- [4] FILHO, Zoroastro Azambuja. **Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos**. Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática N°3, 1983.
  
- [5] LIMA, Elon Lages. **Ainda sobre o Teorema de Euler para poliedros convexos**. Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática N°3, 1983.
  
- [6] MUNCRES, James R. **Topology**. 2. ed. Pearson Education, 2003.