UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Irineu Fava Neto

Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações

São José do Rio Preto
2013

Irineu Fava Neto

Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de concentração - Ciências Exatas do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva

São José do Rio Preto
2013

Fava Neto, Irineu
Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações/ Irineu Fava Neto. – São José do Rio Preto: [s.n.], 2013.
46 f. : 20 il. ; 30 cm.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Distância euclidiana. 2. Distância do táxi. 3. Geometria do Táxi. I. Silva, Flávia Souza Machado da. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III.Título.

CDU – 514.12

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Câmpus de São José do Rio Preto - UNESP

Irineu Fava Neto

Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de concentração - Ciências Exatas do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof.ª Dr.ª Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP – São José do Rio Preto

Prof.ª Dr.ª Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCAR – São Carlos

São José do Rio Preto
15 de abril de 2013.

Dedico este trabalho

A todos os educadores, familiares e amigos. E principalmente aos nossos Mestres e Doutores pela dedicação em nos ensinar, por transmitir um pouco do muito que ainda tenho a aprender, ao longo de minha vida. Minha eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, e também a todos os educadores pela dedicação e pelos ensinamentos ao longo do curso. Em especial a minha orientadora Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva pelo incentivo, respeito e dedicação em me conduzir a maiores reflexões, engrandecendo-me. Minha eterna gratidão.

Aos meus queridos pais Antonio Geraldo Fava e Maria de Lourdes Fava (in memorian). Meus eternos amores.

A minha amada esposa Cintia, por sempre estar ao meu lado em todos os momentos incentivando-me sempre.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.” (Paulo Freire).

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar uma nova noção de distância, a distância da Geometria do Táxi. A Geometria do Táxi é uma Geometria não Euclidiana intuitiva. A distância desta Geometria foi abordada como motivadora no ensino de diversos temas da matemática, destacando a sua grande influência no dia-a-dia das pessoas, principalmente nos seus deslocamentos pelas ruas e de forma a confrontá-la com a distância da Geometria Euclidiana, no que diz respeito a conceitos e resultados relacionados a ela. Sendo assim, também foi proposta uma sequência de atividades abordando as distâncias: euclidiana e do táxi, com a finalidade de estimular a aprendizagem do aluno e permitir que ele faça conexões com o seu cotidiano.

Palavras-chave: distância euclidiana, distância do táxi, Geometria do Táxi.

ABSTRACT

This current work was developed with the aim of presenting a new concept of distance, the distance of the geometry of Taxi. The Geometry of Taxi is a non-Euclidean intuitive Geometry. The distance of this Geometry was approached as a motivator in teaching various topics in mathematics, emphasizing its great influence in day-by-day lives, especially in their movement through the streets and in order to compare it with the distance of Euclidean Geometry, as regards the concepts and results related to it. So it is also proposed a sequence of activities addressing the distances: euclidean and taxi, in order to stimulate student learning and allow him to make connections with their daily lives.

Keywords: euclidean distance, distance of taxi, Taxi Geometry.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9
CAPÍTULO 1: COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO 12
1.1 Plano cartesiano 12
1.2 Distância euclidiana entre dois pontos 15
CAPÍTULO 2: A GEOMETRIA DO TÁXI E DISTÂNCIA 19
2.1 Distância do táxi entre dois pontos 19
2.2 Relação entre a distância do táxi e a distância euclidiana 23
2.3 Comparações entre a Geometria do Táxi e a Geometria Euclidiana 24
CAPÍTULO 3: ATIVIDADES 32
3.1 Primeira Atividade: distância euclidiana entre dois pontos dados 32
3.2 Segunda Atividade: fórmula da distância euclidiana entre dois pontos 34
3.3 Terceira Atividade: apresentando a distância do táxi entre dois pontos 36
3.4 Quarta Atividade: relação entre a distância do táxi e a distância euclidiana 39
3.5 Quinta Atividade: a circunferência na Geometria do Táxi 41
3.6 Atividade Complementar 1: demonstrando que a distância euclidiana é menor ou igual do que a distância do táxi 43
3.7 Atividade Complementar 2: uma elipse na Geometria do Táxi 43
CONSIDERAÇÕES FINAIS 45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 46

INTRODUÇÃO

Distância entre dois pontos, em matemática, é a medida do comprimento do menor caminho que se percorre indo de um ponto a outro. Quando o caminho é percorrido em linha reta dá-se o nome de distância euclidiana. Essa distância é a que se estuda na Geometria Euclidiana, a qual é muito importante e perfeitamente adequada em algumas situações.

Porém, muitas vezes não podemos ir de um ponto ao outro de uma cidade seguindo trajetos em linha reta. A menor distância para deslocarmos de um ponto ao outro depende dos possíveis trajetos das ruas.

> Para lidar com a geografia urbana, um modelo conveniente é a chamada 'geometria do táxi', assim denominada porque as distâncias percorridas por um táxi aproximam-se muito mais destas do que das distâncias euclidianas, já que o táxi não é um passarinho, tendo que obedecer ao traçado das ruas (WANDERLEY *et al*., 2002, p. 24).

A Geometria é uma ciência muito antiga. O ponto inicial foi na Grécia, no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu Os Elementos (por volta de 300 a.C.).

Figura 1: Euclides de Alexandria

Fonte: University of St Andrews

A obra (Os Elementos) se destaca pelos dez axiomas que Euclides escolheu. Os axiomas foram divididos em dois grupos: as noções comuns e os postulados. O quinto postulado, característico da Geometria Euclidiana, é o mais famoso dos postulados de Euclides e é chamado de postulado das paralelas. Desde o século XVIII vários matemáticos achavam que o quinto postulado pudesse ser demonstrado a partir de outros postulados de Euclides. Nenhuma tentativa de prova do postulado foi feita com sucesso. Contudo, na tentativa de demonstrar o quinto postulado, surgiram no século XIX as Geometrias não Euclidianas.

Um exemplo desse tipo de geometria, bastante intuitiva, é a Geometria do Táxi. Essa Geometria trabalha com o plano cartesiano totalmente coberto por quadrados e nos mostra que o caminho mais curto entre dois pontos nem sempre é uma linha reta. Podemos utilizar essa Geometria para modelar uma cidade bem planejada com quadras perfeitas. Nesta, para irmos de um ponto ao outro do plano, teremos que percorrer segmentos horizontais e/ou verticais. Assim, o caminho de menor comprimento entre dois pontos será um segmento de reta apenas se estes se encontrarem na mesma vertical (ou horizontal). Para calcular a distância entre dois pontos que não estão na mesma vertical (ou na mesma horizontal) teremos que somar as medidas dos segmentos horizontais e verticais percorridos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática - 5ª a 8ª séries (BRASIL, 1998) dizem que:

> “[...] fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico” (p. 25).

Sendo assim, o objetivo desse trabalho é o de apresentar uma nova noção de distância, bem como compará-la com a noção usualmente conhecida e aplicá-la na definição de dois lugares geométricos específicos.

O trabalho está desenvolvido da seguinte forma: no primeiro capítulo abordamos o plano cartesiano e a distância euclidiana.

No segundo capítulo apresentamos a definição da distância do táxi e suas propriedades e algumas relações e comparações entre a Geometria Euclidiana e a do Táxi.

Para finalizar, no último capítulo, propomos uma sequência de atividades educacionais incluindo: seus objetivos, público alvo, pré-requisitos, metodologia, materiais de apoio, tempo previsto e descrição da aula. Os objetivos das atividades são: a consolidação do uso de coordenadas cartesianas, a introdução de uma nova noção de distância, a comparação entre a distância euclidiana e a do táxi por meio das coordenadas e a visualização das formas geométricas da circunferência e da elipse quando usamos a distância do táxi. Um possível desdobramento é trabalhar com a forma de outros lugares geométricos que envolvem o conceito de distância, como por exemplo: mediatriz de um segmento, hipérbole, parábola, etc.

CAPÍTULO 1: COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

O matemático René Descartes deu início à abordagem algébrica da Geometria Euclidiana por volta de 1637 com seu trabalho La Geométrie. René Descartes nasceu na França por volta de 1601 e morreu prematuramente por volta de 1650. Um dos objetivos de René era libertar a Geometria de tantos diagramas, que cansavam a imaginação, através de processos algébricos. A ideia de localizar pontos no plano por meio de um sistema de coordenadas representou um grande avanço no estudo da Geometria.

O capítulo aborda de forma breve o plano cartesiano, em seguida, apresentamos o conceito de distância euclidiana, exemplos e suas propriedades.

1.1 Plano cartesiano

Um plano cartesiano consiste do plano determinado por duas retas (*eixos coordenados*), uma horizontal e outra vertical, que se cruzam perpendicularmente num ponto O (*origem*). O eixo horizontal é chamado de *eixo das abscissas ou eixo* Ox, e o vertical de *eixo das ordenadas ou eixo* Oy.

Cada ponto A do plano cartesiano é identificado com um par ordenado (x_a, y_a) de números reais chamados de coordenadas, e vice-versa. Logo, podemos escrever $A = (x_a, y_a)$. O primeiro número x_a do par ordenado representa o valor associado ao eixo horizontal, enquanto que o segundo número y_a representa o valor associado ao eixo vertical.

Observe que os pontos da forma $(x, 0)$ e $(0, y)$ localizam-se sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente. E ainda, se a e b são dois números reais distintos, então os pares ordenados (a, b) e (b, a) são diferentes, pois as primeiras coordenadas de cada um dos pares ordenados são distintas e, portanto, representam pontos distintos.

Por convenção, o ponto de origem O do plano cartesiano corresponde ao par ordenado $(0,0)$. O sentido de crescimento no eixo horizontal é da esquerda para a direita, e no vertical, de baixo para cima. Os números positivos são representados à direita e acima do ponto de origem, e os negativos à esquerda e abaixo desse ponto (Figura 2).

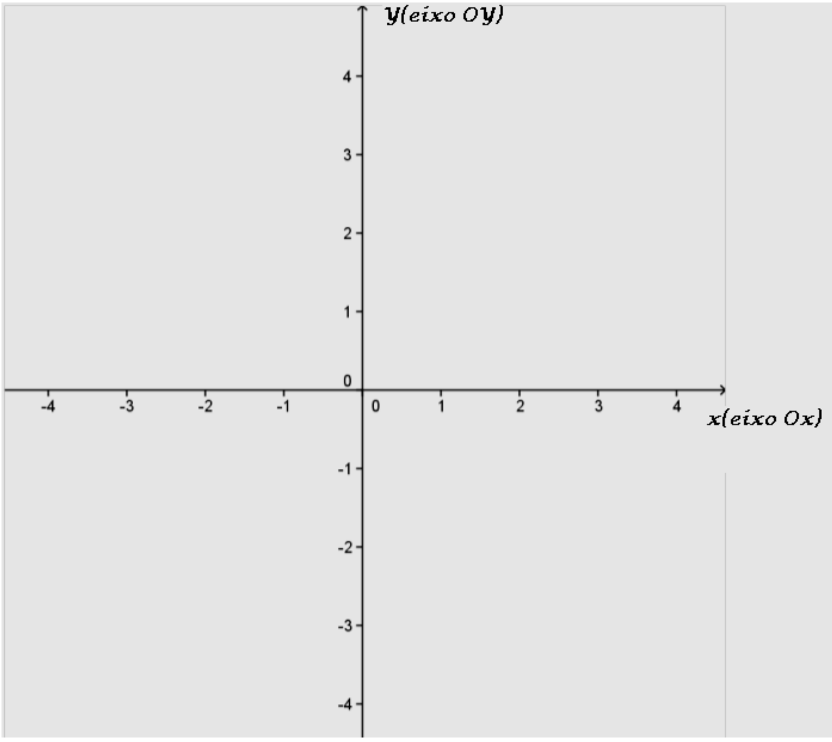


Figura 2: Representação do plano cartesiano e dos eixos coordenados

Exemplos:

1) O ponto correspondente ao par ordenado $A = (3, 2)$ encontra-se a 3 unidades de distância da origem na horizontal e a 2 unidades de distância da origem na vertical (Figura 3).

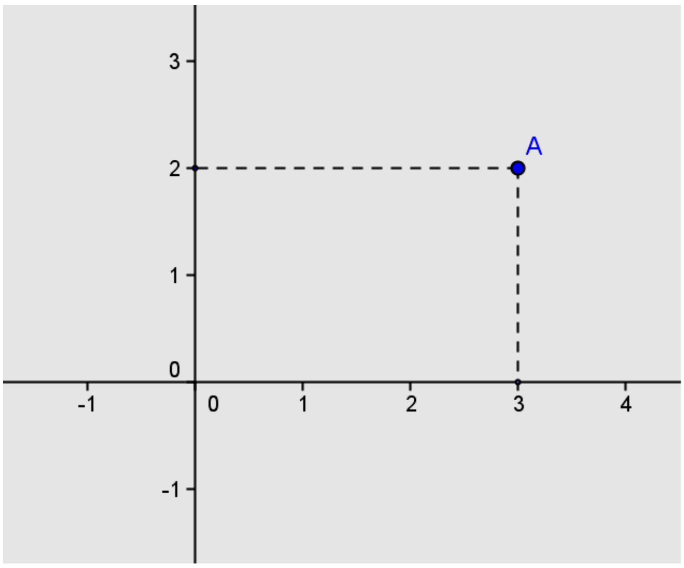


Figura 3: Representação do ponto *A*

2) Os pontos $F = (2,0)$ e $G = (0,-3)$ localizam-se sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente (Figura 4).

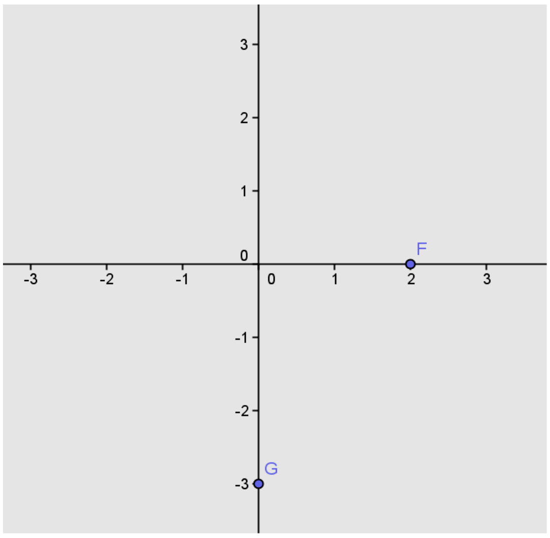


Figura 4: Localização dos pontos *F* e *G*

Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro partes denominadas quadrantes (Figura 5). Dizemos que um ponto $A = (x_a, y_a)$ está localizado no:

i) 1º quadrante se $x_a > 0$ e $y_a > 0$.

ii) 2º quadrante se $x_a < 0$ e $y_a > 0$.

iii) 3º quadrante se $x_a < 0$ e $y_a < 0$.

iv) 4º quadrante se $x_a > 0$ e $y_a < 0$.

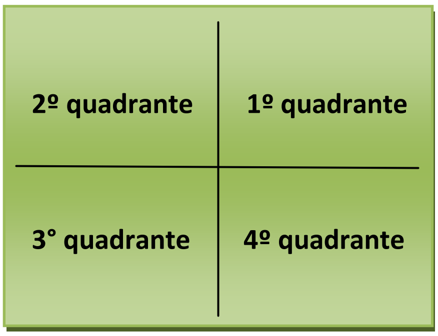


Figura 5: Os quadrantes do plano cartesiano

Exemplo: Vamos localizar no plano cartesiano os pontos:

$$A = (1,2),\ B = (2,-1),\ C = (-1,2),\ D = (-2,-1) \text{ e } E = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Os pontos A e E pertencem ao primeiro quadrante, C ao segundo quadrante, D ao terceiro quadrante e B ao quarto quadrante (Figura 6).

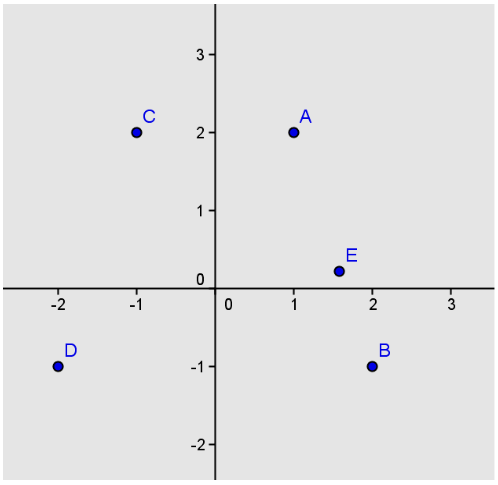


Figura 6: Localização dos pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano

1.2 Distância euclidiana entre dois pontos

A distância euclidiana entre dois pontos do plano é a medida do segmento de reta formado por eles. Assim, dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ para obtermos a expressão da distância euclidiana entre eles, que será denotada por $d_e\ (A, B)$, temos que analisar os seguintes casos:

<u>1º caso</u>: o segmento formado pelos pontos A e B é paralelo a um dos eixos coordenados.

Assim, $d_e(A, B) = |x_b - x_a|$ se o segmento for paralelo ao eixo Ox. No caso de ser paralelo ao eixo Oy, $d_e(A, B) = |y_b - y_a|$.

<u>2º caso</u>: o segmento formado pelos pontos A e B não é paralelo a nenhum dos eixos.

Neste caso, podemos considerar o ponto $C = (x_b, y_a)$ e os pontos $A, B\ e\ C$ são vértices de um triângulo retângulo em C.

Pelo caso anterior, $d_e(A, C) = |x_b - x_a|$ e $d_e(B, C) = |y_a - y_b| = |y_b - y_a|$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$d_e\ (A, B)\ ^2\ = d_e\ (A, C)\ ^2 + d_e\ (B, C)\ ^2 =\ (x_b - x_a)\ ^2\ +\ (y_b - y_a)\ ^2.$$

Portanto,

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 +\ (y_b -\ y_a)^2}.$$

Observe que, em qualquer um dos casos, podemos calcular a distância euclidiana entre dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pela fórmula:

$$d_e(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Exemplos:

1) Considerando os pontos $E = (-1,3)$ e $F = (-1,1)$, obtemos que a distância euclidiana entre eles é $d_e(E,F) = \sqrt{\left(-1-(-1)\right)^2 + (3-1)^2} = |3-1| = 2$ (Figura 7).

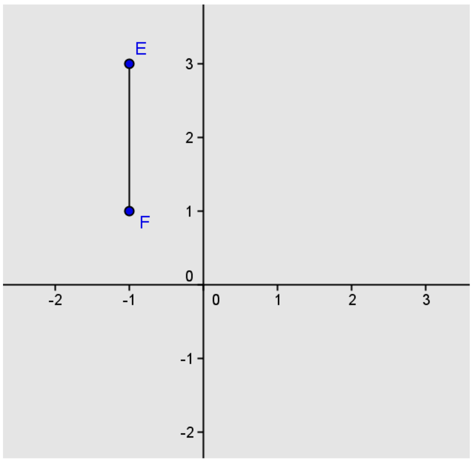


Figura 7: Segmento de reta paralelo ao eixo Oy

2) A distância euclidiana (Figura 8) entre os pontos $C = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $D = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ é:

$$d_e(C,D) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

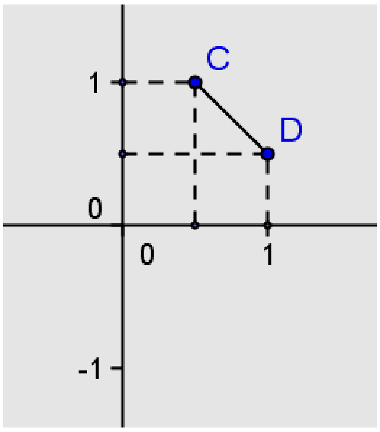


Figura 8: Segmento de reta formado pelos pontos C e D

3) Para os pontos $A = (2, -1)$ e $B = (-3, 1)$ (Figura 9) temos:

$$d_e(A, B) = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

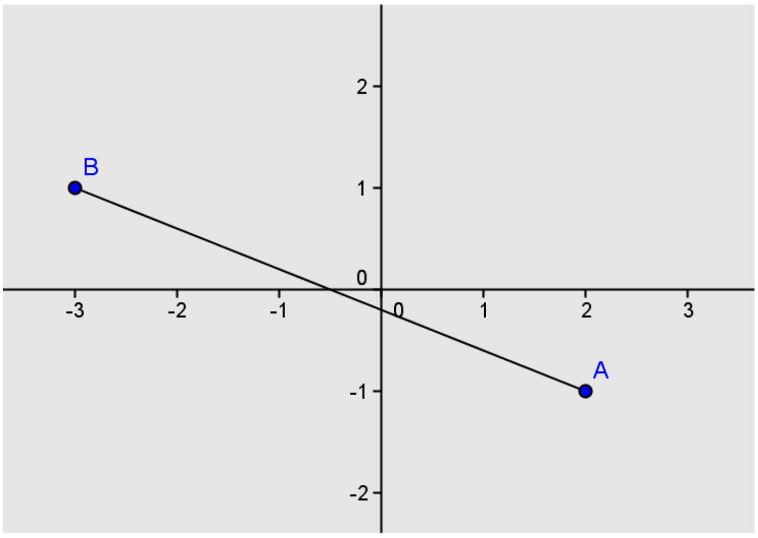


Figura 9: Segmento de reta formado pelos pontos *A* e *B*

Sejam $A = (x_{a,}y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ pontos quaisquer do plano cartesiano. Provaremos a seguir quatro propriedades que a distância euclidiana satisfaz:

P₁. $d_e(A, A) = 0$.

Prova: Por definição, $d_e\ (A, A) = \sqrt{(x_a - x_a)^2 + (y_a - y_a)^2} = 0$.

P₂. $d_e(A, B) > 0$, se $A \neq B$.

Prova: Se $A \neq B$, então $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo $(x_a - x_b)^2 > 0$ ou $(y_a - y_b)^2 > 0$.

Portanto, $d_e\ (A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} > 0$.

P₃. $d_e(A, B) = d_e(B, A)$.

Prova: Temos

$$d_e\ (A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = \sqrt{(-(x_b - x_a))^2 + (-(y_b - y_a))^2} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = d_e(B, A).$$

P₄. $d_e(A, B) \leq d_e(A, C) + d_e(B, C)$.

Prova: Inicialmente provaremos que, para quaisquer números reais x, y, z e w,

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)} \geq xz + yw.$$

De fato,

$$(xw - yz)^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2w^2 - 2xywz + y^2z^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2w^2 + y^2z^2 \geq 2xywz.$$

Logo,

$$(x^2 + y^2)(z^2 + w^2) = x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 \geq (xz + yw)^2.$$

Como os dois membros da desigualdade anterior são positivos, então:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)} \geq \sqrt{(xz + yw)^2}.$$

Por outro lado, $xz + yw \leq |xz + yw| = \sqrt{(xz + yw)^2}$

Portanto

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)} \geq xz + yw.$$

Agora, verifiquemos que $d_e\,(A, B) \leq d_e(A, C) + d_e\,(B, C)$.

Tomando $x = x_a - x_c$, $y = y_a - y_c$, $z = x_c - x_b$ e $w = y_c - y_b$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(d_e\,(A, C) + d_e\,(C, B))^2 &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + w^2}\right)^2 = \\
&= x^2 + y^2 + 2\left(\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{z^2 + w^2}\right) + z^2 + w^2 \geq \\
&\geq x^2 + y^2 + 2(xz + yw) + z^2 + w^2 = \\
&= (x + z)^2 + (y + w)^2 = \\
&= (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = d_e(A, B)^2.
\end{aligned}$$

Concluímos que $(d_e\,(A, C) + d_e\,(C, B))^2 \geq d_e(A, B)^2$ e, portanto,

$$d_e\,(A, C) + d_e\,(C, B) \geq d_e(A, B).$$

Observação: a recíproca da propriedade $\mathbf{P_1}$ é verdadeira, ou seja, se $d_e\,(A,\ B) = 0$, então $A = B$. De fato, sejam $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$. Então

$$d_e(A, B) = 0 \Longrightarrow \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = 0 \Longrightarrow (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x_b - x_a)^2 = 0 \text{ e } (y_b - y_a)^2 = 0 \Longrightarrow x_b - x_a = 0 \text{ e } y_b - y_a = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_b = x_a\ e\ y_b = y_a \Longrightarrow A = B.$$

CAPÍTULO 2: A GEOMETRIA DO TÁXI E DISTÂNCIA

Na Geometria do Táxi, os pontos e as retas são os mesmos da Geometria Euclidiana. Os ângulos também são medidos do mesmo modo. A distância entre dois pontos é definida de modo diferente e com isso aparecem algumas diversidades entre as duas Geometrias, bem como a forma de apresentação de algumas figuras geométricas.

Hermann Minkowski de origem russa (1864-1909) foi o primeiro responsável pelo surgimento da distância do táxi.

Primeiramente, apresentaremos o conceito, as propriedades iniciais e uma interpretação da distância do táxi. Em seguida, as relações entre as distâncias: euclidiana e do táxi. E para terminar, algumas comparações entre a Geometria Euclidiana e a do Táxi no que diz respeito a resultados e conceitos relacionados com distância.

2.1 Distância do táxi entre dois pontos

Dados dois pontos do plano cartesiano $A = (x_{a,} y_a)$ e $B = (x_{b,} y_b)$ a distância do táxi entre eles, que será denotada por $d_t\ (A, B)$, é dada por:

$$d_t(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|.$$

Uma interpretação para a distância do táxi é a seguinte: imagine que o plano cartesiano é a planta de uma cidade ideal, ou seja, as ruas são retas paralelas aos eixos coordenados. Sendo assim somente trajetos horizontais e verticais são permitidos ao trafegarmos por essas ruas. A distância do táxi é o comprimento do menor caminho que liga dois pontos dessa cidade através das ruas.

Exemplo:

Considerando os pontos $A = (1,1)$ e $B = (3,3)$ obtemos

$$d_t(A, B) = |1 - 3| + |1 - 3| = 2 + 2 = 4.$$

Na Figura 10 está representado um caminho ligando esses pontos.

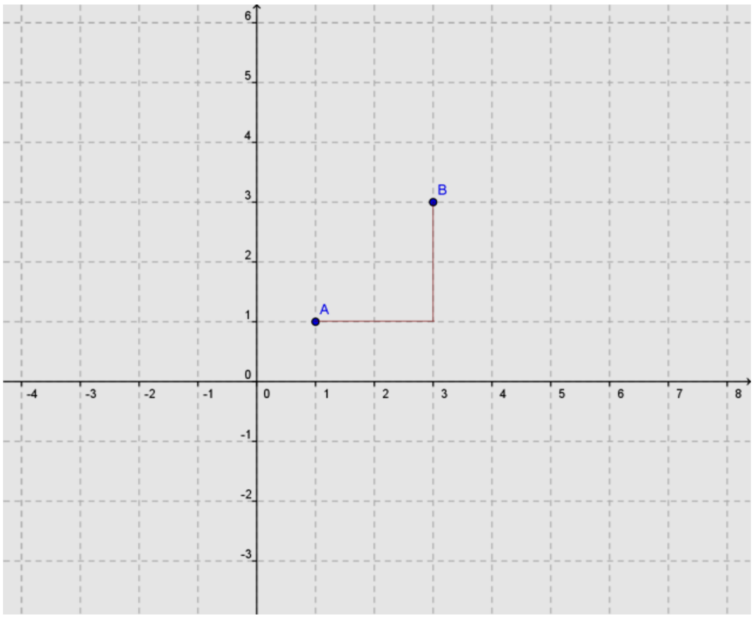


Figura 10: Distância do táxi entre os pontos *A* e *B*

Sejam $A = (x_{a,}y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ pontos quaisquer do plano cartesiano. Verifiquemos a seguir que a distância do táxi satisfaz propriedades análogas às que vimos, anteriormente, para a distância euclidiana.

P$_1$. $d_t(A, A) = 0$.

Prova: Aplicando a definição, temos $d_t(A, A) = |x_a - x_a| + |y_a - y_a| = 0 + 0 = 0$.

P$_2$. $d_t(A, B) > 0$, se $A \neq B$.

Prova: Se $A \neq B$, então $x_a \neq x_b$ ou $y_a \neq y_b$. Logo $|x_a - x_b| > 0$ ou $|y_a - y_b| > 0$.
Portanto, $d_t(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| > 0$.

P$_3$. $d_t(A, B) = d_t(B, A)$.

Prova: Temos

$$\begin{aligned} d_t(A, B) \quad &= |x_a - x_b| + |y_a - y_b| = |-(x_b - x_a)\ | + |-(y_b - y_a)\ | = \\ &= |-1|.\,|x_b - x_a| + |-1|.\,|y_b - y_a| = |x_b - x_a| + |y_b - y_a| = d_t(B, A). \end{aligned}$$

P$_4$. $d_t(A, B) \leq d_t(A, C) + d_t(B, C)$.

Prova: Pela propriedade da desigualdade triangular de módulo de números reais,

$$|x_a - x_b| = |x_a - x_c + x_c - x_b| \leq |x_a - x_c| + |x_c - x_b|$$

e

$$|y_a - y_b| = |y_a - y_c + y_c - y_b| \leq |y_a - y_c| + |y_c - y_b|.$$

Somando os dois membros das desigualdades anteriores, obtemos:

$$|x_a - x_b| + |y_a - y_b| \leq |x_a - x_c| + |x_c - x_b| + |y_a - y_c| + |y_c - y_b|.$$

Portanto, $d_t(A,B) \leq d_t(A,C) + d_t(B,C)$.

Vejamos a seguir através de dois exemplos a ilustração do seguinte fato: embora na Geometria do Táxi os pontos sejam todos os pontos do plano cartesiano, quando restrita aos pontos de coordenadas inteiras ela descreve bem a geometria urbana de uma cidade ideal.

Nas duas figuras a seguir estão ilustrados possíveis menores caminhos que um taxista poderá percorrer entre dois pontos de uma cidade ideal.

A Figura 11 ilustra os três possíveis menores trajetos entre os pontos $A = (2,3)$ e $B = (1,5)$: o trajeto que passa pelo ponto C, o trajeto azul e o trajeto vermelho. Observe que a distância percorrida em qualquer um dos trajetos é igual a 3. E a distância do táxi entre os pontos A e B é dada por: $d_t(A,B) = |2-1| + |3-5| = 1 + 2 = 3$.

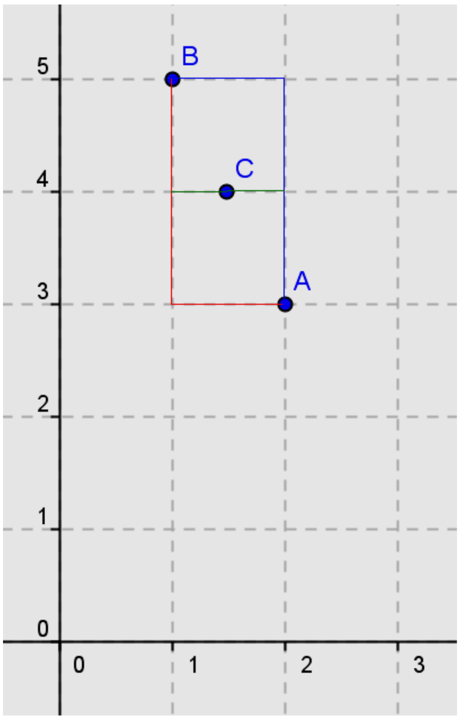


Figura 11: Trajetos possíveis entre os pontos *A* e *B*

O próximo exemplo, mostra como fica a situação de um taxista quando o mesmo terá que se deslocar do ponto $Q = \left(\frac{11}{5}, 1\right)$ até o ponto $P = \left(\frac{27}{10}, 2\right)$.

A Figura 12 ilustra dois possíveis menores trajetos entre os pontos P e Q, o trajeto vermelho e o azul. Calculando a distância percorrida em cada um deles obtemos:

Trajeto vermelho:$\left(\frac{27}{10} - 2\right)$ + (2 – 1) +$\left(\frac{11}{5} - 2\right)$ = 1,9;

Trajeto azul:$\left(3 - \frac{27}{10}\right)$ + (2 – 1) +$\left(3 - \frac{11}{5}\right)$= 2,1.

Concluímos que o trajeto vermelho é o mais curto.

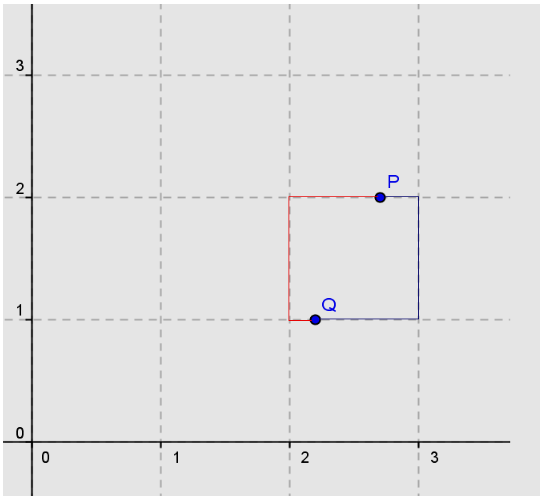


Figura 12: Trajetos entre os pontos *P*e *Q*

Agora, a distância do táxi entre os pontos P e Q é:

$$\mathrm{d_t(P,Q)} \ = |2{,}2 - 2{,}7| + |1 - 2| = 1{,}5.$$

Mas é interessante observar que o motorista não pode ir de P até Q por um trajeto como esse (que está ilustrado com a cor verde na Figura 13), já que o mesmo precisa seguir o trajeto das ruas.

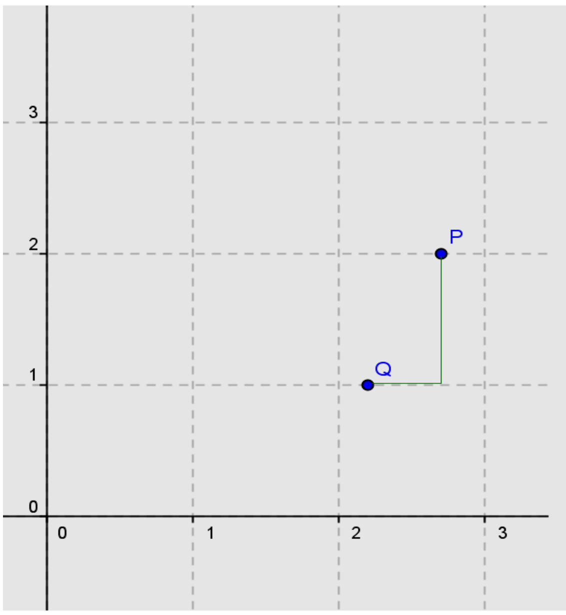


Figura 13: Distância do táxi entre os pontos *P* e *Q*

2.2 Relação entre a distância do táxi e a distância euclidiana

Vejamos qual é a condição necessária e suficiente que dois pontos do plano devem satisfazer para que a distância do táxi entre eles coincida com a distância euclidiana.

Para $A = B$ é imediato que $\mathrm{d_t}(A, B) = 0 = \mathrm{d}_e\,(A, B)$.

Sejam $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pontos distintos do plano.

Temos:

$$\mathrm{d_t}(A, B) = \mathrm{d}_e(A, B) \Rightarrow \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}\right)^2 = (|x_a - x_b| + |y_a - y_b|)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = |x_a - x_b|^2 + 2|x_a - x_b||y_a - y_b| + |y_a - y_b|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|x_a - x_b||y_a - y_b| = 0.$$

Daí, $|x_a - x_b| = 0$ ou $|y_a - y_b| = 0$, o que implica $x_a = x_b$ ou $y_a = y_b$. Isso significa que o segmento de reta que une os pontos A e B é paralelo ao eixo *Ox* ou ao eixo *Oy*. Reciprocamente, se os pontos A e B estão em uma reta paralela ao eixo *Ox*, então $y_a = y_b$ e, portanto, $\mathrm{d}_e(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2} = |x_a - x_b| = \mathrm{d_t}(A, B)$. Analogamente, se conclui que a distância euclidiana e a distância do táxi são iguais se os pontos A e B estão em uma reta paralela ao eixo *Oy*.

Portanto, para que $d_t(A, B) = d_e\,(A, B)$ basta que o valor das abscissas ou das ordenadas dos pontos A e B seja o mesmo.

E por último, verifiquemos que a distância do táxi é maior ou igual do que a distância euclidiana.

Sejam $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pontos do plano cartesiano.

Temos $2|x_a - x_b|.|y_a - y_b| \geq 0$, pois todos os fatores deste produto são positivos ou iguais a zero. Somando $(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$ aos dois membros da desigualdade:

$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + 2|x_a - x_b|.|y_a - y_b| \geq (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2.$$

Portanto, $(|x_a - x_b| + |y_a - y_b|)^2 \geq (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$.

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da desigualdade anterior (já que ambos os membros são maiores ou iguais a zero) obtemos:

$$\sqrt{(|x_a - x_b| + |y_a - y_b|)^2} \geq \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_a - x_b| + |y_a - y_b| \geq \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

Concluímos que $d_t(A, B) \geq d_e(A, B)$.

Observação: Um conceito que estuda a ideia de distância é o conceito de métrica. Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, uma métrica sobre M é uma função que associa a cada par ordenado de elementos de M um número real $d(x, y)$ de modo que sejam satisfeitas as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in M$:

1) $d(x, x) = 0$.
2) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$.
3) $d(x, y) = d(y, x)$.
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado de espaço métrico (M, d).

As distâncias, euclidiana e do táxi, são exemplos particulares de métricas sobre $\mathbb{R}^2$.

Outra métrica interessante no $\mathbb{R}^2$ é a do máximo. Dados $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ em$\mathbb{R}^2$, $d_{max} = max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}$. Para mais detalhes sugerimos Domingues (1982).

2.3 Comparações entre a Geometria do Táxi e a Geometria Euclidiana

Inicialmente vejamos porque a Geometria do Táxi é uma Geometria não-Euclidiana.

O postulado de congruência LAL (lado-ângulo-lado) da Geometria Euclidiana não é válido na Geometria do Táxi. Para concluir tal fato, daremos um contraexemplo.

Considere os pontos:

$I = (3,4), J = (7,4), K = (7,0), D = (1,3), E = (3,1)$ e $F = (1,-1)$.

Os triângulos DEF e IJK são retângulos e isósceles. O triângulo DEF possui três lados com medidas do táxi iguais a 4, enquanto que o triângulo IJK possui dois lados com medidas do táxi iguais a 4 e a hipotenusa igual a 8 (Figura 14).

Repare que os triângulos possuem dois lados com medidas do táxi iguais a 4 e o ângulo entre esses lados medindo 90°, mas não são congruentes, pois diferem no valor da medida do táxi em relação à hipotenusa.

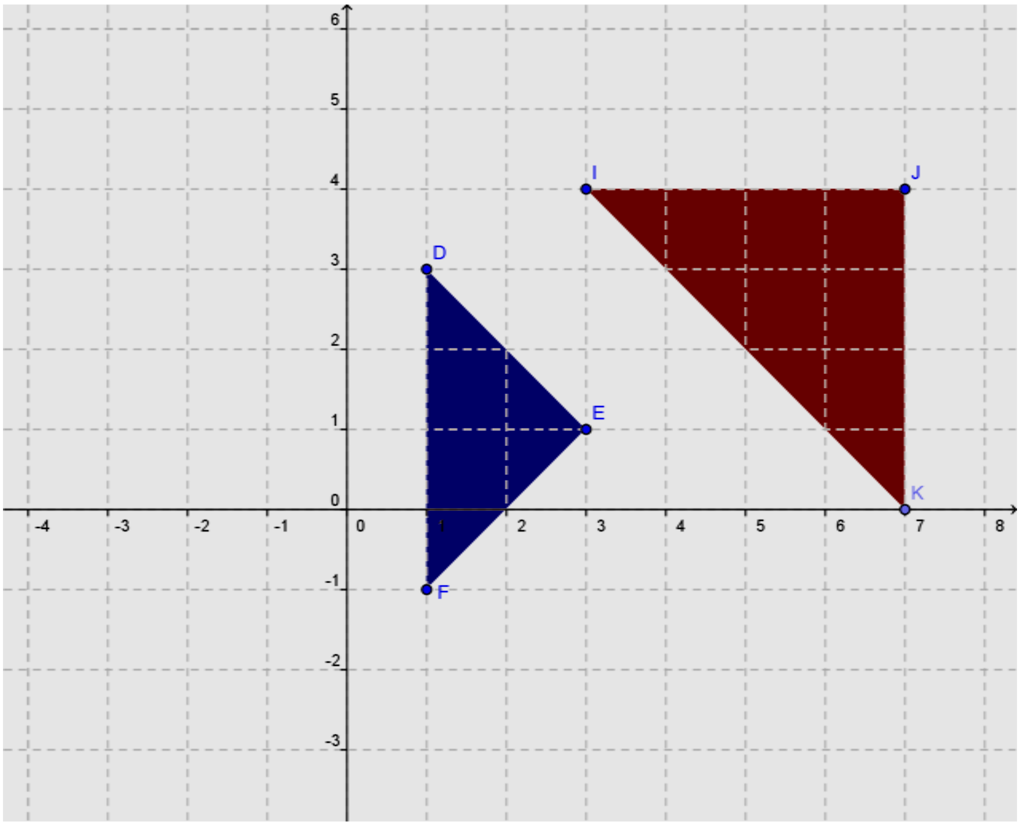


Figura 14: Contraexemplo do postulado LAL de congruência de triângulos

Agora, vejamos alguns exemplos da forma geométrica da circunferência e da elipse na Geometria do Táxi. Recordemos que circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão a certa distância, chamada raio, de certo ponto, chamado centro. E que, elipse é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante.

Veremos nos exemplos a seguir que a circunferência na Geometria do Táxi tem a forma de um quadrado. Sendo assim podemos definir o "perímetro da circunferência" como sendo a soma das medidas de todos os lados do quadrado, utilizando-se da distância do táxi.

Exemplos:

1) A circunferência do táxi de centro $C = (2,3)$ e raio $r = 1$ é constituída pelos pontos $P = (x, y)$ do plano que satisfazem a seguinte equação:

$$d_t(P, C) = |x - 2| + |y - 3| = 1.$$

Para resolvermos a equação acima analisaremos os seguintes casos:

i) $x < 2$ e $y \leq 3$:

$$|x-2| + |y-3| = 1 \Rightarrow -x + 2 - y + 3 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x + y = 4} \ \textbf{(I)}$$

ii) $x \leq 2$ e $y > 3$:

$$|x-2| + |y-3| = 1 \Rightarrow -x + 2 + y - 3 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{-x + y = 2} \ \textbf{(II)}$$

iii) $x \geq 2$ e $y < 3$:

$$|x-2| + |y-3| = 1 \Rightarrow x - 2 - y + 3 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x - y = 0} \ \textbf{(III)}$$

iv) $x > 2$ e $y \geq 3$:

$$|x-2| + |y-3| = 1 \Rightarrow x - 2 + y - 3 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x + y = 6} \ \textbf{(IV)}$$

Analisando as soluções das equações **I** a **IV,** obtidas anteriormente com as respectivas condições, obtemos os lados do quadrado $ABDE$ da Figura 15.

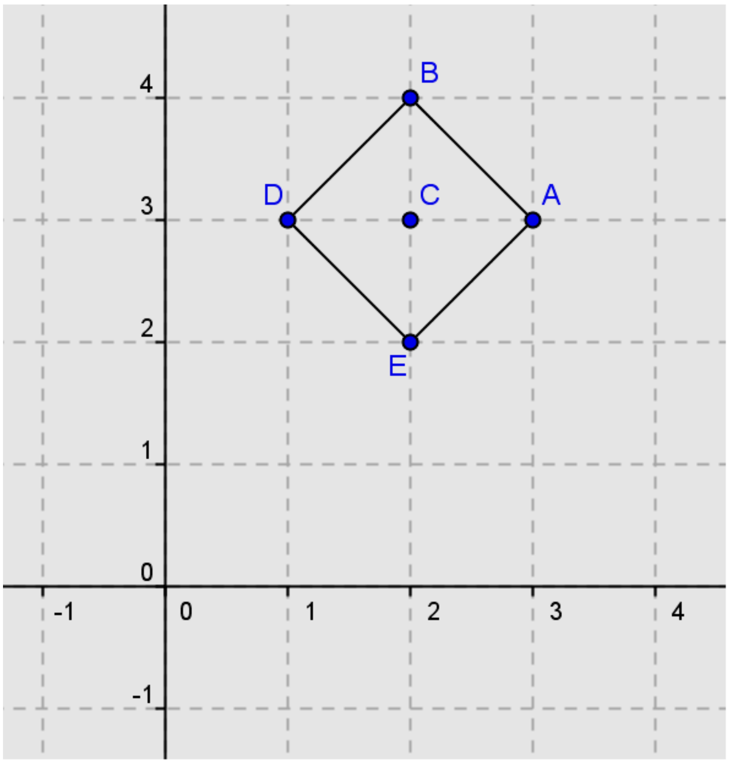


Figura 15: Quadrado ABDE

Logo, o perímetro do quadrado $ABDE$ é dado por:

$Per(ABDE) = d_t(A,B) + d_t(B,D) + d_t(D,E) + d_t(E,A) = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$

Note que no caso da geometria urbana, neste exemplo, a circunferência é o conjunto formado apenas pelos pontos: $A, B, D\ e\ E$.

2) Continuaremos usando o mesmo ponto $C = (2,3)$ do Exemplo 1, mas com $r = 2$. Determinemos o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que:

$$d_t(P, C) = |x - 2| + |y - 3| = 2.$$

De modo análogo ao exemplo anterior, o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação acima é constituído pelos segmentos de reta que formam os lados do quadrado $FGHI$ representado na Figura 16.

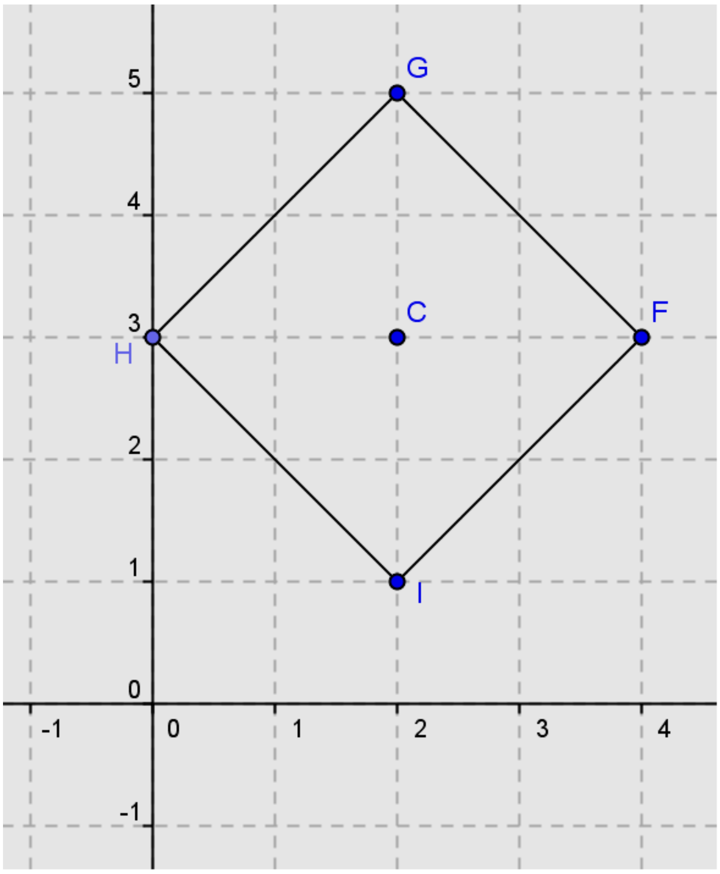


Figura 16: Quadrado FGHI

Observe que o perímetro do quadrado $FGHI$ é:

$$Per(FGHI) = d_t(F, G) + d_t(G, H) + d_t(H, I) + d_t(I, F) = 4 + 4 + 4 + 4 = 16.$$

Considerando, neste exemplo, a geometria urbana, a circunferência é dada pelos pontos $F, G, H, I, J = (3,2), K = (3,4), L = (1,4)$ e $M = (1,2)$.

A seguir justificaremos que, no caso geral, o conjunto de pontos do plano que satisfaz a definição de circunferência na Geometria do Táxi é constituído por segmentos de reta que formam os lados de um quadrado.

Dado um ponto $C = (a, b)$ do plano e r um número real positivo, um ponto $P = (x, y)$ do plano pertence a circunferência do táxi de centro C e raio r se:

$$d_t(P, C) = |x - a| + |y - b| = r.$$

Para $x - a < 0$ e $y - b \geq 0$ devemos ter $y = x + r - a + b.$ (I)

Se $x - a \geq 0$ e $y - b > 0$ devemos ter $y = -x + r + a + b.$ (II)

Se $x - a > 0$ e $y - b \leq 0$ devemos ter $y = x - r - a + b.$ (III)

Se $x - a \leq 0$ e $y - b < 0$ devemos ter $y = -x - r + a + b.$ (IV)

As equações I, II, III e IV representam equações de reta. Da geometria analítica, sabemos que os pares de retas representadas pelas equações I e II, I e IV, III e IV, II e III são perpendiculares, respectivamente, nos pontos $A = (a, b + r), B = (a - r, b), C = (a, b - r)$ e $D = (a + r, b)$. Logo, os pontos A, B, C e D são vértices de um retângulo. Como $d_t(A, B) = = d_t(B, C) = d_t(C, D) = d_t(D, A) = 2r$, o retângulo $ABCD$ é um quadrado.

Portanto, a circunferência na Geometria do Táxi possui a forma de um quadrado. Sendo assim, podemos definir o perímetro da circunferência como sendo a soma das medidas de todos os lados do quadrado que, utilizando-se da distância do táxi, será $8r$.

Vamos agora analisar a elipse. Não faremos generalizações, mas veremos através de exemplos qual é o conjunto de pontos do plano que satisfaz a definição de elipse.

Dados dois pontos do plano $F_1 = (a, b)$ e $F_2 = (c, d)$, um ponto $P = (x, y)$ do plano pertence à elipse do táxi de focos F_1 e F_2 se:

$$d_t(P, F_1) + d_t(P, F_2) = |x - a| + |y - b| + |x - c| + |y - d| = k,$$

com k um número real positivo e $k > d_t(F_1, F_2)$.

Exemplos:

1) Considere os pontos $F_1 = (1,3)$ e $F_2 = (2,5)$. Determinemos o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano que são solução da equação:

$$d_t(P, F_1) + d_t(P, F_2) = |x - 1| + |y - 3| + |x - 2| + |y - 5| = 5.$$

Analisando a equação acima obtemos as seguintes equações com suas respectivas condições:

1) $x \leq 1$ e $y < 3 \Rightarrow \boldsymbol{x + y = 3}$
2) $x < 1$ e $3 \leq y < 5 \Rightarrow \boldsymbol{x = 0}$
3) $x < 1$ e $y \geq 5 \Rightarrow \boldsymbol{-x + y = 5}$
4) $1 < x \leq 2$ e $y < 3 \Rightarrow \boldsymbol{y = 2}$
5) $1 < x < 2$ e $3 < y < 5 \Rightarrow \boldsymbol{0x + 0y = 2}$ $(não\ há\ solução)$
6) $1 < x \leq 2$ e $y > 5 \Rightarrow \boldsymbol{y = 6}$
7) $x > 2$ e $y \leq 3 \Rightarrow \boldsymbol{x - y = 0}$
8) $x > 2$ e $3 < y \leq 5 \Rightarrow \boldsymbol{x = 3}$
9) $x > 2$ e $y > 5 \Rightarrow \boldsymbol{x + y = 8}$

As soluções das equações dadas acima com as respectivas condições é o conjunto dos pontos formado pelos lados do octógono $ABCDEFGH$ (Figura 17). Sendo assim podemos definir o "perímetro da elipse" como sendo a soma das medidas de todos os lados do octógono utilizando-se da distância do táxi.

O perímetro $Per(ABCDEFGH)$ é dado por:

$$\begin{aligned} Per(ABCDEFGH) &= d_t(A,B) + d_t(B,E) + d_t(E,G) + d_t(G,H) + \\ &+ d_t(H,F) + d_t(F,D) + d_t(D,C) + d_t(C,A) = \\ &= 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 14. \end{aligned}$$

Note que, no caso da geometria urbana, neste exemplo, a elipse é o conjunto formado por 4 segmentos: $BE, GH, FD\ e\ CA$.

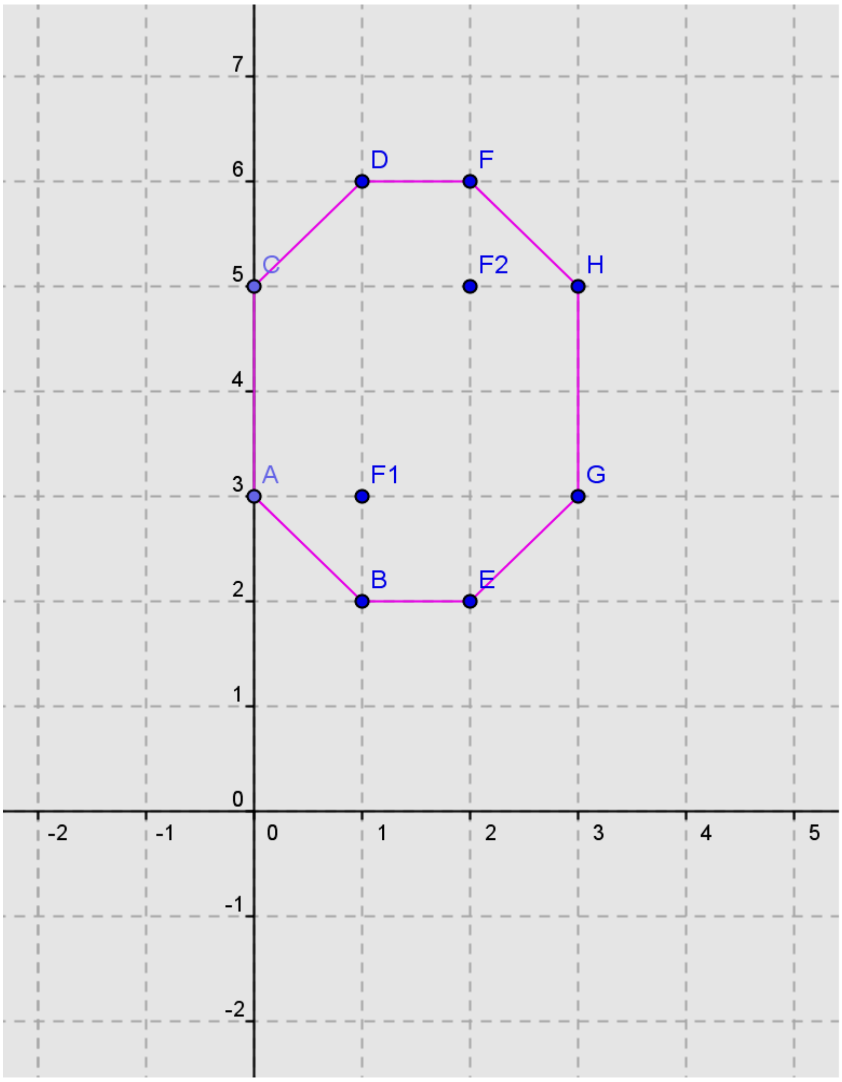


Figura 17: Octógono $ABCDEFGH$

2) Considere os pontos $F_1 = (-2{,}0)$ e $F_2 = (2{,}0)$. Determinemos o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano que são solução da equação:

$$d_t(P, F_1) + d_t(P, F_2) = |x + 2| + |y - 0| + |x - 2| + |y - 0| = 6$$

Neste exemplo, o conjunto dos pontos do plano que são solução da equação acima é constituído pelos lados do hexágono $ABCDEF$ (Figura 18).

Observe que o perímetro do hexágono $ABCDEF$ é:

$$Per(ABCDEFGH) \quad = d_t(A, B) + d_t(B, C) + d_t(C, D) + d_t(D, E) + \ d_t(E, F) + d_t(F, A) =$$

$$= 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 = 16.$$

Considerando, neste exemplo, a geometria urbana, a elipse é dada pelos pontos A e D e pelos segmentos BC e EF.

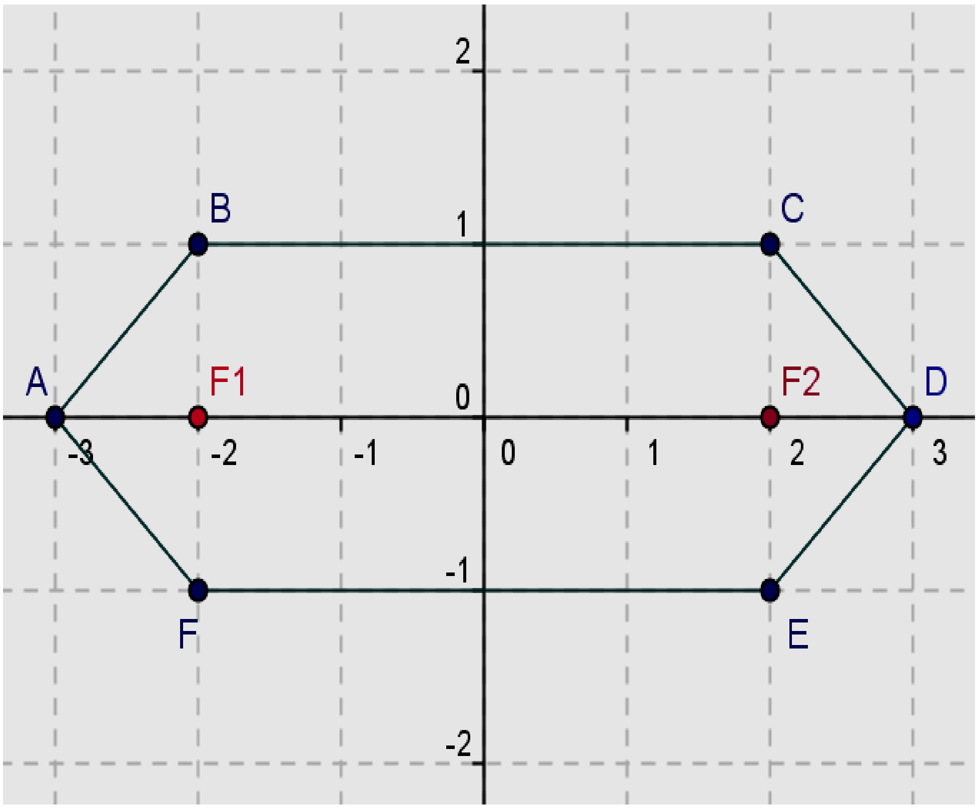


Figura 18: Hexágono $ABCDEF$

CAPÍTULO 3: ATIVIDADES

Apresentaremos uma proposta de atividades abordando a distância euclidiana e a distância do táxi na qual os objetivos são o de consolidar o uso de coordenadas cartesianas no plano, construção e relação entre conceitos matemáticos específicos, a saber, distância entre dois pontos e dois lugares geométricos particulares: a circunferência e a elipse.

A primeira e a segunda atividades possuem como base desenvolver uma visualização geométrica, permitindo ao aluno por meio de uma linguagem informal, chegar ao conceito de distância euclidiana entre dois pontos, relacionando-a com o Teorema de Pitágoras.

As atividades seguintes, terceira e quarta, trazem também através de uma linguagem informal, questões onde o aluno estabelecerá um novo conceito de distância na nova Geometria, a distância da Geometria do Táxi.

Na quinta atividade, o aluno terá oportunidade de perceber a mudança na forma geométrica da circunferência na Geometria do Táxi. Para isso, a atividade traz questões que conduz o aluno a reconhecer a forma geométrica da circunferência ao aplicar o novo conceito de distância.

No final do capítulo apresentamos duas atividades complementares para aprofundamento do tema. Essas atividades podem ser encaradas como um desafio.

Cada uma das atividades foi descrita detalhadamente de modo que no início de cada uma apresentamos o público alvo, recomendações metodológicas, os objetivos específicos a serem atingidos bem como os procedimentos envolvidos e, ainda, pré-requisitos, material de apoio necessário, dificuldades e tempo previsto. As atividades destinadas aos alunos estão indicadas em letra do tipo *itálico*.

3.1 Primeira Atividade: distância euclidiana entre dois pontos dados

Público alvo: alunos da oitava série (nono ano) do ensino fundamental.

Objetivo: localizar pontos no plano cartesiano e calcular a distância euclidiana entre dois pontos dados.

Pré-requisitos: Teorema de Pitágoras.

Material de apoio: papel quadriculado.

Dificuldades previstas: uma dificuldade que poderá ser encontrada, e que o professor deverá ficar atento para isso, é que o aluno não localize de forma correta os pontos, ou seja, não esteja marcando primeiro a coordenada horizontal e depois a vertical. Caso seja necessário, faça uma revisão a respeito do eixo horizontal (abscissa) e do eixo vertical (ordenada). O aluno também pode encontrar dificuldade ao relacionar a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo quando for aplicar o Teorema de Pitágoras.

Recomendações Metodológicas: propõe-se que a atividade seja realizada individualmente, para que haja um maior envolvimento de cada aluno. A atividade é importante para que o aluno consolide a representação de pontos no plano cartesiano e calcule a distância euclidiana entre dois pontos relacionando-a com o Teorema de Pitágoras.

Tempo previsto: 1 aula (50 minutos).

Procedimentos:

<u>Questão 1</u>:

a) *Traçar os eixos coordenados (eixo Ox e eixo Oy).*
b) *Marque no papel quadriculado os pontos:*

$$A = (1,0), B = (0,3), C = (-1,4), D = (-2,-3), E = (2,-2),$$
$$F = (1,-4), G = (2,4), H = (0,4) \text{ e } I = (2,5).$$

c) *Quais pontos possuem a mesma abscissa? E a mesma ordenada?*
d) *Quais pontos estão sobre o eixo Ox? E sobre o eixo Oy?*
e) *Responda qual é o quadrante que pertence cada um dos pontos: C, D, E, F, G e I.*

<u>Questão 2</u>:

a) *Traçar os eixos coordenados (eixo Ox e eixo Oy).*
b) *Representar no papel quadriculado os pontos: $A = (2,4)$ e $B = (-2,0)$.*
c) *Escrever as coordenadas cartesianas e representar o ponto C, o qual possui a mesma abcissa que B e a mesma ordenada que A.*
d) *Traçar o menor caminho entre os pontos A e C. Faça o mesmo para os pontos B e C.*
e) *Quais são as medidas dos dois caminhos obtidos no item anterior?*
f) *Traçar o menor caminho para ir do ponto A ao ponto B.*
g) *Que tipo de triângulo os pontos A, B e C formaram?*
h) *Determinar a medida do caminho traçado no item f.*

<u>Observação para o professor</u>: comente com os alunos que em matemática, distância entre dois pontos é a medida do comprimento de um menor caminho que se percorre, indo de um ponto a outro. Quando o caminho entre dois pontos é percorrido em linha reta, dá-se o nome de distância euclidiana. A medida do comprimento desse caminho é a medida do segmento de reta que une os dois pontos. Essa distância é a que comumente se ensina nas aulas de matemática e é estudada na Geometria Euclidiana.

3.2 Segunda Atividade: fórmula da distância euclidiana entre dois pontos

Público alvo: alunos da oitava série (nono ano) do ensino fundamental.

Objetivo: conjecturar a fórmula que permite o cálculo da distância entre dois pontos na Geometria Euclidiana.

Pré-requisitos: noções preliminares relativa à distância euclidiana, desenvolvidas na atividade anterior.

Material de apoio: Tabela 1.

Dificuldades previstas: o aluno poderá encontrar dificuldades ao realizar operações de subtração envolvendo números negativos. Caso ocorra tal dificuldade, trabalhe a definição de distância entre dois pontos na reta numérica.

Recomendações Metodológicas: propõe-se que a atividade seja realizada individualmente para que haja um maior envolvimento de cada aluno.

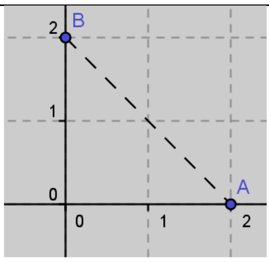
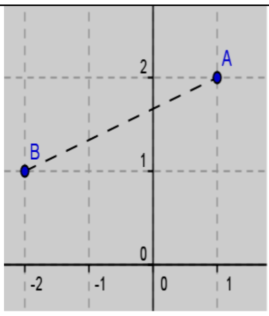
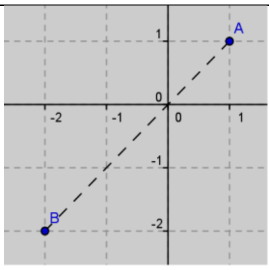
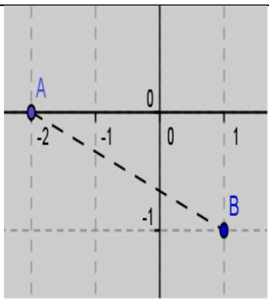
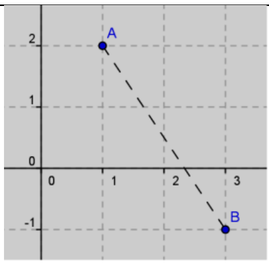
Tempo previsto: 1 aula (50 minutos).

Procedimentos:

A tabela 1 apresenta na primeira coluna, mais à esquerda, um pedaço de papel quadriculado. Nele estão desenhados os eixos coordenados (indicados por duas linhas grossas), dois pontos $A = (x_a, y_a)$ *e* $B = (x_b, y_b)$ *e o caminho percorrido por um avião que sai de um dos pontos e chega ao outro (indicado por uma linha tracejada). Na segunda coluna um terceiro ponto* $C = (x_b, y_a)$ *tal que os pontos* A*,* B *e* C *sejam vértices de um triângulo retângulo em* C*.*

Na atividade anterior, você recordou como representar pontos por meio de um par de números, relacionados aos eixos coordenados e aprendeu como medir a distância euclidiana entre tais pontos. Com estes conhecimentos, com o auxílio do Teorema de Pitágoras e com a ajuda de alguns valores que já estão marcados na Tabela 1 tente completá-la, acrescentando os dados que estão faltando.

Tabela 1: distância euclidiana entre dois pontos

Pedaço de papel quadriculado	Ponto $C = (x_b, y_a)$	$d_e(A,C) =$ $= \|x_b - x_a\|$	$d_e(B,C) =$ $= \|y_b - y_a\|$	$[d_e(A,B)]^2$
	$C = (0,0)$	$\|0-2\| = 2$	$\|2-0\| = 2$	$2^2 + 2^2 = 8$
	$C = (\dots,2)$	$\|-2-\cdots\| = 3$	$\|1-\cdots\| = 1$	$3^2 + \dots^2 = 10$
	$C = (\dots,\dots)$	$\|-2-\cdots\| = \cdots$	$\|\dots-1\| = 3$	$\dots^2 + 3^2 = \cdots$
	$C = (1,\dots)$	$\|\dots-\cdots\| = \cdots$	$\|-1-0\| = \cdots$	$\dots^2 + \dots^2 = 10$
	$C = (\dots,\dots)$	$\|\dots-\cdots\| = \cdots$	$\|\dots-\cdots\| = \cdots$	$\dots^2 + \dots^2 = \cdots$

Qual é a expressão que relaciona as coordenadas dos pontos A e B e a distância euclidiana entre eles?

<u>Observação para o professor:</u> a resposta esperada é:

$$[d_e(\mathrm{A},\mathrm{B})]^2 = |x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2$$

e portanto,

$$d_e(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

3.3 Terceira Atividade: apresentando a distância do táxi entre dois pontos

Público alvo: alunos da oitava série (nono ano) do ensino fundamental.

Objetivo: a construção do conceito de distância do táxi entre dois pontos relacionando-a com o cotidiano.

Pré-Requisitos: valor absoluto de números reais.

Material de apoio: papel quadriculado, Figura 19 e Tabela 2.

Dificuldades Previstas: uma dificuldade prevista é a de trabalhar com módulo e associá-lo com a definição de distância entre dois pontos na Geometria do Táxi. Caso seja necessário trabalhe atividades envolvendo módulos de números reais associando-o com a distância entre dois pontos em uma reta numérica.

Recomendações metodológicas: o professor distribuirá folhas quadriculadas para cada aluno. Propõe-se que a atividade seja realizada em grupos de 2 alunos. Ao realizar atividades em grupo, os alunos comparam respostas e com isso adquirem maior clareza em relação às justificativas e conjecturas. Abordamos nessa atividade 3 questões. A questão 1 tem como objetivo introduzir a noção de distância do táxi. Sugere-se que o professor faça a atividade juntamente com os alunos. A questão 2 tem como objetivo reforçar a ideia da distância do táxi entre dois pontos. Professor, discuta a questão 2 com os alunos após o término da mesma. Já na questão 3 obteremos a expressão que calcula a distância do táxi entre dois pontos quaisquer a partir de suas coordenadas.

Tempo previsto: 2 aulas (50 minutos cada).

Procedimentos:

<u>Questão 1:</u>

A figura abaixo representa parte do mapa das ruas de uma cidade no plano cartesiano e duas localidades P e Q, onde $P = (3,4)$ e $Q = (1,1)$.

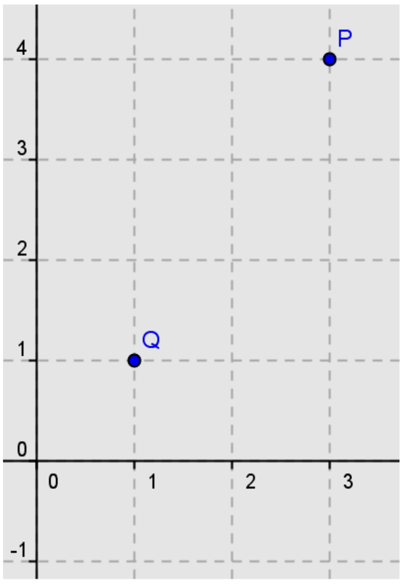


Figura 19: Representação dos pontos P e Q no plano cartesiano

a) *Marque na folha quadriculada que você recebeu os pontos P e Q da figura anterior.*

b) *Nessa cidade só é possível se deslocar horizontalmente e verticalmente. Baseado nessa informação desenhe um possível trajeto (o menor) que um taxista poderia fazer entre os pontos P e Q. Compare seu desenho com o de seu colega.*

c) *Supondo que cada lado dos quadradinhos da folha quadriculada possui 1 como unidade de medida, qual foi a distância percorrida nesse trajeto? Compare a sua resposta com a de seu colega.*

Observações para o professor: comente que nem sempre é possível ir de um ponto ao outro por uma linha reta. Por exemplo, para irmos de ônibus ou carro da escola para casa dependemos dos trajetos das ruas. Por isso, devemos aprender uma nova maneira de calcular distância.

Após as comparações feitas nos itens b e c, todos devem observar que os resultados obtidos para a distância foram iguais mesmo que os (menores) trajetos tenham sido diferentes.

Questão 2:

a) *Marque na folha quadriculada que você recebeu os pontos:*

$$C = (-2,-3), D = (2,-3) \text{ } e \text{ } E = (-3,1).$$

b) *Desenhe um possível trajeto (o menor) que um ônibus poderia fazer entre os pares de pontos: C e D, D e E, C e E. Compare seu desenho com o de seu colega.*

c) *Supondo que cada lado dos quadradinhos da folha quadriculada possui 1 como unidade de medida, qual é a distância percorrida por cada um dos trajetos que você traçou no item anterior? Compare a sua resposta com a de seu colega.*

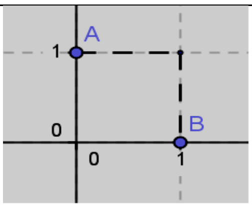
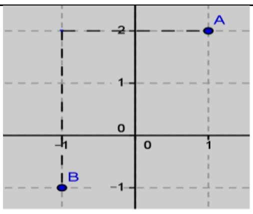
<u>Observação para o professor</u>: Uma "malha quadriculada" é uma folha cheia de quadradinhos desenhados (igual ao papel quadriculado que vocês receberam). Cada lado de um desses quadradinhos é chamado de quadra. Suponhamos que seja possível se deslocar apenas por retas horizontais e verticais da malha quadriculada. O menor número de quadras percorridas entre dois pontos é chamado distância do táxi entre eles. Essa distância é o que se estuda na Geometria do Táxi.

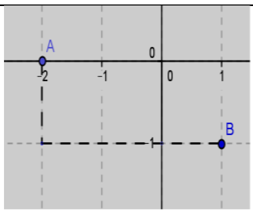
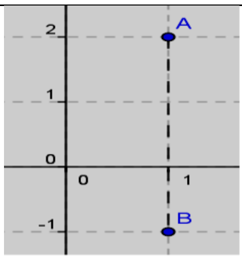
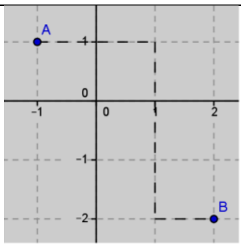
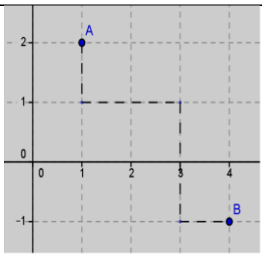
<u>*Questão 3*</u>*:*

A Tabela 2 apresenta na primeira coluna, mais à esquerda, um pedaço de papel quadriculado. Nele estão desenhados os eixos coordenados (indicados por duas linhas grossas), dois pontos (A e B) e o caminho percorrido por uma pessoa que sai de um dos pontos e chega ao outro percorrendo quadras (indicado por linhas tracejadas). Cada quadra equivale a medida do lado de um quadrado. Cada lado do quadrado possui medida igual a 1 unidade. Nas questões anteriores você apreendeu como medir a distância do táxi entre dois pontos.

Com estes conhecimentos e com a ajuda de alguns valores que já estão marcados na Tabela 2, tente completá-la, acrescentando os dados que estão faltando.

Tabela 2: distância do táxi entre dois pontos

Representação Gráfica na Geometria do Táxi	x_A	y_A	x_B	y_B	*Distância entre abcissas* $\lvert x_A - x_B \rvert$	*Distância entre ordenadas* $\lvert y_A - y_B \rvert$	*Número de quadras entre A e B*
	0	1	1	0	$\lvert x_A - x_B \rvert =$ $= \lvert 0 - 1 \rvert = 1$	$\lvert y_A - y_B \rvert =$ $= \lvert 1 - 0 \rvert = 1$	$2 = 1 + 1$
	1	2	$\cdots$	-1	$\lvert x_A - x_B \rvert =$ $= \lvert 1 - \cdots \rvert = 2$	$\lvert y_A - y_B \rvert =$ $= \lvert 2 - \cdots \rvert = 3$	$5 = \cdots + \cdots$

	-2	…	1	…	$\|x_A - x_B\| =$ $= \|-2-1\| = 3$	$\|y_A - y_B\| =$ $= \|\cdots - \cdots\| =$ $= 1$	$= \cdots + \cdots$
	…	2	1	…	$\|x_A - x_B\| =$ $= \|\cdots - 1\| = \cdots$	$\|y_A - y_B\| =$ $= \|\cdots - \cdots\| =$ $= 3$	$\cdots = \cdots + 3$
	…	…	2	…	$\|x_A - x_B\| =$ $= \|-1 - \ldots\| =$ $= 3$	$\|y_A - y_B\| =$ $= \|1 - \ldots\| = 3$	$\cdots = 3 + \cdots$
	…	…	…	…	$\|x_A - x_B\| =$ $= \|\cdots - \cdots\| =$ $= \cdots$	$\|y_A - y_B\| =$ $= \|\cdots - \cdots\| =$ $= \cdots$	$\cdots = \cdots + \cdots$

Qual é a expressão que relaciona as coordenadas dos pontos A e B com a distância do táxi entre eles?

Observação para o professor: a resposta esperada é:

$$d_t(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

3.4 Quarta Atividade: relação entre a distância do táxi e a distância euclidiana

Público alvo: alunos da oitava série (nono ano) do ensino fundamental.

Objetivo: comparar a Geometria do Táxi com a Geometria Euclidiana quando se calcula a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Pré-Requisitos: noções preliminares relativas às distâncias, euclidiana e do táxi, desenvolvidas anteriormente.

Material de apoio: papel quadriculado e Figura 20.

Dificuldades Previstas: alguns alunos podem apresentar questionamentos se realmente é válida a relação para quaisquer dois pontos ao comparar as duas distâncias. Talvez seja necessário o professor acrescentar mais exemplos.

Recomendações metodológicas: divida a turma em grupos de 2 alunos. A atividade constará de duas questões. A primeira questão tem como objetivo comparar $d_t\ (A,B)$ e $d_e\ (A,B)$. Na questão 2 veremos qual condição se deve ter para que $d_t(A,B) = d_e(A,B)$.

Tempo previsto: 2 aulas (50 minutos cada).

Procedimentos:

Questão 1:

Imagine uma cidade onde as ruas se comportam como um sistema de eixos cartesianos quadriculado, ou seja, os vértices de cada quadrado são as esquinas das ruas e cada lado dos quadrados são os quarteirões.

Marque os seguintes lugares no papel quadriculado:

Igreja: $A = (-1,3)$ *Escola:* $B = (2,4)$ *Sua casa:* $C = (5,-2)$

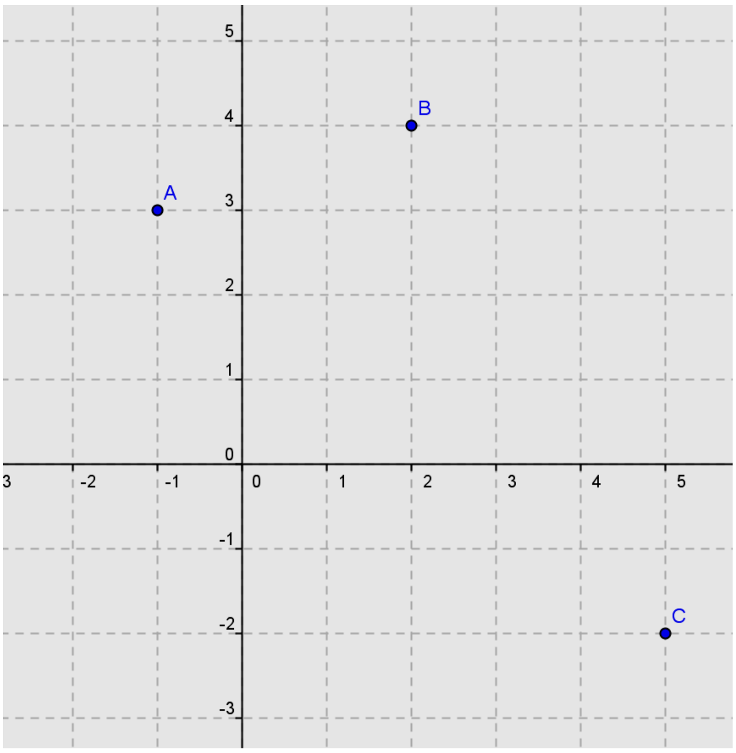


Figura 20: Localização dos pontos A, B e C.

a) *Qual o valor da distância do táxi entre a igreja e sua casa?*

b) *Qual o valor da distância euclidiana entre a igreja e sua casa?*

c) *Compare os valores obtidos nos itens a e b.*

d) *Determine* $d_t(A,B)$ *e* $d_e\ (A,B)$ *e compare os valores obtidos. Faça o mesmo para* $d_t(B,C)$ *e* $d_e(B,C)$.

<u>Observação para o professor</u>: após a correção desta questão observe junto aos alunos que a distância do táxi foi estritamente superior à distância euclidiana em todas as comparações.

<u>Questão 2:</u>

a) *Marque os pontos* $A = (1,4)$, $B = (-2,4)$ e $C = (-2,5)$ *no papel quadriculado.*
b) *Determine* $d_t(A,B)$ *e* $d_e\ (A,B)$. *Compare os resultados obtidos.*
c) *Determine* $d_t(B,C)$ *e* $d_e\ (B,C)$. *A relação entre os resultados obtidos é parecida com a do item anterior?*
d) *Una os pontos* A *e* B *e os pontos* B *e* C. *Observe que obtemos dois segmentos de reta. Qual é a posição relativa desses segmentos com os eixos* Ox *e* Oy, *respectivamente?*
e) *Qual das coordenadas dos pontos* A *e* B *são iguais? E entre* B *e* C*?*
f) *Observando os itens b, c e d, responda: qual é a condição para que a distância euclidiana entre dois pontos seja igual à distância do táxi entre os mesmos pontos?*
g) *Una os pontos* A *e* C. *O segmento* AC *é paralelo a algum dos eixos coordenados? Qual a relação que você pode estabelecer entre as abscissas e entre as ordenadas dos pontos* A *e* C*? O que você observa ao comparar* $d_t\ (A,C)$ *e* $d_e\ (A,C)$?

3.5 Quinta Atividade: a circunferência na Geometria do Táxi

Público alvo: alunos do primeiro ano do ensino médio.

Objetivo: ver a forma geométrica apresentada pela circunferência na Geometria do Táxi.

Pré-requisitos: módulo e intervalo de números reais, equações modulares, gráfico de função afim, Teorema de Pitágoras e perímetro de figuras.

Material de apoio: papel quadriculado.

Dificuldades previstas: ao resolver equações modulares temos que separar em casos utilizando intervalos de números reais. Isso pode ser uma dificuldade esperada por parte dos alunos. Portanto, caso seja necessário, recorde primeiramente as equações modulares da forma $|x - a| = b$, $b \geq 0$.

Recomendações metodológicas: atividade individual. A atividade constará de duas questões cujo objetivo é que o aluno consiga construir e observar a forma geométrica da circunferência na Geometria do Táxi a partir dos casos trabalhados. Também abordaremos o conceito de perímetro da figura obtida.

Tempo previsto: 3 aulas (50 minutos cada).

Procedimentos:

Questão 1:

Com o auxílio do papel quadriculado, faça o que se pede:

a) *Marque o ponto* $C = (3{,}5)$ *no plano cartesiano.*
b) *Marque todos os pontos* P *do plano tais que suas coordenadas sejam números inteiros e* $d_t(P, C) = 2$. *Identifique esses pontos em termos de suas coordenadas.*
c) *Una os pontos determinados no item b por um segmento de reta. Que figura você observa? Justifique.*
d) *Seja* $P = (x, y)$ *um ponto qualquer do plano. Qual equação representa* $d_t(P, C) = 2$?
e) *Resolva a equação obtida no item d.*
f) *Represente graficamente as funções do primeiro grau determinadas no item anterior, observando as restrições dos valores de x e y obtidos ao aplicar a definição de módulo.*
g) *A figura obtida no item anterior é a mesma obtida no item c?*

Observação para o professor: no final o professor deve observar para os alunos que a circunferência é o conjunto dos pontos do plano que equidistam (de acordo com a distância adotada) de um ponto fixo (centro). Assim, a figura obtida no item g é a forma geométrica da circunferência de centro C e raio 2 na Geometria do Táxi, ou seja, "as circunferências do táxi" são quadrados.

Questão 2:

Chamando os vértices do quadrado, construído na questão anterior, de A, B, C *e* D, *faça o seguinte:*

a) Calcule $d_t(A, B)$, $d_t(B, C)$, $d_t(C, D)$ e $d_t(D, A)$.

b) Calcule o perímetro do quadrado utilizando a distância do táxi.

c) Calcule $d_e(A, B)$, $d_e(B, C)$, $d_e(C, D)$ e $d_e(D, A)$ *e o perímetro do quadrado utilizando a distância euclidiana.*

d) Compare os resultados dos itens b e c. O que você observou?

3.6 Atividade Complementar 1: demonstrando que a distância euclidiana é menor ou igual do que a distância do táxi.

Público alvo: alunos do primeiro ano do ensino médio.

Objetivo: demonstrar algebricamente que a desigualdade $d_e(A,B) \leq d_t(A,B)$, para quaisquer pontos A e B, é válida.

Pré-requisitos: valor absoluto entre números reais e suas propriedades.

Material de apoio: atividades no caderno.

Dificuldades previstas: pode ocorrer do aluno não compreender as operações com expressões literais envolvendo módulos. Neste caso, retome conteúdos como completar quadrados e propriedades de módulo de números reais.

Recomendações metodológicas: atividade individual. Cada passo descrito abaixo deve ser devidamente justificado.

Tempo previsto: 1 aula (50 minutos)

Procedimentos:

Sejam A = $(x_{a,}y_a)$ *e* $B = \ (x_b, y_b)$ *pontos do plano.*

a) *Explique porque* $2|x_a - x_b|.|y_a - y_b| \geq 0$.

b) *Escreva a desigualdade que é obtida ao somar* $(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$ *aos dois membros da desigualdade anterior.*

c) *Para obter a desigualdade do item b você utilizou em algum momento produto notável? Em caso negativo, reescreva a desigualdade utilizando um produto notável.*

d) *Observe que na nova desigualdade os dois membros são positivos. Usando esse argumento extraia a raiz quadrada de cada um dos membros. Que conclusão você obtém?*

3.7 Atividade Complementar 2: uma elipse na Geometria do Táxi

Público alvo: alunos do primeiro ano do ensino médio.

Objetivo: ver a forma geométrica apresentada pela elipse na Geometria do Táxi.

Pré-requisitos: módulo e intervalo de números reais, equações modulares, gráfico de função afim, Teorema de Pitágoras e perímetro de figuras.

Material de apoio: papel quadriculado.

Dificuldades previstas: ao resolver equações modulares temos que separar em casos utilizando intervalos de números reais. Isso pode ser uma dificuldade esperada por parte dos alunos. Portanto, caso seja necessário, recorde primeiramente as equações modulares da forma $|x - a| = b, b \geq 0$.

Recomendações metodológicas: atividade individual. A atividade constará de 5 passos com o objetivo de levar o aluno a obter a forma geométrica de uma elipse dada na Geometria do Táxi. Também abordaremos o conceito de perímetro da figura obtida.

Tempo previsto: 3 aulas (50 minutos cada).

Procedimentos:

Com o auxílio de um papel quadriculado, faça o que se pede:

a) Marque os pontos $F_1 = (-2{,}0)$ *e* $F_2 = (2{,}0)$.

b) Localize oito pontos P *do plano, tais que as coordenadas sejam números inteiros e* $d_t(P, F_1) + d_t(P, F_2) = 6$.

c) Seja $P = (x, y)$ *um ponto qualquer do plano. Escreva e resolva a equação que representa* $d_t(P, F_1) + d_t(P, F_2) = 6$.

d) Represente graficamente as funções determinadas no item anterior, observando as restrições dos valores de x *e* y *obtidos ao aplicar a definição de módulo.*

e) Que figura você observa? Determine o perímetro da figura utilizando a distância do táxi.

<u>Observação para o professor</u>: no final o professor deve observar para os alunos que a elipse é o conjunto dos pontos P do plano, tais que a soma das distâncias de P (de acordo com a distância fixada) a dois pontos fixos (focos) é constante. Assim, a figura obtida (um hexágono) no último item é a forma geométrica da elipse de focos $F_1 = (-2{,}0)$ e $F_2 = (2{,}0)$ na Geometria do Táxi.

Mas se escolhermos outros focos, como por exemplo, $F_1 = (1{,}2)$ e $F_2 = (2{,}4)$ tal que $d_t(P, F_1) + d_t(P, F_2) = 5$, onde $P = (x, y)$ é um ponto qualquer do plano, obtemos um octógono. Resolva este caso com os alunos.

O importante é que os alunos tomem conhecimento que utilizando a definição de distância do táxi entre dois pontos do plano, alteramos a forma geométrica da elipse.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria do Táxi permite uma nova visão sobre o ensino da matemática, pois possibilita uma simulação de movimentos mais adequada nos espaços urbanos e também analisar algumas formas geométricas utilizando a distância do táxi.

É essencial a abordagem de temas mais atualizados e mais completos no âmbito educacional, proporcionando assim aulas mais dinâmicas e contextualizadas com a realidade dos alunos. Desta forma, compreendemos estar despertando maior interesse e compreensão dos temas por parte dos alunos, e por consequência, levando-os a maiores reflexões e aprendizados. Para isso propomos também nesse trabalho atividades complementares para alunos que gostam de desafios e querem sempre aprofundar mais.

O presente trabalho contribuiu para enriquecer meu conhecimento sobre temas interessantes e relevantes da matemática, podendo assim transmitir esse conhecimento ao aluno de forma que o mesmo perceba um maior sentido da matemática para o seu cotidiano.

Com este objetivo, após estudos e com base em experiências pessoais na área da educação, sugerimos algumas abordagens sobre o tema das quais consideramos relevantes. Esperamos alcançar nosso objetivo que é o de contribuir com os professores de Matemática e com os alunos no processo de ensino aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRICHELO, Leonardo; RODRIGUES, Claudina Izepe; COSTA, Sueli I. *Geometria do Táxi: Distâncias.* Matemática multimídia**,** Campinas. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1231>. Acesso em: 03 Jan. 2013.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental* – Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto & Aplicações*, v. 1 e 3. São Paulo: Ática, 2010.

DOMINGUES, Hygino H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, São Paulo: Atual, 1982.

FIRER, Marcelo; RODRIGUES, Claudina Izepe. *Vou de Táxi*. Série: matemática na Escola. Guia do professor. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1191> Acesso em: 12 Dez. 2012.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica*, v. 7. São Paulo: Atual, 1985.

JANSSEN, Christina. *Taxicab Geometry:* Not the Shortest Ride Across Town (Exploring Conics With a Non – Euclidean Metric) Iowa State University, 2007.

KALLEF**,** Ana Maria**.** NASCIMENTO, Rogério Santos do. *Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas:* o exemplo da Geometria do Táxi. BOLETIM GEPEM, Rio de Janeiro**,** n. 44, p. 11-42, jan./jun., 2004.

KRAUSE, Eugene F. *Taxicab Geometry*. New York: Dover, 1986.

PEDROSO, Hermes Antonio. *História da Matemática.* São José do Rio Preto: Gráfica da Unesp, 1992.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática.* Ensino Fundamental 7ª série, volumes 3 e 4/ Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009a.

UNIVERSITY OF ST ANDREWS. *The MacTutor History of Mathematics archive*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>. Acesso em: 03 de janeiro de 2013.

WANDERLEY, A. J. M. *et al*. *Como melhorar a vida de um casal usando uma geometria não-euclidiana.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 50. p. 23-30, 2002.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, _____/_____/____

____

Assinatura