FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT- CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

SOLUÇÃO POR RADICAIS DE CERTAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU ÍMPAR E MÉTODO DE NEWTON

LUIZ CESAR DE SOUZA CARDOSO

TRÊS LAGOAS – MS

2016

LUIZ CESAR DE SOUZA CARDOSO

SOLUÇÃO POR RADICAIS DE CERTAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU ÍMPAR E MÉTODO DE NEWTON

Trabalho de conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Campus de Três Lagoas

Orientador: Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva

Três Lagoas

2016

AGRADECIMENTOS

Aos colegas do curso pelo companheirismo.

Aos professores do curso pela dedicação em ensinar, e ao orientador prof. Vitor pelas suas sugestões na elaboração dessa dissertação.

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL – PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

Solução por radicais de certas equações polinômiais de grau ímpar e Método de Newton

por

Luiz Cesar de Souza Cardoso

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do titulo em Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Vitor Moretto Fernandes da Silva

Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva (Orientador)

Prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi

Edson D. Carvalho

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho

Dedicatória

A minha mãe Adair pela educação que tive, minha mulher Marivone pelo incentivo e meu filho Arthur a razão da minha vida.

“A educação sozinha não muda a sociedade; sem ela, tampouco a sociedade muda.”

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho esta baseado nas formas de resolução das equações 3ª e 4ª grau e as equações de grau ímpares acima do grau 3 como um método particular. Para a equação de grau 3 utilizamos o Método Cardano-Tartaglia por radicais e a de grau 4 resolução através de uma manipulação algébrica criado por Ferrari. Para os casos particulares das equações incompletas de grau ímpares maior que 3 utilizamos o mesmo procedimento que foram utilizados no método de Cardano-Tartaglia por radicais, apesar de não existir resoluções por radicais de equação polinomial geral para grau maior que 4. Para aproximação de raízes de uma equação qualquer utilizamos o método iterativo chamado “método de Newton”.

Palavra Chave: equações algébricas, fórmulas por radicais, polinômios, método iterativo.

ABSTRACT

This work is linked to resolving the 3rd and 4th degree equations , and the odd degree equations above grade 3 as a particular method. To the degree equation 3 use the Cardano - Tartaglia method for radical and grade 4 , resolution through an algebraic manipulation created by Ferrari . For extensions of odd degree incomplete equation greater than 3 used the same reasoning Cardan - Tartaglia Method radicals, although there is no resolvent for complete equation radicals to a greater degree than 4 and nearest roots of any equation used iterative method called " Newton's method " .

Key Words : Roots, algebraic equations , formulas radicals, polynomials , iterative method .

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo geral a análise das resoluções das equações algébricas envolvendo as Equações de Cardano-Tartaglia e Método de Ferrari, não ministradas no ensino médio regular.

A pesquisa aqui apresentada surgiu do fato de termos observado na literatura a falta desses conteúdos no referencial da grade curricular das escolas públicas e pelas dificuldades que os alunos apresentam nas resoluções de equações algébricas. Podemos identificar que apenas os conteúdos sem o uso de fórmulas, como Dispositivo de Briott-Ruffini, Relações de Girard e Teorema das Raízes Racionais eram insuficientes para resolver esses exercícios que envolvem as equações algébricas. Daí para frente sempre tive a vontade de aprofundar neste conteúdo e na escolha do texto para ser desenvolvido nessa dissertação vi a oportunidade de escolher esses temas que envolvem resoluções de equações algébricas.

Observei também que as propostas dos PCNs recomenda que o estudo da álgebra deve ser feito de forma clara e objetiva, mas os livros didáticos do ensino médio oferecem poucos recursos para pesquisas e aprofundamento quando se trata de resoluções de equações algébricas.

Para a realização deste trabalho, optei pela análise bibliográfica de artigos e alguns livros, como "As Fórmulas de Cardano Além das Cúbicas" de SARAIVA e "Introdução à História da Matemática" de EVES.

O trabalho está organizado em capítulos, em que serão descritos por nossa pesquisa. No capítulo 2 trataremos das "notas históricas", relatando dos principais personagens que tiveram suas participações nas equações algébricas e suas formas resolutivas das equações do terceiro grau com a fórmula de Cardano-Tartaglia e as equações do quarto grau utilizando as manipulações algébricas chamado de Método de Ferrrari. No capítulo 3 continuaremos com mesmo procedimento do raciocínio de Cardano-Tartaglia generalizando e desenvolvendo as certas raízes para equações algébricas de grau 5°, 7°, 9° grau e estendendo para n-*enésimo* grau ímpar. No capítulo 4 foi introduzido o Método de Newton como uma ferramenta poderosa para encontrar e obter raízes aproximadas de equações algébricas de qualquer grau.

E no final deste trabalho foi posto um plano de aula e uma lista de exercícios para professores que queiram dar um suporte de aprofundamento em resoluções de equações algébricas aos alunos que cursam o ensino médio.

2 - EQUAÇÕES DO 3° E 4° GRAU

Neste capítulo vamos começar relatar a história das equações algébricas de grau maior que dois e os principais matemáticos envolvidos e depois vamos mostrar as operações das formas resolutivas dessas equações.

2.1 - Notas Históricas

Conforme (EVES – 2004), as equações do terceiro grau ganharam destaque a partir de Leonardo Fibonacci[1] (1175 – 1250), quando o imperador Frederico II propôs que ele resolvesse uma equação do terceiro grau. No entanto ele deu uma resposta com somente uma raiz, sem mais nenhuma informação para o efeito. Com isso as buscas pelas resoluções das equações do terceiro com uso de fórmula começaram a ser “objeto de desejo” entre os matemáticos. Passado anos, um matemático religioso conhecido por Pacioli[2] (1455 – 1514) fez uma publicação que as equações do terceiro grau eram impossíveis de serem resolvidas sem dar uma comprovação. Pouco tempo depois, outros matemáticos provaram que existiam resoluções não só as equações do terceiro grau, mas também do quarto grau, desbancando Pacioli.

Durante o século 16, o matemático Scipione del Ferro (1465 – 1526) desenvolveu uma fórmula de resolução das equações do terceiro grau e antes de sua morte ensinou ao seu aluno chamado Antônio Fior. Passado dias Fior ficou sabendo que Tartaglia[3] (1499-1557) tinha desenvolvido também uma fórmula para as equações do terceiro grau e para verificar a veracidade sobre a fórmula chamou Tartaglia para um desafio onde cada um elaborasse questões envolvendo equações algébricas do terceiro grau. Na data marcada para o desafio, Tartaglia resolveu todas as questões e Fior não resolveu nenhuma. Depois disso, Cardano[4] (1501-1576) conseguiu essa fórmula das equações do terceiro grau do Tartaglia e publicou em

[1] Italiano nascido em Pisa, conhecido também por Leonardo de Pisa, o matemático mais talentoso da Idade Média.
[2] Franciscano Frei Luca Paciolo, matemático Italiano, considerado o pai da contabilidade moderna.
[3] Nicolo Fontana nascido na Itália teve o apelido de Tartaglia por ser gago.
[4] Girolano Cardano, matemático e médico Italiano.

seu livro “Args Magna” sem citar o autor. Os protestos que Tartaglia fazia contra Cardano erram defendidos pelo Ludovico Ferrari[5](1522-1560) que dizia que Tartaglia tinha a fórmula plagiada de Scipione del ferro.

Depois desse episódio, Cardano recebeu do matemático Zuanne de Tonini da Coi um problema que envolvia equação quártica e Cardano não sabendo resolver passou para Ferrari que entregou resolvida dias depois. Ferrari usou uma manipulação algébrica para essa resolução.

Passado esse cenário das raízes das equações do terceiro e quarto grau, os matemáticos focaram pelas resoluções das raízes das equações quínticas por fórmula. E ainda segundo (EVES – 2004), muitos matemáticos talentosos como Euler[6] e Lagrange[7] tentaram desenvolver fórmulas em termos de radicais e não conseguiram, Paolo Ruffini[8] tentou de maneira insuficiente provar que não existia fórmula a ser expressa por radicais em termos dos coeficientes. Só no século XIX, dois matemáticos que se destacaram Niels Henrik Abel[9] (1802–1829) e Évariste Galois[10] (1811-1832). Diferentemente de Cardano e Tartaglia, não tiveram rivalidade e nem sequer eles se conheciam, vivenciaram quase o mesmo período em países diferentes, apesar de terem suas mortes prematuras.

Abel ainda tentou nas equações gerais do quinto grau obter raízes por meio de radicais, mas depois detectou erros em sua fórmula e mais tarde provou que não existia uma fórmula geral dada para as raízes de uma equação de quinto grau em termos de radicais e Galois, provou que era impossível encontrar uma fórmula geral para as raízes de uma equação de *n-ésimo* grau em termos de operações algébricas sobre os coeficientes, se *n* for qualquer inteiro maior que quatro, que foi bem aceito na comunidade matemática.

Para aprofundamento no contexto histórico das equações algébricas sugerimos [4] das referências bibliográficas.

[5] Matemático e discípulo de Girolano Cardano
[6] Leonhard Euler matemático suíço.
[7] Joseph Louis Lagrange matemático Italiano.
[8] Médico e matemático Italiano.
[9] Matemático Norueguês.
[10] Matemático Frances.

2.2 - Equação do terceiro grau

Toda equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a \neq 0$ pode ser "modificada" e em seguida anulado o coeficiente de grau dois da "nova equação". Para isso vamos fazer a seguinte substituição de $x = y + p$ e substituindo, temos:

$$a(y+p)^3 + b(y+p)^2 + c(y+p) + d = 0$$

$$a(y^3 + 3y^2p + 3yp^2 + p^3) + b(y^2 + 2yp + p^2) + c(y+p) + d = 0$$

$$y^3a + y^2(3ap + b) + y(3ap^2 + 2bp + c) + ap^3 + bp^2 + cp + d = 0$$

Anular o coeficiente que multiplica y^2:

$$3ap + b = 0 \Longrightarrow 3ap = -b \Longrightarrow p = \frac{-b}{3a}$$

Substituindo $p = -\frac{b}{3a}$ na expressão acima:

$$y^3a + y^2\left(3a\left(\frac{-b}{3a}\right) + b\right) + y\left(3a\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + 2b\left(\frac{-b}{3a}\right) + c\right) + a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 +$$

$$+c\left(\frac{-b}{3a}\right) + d = 0.$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$y^3a + y^2(-b + b) + y\left(3a.\frac{b^2}{9a^2} - 2.\frac{b^2}{3a} + c\right) + a.\left(\frac{-b^3}{27a^3}\right) + b.\frac{b^2}{9a^2} - c\left(\frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$y^3a + y\left(\frac{b^2}{3a} - 2.\frac{b^2}{3a} + c\right) - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

$$y^3a + y\left(-\frac{b^2}{3a} + c\right) - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{cb}{3a} + d = 0$$

Dividindo a ambos os membros da igualdade:

$$\left(y^3a + y\left(-\frac{b^2}{3a} + c\right) - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{cb}{3a} + d\right).\frac{1}{a} = 0.\frac{1}{a}$$

$$y^3 + y\left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + y\left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) - \frac{b^3 + 3b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + y\left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

Chamando:

$$k = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$$

e

$$m = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

$$y^3 + yk + m = 0$$

Aqui obtemos uma equação com a configuração de Cardano-Tartaglia:

Vamos provar na equação do 3º grau for do tipo $y^3 + ky + m = 0$ com $k, m \epsilon \mathbb{R}$, então tal equação tem uma de suas raízes dada pela fórmula:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}}$$

Demonstração:

Lembremos que:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3.$$

O que equivale a

$$(u + v)^3 - (3u^2v + 3uv^2) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

Agora, tomemos as mudanças de variáveis dados por:

$y = u + v$

$k = -3uv$

m= - (u^3+v^3)

ou ainda,

$$\begin{cases} uv = \dfrac{-k}{3} \\ u^3 + v^3 = -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3v^3 = \dfrac{-k^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -m \end{cases}$$

Tomando uma nova mudança de variáveis do $a = u^3$ e $b = v^3$, obtemos:

$$\begin{cases} a.b = \dfrac{-k^3}{27} \\ a + b = -m \end{cases}$$

Por outro lado, sabemos do ensino fundamental que a solução do sistema acima pode ser interpretada da seguinte forma:

O que temos é que a e b sejam raízes da equação do 2º grau dado por:

$$T^2 - (a+b)T + ab = 0,$$

sendo $a + b$ (soma das raízes) e $a.b$ (produto das raízes).

Fazendo as substituições, temos

$$T^2 - (-m)T + \left(\frac{-k^3}{27}\right) = 0$$

$$T^2 + mT - \frac{k^3}{27} = 0$$

As raízes são:

$$T = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + \frac{4k^3}{27}}}{2} = \frac{-m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}$$

$$a = \frac{-m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3} \text{ e } b = \frac{-m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}.$$

Voltando, temos que:

$$u^3 = a \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}}$$

e

$$v^3 = b \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}}.$$

Assim,

$$y = u + v = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}}.$$

Logo,

$$y = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}}$$

é uma raiz da equação $y^3 + ky + m = 0$.

Voltando no início com $x = y + p$ e $p = -\frac{b}{3a}$ assim temos que,

$$\boldsymbol{x = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}},$$

com

$$k = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$$

e

$$m = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

APLICAÇÃO 1:

Fazendo a mudança de variável $x = y + m$, resolva a equação

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0.$$

Resolução:

Fazendo a mudança de variável de $x = y + m$ e substituindo na equação:

$$(y + m)^3 - 5(y + m)^2 + 7(y + m) - 3 = 0.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3 - 5(y^2 + 2ym + m^2) + 7y + 7m - 3 = 0,$$

ou melhor,

$$y^3 + y^2(3m - 5) + y(3m^2 - 10m + 7) + m^3 - 5m^2 + 7m - 3 = 0.$$

Anulando o coeficiente que multiplique y^2:

$$3m - 5 = 0 \implies m = \frac{5}{3}.$$

Substituindo $m = \frac{5}{3}$ na expressão acima:

$$y^3 + y^2\left(3.\frac{5}{3} - 5\right) + y\left(3\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 10.\frac{5}{3} + 7\right) + \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 7.\frac{5}{3} - 3 = 0$$

$$y^3 + y^2(5 - 5) + y\left(3.\frac{25}{9} - 10.\frac{5}{3} + 7\right) + \frac{125}{27} - \frac{125}{9} + \frac{35}{3} - 3 = 0$$

$$y^3 + y\left(\frac{25}{3} - \frac{50}{3} + 7\right) + \frac{125 - 375 + 315 - 81}{27} = 0$$

$$y^3 + y\left(-\frac{25}{3} + 7\right) - \frac{16}{27} = 0$$

$$y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{16}{27} = 0$$

Para encontrarmos uma raiz da equação

$$y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{16}{27} = 0$$

utilizaremos a fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{k^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{k^3}{27}}}$$

Basta, então tomar $k = -\frac{4}{3}$ e $m = -\frac{16}{27}$. Desta forma, obtemos:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-\left(-\frac{16}{27}\right)}{2} + \sqrt{\frac{\left(-\frac{16}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-\left(-\frac{16}{27}\right)}{2} - \sqrt{\frac{\left(-\frac{16}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}{27}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{8}{27} + \sqrt{\frac{64}{729} - \frac{64}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27} - \sqrt{\frac{64}{729} - \frac{64}{729}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{8}{27} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27} - \sqrt{0}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

Substituindo $y = 4/3$ na mudança de variável $x = y + m$ obtemos:

$$x = y + m = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ou seja, $x = 3$ é raiz da equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$.

E as outras duas raízes que faltam?

Como conhecemos a raiz da equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, ao realizarmos a divisão de polinômios, temos:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 3).(x^2 - 2x + 1).$$

Igualando a zero temos que $x = 3$ ou $x^2 - 2x + 1 = 0$, assim temos:

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

o que equivale,

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Logo, $x = 1$ é uma raiz dupla, assim as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ é $\{3,1\}$.

APLICAÇÃO 2:

Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da parábola de equação $y = x^2 - 9$ e da hipérbole de equação $y = \frac{28}{x}$, sendo $x \in \mathbb{R}^*$ e $y \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Este problema reduz-se a resolver a equação $x^2 - 9 = \frac{28}{x}$, ou seja, $x^3 - 9x - 28 = 0$ com $x \neq 0$. Note que esta equação é do tipo: $ax^3 + bx + c = 0$, e pode ser resolvida pela fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{k^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{k^3}{27}}},$$

basta tomar $k = -9$ e $m = -28$. Daí, temos que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-28)}{2} + \sqrt{\frac{(-28)^2}{4} + \frac{(-9)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-28)}{2} - \sqrt{\frac{(-28)^2}{4} + \frac{(-9)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{28}{2} + \sqrt{\frac{784}{4} - \frac{729}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{28}{2} - \sqrt{\frac{784}{4} - \frac{729}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196 - 27}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{196 - 27}}$$

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{169}}$$

$$x = \sqrt[3]{14 + 13} + \sqrt[3]{14 - 13}$$

$$x = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 3 + 1$$

$$x = 4$$

Para descobrir as outras duas raízes utilizaremos a divisão de polinômios, assim obtemos $x^3 - 9x - 28 = (x - 4).(x^2 + 4x + 7)$ e igualando a zero temos que $x = 4$ ou $x^2 + 4x + 7 = 0$, assim caímos na equação de segundo grau.

$$x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Logo, as raízes são dadas por

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.7}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Ora, essas raízes não servem para o problema. Como $y = \frac{28}{x} = \frac{28}{4} = 7$, temos que a interseção é o ponto: $(4, 7)$.

APLICAÇÃO 3

Use a equação de Cardano-Tartaglia para obter uma das raízes de

$$y^2 - 15y - 4 = 0.$$

Resolução:

Note que $k = -15$ e $m = -4$, temos;

$$y = \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-4)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(-15)}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-4)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(-15)}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$$

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Este foi o grande problema na época. Analisando a equação $y^2 - 15y - 4 = 0$, não é tão difícil perceber que $y = 4$ é uma das raízes dessa equação, e na equação de Cardano-Tartaglia chegamos nessa resolução $y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Neste caso viram que os números reais eram insuficientes, mas os matemáticos tinham consciência que nessa equação existia uma raiz real. Estava aqui a "porta de entrada" para a justificativa para o nascimento de mais um conjunto, a Teoria dos Números Complexos.

O algebrista Rafael Bombelli (1526 – 1572), um dos precursores a utilizar os números complexos, e desenvolvendo algumas manipulações algébricas chegou ao seguinte resultado:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

Essa manipulação algébrica será omitida, mas se o leitor tiver a curiosidade de descobrir como Rafael Bombelli chegou neste resultado sugiro [5] das referências bibliográficas.

2.3 - Equação do 4º grau de Ferrari

Toda equação geral $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ pode ser "modificada" através de uma mudança de variáveis e depois anulando o coeficiente que multiplique o grau de 3 da "nova equação", para isso vamos fazer a seguinte substituição de $x = y + m$ e neste sentido, considere a equação:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Fazendo a mudança $x = y + m$.

$$a(y+m)^4 + b(y+m)^3 + c(y+m)^2 + d(y+m) + e = 0$$

$$a(y^4 + 4y^3m + 6y^2m^2 + 4ym^3 + m^4) + b(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) +$$

$$+c(y^2 + 2ym + m^2) + dy + dm + e = 0$$

$$ay^4 + y^3(4am + b) + y^2(6m^2 + 3bm + c) + y(4m^3 + 3bm^2 + 2cm + d) + am^4 +$$

$$+bm^3 + cm^2 + dm + e = 0$$

Dividindo $a \neq 0$ ambos os membros da igualdade, temos:

$$y^4 + y^3\left(4m + \frac{b}{a}\right) + y^2\left(\frac{6m^2}{a} + \frac{3bm}{a} + \frac{c}{a}\right) + y\left(\frac{4m^3}{a} + \frac{3bm^2}{a} + \frac{2cm}{a} + \frac{d}{a}\right) + m^4 +$$

$$+\frac{bm^3}{a} + \frac{cm^2}{a} + \frac{dm}{a} + \frac{e}{a} = 0.$$

Anulando o coeficiente do termo de grau 3, obtemos:

$$4m + \frac{b}{a} = 0 \ \Rightarrow \ m = \frac{-b}{4a}$$

$$y^4 + y^3\left(4\left(\frac{-b}{4a}\right) + \frac{b}{a}\right) + y^2\left(\frac{6\left(\frac{-b}{4a}\right)^2}{a} + \frac{3b\left(\frac{-b}{4a}\right)}{a} + \frac{c}{a}\right) +$$

$$+y\left(\frac{4\left(\frac{-b}{4a}\right)^3}{a}+\frac{3b\left(\frac{-b}{4a}\right)^2}{a}+\frac{2c\left(\frac{-b}{4a}\right)}{a}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{-b}{4a}\right)^4+\frac{b\left(\frac{-b}{4a}\right)^3}{a}+\frac{c\left(\frac{-b}{4a}\right)^2}{a}+\frac{d\left(\frac{-b}{4a}\right)}{a}+$$

$$+\frac{e}{a}=0$$

$$y^4+y^3\left(\left(\frac{-b}{a}\right)+\frac{b}{a}\right)+y^2\left(\frac{6}{a}\left(\frac{b^2}{16a^2}\right)-\frac{3b}{a}\left(\frac{b^2}{4a}\right)+\frac{c}{a}\right)+$$

$$+y\left(\frac{4}{a}\left(\frac{-b^3}{64a^3}\right)+\frac{3b}{a}\left(\frac{b^2}{16a^2}\right)-\frac{2cb}{4a^2}+\frac{d}{a}\right)+\frac{b^4}{256a^4}-\frac{b^4}{64a^4}+\frac{cb^2}{16a^3}-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a}=0$$

$$y^4+y^2\left(\frac{6b^2}{16a^3}-\frac{3b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)+\ y\left(-\frac{4b^3}{64a^4}+\frac{3b^3}{16a^3}-\frac{2cb}{4a^2}+\frac{d}{a}\right)+\frac{b^4}{256a^4}-\frac{b^4}{64a^4}+$$

$$+\frac{cb^2}{16a^3}-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a}=0$$

Chamando de:

$$k=\frac{6b^2}{16a^3}-\frac{3b^2}{4a^2}+\frac{c}{a},$$

$$m=-\frac{4b^3}{64a^4}+\frac{3b^3}{16a^3}-\frac{2cb}{4a^2}+\frac{d}{a}\ \text{e}$$

$$p=\frac{b^4}{256a^4}-\frac{b^4}{64a^4}+\frac{cb^2}{16a^3}-\frac{db}{4a^2}+\frac{e}{a}$$

obtemos a equação de grau 4 na variável y dada por $y^4+y^2k+ym+p=0$, com $k,m,p\neq 0$.

Agora, vamos somar "y^2w" e "r" com $w,r\neq 0$ ambos os lados da equação.

Assim, temos

$$y^4+y^2k+y^2w+p+r=y^2w-ym+r,$$

o que equivale a,

$$y^4+y^2(k+w)+(p+r)=y^2w+y(-m)+r$$

Se os discriminantes forem iguais a zero, assim obtemos um reagrupamento de um quadrado perfeito, ou seja:

$$\Delta_1 = (k + w)^2 - 4(p + r) \Longrightarrow \ (k + w)^2 - 4(p + r) = 0$$

$$\Delta_2 = (-m)^2 - 4wr \ \Longrightarrow \ (-m)^2 - 4wr = 0$$

Para acharmos os valores de w e r temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} (k + w)^2 - 4(p + r) = 0 \ (I) \\ (-m)^2 - 4wr = 0 \ (II) \end{cases}$$

Vamos isolar (II) para substituir em (I).

$$r = \frac{m^2}{4w}$$

$$(k + w)^2 - 4\left(p + \frac{m^2}{4w}\right) = 0$$

$$k^2 + 2kw + w^2 - 4\left(\frac{4pw + m^2}{4w}\right) = 0$$

$$k^2w + 2kw^2 + w^3 - 4pw - m^2 = 0$$

$$w^3 + w^2 2k + w(k^2 - 4p) - m^2 = 0$$

Daqui sai as raízes $\{w_1, w_2, w_3\}$ e depois fazendo as substituições achamos os valores de $\{r_1, r_2, r_3\}$.

Substituindo os valores corresponde de w_i e r_i com $i = 1{,}2{,}3$ na equação

$$y^4 + y^2(k + w_i) + (p + r_i) = y^2 w_i + y(-m) + r_i$$

Reagrupamos e extraímos raízes quadrada a ambos os lados da igualdade, ou seja:

$$\sqrt{y^4 + y^2(k + w_i) + (p + r_i)} = \pm\sqrt{y^2 w_i + y(-m) + r_i}$$

Daqui achamos as raízes $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Voltando na mudança de variável $x = y + m$ e substituindo $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ e $m = \frac{-b}{4a}$, temos o conjunto solução $\left\{y_1 - \frac{b}{4a}, y_2 - \frac{b}{4a}, y_3 - \frac{b}{4a}, y_4 - \frac{b}{4a}\right\}$ da equação

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$

Vale lembrar que esses tipos de equação podem obter no máximo quatro raízes: reais ou/e complexas.

APLICAÇÃO 3:

Resolver a equação $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$, sabendo que tem duas raízes de multiplicidade dois.

Resolução:

O Método que vamos empregar será o "Método de Ferrari", vamos fazer a mudança de variável $x = y + m$. Então,

$$(y + m)^4 + 4(y + m)^3 - 2(y + m)^2 - 12(y + m) + 9 = 0.$$

Desenvolvendo, temos

$$y^4 + 4y^3m + 6y^2m^2 + 4ym^3 + m^4 + 4(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) -$$

$$+2(y^2 + 2ym + m^2) - 12(y + m) + 9 = 0$$

$$y^4 + y^3(4m + 4) + y^2(6m^2 + 12m - 2) + y(4m^3 + 12m^2 - 4m - 12) +$$

$$+(m^4 + 4m^3 - 2m^2 - 12m + 9) = 0.$$

Anulando o coeficiente de "y^3" temos que:

$$4m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{-4}{4} \Rightarrow m = -1.$$

Substituindo $m = -1$ na equação acima, temos:

$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0.$$

Vamos somar a ambos os lados da igualdade "αy^2" e "β":

$$y^4 - 8y^2 + \alpha y^2 + 16 + \beta = \alpha y^2 + \beta$$

$$y^4 + y^2(\alpha - 8) + (16 + \beta) = \alpha y^2 + \beta$$

Reagrupando como um quadrado perfeito os discriminantes terão que ser iguais a zero, ou seja:

$$\Delta_1 = (\alpha - 8)^2 - 4.(16 + \beta) = 0$$

$$\Delta_2 = 0^2 - 4\alpha\beta = 0.$$

Para acharmos os valores de α e β temos que formar um sistema:

$$\begin{cases} (\alpha - 8)^2 - 4.(16 + \beta) = 0 \ (I) \\ -4\alpha\beta = 0 \ \ (II) \end{cases}$$

Isolando (II) temos:

$$-4\alpha\beta = 0 \implies \beta = \frac{0}{-4\alpha} = 0 \implies \beta = 0.$$

Substituindo (II) em (I), temos que:

$$(\alpha - 8)^2 - 4.(16 + 0) = 0$$

$$(\alpha - 8)^2 - 4.16 = 0$$

$$(\alpha - 8)^2 = 64$$

$$\sqrt{(\alpha - 8)^2} = \pm\sqrt{64}$$

$$(\alpha - 8) = \pm 8$$

$$\alpha - 8 = 8 \ \ e \ \alpha - 8 = -8$$

$$\alpha = 16 \ e \ \alpha = 0$$

Substituindo α e β, na equação acima:

- Para $\boldsymbol{\alpha = 16}$ e $\boldsymbol{\beta = 0}$

$$y^4 + y^2(\alpha - 8) + (16 + \beta) = \alpha y^2 + \beta$$

$$y^4 + y^2(16 - 8) + (16 + 0) = 16y^2 + 0$$

$$y^4 + 8y^2 + 16 = 16y^2$$

$$y^4 + 8y^2 - 16y^2 + 16 = 0$$

$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0$$

$$(y^2 - 4)^2 = 0$$

$$\sqrt{(y^2 - 4)^2} = \pm\sqrt{0}$$

$$(y^2 - 4) = 0$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2.$$

- Para $\boldsymbol{\alpha = 0}$ e $\boldsymbol{\beta = 0}$

$$y^4 + y^2(\alpha - 8) + (16 + \beta) = \alpha y^2 + \beta$$

$$y^4 + y^2(0 - 8) + (16 + 0) = 0y^2 + 0$$

$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0$$

$$y = \pm 2.$$

Voltando na mudança de variável $x = y + m$ e substituindo $y = \pm 2$ e $m = -1$, temos

$$x = 2 - 1 = 1$$

e

$$x = -2 - 1 = -3$$

O conjunto é dado por $\{-3, 1\}$ é solução da equação

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0.$$

3 - GENERALIZAÇÃO PELO MÉTODO DE CARDANO-TARTAGLIA DE GRAU ÍMPAR MAIOR QUE 3

Aqui vamos mostrar generalização do método de resolução das equações de grau ímpar maior que 3, ou seja, equação de $5°\ grau$, $7°\ grau$, $9°\ grau$ e de $n-ésimo\ grau$ pelo procedimento do método de Cardano-Tartaglia para obter uma das raízes.

3.1 - Generalização pelo método de Cardano-Tartaglia para 5° grau

Proposição 1: A equação

$$x^5 + mx^3 + \frac{m^2}{5}x + z = 0$$

com $m, z \in \mathbb{R}$, tem uma de suas raízes dada por

$$x = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}}\ .$$

.

Demonstração:

Vamos desenvolver o binômio $(A+B)^5$:

$$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$$

$$= A^5 + 5AB(A^3+B^3) + 10A^2B^2(A+B) + B^5$$

$$= 5AB(A^3+B^3) + 10A^2B^2(A+B) + (A^5+B^5)$$

Desenvolver o binômio $(A+B)^3$:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$= 3AB(A+B) + (A^3+B^3)$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B).$$

Substituindo A^3+B^3 no binômio de $(A+B)^5$, temos:

$$(A+B)^5 = 5AB[(A+B)^3 - 3AB(A+B)] + 10A^2B^2(A+B) + (A^5+B^5)$$

$$= 5AB(A+B)^3 - 15A^2B^2(A+B) + 10A^2B^2(A+B) + (A^5+B^5) \implies$$

$$(A+B)^5 - 5AB(A+B)^3 + 5A^2B^2(A+B) - (A^5+B^5) = 0$$

Chamando de:

$A+B=x$

$z=-(A^5+B^5)$

$-5AB=m$

$5A^2B^2 = h \Longrightarrow A^2B^2 = \dfrac{h}{5}.$

Como $-5AB = m \Longrightarrow AB = \frac{-m}{5} \Longrightarrow (AB)^2 = \left(\frac{m}{5}\right)^2 \Longrightarrow A^2B^2 = \left(\frac{m}{5}\right)^2$

$\left(\dfrac{m}{5}\right)^2 = \dfrac{h}{5} \Longrightarrow h = \dfrac{m^2}{5}.$

Voltando no binômio e substituindo, temos:

$$x^5 + mx^3 + \frac{m^2}{5}x + z = 0.$$

Agora vamos obter as raízes da equação particular $x^5 + mx^3 + \frac{m^2}{5} + z = 0.$

Voltando no desenvolvimento do binômio, temos:

$A^5 + B^5 = -z$

$-5AB = m$

Daqui vamos fazer um desenvolvimento parecido com que foi feito na fórmula Cardano-Tartaglia, ou seja, transformar os coeficientes A^5 e B^5 numa soma e produto de raízes da equação do 2º grau.

$-5AB = m \Longrightarrow AB = \frac{-m}{5} \Longrightarrow (AB)^5 = -\left(\frac{m}{5}\right)^5 \Longrightarrow A^5B^5 = -\left(\frac{m}{5}\right)^5$ (produto)

$A^5 + B^5 = -z$ (soma)

O que temos é que A^5 e B^5 sejam as raízes da equação do 2º grau dado por:

$$T^2 + zT - \left(\frac{m}{5}\right)^5 = 0.$$

As raízes são dadas por

$$T = \frac{-z \pm \sqrt{(z)^2 + 4\left(\frac{m}{5}\right)^5}}{2} \Longrightarrow T = \frac{-z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}.$$

Como

$$T_1 = A^5 = \frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5} \Longrightarrow A = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}}$$

e

$$T_2 = B^5 = \frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5} \Longrightarrow \mathrm{B} = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}}$$

assim, de

$$x = A + B = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}}$$

temos que

$$x = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}}$$

é uma solução da equação $x^5 + mx^3 + \frac{m^2}{5}x + z = 0$.

APLICAÇÃO 4:

Resolva equação $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$, dê o seu conjunto solução:

Resolução:

Para achar o valor de uma das raízes vamos usar a fórmula generalizada de Cardano-Tartaglia. Note que $z = -2$ e $m = -5$ e substituindo na fórmula, temos:

$$x = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{5}\right)^5}} = 2.$$

Uma das raízes é $x = 2$, vamos achar as outras raízes.

Utilizando a divisão de polinômios

$$x^5 - 5x^3 + 5x - 2 = (x - 2).(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1)$$

e igualando a zero temos que $x = 2$ ou $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Para resolver a equação do quarto grau, vamos usar o "Método de Ferrari".

Temos que

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Fazendo a mudança de variável, $x = y + p$ e substituindo na equação, temos

$$(\mathrm{y} + \mathrm{p})^4 + 2(\mathrm{y} + \mathrm{p})^3 - (\mathrm{y} + \mathrm{p})^2 - 2(\mathrm{y} + \mathrm{p}) + 1 = 0.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$(y^4 + 4y^3p + 6y^2p^2 + 4yp^3 + p^4) + 2(y^3 + 3y^2p + 3yp^2 + p^3) - (y^2 + 2yp + p^2) +$$
$$-2p + 1 = 0.$$

Logo,

$$y^4 + y^3(4p + 2) + y^2(6p^2 + 6p - 1) + y(4p^3 + 6p^2 - 2p - 2) + p^4 + 2p^3 - p^2 +$$
$$-2p + 1 = 0.$$

Anulando o coeficiente que multiplique y^3:

$$4p + 2 = 0 \implies p = -\frac{1}{2}.$$

Substituindo $p = -\frac{1}{2}$ na equação acima, obtemos:

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{25}{16} = 0.$$

Vamos somar a ambos os lados da igualdade “αy^2" e “β”

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \alpha y^2 + \frac{25}{16} + \beta = \alpha y^2 + \beta,$$

ou seja,

$$y^4 + y^2\left(-\frac{5}{2} + \alpha\right) + \left(\frac{25}{16} + \beta\right) = \alpha y^2 + \beta.$$

Reagrupando como um quadrado perfeito os discriminantes terão que ser iguais à zero, ou seja:

$\Delta_1 = \left(\alpha - \frac{5}{2}\right)^2 - 4.\left(\frac{25}{16} + \beta\right) = 0$

e

$\Delta_2 = -4\alpha\beta = 0.$

Para acharmos os valores de α e β temos que encontrar a solução do sistema:

$$\begin{cases} \left(\alpha - \frac{5}{2}\right)^2 - 4.\left(\frac{25}{16} + \beta\right) = 0 \ (I) \\ -4\alpha\beta = 0 \ \ (II) \end{cases}$$

Isolando (II) temos:

$$-4\alpha\beta = 0 \implies \beta = \frac{0}{-4\alpha} = 0 \implies \beta = 0.$$

Substituindo em (II) em (I) temos que:

$$\left(\alpha - \frac{5}{2}\right)^2 - 4.\left(\frac{25}{16} + 0\right) = 0,$$

ou seja,

$$\left(\alpha - \frac{5}{2}\right)^2 = 4.\left(\frac{25}{16}\right)$$

$$\left(\alpha - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)$$

$$\sqrt{\left(\alpha - \frac{5}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)}$$

$$\alpha - \frac{5}{2} = \pm\frac{5}{2}$$

$$\alpha = 0 \text{ e } \alpha = 10.$$

Substituindo α e βna equação acima:

- Para $\boldsymbol{\alpha = 0}$ e $\boldsymbol{\beta = 0}$

$$y^4 + y^2\left(-\frac{5}{2} + 0\right) + \left(\frac{25}{16} + 0\right) = 0y^2 + 0$$

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{25}{16} = 0$$

$$\mathrm{y}^2 = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4.\left(\frac{25}{16}\right)}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{4}}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\mathrm{y}^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Voltando na mudança de variável, $x = y + p$:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

- Para $\boldsymbol{\alpha = 10}$ e $\boldsymbol{\beta = 0}$

$$y^4 + y^2\left(-\frac{5}{2} + 10\right) + \left(\frac{25}{16} + 0\right) = 10y^2 + 0 \implies$$

$$y^4 + y^2\left(-\frac{5}{2} + 10\right) - 10y^2 + \frac{25}{16} = 0.$$

$$y^4 + \frac{15}{2}y^2 + 10y^2 + \frac{25}{16} = 0$$

$$y^4 + y^2\left(\frac{15}{2} - 10\right) + \frac{25}{16} = 0$$

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{25}{16} = 0$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dessa forma, obtemos as mesmas raízes.

Escrever em uma das formas:

Assim $x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ e $x = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ são raízes de multiplicidade 2.

Logo, o conjunto solução da equação $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$ é $\left\{2, \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right\}$.

3.2 - Generalização pelo método de Cardano-Tartaglia para 7° grau

Proposição 2: A equação

$$x^7 + px^5 + \frac{2}{7}p^2x^3 + \frac{p^3}{49}x + c = 0$$

com $p, c \in \mathbb{R}$, tem uma de suas raízes da forma

$$x = \sqrt[7]{\frac{-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{7}\right)^7}} + \sqrt[7]{\frac{-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{7}\right)^7}}.$$

.**Demonstração:**

Vamos primeiramente fazer os desenvolvimentos dos binômios:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \implies A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$$

$$(A+B)^5 = 5AB[(A+B)^3 - 3AB(A+B)] + 10A^2B^2(A+B) + (A^5+B^5) \implies$$

$$A^5 + B^5 = (A+B)^5 - 5AB(A+B)^3 + 5A^2B^2(A+B)$$

$$(A+B)^7 = A^7 + 7A^6B + 21A^5B^2 + 35A^4B^3 + 35A^3B^4 + 21A^2B^5 + 7AB^6 + B^7$$

$$(A+B)^7 = 7AB(A^5+B^5) + 21A^2B^2(A^3+B^3) + 35A^3B^3(A+B) + (A^7+B^7)$$

$$(A+B)^7 - 7AB(A^5+B^5) - 21A^2B^2(A^3+B^3) - 35A^3B^3(A+B) - (A^7+B^7) = 0$$

$$(A+B)^7 - 7AB(A^5+B^5) - 21A^2B^2[(A+B)^3 - 3AB(A+B)] - 35A^3B^3(A+B) +$$

$$-(A^7+B^7) = 0$$

$$(A+B)^7 - 7AB(A^5+B^5) - 21A^2B^2(A+B)^3 + 63A^3B^3(A+B) - 35A^3B^3(A+B) +$$

$$-(A^7+B^7) = 0$$

$$(A+B)^7 - 7AB(A^5+B^5) - 21A^2B^2(A+B)^3 + 28A^3B^3(A+B) - (A^7+B^7) = 0$$

$$(A+B)^7 - 7AB[(A+B)^5 - 5AB(A+B)^3 + 5A^2B^2(A+B)] - 21A^2B^2(A+B)^3 +$$

$$+28A^3B^3(A+B) - (A^7+B^7) = 0$$

$$(A+B)^7 - 7AB(A+B)^5 + 35A^2B^2(A+B)^3 - 35A^3B^3(A+B) - 21A^2B^2(A+B)^3 +$$

$$+28A^3B^3(A+B) - (A^7+B^7) = 0$$

$$(A+B)^7 - 7AB(A+B)^5 + 14A^2B^2(A+B)^3 - 7A^3B^3(A+B) - (A^7+B^7) = 0$$

Chamando:

$A + B = x$

$p = -7AB$

$a = 14A^2B^2$

$b = -7A^3B^3$

$c = -(A^7 + B^7)$

Colocando os coeficientes em função de p:

$AB = -\dfrac{p}{7}$

$(AB)^2 = A^2B^2 = \dfrac{p^2}{49} \Longrightarrow a = 14\dfrac{p^2}{49} \Longrightarrow a = \dfrac{2}{7}p^2$

$(AB)^3 = A^3B^3 = -\dfrac{p^3}{7^3} \Longrightarrow b = -7.\left(-\dfrac{p^3}{7^3}\right) \Longrightarrow b = \dfrac{p^3}{49}.$

Substituindo na expressão acima, temos:

$$x^7 + px^5 + \frac{2}{7}p^2x^3 + \frac{p^3}{49}x + c = 0.$$

Agora vamos obter uma das raízes da equação particular acima. Para tanto usaremos o mesmo raciocínio de Cardano-Tartaglia: considerar como soma e produto das raízes da equação do 2º grau dadas por:

$A^7 + B^7 = -c$ (soma)

e

$AB = -\frac{p}{7} \Longrightarrow A^7B^7 = -\left(\frac{p}{7}\right)^7$ (produto).

Assim,

$$T^2 + cT - \left(\frac{p}{7}\right)^7 = 0.$$

Logo, as raízes são dadas por

$$T = \frac{-\mathrm{c} \pm \sqrt{c^2 + 4.\left(\frac{p}{7}\right)^7}}{2} = \frac{-\mathrm{c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{c}}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{7}\right)^7}.$$

Com isto,

$$x=\sqrt[7]{\frac{-c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{7}\right)^7}}+\sqrt[7]{\frac{-c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{7}\right)^7}}$$

Logo,

$$x=\sqrt[7]{\frac{-c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{7}\right)^7}}+\sqrt[7]{\frac{-c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{7}\right)^7}}$$

é uma das raízes da equação $x^7+px^5+\frac{2}{7}p^2x^3+\frac{p^3}{49}x+c=0$.

APLICAÇÃO 5:

Dê o valor de uma raiz da equação $x^7-7x^5+14x^3-7x-2=0$, utilizando o procedimento pelo método de Cardano-Tartaglia.

Resolução:

Utilizando o procedimento pelo método de Cardano-Tartaglia, temos que a fórmula de uma das raízes:

$$x=\sqrt[7]{\frac{-c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{7}\right)^7}}+\sqrt[7]{\frac{-c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{7}\right)^7}}.$$

Note que $p=-7$ e $c=-2$ e substituindo na fórmula, temos:

$$x=\sqrt[7]{\frac{2}{2}+\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{-7}{7}\right)^7}}+\sqrt[7]{\frac{2}{2}-\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{-7}{7}\right)^7}}$$

$$x=\sqrt[7]{1+\sqrt{1^2+(-1)^7}}+\sqrt[7]{1-\sqrt{1^2+(-1)^7}}$$

$$x = \sqrt[7]{1+\sqrt{1-1}} + \sqrt[7]{1-\sqrt{1-1}}$$

$$x = \sqrt[7]{1} + \sqrt[7]{1}$$

$$x = 2.$$

Substituindo $x = 2$ na equação acima, temos que:

$$2^7 - 7.2^5 + 14.2^3 - 7.2 - 2 = 128 - 224 + 112 - 14 - 2 = 0.$$

Vimos que $x = 2$ é uma das raízes da equação $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x - 2 = 0.$

3.3 - Generalização pelo método de Cardano-Tartaglia para 9° grau

Proposição 3: A equação

$$x^9 + ax^7 + \frac{a^2}{3}x^5 + \frac{10}{243}a^3x^3 + \frac{a^4}{729}x + e = 0$$

com $a, e \in \mathbb{R}$, tem uma de suas raízes dadas por

$$x = \sqrt[9]{\frac{-e}{2} + \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{9}\right)^9}} + \sqrt[9]{\frac{-e}{2} - \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{9}\right)^9}}.$$

.

Demonstração:

Essa demonstração é idêntica às que já foram demonstrados, sempre com o mesmo intuito: usar o mesmo raciocínio de Cardano-Tartaglia.

Vamos desenvolver os binômios de $(A+B)^3, (A+B)^5, (A+B)^7$ e $(A+B)^9$:

$$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$$

$$A^5 + B^5 = (A+B)^5 - 5AB(A+B)^3 + 5A^2B^2(A+B)$$

$$A^7 + B^7 = (A+B)^7 - 7AB(A+B)^5 + 14A^2B^2(A+B)^3 - 7A^3B^3(A+B)$$

$$(A+B)^9 = A^9 + 9A^8B + 36A^7B^2 + 84A^6B^3 + 126A^5B^4 + 126A^4B^5 + 84A^3B^6 +$$

$$+36A^2B^7 + 9AB^8 + B^9$$

$$(A+B)^9 = 9AB(A^7+B^7) + 36A^2B^2(A^5+B^5) + 84A^3B^3(A^3+B^3) +$$

$$+126A^4B^4(A+B) + (A^9+B^9)$$

$$(A+B)^9 - 9AB(A^7+B^7) - 36A^2B^2(A^5+B^5) - 84A^3B^3(A^3+B^3) -$$

$$+126A^4B^4(A+B) - (A^9+B^9) = 0$$

$$(A+B)^9 - 9AB[(A+B)^7 - 7AB(A+B)^5 + 14A^2B^2(A+B)^3 - 7A^3B^3(A+B)] +$$
$$-36A^2B^2[(A+B)^5 - 5AB(A+B)^3 + 5A^2B^2(A+B)] +$$
$$-84A^3B^3[(A+B)^3 - 3AB(A+B)] - 126A^4B^4(A+B) - (A^9+B^9) = 0$$

$$(A+B)^9 - 9AB(A+B)^7 + 63A^2B^2(A+B)^5 - 126A^3B^3(A+B)^3 +$$

$$+63A^4B^4(A+B) - 36A^2B^2(A+B)^5 + 180A^3B^3(A+B)^3 - 180A^4B^4(A+B) +$$

$$-84A^3B^3(A+B)^3 + 252A^4B^4(A+B) - 126A^4B^4(A+B) - (A^9+B^9) = 0$$

$$(A+B)^9 - 9AB(A+B)^7 + 27A^2B^2(A+B)^5 - 30A^3B^3(A+B)^3 + 9A^4B^4(A+B) +$$

$$-(A^9+B^9) = 0.$$

Chamando:

$x = A + B$

$a = -9AB$

$b = 27A^2B^2$

$c = -30A^3B^3$

$d = 9A^4B^4$

$e = -(A^9 + B^9)$.

Colocando os coeficientes em função de a:

$a = -9AB \;\Rightarrow AB = -\dfrac{a}{9}$,

$b = 27A^2B^2 \implies b = 27.\left(-\frac{a}{9}\right)^2 \implies b = \frac{a^2}{3},$

$c = -30A^3B^3 \Rightarrow c = -30.\left(-\frac{a}{9}\right)^3 \Rightarrow c = \frac{10}{243}a^3,$

$d = 9A^4B^4 \Rightarrow d = 9.\left(-\frac{a}{9}\right)^4 \Rightarrow d = \frac{a^4}{729}.$

Substituindo na equação $x^9 + ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx + e = 0$, temos:

$$x^9 + ax^7 + \frac{a^2}{3}x^5 + \frac{10}{243}a^3x^3 + \frac{a^4}{729}x + e = 0.$$

Fazendo o mesmo raciocínio de Cardano-Tartaglia: a soma e produto das raízes da equação do 2º grau.

$A^9 + B^9 = -e$ (soma)

$AB = -\frac{a}{9} \implies A^9B^9 = -\left(\frac{a}{9}\right)^9$ (produto)

$$T^2 + eT - \left(\frac{a}{9}\right)^9 = 0.$$

Logo, as raízes são dadas por

$$T = \frac{-\mathrm{e} \pm \sqrt{e^2 + 4.\left(\frac{a}{9}\right)^9}}{2} = \frac{-\mathrm{e}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{9}\right)^9}$$

$$x = \sqrt[9]{\frac{-\mathrm{e}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{9}\right)^9}} + \sqrt[9]{\frac{-\mathrm{e}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{9}\right)^9}}$$

Logo,

$$x = \sqrt[9]{\frac{-\mathrm{e}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{9}\right)^9}} + \sqrt[9]{\frac{-\mathrm{e}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{9}\right)^9}}$$

é uma das raízes da equação $x^9 + ax^7 + \frac{a^2}{3}x^5 + \frac{10}{243}a^3x^3 + \frac{a^4}{729}x + e = 0.$

3.4 - Generalização pelo método de Cardano-Tartaglia para o $n-$é$simo$ grau ímpar

Proposição 4: Dados $p, r \epsilon \mathbb{R}$, existem $a_i \epsilon \mathbb{Z}^*$ com $i = 1,2,3,\dots,\frac{n-1}{2}$ com n ímpar natural maior que dois, tais que

$$x^n + px^{n-2} + a_2\left(\frac{p}{a_1}\right)^2 x^{n-4} + a_3\left(\frac{p}{a_1}\right)^3 x^{n-6} + \ \dots + \ a_{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\left(\frac{p}{a_1}\right)^{\left(\frac{n-3}{2}\right)} x^3 +$$

$$+a_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{a_1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x + r = 0$$

possui uma raiz da forma:

$$x = \sqrt[n]{\frac{-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{a_1}\right)^n}} + \sqrt[n]{\frac{-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{a_1}\right)^n}}.$$

Demonstração:

Desenvolvemos os binômios:$(A+B)^3, (A+B)^5, (A+B)^7, \dots, (A+B)^n$.

$$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B),$$

$$A^5 + B^5 = (A+B)^5 - 5AB(A^3+B^3) - 10A^2B^2(A+B),$$

$$A^7 + B^7 = (A+B)^7 - 7AB(A^5+B^5) - 21A^2B^2(A^3+B^3) - 35A^3B^3(A+B),$$

...

e

$$A^n + B^n = (A+B)^n +$$

$$\underbrace{-\binom{n}{1}AB(A^{n-2}+B^{n-2}) - \binom{n}{2}A^2B^2(A^{n-4}+B^{n-4}) - \dots - \binom{n}{\left(\frac{n-1}{2}\right)}A^{\frac{n-1}{2}}B^{\frac{n-1}{2}}(A+B)}_{\frac{n-1}{2}\,parcelas}.$$

Fazendo as substituições de cada Binômio e deixando em função de $A+B$.

$$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B),$$

$$A^5 + B^5 = (A+B)^5 - 5AB(A+B)^3 + 5A^2B^2(A+B),$$

$$A^7 + B^7 = (A+B)^7 - 7AB(A+B)^5 + 14A^2B^2(A+B)^3 - 7A^3B^3(A+B),$$

$$\cdots$$

e

$$A^n + B^n =$$

$$(A+B)^n + \underbrace{a_1AB(A+B)^{n-2} + a_2A^2B^2(A+B)^{n-4} + \cdots + a_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(A+B)}_{\frac{n-1}{2}\,parcelas}.$$

ou ainda,

$$(A+B)^n + \underbrace{a_1AB(A+B)^{n-2} + a_2A^2B^2(A+B)^{n-4} + \cdots + a_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(A+B)}_{\frac{n-1}{2}\,parcelas} +$$

$$-(A^n + B^n) = 0.$$

Chamando:

$A + B = x$

$p = a_1AB \implies AB = \frac{p}{a_1}$

$-(A^n + B^n) = r$

Substituindo na equação acima $AB = \frac{p}{a_1}$, $A^n + B^n = -r$ e $A + B = x$, assim temos:

$$x^n + px^{n-2} + a_2\left(\frac{p}{a_1}\right)^2 x^{n-4} + a_3\left(\frac{p}{a_1}\right)^3 x^{n-6} + \cdots + a_{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\left(\frac{p}{a_1}\right)^{\left(\frac{n-3}{2}\right)} x^3 +$$

$$+a_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{a_1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x + r = 0.$$

Transformando os coeficientes A^n e B^n numa soma e produto de raízes da equação do 2º grau.

$a_1 AB = p \implies AB = \frac{p}{a_1} \implies (AB)^n = \left(\frac{p}{a_1}\right)^n \implies A^n B^n = \left(\frac{p}{a_1}\right)^n$ (produto)

$A^n + B^n = -r$ (soma)

Como obtemos a soma e produto, assim:

$$T^2 + rT + \left(\frac{p}{a_1}\right)^n = 0.$$

Logo, as raízes são dadas por:

$$T = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4\left(\frac{p}{a_1}\right)^n}}{2} = \frac{-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{a_1}\right)^n}$$

assim,

$$x = A + B = \sqrt[n]{\frac{-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{a_1}\right)^n}} + \sqrt[n]{\frac{-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{a_1}\right)^n}}$$

ou seja,

$$x = \sqrt[n]{\frac{-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{a_1}\right)^n}} + \sqrt[n]{\frac{-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{a_1}\right)^n}}$$

é uma solução da equação

$$x^n + px^{n-2} + a_2\left(\frac{p}{a_1}\right)^2 x^{n-4} + a_3\left(\frac{p}{a_1}\right)^3 x^{n-6} + \cdots + a_{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\left(\frac{p}{a_1}\right)^{\left(\frac{n-3}{2}\right)} x^3 +$$

$$+ a_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{a_1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x + r = 0.$$

4 - MÉTODO DE NEWTON

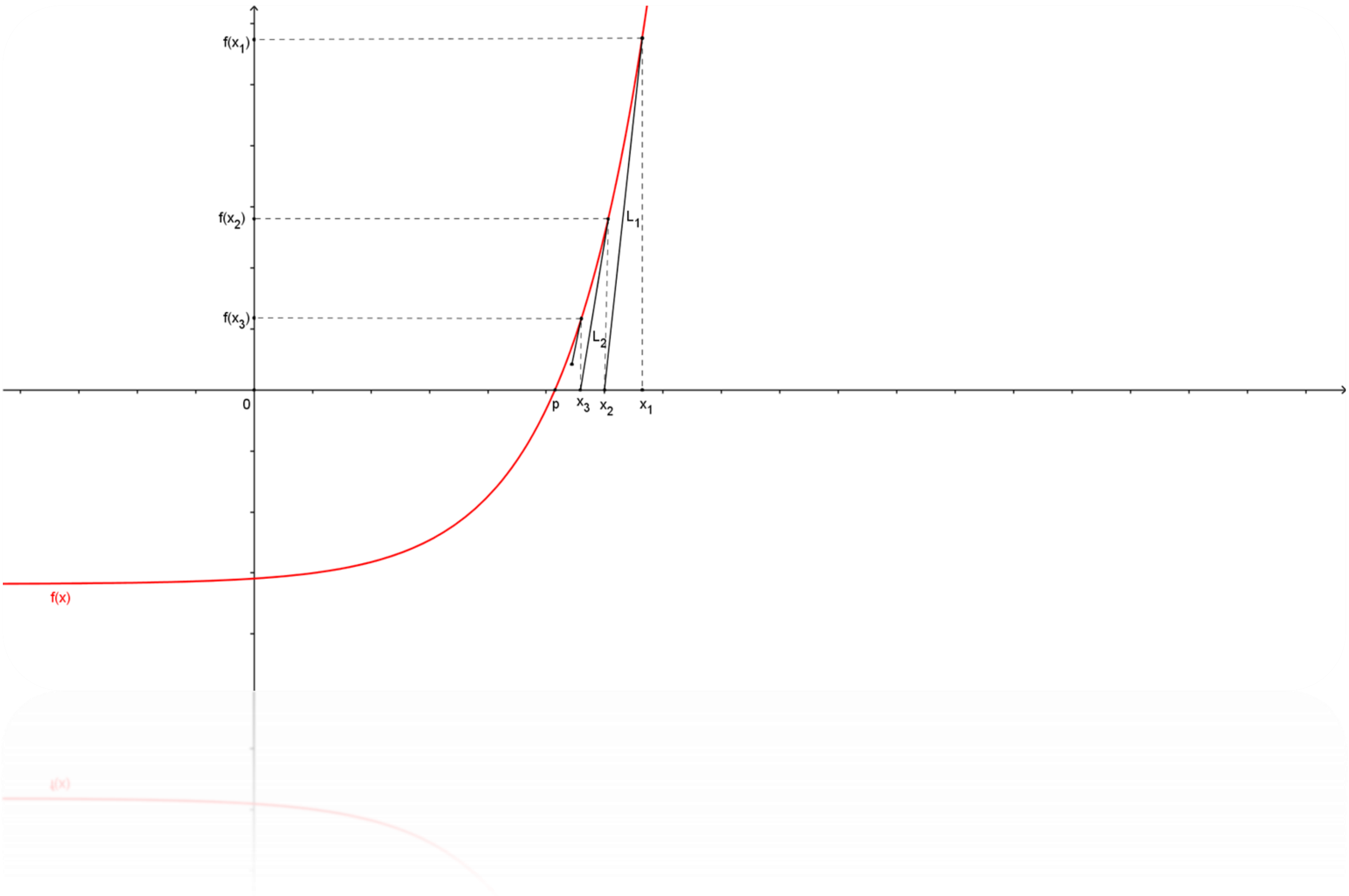
O método de Newton[11] tem por objetivo encontrar soluções aproximadas para equações polinomiais.

Como todo polinômio é do tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, para existir raízes, $f(p) = 0$, com $p \in \mathbb{R}$.

Vamos encontrar as aproximações à raiz p da função $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Para isso vamos construir um gráfico para termos estimativas dessas aproximações.



[11] Isaac Newton (1642-1727), matemático inglês.

Escolhemos um valor $x = x_1$ próximo de p(raiz da função). Assim vamos ter uma reta tangente L_1 no ponto $\left(x_1, f(x_1)\right)$ a função, tais que:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)\ ,\ \ f'(x_1) \neq 0.$$

A interseção de L_1 ao eixo x é x_2. Fazendo em L_1, $y = 0$ e $x = x_2$, obtemos:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

o que implica,

$$\boldsymbol{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}.$$

Continuando com as aproximações a p. Repetindo com o mesmo processo, agora com a reta tangente L_2 no ponto $\left(x_2, f(x_2)\right)$ a função, tais que:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)\ , f'(x_2) \neq 0.$$

A interseção de L_2 ao eixo x é x_3. Fazendo em L_2, $y = 0$ e $x = x_3$, obtemos:

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

o que implica,

$$\boldsymbol{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}.$$

Continuando com varias aproximações sucessivas próximas a p e fazendo os mesmos processos anteriores, vamos obter uma reta tangente L_n no ponto $\left(x_n, f(x_n)\right)$ a função, tais que:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n), f'(x_n) \neq 0.$$

A interseção de L_n ao eixo x é x_{n+1}. Fazendo em L_n, $y = 0$ e $x = x_{n+1}$, obtemos uma fórmula geral:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

o que implica,

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$

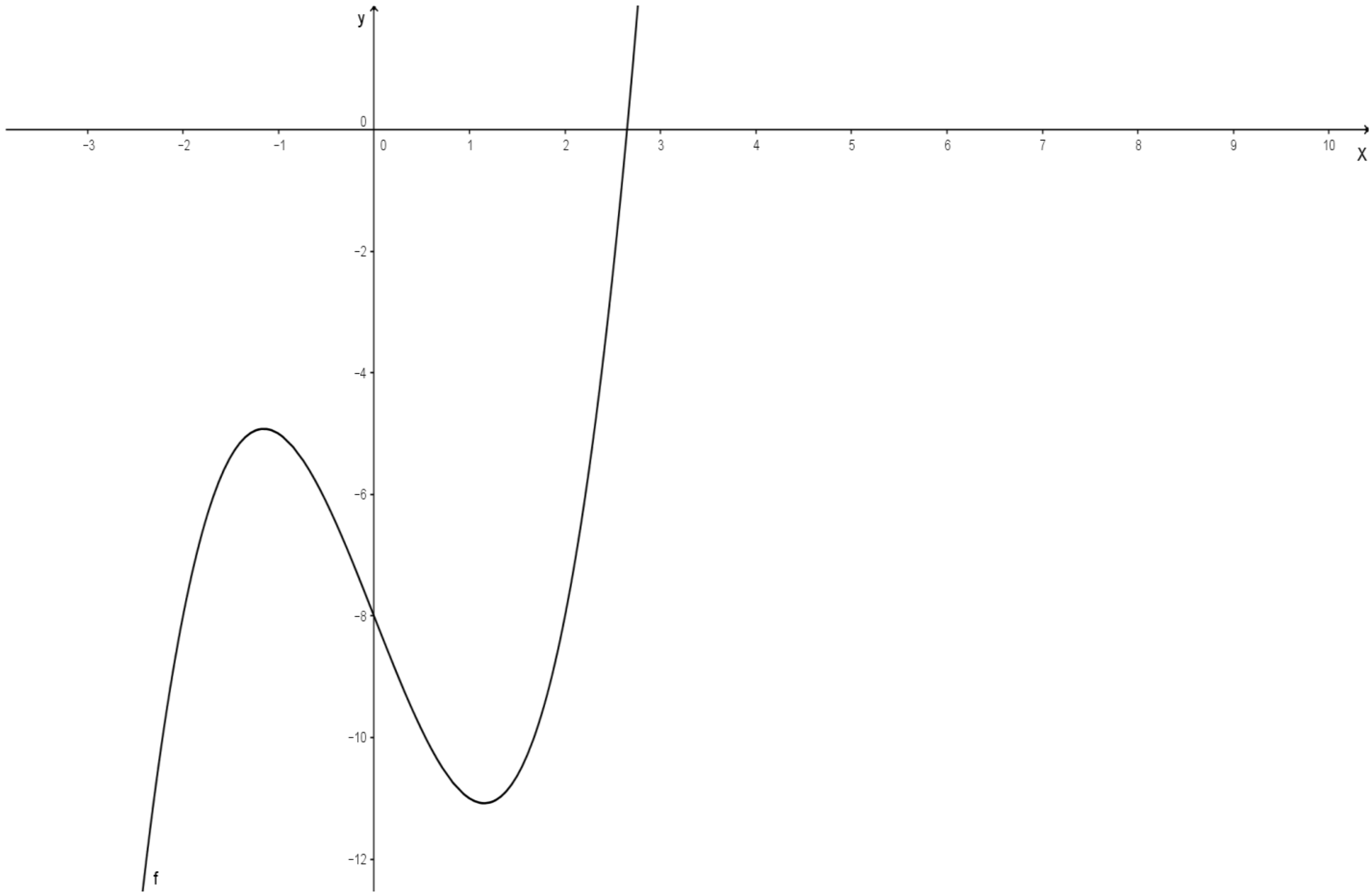
Note que x_{n+1} é o ponto cada vez mais próximo ou igual a p.

APLICAÇÃO 6:

Use o Método de Newton para encontrar o valor aproximado da raiz da equação $x^3 - 4x - 8 = 0$.

Resolução:

Vamos analisar o gráfico abaixo da função $f(x) = x^3 - 4x - 8$.



Note que $f(2) = -8$ e $f(3) = 7$, assim temos uma raiz entre 2 e 3 na função $f(x) = x^3 - 4x - 8$. Analisando pelo gráfico a raiz esta mais próxima de 3 do que 2, então começaremos por $x = 3$.

Utilizando o Método de Newton,

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n{}^3 - 4x_n - 8)}{3x_n{}^2 - 4}}.$$

Utilizando uma tabela para facilitar os cálculos e começando com $x_1 = 3$. Queremos que a raiz seja precisa até a quinta casa decimal, sendo assim, usaremos seis casas decimais nos nossos cálculos.

n	x_n	$x_n{}^3 - 4x_n - 8$	$3x_n{}^2 - 4$	$\frac{x_n{}^3 - 4x_n - 8}{3x_n{}^2 - 4}$	x_{n+1}
1	$3,000000$	$7,000000$	$23,000000$	$0,304348$	$2,695652$
2	$2,695652$	$0,805454$	$17,799619$	$0,045251$	$2,650401$
3	$2,650401$	$0,016470$	$17,073876$	$0,000965$	$2,649436$
4	$2,649436$	$0,000001$	$17,058533$	$0,000000$	$2,649436$

Como $x_4 \cong x_5 \cong 2{,}649436$ arredondamos e esse número para cinco casas decimais, ou seja, $x \cong 2{,}64944$.

Logo, temos que a raiz aproximada, $x \cong 2{,}64944$.

APLICAÇÃO 7:

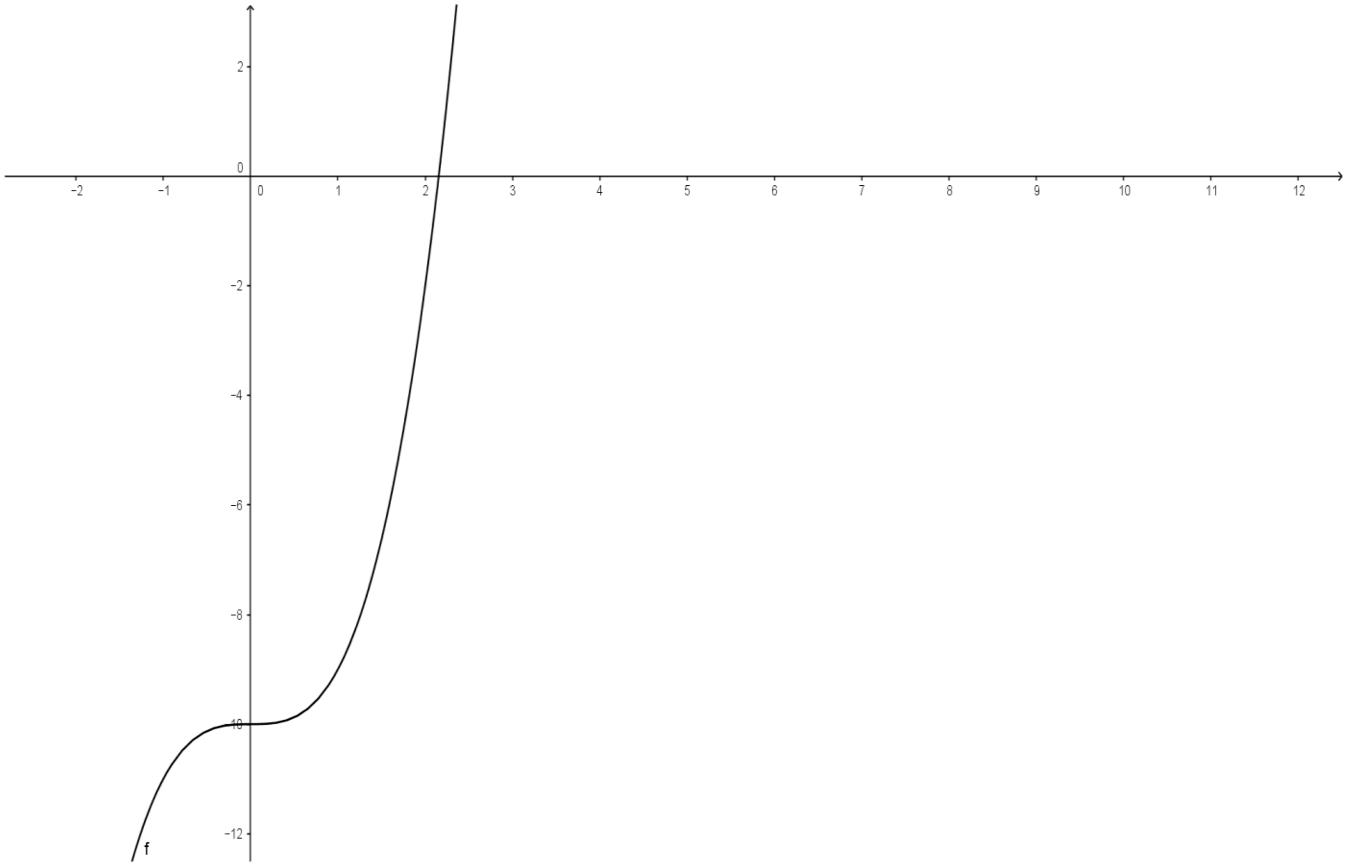
Dê o valor aproximado de $\sqrt[3]{10}$ com até quatro casas decimais.

Resolução:

Primeiramente temos que

$$x = \sqrt[3]{10} \Longrightarrow x^3 = 10 \Longrightarrow x^3 - 10 = 0.$$

Vamos analisar o gráfico abaixo a função $f(x) = x^3 - 10$.



Note que $f(2) = -2$ e $f(3) = 17$, pela troca de sinal da função temos uma raiz entre 2 e 3. Note que $x = 2$ é o ponto mais próximo da raiz do que $x = 3$ assim começaremos por ele.

Utilizando o Método de Newton, temos que

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n{}^3 - 10)}{3x_n{}^2}}$$

Vamos utilizar uma tabela pra facilitar os cálculos e começando com

$x_1 = 2$.

n	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{x_n{}^3 - 10}$	$\boldsymbol{3x_n{}^2}$	$\boldsymbol{\frac{x_n{}^3 - 10}{3x_n{}^2}}$	$\boldsymbol{x_{n+1}}$
1	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{12}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{13}{6}}$
2	$\boldsymbol{\frac{13}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{37}{216}}$	$\boldsymbol{\frac{169}{12}}$	$\boldsymbol{\frac{37}{18759}}$	$\boldsymbol{\frac{6554}{3042}}$

Pelo Método de Newton temos que $x_3 = \frac{\mathbf{6554}}{\mathbf{3042}} \cong 2{,}1545036$ e vamos arredondar esse número decimal para quatro casas decimais, ou seja, $2,1545$.

Logo, o valor aproximado com quatro casas decimais de $\sqrt[3]{10}$ é $2{,}1545$, ou seja, $\sqrt[3]{10} \cong 2{,}1545$.

5 - CONCLUSÃO

O objetivo desse trabalho é oferecer a professores e estudantes do ensino médio mais um instrumento para auxiliá-los na tarefa de ensino e aprendizagem desse importante conteúdo, as resoluções de equações algébricas. Sabendo que os conteúdos que estão nos referenciais curriculares do ensino médio oferecem pouco suporte para essas equações.

Algumas dessas resoluções como o Método de Cardano-Tartaglia e Ferrari, podem ser usadas diretamente em salas de aula para complementar o desenvolvimento nos livros textos usual.

Por fim, os estudos as equações algébricas sempre enriquecem o conhecimento intelectual do ser humano, espero que esse trabalho consiga ajudar trazer bons resultados aos estudantes.

6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]Brasil (País). Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)*: Matemática, Brasília, MEC – 1998.

[2]Dante, Luiz Roberto. *Contexto e Aplicações*. Editora Ática, 2ª edição- 2014.

[3]Dolce, Osvaldo. *Matemática, Ciência e Aplicação*. São Paulo-2006, 4ª edição.

[4]Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Editora Unicamp, 2004.

[5]GARBI, Gilberto G. *O Romance das equações algébricas*. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[6]Leithold, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 1. 3ª edição

[7]Paiva, Manoel. *Matemática Paiva 3*, 2ª edição. São Paulo, 2013.

[8]Saraiva, José Cloves Verde. *A Fórmula de Cardano Além das Cúbicas*. São Luis - MA.

[9]Stewart, James. *Cálculo*, Vol 1. Editora Thomson, 5ª edição.

7 - PLANO DE AULA

Público alvo:

Alunos do 1° Ano, 2° ano e 3° Ano do Ensino Médio.

Carga-horária:

8 aulas de 50 minutos.

Conteúdos:

*Resolutivas de Equações Algébricas de:

*3° grau pelo "Método de Cardano-Tartaglia";

*4° grau pelo "Método de Ferrari";

* 5º, 7º e estendendo para *n*º grau pelo Método de Cardano-Tartaglia.

Habilidades/Competências:

- Compreender o desenvolvimento de produtos notáveis.

- Desenvolver agilidade em fatorar as equações.

- Conhecer as resolutivas das equações do 1° e 2° grau para facilitar o desenvolvimento das demais equações.

- Desenvolver a fórmula para obter uma das raízes da equação do terceiro grau por meios de radicais utilizando o método de Cardano-Tartaglia.

- Achar as raízes da equação do quarto grau utilizando e desenvolvendo as manipulações algébricas pelo método de Ferrari.

-Desenvolver o Método de Cardano-Tartaglia nas generalizações das equações polinomiais de grau ímpar natural maior ou igual a cinco, fórmula por meio de radicais para obter uma das raízes.

Metodologia/Atividade a serem desenvolvidas:

Serão 8 aulas:

1ª aula:*Comentar e relatar a história das equações algébricas do terceiro e quarto grau como os principais matemáticos envolvidos, suas fórmulas e os métodos.

2ª aula:* Definir a equação geral do terceiro grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a, b, c, d \epsilon \mathbb{R}$ sendo $a \neq 0$, assim fazer a mudança de variável $x = y + p$ para anular coeficiente do 2° grau para chegar na equação do tipo $y^3 + ky + m = 0$ e assim desenvolver pelo Método de Tartaglia-Cardano para obter a fórmula

$$\boldsymbol{x = \sqrt[3]{\frac{-m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}}.$$

3ª aula:*Resolver alguns exercícios com aplicações da fórmula de Cardano-Tartaglia.

4ª aula:* Definir a equação geral do quarto grau, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ com $a, b, c, d, e \epsilon \mathbb{R}$ sendo $a \neq 0$, assim fazer a mudança de variável $x = y + m$ para anular coeficiente do 3° grau para chegar na equação do tipo $y^4 + ky^2 + my + p = 0$ e assim desenvolver o método de Ferrari e obter o conjunto solução.

5ª aula:* Resolver alguns exercícios de equações polinomiais do quarto grau com aplicações pelo Método de Ferrari.

6ª aula:* Mostrar que qualquer equação polinomial do tipo

$$x^5 + a_1x^3 + a_2x + a_3 = 0$$

dependendo dos coeficientes $a_1, a_2, a_3 \epsilon \mathbb{R}$ pode-se proceder com mesmo raciocínio pelo Método de Cardano-Tartaglia para obter uma raiz por radicais, ou seja,

$$x = \sqrt[5]{\frac{-a_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{-a_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{5}\right)^5}}.$$

7ª aula:* Mostrar que qualquer equação polinomial do tipo

$$x^7 + a_1 x^5 + a_2 x^3 + a_3 x + a_4 = 0$$

dependendo dos coeficientes $a_1, a_2, a_3, a_4 \epsilon \mathbb{R}$ pode-se proceder com o mesmo raciocínio pelo Método de Cardano-Tartagia para obter uma raiz por radicais, ou seja,

$$x = \sqrt[7]{\frac{-a_4}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{7}\right)^7}} + \sqrt[7]{\frac{-a_4}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{7}\right)^7}}.$$

8ª aula:* Generalizando a equação polinomial

$$x^n + a_r x^{n-2} + a_{r-1} x^{n-4} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x + a_1 = 0$$

com $n\ natural\ ímpar\ e\ maior\ que$ 2, dependendo dos coeficientes $a_r, a_{r-1}, \dots, a_3, a_2, a_1 \epsilon \mathbb{R}$ pode-se proceder com o mesmo raciocínio pelo Método de Cardano-Tartaglia para obter pelo menos uma raiz por radicais, ou seja,

$$x = \sqrt[n]{\frac{-a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_r}{n}\right)^n}} + \sqrt[n]{\frac{-a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_r}{n}\right)^n}}.$$

Avaliação da aprendizagem:

Os alunos serão avaliados pelos desenvolvimentos dos exercícios feitos em sala e pelas listas de exercícios.

Observações:

Fica ao critério do professor se precisar fazer alguma alteração ou complementação de conteúdo.

Recursos:

Quadro negro ou lousa, data show, multimídia e material didático.

Referência bibliográfica:

GARBI, Gilberto G. *O Romance das equações algébricas*. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

Saraiva, José ClovesVerde.*A Fórmula de Cardano Além das Cúbicas*. São Luis - MA.

Aves, Howard.Introdução à história da matemática.Editora Unicamp, 2004.

Dolce, Osvaldo.*MATEMÁTICA, Ciência e Aplicação, vol 3*.São Paulo-2006, 4ª edição.

Paiva, Manoel. Matemática Paiva, vol3.Editora Moderna, São Paulo- 2013.

Lista de exercícios

1) Reescreva as equações, fazendo as mudanças de variável solicitadas em cada caso:

a) $x^3 - 2x + 4 = 0$, fazendo $x = y + 1$.

b) $y^3 - 5y^2 + 7y - 3 = 0$, fazendo $y = z + 1$.

c) $x^3 + 6x^2 + 10x - 10 = 0$, fazendo $x = y - 2$.

d) $x^3 - 2x + 6 = 0$, fazendo $x = y - 1$

2) Utilizando a fórmula Cardano-Tartaglia, dê o conjunto solução.

a) $x^3 - 3x - 2 = 0$

b) $x^3 - 6x - 6 = 0$

c) $x^3 - 15x - 4 = 0$

3) Observe as dimensões do cubo e do paralelepípedo:

Dimensão do cubo: $x,\ x,\ x$

Dimensão do paralelepípedo: $x, \frac{3x}{2},\ x - 3$

Determine os valores de x para os quais o volume do cubo excede o volume do paralelepípedo em 32 unidades cúbicas.

4) Utilizando as manipulações de Ferrari, resolva as equações abaixo e dê o seu conjunto solução.

a) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$

b) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$

5) Nesta atividade, você vai formar equações polinomiais a partir de suas raízes.

a) Substitua por números as letras *a*, *b* e *c* de modo que as raízes da equação na incógnita *x*, representada abaixo, sejam 1, 2 e 4.

$(x\text{-}a)(x\text{-}b)(x\text{-}c)=0$

Em seguida, elimine os parênteses do primeiro membro, aplicando a propriedade distributiva.

b) Forme uma equação do 3° grau que possua uma raiz igual a 5 e duas raízes iguais a 1.

c) Forme a equação do 4° grau *p(x)=0* que possua todas as raízes iguais a 2, de modo que o coeficiente dominante de *p(x)* seja igual a 3.