



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## O Teorema de Marden e uma Generalização

Pollyana Gomes Volpato

Goiânia

2016

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional de Matemática.

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Nome completo do autor: Pollyana Gomes Volpato

Título do trabalho: O Teorema de Marden e uma Generalização

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Pollyana G. Volpato  
Assinatura do (a) autor (a) <sup>2</sup>

Data: 09 / 12 / 2016

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

Pollyana Gomes Volpato

## O Teorema de Marden e uma Generalização

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Volpato, Pollyana Gomes  
O Teorema de Marden e uma Generalização [manuscrito] /  
Pollyana Gomes Volpato. - 2016.  
LII, 52 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto  
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em  
Ensino na Educação Básica (Profissional), Goiânia, 2016.

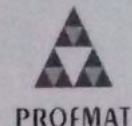
Bibliografia.  
Inclui lista de figuras.

1. Elipse de Steiner. 2. Teorema de Marden. 3. Generalização do  
Teorema de Marden. 4. Polinômios com coeficientes complexos. 5.  
Marden's Theorem. I. Rodrigues, Paulo Henrique de Azevedo, orient.  
II. Título.

CDU 51



Universidade Federal de Goiás-UFG  
Instituto de Matemática e Estatística-IME  
Mestrado profissional em Matemática em Rede  
Nacional - PROFMAT/UFG



Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.  
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 [www.ime.ufg.br](http://www.ime.ufg.br)

**Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso da aluna Pollyana Gomes Volpato** – Aos nove dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezesseis (09/12/2016), às 09:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues – Orientador; Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira e Flávio Raimundo de Souza, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada: **“O Teorema de Marden e uma Generalização”**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Pollyana Gomes Volpato discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida a autora do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 11:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues  
Presidente – IME/UFG

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira  
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza  
Membro – IFG/GOIÂNIA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Pollyana Gomes Volpato** nasceu em Goiânia no ano de 1990, em 2012 licenciou em Matemática pela Universidade Federal de Goiás. Professora do Ensino Fundamental e Médio e completamente apaixonada pela profissão.

Dedico esse trabalho ao meu filho que  
me dá a inspiração e a força de vontade  
necessária para seguir em frente.

# Agradecimentos

Agradeço a minha mãe pelo apoio necessário durante as dificuldades do curso. Por ter ido a faculdade para ficar na sala ao lado com meu filho recém nascido, para que eu não perdesse aula nos primeiros dias de vida do bebê.

Agradeço ao meu pai por sempre ter acreditado em mim, e sempre falar palavras animadoras quando eu pensava em desistir de tudo.

Agradeço ao pai do meu filho por ter entendido minha vontade de estudar e apoiado meus estudos, dando todo suporte na árdua tarefa de cuidar de um bebê enquanto eu me dedicava ao curso.

Agradeço aos meus amigos de curso que estiveram juntos comigo nessa caminhada. Especialmente ao meu amigo Ricardo Santos que me incentivou a fazer o curso e me ajudou demais na reta final dessa jornada.

Agradeço meu orientador Dr. Paulo Henrique pela paciência infinita em me explicar e motivar sempre.

E agradeço infinitamente ao meu filho, pois todas as vezes que olho para o rostinho dele sinto mais vontade de evoluir na vida. É por ele que tento ser melhor todos os dias.



## Resumo

Temos como objetivo central neste trabalho demonstrar o Teorema de Marden, que nos diz que, dado um polinômio de terceiro grau com coeficientes complexos, as raízes desse polinômio não são colineares e formam um triângulo  $T$  no plano complexo. Há uma única elipse inscrita em  $T$  e tangente aos lados nos seus pontos médios. Os focos dessa elipse são as raízes da derivada do polinômio. Mostramos que tal elipse é a Elipse de Steiner. Fazemos uma generalização do Teorema de Marden utilizando polinômio de grau  $n$ .

## Palavras-chave

Elipse de Steiner, Teorema de Marden, Generalização do Teorema de Marden, Polinômios com coeficientes complexos

## Abstract

The main objective of this work is to demonstrate Marden's Theorem, which tells us that given a third-degree polynomial with complex coefficients, the roots of this polynomial are not collinear and form a triangle  $T$  in the complex plane. There is a unique ellipse inscribed in  $T$  and tangent to the sides at their midpoints. The foci of this ellipse are the roots of the derivative of the polynomial. We show that such an ellipse is Steiner's Ellipse. We make a generalization of the Marden Theorem using degree  $n$  polynomial.

**Keywords** Steiner's Ellipse, Marden's Theorem, Generalization of Marden's Theorem, Polynomials with complex coefficients

# Lista de Figuras

2.1	Elipse . . . . .	17
2.2	Elipse com Focos no Eixo x . . . . .	18
2.3	Elipse com Focos no Eixo y . . . . .	19
2.4	Elipse com Centro Fora da Origem . . . . .	20
2.5	Plano Complexo . . . . .	23
2.6	Semelhança de Triângulos . . . . .	31
2.7	Caso LAL . . . . .	32
2.8	Caso ALA . . . . .	32
2.9	Caso LLL . . . . .	33
2.10	Projeção Ortogonal de um Ponto . . . . .	36
2.11	Projeção Ortogonal de uma Figura . . . . .	36
2.12	Projeção Ortogonal de uma Reta . . . . .	37
2.13	Projeção Ortogonal de um Segmento . . . . .	37
2.14	Projeção de Segmento . . . . .	38
2.15	Projeção de Segmentos Proporcionais . . . . .	39
2.16	Projeção de Retas Paralelas . . . . .	40
2.17	Projeção de Elipse em Circunferência . . . . .	41
2.18	Projeção de Área de Triângulo . . . . .	42
3.1	Elipse de Steiner . . . . .	44
3.2	Projeção da Elipse em um Triângulo . . . . .	46

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>16</b>
2.1	Elipses . . . . .	16
2.1.1	Equações . . . . .	17
2.2	Números Complexos . . . . .	20
2.2.1	História . . . . .	20
2.2.2	Forma algébrica . . . . .	21
2.2.3	A Forma Trigonométrica . . . . .	23
2.2.4	A Forma Exponencial do Número Complexo . . . . .	24
2.3	Equações Polinomiais . . . . .	25
2.3.1	Definição . . . . .	25
2.3.2	Operações Com Polinômios . . . . .	25
2.3.3	Teorema Fundamental da Álgebra e Suas Implicações . . . . .	27
2.4	Derivada . . . . .	29
2.4.1	Definição . . . . .	29
2.4.2	Derivada Polinomial . . . . .	29
2.5	Congruência de Triângulo . . . . .	31
2.5.1	Definição . . . . .	31
2.5.2	Casos de Congruência . . . . .	31
2.6	Médias . . . . .	33
2.6.1	Média Ponderada . . . . .	33
2.7	Centro de Massa . . . . .	34
2.7.1	Definição . . . . .	34
2.7.2	Centróide de um Polígono . . . . .	35

2.8	Projeção Ortogonal . . . . .	35
2.8.1	Propriedades da Projeção Ortogonal . . . . .	38
<b>3</b>	<b>O Teorema de Marden</b>	<b>44</b>
3.1	A Elipse de Steiner . . . . .	44
3.2	Teorema de Marden . . . . .	47
3.3	Uma Generalização do Teorema de Marden Usando Polinômio de Grau $n$	50
3.3.1	A Generalização . . . . .	50

# Capítulo 1

## Introdução

O Teorema de Rolle afirma que se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ ,  $f$  é derivável em  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$ , então, existe um  $x_o$  tal que  $f'(x_o) = 0$ . Neste trabalho falamos sobre uma extensão do Teorema de Rolle, o Teorema de Marden.

Considerando um polinômio  $p(x)$  de terceiro grau com coeficientes complexos e raízes não colineares no plano complexo. Unindo com segmentos os pontos que representam as raízes no plano complexo obtemos um triângulo T. Qual a relação geométrica entre  $p(x)$  e  $p'(x)$ ?

O objetivo deste trabalho é mostrar a validade do Teorema de Marden que diz que as raízes da derivada de  $p(x)$  são os focos da elipse que tangencia nos pontos médios de T, triângulo este formado pelas raízes do polinômio  $p(x)$ . A Elipse descrita é chamada de Elipse de Steiner.

Uma das possíveis generalizações do Teorema de Marden é quando se utiliza um polinômio de grau  $n$ . O que aconteceria se tivéssemos  $n$  raízes? E o que acontece com as raízes da derivada do polinômio de grau  $n$ ?

O Teorema de Marden pode ser trabalhado com alunos do ensino médio em forma de oficinas, uma vez que quase todos os pré-requisitos para o entendimento do Teorema são desenvolvidos nesse período.

O trabalho estrutura-se em dois capítulos, apresentando-se no primeiro os conceitos preliminares a serem utilizados para o entendimento do conceito da Elipse de Steiner e a demonstração do Teorema de Marden. Os conceitos preliminares abordam Elipse, Números Complexos, Equações Polinomiais, Derivada, Congruência de triângulos, Médias, Centro de Massa e Projeção Ortogonal. No capítulo seguinte fazemos uso da

condição de existência da Elipse de Steiner e a demonstração do Teorema de Marden. Ao final do capítulo abordamos uma das generalizações do Teorema de Marden usando polinômio de grau  $n$ .

# Capítulo 2

## Preliminares

Esse capítulo trata sobre elipses e suas definições, o conceito de números complexos, definição e propriedades de equações polinomiais. Definimos também derivada e a aplicação nos polinômios, mencionaremos dos casos de congruências de triângulos, do conceito de médias e de centro de massa e finalizamos com o conceito de projeções. Exemplos são usados sempre que necessário.

### 2.1 Elipses

Elipse é o conjunto de pontos pertencentes a um mesmo plano  $\alpha$  cuja a distância a dois pontos fixos é constante, e essa distância é dada por  $2a$ .

Esses pontos fixos serão os focos ( $F_1$  e  $F_2$ ).

A distância entre os dois focos também é fixa e dada por  $2c$ , com  $c > 0$  e  $2a > 2c$ .

Então,

$$E = \{P \in \alpha \mid PF_1 + PF_2 = 2a\}.$$

Onde, tem como elementos principais:

- $F_1$  e  $F_2$  : focos
- $O$ : centro
- $A_1A_2$ : eixo maior



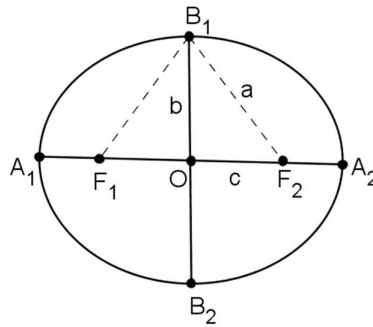


Figura 2.1: Elipse

- $B_1B_2$ : eixo menor
- $2c$ : distância focal
- $2a$ : medida do eixo maior
- $2b$ : medida do eixo menor
- $\frac{c}{a}$ : excentricidade

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $B_1OF_1$ :  $a^2 = b^2 + c^2$ .

### 2.1.1 Equações

Analisando os seguintes caso:

1º caso - Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo x:

Pela definição tem se que  $PF_1 + PF_2 = 2a$ , e é evidente que os focos são os pontos:  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Assim,

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Equivalentemente, tem se

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

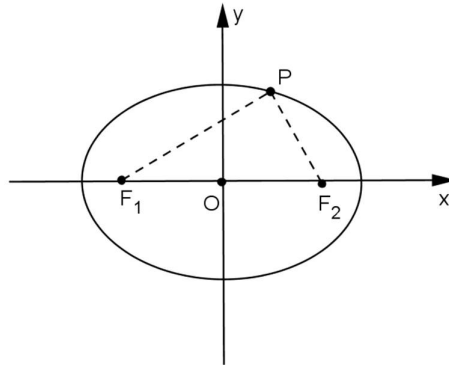


Figura 2.2: Elipse com Focos no Eixo x

Elevando os dois lados ao quadrado e fazendo os desenvolvimentos necessários, obtemos

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando novamente os dois lados ao quadrado e desenvolvendo, tem-se

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (2.1)$$

Mas como,  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$ .

Voltando, em (2.1), tem se:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os lados por  $a^2b^2$ , encontra-se a equação reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2º caso: Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo y:

Tomando agora os focos como:  $F_1(0, -c)$  e  $F_2(0, c)$ .

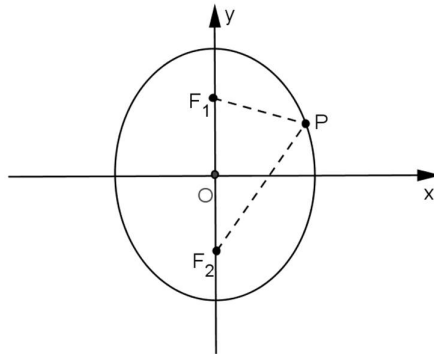


Figura 2.3: Elipse com Focos no Eixo y

Então, para que:  $PF_1 + PF_2 = 2a$ , tem-se que

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = 2a$$

e, repetindo o raciocínio anterior, encontramos

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

3º caso: Elipse com centro fora da origem

Considerando uma elipse com o centro fora da origem e os focos  $F_1(c, d)$  e  $F_2(e, f)$  fora dos eixos  $x$  e  $y$ . Escolhendo um ponto  $P(x, y)$  da elipse, pela definição temos

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Logo,

$$\sqrt{(c - x)^2 + (d - y)^2} + \sqrt{(e - x)^2 + (f - y)^2} = 2a$$

Fazendo os desenvolvimentos necessários, chegamos na seguinte expressão:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

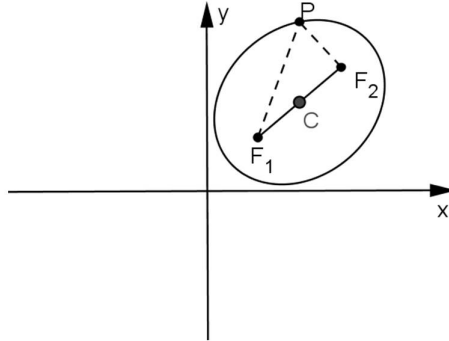


Figura 2.4: Elipse com Centro Fora da Origem

,

onde

- $A = (4c^2 + 4e^2 - 8ce - 16a^2)$ ;
- $B = (4d^2 + 4f^2 - 8df - 16a^2)$ ;
- $C = (8cd + 8ef)$ ;
- $D = (-4c^3 - 4e^3 - 4cd^2 + 4ec^2 + 4cf^2 + 4ed^2 - 4ef^2 + 16ea^2 + 16ca^2)$ ;
- $E = (-4d^3 - 4f^3 - 4dc^2 + 4fc^2 + 4de^2 + 4fd^2 + 4df^2 - 4fe^2 + 16da^2 + 16fa^2)$ ;
- $F = (c^4 + d^4 + e^4 + f^4 + 16a^4 + 2c^2d^2 - 2c^2e^2 - 2c^2f^2 - 2d^2e^2 - 2d^2f^2 + 2e^2f^2 - 8a^2c^2 - 8a^2d^2 - 8a^2e^2 - 8a^2f^2)$ .

## 2.2 Números Complexos

### 2.2.1 História

O conceito de números complexos levou cerca de 300 anos para se confirmarem da forma que são estudados atualmente. Tudo se iniciou com Spicione del Ferro e Tartaglia (1500-1557). Girolamo Cardano (1501 - 1576) descobriu que Tartaglia conseguiu

desenvolver uma técnica para resolução de equação de 3º grau e foi atrás dele até conseguir que Tartaglia o passasse a fórmula sob a promessa de não divulgá-la. Cardano não cumpriu sua promessa e publicou em seu livro "Ars Magna"(A Grande Arte) em 1545, mencionando Tartaglia, que ainda assim alimentou uma inimizade profunda por Cardano.

A fórmula apresentada por Tartaglia afirmava que a solução de  $x^3 + px + q = 0$  era dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

O que realmente intrigava, era que algumas equações teriam raízes quadradas de números negativos envolvido, como é o caso da equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ .

Aplicando na *Fórmula de Tartaglia*:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Cardano trabalhou com os radicandos negativos "como se fossem números" e anos depois Rafael Bombelli (1526 - 1572) experimentou escrever as expressões  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  na forma  $a + \sqrt{-b}$  e  $a - \sqrt{-b}$ , respectivamente. Nessa expressão, consideramos  $a = 2$  e  $b = 1$ , reescrevemos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

No início, os números complexos eram considerados artifícios matemáticos para resolver raízes negativas. Só quando Gauss (1787 - 1855) apresentou a interpretação geométrica dos números complexos é que foram admitidos como números e passam a ser aplicados livremente e sem desconfortos.

### 2.2.2 Forma algébrica

O conjunto dos números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais. Todo número complexo pode ser escrito na forma  $z = x + yi$ , onde  $x$  é a parte real e  $y$  é a parte imaginária. O número complexo pode ser representado também pelo ponto  $(x, y)$ . Para a representação geométrica é usado o plano de Argand - Gauss no lugar

do plano cartesiano. A parte real é representada pelo eixo  $x$  e a parte imaginária é representada pelo eixo  $y$ .

## Operações na Forma Algébrica

### Adição e Subtração

Temos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ . Definimos  $z_1 + z_2$  por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Analogamente, definimos  $z_1 - z_2$  por:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

### Multiplicação

Dados  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ . A maneira mais prática de escrever a multiplicação de complexos é usando os números na forma algébrica, assim  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Tem-se

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2. \end{aligned}$$

Mas, como  $i^2 = -1$ , obtemos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + ix_2y_1). \end{aligned}$$

O *conjugado* do complexo  $z = x + iy$  é como o número complexo  $\bar{z} = x - iy$ . Geometricamente falando, os afixos  $z$  e  $\bar{z}$  são pontos simétricos em relação ao eixo real. E o produto entre  $z$  e  $\bar{z}$  é um número real. Vejamos:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - xyi + xyi - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

### Divisão

Tomando  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  a divisão entre  $z_1$  e  $z_2$ , com  $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

é obtida multiplicando o numerador e denominador pelo conjugado de  $z_2$ . Isto é

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 - x_2y_2) + i(-x_1x_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + iy_2^2}$$

### 2.2.3 A Forma Trigonométrica

Seja  $z = x + iy$  um número complexo. A *imagem geométrica*, chamada também de *afixo*, é o ponto  $P(x, y)$ . A partir do afixo temos o vetor  $\overrightarrow{OP}(x, y)$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo abaixo, temos

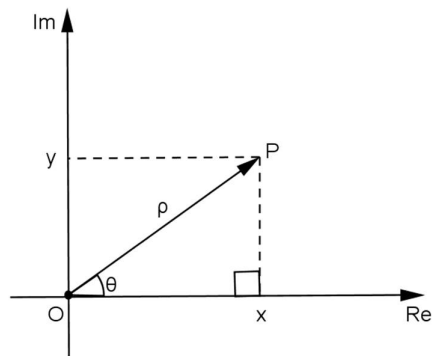


Figura 2.5: Plano Complexo

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observando ainda o triângulo formado, temos o ângulo  $\theta$ , que recebe o nome de argumento principal de  $z$ . E ainda pode-se concluir que:

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin \theta$$

e

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos \theta$$

Assim, substituindo tais valores na forma algébrica, obtemos

$$z = x + iy$$

$$z = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

que é chamada de *forma trigonométrica* de um número complexo.

## 2.2.4 A Forma Exponencial do Número Complexo

Os números complexos podem ser apresentados ainda em uma forma exponencial, que é decorrente da fórmula de Euler.

Vamos expandir

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

em série de MacLaurin e usando  $x = i\theta$ :

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots$$

Reagrupando, obtemos

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)$$

Isto é

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\theta)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (2.2)$$

De acordo com as série de MacLaurin, temos

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

e

$$\text{cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}.$$

Podemos reconhecê-las em (2.2). Assim,

$$e^{i\theta} = \text{cos}\theta + i\text{sen}\theta.$$



## 2.3 Equações Polinomiais

### 2.3.1 Definição

Considere uma função polinomial  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  para todo  $x \in \mathbb{C}$  tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0$$

onde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  são números complexos chamados *coeficientes* da função polinomial. Como a cada polinômio está associado uma única função e, reciprocamente, a cada função está associado um único polinômio, podemos usar tanto o termo polinômio como o termo função polinomial.

Quando  $a_n \neq 0$ , dizemos que o polinômio tem grau  $n$ . Seja  $\alpha \in \mathbb{C}$ , dizemos que  $\alpha$  é a *raiz* de  $p$  quando  $p(\alpha) = 0$ .

O polinômio nulo é aquele em que todos os coeficientes são iguais a zero, nesse caso o polinômio não tem grau. Considerando duas funções polinomiais  $p(x)$  e  $q(x)$ , dizemos que se  $p(x)$  e  $q(x)$  são iguais quando para todo valor de  $x$  tem-se  $p(x) = q(x)$ .

### 2.3.2 Operações Com Polinômios

#### Adição e Subtração

As técnicas para adição e subtração envolvem redução de termos semelhantes e multiplicação de sinais, como mostramos nos exemplos:

**Exemplo 1.** Dados os polinômios  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$  e  $g(x) = -x^2 + x - 4$ , calcule  $f(x) + g(x)$ .

$$f(x) + g(x) = (2x^2 - 3x + 4) + (-x^2 + x - 4) = 2x^2 - 3x + 4 - x^2 + x - 4 = x^2 - 2x.$$

Observe que a soma de dois polinômios é o polinômio obtido quando somam-se os coeficientes dos termos semelhantes dos polinômios.

**Exemplo 2.** Dados os polinômios  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$  e  $g(x) = -x^2 + x - 4$ , vamos obter  $f(x) - g(x)$ .

$$f(x) - g(x) = (2x^2 - 3x + 4) - (-x^2 + x - 4) = 2x^2 - 3x + 4 + x^2 - x + 4 = 3x^2 - 4x + 8.$$

A diferença entre os polinômios  $f$  e  $g$  é o polinômio obtido quando somamos  $f$  ao oposto  $g$ , isto é,  $f - g = f + (-g)$ .

### Multiplificação

Na multiplicação de polinômios aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a soma, como é mostrado no exemplo a seguir:

**Exemplo 3.** Dados os polinômios  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$  e  $h(x) = 3x - 5$ , vamos obter  $f(x).h(x)$ . Assim,

$$f(x).h(x) = (2x^2 - 3x + 4).(3x - 5) = 6x^3 - 10x^2 - 9x^2 + 15x + 12x - 20 = 6x^3 - 19x^2 + 27x - 20.$$

O produto dos polinômios  $f$  e  $h$  resulta no polinômio quando multiplicamos cada um dos termos de  $f$  por todos os termos de  $h$  e somamos os termos semelhantes encontrados.

### Divisão

A operação de divisão é composta pelo dividendo, divisor, quociente e resto. O mesmo se aplica na divisão entre dois polinômios. Dividindo  $p(x)$  por  $g(x)$ , com  $g(x) \neq 0$ , obtem-se o quociente  $q(x)$  e o resto  $r(x)$ . Se  $r(x) = 0$  implica que  $g(x)$  é um divisor de  $p(x)$ . Caso  $r(x) \neq 0$  temos que  $r(x)$  é um número real ou  $r(x)$  é um polinômio de grau menor que o grau de  $g(x)$ .

Pela definição de divisão, podemos escrever os polinômios como

$$p(x) = g(x).q(x) + r(x)$$

**Exemplo 4.** Sendo  $p(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 2x + 1$  e  $g(x) = x^2 - x + 1$ , fazendo a divisão de  $p(x)$  por  $g(x)$ , obtemos

$$(3x^4 - x^3 + 4x^2 - 2x + 1) = (x^2 - x + 1)(3x^2 + 2x + 3) + (-x - 2)$$

onde

$$q(x) = 3x^2 + 2x + 3$$

e

$$r(x) = -x - 2.$$

Um caso particular importante na divisão de polinômios é aquele em que o divisor é um polinômio de 1º grau do tipo  $(x - a)$ . Se  $a$  for uma raiz do polinômio  $p(x)$ , temos que  $p(x)$  é divisível por  $(x - a)$ . Neste caso podemos utilizar o teorema do resto:

**Teorema 1.** *O resto da divisão de um polinômio  $p(x)$  por  $(x - a)$  é igual a  $p(a)$ .*

*Demonstração.* Da divisão de  $p(x)$  por  $(x - a)$ , podemos escrever

$$p(x) = (x - a).q(x) + r(x),$$

em que  $r(x) = r$  é um polinômio constante, pois  $r(x)$  tem grau zero ou  $r(x)$  é nulo.

Calculando os valores desse polinômio em que  $x = a$ , temos

$$p(a) = (a - a).q(a) + r(a)$$

$$p(a) = 0.q(a) + r(a)$$

$$p(a) = r(a).$$

□

Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0$  um polinômio de grau  $n$  e  $g(x) = x - a$ . Quando dividimos  $p(x)$  por  $g(x)$  obtemos um polinômio

$$q(x) = q_{n-1} x^n - 1 + q_{+n} - 2x^{n-2} + \dots + q_1 x + q_0.$$

### 2.3.3 Teorema Fundamental da Álgebra e Suas Implicações

**Teorema 2.** *Seja  $p(x)$  um polinômio de grau  $n > 0$ . Há, então, um número complexo  $r$ , tal que  $p(r) = 0$ .*

A demonstração do Teorema será indicado na bibliografia 1. Neste trabalho, usamos o Teorema enunciado acima para demonstrar o Teorema da Decomposição de um Polinômio.

#### Teorema da Decomposição de um Polinômio

**Teorema 3.** *Qualquer polinômio pode ser decomposto em fatores de primeiro grau.*

*Demonstração.* Seja  $p(x)$  um polinômio de grau  $n$ ,  $n > 1$ , dado por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que esse polinômio tem pelo menos uma raiz complexa. Assim,  $p(r_1) = 0$ , ou seja,  $p(x)$  é divisível por  $(x - r_1)$ .

Então,  $p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x)$  em que  $q_1(x)$  é um polinômio de grau  $n - 1$  e coeficiente dominante  $a_n$ .

- se  $n = 1$ , então  $q_1(x)$  é um polinômio de grau  $1 - 1 = 0$ , ou seja,  $q_1(x) = a_n$ , ou seja, podemos escrever  $p(x) = (x - r_1) \cdot a_n$ .
- se  $n \geq 2$ , então  $n - 1 \geq 1$ . Assim podemos aplicar o Teorema Fundamental da Álgebra novamente ao polinômio  $q_1(x)$ , isto é,  $q_1(x)$  tem pelo menos uma raiz complexa  $r_2$ . Assim,  $q_1(r_2) = 0$  e  $q_1(x)$  é divisível por  $x - r_2$ . Isto é,

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x).$$

Substituindo em  $p(x)$ , temos:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x).$$

- se  $n = 2$ ,  $q_2(x)$  é um polinômio de grau 0, dado por  $q_2(x) = a_n$ . Daí,

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2).$$

- Aplicando sucessivamente  $n$  vezes o Teorema Fundamental da Álgebra, obtemos

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n).$$

□

Chamamos este teorema então de *Teorema da Decomposição*, em que  $r_1, r_2, \dots, r_n$  são raízes de  $p(x)$  e  $a_n$  é o coeficiente dominante de  $p(x)$ . E, com exceção da ordem dos fatores da multiplicação, a decomposição de  $p(x)$  em termos de suas raízes é única.

Como consequência do Teorema da Decomposição, temos que toda equação polinomial de grau  $n, n \geq 1$ , admite exatamente  $n$  raízes complexas, porém, não implica necessariamente que  $p$  tem  $n$  raízes distintas. Pode haver repetições de fatores na decomposição de  $p(x)$ . Agrupando esses fatores, reescrevemos  $p(x)$  por

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{\alpha_1}(x - r_2)^{\alpha_2} \dots (x - r_m)^{\alpha_n}$$

onde,  $r_1, r_2, \dots, r_m$  são raízes de  $p$  e os expoente  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , satisfazem  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = n$ . O expoente de cada termo do 1º grau é chamado de *multiplicidade* da raiz correspondente. Quando  $\alpha = 1$ , dizemos que  $r$  é *raiz simples*, se  $\alpha = 2$ ,  $r$  é chamada de *raiz dupla* e assim por diante. Note que um número complexo  $r$  é raiz de multiplicidade  $\alpha$  de  $p$ , se e somente se,  $p(x)$  é divisível por  $(x - r)^\alpha$  e não é divisível por  $(x - r)^{\alpha+1}$ .

## 2.4 Derivada

Por definição, a derivada está ligada à taxa de variação instantânea de uma função. Um exemplo típico é a função velocidade, que apresenta taxa de variação da função espaço.

### 2.4.1 Definição

Pela definição matemática, temos:

Se uma função  $f$  é definida em um intervalo aberto contendo  $x_0$ , então a derivada de  $f$  em  $x_0$ , denotada por  $f'(x_0)$  é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

se esse limite existir. A aplicação da fórmula não é trivial em todos os casos. Neste trabalho usamos apenas a derivação de polinômios.

### 2.4.2 Derivada Polinomial

Demonstrando a derivada de  $f(x) = x^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} \cdot h^i - x^n}{h}$$

Como para  $i = 0$ , tem-se  $\binom{n}{i} x^{n-i} \cdot h^i = x^n$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} \cdot h^i}{h}.$$

Desenvolvendo a somatória, todos os termos tem no mínimo um  $h$ , logo podemos fatorar  $h$  e obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} \cdot h^{i-1}}{h}.$$

Então:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} \cdot h^{i-1}.$$

Desenvolvendo a somatória, tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right].$$

Aplicando o limite, obtemos

$$f'(x) = \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot 0 + \binom{n}{3} x^{n-3} \cdot 0^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 0^{n-1}.$$

Isto é

$$f'(x) = \binom{n}{1} x^{n-1}.$$

Como  $\binom{n}{1} = n$ , concluímos que

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Considerando polinômios com dois termos ou mais, basta aplicar a propriedade do limite da soma que diz que o limite das somas é a soma dos limites. O mesmo vale para diferença. Isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**Exemplo 5.** *Considerando*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x,$$

*temos*

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1.$$

## 2.5 Congruência de Triângulo

### 2.5.1 Definição

Um triângulo é *congruente* ( $\equiv$ ) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro.
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

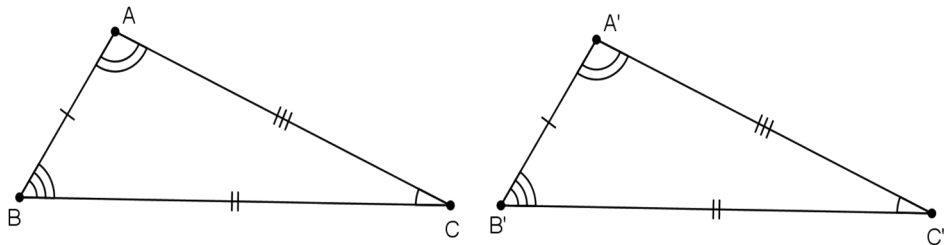


Figura 2.6: Semelhança de Triângulos

A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

### 2.5.2 Casos de Congruência

De acordo com a definição, conferimos 6 relações: congruências dos três pares de lados e dos três pares de ângulos. Porém, existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados casos de congruência.

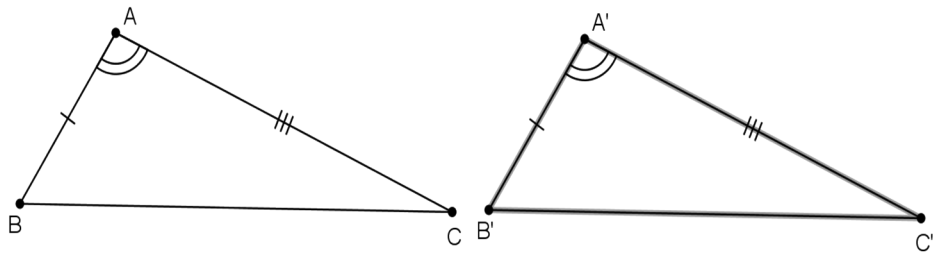


Figura 2.7: Caso LAL

- 1º caso: LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Se dois triângulos tem dois lados congruentes e o lado compreendido entre eles congruentes, então os triângulos são congruentes.

Ou seja, se  $AB \equiv A'B'$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $AC \equiv A'C'$  podemos concluir que pelo caso LAL o  $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ .

- 2º Caso: ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)

Se dois triângulos tem dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles congruente, então os triângulos são congruentes.

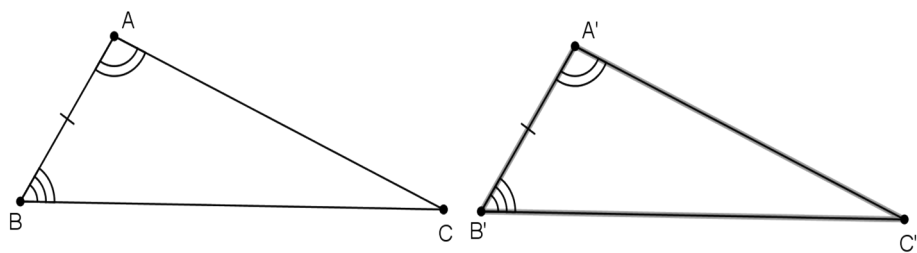


Figura 2.8: Caso ALA

- 3º: LLL (Lado-Lado-Lado)

Se dois triângulos tem três pares de lados congruentes, então os triângulos são congruentes.



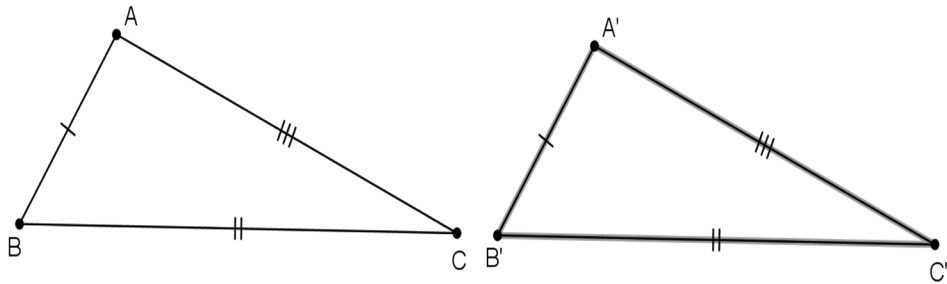


Figura 2.9: Caso LLL

## 2.6 Médias

### 2.6.1 Média Ponderada

A média aritmética é usada em diversas situações do nosso cotidiano, como média de notas escolares, em pesquisas estatísticas, em campeonatos de futebol para se calcular a média de gols por rodada e etc.

Na média aritmética simples todos os valores possuem o mesmo peso, logo a média é calculada somando todos os valores e dividindo-se o resultado pelo número de termos que teve na somatória. Isto é,

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Na média aritmética ponderada os valores possuem pesos diferentes. Assim a média é calculada através do somatório da multiplicação dos termos por seus respectivos pesos e dividido pelo somatório dos pesos. Ou seja,

$$M = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

Observamos agora alguns exemplos:

**Exemplo 6.** *Um jogador de vôlei anotou os pontos feitos por ele em 4 partidas jogadas, e as anotações foram 8, 12, 13 e 19 pontos respectivamente. Sendo assim, calcule a média de pontos marcados por ele nessas partidas.*

$$M = \frac{8 + 12 + 13 + 19}{4} = \frac{52}{4} = 13.$$

Assim, a média de pontos que esse jogador fez foi de 13 pontos por partida.

**Exemplo 7.** Uma empresa tem 20 funcionários, sendo que 10 deles recebem R\$ 800,00 mensais, 4 recebem R\$ 1000,00 mensais, 3 recebem R\$ 1200,00 e os outros 3 recebem R\$ 1500,00. Qual o salário médio dos funcionários dessa empresa?

$$M = \frac{10.800 + 4.1000 + 3.1200 + 3.1500}{20} = \frac{8000 + 4000 + 3600 + 4500}{20}$$

$$M = \frac{20100}{20} = 1005$$

Logo o salário médio dos funcionários dessa empresa é R\$ 1005,00 mensais.

## 2.7 Centro de Massa

### 2.7.1 Definição

O centro de massa de um corpo é um ponto que se comporta como se toda a massa do corpo se concentrasse sobre ele. O cálculo do centro de massa é feito pela média ponderada das posições tendo as massas como peso.

Considere um sistema de pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  e de massas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , respectivamente. Todos os pontos pertencem a um plano  $\alpha$ . Os pontos são dados por

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), \dots, P_n(x_n, y_n).$$

O centro de massa é o ponto  $C$  de coordenadas  $(x_c, y_c)$  obtidas através das médias ponderadas

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

e

$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

## 2.7.2 Centróide de um Polígono

A centróide é um conceito puramente geométrico.

A centróide é o ponto no interior de uma figura geométrica que define o centro geométrico. Se a figura geométrica possui um corpo de densidade uniforme então a centróide coincide com o centro de massa. Se a figura geométrica está submetida a um campo gravitacional então o ponto coincide com o centro de gravidade.

A centróide de um polígono fechado, não sobreposto e definido por  $n$  vértices, pode ser calculado utilizando uma fórmula que recebe as coordenadas dos vértices e sua área. Portanto para calcular a centróide pela fórmula dada é preciso calcular a área do polígono.

Considerando um polígono feito com segmentos de reta entre  $n$  vértices  $(x_i, y_i)$ , com  $0 < i < (n - 1)$ . O último vértice  $(x_n, y_n)$  coincide com o primeiro  $(x_0, y_0)$ , ou seja, o polígono é fechado.

A área deste polígono é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

O sinal da área pode ser usado para determinar a ordem dos vértices. Se o sinal é positivo, significa que os vértices estão ordenados no sentido anti-horário e se o sinal é negativo os vértices estão ordenados no sentido horário.

## 2.8 Projeção Ortogonal

A seguir, damos as definições das projeções de um ponto, de uma reta, de uma figura e de um segmento. Em seguida mostramos as propriedades dessas projeções.

### Projeção Ortogonal de um Ponto

**Definição 1.** *Chama-se projeção ortogonal de um ponto  $P$  sobre um plano  $\alpha$  o pé da perpendicular  $P'$  ao plano conduzida pelo ponto  $P$ . O plano  $\alpha$  é chamado de plano de projeção e a reta perpendicular a  $\alpha$  passando por  $P$  e  $P'$  é chamada de projetante do ponto  $P$ .*

Para representar a projeção  $P'$  do ponto  $P$  no plano  $\alpha$  de projeção, usamos a notação  $P' = \text{proj}_\alpha P$ . Conforme a Figura 2.10.

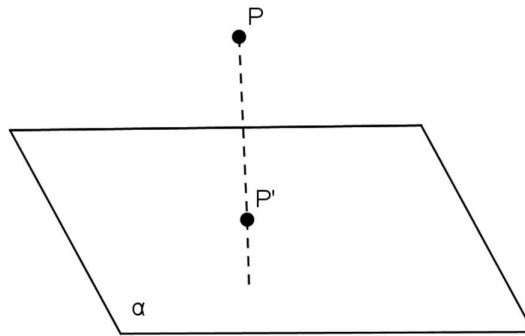


Figura 2.10: Projeção Ortogonal de um Ponto

### Projeção Ortogonal de uma Figura

**Definição 2.** *Chama-se projeção ortogonal de uma figura  $F$  sobre um plano  $\alpha$  ao conjunto de todas as projeções ortogonais dos pontos que compõem a figura  $F$ .*

Para representar a projeção  $F'$  da figura  $F$  no plano  $\alpha$  de projeção, usaremos a notação  $F' = \text{proj}_\alpha F$ . Conforme a Figura 2.11.

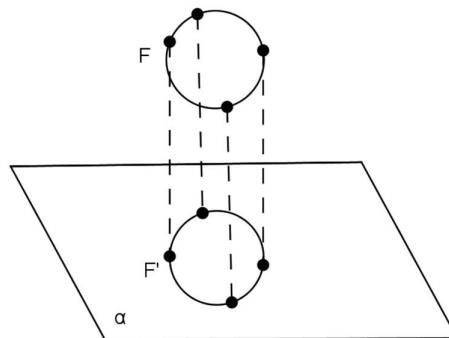


Figura 2.11: Projeção Ortogonal de uma Figura

### Projeção Ortogonal de uma Reta

**Definição 3.** *Chama-se projeção ortogonal de uma reta  $r$  não-perpendicular ao plano  $\alpha$ , o traço em  $\alpha$  provocado por um plano  $\beta$  perpendicular a  $\alpha$  que contém a reta  $r$ .*

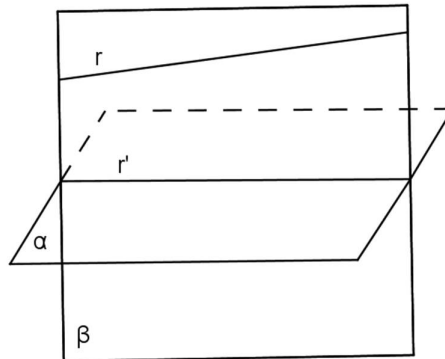


Figura 2.12: Projeção Ortogonal de uma Reta

Para representar a projeção  $r'$  da reta  $r$  no plano  $\alpha$  de projeção, usamos a notação  $r' = \text{proj}_\alpha r$ . Conforme a Figura 2.12.

### Projeção Ortogonal de um Segmento

**Definição 4.** Chama-se projeção ortogonal sobre um plano  $\alpha$  de um segmento  $\overline{AB}$ , contido numa reta  $r$  não-perpendicular ao plano  $\alpha$ , ao segmento  $\overline{A'B'}$  contido em  $\alpha$ , onde  $A' = \text{proj}_\alpha A$  e  $B' = \text{proj}_\alpha B$ .

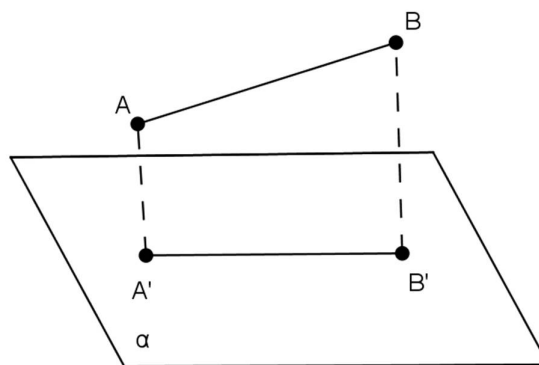


Figura 2.13: Projeção Ortogonal de um Segmento

Para representar a projeção  $\overline{A'B'}$  do segmento  $\overline{AB}$  no plano  $\alpha$  de projeção, usamos

a notação  $\overline{A'B'} = \text{proj}_\alpha \overline{AB}$ . Conforme a Figura 2.13.

### 2.8.1 Propriedades da Projeção Ortogonal

As propriedades sobre projeção ortogonal são apresentadas através de proposições que são justificadas utilizando as definições já apresentadas.

**Proposição 1.** *Seja  $\overline{A'B'}$  a projeção ortogonal do segmento  $\overline{AB}$  em um plano  $\alpha$ . Se  $\theta$  é o ângulo entre a reta que contém  $\overline{AB}$  e o plano  $\alpha$ , então  $\overline{A'B'} = \cos(\theta)\overline{AB}$ . Em particular, se  $\overline{AB}$  é paralelo a  $\alpha$ , então  $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ .*

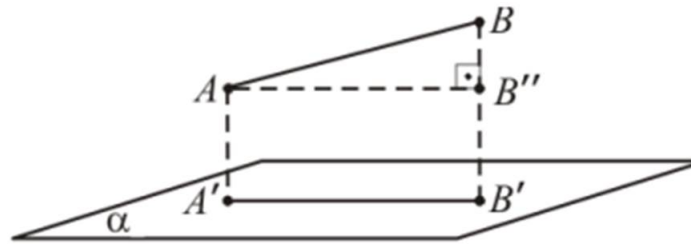


Figura 2.14: Projeção de Segmento

*Demonstração.* Traçamos passando por  $A$  uma reta paralela ao segmento  $\overline{A'B'}$ , interceptando a reta projetante de  $B$  em  $B''$ , temos que  $AA'B'B''$  é um retângulo.

Temos que,  $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$ .

Já o triângulo  $ABB''$  é retângulo em  $B''$  e o ângulo  $\hat{A} = \theta$ , então

$$\cos(\theta) = \frac{AB''}{AB} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow A'B' = \cos(\theta).AB.$$

Agora, se  $A'B'$  é paralelo a  $\alpha$  então  $\theta = 0$ . Substituindo na equação acima, temos:

$$A'B' = \cos(0).AB \Rightarrow A'B' = AB.$$

□

**Proposição 2.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos de uma reta  $r$ ,  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  projeções ortogonais dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  sobre um plano  $\alpha$ , e seja  $\theta$  o ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$ . Então  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ .*

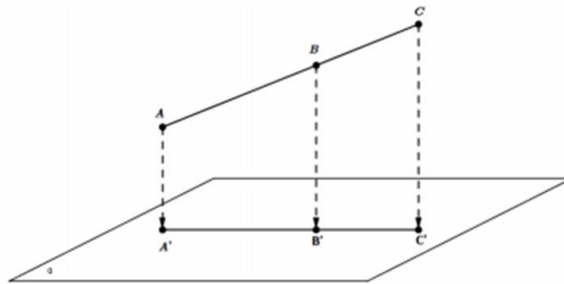


Figura 2.15: Projeção de Segmentos Proporcionais

*Demonstração.* Temos por hipótese que a reta que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$  faz um ângulo  $\theta$  com a reta que passa por  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Sabemos também que  $A' = Proj_{\alpha}A$ , logo  $\overline{AA'}$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , do mesmo modo  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  são ortogonais ao plano  $\alpha$ , de onde concluímos que  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  são segmentos paralelos. Logo, pelo *Teorema de Tales* chegamos que:  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ . □

**Proposição 3.** *Sejam  $r'$  e  $s'$  projeções ortogonais de duas retas  $r$  e  $s$  em um plano  $\alpha$ . Se  $r$  é a paralela a  $s$ , então  $r'$  é a paralela a  $s'$ .*

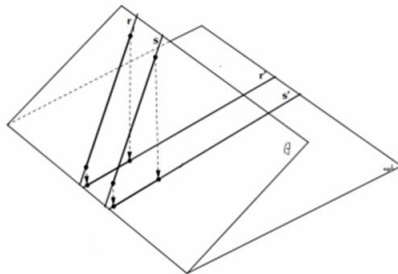


Figura 2.16: Projeção de Retas Paralelas

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  pontos sobre  $r$ . Considere também  $C$  e  $D$  pontos sobre  $s$ , de modo que  $\overline{AC}$  seja ortogonal a  $r$  e  $s$ , e  $\overline{BD}$  também sejam ortogonal a  $r$  e  $s$ . Como  $r$  é paralela a  $s$  então  $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = 1$ . Considere  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  projeções ortogonais sobre o plano  $\alpha$  de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sobre  $r'$  e  $s'$ , respectivamente. Temos pela proposição anterior que

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = 1.$$

Logo,  $r'$  e  $s'$  são paralelas. □

**Proposição 4.** *Dada uma elipse qualquer, sempre é possível fazer uma projeção ortogonal do plano da elipse em um outro plano, de modo que a elipse seja projetada em uma circunferência.*

*Demonstração.* Seja  $\beta$  o plano que contém a elipse  $\epsilon$ , e seja  $\alpha$  o plano onde queremos projetar ortogonalmente a elipse na circunferência  $c$ .

Tracemos pelo vértice  $A_1$  da elipse uma reta  $i$  paralela ao eixo  $B_1B_2$ . Agora basta traçar o plano  $\alpha$  de modo que o ângulo  $\theta$  entre  $\alpha$  e  $\beta$  seja tal que  $\cos(\theta) = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$ . Desse modo pela proposição 1  $\cos(\theta) \cdot A_1A_2 \equiv R$  e  $B_1B_2 \equiv R$ . E isso demonstra a proposição. □



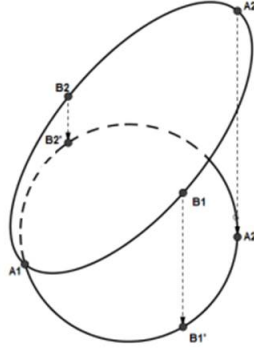


Figura 2.17: Projeção de Elipse em Circunferência

**Proposição 5.** *Seja o triângulo  $T$  de vértices  $A, B$  e  $C$  contido em um plano  $\beta$ , e seja  $T'$  de vértices  $A', B'$  e  $C'$  a projeção ortogonal do triângulo  $T$  em um plano  $\alpha$ . Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  então  $A[T'] = \cos(\theta)A[T]$ . Onde  $A[T]$  é a área do triângulo  $T$  e  $A[T']$  é a área do triângulo  $T'$ .*

*Demonstração.* Considere, sem perda de generalidade, que a reta  $i$  de intersecção entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  passe pelo vértice  $A$  do triângulo  $T$ , desse modo  $A \equiv A'$ . Sejam  $O$  e  $P$  pontos sobre  $i$  de maneira que  $BO$  e  $CP$  sejam perpendiculares a  $i$ , isto implica que  $B'O$  e  $C'P$  também são perpendiculares a  $i$ .

Segue que:

$$A[T] = A[OPBC] - A[ABO] - A[ACP].$$

Agora, como os triângulos  $ABO$  e  $ACP$  são retângulos e  $OPBC$  é um trapézio temos que

$$A[T] = \frac{(OB + PC) \cdot OP}{2} - \frac{OB \cdot OA}{2} - \frac{PC \cdot PA}{2}.$$

De maneira análoga,

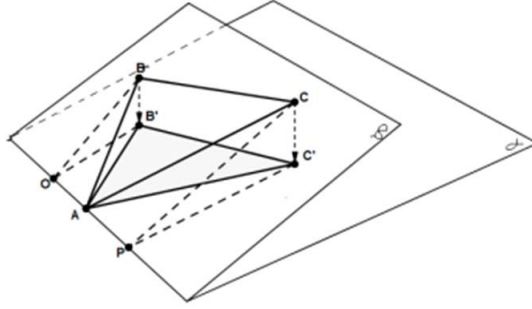


Figura 2.18: Projeção de Área de Triângulo

$$A[T'] = \frac{(OB' + PC').OP}{2} - \frac{OB'.OA}{2} - \frac{PC'.PA}{2}$$

De onde:

$$A[T'] = \frac{(\cos(\theta)OB + \cos(\theta)PC).OP}{2} - \frac{\cos(\theta)OB.OA}{2} - \frac{\cos(\theta)PC.PA}{2} \Rightarrow$$

$$A[T'] = \cos(\theta). \left( \frac{(OB + PC).OP}{2} - \frac{OB.OA}{2} - \frac{PC.PA}{2} \right) = \cos(\theta).A[T].$$

□

**Proposição 6.** *Seja  $\varepsilon$  uma elipse de eixos  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$ , com  $A_1A_2 > B_1B_2$ , contida em um plano  $\beta$ , e seja  $c$  uma circunferência que é a projeção ortogonal da elipse  $\varepsilon$  em um plano  $\alpha$ . Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  então  $A[c] = \cos(\theta).A[\varepsilon]$ . Onde  $A[c]$  é a área da circunferência  $c$  e  $A[\varepsilon]$  é a área da elipse  $\varepsilon$ .*

*Demonstração.* Considere, sem perda de generalidade, que a reta  $i$  de intersecção entre os planos  $\alpha$  que contém a elipse e  $\beta$  que contém a projeção ortogonal da elipse e que passe pelo vértice  $A_1$  da elipse, desse modo  $A_1 \equiv A'_1$ . Temos pela proposição da

projeção da elipse em um círculo que  $r = B_1 B_2 = \cos(\theta) \cdot A_1 A_2$ . Logo, das fórmulas das áreas da circunferência e da elipse, temos que

$$A[c] = \pi r^2 = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cos(\theta) \cdot A_1 A_2 \cdot B_1 B_2 = \cos(\theta) \cdot (\pi A_1 A_2 B_1 \cdot B_2) = \cos(\theta) \cdot A[\varepsilon].$$

□

# Capítulo 3

## O Teorema de Marden

Neste capítulo demonstraremos o Teorema de Marden utilizando a Elipse de Steiner. Por fim, apresentamos uma das generalizações do Teorema.

### 3.1 A Elipse de Steiner

Antes de provar o Teorema de Marden, exploraremos sobre a Elipse de Steiner.

A elipse inscrita de Steiner em um triângulo é a única elipse inscrita no triângulo que é tangente aos lados em seus pontos médios. Considere que essa elipse sempre existe e é única.

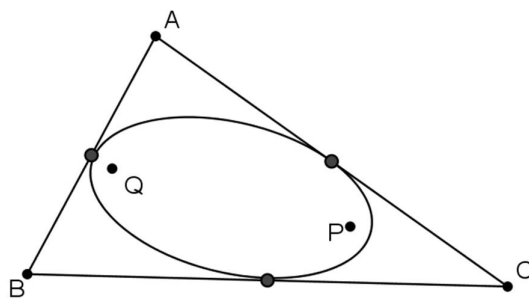


Figura 3.1: Elipse de Steiner

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices de um triângulo  $T$  e  $P$  e  $Q$  focos de uma elipse ( $\varepsilon$ ) inscrita ao triângulo  $T$ . Então, ( $\varepsilon$ ) é uma Elipse de Steiner se, e somente se,

$$\frac{\overline{PA} \cdot \overline{QA}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{PB} \cdot \overline{QB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{PC} \cdot \overline{QC}}{\overline{AC} \cdot \overline{BC}} = 1 \quad (3.1)$$

Para demonstrar 3.1 usamos a proposição 4 que afirma que existe uma projeção ortogonal que leva a elipse  $\varepsilon$  em um círculo  $c$ .

Desta proposição temos que o círculo  $c$  está inscrito em um triângulo  $T'$  de vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ .

Seja  $\theta$  ângulo entre o plano  $\beta$  que contém a elipse e o plano  $\alpha$  que contém o círculo, e sejam  $A[\varepsilon]$  a área da elipse,  $A[c]$  a área do círculo,  $A[T]$  a área do triângulo  $ABC$  e  $A[T']$  a área do triângulo  $A'B'C'$ .

Pela Proposição 6, temos:

$$A[\varepsilon] = \cos(\theta).A[c] \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{A[\varepsilon]}{A[c]}.$$

Já pela Proposição 5, obtemos

$$A[T] = \cos(\theta).A[T'] \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{A[T]}{A[T']}.$$

Igualando estas duas expressões, tem-se

$$\frac{A[\varepsilon]}{A[c]} = \frac{A[T]}{A[T']} \Rightarrow \frac{A[\varepsilon]}{A[T]} = \frac{A[c]}{A[T']}.$$

Como o triângulo  $T$  é dado,  $\overline{lo}$  é fixo, então  $A[T]$  é constante. Assim podemos afirmar pela equação que  $A[\varepsilon]$  assume valor máximo quando a razão  $\frac{A[c]}{A[T']}$  também atingir valor máximo.

**Lema 1.** *De todos os triângulos circunscritos em um círculo, o que possui menor área é o triângulo equilátero. E a razão entre a área do círculo e a área do triângulo é  $\frac{4\pi}{\sqrt{27}}$ , a maior possível. Então  $\frac{A[c]}{A[T']}$  só atinge valor máximo se  $T'$  for um triângulo equilátero.*

Pelo Lema 1 concluímos que existe uma projeção que leva a elipse  $\varepsilon$  inscrita em um triângulo  $T$  em uma circunferência  $c$  inscrita em um triângulo  $T'$  e que  $T'$  é equilátero.

Uma vez que demonstramos que o triângulo  $A'B'C'$  é equilátero e inscreve a circunferência de centro  $P'$  ou  $Q'$ , temos a figura a seguir

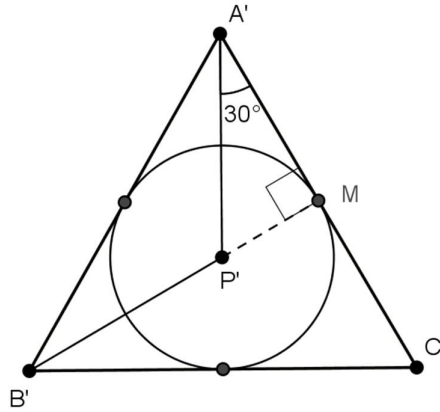


Figura 3.2: Projeção da Elipse em um Triângulo

Sabemos agora que  $A'B' = A'C' = B'C' = l$ . O ponto médio de  $A'C'$  é o ponto  $M$ , logo  $A'M = MC'$ . O triângulo  $A'P'M$  é retângulo, usando a lei dos cossenos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{A'P'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2A'P'} \Rightarrow A'P' = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Analogamente, temos os mesmos valores para  $B'P'$  e  $C'P'$ .

Como  $P'$  e  $Q'$  são coincidentes podemos dizer que  $P'A' = Q'A'$  e assim sucessivamente.

Voltando em 3.1, temos

$$\frac{\overline{P'A'} \cdot \overline{Q'A'}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}} + \frac{\overline{P'B'} \cdot \overline{Q'B'}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}} + \frac{\overline{P'C'} \cdot \overline{Q'C'}}{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'C'}} = 1$$

$$\frac{\overline{P'A'}^2}{l^2} + \frac{\overline{P'B'}^2}{l^2} + \frac{\overline{P'C'}^2}{l^2} =$$

$$\frac{\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}{l^2} + \frac{\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}{l^2} + \frac{\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}{l^2} =$$

$$\frac{\frac{l^2}{3}}{l^2} + \frac{\frac{l^2}{3}}{l^2} + \frac{\frac{l^2}{3}}{l^2} =$$

$$\frac{\frac{3l^2}{3}}{l^2} =$$

1

e

$$1 = 1$$

Como queríamos demonstrar.

## 3.2 Teorema de Marden

A seguir apresentamos o resultado principal de nosso trabalho. Vejamos:

**Teorema 4.** *Seja  $p(w)$  um polinômio de terceiro grau, com coeficientes complexos, cujas raízes  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são não colineares no plano complexo. Seja  $T$  o triângulo com vértices em  $z_1, z_2$  e  $z_3$ . Há uma única elipse inscrita em  $T$  e tangente aos lados nos seus respectivos pontos médios. Os focos da elipse são as raízes da derivada do polinômio  $p(w)$ .*

*Demonstração.* Sendo  $z_1, z_2$  e  $z_3$  raízes do polinômio  $p(w)$ . Então, podemos escrever

$$p(w) = (w - z_1)(w - z_2)(w - z_3).$$

As raízes de  $p(z)$  são distintas, logo  $p'(z)$  e  $p(z)$  não possuem raízes comuns. Logo,

$$p'(w) = (w - z_1)'(w - z_2)(w - z_3) + (w - z_1)(w - z_2)'(w - z_3) + (w - z_1)(w - z_2)(w - z_3)'$$

Dividindo  $p'(w)$  por  $p(w)$ , com  $p(w) \neq 0$ , temos:

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{(w - z_1)'(w - z_2)(w - z_3) + (w - z_1)(w - z_2)'(w - z_3) + (w - z_1)(w - z_2)(w - z_3)'}{(w - z_1)(w - z_2)(w - z_3)}$$

Ou seja,

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{1}{w - z_1} + \frac{1}{w - z_2} + \frac{1}{w - z_3}.$$

Ou ainda,

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{1}{w - z_1} \cdot \frac{\bar{w} - \bar{z}_1}{\bar{w} - \bar{z}_1} + \frac{1}{w - z_2} \cdot \frac{\bar{w} - \bar{z}_2}{\bar{w} - \bar{z}_2} + \frac{1}{w - z_3} \cdot \frac{\bar{w} - \bar{z}_3}{\bar{w} - \bar{z}_3}.$$

Equivalentemente, temos:

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{\bar{w} - \bar{z}_1}{|\bar{w} - \bar{z}_1|^2} + \frac{\bar{w} - \bar{z}_2}{|\bar{w} - \bar{z}_2|^2} + \frac{\bar{w} - \bar{z}_3}{|\bar{w} - \bar{z}_3|^2}.$$

Considerando  $\eta$  raiz de  $p'(w)$ , obtemos

$$\frac{p'(\eta)}{p(\eta)} = \frac{\bar{\eta} - \bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{\bar{\eta} - \bar{z}_2}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{\bar{\eta} - \bar{z}_3}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} = 0.$$

Então,

$$\frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} - \frac{\bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} - \frac{\bar{z}_2}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} - \frac{\bar{z}_3}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} = 0$$

$$\bar{\eta} \left( \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} \right) - \left( \frac{\bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{\bar{z}_3}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} \right) = 0$$

$$\bar{\eta} \left( \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} \right) = \left( \frac{\bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{\bar{z}_3}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} \right).$$

Fazendo

$$\left( \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} \right) = \Lambda,$$

temos

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left( \frac{\bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|\bar{\eta} - \bar{z}_2|^2} + \frac{\bar{z}_3}{|\bar{\eta} - \bar{z}_3|^2} \right).$$

De onde segue que

$$\eta = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left( \frac{z_1}{|\eta - z_1|^2} + \frac{z_2}{|\eta - z_2|^2} + \frac{z_3}{|\eta - z_3|^2} \right)$$

E onde,  $\Lambda$  é o centro de massa ponderada do triângulo de vértices  $z_1, z_2$  e  $z_3$ . Com pesos  $\frac{1}{|\eta - \bar{z}_1|^2}, \frac{1}{|\eta - \bar{z}_2|^2}$  e  $\frac{1}{|\eta - \bar{z}_3|^2}$ , respectivamente.

Considerando agora

$$q(w) = p((z_2 - z_1)w + z_1).$$

Então,

$$q(0) = p(z_1) = 0$$



$$q(1) = p(z_2) = 0$$

e

$$q\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = p(z_3) = 0.$$

Chamando

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \zeta,$$

escrevemos,

$$q(w) = w(w - 1)(w - \zeta).$$

Finalmente, como

$$q(w) = w(w - 1)(w - \zeta) = w^3 - (\zeta + 1)w^2 + \zeta w$$

então

$$q'(w) = 3w^2 - 2(\zeta + 1)w + \zeta.$$

Suas raízes são:

$$\eta_1 = \frac{\zeta + 1 - \sqrt{\zeta^2 - \zeta + 1}}{3}$$

e

$$\eta_2 = \frac{\zeta + 1 + \sqrt{\zeta^2 - \zeta + 1}}{3}$$

Substituindo  $\eta_1$  e  $\eta_2$  em 3.1 e considerando o triângulo com vértices 0, 1 e  $\zeta$ .

$$\frac{\overline{PA} \cdot \overline{QA}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{PB} \cdot \overline{QB}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{PC} \cdot \overline{QC}}{\overline{AC} \cdot \overline{BC}} = 1$$

$$\frac{|\eta_1| \cdot |\eta_2|}{|\zeta|} + \frac{|\eta_1 - 1| \cdot |\eta_2 - 1|}{|\zeta - 1|} + \frac{|\eta_1 - \zeta| \cdot |\eta_2 - \zeta|}{|\zeta| \cdot |\zeta - 1|} = 1$$

O que conclui a demonstração. □

## 3.3 Uma Generalização do Teorema de Marden Usando

### Polinômio de Grau $n$

Para estabelecermos a generalização do Teorema de Marden necessitamos de alguns conhecimentos topológicos sobre o plano, os quais definiremos a seguir. Vejamos:

#### Região Convexa

**Definição 5.** *Uma região  $R$  é convexa quando para quaisquer dois pontos contidos na região o segmento que os contém seja um subconjunto de  $R$ .*

#### Polígono Convexo

**Definição 6.** *Um polígono  $P$  é convexo quando para quaisquer dois pontos contidos no polígono o segmento que eles formam estejam completamente contido em  $P$ .*

#### Envoltório Convexo de um Conjunto de Pontos

**Definição 7.** *Envoltório convexo de um conjunto de pontos é o polígono convexo de menor área que contém todos os pontos.*

### 3.3.1 A Generalização

**Teorema 5.** *Seja  $p(w)$  um polinômio de grau  $n$ , com coeficientes complexos, cuja as raízes  $z_1, z_2, \dots, z_n$  são não colineares no plano complexo. Seja  $P$  o envoltório convexo que contém os pontos  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . As raízes das derivadas de  $p(w)$  estão contidas em  $P$ .*

*Demonstração.* Sendo  $z_1, z_2, \dots, z_n$  raízes do polinômio  $p(w)$ . Então,

$$p(w) = (w - z_1)(w - z_2)\dots(w - z_n).$$

As raízes de  $p(w)$  são distintas, logo  $p'(w)$  e  $p(w)$  não possuem raízes comuns. Como

$$p'(w) = (w - z_1)'(w - z_2)\dots(w - z_n) + \dots + (w - z_n)'(w - z_1)\dots(w - z_{n-1}),$$

dividindo  $p'(w)$  por  $p(w)$ , com  $p(w) \neq 0$ , temos

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{1}{w - z_1} + \frac{1}{w - z_2} + \dots + \frac{1}{w - z_n}.$$

Ou ainda

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{1}{w - z_1} \cdot \frac{\bar{w} - \bar{z}_1}{\bar{w} - \bar{z}_1} + \dots + \frac{1}{w - z_n} \cdot \frac{\bar{w} - \bar{z}_n}{\bar{w} - \bar{z}_n}.$$

Equivalentemente, temos

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{\bar{w} - \bar{z}_1}{|\bar{w} - \bar{z}_1|^2} + \dots + \frac{\bar{w} - \bar{z}_n}{|\bar{w} - \bar{z}_n|^2}.$$

Considerando  $\eta$  raiz de  $p'(w)$ , obtemos

$$\frac{p'(\eta)}{p(\eta)} = \frac{\bar{\eta} - \bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \dots + \frac{\bar{\eta} - \bar{z}_n}{|\bar{\eta} - \bar{z}_n|^2} = 0.$$

De onde escrevemos

$$\frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} - \frac{\bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \dots + \frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta} - \bar{z}_n|^2} - \frac{\bar{z}_n}{|\bar{\eta} - \bar{z}_n|^2} = 0$$

$$\bar{\eta} \left( \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \dots + \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_n|^2} \right) - \left( \frac{\bar{z}_1}{|\bar{\eta} - \bar{z}_1|^2} + \dots + \frac{\bar{z}_n}{|\bar{\eta} - \bar{z}_n|^2} \right) = 0$$

$$\bar{\eta} \left( \frac{1}{|\eta - z_1|^2} + \dots + \frac{1}{|\eta - z_n|^2} \right) = \left( \frac{\bar{z}_1}{|\eta - z_1|^2} + \dots + \frac{\bar{z}_n}{|\eta - z_n|^2} \right).$$

Fazendo

$$\frac{1}{|\eta - z_1|^2} + \dots + \frac{1}{|\eta - z_n|^2} = \Lambda$$

temos

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left( \frac{\bar{z}_1}{|\eta - z_1|^2} + \dots + \frac{\bar{z}_n}{|\eta - z_n|^2} \right).$$

Assim,

$$\eta = \frac{1}{\Lambda} \cdot \left( \frac{z_1}{|\eta - z_1|^2} + \dots + \frac{z_n}{|\eta - z_n|^2} \right),$$

Onde,  $\eta$  é o centro de massa ponderada do envoltório poligonal que contém os vértices  $z_1, z_2, \dots, z_n$  com pesos  $\frac{1}{|\eta - z_1|^2}, \frac{1}{|\eta - z_2|^2}, \dots, \frac{1}{|\eta - z_n|^2}$ , respectivamente.  $\square$

Não temos nenhuma figura específica para a generalização, pois não podemos sequer afirmar que as raízes de tal polinômio de grau  $n$  formá um polígono convexo.

# Bibliografia

- [1] ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*, LTC, 2008
- [2] CERRI, C., MONTEIRO, M. S., *História dos Números Complexo*, Disponível em:  
<<https://www.ime.usp.br/martha/caem/complexos.pdf>>, Acesso 4 de novembro de 2016.
- [3] GUIDORIZZI, L. H., *Um curso de Cálculo*, vol. 1, LTC, Ed. 1997
- [4] IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAIN, D., PÉRIGO, R., *Matemática: Volume Único*, Atual, 2011
- [5] KALMAN, D., *An Elementary Proof of Marden's Theorem*, Americ. Math., 2008
- [6] REIS, G.L., SILVA, V.V., *Geometria Analítica*, LTC, Ed. 1996
- [7] SANTANA, G. R. *Elipse de Steiner*, Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Goiás, 2014
- [8] SANTOS, M. J. S. *Teorema de Marden*, Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Goiás, 2014