UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

IBILCE

Flávia Renata Mialich

Poliedros e Teorema de Euler

São José do Rio Preto
2013

Flávia Renata Mialich

Poliedros e Teorema de Euler

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

São José do Rio Preto
2013

Flávia Renata Mialich

Poliedros e Teorema de Euler

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. João Carlos Viera Sampaio
UFSCAR - São Carlos

Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
2013

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade, força, fé e proteção para realização de mais esta etapa da minha vida.

Agradeço à coordenação do PROFMAT, aos membros da banca pelas sugestões importantes para complementação do trabalho e a todos os professores do curso pela oportunidade de aprendizagem.

Agradecimento especial à minha orientadora, Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela paciência, pelos ensinamentos e sugestões de pesquisa que acabaram por constituir-se neste trabalho.

Agradeço aos colegas de curso pela amizade e companheirismo, principalmente à minha amiga Ilca e sua família.

Agradeço aos meus pais José e Maria José pelo apoio, amor e incentivo sempre.

Agradeço ao meu esposo Marcos, pelo amor, pela paciência, compreensão, incentivo e apoio neste momento de nossas vidas.

Agradeço à CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Agradeço a todos que fizeram parte deste momento da minha vida diretamente ou indiretamente. Obrigada a todos!

RESUMO

Este trabalho tem como tema central Poliedros e o Teorema de Euler. Foi feita uma breve análise da definição de Poliedros e apresentadas algumas considerações históricas a respeito dos Poliedros e o Teorema de Euler. Foram abordadas duas versões/demonstrações do Teorema de Euler, a primeira para poliedros convexos, e a segunda, conhecida como de Teorema de Euler segundo Cauchy (que engloba certos poliedros não convexos, que são homeomorfos à esfera). Ainda, como consequência do Teorema de Euler, foi demonstrado o teorema da existência de apenas cinco poliedros regulares, conhecidos como Poliedros de Platão. Analisou-se também o conteúdo/ensino de Poliedros em certos documentos oficiais (PCN, Currículo do Estado de SP, Matrizes do SARESP e ENEM). Por último foi elaborada uma proposta de atividades explorando poliedros, o Teorema de Euler e os conteúdos de área, volume e planificação, bem como análise e resolução de algumas questões do SARESP e ENEM (relativas a tais conteúdos), utilizando, para melhor compreensão e visualização, o software matemático Poly, a fim de construir uma aprendizagem mais significativa para os alunos. Com o desenvolvimento do trabalho foi possível compreender melhor a definição de poliedros, o Teorema de Euler e refletir um pouco sobre o desenvolvimento das pesquisas Matemáticas a partir de alguns aspectos históricos. Através da análise do conteúdo, em certos documentos oficiais, pode-se verificar que o assunto/tema tratado no trabalho faz parte desses documentos e têm sido cobrados em avaliações, mas, em geral, de forma bastante simples. Observamos também, que em algumas questões analisadas os enunciados não estavam muito claros, o que pode confundir os alunos.

Palavras-chave: Poliedros; Teorema de Euler; Ensino de Matemática; Software Poly.

ABSTRACT

This work has as its central theme Polyhedra and Euler's Theorem. We made a brief analysis of the definition of Polyhedra and some historical considerations about Polyhedra and Euler's Theorem. We considered two versions/proofs of Euler's Theorem, the first for convex polyhedra, and the second, known as Euler's Theorem according to Cauchy (which includes certain nonconvex polyhedra that are homeomorphic to the sphere). Also, as a consequence of Euler's theorem, it was demonstrated the theorem of existence of only five regular polyhedra, known as Plato's Polyhedra. We also analyzed the content/teaching of Polyhedra in certain official documents (PCN, SP State Curriculum, SARESP matrices and ENEM). Finally we presented a proposal of activities exploring polyhedra, Euler's Theorem, the contents area, volume and planning, as well as an analysis and resolution of some questions from SARESP and ENEM (for such contents), by using, for better understanding and visualization, the Poly mathematical software in order to build a more meaningful learning for students. With the development of this work we got a better understand of the definition of polyhedra, the Euler's Theorem and we reflected a little on research and development of mathematics from some historical aspects. By analysing the content in certain official documents, it can be seen that the subject/topics covered in this work are parts of these documents and have been rated in tests, but generally in a quite simple form. We also observed that in some questions discussed, the statements were not very clear, which can confuse the students.

Keywords: *Polyhedra, Euler's Theorem, Mathematics Teaching, Poly Software.*

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como tema central os Poliedros e o Teorema de Euler. O tópico Poliedros (dentro do estudo da Geometria) é bastante interessante e significativo, pois está relacionado diretamente com o cotidiano e pode ser tratado em quase todas as séries dos Ensinos Fundamental e Médio.

No estudo de poliedros, podemos utilizar várias ferramentas a fim de contribuir para a formação dos nossos alunos. Considerando o contexto sociocultural que estamos vivendo, as demandas que têm sido feitas à escola pela sociedade e atendendo aos interesses e às expectativas dos alunos, o professor deve lançar mão de estratégias diferenciadas com o objetivo de tornar os alunos capazes de promover a realização pessoal, a qualificação para o trabalho, para a participação social e política, enfim, para uma cidadania plena.

No Capítulo 1 abordamos o conceito de poliedros e superfícies poliédricas. Muitos autores tratam poliedros ora como sólidos ora como superfícies (poliédricas), ocorrendo um abuso de linguagem. Seguimos aqui a definição dada em Lima, et al (2006, p. 232-233). Vale observar que se o poliedro é visto como um sólido, não tem sentido planificá-lo. Nesse mesmo capítulo também são apresentadas algumas considerações históricas a respeito do Teorema de Euler e sobre sua validade.

No Capítulo 2 o Teorema de Euler é apresentado e demonstrado. De fato são apresentadas duas versões/demonstrações do teorema. A primeira é para poliedros convexos (Teorema 1), seguindo Azambuja Filho (1983, p. 15-17), cuja prova consiste, essencialmente, em determinar, de duas maneiras, a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro, e depois comparar os resultados obtidos. A segunda segue a demonstração dada por Cauchy, analisada/complementada por Lima (Teorema 2), e consiste, brevemente, em retirar, inicialmente, uma face do poliedro, em seguida achatá-lo (de modo a obter uma figura plana Q), depois triangularizar as faces resultantes (polígonos) e verificar que (para a figura plana Q obtida) vale a relação $V_Q - A_Q + F_Q = 1$ (entre o número de vértices, arestas e faces), o que implica na relação (de Euler) $V_P - A_P + F_P = 2$ para o poliedro inicial P, tendo em vista que Q foi obtida de P por retirar uma face (e depois achatar). O Teorema de Euler (versão Cauchy - Lima) foi enunciado, neste trabalho, com as hipóteses necessárias para que a demonstração dada por Cauchy, juntamente com a análise de Lima, esteja correta, seguindo Lima (1991, p. 74-82). Observamos que os poliedros convexos satisfazem as hipóteses do Teorema (segundo Cauchy), mas não são apenas esses, o teorema (versão de Cauchy) é válido para uma classe mais ampla de poliedros: os que são *homeomorfos* a uma esfera. Mas essa equivalência (do poliedro satisfazer as hipóteses do teorema se, e somente se, é homeomorfo a uma esfera) não é fácil de se verificar, conforme observado em Lima (1991, p.12). Ainda no Capítulo 2, usando o Teorema de Euler, é demonstrado o teorema da existência de apenas cinco poliedros convexos regulares, conhecidos como Poliedros de Platão (Teorema 3).

No Capítulo 3 é feita uma análise sobre o ensino/conteúdo de Poliedros, segundo documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – Ciclo II (BRASIL, 1998), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2002), Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas Tecnologias (SÃO PAULO, 2010), Matrizes de Referência para a Avaliação do SARESP (SÃO PAULO, 2009) e Matrizes de Referência para o ENEM (2009).

O Capítulo 4 é dedicado à proposta de atividades sobre Poliedros e Teorema de Euler com o uso do software matemático Poly. E também ao desenvolvimento de atividades visando a análise e resolução de algumas questões do SARESP e ENEM. O uso de softwares matemáticos nos permite criar estratégias de articulação entre linguagens e procedimentos diversificados para tratar de situações-problema, permitindo uma melhor interpretação por parte dos alunos, entre tantos outros benefícios.

Por fim apresentamos algumas considerações/conclusões relativas ao desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO 1: POLIEDROS E CONSIDERAÇÕES SOBRE O TEOREMA DE EULER

1.1 Poliedros

A palavra Poliedro vem do grego *poly*, que significa muitos ou vários e *edro*, que significa face, ou seja, muitas faces, os poliedros regulares convexos foram objetos de estudo de grandes filósofos da antiguidade e faziam parte das teorias sobre o universo.

Os poliedros são objetos facilmente encontrados no cotidiano, em forma de embalagens, na arquitetura, nas artes, etc. Além disso, como mencionado em Bortolossi (2009 a e b) são elementos utilizados em pesquisas e tem aplicações práticas. Por exemplo, o estudo da planificação de poliedros tem aplicações em *design* industrial (na confecção de moldes de vinil e decomposições de chapas metálicas). Os poliedros são também usados em computação gráfica como uma malha de controle para a representação de superfícies suaves e mais complicadas. A superfície suave final é obtida através de um processo recursivo que subdivide cada face do poliedro em subfaces menores. Os poliedros regulares também conhecidos como sólidos platônicos (cubo ou hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) se manifestam na natureza (cristais, moléculas, etc.). Ainda, muitos vírus, como por exemplo, o vírus do Herpes e Radiolários (um tipo de protozoário amebóide, que dá origem a esqueletos minerais) como a *Circogonia icosahedra*, têm a forma (aproximada) de um Icosaedro. Em meteorologia e climatologia, destacam-se cada vez mais os modelos numéricos globais do fluxo atmosférico que usam malhas baseadas em um icosaedro (refinado por subdivisão).

1.2 Uma breve introdução histórica sobre Poliedros

Não é nosso objetivo fazer aqui uma abordagem histórica, mas apenas levantar alguns aspectos. Algumas das referências usadas para consulta foram: Boyer (1974), Lima (1991), Lima et al (2006), Corrreia e Ferreira (2007), Gonçalves (2009), Siqueira (2009), Bortolossi (2009 a e b) e Richeson (2008).

As formas poliédricas vêm sendo estudadas desde a antiguidade. As pirâmides evidenciam o conhecimento que os egípcios tinham de poliedros. Existem fontes egípcias, chinesas e babilônicas contendo a resolução de problemas relativos a pirâmides. Um interessante documento egípcio é o *Papiro de Rhind* ou, menos frequentemente chamado, *Papiro Ahmes.* O Nome Ahmes é em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C. Esse documento foi comprado em 1858 por Henry Rhind, um antiquário escocês (BOYER, 1974, p. 9). Nesse papiro há alguns problemas geométricos, em particular sobre pirâmide (relativos ao declive das faces) (BOYER, 1974, p.13-14).

O fato de só existirem cinco poliedros regulares chamou, há séculos, a atenção de muitos filósofos.

As ideias de Platão (filósofo grego, fundador da academia de Atenas no século IV a. C.) sobre os poliedros regulares foram registradas num diálogo intitulado *Timaeus*, presumivelmente do nome de um Pitagórico, que serviu como interlocutor principal. Não se sabe ao certo se Timaeus de Locri existiu ou se Platão o inventou como um personagem através do qual enunciou as ideias pitagóricas. Os poliedros regulares foram frequentemente chamados “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos” devido a maneira pelo qual Platão, no *Timaeus,* os aplicou à explicação de fenômenos científicos (BOYER, 1974, p.63). Ao cubo foi associado a Terra, ao tetraedro o Fogo, ao octaedro o Ar, ao icosaedro a Água e ao dodecaedro o Universo.

Os *Elementos de Euclides* (Euclides de Alexandria), composto por volta do ano 300 a.C., estão divididos em treze livros ou capítulos. Os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço, sendo o último livro inteiramente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares. Tem-se como objetivo “compreender” cada um dos sólidos numa esfera – isto é, achar a razão de uma aresta do sólido ao raio da esfera circunscrita. Segundo comentadores gregos, grande parte do Livro XIII deve-se, provavelmente, a Teaetetus. (BOYER, 1974, p. 77, 86 e 87). Um escólio (de data incerta) ao Livro XIII de *Os Elementos de Euclides* afirma que somente três dos cinco poliedros regulares eram devidos aos pitagóricos e que foi através de Teaetetus (amigo de Platão, nascido em 414 a.C, aproximadamente) que o octaedro e o icosaedro ficaram conhecidos. A ele provavelmente se deve o teorema que diz que *há cinco e somente cinco poliedros regulares* (BOYER, 1974, p. 63).

Um importante resultado sobre poliedros é a conhecida *Fórmula/Relação de Euler ou Teorema de Euler* (que é válida(o) para uma certa classe de poliedros, e será abordada neste trabalho): *se V, A e F indicam, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro, então*

$$V - A + F = 2.$$

Tal fórmula (resultado) é assim denominada em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Euler apresentou tal relação em uma carta que escreveu para seu amigo (também matemático) Christian Goldbach em 1750 (RICHESON, 2008, p.66). É interessante observar que, segundo alguns historiadores, um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, contém resultados a partir dos quais se poderia obter a Relação de Euler (LIMA, 1991. p. 69).

Euler, durante sua vida, escreveu vários trabalhos, entre eles, dois sobre poliedros, como destacado em Gonçalves (2009) e Richeson (2008). Esses dois trabalhos foram escritos em 1750 e 1751, mas só foram publicados em 1758. No primeiro trabalho, Euler fez observações gerais a respeito de poliedros, iniciou sua discussão da relação entre os números de vértices, arestas e faces, provou vários teoremas que relacionam V, E e F e verificou que V-A+F=2 ocorre em vários casos especiais, mas ele não deu uma prova para a sua fórmula. Porém, no segundo trabalho ele apresentou uma prova (RICHESON, 2008, p.66). A prova apresentada por Euler não é rigorosa e contém falhas (RICHESON, 2008, p.71).

Muitos matemáticos, entre eles Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), tentaram encontrar uma prova correta e completa. Uma publicação interessante que se refere às falhas da prova do Teorema Euler é o livro de Imre Lakatos (1922 - 1974) (LAKATOS, 1976). Lakatos ilustra seu “método de provas e refutações” por meio da interpretação da história da conjectura de Euler. As falhas nas provas dessa conjectura ocorreram, em geral, por não haver uma definição precisa de *poliedro*.

1.3 Definição de Poliedro

Vamos tomar como definição de poliedro a apresentada por Lima et al. (2006, p. 232-233), em *A Matemática do Ensino Médio.*

Definição 1:

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma *aresta do poliedro* e cada vértice de uma face é um *vértice do poliedro*.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de *interior* desse poliedro.

Aqui, polígono plano está significando o polígono e a região poligonal (região interna do polígono).

Analisando alguns livros didáticos, observamos que:

Dante (2012, p. 206), em *Matemática: Contexto e Aplicações* apresenta os poliedros da seguinte maneira:

> Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas *faces* e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de uma região poligonal, comum a exatamente duas faces, é chamado *aresta* do poliedro. E cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro.

Iezzi et al. (2010, p. 183), em *Matemática: ciência e aplicações, v.2*, define poliedros como “sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos”.

Notemos que na definição dada por Iezzi et al. (2010, p.183), ao tratar poliedro utilizando o termo *sólido geométrico*, ou seja, algo maciço, não oco, a região interior, limitada por polígonos planos, pertence ao poliedro. O mesmo ocorre com a definição dada por Dante (2005, p. 360), quando diz que a região limitada pelas faces também faz parte do poliedro.

Como observado em Richeson (2008, p. 30), primeiramente na história de poliedros, a suposição era que eles eram sólidos. De fato, por muito séculos poliedros foram chamados "sólidos". Depois, quando ocorreu a relação da teoria de poliedros com a Topologia (ver 1.6 abaixo), a suposição de ser oco passou a ser considerada.

Observemos, entretanto, que na definição adotada (Definição 1) a região interior não faz parte do poliedro. Ao se considerar poliedro como um sólido geométrico, não faz sentido falar em planificação do poliedro, já que não é possível planificar um sólido. Neste caso, o que é planificado é apenas a superfície deste sólido, que é denominada *superfície poliédrica*, ou seja, não é considerado seu interior na planificação.

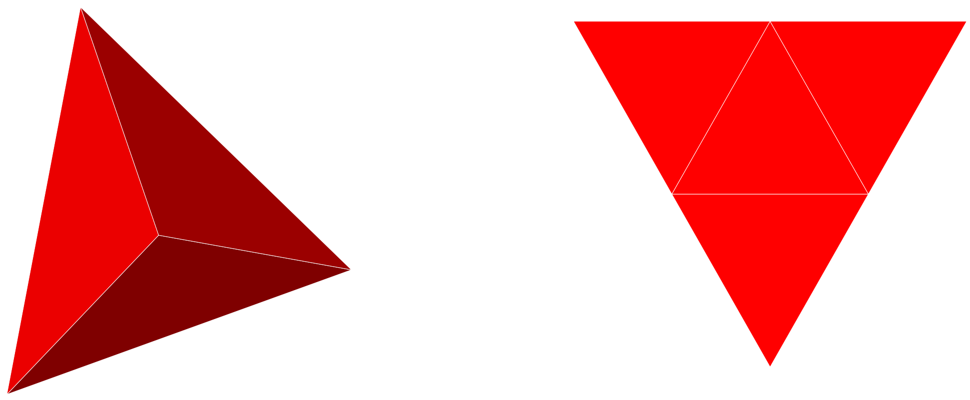


Figura 1: Tetraedro e sua planificação.

Fanti, Kodama e Necchi (2010, p. 731), em *Explorando Poliedros no Ensino Médio com o Software Poly*, analisa a abordagem dos conceitos “poliedro e superfície poliédrica” e ressalta que é comum usar o termo sólido para significar poliedro:

> [...] Uma abordagem usando esses dois conceitos, poliedro e superfície poliédrica (como mencionado), é encontrada em DI PIERRO NETO, et al., p.267. É interessante observar, entretanto, que o uso do termo “sólido geométrico” para significar indistintamente poliedro e superfície poliédrica é bastante comum. Isso ocorre, por exemplo, com o software Poly, onde o termo solids (ou sólidos) é utilizado, porém os objetos apresentados pelo software não são sólidos, o que pode ser observado quando exibimos a planificação dos mesmos no plano. [...]

Usar o termo poliedro tanto para significar o corpo sólido ou a sua casca (superfície) é um abuso similar ao de usar a palavra polígono para significar tanto o contorno como o contorno e a região delimitada (referida como região poligonal).

É interessante observar que os mesmos autores do livro referido (na Definição 1), em uma versão anterior não exigiram, na definição de poliedro, a condição (c). De modo que um objeto como o apresentado na Figura 3 (a) abaixo, nessa edição mais antiga (1998), era considerado um poliedro.

Observamos também que ao tratar do Teorema de Euler segundo Cauchy (Teorema 2 do Capítulo 2), a definição de “poliedro” utilizada na demonstração do teorema, seguindo Cauchy, é bem diferente da dada na Definição 1.

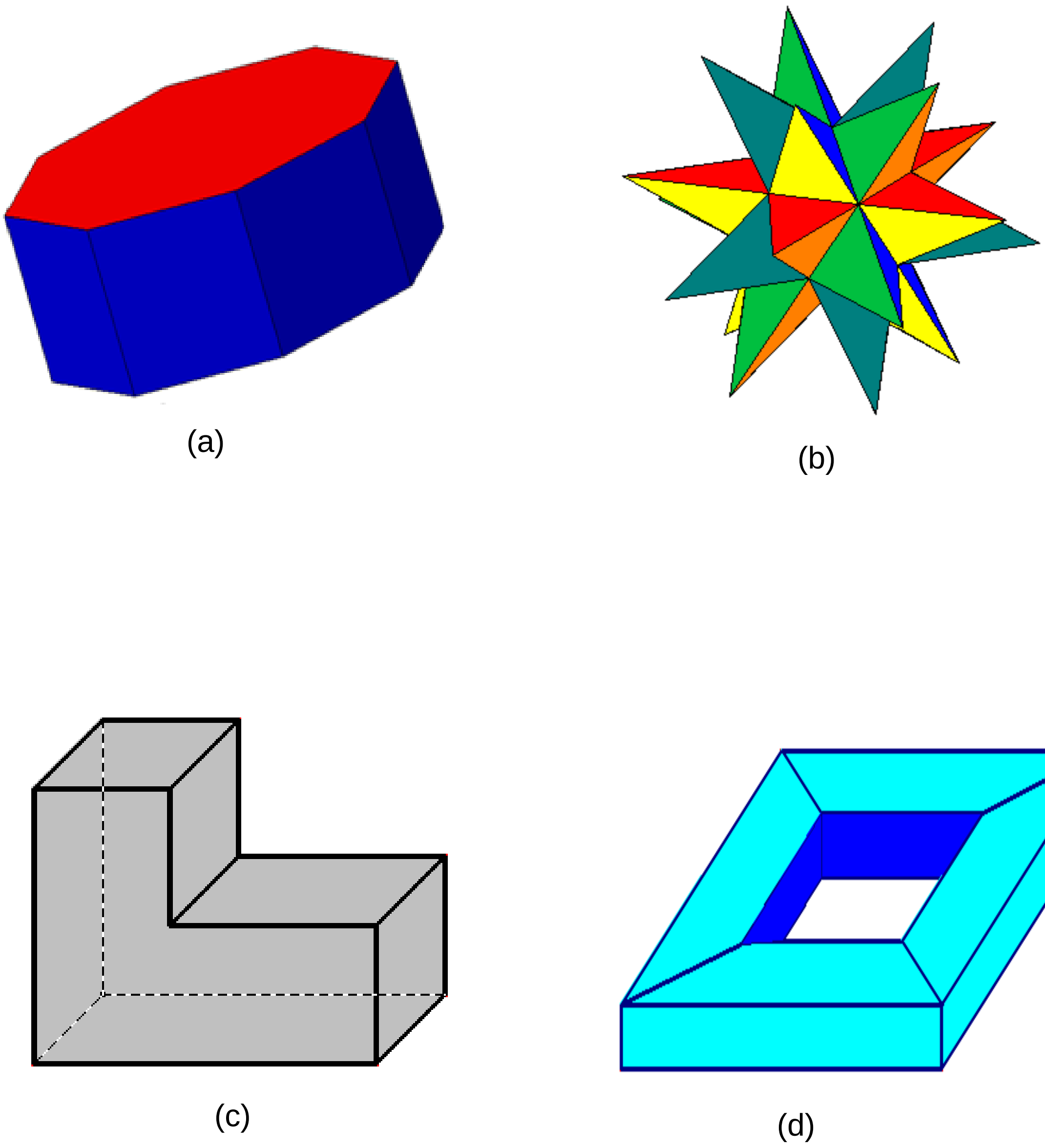
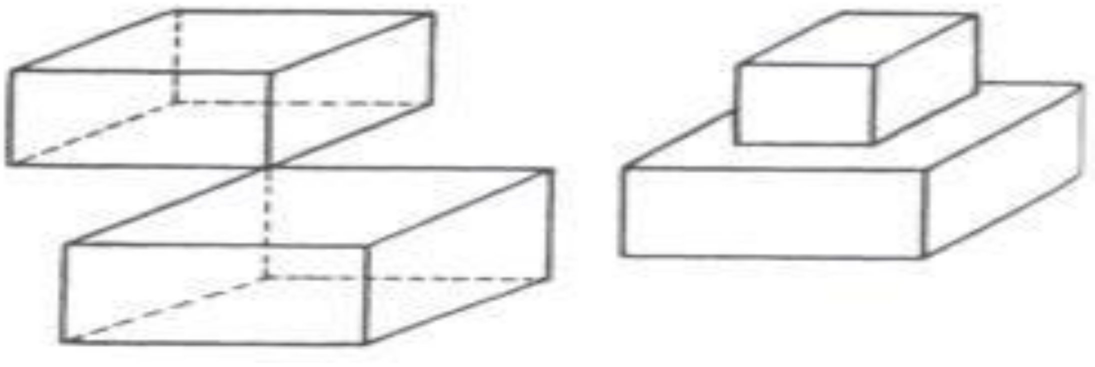


Figura 2: Exemplos de Poliedros.



(a) (b)

Figura 3: Exemplos de não-poliedros.

1.4 Poliedro Convexo

Definição 2: (Lima, et al, 2006, p. 233).

Um poliedro é *convexo* se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.

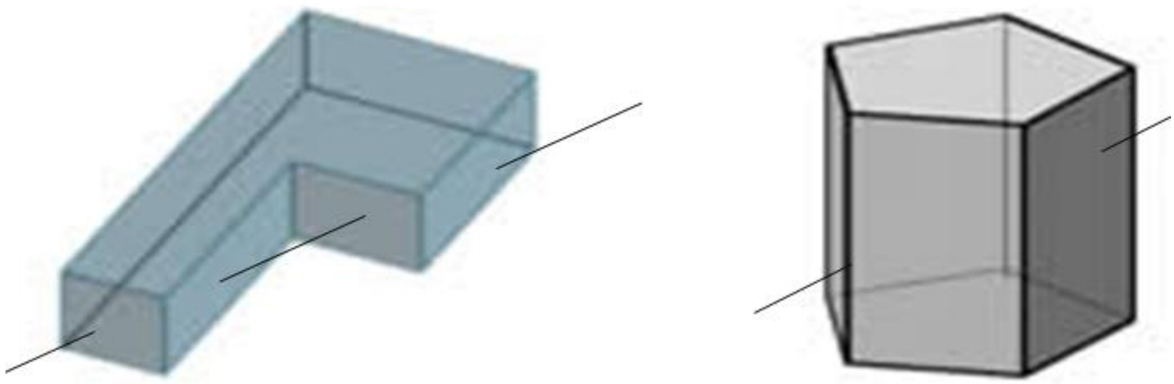


Figura 4: Poliedro não convexo e Poliedro convexo.

É usual encontrarmos a seguinte definição: Um conjunto C do plano ou espaço é dito *convexo*, se ao considerarmos qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C, o segmento considerado está inteiramente contido no conjunto C.

Neste caso, um poliedro P é convexo, de acordo com a Definição 2, se e somente se, o conjunto C formado pelo poliedros e seu interior é um conjunto convexo.

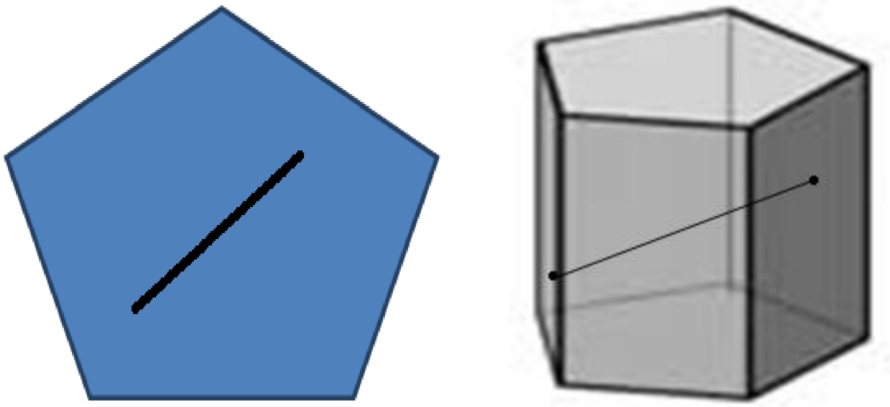


Figura 5: Região convexa plana e poliedro convexo.

Os poliedros convexos são classificados em várias categorias. No Ensino Básico, as categorias consideradas, em geral, são as dos poliedros *regulares* (convexos), também conhecidos como *poliedros platônicos*, os *prismas* e as *pirâmides*.

1.5 Poliedro Regular

Definição 3:

Dizemos que um poliedro convexo é *regular* quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais (mais precisamente, congruentes) e, além disso, em cada vértice do poliedro concorre o mesmo número de arestas. Tais poliedros são conhecidos como *poliedros de Platão*.

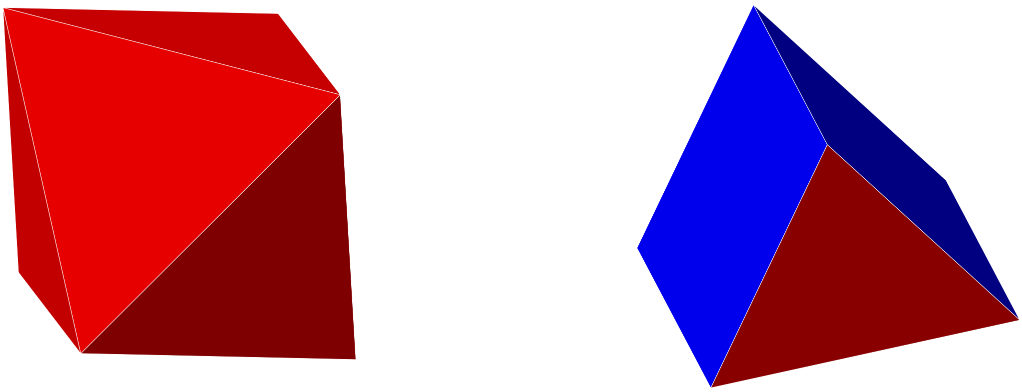


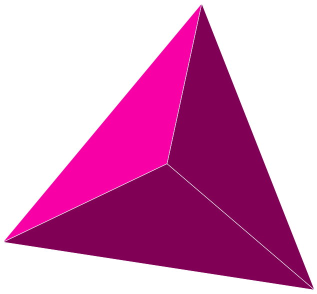
Figura 6: Exemplo de poliedro regular e não regular.

Existem apenas cinco poliedros convexos regulares: o *tetraedro*, o *cubo*, o *octaedro*, o *dodecaedro* e o *icosaedro*. Esse resultado será provado no Capítulo 2.

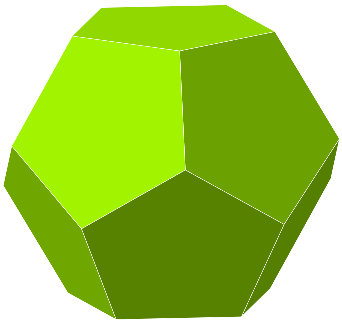
1.6 Considerações sobre o Teorema/Relação de Euler

As considerações apresentadas aqui tem como referência Lima (1991).

A Relação de Euler é expressa pela equação V – A + F = 2, como já mencionado anteriormente. Existem vários exemplos de poliedros convexos e não convexos onde a relação é válida. Mas, podemos verificar, através de exemplos, que o Teorema de Euler não é válido em toda sua generalidade. Esta relação é sempre verdadeira para poliedros convexos, como será demonstrado no Capítulo 2. Porém, para poliedros não convexos esta relação pode ou não ser verdadeira (vide Figuras 8 e 9 a seguir).

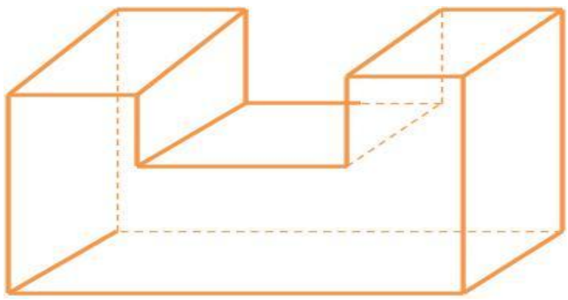


V – A + F = 4 – 6 + 4 = 2



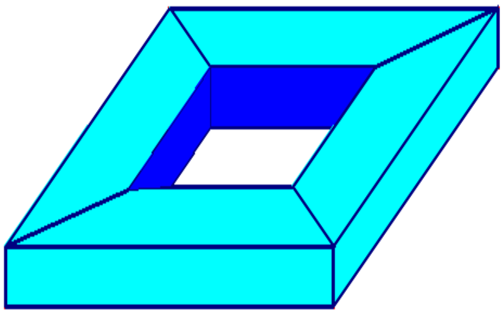
V – A + F = 20 – 30 + 12 = 2

Figura 7: Poliedros convexos onde o Teorema de Euler é válido.



V – A + F = 16 – 24 + 10 = 2

Figura 8: Poliedro não convexo onde o Teorema de Euler é válido.



$V – A + F = 16 – 32 + 16 = 0$

Figura 9: Poliedro não convexo onde o Teorema de Euler não é válido.

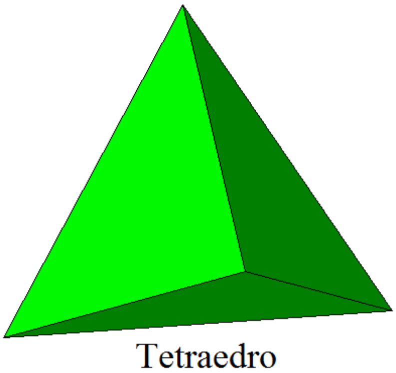
Qual seria então o motivo da relação de Euler não ser válida para todos os poliedros não convexos? As controvérsias relacionadas ao Teorema de Euler duraram mais de um século. Poincaré (1893) foi o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um teorema da Topologia e não da Geometria.

Ele notou que V – A + F é um invariante *topológico*, isto é, se P e Q são poliedros *homeomorfos*, então $V_P – A_P + F_P = V_Q – A_Q + F_Q$, onde V_P indica o número de vértices do poliedro P e V_Q o número de vértices de Q, o mesmo ocorre com o número de arestas e de faces.

Dois objetos P e Q (espaços topológicos, que podemos considerar aqui como subconjuntos de R^3), são *homeomorfos* se existe uma aplicação contínua $f : P \rightarrow Q$ cuja inversa $f^{-1} : Q \rightarrow P$ também é contínua.

Dado um poliedro P, o número X(P):= V – A + F, é chamado *característica de Euler-Poincaré* do poliedro P. Poincaré mostrou que *X*(P) é um *invariante topológico*, ou seja, poliedros homeomorfos possuem mesma característica de Euler-Poincaré. De fato a característica de Euler - *Poincaré* é até um invariante por *mesmo tipo homotopia* (LIMA, 1991, p.73). (Grosseiramente falando, dois objetos tem *mesmo tipo de homotopia*, ou são *homotopicamente equivalentes*, se um pode ser deformado continuamente no outro).

Agora, para um tetraedro *T* (vide Figura 10), tem-se *X*(*T*) = V- A + F = 2, e *T* é homeomorfo a esfera. Logo, para todo poliedro P homeomorfo a *T* e, portanto homeomorfo a esfera, vale X(P) = X(*T*) = 2 (isto é, tem-se a Relação de Euler).



V – A + F = 4 – 6 + 4 = 2

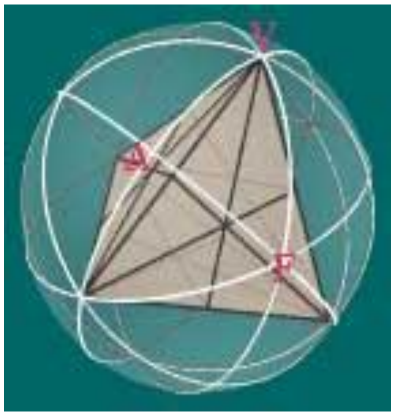


Figura 10: Tetraedro (*homeomorfo a uma esfera*).

Para compreender melhor essa situação, suponhamos que os poliedros considerados sejam feitos de borracha e que possam ser inflados sem romper. Podemos observar que os poliedros onde o Teorema de Euler é satisfeito, quando inflados, se transformarão em esferas, são homeomorfos a uma esfera. Note que no exemplo da Figura 9 (onde o teorema não é válido), ao inflarmos o poliedro ele não se transformará numa esfera, mas sim num *toro*.

CAPÍTULO 2: TEOREMA DE EULER

Neste capítulo, inicialmente apresentaremos duas demonstrações/versões do Teorema de Euler para poliedros. A primeira, para poliedros convexos, segue a prova apresentada por Azambuja Filho (1983). A segunda é a dada por Cauchy e adaptada/corrigida de acordo com análise feita por Lima (1991, p. 74-82). Depois, a partir da demonstração do Teorema de Euler, provamos que existem apenas cinco poliedros convexos regulares, conhecidos como Poliedros de Platão.

2.1 Teorema de Euler (para Poliedros Convexos)

A demonstração que constará aqui para poliedros convexos, tem com referência Azambuja Filho (1983, p. 15-17), Lima et al. (2006, p. 235-238) e Fanti (2011). Apresentamos a demonstração de forma bastante detalhada, intercalando com algumas ilustrações de situações particulares, visando uma melhor compreensão da mesma.

Teorema 1: (Teorema de Euler para poliedros convexos).

Dado um poliedro convexo P com F faces, V vértices e A arestas, é válida a relação:

$$\mathbf{V - A + F = 2}.$$

Demonstração:

Seja P um poliedro convexo.

A demonstração consistirá, essencialmente, em determinar, de duas maneiras distintas, a soma S dos ângulos internos dos polígonos que constituem as faces do poliedro P e, em seguida, comparar os resultados obtidos.

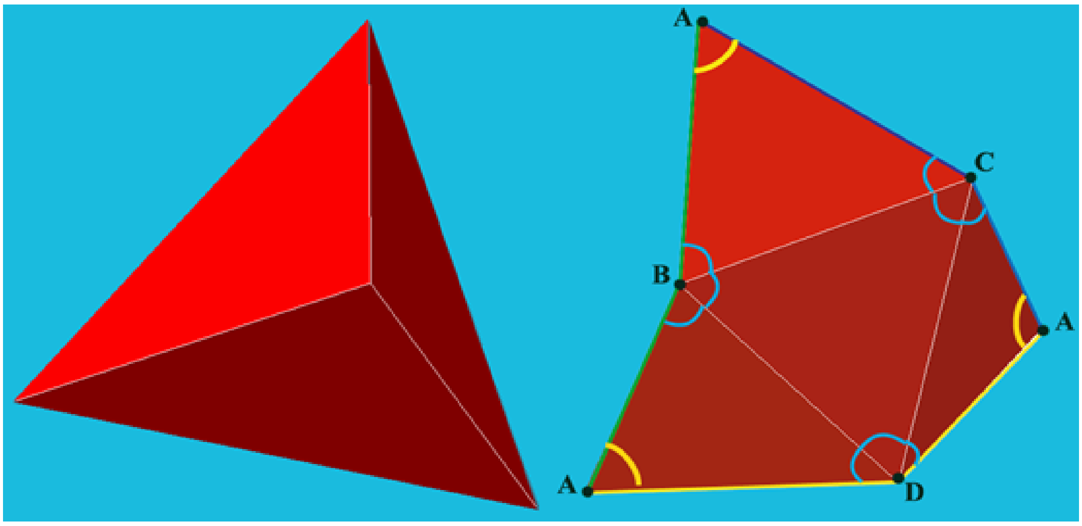


Figura 11: Tetraedro – Planificação e indicação dos ângulos internos (dos polígonos das faces do poliedro).

Primeiro cálculo: Seja F o número de faces do poliedro convexo P, numerando essas faces, obtemos F_1, F_2, ... ,F_F. Seja n_k o gênero da k-ésima face, isto é, n_k é o número de lados do polígono correspondente a face F_k (podendo ter $n_i=n_j$, com $i\neq j$).

Por exemplo, num prisma triangular, temos 5 faces, F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5. De acordo com a figura seguinte, $n_1=3$, $n_2=4$, $n_3=4$, $n_4=3$ e $n_5=4$.

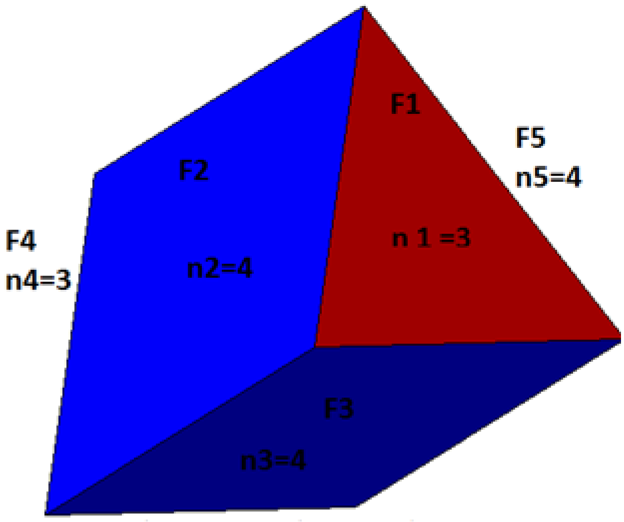


Figura 12: Prisma triangular: faces e gêneros.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é S = π (n – 2). Isto pode ser deduzido triangularizando o polígono a partir de um vértice, de modo a obter n – 2 triângulos e usar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π (como ilustrado no pentágono indicado abaixo, em que n = 5, de a modo a obter n – 2 = 3 triângulos e S= 3 π).

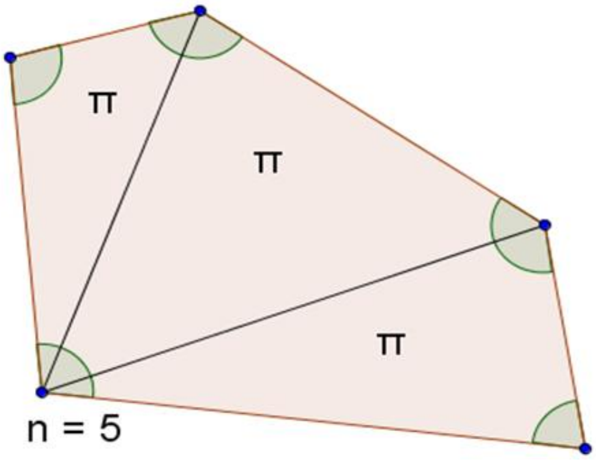


Figura 13: Soma dos ângulos internos de um pentágono.

Observando que em um poliedro convexo todas as suas faces são polígonos convexos, teremos para a soma dos ângulos internos de todas as faces de P a expressão:

$$S = \pi(n_1-2)+ \pi(n_2-2)+....+ \pi(n_F-2) = \pi(n_1 + n_2 + ...+ n_F) - \pi(2+2+...+2).$$

Agora, a soma dos números de lados de todas as faces ($n_1+n_2 + ... + n_F$) do poliedro é igual ao dobro do número de arestas (2A), e no segundo parênteses (da igualdade acima) temos F (= n^o de faces) parcelas 2, logo:

$$S = \pi .2A - \pi. 2F \pi \Leftrightarrow S = 2 \pi (A - F) \qquad (*).$$

Por exemplo, para o tetraedro (Figura 14, seguinte) tem-se: 4 faces F_1, F_2, F_3 e F_4 e n_j= 3, para j = 1,...,4. De modo que:

$$S = \pi(n_1-2)+....+\pi(n_4-2) = \pi(n_1+...+n_4) - (2+...+2) = \pi(2A - 2F) = 2\pi(6-4) =4\pi.$$

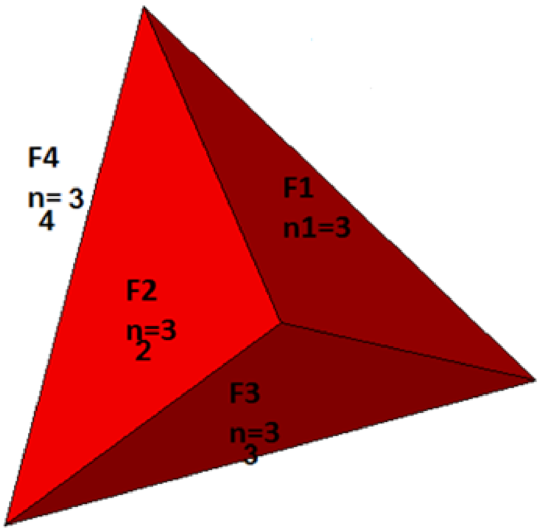


Figura 14: Faces do tetraedro.

***Segundo cálculo*:** Para o segundo cálculo da soma S, tomemos agora o poliedro P e r uma reta não paralela a nenhuma de suas faces (tal reta sempre existe, pois existe um número finito de faces). Seja também H o plano perpendicular à reta r que não intersecta P (como ilustrado na Figura 15).

O plano H será chamado *plano horizontal*, o qual divide o espaço em dois semi-espaços. Consideremos o semi-espaço que contém P como o semi-espaço superior, ou seja, os pontos de P estão acima de H. As retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) são chamadas *retas verticais*.

Suponhamos o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior onde todos os seus raios são retas paralelas à reta r. Todo ponto x do semi-espaço superior, possui uma projeção ortogonal (sombra) x’ no plano H (estamos seguindo aqui a notação de Azambuja Filho (1983, p. 15-17)). A sombra de qualquer conjunto X, contido no semi-espaço superior é, por definição, o conjunto X’, contido em H, formado pelas *sombras* dos pontos de X.

A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazio) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P. Segue que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P.

O fato anterior pode ser reformulada do seguinte modo: Seja P’ a sombra do poliedro P, cada ponto da sombra P’ é sombra de um ou de dois pontos de P. Ora, a sombra P’ do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno Γ’

é a sombra de uma poligonal fechada Γ, formada por arestas de P. Cada ponto de Γ' é sombra de um único ponto de P (pertencente a Γ). A poligonal Γ é chamada o *contorno aparente* do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a Γ') é sombra de 2 pontos de P.

Se dois pontos de P têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos ponto *iluminado*; o mais baixo será chamado *sombrio*. Assim, o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos *iluminados*, o conjunto dos pontos *sombrios* e o *contorno aparente*.

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados ABCD e A'B'C'D' como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical e suas projeções, no plano, seja o mesmo ponto y'), as faces AA'B'B, AA'D'D e ABCD são iluminadas e as outras 3 faces são sombrias (Figura 15).

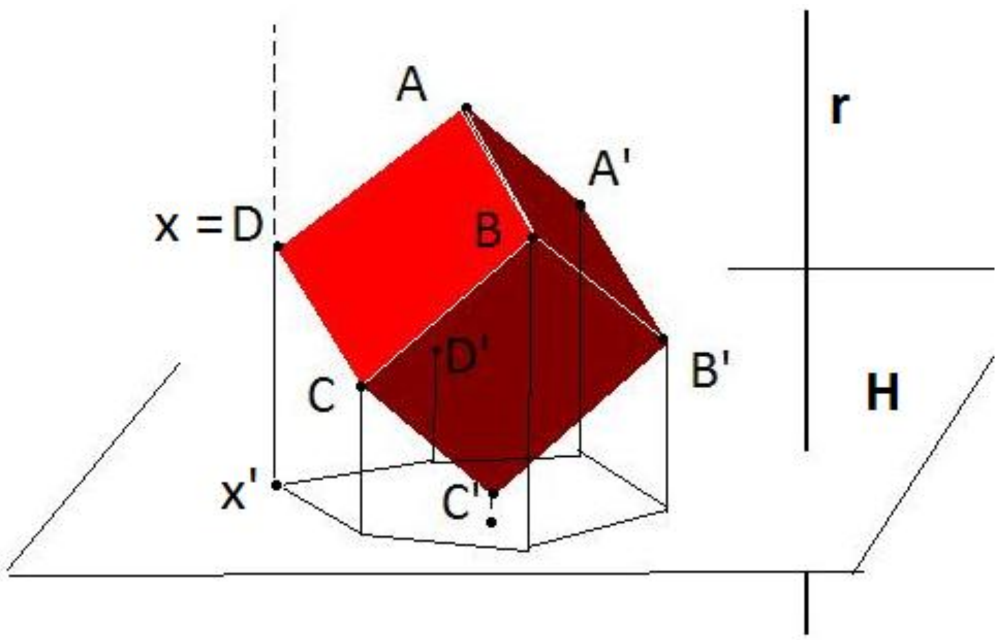


Figura 15: Cubo "pendurado pelo vértice A"- Faces iluminadas e sombrias. (Projeção ortogonal dos pontos do cubo no plano H) .

Observemos que neste exemplo, os vértices A' B' B C D D' são aparentes, A é iluminado e C' é sombrio (A e C' tem a mesma sombra). Ainda, o contorno aparente será a poligonal A'B'BCDD'A' e Γ' é a sombra desse contorno, ou seja, a poligonal fechada Γ', como na figura:

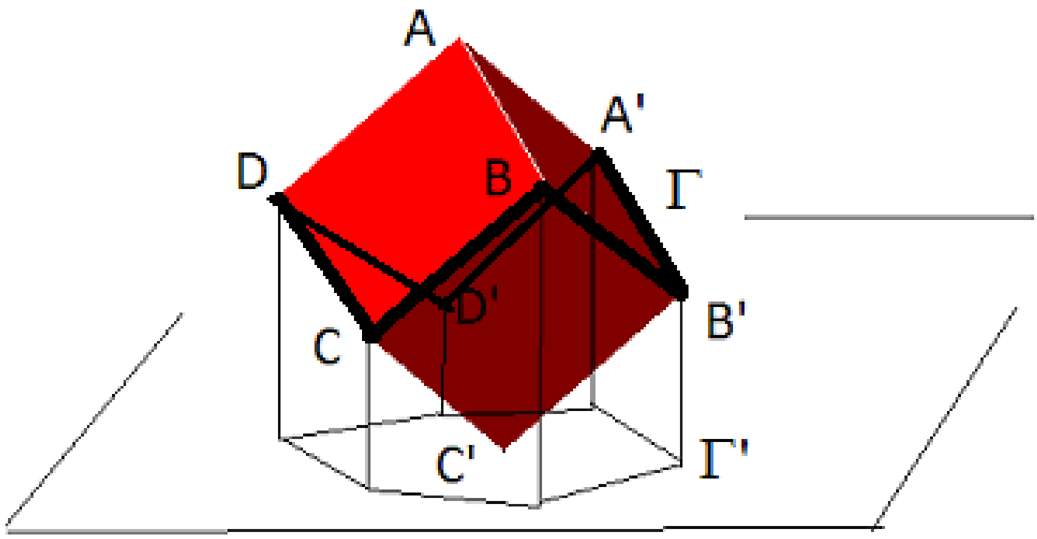


Figura 16: Cubo “pendurado pelo vértice A”- Contorno aparente.

Considere P_1 o conjunto formado pelos pontos iluminados de P, unido com o contorno aparente Γ, e seja P_1’ a sombra de P_1. Temos claramente uma correspondência biunívoca entre os elementos de P_1 e P_1’.

No exemplo (cubo), P_1’ é formado pela reunião dos polígonos justapostos Q_1 (sombra da face iluminada ABCD); Q_2 (sombra da face iluminada AA’BB’) e Q_3 (sombra da face iluminada AA’DD’), como mostrado na figura seguinte:

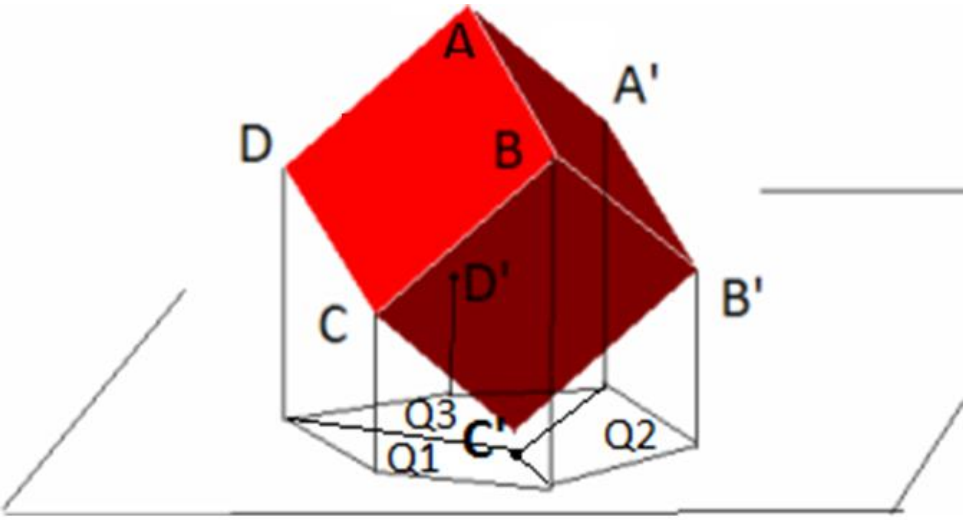


Figura 17: Cubo - Região P1’ (sombra das faces iluminadas unido com contorno).

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto P_2, formado pelos pontos sombrios de P unido com o contorno aparente Γ. A regra que associa a cada ponto de P_2 a sua sombra, também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P’.

Escreveremos P_2' para indicar a sombra de P_2, expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P contidas em P_2 (o que nos dá também uma reunião de polígonos justapostos).

Calculemos então a soma de todos os ângulos das faces de P. Observemos que a soma dos ângulos internos de uma face F_k de P é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra F_k' (já que a reta r escolhida não é paralela a nenhuma face e a sombra de um polígono de n lados será um polígono de n lados). Ao considerar a parte iluminada e a parte sombria de P, temos que há V_1 vértices iluminados, V_2 vértices sombrios e V_0 vértices no contorno aparente Γ. Temos assim que o número de vértices do poliedro é:

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

Notemos ainda que V_0 é também o número de vértices (e de lados) da poligonal Γ', contorno do polígono convexo P'. A face iluminada nos dá então um polígono convexo com V_0 lados, V_0 vértices e que possui V_1 pontos interiores que são os vértices iluminados de P. Analogamente, a face sombria também possui o mesmo número de lados V_0, mas por sua vez possui V_2 pontos interiores.

Temos ainda que $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos das faces iluminadas e S_2 é a soma dos ângulos internos das faces sombrias. Para calcular S_1, usamos a observação anterior que a soma dos ângulos internos de uma face F_k de P é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra F_k'. Daí S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos polígonos convexos nos quais está decomposto o polígono convexo P_1', sombra de P_1. Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo face por face.

Em P_1' temos V_1 vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno Γ' (sombra do contorno aparente Γ). A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos (4 ângulos retos). A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno Γ' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados.

No exemplo ilustrativo a seguir, os vértices interiores (sombras de certos vértices iluminados) são X' e Y', de modo que teríamos $V_1 = 2$, os demais vértices pertencem a Γ', i. e., são sombras de vértices do contorno aparente, e no caso teríamos $V_0 = 7$.

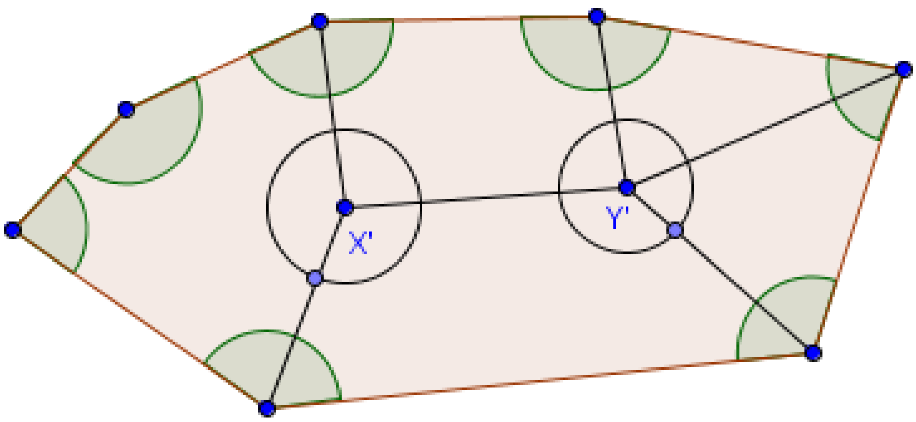


Figura 18: Analisando a soma dos ângulos de uma possível região P_1'.

Calculando S_1 e S_2, temos então:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi (V_0 - 2),$$
$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi (V_0 - 2).$$

Somando S_1 e S_2 , obtemos:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi (V_0 - 2),$$
$$S = 2\pi (V_1 + V_2 + V_0 - 2),$$
$$S = 2\pi (V - 2). \qquad (**)$$

Comparando as equações obtidas em (*) e (**) temos:

$$2\pi (A - F) = 2\pi (V - 2).$$

Dividindo ambos os membros por 2π obtemos que $A - F = V - 2$ e temos então a Relação de Euler:

$$\mathbf{V - A + F = 2}.$$

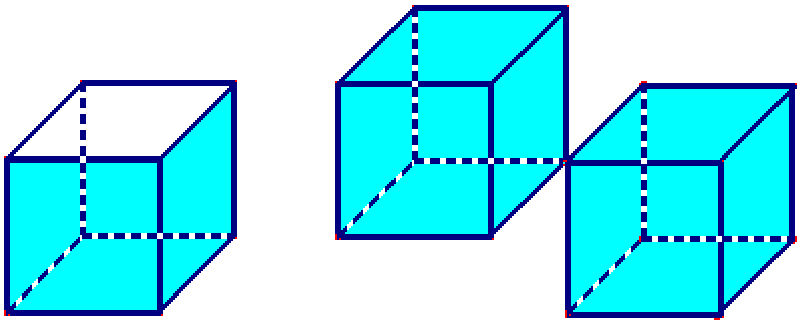
■

2.2 Teorema de Euler (segundo Cauchy - Lima)

Apresentaremos a seguir a demonstração do Teorema de Euler dada por Cauchy e adaptada/corrigida por Lima (1991, p. 74-82). De fato, a versão do teorema terá as hipóteses necessárias para que a prova dada (de acordo com Cauchy e complementada por Lima) esteja correta. Assim, podemos chamar tal resultado de Teorema de Euler segundo *Cauchy-Lima*.

Observamos, inicialmente, que na demonstração de Cauchy, um "*poliedro"* (vide LIMA (1991, p. 76)), significa apenas *uma reunião de um número finito de polígonos convexos, cujas faces estejam* "*regularmente dispostas*", isto é, a interseção $F_1 \cap F_2$ de duas faces de P (distintas) seja uma aresta comum, um vértice comum a F_1 e F_2, ou seja, vazia. Assim, por exemplo, um "cubo sem a tampa" é um "poliedro". Também é um "poliedro" dois cubos ligados por um vértice (Figura 19).

Notemos que tais "poliedros" (Figura 19) não são poliedros de acordo com a definição adotada neste trabalho (Definição 1). Para fazer uma pequena diferenciação entre os dois tratamentos, sempre que usarmos o termo "poliedros" ou "poliedro" (entre aspas) estaremos nos referindo aos *poliedros* considerados por Cauchy.



(a) (b)

Figura 19: Exemplos de "poliedros" (*definição de Cauchy*).

Para enunciarmos o teorema, seguindo Lima, precisamos de mais alguns conceitos.

Definição 4:

Uma aresta de um "poliedro" é aresta *livre* quando é lado de apenas uma face. Chama-se *bordo* de um "poliedro" à reunião de suas arestas livres. Um *ciclo* num "poliedro" P é uma linha poligonal fechada, cujos lados são arestas de P. Um ciclo γ contido em P é um *bordo* quando existe um "subpoliedro" Q de P tal que γ é o conjunto de arestas livres de Q (um "subpoliedro" de P é a reunião de algumas faces de P). Duas faces quaisquer T e T' de um "poliedro" P são *encadeadas* quando existe uma sequência T_1, T_2,..., T_n de faces de P tais que T_1 = T , T_n = T' e, para i = 1, 2, ..., n-1, a interseção $T_i \cap T_{i+1}$ é uma aresta comum a T_i e T_{i+1}.

Na Figura 19 (parte (b) - reunião de dois cubos) tem-se um “poliedro” em que duas faces quaisquer não são encadeadas. Note que cada aresta desse “poliedro” está contida exatamente em duas faces.

Definição 5:

Um poliedro P é *conexo* quando não é possível escrevê-lo como reunião de dois “subpoliedros” (não vazios) cuja interseção é vazia. O que equivale a afirmar que dois vértices quaisquer de P podem ser ligados por uma poligonal formada por arestas de P. (LIMA, 1991, p.91).

Lema 1:

Dado um poliedro P, considere as condições:

(i) Toda aresta de P está contida exatamente em duas faces de P;

(ii) Duas faces quaisquer de P são encadeadas;

(iii) Todo ciclo em P é um bordo.

Então:

(1) A condição (ii) implica que P é conexo.

(2) A condição (i) implica que o poliedro inicial P possui pelo menos uma face sem arestas livres (de fato, qualquer face do “poliedro” inicial não possui arestas livres).

(3) Se P satisfaz (ii), então (iii) é equivalente ao fato que *todo “subpoliedro” próprio de P tenha arestas livres.*

Demonstração: Vide Lima (1991).

Teorema 2: (Teorema de Euler segundo Cauchy-Lima).

Seja P um “poliedro” no qual:

(i) Toda aresta de P está contida exatamente em duas faces de P;

(ii) Duas faces quaisquer de P são encadeadas;

(iii) Todo ciclo em P é um bordo.

Então P cumpre a relação de Euler $V - A + F = 2$, sendo V o número de vértices de P, A o número de arestas e F o número de faces.

Demonstração:

Seja P um poliedro nas hipóteses do teorema. Esta demonstração, como já mencionado, tem como referência Lima (1991, p. 74-82) e está dividida em 5 etapas.

***1ª Etapa* (*retirando uma face*):**

Retira-se, inicialmente, uma face deste “poliedro”, obtendo um novo objeto, o “poliedro modificado”. Para esse “poliedro” tem-se que o número de vértices V e o número de arestas A não se alteram, enquanto que o número de faces F diminui uma unidade (quando comparado com o “poliedro” inicial P). Isso acontece porque, de acordo com a hipótese, cada aresta está contida em duas faces (de modo que essa face retirada não tem arestas livres no “poliedro” inicial). Dessa forma, provar a relação de Euler para P é equivalente a provar que o “poliedro modificado”, que vamos indicar por Q, cumpre a relação V – A + F = 1. Para ser mais preciso, escrevemos $V_Q - A_Q + F_Q = 1$, para indicar que estamos trabalhando com os números de vértices, arestas e faces de Q. Como já observado, o objeto Q resultante, não é um poliedro, de acordo com a definição adotada neste trabalho (Definição 1), porém é um “poliedro” de acordo com Cauchy.

***2ª Etapa* (*achatando o “poliedro” resultante*):**

O “poliedro” modificado Q possui arestas *livres*, que são os lados da face que foi retirada. Estica-se esse “poliedro modificado” a partir de suas arestas livres (supondo-o feito de um material elástico), de modo a obter uma figura plana que também vamos indicar por Q (aqui não estamos planificando o “poliedro”, pois as arestas (não livres) permanecem coladas às duas faces das quais ela é lado). Nesse processo temos que o número de vértices V, arestas A e faces F se mantêm constantes. Este achatamento pode ser feito projetando o poliedro modificado sobre um plano, a partir de um ponto situado próximo da face omitida e que nenhuma semirreta que parta do centro da projeção contenha mais de um ponto do “poliedro”. Ao imaginar a origem dessas semirretas como foco luminoso, o modelo achatado do “poliedro” é sua sombra sobre o plano de projeção.

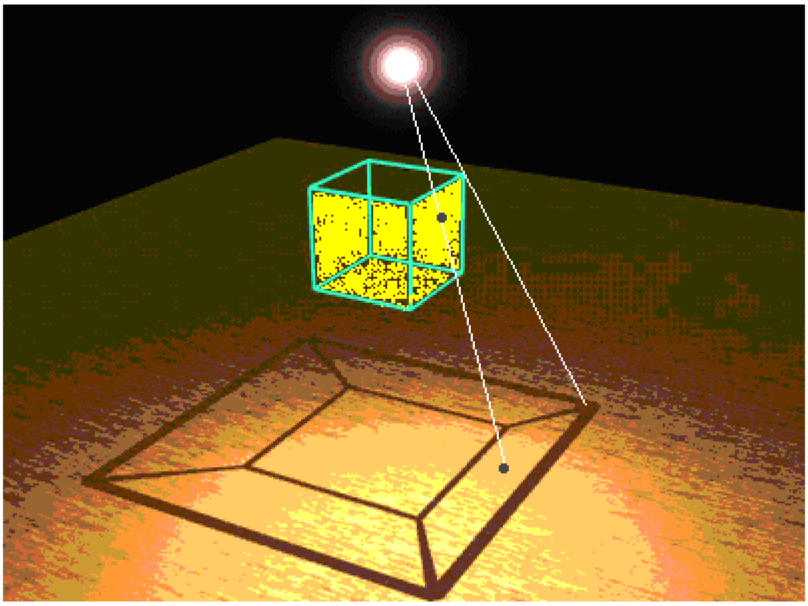


Figura 20: Cubo sem uma face (*foco luminoso e poliedro achatado no plano*).

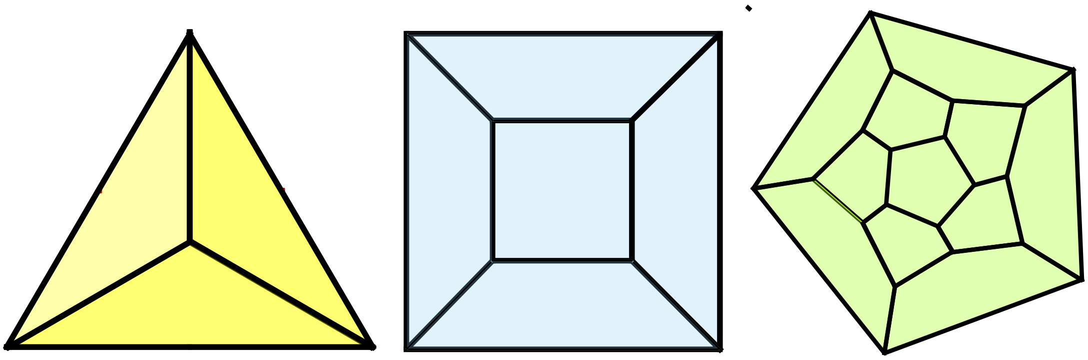


Figura 21: Tetraedro, cubo e dodecaedro modificados e achatados.

***3ª Etapa* (*Triângularizando o poliedro achatado*):**

São traçadas diagonais, que não se cortam, nas faces/poligonos do "poliedro modificado e achatado", de modo que cada face fica dividida em triângulos. Ao traçar cada diagonal que não intersecta as outras, temos que o número de vértices V não se altera, enquanto que o número de arestas A e faces F aumentam de uma unidade. Logo, a cada diagonal traçada o número V – A + F não se altera (quando comparado com o que se tinha anteriormente). Assim, podemos supor que todas as faces do poliedro são triângulares. A figura seguinte mostra o "cubo modificado" depois das três primeiras etapas.

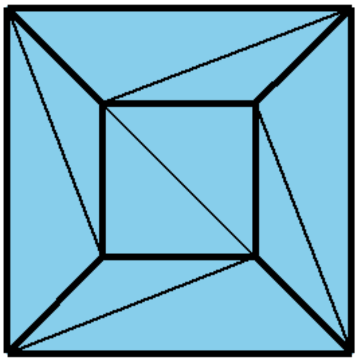


Figura 22: “Cubo achatado” e com faces triangulares.

***4ª Etapa* (*Retirando-se uma a uma as faces que possuem aresta livre – “despetalando” o poliedro*):**

Retira-se do “poliedro achatado (plano)” Q uma a uma as faces (que são agora triângulos) que possuem *alguma aresta livre*. Ao retirar cada face que tem uma aresta livre, o número $V_S – A_S + F_S$ da nova figura S obtida (que pode ser conexa ou não), não se altera, isto é,

$$V_S – A_S + F_S = V_Q – A_Q + F_Q.$$

De fato, notemos que há seis possibilidades a serem consideradas ao retirar uma face triangular T com pelo menos uma aresta livre. As duas primeiras, foram consideradas por Cauchy e são:

(1) ter apenas uma aresta livre;

(2) ter duas arestas livres (e um vértice livre).

Mas existem mais quatro possibilidades (vide Lima, 1991, p. 78):

(a) ter duas arestas livres, mas nenhum dos seus vértices é livre,

(b) ter três arestas livres, mas nenhum dos seus vértices é livre,

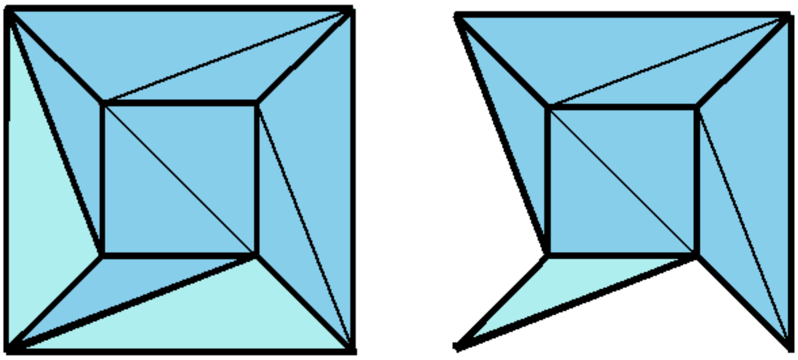
(c) ter três arestas livres e um vértices livre,

(d) ter três arestas livres e dois vértices livres.

Segundo a análise feita por Lima (1991), admitir, que só ocorrem as duas possibilidades (1) e (2) (para as faces com aresta livre) é a parte em que a demonstração de Cauchy se mostra mais deficiente.

Analisemos primeiramente as duas situações consideradas por Cauchy. Ao retirarmos uma face triangular com apenas uma aresta livre (como, por exemplo, um dos dois triângulos (azul claro) indicados na Figura 23 (a)), o número de vértices V não muda e o número de arestas A e faces F, diminuem ambos uma unidade, mantendo V – A + F constante (e o “subpoliedro” resultante é conexo).

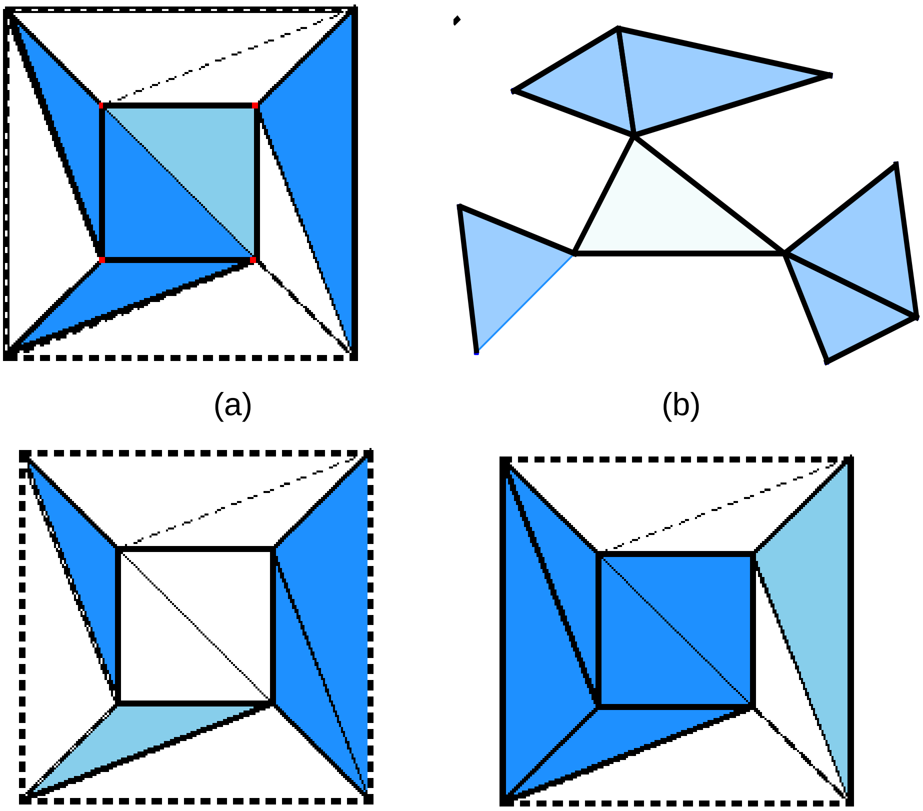
Ao retirar um triângulo com duas arestas livres (e um vértice livre), como na Figura 23 (b), o número de vértices V e faces F diminui uma unidade enquanto que o número de arestas diminui duas unidades, o que também mantém V – A + F constante (e o “subpoliedro” resultante é conexo).



(a) (b)

Figura 23: (a) Dois *triângulos com uma aresta livre;*
(b) *Triângulo com duas arestas livres.*

Vejamos agora os demais casos (como os ilustrados na figura seguinte; três deles foram ilustrados a partir do cubo):



(a) (b)

(c) (d)

Figura 24: Outras possibilidades para a face triangular T a ser retirada (indicadas em azul mais claro).

Analisando o caso (a), observa-se que ao retirar uma face T do tipo (a), o que o ocorre com o “novo poliedro resultante”, que vamos indicar por S, é o seguinte, V fica constante, diminui A de duas unidades e F de uma, o que faz V – A + F aumentar de uma unidade (melhor entendendo, se Q_1 indica o poliedro da fase anterior e S o poliedro obtido de Q_1 ao retirar T, tem-se $V_S - A_S + F_S = V_{Q1} - (A_{Q1} - 2) + (F_{Q1} - 1) = V_{Q1} - A_{Q1} + F_{Q1} + 1$). Porém, o número de componentes conexas também aumenta de uma unidade (núm. componentes(S) = núm. componentes(Q_1) +1). Para mais detalhes dessa afirmação ver Lima (1991, p. 79). Daí aplica-se em cada uma das componentes o processo de retirar as faces com arestas livres (despetalar). No caso (b), ao retirar uma face de tal tipo, o que o ocorre com o “poliedro resultante” S, é o seguinte: V fica constante, diminui A de três unidades e F de uma, o que faz V – A + F aumentar de duas unidades (de modo que se Q_1 indica o poliedro da fase anterior e S o poliedro obtido de Q_1, ao retirar T, tem-se

$$V_S - A_S + F_S = V_{Q1} - (A_{Q1} - 3) + (F_{Q1} - 1) = V_{Q1} - A_{Q1} + F_{Q1} + 2.$$

E neste caso, o número de componentes conexas aumenta de duas unidades (núm. componentes(S) = núm. componentes(Q_1) +2).

O caso (c) é similar ao caso (a).

Finalmente o caso (d) é bem simples, pois ao retirarmos uma tal face triangular, V diminui de duas unidades, diminui A de três unidades e F de uma, o que faz com que V – A + F mantenha constante (quando comparado com o poliedro anterior). Notemos que neste caso não há aumento do número de componentes conexas.

***5ª Etapa* (*conclusão*):**

A relação $V_Q - A_Q + F_Q = 1$, para o “poliedro achatado” vai acontecer sempre, independente do tipo de face triangular com aresta livre que for retirada. Daí, como observado no início da 1ª etapa, obtém-se, para o poliedro inicial P, a relação (de Euler) $V_P - A_P + F_P = V_Q - A_Q + F_Q + 1 = 2$, tendo em vista que Q foi obtido de P por retirar uma face (sem arestas livres e depois achatar).

De fato, suponhamos, inicialmente (seguindo Cauchy), que as faces retiradas sejam do tipo (1) ou (2). Então ao retirar uma a uma as faces/triângulos que possuem alguma aresta livre (o novo poliedro obtido será sempre conexo) e chega-se, finalmente, à última face, que é uma face triangular, e tem-se (para essa face T) $V_T - A_T + F_T = 1$. Como nas mudanças efetuadas, passo a passo, a partir do “poliedro” achatado Q, sempre se mantém constante o número $V_Q - A_Q + F_Q$ (do poliedro achatado Q), segue que $V_Q - A_Q + F_Q = V_T - A_T + F_T = 1$.

Agora, consideramos os outros tipos apontados por Lima. Como vimos, se uma face do tipo (a) foi retirada, então o novo “poliedro” S terá uma componente conexa a mais e V – A + F aumenta de uma unidade. Suponhamos que a seguinte situação ocorra: Q_1 seja (conexo) obtido de Q (“poliedro achatado”, após já ter sido retirado algumas faces com arestas livres) e, agora, uma face do tipo (a) seja retirada de Q_1, de modo que o “poliedro” S obtido tenha duas componentes S_1 e S_2, ($S = S_1 \cup S_2$). Suponhamos também, que no despetalamento de S_1 e S_2 só apareçam arestas do tipo (1) e (2) até chegarmos em um único triângulo Ti, para cada componente S_i, i = 1, 2. Então raciocinando (em cada componente) como no caso considerado por Cauchy, teremos

$V_{S1} - A_{S1} + F_{S1} = V_{T1} - A_{T1} + F_{T1} = 1$ e $V_{S2} - A_{S2} + F_{S2} = V_{T2} - A_{T2} + F_{T2} = 1$.

Logo, $V_{Q1} - A_{Q1} + F_{Q1} = (V_{S1} - A_{S1} + F_{S1}) + (V_{S1} - A_{S1} + F_{S1}) = 2$. Daí, tem-se (usando que $V_S - A_S + F_S = V_{Q1} - A_{Q1} + F_{Q1} + 1$, como visto na etapa anterior),

$$V_Q - A_Q + F_Q = V_{Q1} - A_{Q1} + F_{Q1} = V_S - A_S + F_S - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Tendo em vista que (ao retirar uma face com arestas livres) o aumento de unidades de “V - A + F” está em correspondência com o aumento do número de componentes, este raciocínio se aplica em qualquer situação, de modo que obteremos sempre $V_Q - A_Q + F_Q = 1$, como afirmado no início.

■

Observações:

(1) Não só os poliedros convexos satisfazem as hipóteses do Teorema de Euler (versão Cauchy). Por exemplo, um poliedro não convexo, como apresentado na Figura 25, satisfaz as hipóteses do teorema, de modo que para esse poliedro foi provado (na versão de Cauchy) que vale a relação de Euler.

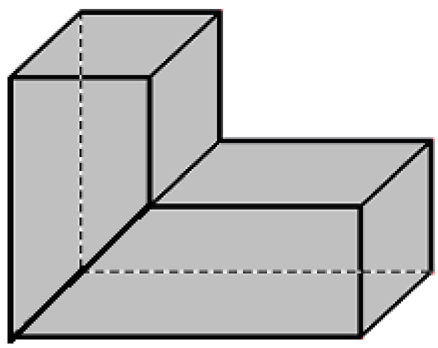


Figura 25: Poliedro não convexo.

(2) Pode-se mostrar que um “poliedro” P satisfaz a hipótese do teorema anterior (Cauchy) se e somente se a realização geométrica de P (visto como um subespaço de R^3) é *homeomorfo* a uma esfera (mas isso não é de fácil verificação, como observado em Lima (1991, p.12)).

2.3 O Teorema de Euler e os Poliedros de Platão

No estudo de poliedros convexos, um fato interessante a ser ressaltado, é a existência de apenas cinco poliedros convexos regulares, conhecidos como Poliedros de Platão. Usaremos o Teorema de Euler para demonstrar a existência desses cinco poliedros.

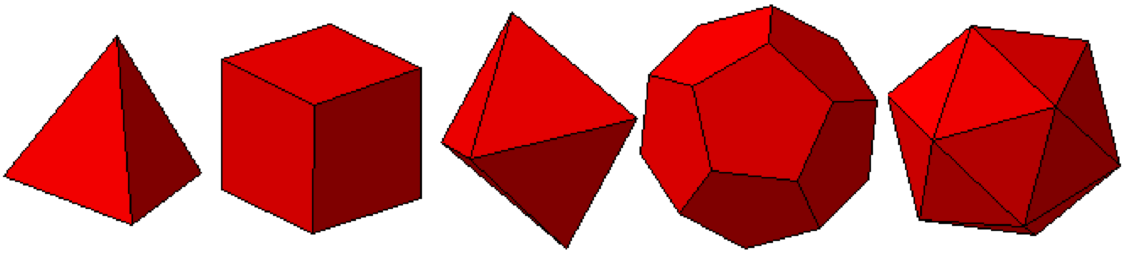


Figura 26: Poliedros de Platão (*tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro*).

Teorema 3:

Existem apenas cindo poliedros regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Demonstração:

Considere um poliedro (convexo) regular P com V vértices, A arestas e F faces. Denotemos por n o número de lados do polígono que forma cada face e por p o número de arestas concorrentes em cada vértice de P. Temos então a relação 2 A = n F e 2A = p V, que nos dá:

$$A = \frac{nF}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p}.$$

Substituindo A e V na relação de Euler (dada pelo teorema anterior), temos:

$$V - A + F = 2 \Leftrightarrow \frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Leftrightarrow \frac{2nF - pnF + 2pF}{2p} = 2 \Leftrightarrow$$

$$F.(2n - pn + 2p) = 4p \Leftrightarrow F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}. \ (*)$$

Uma vez que o número de faces (F) e o número (p) de arestas concorrentes em cada vértice são números naturais, devemos ter:

$$2p + 2n - pn > 0 \Leftrightarrow 2n > pn - 2p \Leftrightarrow 2n > p\,(n - 2) \Leftrightarrow \frac{2n}{n-2} > p.$$

Como o número de arestas (p) concorrentes em cada vértice em um poliedro deve ser maior ou igual a 3, temos então:

$$\frac{2n}{n-2} > 3 \Leftrightarrow \frac{2n}{n-2} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{6-n}{n-2} > 0,$$

de modo que $2 < n < 6$, ou seja o número de lados dos polígonos (que são as faces do poliedro P), deve ser n = 3, 4 ou 5.

Analisemos assim os possíveis valores de p e F, para n natural, satisfazendo a desigualdade acima.

(I) Observemos que quando n = 3 o poliedro encontrado é formado apenas por triângulos, substituindo em (*), temos então $F = \frac{4p}{6-p}$, de modo que $3 \leq p < 6$.

Para p = 3, temos que F = 4, ou seja, obtemos o tetraedro (regular).

Para p = 4, temos que F = 8, ou seja, obtemos o octaedro.

Para p = 5, temos que F = 20, ou seja, obtemos o icosaedro.

(II) Observemos que quando n = 4 o poliedro é formado apenas por quadrados e temos $F = \frac{2p}{4-p}$, dessa forma, o único valor possível para p é 3 (já que $3 \leq p < 4$).

Para p = 3, temos que F = 6, ou seja, o poliedro é o cubo.

(III) Observemos que quando n = 5 o poliedro regular é formado apenas por pentágonos, e de (*) temos $F = \frac{4p}{10-3p}$. Novamente o único valor possível é p = 3 (pois $3 \leq p < 10/3$).

Para p = 3, temos que F = 12, ou seja, obtemos o dodecaedro.

Por (I), (II) e (III), tem-se então que há apenas cinco poliedros regulares, o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. ■

CAPÍTULO 3: OS POLIEDROS EM CERTOS DOCUMENTOS OFICIAIS

3.1 O Estudo dos Poliedros segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática no Ensino Fundamental (5ª série/6º ano à 8ª série/9º ano)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), o Ensino Fundamental deve ter os seguintes objetivos:

> - compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
> posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
> - conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
> - conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
> - perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
> - desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
> - conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
> - utilizar as diferentes linguagens - verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal - como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
> - saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
> - questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (BRASIL, 1998, p. 7-8).

Em relação à Matemática, os PCN apontam que se deve ensinar a Matemática visando a construção da cidadania de forma que os alunos durante o ensino fundamental sejam capazes de:

> - identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> - fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
> - selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
> - resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> - comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
> - estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
> - sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
> - interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998, p. 47 - 48).

No Ensino Fundamental os conteúdos matemáticos abrangem o estudo dos números e operações, envolvendo aritmética e álgebra, o estudo do espaço e das formas, onde podemos tratar da geometria, o estudo das grandezas e medidas, que relaciona aritmética, álgebra e também geometria e o tratamento da informação, que envolve a análise de tabelas, gráficos, estatística e também probabilidade e combinatória. Temos assim quatro temas a serem abordados:

- Tema 1: Números e Operações
- Tema 2: Espaço e Forma
- Tema 3: Grandezas e Medidas
- Tema 4: Tratamento da informação

O estudo dos poliedros esta inserido tanto no tema que compreende espaço e forma quanto no tema que envolve grandezas e medidas.

No terceiro ciclo do ensino fundamental, ou seja, 5ª série / 6º ano e 6ª série / 7º ano, a abordagem dada aos poliedros dentro do tema espaço e forma, está relacionada com as planificações das figuras espaciais e também de sua composição e decomposição. Neste ciclo é importante que os alunos tenham uma visão concreta, através da observação e manuseio dos sólidos geométricos onde os mesmos devem observar as principais características, formas e fazer conjecturas de propriedades e relações existentes.

Ainda no terceiro ciclo, o estudo dos poliedros pode ser tratado com o objetivo de ampliar a compreensão do aluno sobre o processo de medição, dentro do tema grandezas e medidas, podendo envolver relações entre comprimento, massa, capacidade, superfície, aprimorando o sentido real das medidas.

Em relação à conceitos e procedimentos no terceiro ciclo, dentro do tema espaço e forma e grandeza e medidas, de acordo com os PCN, podemos tratar o estudo dos poliedros através das seguintes abordagens:

> Espaço e Forma [...]
> - Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
> - Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
> - Composição e decomposição de figuras planas.
> - Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros. [...]
> - Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números. [...]
>
> Grandezas e Medidas
> - Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria. [...]
> - Obtenção de medidas por meio de estimativas e aproximações e decisão quanto a resultados razoáveis dependendo da situação-problema.
> - Utilização de instrumentos de medida, como régua, escalímetro, transferidor, esquadro, trena, relógios, cronômetros, balanças para fazer medições, selecionando os instrumentos e unidades de medida adequadas à precisão que se requerem, em função da situação-problema. [...]
> - Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.

> - Estabelecimento de conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo) em resolução de situações-problema. (BRASIL, 1998, p. 72-74).

O quarto ciclo do ensino fundamental compreende a 7ª série/8º ano e a 8ªsérie /9º ano, onde o pensar geométrico deve estar voltado de modo a explorar as transformações e estabelecer relações métricas tanto bidimensionais como tridimensionais, atentando para congruência e semelhança e também situações que envolvam paralelismo e perpendicularismo, nesse ciclo ainda, deve-se obter e fazer o uso de fórmulas para calcular área de superfícies planas e também volumes de sólidos geométricos.

As situações de aprendizagem a serem desenvolvidas neste ciclo deve fazer o aluno perceber que a Matemática é um saber científico que possui papel fundamental em nossa cultura, nesta fase o aluno deve desenvolver a capacidade de pensar de forma abstrata e mais clara. Neste sentido, os conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos que envolvem os poliedros, segundo os PCN, podem ser tratados em:

> Espaço e Forma [...]
> - Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
> - Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
> - Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas. [...]
> - Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer. [...]
> Grandezas e Medidas
> - Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados. [...]
> - Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos. [...]
> - Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes. (BRASIL, 1998, p. 88-89).

3.2 O Estudo dos Poliedros segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

Nos PCN+ do Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2002) foram desenvolvidas com o objetivo de um trabalho pedagógico que permite a relação entre as áreas do conhecimento e que possibilite o desenvolvimento de competências e habilidades através de temas estruturadores que vão muito além do conteúdo específico de cada disciplina.

As competências matemáticas que um aluno deve desenvolver durante todo o Ensino Médio, possibilitando a integração dos saberes científicos, cultural e com articulação lógica estão estruturadas em três temas, são eles:

- Tema 1: Álgebra: números e funções
- Tema 2: Geometria e medidas
- Tema 3: Análise de dados

O estudo dos poliedros está englobado no Tema 2, onde as formas bidimensionais e tridimensionais, planificações e suas representações fazem parte do mundo concreto devido à variedade de objetos e espaços encontrados na vida cotidiana. O Tema 2 ainda é subdividido em quatro unidades temáticas:

- Geometrias Plana
- Geometria Espacial
- Geometria Métrica
- Geometria Analítica

A Geometria pode ser tratada de duas formas distintas, uma associada ao conceito de posição das formas e outra associada às medidas. Pode-se assim desenvolver competências e habilidades tanto em identificar propriedades das figuras e sólidos geométricos, como também quantificar, através de problemas envolvendo comprimentos, áreas e volumes.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias enfatizam a visualização e representação de acordo com a compreensão do mundo real, envolvendo a Geometria e também outras disciplinas, sempre buscando o desenvolvimento de resolução de problemas, argumentação lógica, aplicações, propriedades e relações:

> Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos.
> O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. (BRASIL, 2002, p.123-124).

Temos ainda que os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos envolvendo Geometria, devem estar de acordo com as unidades temáticas:

> **1. Geometria plana:** semelhança e congruência; representações de figuras.
> • Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.
> • Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.
> • Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.
> • Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.
> • Fazer uso de escalas em representações planas.
> **2. Geometria espacial:** elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.
> • Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
> • Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
> • Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
> • Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.
> **3. Métrica:** áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.
> • Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
> • Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
> • Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.
> **4. Geometria analítica:** representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

> • Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
> • Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
> • Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
> • Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2002, p. 125).

Ao se trabalhar os poliedros, o professor deve ter sempre como critério o desenvolvimento das competências descritas de acordo com a unidade temática de modo que os alunos avancem sempre em relação aos saberes que já possuem. Devemos buscar aplicações e uma abordagem com relevância cultural e científica.

3.3 O Estudo dos Poliedros segundo o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias

O Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias no Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio (SÃO PAULO, 2010), é baseado em três eixos norteadores, são eles:

> - o eixo **expressão/compreensão**: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto ate a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc.
> - o eixo **argumentação/decisão**: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a construção de consensos e a viabilização da comunicação, da ação comum, além da capacidade de decisão, de elaboração de sínteses dos resultados, tendo em vista a proposição e a realização da ação efetiva.
> - o eixo **contextualização/abstração**: a capacidade de contextualização, de enraizamento dos conteúdos estudados na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo do trabalho – e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de potencialidades no que ainda não existe. (SÃO PAULO, 2010, p. 31-32).

A Geometria deve ser tratada, inicialmente, no sentido de representar e classificar tanto formas planas como espaciais, os poliedros devem ser trabalhados de forma concreta através de uma abordagem espiralada, ou seja, os conteúdos podem ser trabalhados em todas as séries, diferenciando-se assim apenas o enfoque dado aos conteúdos nas diferentes séries dentro de uma escala de tratamento à esse tema.

Os conteúdos, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias, privilegiam ideias fundamentais de natureza transdisciplinar, os temas a serem desenvolvidos visam o desenvolvimento de habilidades e competências e construção de significados. Os temas desenvolvidos por bimestre devem articular os conteúdos relevantes. O estudo dos poliedros consta, explicitamente, no Ensino Fundamental (Ciclo II), no conteúdo da 6ª série/7º ano (2º bimestre), na 2ª série do Ensino Médio (4º bimestre) e também é tratado no 4º bimestre da 7ª série/8º ano quando refere-se ao cálculo do volume de um prisma.

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
2º Bimestre	**Geometria** Geometria • Ângulos • Polígonos • Circunferência • Simetrias • Construções geométricas • Poliedros	• Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos • Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia • Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de *n* lados • Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas • Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista • Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais

Figura 27: Conteúdos e Habilidades de Matemática referente ao 2º bimestre da 6ª série / 7º ano do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2010, p. 59).

Na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental, o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009a), traz atividades fazendo a conexão entre a Matemática e a Arte, podendo se observar padrões e simetrias nas pinturas desenhos e arquitetura. Há atividades também relacionadas à representação, classificação e propriedades dos poliedros.

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
4º Bimestre	**Geometria** Geometria • Teorema de Tales • Teorema de Pitágoras • Área de polígonos • Volume do prisma	• Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos • Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares • Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes

Figura 28: Conteúdos e Habilidades de Matemática referente ao 4º bimestre da 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2010, p. 62).

Na 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental, o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009b), traz atividades relacionadas ao cálculo de volume (interior) de alguns poliedros como, por exemplo, os prismas. As atividades propostas estão sempre relacionadas à resolução de problemas.

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
4º Bimestre	**Geometria** Geometria métrica espacial • Elementos de geometria de posição • Poliedros, prismas e pirâmides • Cilindros, cones e esferas	• Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas) • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos • Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres

Figura 29: Conteúdos e Habilidades de Matemática referente ao 4º bimestre da 2ª série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2010, p. 68).

Na 2ª série do Ensino Médio, no Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009c), o tema poliedro é introduzido através da observação das formas espaciais do cotidiano, a partir daí se tem uma abordagem voltada para geometria espacial métrica e verificação de propriedades, além de resolver situações-problema envolvendo poliedros, como os prismas e pirâmides, de maneira contextualizada.

3.4 Os Poliedros nas Matrizes de Referência para Avaliação do SARESP

O SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) consiste de uma avaliação elaborada com base no Currículo do Estado de São Paulo, com o objetivo de verificar as competências e habilidades que os alunos desenvolvem. O SARESP é aplicado nas escolas do Estado de São Paulo, é através desta avaliação que se calcula o índice de desenvolvimento dos alunos em relação à sua aprendizagem.

> [...] os conteúdos, competências e habilidades apontados [...], indicam as bases conceituais da matriz proposta para avaliação. Com isso, configuram-se as referências que possibilitam, de um lado, a construção das provas por seus elaboradores, e de outro, a posição (segundo níveis de desempenho) dos alunos que as realizarem. Os indicadores relativos a esta posição são obtidos por uma Escala de Proficiência, por intermédio da qual se define o quanto e o quê cada aluno ou escola realizaram no contexto desse exame. (SÃO PAULO, 2009d, p. 11).

Os indicadores de aprendizagem é todo baseado nas competências e habilidades a serem desenvolvidas em relação aos conteúdos das disciplinas, sempre no sentido de integração e articulação dos saberes.

Em relação às habilidades a serem desenvolvidas, ou seja, aos indicadores de aprendizagens tem-se:

> As habilidades possibilitam inferir, pela Escala de Proficiência adotada, o nível em que os alunos dominam as competências cognitivas, avaliadas relativamente aos conteúdos das disciplinas e em cada série ou ano escolares. Os conteúdos e as competências (formas de raciocinar e tomar decisões) correspondem, assim, às diferentes habilidades a serem consideradas nas respostas às diferentes questões ou tarefas das provas. (SÃO PAULO, 2009c, p. 13).

O currículo enfatiza também competências que retrata estruturas conceituais das disciplinas:

> Competências cognitivas são modalidades estruturais da inteligência. Modalidades, pois expressam o que é necessário para compreender ou resolver um problema. Ou seja, valem por aquilo que integram, articulam ou configuram como resposta a uma pergunta. Ao mesmo tempo, são modalidades porque representam diferentes formas ou caminhos de se conhecer. Um mesmo problema pode ser resolvido de diversos modos. Há igualmente muitos caminhos para se validar ou justificar uma resposta ou argumento. (SÃO PAULO, 2009d, p. 14).

Dentro das Matrizes de Referência para Avaliação do SARESP (SÃO PAULO, 2009d), compreende os mesmos temas indicados nos PCN do Ensino Fundamental (Tema 1: Números e Operações, Tema 2: Espaço e Forma, Tema 3: Grandezas e Medidas e Tema 4: Tratamento da informação), o conteúdo referente aos poliedros compõem o Tema 2, que se refere ao estudo do Espaço e Forma e também o Tema 3, que se refere ao estudo de Grandezas e Medidas. O SARESP é aplicado nas 4ª séries/5º ano, 6ª séries/7º ano e 8ª séries/9º ano do Ensino Fundamental e também na 3ª série do Ensino Médio.

O SARESP avalia as competências e habilidades que os alunos devem adquirir durante todos os ciclos de ensino. Tais competências são divididas em três grupos: Grupo I: Competências para observar; Grupo II: Competências para realizar e Grupo III: Competências para compreender.

Na 4ª série/5º ano do Ensino Fundamental, os poliedros aparecem de forma que os alunos desenvolvam competências do Grupo I, adquirindo habilidades como identificar formas geométricas tridimensionais, identificando semelhanças e diferenças.

Na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental, dentro das competências do Grupo I, os alunos devem identificar as figuras espaciais através de suas planificações e, dentro das competências do Grupo II, devem classificar as formas planas e espaciais, determinar área e perímetro de polígonos, usar composição de decomposição de figuras, identificar os elementos e também classificar os poliedros.

Na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental, as habilidades que os alunos devem adquirir sobre poliedros compreendem tanto o Tema 2, como o Tema 3. No Tema 2 (espaço e forma), dentro do Grupo I, os alunos devem ser capazes de identificar as propriedades comuns e diferenças das figuras bidimensionais e tridimensionais e também relacioná-las com suas planificações. No Tema 3 (grandezas e medidas), em relação ao Grupo I, devem calcular volumes em diferentes contextos e, em relação ao Grupo II, devem resolver problemas que envolvam volume e também relações entre unidades de medida.

No 3º ano do Ensino Médio, os poliedros aparecem também em relação aos Temas 2 e 3. No Tema 2, Grupo I, aparece o Teorema de Euler, onde os alunos devem identificar a relação entre o número de vértices, faces e arestas de um poliedro expressos em um problema. No Tema 3, aparecem com habilidades do Grupo III, onde devem resolver problemas de comprimento, área e volume de poliedros, como, por exemplo, prismas e pirâmides.

3.5 Os Poliedros e as Matrizes de Referência para o ENEM

Ao final do Ensino Médio, os alunos participam do Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM. Através dele os estudantes podem concorrer às vagas nas

Universidades Federais e participar de programas governamentais como o PROUNI. O ENEM é estruturado a partir de uma “Matriz de Referência”.

Nessa Matriz de Referência para o Enem (2009) estão descritos os eixos cognitivos (comuns a todas as áreas de conhecimento), as competências específicas para uma das 4 grandes áreas (Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias) e habilidades (indicadas por Hj, num total de 30 para cada grande área) que o estudante tem que demonstrar ao responder as questões do Enem.

Na Matriz de Matemática e suas Tecnologias, o tema poliedros, não é mencionado explicitamente, mas está subentendido nas “Competências de áreas 2 e 3” e têm sido cobrado em questões do ENEM. Na proposta de atividades apresentadas no último capítulo, abordamos várias questões do ENEM envolvendo poliedros. A “Competência de área - 2” diz respeito à utilização dos saberes geométricos, enfocando leitura e problemas relacionados com a realidade em que vivemos, além de criar estratégias de resolução destes problemas. Ao desenvolver tais competências, os alunos devem também desenvolver habilidades relativas à interpretação e localização espacial, observando características e desenvolvendo soluções para situações-problema.

> **Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**
> **H6** - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
> **H7** - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
> **H8** - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
> **H9** - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. (MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM, 2009, p.5).

A “Competência de área - 3” é relacionada com grandezas e medidas.

> **Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
> **H10** - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
> **H11** - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
> **H12** - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
> **H13** - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
> **H14** - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas. (MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM, 2009, p.5).

CAPÍTULO 4: PROPOSTA DE ATIVIDADES EDUCACIONAIS SOBRE POLIEDROS COM O USO DO POLY

Objetivos: No desenvolvimento desta sequência de atividades, tem-se como objetivo o reconhecimento de certos poliedros convexos, dos polígonos que os formam e suas planificações, objetiva-se também a observação do número de vértices, arestas e faces desses poliedros para estudo do Teorema de Euler e o reconhecimento dos poliedros de Platão. Além disso, a proposta de atividades visa o uso da informática (software Poly) como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem e faz também o uso de questões de avaliações como o SARESP e ENEM, de modo que os alunos desenvolvam as habilidades necessárias no desenvolvimento de seus estudos.

Público Alvo: As atividades que envolvem planificações e representações das figuras espaciais e a aplicação do Teorema de Euler, tem como público alvo a 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental, pois, como visto no capítulo anterior, poliedros é conteúdo do 2º Bimestre dessa série/ano e, segundo o Currículo do Estado de São Paulo, nessa fase a Geometria tem como objetivo a identificação, a planificação e o reconhecimento de propriedades dos poliedros. Já as atividades que envolvem as relações métricas fundamentais (comprimento, área e volume) e também propriedades dos poliedros, tem como público alvo o 2º ano do Ensino Médio. As atividades que se referem ao cálculo do volume de poliedros como prismas e paralelepípedos podem ser aplicadas também na 7ª série/8º ano. Entretanto, considerando que, a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, como mencionado no Currículo do Estado de São Paulo (São Paulo, 2010, p. 14), os poliedros podem ser trabalhados em quase todas as séries, desde que se façam abordagens diferenciadas. (de acordo com o grau de compreensão do aluno).

Pré-requisitos: Os conhecimentos prévios que os alunos da 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental devem possuir para realização das atividades estão relacionados com identificação e classificação de figuras planas e espaciais, polígonos, noção de ângulos dos polígonos, reconhecimento de figuras espaciais através de suas planificações. No caso dos alunos do 2º ano do Ensino Médio (e 7ª série/8º ano), além dos conhecimentos anteriores, devem possuir noções de áreas e volumes.

Materiais e tecnologias: Inicialmente serão desenvolvidas aqui atividades utilizando o software Poly, que é disponibilizado no endereço eletrônico http://www.peda.com/poly/. Esse software (livre) permite a visualização de poliedros convexos, referidos pelo programa como *sólidos* geométricos, suas planificações, a movimentação e observação do poliedro/sólido em diversos ângulos; pode-se “abrir e fechar” esses poliedros gradativamente (de modo a obter a planificação). É bem colorido e simples podendo ser trabalhado tanto no Ensino Fundamental como Ensino Médio, e com diferentes abordagens. O software Poly, apresenta os Poliedros de Platão, Poliedros de Arquimedes, Prismas e Antiprismas, Poliedros de Johnson, Poliedros de Catalan, Dipirâmides e Deltoedros. Ao abrir o Poly, encontramos “duas janelas”, em uma é apresentado o poliedro e na outra há os “botões” para seleção do modo de visualização, e ainda dois campos/entradas, um para selecionar a “categoria do poliedro” e o outro a “forma/tipo do poliedro” a ser visualizado/estudado (na categoria selecionada). Para um tratamento mais detalhado do software sugerimos, por exemplo, Fanti, Kodama e Necchi (2011).

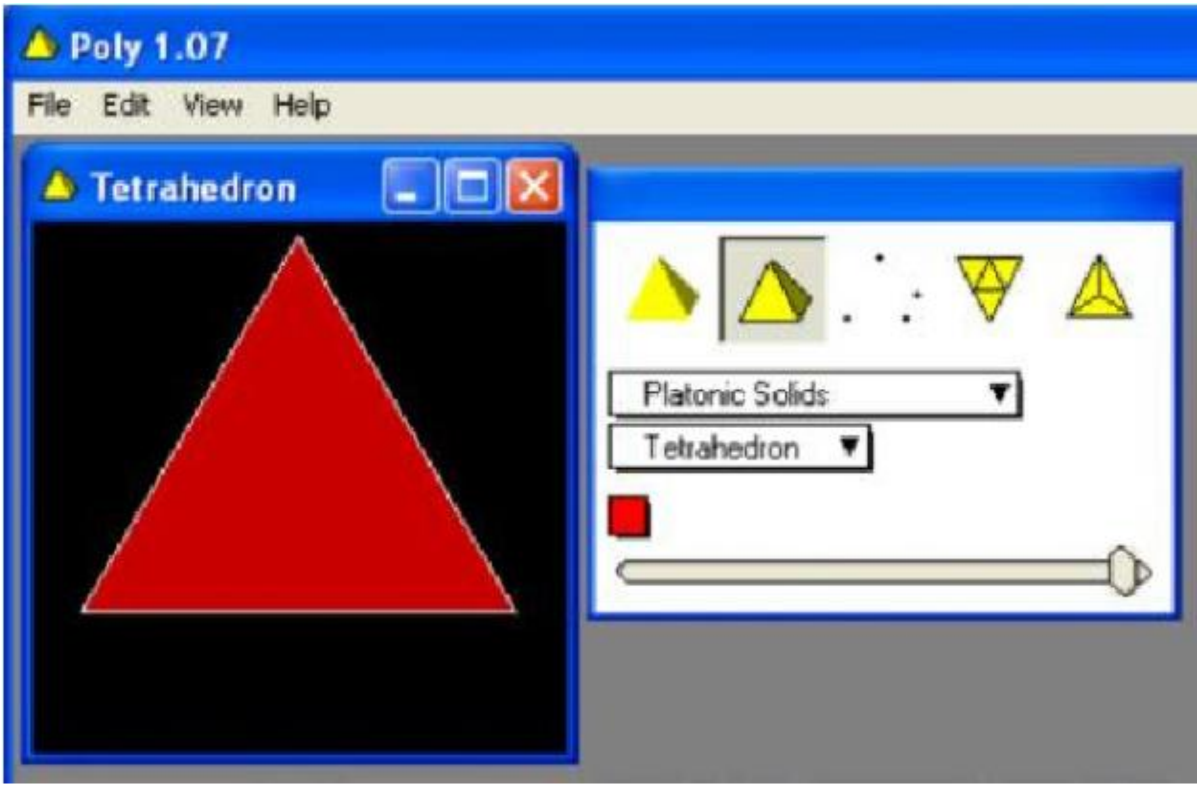


Figura 30: Visualizando as duas “janelas” do Poly.

Recomendações metodológicas: Na realização das atividades, deve-se previamente organizar os materiais necessários, tais como a elaboração de uma seqüência didática com alguns questionamentos e tabelas (a serem preenchidas pelos alunos), que deverá ser impressa. Também organizar a sala de informática conforme o número de alunos que ela comportar, não se esquecendo de verificar, anteriormente, o funcionamento do software.

Dificuldades previstas: Muitos alunos possuem dificuldades em relação ao uso do computador, é interessante explicar ao aluno como acessar o programa/software Poly e dar algumas noções básicas do mesmo.

Descrição geral: O tempo previsto para a realização de cada atividade proposta é de uma a duas aulas de 50 minutos. É importante dedicar uma aula, antes de propor as atividades apresentadas, com o objetivo da exploração livre do software Poly visando estimular a curiosidade do aluno em relação ao conteúdo (a ser trabalhado).

A proposta está dividida em duas partes:

- **Parte I -** Explorando atividades com o software Poly.
- **Parte II -** Discussão e resolução de algumas questões do SARESP e ENEM e uso do Poly, quando necessário/pertinente, para melhor compreensão.

4.1 Proposta - Parte I

Explorando atividades com o software Poly: O objetivo desta primeira parte é estimular o interesse do aluno através da visualização dos poliedros com o uso do software Poly.

Atividades para 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental:

Atividade 1: Utilizando o software Poly, selecione *Johnson Solids* (Sólidos de Johnson) no primeiro campo/entrada e, em seguida, *Pentagonal Pyramid* (Pirâmide Pentagonal) no segundo campo. Observe a pirâmide de base pentagonal apresentada, sua planificação, dê o número de vértices V, arestas A e faces F desse poliedro. Calcule também o número V – A + F.

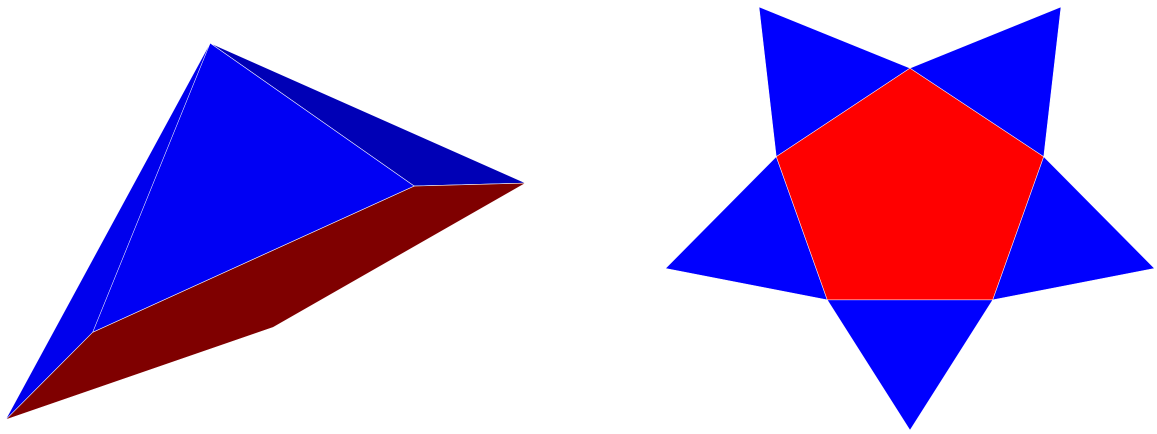
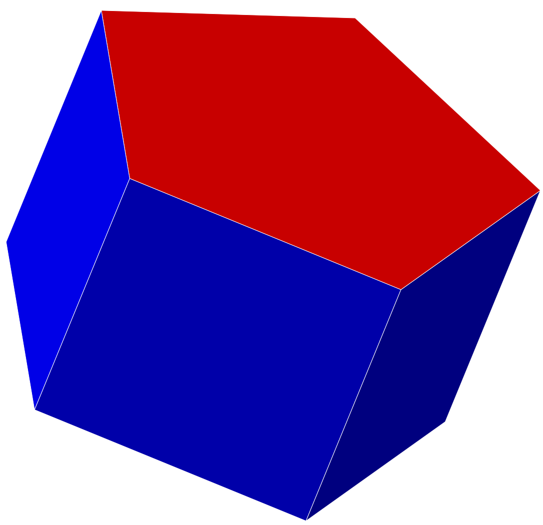


Figura 31: Pirâmide de base pentagonal e planificação com o Poly.

Solução esperada: V = 6; A = 10; F = 6; V – A + F = 6 – 10 + 6 = 2.

Comentário: Se o assunto “Teorema/relação de Euler” já foi tratado em sala, pode-se questionar a validade dessa relação para esse poliedro. Porém a atividade (e outras similares) pode ser desenvolvida de modo a levar o aluno a descobrir/conjecturar tal relação.

Atividade 2: Utilizando o software Poly, selecione *Prisms and Anti-Prisms* (Prismas e Anti-Prismas) no primeiro campo e *Pentagonal Prism* (Prisma Pentagonal) no segundo campo. Observe o prisma de base pentagonal, sua planificação e em seguida dê o número de vértices V, arestas e faces, calcule V-A+F (e verifique se esse poliedro satisfaz o Teorema de Euler).



Solução esperada:

V = 10; A = 15 e F = 7.

V – A + F = 10 – 15 + 7 = 2

Figura 32: Prisma pentagonal

Atividade 3: Essa atividade tem como objetivo utilizar o Poly para observar a regularidade dos poliedros de Platão, notar que tais poliedros são formados apenas por polígonos convexos, regulares e iguais/congruentes. Também observar que em cada vértice concorre/incide o mesmo número de arestas. Ainda, observar/concluir, (considerando a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice) que existem apenas cinco poliedros regulares (referidos como sólidos de Platão): Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.

(Atividade) Selecione sólidos de Platão (*Platonic Solids*) no primeiro campo e depois vá selecionando cada um dos poliedros de Platão no segundo campo. Utilizando a visualização do Poly, complete a tabela, identificando qual o tipo de polígono que forma/compõe as faces do poliedro considerado, e o número de arestas concorrentes em cada vértice: (aqui já estamos apresentando, em vermelho, as respostas esperadas):

Tabela 1:

Nome do Poliedro	Polígono que forma o poliedro	Número de arestas concorrentes em cada vértice
Tetraedro	Triângulo	3
Cubo	Quadrado	4
Octaedro	Triângulo	4
Dodecaedro	Pentágono	3
Icosaedro	Triângulo	5

Verifique que tais poliedros satisfazem o Teorema de Euler (Tabela 2):

Tabela 2:

Poliedro	Vértices V	Arestas A	Faces F	Teorema de Euler $V - A + F = 2$
Tetraedro	4	6	4	$4 - 6 + 4 = 2$
Cubo	4	8	6	$4 - 8 + 6 = 2$
Octaedro	6	12	8	$6 - 12 + 8 = 2$
Dodecaedro	20	30	12	$20 - 30 + 12 = 2$
Icosaedro	12	30	20	$12 - 30 + 20 = 2$

O Poly mostra exatamente os 5 poliedros regulares existentes. Podemos complementar essa atividade justificando, brevemente, que existem apenas esses cinco poliedros regulares/platônicos, observando os ângulos dos polígonos que compõem cada poliedro:

Considerando que cada ângulo (interno) de triângulo equilátero vale 60º, que cada ângulo de um quadrado vale 90º e que cada ângulo de um pentágono regular vale 108º, ainda, que a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360º, complete as tabelas 3, 4 e 5:

Tabela 3:

Número de faces triangulares concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
3	3 x 60º =180º	tetraedro
4	4 x 60º = 240º	octaedro
5	5 x 60º = 300º	icosaedro
Maior ou igual a 6	≥ 6 x 60º = 360º	não forma poliedro

Tabela 4:

Número de faces quadrangulares concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
3	3 x 90º = 270º	cubo
Maior ou igual a 4	≥ 4 x 90º = 360º	não forma poliedro

Tabela 5:

Número de faces pentagonais concorrentes em cada vértice	Soma dos ângulos no vértice considerado	Poliedro formado (ou não)
3	3 x 108º = 324º	dodecaedro
Maior ou igual a 4	≥ 4 x 108º = 432º	não forma poliedro

Agora, se consideramos polígonos formados com faces regulares *de seis lados ou mais*, como em cada vértice concorrem, no mínimo, três faces, temos nesses casos, que a soma dos ângulos em torno de cada vértice é maior ou igual a 360º, de modo que não há nenhum poliedro de Platão que possui faces formadas por polígonos com seis lados ou mais. Assim, obtemos os cinco poliedros regulares já mencionados anteriormente.

Atividade 4: Utilizando o Poly, selecione *Archimedean Solids* (Sólidos de Arquimedes) no primeiro campo, e *Truncated Icosahedron* (Icosaedro Truncado) no segundo campo. Determine para esse poliedro, com o auxílio da ferramenta que fornece a planificação do mesmo, o número de faces pentagonais regulares (denote esse número por F_5) e o número de faces hexagonais (F_6) que o compõe. A partir desses dados determine o número total de arestas A, o número de faces F e o numero de vértice V, desse poliedro completando as tabelas abaixo (para obter V use a Relação de Euler).

Observe nesta atividade a importância da ferramenta planificação do poliedro, pois neste caso, a ferramenta facilita determinar o número de faces hexagonais e pentagonais do poliedro.

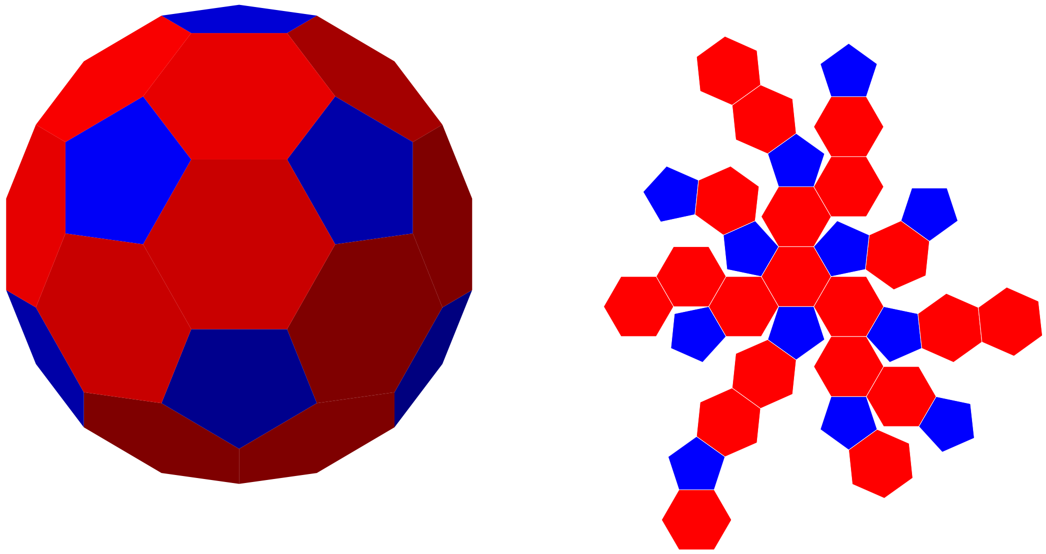


Figura 33: Icosaedro Truncado e sua planificação.

Tabela 6:

Número de Faces Pentagonais	$F_5 = 12$
Número de Faces Hexagonais	$F_6 = 20$
Total de Faces do Poliedro	$F = 32$

Tabela 7:

Número de lados das faces pentagonais	$5. F_5 = 5.12 = 60$
Número de lados das faces hexagonais	$6. F_6 = 6.20 = 120$
Total de arestas do poliedro	$A = 180/2 = 90$

Assim, F = 32; A = 90. Usando agora o Teorema de Euler V – A + F = 2, obtém-se V= 60.

Comentário: Sugere-se discutir com os alunos os cálculos efetuados “de que para determinar o número de arestas do poliedro basta considerar o número de lados das faces pentagonais, o número de lados das faces hexagonais, somar e dividir o total por dois”, pois cada lado de um polígono que compõe o poliedro é também lado de outro polígono que o compõe. Finalmente, ressaltar que a utilização da *fórmula de Euler* facilitou no cálculo de V. Instigar se, no poliedro apresentado, os polígonos são regulares, e questionar porque esse poliedro não é regular.

Atividades para 2º ano do Ensino Médio:

Atividade 1: Com o uso do Poly, selecione *Platonic Solids* (Sólidos de Platão) no primeiro campo e *Cube* (Cubo) no segundo campo. Determine o número de vértices V, arestas A e faces F do cubo e em seguida, verifique se o Teorema de Euler é satisfeito. Ainda, supondo que a medida da aresta do cubo seja de 3 cm, determine: a área de uma face, a área total e o volume do cubo.

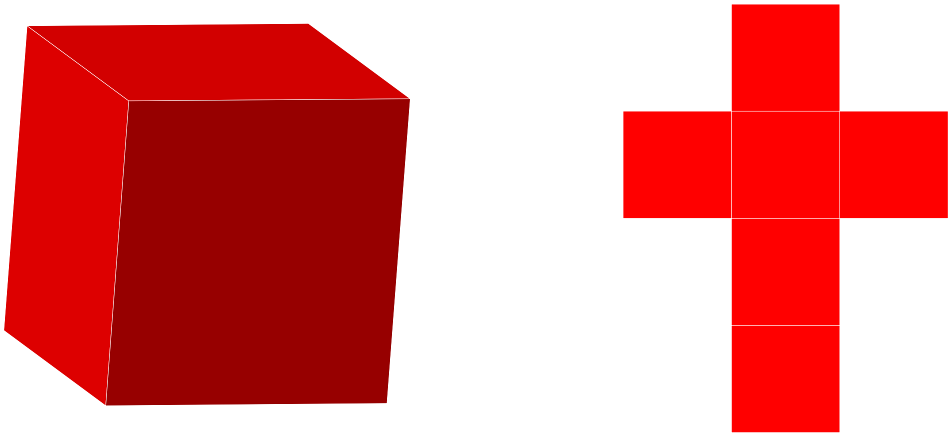


Figura 34: Cubo e sua planificação (*imagem fora de escala*).

Solução esperada: V = 8; A = 12 e F = 6.

V – A + F = 8 – 12 + 6 = 2.

Considerando que a medida de cada aresta do cubo seja a = 3cm, tem-se que a área de uma face é $A_f = a^2 = 3^2 = 9cm^2$ e área total é $A_t = 6.a^2 = 54cm^2$. O volume será $Vol = a^3 = 3^3 = 27cm^3$.

Atividade 2: Com o uso do Poly, selecione *Prisms and Anti-Prisms* (Prismas e Anti-Prismas) no primeiro campo e *Triangular Prism* (Prisma Triangular) no segundo campo. Determine o número de vértices V, arestas A e faces F do poliedro e em seguida, verifique se o Teorema de Euler é satisfeito. Supondo que a medida do lado do triângulo que forma a base desse prisma seja 4 cm, determine: a área da base, a área total e o volume do prisma.

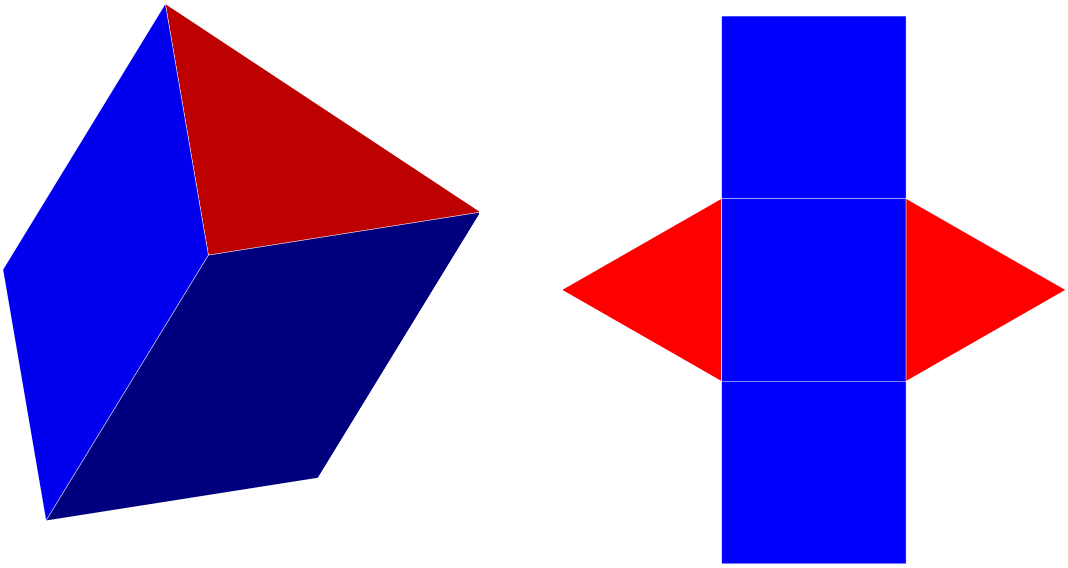


Figura 35: Prisma Triangular e sua planificação.

Solução esperada: V = 6; A= 9; F= 5. Logo V – A + F = 6 – 9 + 5 = 2.

Suponhamos agora que a medida do lado do triângulo que forma a base desse prisma seja **a** = 4 cm. Nesse momento deve-se reforçar o fato que os prismas apresentados pelo Poly são tais que as faces são polígonos regulares. Assim, o triângulo da base é equilátero e os polígonos/faces laterais são quadrados de lado ***a***, de modo que a altura do triângulo é h = **a**.$\sqrt{3}$/2 = 2$\sqrt{3}$, a altura do prisma é **a** = 4cm, e tem-se que:

A área da base é $A_b = \dfrac{4.2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm^2,

a área lateral (dos 3 quadrados) é $A_l = 3\times4\times4 = 48$ cm^2 e,

a área total é $A_t = 2\,A_b + A_l = 8\sqrt{3} + 48 = 8\,(\sqrt{3} + 6)$ cm^2.

Finalmente, o volume é $Vol = A_b \times altura_{(prisma)} = 4\sqrt{3} \times 4 = 16\sqrt{3}$ cm^3.

Comentário: É interessante questionar o que mudaria na solução se a medida da altura desse prisma fosse, por exemplo, 5 cm (os lados fossem retângulos), mantendo a medida do lado do triângulo (equilátero) que forma a base desse prisma como 4cm.

Solução: A a área da base é $A_b = 4\sqrt{3}$ cm^2 (não muda); a área lateral A_l = $3\times4\times\mathbf{5}$ = **60** cm^2; A área total $A_t = 2\ A_b + A_l = 8\sqrt{3} + \mathbf{60} = 4\ (2\sqrt{3}+15)$ cm^2. E o volume do prisma é Vol $= A_b \times \text{altura}_{(\text{prisma})} = 4\sqrt{3} \times \mathbf{5} = 20\sqrt{3}$ cm^3.

4.2 Proposta - Parte II

Discussão e resolução de algumas questões do SARESP e ENEM e uso do Poly, quando pertinente (para melhor compreensão): O objetivo dessa segunda parte da proposta é analisar questões do SARESP e ENEM, que envolvem conteúdos relativos a poliedros, já que estas avaliações são muito importantes nas escolas.

Para esta parte propõe-se que cada atividade seja desenvolvida, quando pertinente, em quatro momentos:

1º momento: Propor a questão para os alunos analisarem, discutirem e resolverem. Cada aluno responderá a questão do modo que achar mais conveniente e de acordo com seu conhecimento, registrando sua resolução no papel.

2º momento: Analisar/Complementar a questão com o uso do Poly. Analisar, junto aos alunos, se o software Poly ajudaria na melhor compreensão da questão através da visualização e manipulação dos objetos (poliedros) do enunciado (geral) de cada questão ou de cada item, complementando a aprendizagem do aluno.

3º momento: Resolver a questão com os alunos, para que eles possam comparar com a sua resolução, tirar dúvidas e esclarecer possíveis erros.

4º momento: Discutir e comentar o objetivo da questão, analisar se seu enunciado está bem formulado.

Questões para 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental:

Questão 1: SARESP (2009)

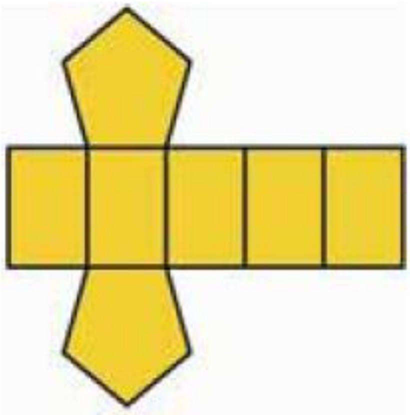
A forma geométrica espacial que pode ser associada a planificação abaixo é:

A) um cilindro.

B) uma pirâmide de base pentagonal.

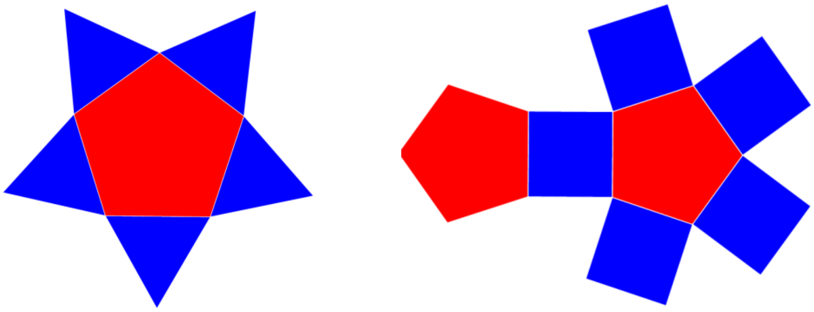
C) um prisma de base pentagonal.

D) um paralelepípedo.



Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Apesar da questão já trazer a planificação do prisma de base pentagonal, é interessante utilizar o Poly para analisar/discutir, quando possível, as alternativas apresentadas:

A) Não é possível utilizar o Poly nesse item, mas é interessante discutir com os alunos que o cilindro não é um poliedro – perguntar porque?
B) Visualizar com o Poly a pirâmide de base pentagonal (em sólidos de Johnson) e sua planificação – comparar com a planificação dada no exercício e concluir que sua planificação é diferente da planificação apresentada. Contar número de pentágonos e quadrados (retângulos) (Figura 36 (a)).
C) Visualizar com o Poly o prisma de base pentagonal (em prismas e anti-prismas – prisma pentagonal) e planificar. Contar o número de pentágonos e retângulos (quadrados). Comparar o prisma de base pentagonal apresentado no Poly com o do enunciado. Nesse momento é importante destacar que um poliedro pode ter várias planificações diferentes, “depende de onde foram feitos os cortes”. Chamar a atenção também para a limitação do software, de que as faces dos poliedros apresentados no Poly, em determinadas categorias consideradas, são sempre polígonos regulares, conforme já observamos na Atividade 2, proposta para o 2º ano do Ensino Médio, de modo que as faces laterais do prisma (dado pelo Poly) são quadrados (Figura 36 (b)) e as faces laterais dada na planificação apresentada no enunciado da questão são retângulos.
D) Discutir em qual categoria se encontra um paralelepípedo (prisma de base quadrada). Observar que o paralelepípedo de base quadrangular que o Poly apresenta é o *cubo*, que se encontra listado entre os poliedros de Platão.



(a) (b)

Figura 36: Planificação de uma pirâmide e um prisma de base pentagonal

Resolução: A forma geométrica espacial referente à planificação é de um prisma de base pentagonal. A alternativa correta é (C).

Comentário: O objetivo da questão é identificar uma figura espacial com base em sua planificação.

Questão 2: SARESP (2009)

Dos poliedros abaixo, o único que tem todas as faces triangulares é:

A) o cubo.

B) o cone.

C) o prisma de base triangular.

D) a pirâmide de base triangular.

Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Como a questão não apresenta nenhuma figura, através do Poly o aluno compreenderá melhor a questão ao visualizar os poliedros que constam nas alternativas:

A) Visualizar o cubo com o Poly e ver que o cubo possui apenas faces quadradas.
B) Observar que o Poly não apresenta o *cone*, pois o cone não é um poliedro.
C) Visualizar com o Poly o *prisma de base triangular* (em prismas) e observar que o mesmo possui duas faces triangulares e três faces retangulares (quadrangulares).
D) Notar que a única *pirâmide de base triangular* que o Poly apresenta é o *tetraedro* (*regular*), que consta na categoria dos poliedros de Platão, onde

todas as suas faces são triângulos regulares (limitação do software). É importante destacar, para os alunos, que em geral, uma pirâmide de base triangular não possui, necessariamente, todas as faces regulares.

Resolução: O único poliedro acima que possui apenas faces triangulares é a pirâmide de base triangular. A alternativa correta é (D).

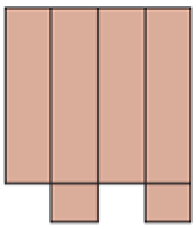
Comentário: O objetivo da questão é identificar elementos (no caso, as faces de um poliedro) e classificar poliedros. O enunciado não está bom, pois ao referir “os poliedros abaixo”, subentende-se de que o *cone* faz parte dessa lista. Acreditamos que seria melhor ter colocado só poliedros nas alternativas.

Questão 3: SARESP (2010)

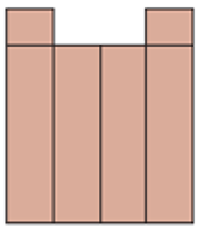
Observe a caixa representada abaixo:

Uma planificação dessa caixa é:

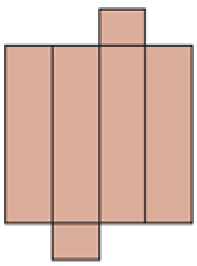
(A)



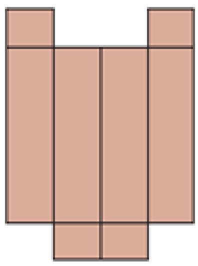
(B)



(C)



(D)



Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Nesta questão entendemos que o uso do Poly não vai acrescentar muito na sua resolução e compreensão, pois é bastante simples.

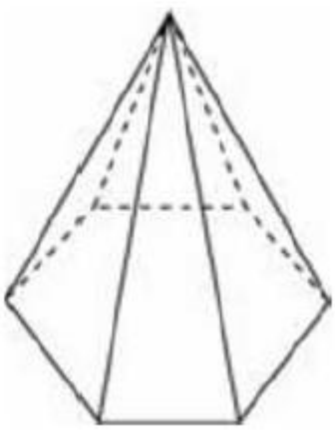
Resolução: A planificação da caixa é representada corretamente na alternativa (C). Pois é fácil perceber que nas alternativas A e B, ao montar a caixa, uma das faces ficará aberta e na alternativa D, o número de faces da caixa excede o número de faces da caixa (paralelepípedo) apresentadas na questão. Mas pode-se usar o Poly para visualizar o cubo sendo planificado (uma vez que o software não apresenta o paralelepípedo).

Comentário: O objetivo da questão é observar a figura espacial dada e relacioná-la com sua planificação.

Questão 4: SARESP (2009)

A figura abaixo representa uma pirâmide de base hexagonal. O número de vértices dessa pirâmide é:

A) 6.
B) 7.
C) 10.
D)12.



Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Nesta questão, poderíamos usar o Poly para exibir um prisma de base hexagonal, mas a figura apresentada na questão está clara em relação ao número de vértices, não sendo necessário recorrer ao Poly para visualização da pirâmide e número de vértices.

Resolução: O número de vértices da pirâmide de base hexagonal é dado pelos 6 vértices do hexágono (base) e o vértice do topo, num total de 7 vértices. A alternativa correta é (B).

Comentário: O objetivo da questão é identificar os elementos (no caso, o número de vértices) de um poliedro.

Questão 5: SARESP (2011)

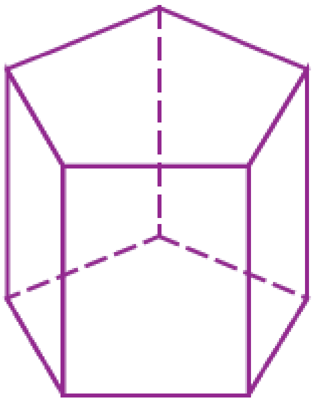
O número de arestas do prisma pentagonal é:

A) 5.

B) 9.

C) 12.

D) 15.



Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Nesta questão, a figura está clara em relação ao número de arestas, não sendo necessário recorrer ao Poly para visualização do prisma pentagonal.

Resolução: Observando o prisma pentagonal, temos que o mesmo possui 15 arestas (5 do pentágono da base, 5 do pentágono do topo e 5 arestas verticais). A alternativa correta é (D).

Comentário: O objetivo da questão é identificar elementos (no caso, o número de arestas) de um poliedro.

Questões para 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental:

Questão 1: SARESP (2009)

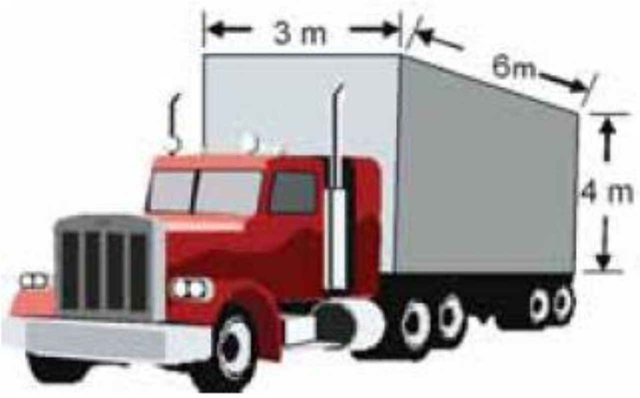
A carroceria de um caminhão-baú, como o da figura abaixo, tem medidas 3m x 6m x 4m. Quantas viagens, no mínimo, este caminhão terá de fazer para transportar 360m^3 de papel?

A) 3.

B) 5

C) 8.

D) 10.



Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Nesta questão não é necessário o uso do Poly, pois é fácil observar que a carroceria do caminhão corresponde a um poliedro bem simples (paralelepípedo).

Resolução: A carroceria do caminhão é um poliedro (paralelepípedo - prisma de base quadrada) e calculando seu volume, obtemos Vol = 3×6×4 = 72 m^3. Sendo assim, para transportar 360 m^3 são necessárias 360/72 = 5 viagens. A alternativa correta é (B).

Comentário: O objetivo da questão é resolver um problema (prático) que envolve volume de um poliedro, mais precisamente, o volume de um paralelepípedo. O enunciado da questão não está bom, deveria constar que as dimensões apresentadas se referem à parte interna da carroceria do caminhão, pois se consideramos a espessura (da carroceria) não podemos afirmar que a resposta exata seja 5 viagens.

Questão 2: SARESP (2009)

Um restaurante oferece suco para seus clientes em copos com formato de prisma, cuja base é um quadrado de área 0,25 dm^2. Sabendo que 1 dm^3 = 1 litro, se a altura de cada copo é 1,2 dm, então a quantidade de copos equivalente a uma jarra com 1,8 litro é:

A) 7.
B) 6.
C) 5.
D) 4.

Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Não há necessidade do Poly na resolução da questão.

Resolução: Calcula-se inicialmente o volume do copo Vol = 0,25×1,2 = 0,3 dm^3 = 0,3 litro. A quantidade de copos equivalentes à jarra de 1,8 litro é de 1,8/0,3 = 6 copos. A alternativa correta é (B).

Comentário: O objetivo da questão é resolver um problema através do cálculo do volume de um prisma de base quadrada. Note que a questão já menciona o valor da área do quadrado da base, bastando apenas multiplicar pela altura para obter o volume do prisma.

Questão 3: SARESP (2011)

Um proprietário de uma casa pretende fazer uma cisterna em forma de paralelepípedo de 5 m de comprimento por 2 m de largura e 1,5 m de profundidade. Qual o volume de água que essa cisterna pode armazenar?

A) 7,5 m^3.
B) 8,5 m^3.
C) 10 m^3.
D) 15 m^3.

Análise/Complementação da questão com o uso do Poly: Novamente é uma questão que envolve um poliedro simples, um paralelepípedo, e não há necessidade do Poly na resolução da mesma.

Resolução: O volume do paralelepípedo é o produto de suas dimensões Vol = $5 \times 2 \times 1{,}5 = 15\ m^3$. A alternativa correta é (D).

Comentário: O objetivo da questão é calcular o volume de um poliedro (paralelepípedo), obsevando que foram dadas todas as suas dimensões.

Questões para 2º ano do Ensino Médio:

Questão 1: SARESP (2009)

João pode contar, na planificação de um prisma reto de base triangular:

A) 2 triângulos e 3 retângulos.
B) 3 triângulos e 2 retângulos.
C) 1 triângulo e 4 retângulos.
D) 4 triângulos e 1 retângulo.
E) 3 triângulos e 6 retângulos.

Análise/Complementação da questão com uso do Poly: Como a questão envolve um prisma reto de base triangular, o aluno, através do Poly (e ferramenta planificação) pode observar, facilmente, que este prisma possui duas faces triangulares (bases) e três faces retangulares (faces laterais). Deve-se observar aqui (como já feito em outras atividades) que determinadas categorias de poliedros apresentados pelo Poly tem como faces polígonos regulares, assim, as faces laterais do prisma, apresentado pelo Poly, são quadrangulares. Pode-se aproveitar para discutir algumas propriedades dos quadriláteros com os alunos e observar que um quadrado também é um retângulo. Podemos também questionar como seriam as faces laterais se o prisma não fosse reto.

*Resolução***:** Um prisma reto de base triangular possui 2 triângulos respectivos à sua base e 3 retângulos respectivos à sua área lateral. Com o auxílio do Poly, pode-se ver isso facilmente através da planificação. A alternativa correta é (A).

*Comentário***:** O objetivo da questão é determinar o tipo/formato das faces de um poliedro (o prisma reto de base triangular) através de sua planificação.

Questão 2: SARESP (2009)

Um poliedro convexo tem 20 vértices e 30 arestas. Lembre-se: V + F = 2 + A. Este poliedro é um:

A) icosaedro (20 faces).
B) cubo (6 faces).
C) dodecaedro (12 faces).
D) octaedro (8 faces).
E) tetraedro (4 faces).

Análise/Complementação da questão com uso do Poly: Nesta questão é interessante, para uma melhor compreensão da mesma, visualizar os poliedros, apresentados em cada item, com o Poly e utilizar os seus recursos, como a planificação.

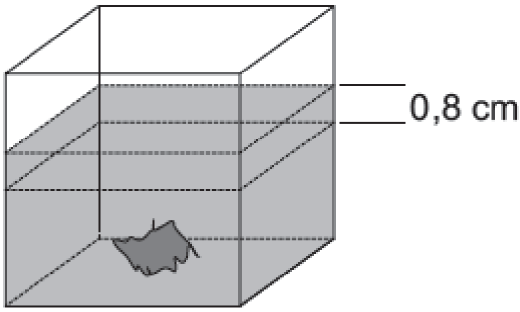
*Resolução***:** Considerando que o poliedro convexo tem 20 vértices e 30 arestas, ao aplicar a Relação de Euler, dada no enunciado, obtém-se 20 + F = 2 + 30, ou seja F = 12. A alternativa correta é (C).

Comentário: O objetivo da questão é identificar a relação entre o número de vértices, faces e arestas de poliedros através do Teorema de Euler. Note que, uma vez dada a Relação de Euler, a resolução da questão é algébrica, basta resolver uma equação simples, não precisamos lançar mão da geometria. O aluno pode acertar mesmo sem saber o que seja um dodecaedro (já que esta é a única alternativa com 12 faces). Observe ainda que se a questão proposta tratasse, por exemplo, de um poliedro convexo com **8** vértices e **12** arestas, a resposta seria F = **6**. Se as alternativas apresentadas fossem as mesmas, o aluno optaria pelo cubo, porém o poliedro poderia não ser necessariamente um cubo, mas, mais geralmente, um prisma de base quadrada.

Questão 3: SARESP (2010)

Um aquário tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e contém água até certa altura. As medidas internas da base do aquário são 40 cm por 25 cm. Quando uma pedra é colocada dentro do aquário, ficando totalmente submersa, o nível da água sobe 0,8 cm. O volume da pedra é, em cm^3, igual a:

A) 100.
B) 300.
C) 400.
D) 600.
E) 800.



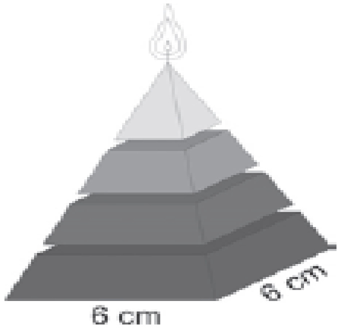
Análise/Complementação da questão com uso do Poly: O Poly neste caso, auxilia na solução da questão.

Resolução: Inicialmente, calcula-se o volume inicial da água contida no aquário em função da altura h da água: $V_{inicial} = 40 \times 25 \times h = 1000 \times h$ cm^3. Calcula-se também o volume depois de colocada a pedra no aquário: $V_{final} = 40 \times 25 \times (h+0,8) = (1000 \times h + 800)$ cm^3. A diferença entre os volumes final e inicial nos indica o volume da pedra, ou seja, $V_{pedra} = 800$ cm^3. A alternativa correta é (E).

Comentário: O objetivo da questão é resolver um problema envolvendo relações métricas fundamentais, neste caso, a comparação entre volume final e inicial de um poliedro (paralelepípedo).

Questão 4: ENEM (2009)

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura. Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?



A) 156 cm^3.
B) 189 cm^3.
C) 192 cm^3.
D) 216 cm^3.
E) 540 cm^3.

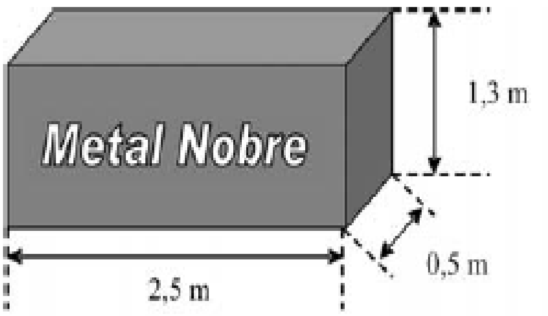
Análise/Complementação da questão com uso do Poly: Podemos usar o Poly para visualizar uma pirâmide de base quadrangular, mas a questão é ilustrativa.

Resolução: (De acordo com o esperado no ENEM) A pirâmide de parafina, obtida sem os espaçamentos de 1 cm, possui 16 cm de altura. Calcula-se então o volume de parafina gasto com a pirâmide quadrangular regular que possui aresta da base de 6 cm e altura 16 cm. Assim, $V_P = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 16 = 192$ cm^3. O poliedro superior também é uma pirâmide onde a aresta da base vale 1,5 cm e sua altura mede 4 cm, dessa forma seu volume é $Vol = \frac{1}{3} \times 1{,}5^2 \times 4 = 3$ cm^3. Logo, retirando-se a pirâmide superior, o dono da fábrica irá gastar 192 – 3 = 189 cm^3 de parafina na nova vela. A alternativa correta é (B).

Comentário: O objetivo da questão consiste na resolução de um problema envolvendo volume de pirâmides. Observe que o *enunciado não está bom*. Se a “vela pronta” (com os espaços) tem um formato de uma pirâmide, então não está correto dizer que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto. Agora se de fato a base superior de cada bloco (espaçado) é igual à base inferior do bloco sobreposto, então o objeto pronto formado (com espaçamentos) *não é uma pirâmide*, mas tem a *forma aproximada de uma pirâmide,* *e* essa foi a interpretação feita para a solução apresentada. No enunciado não fica claro se os 19 cm refere-se à altura da vela pronta (que não é uma pirâmide) ou da pirâmide formada com os blocos sobrepostos (sem os espaços). Considerou-se, na resolução da questão, que 19 cm é a altura da vela pronta, com os espaços de 1 cm, de modo que ao montar a pirâmide só formada pelos blocos sobrepostos, sem os espaços dados de 1 cm, a mesma terá altura de 16 cm. No enunciado deveria constar que a vela pronta tem ***forma aproximada de uma pirâmide*** e não que tem *forma de pirâmide*.

Questão 5: ENEM (2010)

A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

A) massa.
B) volume.
C) superfície.
D) capacidade.
E) comprimento.

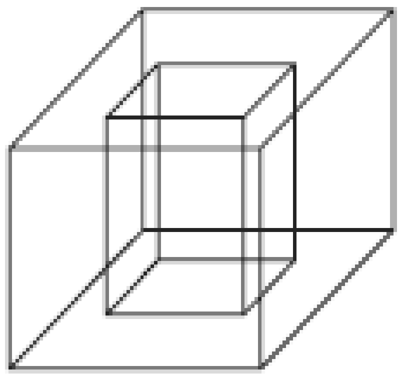
Análise/Complementação da questão com uso do Poly: Nesta questão não é necessário o uso do Poly.

Resolução: As dimensões dadas na peça referem-se ao comprimento, largura e altura. Logo, o produto destas três dimensões nos daria o *volume* do poliedro (paralelepípedo). A alternativa correta é (B).

Comentário: O objetivo da questão é relacionar as grandezas métricas fundamentais (comprimento, área e volume), no caso o produto das grandezas apresentadas determina o volume do poliedro (paralelepípedo).

Questão 6: ENEM (2011)

Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

A) 12 cm^3.

B) 64 cm^3.

C) 96 cm^3.

D) 1 216 cm^3.

E) 1 728 cm^3.

Análise/Complementação da questão com uso do Poly: Nesta questão o uso do Poly não é interessante, uma vez que não é possível fazer cortes com o mesmo.

Resolução: (De acordo com o esperado no ENEM) O volume do cubo maior é $V_{CM} = 12^3 = 1728\ cm^3$ e o volume do cubo de dentro (vazio) é $V_{CD} = 8^3 = 512\ cm^3$. O volume de madeira utilizado é a diferença entre esses dois volumes. Logo o volume do porta-lápis $V_{PL} = 1728 – 512 = 1216\ cm^3$. A alternativa correta é (D).

Comentário: O objetivo da questão é resolver problemas envolvendo volume. Observe que nesta questão a figura não está clara e o enunciado também. No enunciado deveria constar a informação que o cubo maior era feito de ***madeira maciça***. Em relação ao cubo menor que foi retirado, o ***desenho*** apresentado dá a impressão de que o que foi retirado não é um cubo e sim um *paralelepípedo* de base quadrada de lado 8cm e altura igual, ou aproximada, a do cubo inicial.

Possíveis continuações ou desdobramentos:

Além do Poly, existem outros softwares que podem ser usados ao se desenvolver atividades com poliedros como, por exemplo, o Cabri 3D, o Wingeom, o Geogebra 3D, etc. Ainda, ao explorar as questões do SARESP e ENEM, podemos aproveitar para explorar/utilizar a metodologia de Resolução de Problemas.

Também, no endereço eletrônico http://www.uff.br/cdme/#softwares, há vários softwares educacionais, entre eles dois interessantes para se trabalhar com poliedros: *Uma Pletora de Poliedros* e *Os Sólidos Platônicos* (cujo professor responsável é o Prof. Dr. Humberto José Bortolossi) (BORTOLOSSI, 2009a e b). Com esses softwares podemos desenvolver atividades similares às descritas na proposta apresentada aqui (com o Poly) e até complementar, uma vez que com os mesmos é possível, por exemplo, fazer cortes. Ainda, com *Uma Pletora de Poliedros* é possível explorar poliedros convexos cujas faces não são necessariamente polígonos regulares. Observamos, entretanto, que tivemos bastante dificuldade para utilizar tais softwares, pois os mesmos exigiam uma atualização do *Java* e ao iniciar a atualização, em vários computadores que tentamos, o programa travava ou ficava muito lento. Analisemos, aqui, uma questão do ENEM 2009 com o uso do software *Uma Pletora de Poliedros* que se encontra no endereço eletrônico http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html. Nesta questão, podemos fazer o uso de uma ferramenta do software que consiste em *cortar* um poliedro através de uma secção plana, observando assim o polígono formado pela interseção do plano com o poliedro.

Questão: ENEM (2009)

Um artesão construiu peças de artesanato interceptando [sic] [intersectando] uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

A) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

B) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

C) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

D) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

E) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

Resolução: É possível determinar um plano que corta todas as faces da pirâmide. Como a pirâmide possui cinco faces, o polígono é formado pelos segmentos de reta da interseção do plano com faces da pirâmide, ou seja, um pentágono. Assim a alternativa correta é (C).

Comentário: O objetivo da questão é analisar as possibilidades de interseção de um plano com um poliedro, no caso, uma pirâmide. O software "*Uma Pletora de Poliedros*" auxilia na visualização das seções planas obtidas. Ao observarmos as secções formadas, temos que as mesmas podem formar triângulos, quadriláteros e pentágonos. Na figura seguinte, primeiro é mostrado um triângulo, como interseção do plano e o poliedro, depois um quadrilátero e por último um pentágono.

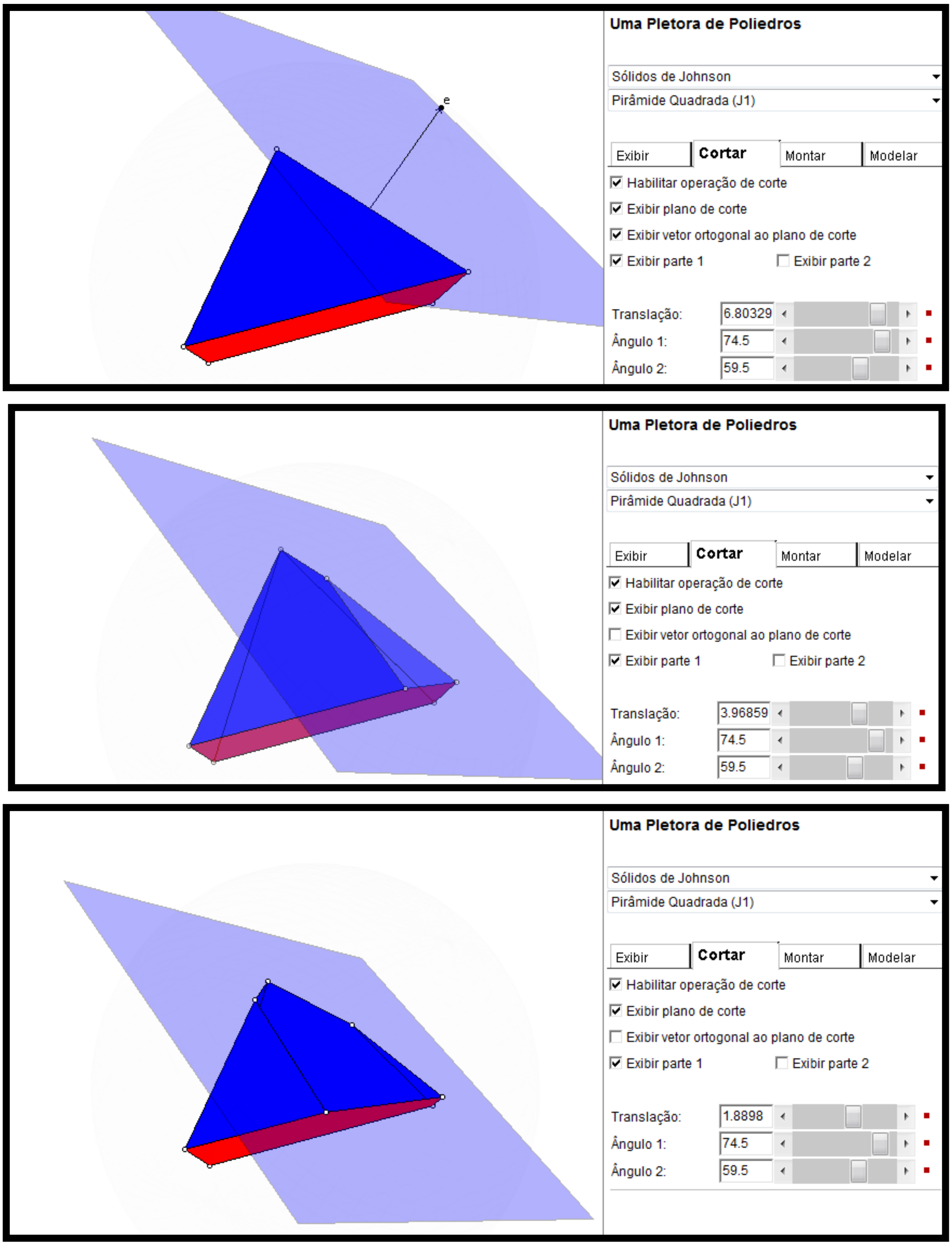


Figura 37: Analisando a interseção de um plano com uma pirâmide de modo a obter uma face pentagonal

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS/CONCLUSÃO

Embora não tenhamos aplicado na escola a proposta apresentada aqui, acreditamos que a mesma, ao ser aplicada, possa contribuir na aprendizagem do aluno. Em Fanti, Kodama e Necchi (2011) são descritas algumas atividades que foram aplicadas, no Ensino Médio, utilizando o Poly. De fato, tal trabalho nos motivou, em parte, na elaboração das atividades propostas aqui. No trabalho referido, são relatadas as experiências vivenciadas quando da aplicação das atividades (com o Poly); de que o desenvolvimento das atividades foi bem aceito pelos alunos, tornando a aula agradável, facilitando a compreensão das propriedades dos poliedros e detectando ainda possíveis falhas. Nesse sentido é apresentada uma análise de alguns erros cometidos pelos alunos, como por exemplo, ao contar as arestas utilizando a planificação do Poly, muitos desconsideraram o fato que cada aresta é comum à duas faces.

Com o desenvolvimento de nosso trabalho foi possível compreender melhor a Fórmula de Euler e analisar a definição de poliedros, também refletir um pouco sobre o desenvolvimento das pesquisas Matemáticas a partir de alguns aspectos históricos relativos a prova do Teorema de Euler. Ainda, através da análise de certos documentos oficiais, pode-se confirmar/verificar que o assunto/tema tratado no trabalho faz parte desses documentos e têm sido cobrados nas avaliações (gerais) realizadas no Ensino Básico. Observamos, entretanto, que as questões cobradas em avaliações envolvem, em geral, poliedros bastante simples. Observamos também, que em algumas questões analisadas aqui os enunciados não estavam claros, o que pode confundir o aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

AZAMBUJA FILHO, Z. Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. *Revista do Professor de Matemática,* São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 3, p. 15-17, 1983.

BORTOLOSSI, H. J. *Os Sólidos Platônicos*. 2009a. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 10 jan. 2013.

BORTOLOSSI, H. J. Uma Pletora de Poliedros. 2009b. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>. Acesso em: 10 jan. 2013.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. SP. Editora Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide. 1974. 488 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 144 p.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações.* São Paulo: Ática, v. 2, Ensino Médio, 2012.

DI PIERRO NETO, S.; ORSINI FILHO, S.; CARVALHO, M. C. *Matemática – Ensino Médio*, 2ª série, São Paulo, 3ª ed., Ed.Saraiva, 2005, 319 p.

FANTI, E. L. C., KODAMA, H. M. Y., NECCHI, M. A. *Explorando Poliedros no Ensino Médio com o Software Poly* In: Livro Eletrônico dos Núcleos de Ensino da Unesp - Artigos 2007. São Paulo; Ed. Cultura Acadêmica, UNESP, 2011, p. 729-745. Disponível em: <http://unesp.br/prograd/Livro2007/sources/index.htm>. Acesso em: 15 dez. 2012.

FANTI, E. L. C., *O Teorema de Euler para poliedros*. Notas da palestra apresentada na Hora da Matemática – UNESP- IBILCE – Lab. Matemática, 2011.

GONÇALVES, Daciberg Lima. *Historical Aspects of the Discovery of the Euler Characteristic and Some of Its Developments in Modern Topology*. Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 9 nº 17, 2009. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo9-no17.html>. Acesso em: 12 jan. 2013.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*, v.2: Ensino Médio. São Paulo. Editora Saraiva. 2010.

LAKATOS, I. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press, Editors J. Worrall e E. Zahar. 1976.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. Rio de Janeiro. SBM. 2006. 308 p.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro. IMPA. 1991.

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM 2009. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/download/enem/2009/Enem2009_matriz.pdf>. Acesso em: 03 jan. 2013.

RICHESON, D. S. *Euler´s Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton University Press, 2008. 315 p.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e sua Tecnologias - Ensino Fundamental – Ciclo II e Médio*. São Paulo, SEE, 2010.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática. Ensino Fundamental 6ª série,* volume 2/ Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009a.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática. Ensino Fundamental 7ª série*, volume 4 / Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009b.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática. Ensino Médio 2ª série*, volume 4 / Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009c.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Relatórios Pedagógicos do SARESP: Matemática 2009, 2010 e 2011. São Paulo. Disponível em: <www.educacao.sp.gov.br>. Acesso em: 05 jan. 2013.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. SARESP, 2008: *Matrizes de Referência para a Avaliação: Matemática*/ Secretaria da Educação. SEE, 2009d.

SIQUEIRA, Rogério Monteiro. *História, Tradição e Pesquisa Sob Disputa: O Caso dos Poliedros na Geometria*. Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 9 nº 17, 2009. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo9-no17.html>. Acesso em: 15 jan. 2013.