UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DANIEL VICTOR DE ALMEIDA

PROPRIEDADES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

CURITIBA
2016

DANIEL VICTOR DE ALMEIDA

PROPRIEDADES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática"

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

CURITIBA
2016

Almeida, Daniel V.
Propriedades e aplicações dos Números de Fibonacci / Daniel Victor de Almeida. – Curitiba: UFPR, 2016.
47 f.
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, 2016.
Referências bibliográficas.
1. Números de Fibonacci. 2. Triângulo de Pascal. 3. Matrizes 4. Análise combinatória - Dissertação. I. Santana, Luiz A. R.. II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDU : 517.52

Propriedades e aplicações dos Números de Fibonacci

Daniel Victor de Almeida

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal do Paraná - UFPR como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 23 de setembro de 2016.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana (Orientador)
(UFPR)

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Júnior
(UFPR)

Prof. Dr. Fabio Antonio Dorini
(UTFPR)

Dedico este trabalho a todos os professores que acreditam e trabalham para ministrar a Matemática com excelência e qualidade.

AGRADECIMENTOS

Aos amigos Willian José Bruginski, José Renato Santiago Arantes, Antonio José de Oliveira, Josias Reis de Lima e Guilherme Egg pelas horas de estudo, conselhos e amizade durante toda a graduação e mestrado.

Aos amigos Paulo Klauss, Renan Borsoi Campos e Gabriel Skiba, pelas ideias, sugestões e colaborações neste trabalho.

Aos professores Rudimar Luiz Nos e Alexandre Trovon pela excelência em didática e conhecimento e por fazer as horas dedicadas ao curso de mestrado mais interessantes e proveitosas.

Aos professores Fabio Antonio Dorini e Roberto Ribeiro Santos Júnior pelas preciosas sugestões a este trabalho.

Ao professor Luiz Antonio Ribeiro de Santana, pela recepção, orientação, apoio, aconselhamento e paciência infinita durante a construção deste texto.

À minha mãe, Iraci Rodrigues, por sempre confiar nas minhas escolhas e por me fazer acreditar ser possível chegar até aqui.

Resumo

DE ALMEIDA, DANIEL VICTOR. PROPRIEDADES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI. 47f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT , Universidade Federal do Paraná, 2016.

O trabalho consiste em um estudo detalhado dos Números de Fibonacci, suas propriedades e aplicações em diversas áreas da Matemática. Muitos professores do ensino básico deparam-se com algumas dificuldades quando da inserção de ferramentas matemáticas como indução, demonstrações e algebrismos em um grau aperfeiçoado em sala de aula, uma vez que essas ferramentas são encontradas de forma demasiado aprofundadas em livros de graduação. Neste trabalho várias dessas ferramentas serão utilizadas para a demonstração de propriedades dos Números de Fibonacci e, como abordadas neste texto, podem ser trabalhadas em atividades dos ensinos fundamental e médio.

Palavras-Chave: Números de Fibonacci, Triângulo de Pascal, Matrizes, Análise Combinatória.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **3**
1.1 Propriedades dos Números de Fibonacci 3

2 Os Números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal **11**

3 Os Números de Fibonacci e a permutação de blocos geométricos **15**

4 Os Números de Fibonacci e o estudo das matrizes **23**
4.1 Multiplicidade entre dois Números de Fibonacci. 23
4.2 Matrizes e os Números de Fibonacci. 24
4.3 Demonstração: Multiplicidade dos Números de Fibonacci 26
4.4 Demonstração: Multiplicidade dos elementos da diagonal secundária das potências de certa matriz A. 27
4.5 Utilizando determinantes em demonstrações anteriores 28

Conclusão **29**

Referências Bibliográficas **31**

Introdução

O conteúdo apresentado nessa dissertação é direcionado para professores do Ensino Médio que possuam interesse em aprofundar seus conhecimentos sobre Números de Fibonacci e, eventualmente, trabalhá-los em suas aulas.

Ressalta-se a extensa aplicabilidade deste tema em diversas áreas do conhecimento, sendo de grande interesse para alunos dos ensinos fundamental e médio. Entre os temas inerentes a essa aplicabilidade, pode-se citar a árvore genealógica das abelhas [2], em que o zangão nasce de um ovo que não foi fecundado, visto que um ovo fecundado gera somente fêmeas. Em uma árvore genealógica, a partir do zangão, pode-se analisar, em cada geracão, a quantidade de machos, fêmeas e o total de indivíduos, constatando que essas quantidades são Números de Fibonacci.

Pode-se também encontrar algumas relações no mercado financeiro. Em seu livro "The Wave Principal", Ralph Nelson Elliott defende que as flutuações do mercado financeiro podem ser aproximadas utilizando-se dos Números de Fibonacci [5].

Na conversão de unidades de medida também pode-se encontrar uma aplicação direta dos Números de Fibonacci. Em geral, um Número de Fibonacci em milhas é aproximadamente igual ao seu sucessor em quilômetros [5]. Por exemplo, 13 milhas são, aproximadamente, 21 quilômetros. Isso se dá pelo fato que o fator de conversão de milhas para quilômetros (aprox. $1,61$) se assemelhar com a razão entre dois Números de Fibonacci consecutivos (aprox. $1,618$). Essa razão é conhecida como Número de Ouro. Diversas proporções na natureza estão relacionadas ao Número de Ouro, como a formação dos flóculos dos girassóis, a curvatura da concha Nautilus, entre outros. Além disso, há representações dos Números de Fibonacci nos ramos de algumas espécies de árvores, nas pétalas de flores e na estrela do mar [5].

Sobre o conteúdo deste texto têm-se que os conceitos, demonstrações e ideias gerais de aplicação foram baseados nas referências [1], [3] e [6].

Isto posto, no início deste trabalho será introduzida a definição de Números de Fibonacci, enunciadas e demonstradas suas propriedades utilizando-se de procedimentos algébricos. Na sequência, serão analisadas algumas conexões entre os Números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal. Essas conexões serão demonstradas neste capítulo utilizando-se de conceitos de Análise Combinatória. Posteriormente, serão estabelicidas algumas relações entre os Números de Fibonacci e a permutação de blocos geométricos. Boa parte das propriedades vistas no Capítulo 1 serão novamente demonstradas, desta vez utilizando-se de conceitos geométricos e visuais. Por fim, serão analisadas algumas relações entre os Números de Fibonacci e o estudo das matrizes. Neste capítulo, a álgebra matricial é utilizada para demonstrar algumas propriedades já vistas no decorrer deste texto, além de outras que serão comprovadas no final.

Em resumo, os objetivos deste trabalho são:

- definir Números de Fibonacci e demonstrar suas principais propriedades.
- relacionar o conceito de Números de Fibonacci com outras áreas da Matemática como Análise Combinatória, Álgebra Matricial e Geometria.
- aprofundar os conhecimentos dos professores de Matemática sobre os Números de Fibonacci e gerar sugestões de temas de Matemática de ensino superior que possam ser trabalhados em turmas de Ensino Médio.

Capítulo 1

Preliminares

A expressão Números de Fibonacci é utilizada para descrever a sequência de números gerada pelo seguinte padrão:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots .$$

Nela, cada elemento da sequência, a partir do terceiro, é gerado pela soma de seus dois antecessores.

Tomando $f_1 = 1$ e $f_2 = 1$, os elementos seguintes são gerados pela relação recursiva

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

para $n > 2, n \in N$.

Criados por Leonardo de Pisa (aprox. 1180 – 1250) e inicialmente utilizados para modelar um problema sobre o crescimento de uma população de coelhos, os Números de Fibonacci são utilizados para modelar situações em diversas áreas como matemática, economia, estatística, biologia, arquitetura, entre outras [5].

Com os Números de Fibonacci já definidos, algumas propriedades de grande importância para os capítulos seguintes serão enunciadas e demonstradas neste capítulo.

1.1 Propriedades dos Números de Fibonacci

Ao se estudar os Números de Fibonacci e sua lei de formação, pode-se verificar diversas propriedades entre os termos desta sequência. Uma delas consiste em calcular a soma dos n primeiros Números de Fibonacci, a qual pode ser expressa pelo seguinte resultado:

Lema 1.1. *A soma dos n primeiros Números de Fibonacci é dada pela expressão:*

$$f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Demonstração. Primeiramente, partindo da relação recursiva original $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n > 2$, n será substituído pelos primeiros valores do conjunto dos Números Naturais e, em seguida, os elementos $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ serão isolados do lado esquerdo de cada equação. Assim, têm-se:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2, \\ f_2 &= f_4 - f_3, \\ f_3 &= f_5 - f_4, \\ &\vdots \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n, \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1}. \end{aligned}$$

Somando as identidades termo a termo obtém-se:

$$f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - f_2.$$

Como, por definição $f_2 = 1$, têm-se que esta identidade é igual a:

$$f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1.$$

□

Da mesma forma que pode-se demonstrar uma relação que calcule a soma dos n primeiros Números de Fibonacci, pode-se também demonstrar relações para a soma de seus termos de ordem par e ordem ímpar. A partir da demonstração anterior, constata-se que a soma dos n primeiros Números de Fibonacci de ordem ímpar pode ser expressa pela identidade descrita no lema seguinte:

Lema 1.2. *A soma dos primeiros n termos de ordem ímpar da Sequência de Fibonacci é dada por*

$$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

Demonstração. Novamente será utilizada a relação recursiva original $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n > 2$, e os primeiros valores do conjunto dos Números Naturais para n. Desta vez, isola-se $f_2, f_4, f_6, ..., f_{2n}$ do lado esquerdo de cada equação. Assim, têm-se:

$$
\begin{aligned}
f_1 = f_2 &\Leftrightarrow f_1 = f_2,\\
f_4 = f_3 + f_2 &\Leftrightarrow f_3 = f_4 - f_2,\\
f_6 = f_5 + f_4 &\Leftrightarrow f_5 = f_6 - f_4,\\
f_8 = f_7 + f_6 &\Leftrightarrow f_7 = f_8 - f_6,\\
&\vdots\\
f_{2n} = f_{2n-1} + f_{2n-2} &\Leftrightarrow f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}.
\end{aligned}
$$

Somando-se as equações termo a termo obtém-se:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

□

Neste momento, serão analisados os termos de ordem par. A soma dos n primeiros Números de Fibonacci de ordem par pode ser expressa pelo lema seguinte:

Lema 1.3. *A soma dos termos de ordem par da Sequência de Fibonacci é dada por:*

$$f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Demonstração. De maneira análoga à demonstração anterior, isola-se do lado esquerdo de cada equação os termos de ordem ímpar. Assim, têm-se:

$$
\begin{aligned}
f_3 = f_2 + f_1 &\Leftrightarrow f_2 = f_3 - f_1,\\
f_5 = f_4 + f_3 &\Leftrightarrow f_4 = f_5 - f_3,\\
f_7 = f_6 + f_5 &\Leftrightarrow f_6 = f_7 - f_5,\\
&\vdots\\
f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n-1} &\Leftrightarrow f_{2n} = f_{2n+1} + f_{2n-1}.
\end{aligned}
$$

Somando-se as identidades termo a termo obtém-se:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1.$$

Já que $f_1 = 1$, segue o resultado:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

□

Os lemas relativos a soma dos termos de ordem par e ímpar podem ser utilizados para explanar uma relação envolvendo a soma dos Números de Fibonacci com sinais alternados. Esta relação é expressa pelo lema seguinte:

Lema 1.4. *A soma dos números de Fibonacci com sinais alternados é dada pela expressão:*

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1.$$

Demonstração. Subtraindo-se membro a membro as identidades obtidas nos Lemas 1.2 e 1.3, expressa-se:

$$\begin{aligned} &f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}, \\ &f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1, \\ &f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + f_{2n-1} - f_{2n} = f_{2n} - f_{2n+1} + 1. \end{aligned}$$

Como $f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n-1}$, então $f_{2n} - f_{2n+1} = -f_{2n-1}$. Substituindo-se na equação anterior obtém-se:

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + f_{2n-1} - f_{2n} = -f_{2n-1} + 1. \tag{1.1}$$

Por conseguinte, adicionando-se f_{2n+1} aos dois membros da equação segue o resultado:

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + f_{2n-1} - f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+1} - f_{2n-1} + 1.$$

Como $f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n-1}$, então $f_{2n+1} - f_{2n+1} = f_{2n}$. Substituindo-se na equação anterior têm-se:

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + f_{2n-1} - f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n} + 1. \tag{1.2}$$

Comparando as identidades obtidas em (1.1) e (1.2), nota-se que são os únicos casos particulares para a soma dos Números de Fibonacci com sinais alternados:

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1.$$

□

Isto posto, após a análise dos lemas mais acessíveis, os estudos sobre relações algébricas envolvendo os Números de Fibonacci serão aprofundados e relações mais elaboradas serão demonstradas. Uma delas é sobre a soma dos quadrados dos n primeiros Números de Fibonacci, a qual pode ser expressa pelo lema seguinte:

Lema 1.5. *A soma dos quadrados dos n primeiros Números de Fibonacci é dada por:*

$$f_1^2 + f_2^2 + ... + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

Demonstração. Antes o Lema 1.5 ser provado, note que $f_k^2 = f_k(f_{k+1} - f_{k-1})$. Este resultado é válido uma vez que

$$f_k^2 = f_k f_k = f_k(f_{k+1} - f_{k-1}).$$

Substituindo-se k pelos n primeiros Números Naturais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
f_1^2 &= f_1 f_1 = f_1 f_2, \\
f_2^2 &= f_2 f_3 - f_2 f_1, \\
f_3^2 &= f_3 f_4 - f_3 f_2, \\
&\vdots \\
f_n^2 &= f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1}.
\end{aligned}$$

Somando-se as equações termo a termo obtém-se:

$$f_1^2 + f_2^2 + ... + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

□

Ademais, algumas relações que obtêm um Número de Fibonacci de ordem relativamente grande através de Números de Fibonacci de ordem pequena podem ser demonstradas. Uma destas relações é expressa pelo lema seguinte:

Lema 1.6. *O cálculo de um Número de Fibonacci de ordem $2n$ em função do de ordem m, seu sucessor, do de ordem n e seu antecessor é expressa por:*

$$f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}.$$

Demonstração. Será utilizado indução sobre m. Para $m = 1$, têm-se:

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_{n-1} + f_n \\
f_{n+1} &= f_{n-1} f_1 + f_n f_2.
\end{aligned}$$

A mesma equação também se mostra verdadeira para $m = 2$.

$$\begin{aligned} f_{n-1}f_2 + f_nf_3 &= f_{n-1} + 2f_n \\ &= f_{n-1} + f_n + f_n \\ &= f_{n+1} + f_n \\ &= f_{n+2}. \end{aligned}$$

Provadas as bases da indução, supõe-se que a relação é válida para $m = k$ e para $m = k + 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} f_{n+k} &= f_{n-1}f_k + f_nf_{k+1} \\ f_{n+k+1} &= f_{n-1}f_{k+1} + f_nf_{k+2}. \end{aligned}$$

Somando-se as duas identidades acima, têm-se:

$$\begin{aligned} f_{n+k} + f_{n+k+1} &= f_{n-1}f_k + f_nf_{k+1} + f_{n-1}f_{k+1} + f_nf_{k+2} \iff \\ f_{n+k} + f_{n+k+1} &= f_{n-1}(f_k + f_{k+1}) + f_n(f_{k+1} + f_{k+2}) \iff \\ f_{n+k} + f_{n+k+1} &= f_{n-1}f_{k+2} + f_nf_{k+3} \iff \\ f_{n+k+2} &= f_{n-1}f_{k+2} + f_nf_{k+3}. \end{aligned}$$

Sendo assim, prova-se que a relação também é válida para $m = k + 2$ e, consequentemente, para todos os valores de m, com $m \in N^*$.

□

Outra relação que obtém um Número de Fibonacci de ordem relativamente grande através de outros de ordem relativamente pequena é expressa pelo lema seguinte:

Lema 1.7. *O cálculo de um Número de Fibonacci de ordem $2n$ através dos Números de Fibonacci de ordem $n + 1$ e $n - 1$ é expressa por:*

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

Demonstração. Utilizando o Lema 1.6 e tomando $m = n$, têm-se:

$$\begin{aligned} f_{2n} &= f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} \\ f_{2n} &= f_n(f_{n+1} + f_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$, têm-se:

$$f_{2n} = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1})$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

$\square$

Note que, pela penúltima identidade, nenhum Número de Fibonacci de índice par pode ser um número primo.

Capítulo 2

Os Números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

A construção e disposição dos números no Triângulo de Pascal possuem algumas conexões com os Números de Fibonacci. Neste capítulo será definido o Triângulo de Pascal e, em seguida, analisada e demonstrada uma destas conexões.

O Triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

com $p \leq n$, em que n representa a linha e p representa a coluna, contados a partir do zero.

$$\begin{array}{lllll}
C_0^0 & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4
\end{array}$$

Na disposição acima denomina-se a primeira linha de 0 e a primeira coluna de 0.

Calculando-se os números binomiais dispostos no triângulo acima têm-se a representação numérica do Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & \cdots & &
\end{array}$$

Figura 2.1: Representação numérica do Triângulo de Pascal

Analisando-se um padrão em algumas diagonais da figura 2.1:

$$\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Figura 2.2: Diagonais aumentadas do Triângulo de Pascal

Essas diagonais serão denominadas **diagonais aumentadas** do Triângulo de Pascal. Têm-se, assim, a primeira diagonal contendo o número $1(C_0^0)$, a segunda diagonal contendo o número $1(C_1^0)$, a terceira diagonal contendo os números $1, 1$, a quarta diagonal contendo os números $1, 2$, a quinta diagonal contendo os números $1, 3, 1$ e assim sucessivamente. Observe a relação da soma dos números em cada diagonal aumentada:

$$\begin{array}{lcl}
1^{\text{a}} \text{ diagonal} & \rightarrow & 1, \\
2^{\text{a}} \text{ diagonal} & \rightarrow & 1, \\
3^{\text{a}} \text{ diagonal} & \rightarrow & 1 + 1 = 2, \\
4^{\text{a}} \text{ diagonal} & \rightarrow & 1 + 2 = 3, \\
5^{\text{a}} \text{ diagonal} & \rightarrow & 1 + 3 + 1 = 5, \\
6^{\text{a}} \text{ diagonal} & \rightarrow & 1 + 4 + 3 = 8.
\end{array}$$

Note que o resultado de cada uma dessas somas é um número de Fibonacci.

Teorema 2.1. *A soma dos números em cada diagonal aumentada do Triângulo de Pascal é um Número de Fibonacci.*

Previamente à demonstração deste teorema, o Triângulo de Pascal será reescrito com seus coeficientes representados por números binomiais:

$$\begin{array}{lllll}
C_0^0 & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4
\end{array}$$

A seguir, será demonstrado que a soma dos elementos em cada diagonal aumentada do triângulo resulta em números sucessivos de Fibonacci.

Demonstração. Para provar a veracidade do teorema, deve-se demonstrar que a soma dos elementos da $(n-2)$-ésima diagonal aumentada com os elementos da $(n-1)$-ésima diagonal aumentada resulta na soma dos elementos na n-ésima diagonal aumentada do Triângulo de Pascal. A $(n-2)$-ésima diagonal é formada pelos binomiais:

$$C_{n-3}^0, C_{n-4}^1, C_{n-5}^2, ...$$

A $(n-1)$-ésima diagonal é formada pelos binomiais:

$$C_{n-2}^0, C_{n-3}^1, C_{n-4}^2, ...$$

Adicionando-se todos os elementos das duas expressões, obtêm-se:

$$C_{n-2}^0 + (C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1) + (C_{n-4}^1 + C_{n-4}^2) + ...$$

Já que $C_{n-2}^0 = C_{n-1}^0 = 1$ e, pela Relação de Stifel:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1},$$

a expressão acima é igual a:

$$C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + ... = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + ...$$

que representa a soma dos elementos na n-ésima diagonal aumentada do Triângulo de Pascal e, sendo assim, a soma dos elementos de cada diagonal aumentada do Triângulo de Pascal é um Número de Fibonacci.

$\square$

Capítulo 3

Os Números de Fibonacci e a permutação de blocos geométricos

Neste capítulo, a permutação de blocos geométricos será utilizada para gerar os Números de Fibonacci. Para que algumas demonstrações se façam mais simples será utilizada, em boa parte deste capítulo, uma notação diferenciada dos Números de Fibonacci, sendo $f_0 = f_1 = 1$ e para $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Considere um retângulo de altura igual a 1 e largura igual a n. Suponha que este retângulo será preenchido com quadrados(de lado 1), que serão denotados por q, e dominós (retângulos de base 2 e altura 1), que serão denotados por d. De quantas maneiras pode-se preencher o retângulo caso este possua:

i. **Largura 2 ($n = 2$)?** Pode ser preenchido com 2 quadrados (qq) ou com 1 dominó (d). Sendo assim, pode-se preenchê-lo de 2 maneiras.

ii. **Largura 3 ($n = 3$)?** Pode ser preenchido com 3 quadrados (qqq) e com 1 quadrado e 1 dominó (qd, dq). Sendo assim, pode-se preenchê-lo de 3 maneiras.

iii. **Largura 4 ($n = 4$)?** Pode ser preenchido com 4 quadrados ($qqqq$), com 2 quadrados e 1 dominó (qqd, qdq, dqq) e com dois dominós (dd). Sendo assim, pode-se preenchê-lo de 5 maneiras.

Agora observe que o retângulo de lado 5 pode ser criado adicionando um quadrado(q) a um retângulo de lado 4 ou um dominó(d) a um retângulo de lado 3. Sendo assim,

$$f_5 = f_4 + f_3 = 8.$$

E, por consequência, um retângulo de largura 5 pode ser preenchido de 8 maneiras diferentes:

$$(qqqqq, dqqq, qdqq, qqdq, qqqd, ddq, dqd, qdd).$$

Pode-se então supor que um retângulo de largura n pode ser gerado adicionando um quadrado a um retângulo de largura $(n-1)$ ou adicionando um dominó a um retângulo de largura de largura $(n-2)$. Sendo assim, o número de maneiras de preencher cada um dos retângulos de largura n cresce de acordo com os Números de Fibonacci.

Em suma, o número de maneiras de preencher um retângulo de largura n é igual a f_n.

Para relacionar os Números de Fibonacci com seus respectivos quadrados, observe o quadro abaixo:

Tabela 3.1: Números de Fibonacci e seus quadrados

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
f_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921

Ao procurar por algum padrão no quadro acima, pode-se perceber que a soma dos quadrados de dois Números de Fibonacci consecutivos é igual a algum outro Número de Fibonacci.

Exemplos:

$$1+4=5$$
$$4+9=13$$
$$9+25=34$$

Analisando com mais cautela, pode-se supor que para qualquer $n \geq 1$, têm-se:

$$f_{2n} = f_{n-1}^2 + f_n^2.$$

Essa propriedade pode ser verificada ao analisar um retângulo de largura igual a $2n$. Este retângulo pode ser de dois tipos:

i. Um retângulo que pode ser separado em dois retângulos de largura igual a n (neste caso ele possui uma “quebra” exatamente no meio).

ii. Um retângulo que **não** pode ser separado em dois retângulos de largura n (neste caso ele não possui uma "quebra" exatamente no meio) e então será separado em dois retângulos de largura $(n-1)$ e um dominó entre estes(observar figura 3.1).

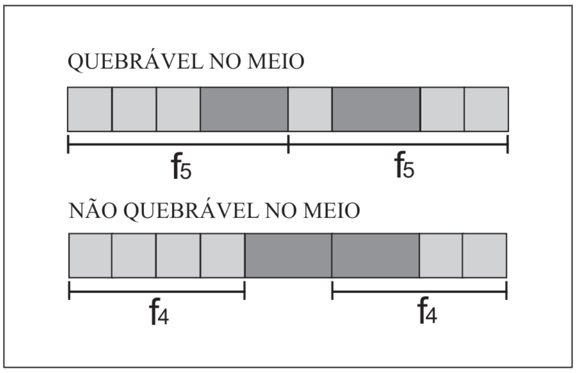

Figura 3.1: Representação de quebráveis no meio × não-quebráveis no meio.

Utilizando o Princípio Multiplicativo, pode-se concluir que os retângulos de largura $2n$ da Figura (3.1) que são "quebráveis" ao meio podem ser dispostos de $f_n f_n = f_n^2$ maneiras e, os retângulos de largura $2n$ que não são "quebráveis" ao meio, podem ser dispostos de $f_{n-1} f_{n-1} = f_{n-1}^2$ maneiras. Sendo assim, aplicando o Princípio Aditivo, têm-se que o número de maneiras de preencher um retângulo de largura $2n$ pode ser representado por:

$$f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_{2n}.$$

Imagine agora um retângulo de largura $m + n$. Como já visto neste capítulo, pode-se afirmar que existem f_{m+n} maneiras de preenchê-lo com quadrados e dominós. Analisando cada um dos preenchimentos possíveis, uma pergunta pode ser respondida: esse preenchimento é "quebrável" na célula m?

Caso a resposta seja positiva, pode-se separar esses retângulo em duas partes: um retângulo de largura m e um retângulo de largura n. Neste caso, o retângulo pode ser preenchido de $f_m f_n$ maneiras. Caso a resposta seja negativa, pode-se separar esse retângulo em três partes: um retângulo de largura $m - 1$, um dominó ao centro e um retângulo de largura $n - 1$. Neste caso o retângulo pode ser preenchido de $f_{m-1} f_{n-1}$ maneiras.

Finalmente, aplicando o principio aditivo, o número de maneiras de preencher um retângulo de largura $m + n$ pode ser representado por:

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}.$$

Analisando-se, neste ponto, a soma parcial dos quadrados dos Números de Fibonacci, observe os 5 primeiros Números de Fibonacci e seus respectivos quadrados:

n	0	1	2	3	4
f_n	1	1	2	3	5
f_n^2	1	1	4	9	25

$$1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \cdot 8$$

Note que a soma dos quadrados dos n primeiros Números de Fibonacci é igual ao n-ésimo termo multiplicado pelo seu sucessor. Assim, conjectura-se:

$$f_0^2 + f_1^2 + ... + f_n^2 = f_n.f_{n+1}.$$

Verifique também que este padrão já foi demonstrado no Capítulo 1 (Lema 1.5). Desta forma, seria possível demonstrá-lo utilizando os blocos retangulares?

Pode-se contar o número de maneiras de preencher um retângulo de largura n e um retângulo de largura $n + 1$. Por um lado, estes retângulos podem ser preenchidos de $f_n f_{n+1}$ maneiras.

Por outro lado, dentre todas essas maneiras de preenchimento, quantas delas possuem a última "quebra comum" na célula k?

Observe que denomina-se "quebra comum" a última célula(da esquerda para a direita) em que pode-se "quebrar" simultaneamente os dois retângulos.

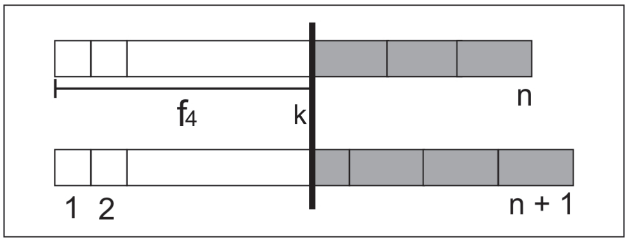

Figura 3.2: Retângulos com a última quebra comum na célula k.

Da figura 3.2, pode-se perceber que o número total de maneiras de preenchimento com a última "quebra comum" na célula k é f_k^2, uma vez que pode-se preencher o retângulo de largura n de f_k maneiras à esquerda de k e de apenas uma maneira à direita (pois existe apenas uma maneira de ordenar as peças à direita de k de modo a não existir mais nenhuma "quebra comum"), e pode-se preencher o retângulo de largura $n+1$ de f_k maneiras à esquerda de k e de apenas uma maneira à direita (pelos mesmos motivos do retângulo anterior). Observe também que k pode ser tão pequeno quanto 0, quando a última "quebra comum" está no início da figura e tão grande quanto n, quando o segundo retângulo termina com um quadrado. Somando-se todos os valores de k, têm-se $\sum_{k=0}^{n} f_k^2$ maneiras de preencher os dois retângulos. Sendo assim, obtêm-se:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n . f_{n+1}$$

e, finalmente:

$$f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n . f_{n+1}.$$

No lema 1.1 uma expressão para o cálculo da soma dos n primeiros Números de Fibonacci foi obtida. Este lema será analisado novamente mas, desta vez, sobre um ponto de vista geométrico. Para facilitar as demonstrações que serão feitas a seguir, o lema será reescrito para a notação deste capítulo (início em f_0 ao invés de f_1):

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Desta forma, como pode-se demonstrar este lema utilizando os blocos geométricos vistos neste capítulo?

Considere um retângulo de largura $n+2$. Como já visto neste capítulo, sabe-se que este retângulo pode ser preenchido de f_{n+2} maneiras. Quantos destes preenchimentos possuem o último dominó na 1^a casa? E na 2^a casa?

Último dominó na:

1^a casa $\rightarrow f_0 = 1 \rightarrow (dqqq...)$
2^a casa $\rightarrow f_1 = 1 \rightarrow (qdqq...)$
3^a casa $\rightarrow f_2 = 2 \rightarrow (qqdqqq..., ddqqqq...)$
4^a casa $\rightarrow f_3 = 3 \rightarrow (qqqdqq..., qddqqq..., dqdqqq...,)$
$\vdots$
$(n+1)$ -ésima casa $\rightarrow f_n$

Somando-se todas as possibilidades têm-se "quase" o total (f_{n+2}). O termo quase foi utilizado pois ainda falta adicionar a única possibilidade do preenchimento não conter nenhum dominó ($qqqq...$). Assim têm-se:

$$f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_n + 1 = f_{n+2}$$

Consequentemente:

$$f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1. \tag{3.1}$$

Retornando-se aos lemas do Capítulo 1, o Lema 1.2 será agora revisto. Será utilizada, novamente, uma adaptação para a notação deste capítulo (início em f_0 ao invés de f_1):

$$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n} - 1.$$

Este lema também pode ser demonstrado utilizando-se dos blocos geométricos!

Considere um retângulo de largura $2n$. Como visto no início deste capítulo, este retângulo pode ser preenchido de f_{2n} maneiras. Quantos destes preenchimentos possuem o último quadrado na 2^a casa? E na 4^a casa?

Veja que, obrigatoriamente, o último quadrado tem que estar em uma casa par, pois caso contrário teríamos após ele apenas dominós, e estes dominós ocupariam uma quantidade par de espaços e, assim, o retângulo teria largura ímpar. Isso não é possível pois o retângulo considerado possui largura par ($2n$).

Último quadrado na:

2^a casa $\rightarrow f_1 = 1 \rightarrow$ ($qqddd...$)
4^a casa $\rightarrow f_3 = 3 \rightarrow$ ($qqqqddd..., dqqddd..., dqqddd...$)
$\vdots$
($2n$) -ésima casa $\rightarrow f_{2n-1}$

Novamente, somando-se todos os elementos temos "quase" o total(f_{2n}). O termo quase foi novamente utilizado pois ainda falta adicionar a única possibilidade do preenchimento não conter nenhum quadrado (ddddd...). Assim têm-se:

$$1 + f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n},$$

e, consequentemente:

$$f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n} - 1.$$

Para finalizar os lemas do Capítulo 1 que serão demonstrados geometricamente, o Lema 1.3 será, neste ponto, revisto:

$$f_0 + f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1}.$$

Este lema também pode ser demonstrado utilizando-se dos blocos geométricos, por um raciocínio análogo ao caso anterior, calculando-se quantos preenchimentos podem ser feitos considerando a posição do último quadrado, que desta vez deve ficar em uma posição ímpar.

Aqui, ao relacionar o quadrado de um Número de Fibonacci com o seu antecessor e sucessor, observa-se novamente a tabela 3.1:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	32	55	89
f_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	7921

Pode-se observar que o quadrado de um Número de Fibonacci e o produto de seu antecessor pelo seu sucessor sempre diferem em uma unidade. Observe:

$$5^2 - 3 \cdot 8 = 1,$$
$$8^2 - 5 \cdot 13 = -1,$$
$$13^2 - 21 \cdot 8 = 1.$$

Logo, conclui-se que:

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n.$$

Essa identidade pode ser verificada analisando-se um par de retângulos de largura n e os transformando em dois retângulos, um de largura $n + 1$ e outro de largura $n - 1$, conforme está ilustrado na Figura 3.4. Suponha que A e B sejam retângulos de largura n, sendo que A se distribui da célula 1 até a célula n, e B se distribui da célula 2 até a célula $n + 1$. Suponha também que A e B tenham sua última "quebra comum" na célula k. Pode-se então separar A em duas partes: um retângulo A_1 de largura k e um retângulo A_2 de largura $n - k$. Da mesma maneira pode-se separar B em duas partes: um retângulo B_1 de largura $(k - 1)$ e um retângulo B_2 de largura $(n + 1 - k)$.

Finalmente A_2 e B_2 podem ser trocados de posição de modo a obter os retângulos $A^+ = A_1B_2$ e $B^- = B_1A_2$ (observar Figura 3.4) que possuem larguras $(n + 1)$ e $(n - 1)$ respectivamente. Observe que se fossem trocadas novamente a segunda parte dos retângulos A^+ e B^- seriam obtidas novamente A e B.

Sendo assim, têm-se quase a mesma quantidade de maneiras de preencher (A, B), em que A e B tem largura n, do que a quantidade de maneiras de preencher (A^+, B^-) em que A^+ tem largura $(n+1)$ e B^- tem largura $(n-1)$. Usa-se o termo **quase** porque a distribuição que contém apenas dominós é a única que não contém "quebras comuns". Como (A, B) pode não possuir "quebra comum" apenas

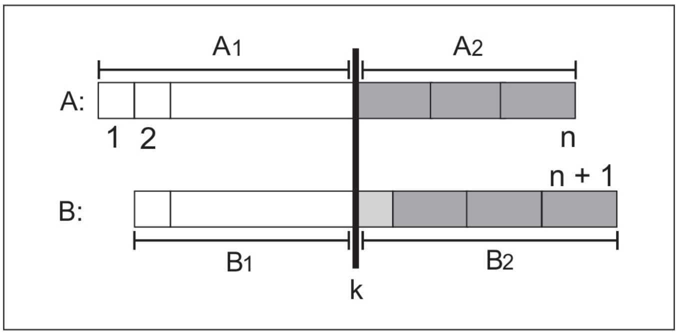

Figura 3.3: Dois retângulos de largura n.

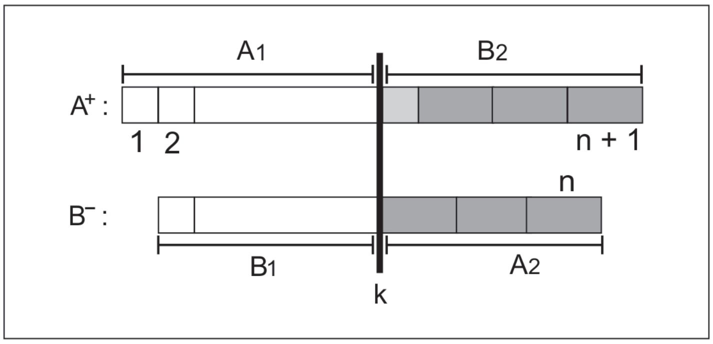

Figura 3.4: Retângulos da figura 3.3 após troca de posição.

quando n é par e (A^+, B^-) pode não possuir "quebra comum" apenas quando n é impar, têm-se que:

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n.$$

Capítulo 4

Os Números de Fibonacci e o estudo das matrizes

Neste capítulo serão analisadas algumas conexões entre os Números de Fibonacci e a álgebra matricial. Essas conexões podem ser utilizadas para aprofundar os conhecimentos sobre multiplicação de matrizes, reconhecimento de padrões e demonstrações por indução. Vale ressaltar que, neste capítulo, a notação usual dos Números de Fibonacci, já utilizada nos capítulos 1 e 2, voltará a ser utilizada.

4.1 Multiplicidade entre dois Números de Fibonacci.

Observe a Tabela 4.1:

Tabela 4.1: Relações entre Números de Fibonacci

n	f_n	f_{2n}	f_{2n}/f_n	f_{n-1}	f_{n+1}	$f_{n-1}+f_{n+1}$
3	2	8	4	1	3	4
4	3	21	7	2	5	7
5	5	55	11	3	8	11
6	8	144	18	5	13	18

Qual relação existe entre um Número de Fibonacci de índice n, seu antecessor e sucessor e um Número de Fibonacci de índice $2n$?

Pode-se perceber que f_{2n} é sempre um múltiplo de f_n e que $f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$ ou seja, o fator de multiplicação de f_n é a soma de outros dois Números de Fibonacci. Este resultado será demonstrado na seção 4.3.

Ressalta-se, também, que f_n não é apenas um fator de f_{2n} mas também um fator de f_{3n},f_{4n} e, generalizando, f_n é sempre um fator de f_{kn}, para todo k natural e diferente de zero. Com isso, pode-se analisar se um Número de Fibonacci é múltiplo de outro apenas observando sua posição na sequência. Por exemplo, considere o 4^o Número de Fibonacci ($f_4 = 3$). Pelo padrão visto acima, supõe-se que todos os Números de Fibonacci cujo índice seja múltiplo de 4 ($f_8, f_{12}, f_{16}, ...$) serão múltiplos de f_4 e consequentemente múltiplos de 3. Observe a tabela abaixo:

n	4	8	12	16	20	...
f_n	3	21	144	987	6765	...
Fator	3·1	3·7	3·48	3·329	3·2255	...

4.2 Matrizes e os Números de Fibonacci.

Uma das dificuldades da aritmética matricial é calcular uma potência de ordem relativamente grande de uma matriz, pois o algoritmo de multiplicação é um tanto quanto trabalhoso e, para uma potência de ordem relativamente alta, temos que repetir este procedimento diversas vezes. Porém, algumas matrizes, ao serem elevadas a potências consecutivas, exibem padrões que podem facilitar o procedimento de potenciação. Nesta sessão serão analisados alguns padrões existentes na potenciação de uma certa matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais seriam os resultados de A^2, A^3, A^4,...?

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que todos os elementos de cada uma das matrizes são Números de Fibonacci. Verifique também que o elemento a_{11} é sempre o Número de Fibonacci de índice uma unidade inferior ao expoente, os elementos a_{12} e a_{21} são sempre o Número de Fibonacci de mesmo índice que o expoente e o elemento a_{22} é sempre o Número de Fibonacci de índice uma unidade superior ao expoente. Sendo assim, pode-se conjecturar para a matriz A:

$$A^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Utilizando indução para $n = 2$ têm-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $f_1 = f_2 = 1$ e $f_3 = 2$, têm-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix}.$$

Supondo que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix},$$

para algum natural $n \geq 2$, deve-se provar que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Pela hipótese de indução, têm-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} + f_n \\ f_{n+1} & f_n + f_{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando a relação recursiva dos Números de Fibonacci, têm-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, prova-se que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$

é válida para todo $n \geq 2$.

$\square$

4.3 Demonstração: Multiplicidade dos Números de Fibonacci

Na seção 4.1 foi conjecturado que $f_{2n} = f_n \cdot (f_{n-1} + f_{n+1})$. Neste ponto, o padrão demonstrado na seção 4.2 será utilizado para demonstrar esta conjectura.

Demonstração. Vamos analizar a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{2n}$$

de duas maneiras diferentes. Primeiramente, aplicando o Padrão da seção 4.2, têm-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} f_{2n-1} & f_{2n} \\ f_{2n} & f_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

Por propriedades de exponenciais, têm-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n}.$$

Como,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n-1}^2 + f_n^2 & f_n f_{n-1} + f_n f_{n+1} \\ f_n f_{n-1} + f_n f_{n+1} & f_n^2 + f_{n+1}^2 \end{bmatrix},$$

pode-se combinar as duas relações e obter:

$$\begin{bmatrix} f_{2n-1} & f_{2n} \\ f_{2n} & f_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n-1}^2 + f_n^2 & f_n f_{n-1} + f_n f_{n+1} \\ f_n f_{n-1} + f_n f_{n+1} & f_n^2 + f_{n+1}^2 \end{bmatrix}.$$

Comparando-se as diagonais secundárias nesta igualdade obtêm-se:

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}).$$

Outro padrão pode ser obtido comparando-se o elemento da terceira linha e terceira coluna de ambas as matrizes.

$$f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2.$$

$\square$

4.4 Demonstração: Multiplicidade dos elementos da diagonal secundária das potências de certa matriz A.

Dada uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

com a, b e c inteiros, a diagonal secundária de A^n contém sempre múltiplos de b, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} x & by \\ bz & w \end{bmatrix},$$

para alguns inteiros x, y, z e w.

Demonstração. Por indução têm-se: Para $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, para $n = 2$, os elementos da diagonal secundária são múltiplos de b.

Sendo a conjectura válida para algum $n = k$ então ela deve ser válida para $n = k + 1$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d & eb \\ fb & g \end{bmatrix},$$

com d, e, f e g inteiros, para algum $n = k$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & eb \\ fb & g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} ad+ab^2 & bd+ebc \\ afb+bg & fb^2+gc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+ab^2 & b(d+ec) \\ b(a+fg) & fb^2+gc \end{bmatrix}.$$

Assim, têm-se que na matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^n$$

os elementos da diagonal secundária são múltiplos de b.

□

4.5 Utilizando determinantes em demonstrações anteriores

No capítulo anterior foi demonstrada a relação:

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n$$

utilizando-se de blocos geométricos. Desta vez, será obtida esta mesma relação fazendo uso de matrizes e dos outros padrões já demonstrados neste capítulo.

Demonstração. Como visto na seção 4.1, têm-se que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Por propriedade de determinantes, têm-se que $\det(A^n) = (\det(A))^n$. Como $\det(A) = -1$, obtêm-se a relação:

$$\det(A^n) = (-1)^n = \begin{vmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{vmatrix} = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2.$$

Logo,

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

□

Note-que o resultado do capítulo anterior

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n$$

é o mesmo que o resultado que acabou de ser demonstrado

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

pois, no primeiro foi utilizada a notação $f_0 = 1, f_1 = 1$ e no segundo foi utilizada a notação inicial dos Números de Fibonacci representada por $f_1 = 1, f_2 = 1$.

Conclusão

Neste texto, o conceito de Números de Fibonacci foi abordado de forma a demonstrar as várias propriedades destes números não só por meio algébricos mas, também, por meios geométricos e de álgebra matricial, com o intuito propor meios alternativos de trabalho para este tema.

Outro anseio que foi suprido durante a escrita desse texto foi a intenção de levar alguns conteúdos de Matemática de nível superior para patamares mais acessíveis para alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Muitas vezes, os tópicos matemáticos do ensino básico são trabalhados de maneira superficial devido à falta de carga horária e à maneira como os conteúdos programáticos são apresentados. Esse texto aborda alguns tópicos que podem ser utilizados por professores do ensino básico para enriquecer as explanações e atividades em sala de aula.

Uma característica inerente às sequências recursivas é a dificuldade de calcular termos de ordem relativamente alta sem o uso de uma fórmula do termo geral. No decorrer deste texto podemos concluir que um Número de Fibonacci de ordem relativamente grande pode ser calculado utilizando-se de termos de ordem relativamente pequena (Lema 1.6).

Outra aplicação interessante vista no início do texto é que nenhum Número de Fibonacci de índice par pode ser um Número Primo (Lema 1.7).

Em seguida foi verificada e demonstrada uma conexão entre os Números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal. Concluiu-se que a soma dos números de cada diagonal aumentada deste triângulo é um Número de Fibonacci.

Na sequência, foi utilizado uma abordagem geométrica para os Números de Fibonacci. Muitos dos lemas enunciados do Capítulo 1 foram demonstrados sob essa nova abordagem. Este é o principal capítulo em que o anseio prévio de abordar conteúdos mais aprofundados de Matemática no ensino básico foi suprido.

Por fim, foi utilizada uma abordagem matricial para algumas propriedades dos Números de Fibonacci. Novamente, alguns lemas enunciados no Capítulo 1 foram demonstrados sob um outro ponto de vista. Foi utilizado também o conceito de Determinantes para demonstrar um lema que já havia sido provado de forma algébrica no início deste texto.

Algumas demonstrações que fogem do escopo deste texto também podem ser feitas para aprofundar os conceitos apresentados nesta dissertação. No Capítulo 3, por exemplo, pode-se mostrar que o Máximo Divisor comum entre dois Números de Fibonacci é igual ao Número de Fibonacci de ordem equivalente ao MDC das ordens destes números (MDC$(f_n, f_m) = f_{mdc(n,m)}$). Na seção 4.4 pode-se demonstrar, por exemplo, que os elementos da diagonal secundária da matriz A^n, além de serem múltiplos de b, são iguais.

Referências Bibliográficas

[1] BENJAMIN, Arthur T.;QUINN, Jennifer J. *Revisiting Fibonacci and Related Sequences*. 2006. 6 f. Artigo. Mathematics Teacher, Vol. 99, No. 5, p 357-361. Disponível em: <http://ow.ly/OnzV301Q6XD>.

[2] BEZ, Edson Tadeu. *Relacionando padrões entre sequência de Fibonacci, Secção Áurea e Ternos Pitagóricos*. 1997. 80f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997. Disponível em: <http://ow.ly/CXBt301Q7b1>.

[3] CLANCY, Tyler. *The Fibonacci Numbers*. 22 f. Artigo. Disponível em: <http://ow.ly/rqNo301Q6jR>.

[4] JOHNSON, R C. *Fibonacci numbers and Matrices*. 2009. 50 f. Artigo. Disponível em: <http://ow.ly/iXlm301Q6Hx>.

[5] SANTOS, Fabiana *Números de Fibonacci*. Disponível em: <http://ow.ly/nuPR301Q7jq>.

[6] VEENSTRA, Tamara B.; MILLER, Catherine M. *The Matrix Connection: Fibonacci and Inductive Proof.* 2006. 6 f. Artigo. Mathematics Teacher, Vol. 99, No. 5, p 328-333. Disponível em: <http://ow.ly/icBg301ORBK>.

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Centro Politécnico - Av. Cel. Francisco H. dos Santos, 210, - Jardim das Américas, Curitiba - PR
CEP: 81531-970
<http://www.ufpr.br>