

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI –  
UFSJ**

**Departamento de Matemática e Estatística**

**Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT**

**ANDRÉA CRISTINA ROCHA CANTARUTI**

**São João del-Rei**

**2017**

**Andréa Cristina Rocha Cantaruti**

**ENSINO DE FUNÇÕES NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO:  
UMA ABORDAGEM COM ÊNFASE NO COMPORTAMENTO DAS  
FUNÇÕES E SUA REPERCUSSÃO NO ENSINO SUPERIOR NA  
DISCIPLINA DE CÁLCULO I**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha

Co-orientadora: Prof<sup>a</sup>. Mestra Marianna Resende de Oliveira

São João del-Rei

2017

Cantaruti, Andréa Cristina Rocha

Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: uma abordagem com ênfase no comportamento das funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo I

Andréa Cristina Rocha Cantaruti - 2017.

204 páginas.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha

Co-Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Mestra Marianna Resende Oliveira

Dissertação de Mestrado Universidade Federal de São João del-Rei.  
Departamento de Matemática e Estatística. Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, 2017

1. Função: definição, elementos estruturantes e caracterizadores.
2. Metodologia abrangente e detalhada, Comportamento das funções.
3. Cálculo I

**ANDRÉA CRISTINA ROCHA CANTARUTI**

**ENSINO DE FUNÇÕES NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO:  
UMA ABORDAGEM COM ÊNFASE NO COMPORTAMENTO DAS  
FUNÇÕES E SUA REPERCUSSÃO NO ENSINO SUPERIOR NA  
DISCIPLINA DE CÁLCULO I**

Aprovada em 03 de fevereiro de 2017

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha  
Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Ms. Marianna Resende de Oliveira  
Universidade Federal de São João del-Rei

---

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira  
Universidade Federal de São João del-Rei

## DEDICATÓRIA

*Dedico esta dissertação aos maiores tesouros que tenho em minha vida: meus filhos (a primogênita Luiza, o filho do meio Mateus e o filho mais novo 1 minuto Lucas).*

*Acredito que o maior legado que eu vou deixar a meus filhos ao terminar este curso de mestrado é que para se conquistar algo é preciso muito esforço, dedicação e determinação. Os dias e dias que me dediquei ao estudo das disciplinas do curso de mestrado e, posteriormente, na escrita desta dissertação, tenho certeza, serão referências para meus filhos que agora se encontram em idade escolar.*

*Ainda falando de pessoas especiais em minha vida, também dedico esta dissertação a meu eterno e primeiro amor: meu esposo Luiz. Obrigada por sempre estar a meu lado, pelos incentivos e pela força dada nos momentos mais difíceis desta etapa que se tornou também uma etapa que vivemos juntos em FAMÍLIA. Nossa FAMÍLIA, nosso tesouro, que construímos juntos.*

*Em todos os momentos em que precisei de força fui buscar em Deus e em vocês. E agora, ao concluir mais esse caminho percorrido, vamos dar GRAÇAS a DEUS!!*

## AGRADECIMENTOS

*Agradeço indefinidamente:*

*A Deus, condutor de todos os meus passos. Obrigada por mais essa conquista!*

*Aos meus pais, pelos exemplos dados ao longo de minha formação e pela vivência transmitida.*

*Ao meu orientador, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, por ter acreditado em meu projeto e ter aceitado fazer a orientação.*

*À querida Marianna, nossa professora em todos os semestres do curso, que sempre conduziu suas aulas com dedicação, comprometimento, competência e profissionalismo. Você está na profissão certa: é uma excelente PROFESSORA!*

*Agradeço também a valiosa contribuição que deu como co-orientadora deste trabalho.*

*A todos os demais professores do corpo PROFMAT da UFSJ, com os quais tive contato no curso, em especial ao Professor Francinildo, pelas aulas tão empolgantes, dinâmicas e produtivas que ministrou para nossa turma. Seu brilho no olhar ao estar em sala de aula, no exercício da docência, é algo que contagia e emociona.*

*À Marisa, pela gentileza de ter me emprestado todos os livros adotados no curso e também seus cadernos de aulas que com certeza foram de grande valia nos meus estudos.*

*Aos meus colegas professores da equipe de matemática da EPCAR, pelo incentivo e pelo apoio.*

*Ao Alexandre, por mais uma vez ser um “parceirão”! Obrigada pelas valiosas sugestões e contribuições, pelas leituras que fez nesta dissertação, pela alegria estampada em seu rosto quando viu na pesquisa os resultados que encontrei na coleta e análise de dados, pela formatação que fez desta dissertação, enfim, por tudo que fez para que eu pudesse novamente concluir um mestrado. Muitíssimo obrigada! Como diriam Lucas e Mateus, VLW!!!*

*Aos meus colegas de turma do mestrado, juntos, encontrávamos força para caminhar no curso. O convívio com vocês fez do curso mais prazeroso. Nossos estudos juntos nas vésperas de prova sempre foram de grande valia para mim.*

*À Danila e ao Robson, pela companhia nas idas e vindas de São João del Rei à Barbacena. Suas companhias amenizaram o estresse da estrada.*

*Ao Robson, pelas recepções em sua casa quando estudamos para as provas das disciplinas e principalmente para o ENQ.*

*Ao Expedito, Robson, Danila, e Eliane pelos momentos de estudo juntos que sempre foram muito proveitosos! Obrigada pela parceria!*

*À Ana Maria, pelas correções gramaticais realizadas na escrita dessa dissertação, sempre feitas com tanto carinho, esmero e dedicação.*

*À EPCAR, na pessoa do Cel. Moura, por possibilitar realizar a pesquisa nessa escola. Aos queridos alunos do esquadrão GRIFO, por aceitarem ser personagens desta pesquisa ao compreenderem a ideia do tema de pesquisa e preencherem o questionário com tanta riqueza de conteúdo.*

*Aos professores da EPCAR que preencheram o questionário, pela colaboração tão relevante que deram à pesquisa no preenchimento do questionário, emitindo suas valiosas contribuições.*

*Aos coordenadores dos cursos de Engenharia Mecânica, Professor Dr. Antônio Luiz Ribeiro Sabariz e de Ciências da Computação, Professora Dra Michelli Marlane Silva Loureiro, por terem autorizado a pesquisa nas turmas dos cursos da UFSJ.*

*Aos alunos das turmas de Engenharia Mecânica e de Ciências da Computação da UFSJ matriculados na disciplina de Cálculo I, que mesmo sem me conhecerem, compreenderam a ideia da pesquisa e preencheram o questionário.*

*Aos professores da UFSJ que preencheram o questionário, pela contribuição tão valiosa que deram à pesquisa no preenchimento do questionário, emitindo suas valiosas vivências.*

*Ao Marcos e à Meira, secretários do PROFMAT na UFSJ, pela presteza em todas as vezes que necessitei de alguma informação ou documentação.*

*À CAPES, pelo apoio financeiro.*

*A todos os amigos que torceram por mim nesse período.*

*Enfim, a todos que se dedicaram e ainda se dedicarão à leitura deste trabalho, muito obrigada!*

## RESUMO

Nesta pesquisa buscamos apresentar uma metodologia que expõe de forma mais abrangente e detalhada a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função, entre outros. Intencionamos mostrar assim que, uma metodologia que priorize os aspectos já citados, pode colaborar para que os alunos interpretem melhor o gráfico de uma função, tornando-os melhor preparados para caracterizar uma função, estudar as funções por famílias (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométricas) e construir gráficos de funções. Também buscamos mostrar com a pesquisa que uma metodologia de ensino de função, pautada no que apresentamos, pode contribuir para facilitar o acompanhamento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo I) no curso superior. Na pesquisa, apresentamos a visão dos alunos do 1º ano do Ensino Médio e professores da Escola Preparatória de Cadetes do Ar, colaboradores no processo para que pudéssemos verificar a percepção desses personagens que vivenciam a metodologia do ensino de definição de função e seus elementos caracterizadores que discutimos. Também apresentamos a visão de colaboradores da Universidade Federal de São João del Rei, quais sejam alunos que estão cursando a disciplina de Cálculo I e professores que ministram ou já ministraram a referida disciplina para que pudéssemos indicar a importância de se ter uma boa base em função para acompanhar Cálculo I, assim como para evidenciar que os alunos egressos do Ensino Médio têm chegado no Ensino Superior com defasagem no ensino do assunto função. Inicialmente, justificamos a pesquisa apoiando em pesquisas já realizadas que abordassem o tema a que nos propusemos pesquisar. Em seguida, apresentamos uma compilação da história e dos conceitos e definições de função seguida de uma sequência de atividades que podem ser usadas durante as aulas do referido assunto. Optamos por uma pesquisa de cunho qualitativo, numa abordagem descritiva dos dados colhidos por questionário com alunos e professores da EPCAR, assim como alunos e professores da UFSJ. Algumas evidências encontradas nessa pesquisa apontam para a confirmação de que apresentar a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores usando uma metodologia mais abrangente e detalhada é produtivo e traz benefícios que congregam para uma aprendizagem mais significativa e efetiva desse assunto, assim como aponta para o fato de que o assunto função é de extrema importância para o estudo de Cálculo I e que os alunos egressos do Ensino Médio estão entrando no Ensino Superior com defasagem no assunto função.

**Palavras-chave:** Função: definição, elementos estruturantes e caracterizadores, metodologia abrangente e detalhada; Comportamento das funções; Cálculo I.



## ABSTRACT

In this research we look for to present a methodology which present more comprehensively and in detail the definition of function and its structuring and characterizing elements, which are: Domain study, image, roots, growth, increase decrease, maximos, minimum, parity of functions and signal of a function, among others. We intend to show that, a methodology that prioritizes the aspects already cited, can help students better interpret the graphic of a function, making them better prepared to characterize a function, to study functions by families (afin, quadratic, modular, exponential, logarithmic and trigonometric) and construct graphics of functions. We also try to show with a research that a methodology for teaching of functions, based on what we present, can contribute to the monitoring of the discipline Differential and Integral Calculus (Calculus I) in the higher education. In the research, we present the vision of the students of the 1st year of High School and teachers of the Preparatory School of Air Cadets (EPCAR), collaborators in the process so that we could verify the perception of these personages who experience in the methodology of teaching definition of function and its characterizing elements that we discuss. We also present the vision of collaborators of Federal University of São João del Rei, students who are taking calculus I and teachers who teach or have already taught the subject so that we could indicate the importance of having a good basis in function to accompany Calculus I, as well as to evidence that the students graduating from High School have arrived of Higher Education with discrepancy in the teaching function. Initially, we justified the research through other already made ones that approached the subject that we proposed to research. Next, we present a compilation of history and concepts and definitions of function followed by a sequence of activities that can be used during the classes on the subject. We chose a qualitative research, in a descriptive approach to data collected by questionnaire with EPCAR's students and teachers, as well as UFSJ's students and professors. Some evidences found in this research point to the confirmation that to present the definition of function and its structuring and characterizing elements using a more detailed methodology is productive and brings benefits that congregate for a more effective learning of this subject, as in fact the subject is of extreme importance for the study of Calculus I And that the students graduating from High School are starting in Higher Education with a discrepancy in the study of function.

**Key words:** Function: structuring and characterizing elements, comprehensive and detailed methodology, Behavior of functions, Calculus I.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Currículo Mínimo do CPCAR/Ementa (Adaptado) .....	28
Quadro 2 - Ementa da disciplina de Cálculo I para o curso de Ciência da Computação (Adaptado) .....	30
Quadro 3 - Ementa da disciplina de Cálculo I para o curso de Engenharia Mecânica (Adaptado) .....	31
Quadro 4 - Resumo das definições de função nos séculos XVII, XVIII e XIX (Adaptado).....	42
Quadro 5 - A evolução do conceito de função e os matemáticos.....	43
Quadro 6 - Rotina de aplicação dos instrumentos de coletas de dados.....	84
Quadro 7 - G1: Justificativa da atribuição dada às perguntas 4 e 5 do QA .....	92
Quadro 8 – G2: Justificativa da atribuição dada às perguntas 4 e 5 do QA .....	93
Quadro 9 – Comentários dos alunos que responderam não à pergunta 6 .....	96
Quadro 10 - Respostas às perguntas 7 a 11 por grupo: G1 e G2 .....	102
Quadro 11 - Respostas aos questionamentos da pergunta 12 por grupo: G1 e G2 .....	104
Quadro 12 - Respostas aos questionamentos da pergunta 13 por grupo: G1 e G2 .....	108
Quadro 13 - Questão 14 do QA: Depoimentos de alunos do CPCAR que contribuem com a proposta de pesquisa. ....	110
Quadro 14 - Respostas aos questionamentos da pergunta 9 do QPE .....	119
Quadro 15 - Respostas aos questionamentos da pergunta 10 do QPE .....	120
Quadro 16 - Justificativas das respostas à Pergunta 3 do QAS.....	123
Quadro 17 - Justificativa da atribuição dada às perguntas 5 e 6 do QAS - GEM .....	126
Quadro 18 - Justificativa da atribuição dada às perguntas 5 e 6 do QAS - GCC .....	128

Quadro 19 - Justificativa de ter assinalado sim à perguntas 7 do QAS.....	130
Quadro 20 - Justificativa de ter assinalado não à pergunta 7 do QAS .....	131
Quadro 21 - Respostas às perguntas 8 a 11 por grupo: GEM e GCC .....	137
Quadro 22 - Respostas aos questionamentos da pergunta 12 por grupo GEM e GCC .....	139
Quadro 23 - Respostas aos questionamentos da pergunta 13 por grupo GEM e GCC - Você tem apresentado dificuldades para acompanhar o curso de Cálculo I?" .....	143
Quadro 24 - Alguns Depoimentos dos porquês apresentados pelos alunos que preencheram o QAS relativos à pergunta 14 .....	145
Quadro 25 - Respostas dos professores à pergunta 9 do QPES.....	152
Quadro 26 - Perguntas repetidas no QA e no QPE.....	155
Quadro 27 - Quadro comparativo das respostas às perguntas 12 do QA e 9 do QPE .....	158
Quadro 28 - Quadro comparativo das respostas às perguntas 13 do QA e 10 do QPE.....	160
Quadro 29 - Perguntas repetidas e ou similares do QAS e QPES.....	162
Quadro 30 - Quadro comparativo das respostas às perguntas 12(a, b, c, f) do QAS e 9(a, b, c, e) do QPES.....	164
Quadro 31 – Questionamentos da pesquisa por comunidade – EPCAR e UFSJ .....	169

## LISTA DE GRÁFICOS

- Gráfico 1 - Respostas à pergunta 3 do QA: “Você teve no seu currículo nos anos anteriores o conteúdo de definições de funções e elementos estruturantes das funções, conforme descrito acima?” ..... 89
- Gráfico 2 - Respostas à pergunta 4 do QA: “Que importância você atribuía ao estudo de funções antes de ser aluno na EPCAR?” ..... 90
- Gráfico 3 - Respostas à pergunta 5 do QA: “Após este período de quase seis meses estudando este assunto, como você considera o estudo de funções?” ..... 90
- Gráfico 4 - Respostas à pergunta 6 do QA: “A abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava antes era a mesma que recebeu na EPCAR?” . 95
- Gráfico 5 - Respostas à pergunta 7 do QA: “Após o estudo do que referimos acima, você é capaz de definir função hoje?” ..... 100
- Gráfico 6 - Respostas à pergunta 8 do QA: “Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem?” ..... 100
- Gráfico 7 - Respostas à pergunta 9 do QA: “Antes de estudar funções com a abordagem citada, você se sentia capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?” ..... 101
- Gráfico 8 - Respostas à pergunta 10 do QA: “Após o estudo de funções, conforme discriminado acima, você se sente capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas os elementos já citados?” ..... 101
- Gráfico 9 - Respostas à pergunta 11 do QA: “Após todo o embasamento teórico explanado acima, você se sentiu mais preparado para estudar as funções por famílias, a saber: Função constante, Função afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença,

Função modular, assuntos abordados após a definição de funções e entes caracterizadores?” .....	102
Gráfico 10 - Percentual da Resposta à pergunta 12 a) do QA .....	105
Gráfico 11 - Percentual da Resposta à pergunta 12 b) do QA .....	105
Gráfico 12 - Percentual da Resposta à pergunta 12 c) do QA .....	106
Gráfico 13 - Percentual da Resposta à pergunta 12 d) do QA .....	106
Gráfico 14 - Percentual da Resposta à pergunta 12 e) do QA .....	107
Gráfico 15 - Respostas à pergunta 1 do QAS: “Você é aluno de qual curso na UFSJ? .....	122
Gráfico 16 - Respostas à pergunta 5 do QAS: “Que importância você atribuía ao estudo de funções quando era aluno do Ensino Médio?” .....	125
Gráfico 17 - Respostas à pergunta 6 do QAS: “Após este período de estudo no curso de Cálculo I, que importância você atribui ao estudo de funções?” .....	125
Gráfico 18 - Respostas à pergunta 7 do QAS: Você considera que a abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava no Ensino Médio foi suficiente para você estar acompanhando o curso de Cálculo I?”	129
Gráfico 19 - Respostas à pergunta 8 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Você sentiu-se capaz de definir função?” .....	135
Gráfico 20 - Respostas à pergunta 9 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem?” .....	135
Gráfico 21 - Respostas à pergunta 10 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Sentiu-se capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?” .....	136
Gráfico 22 - Respostas à pergunta 11 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Considerou-se preparado e com base no ensino de funções para cursar a disciplina de Cálculo I?” .....	136
Gráfico 23 - Percentual da Resposta à pergunta 12a do QAS .....	140

Gráfico 24 - Percentual da Resposta à pergunta 12b do QAS .....	140
Gráfico 25 - Percentual da Resposta à pergunta 12c do QAS .....	141
Gráfico 26 - Percentual da Resposta à pergunta 12d do QAS .....	141
Gráfico 27 - Percentual da Resposta à pergunta 12e do QAS .....	142
Gráfico 28 - Percentual da Resposta à pergunta 12f do QAS .....	142
Gráfico 29 - Percentual da Resposta à pergunta 14 do QAS .....	145
Gráfico 30 - Percentual de Resposta à pergunta 6 do QA .....	157

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação gráfica de Nicole Oresme .....	35
Figura 2 - Problema das cordas vibrantes.....	39
Figura 3 - Sistema de Coordenadas Cartesianas.....	46
Figura 4 - Sistema de Coordenadas Cartesianas dividido em quadrantes.....	47
Figura 5 - Resolução gráfica - exemplo 1 – 2.2.1.4.....	48
Figura 6 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo 2.2.1.5.....	49
Figura 7 - Representação gráfica – exemplo 2.2.1.5.....	49
Figura 8 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo a) 2.2.2.1 .	51
Figura 9 - Representação diagrama de Venn-Euler– exemplo b) 2.2.2.1 .....	51
Figura 10 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo c) 2.2.2.1	51
Figura 11 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo d) 2.2.2.1	52
Figura 12 - Verificação da representação cartesiana de uma função .....	53
Figura 13 - Gráfico de uma função real com raízes representadas – exemplo – 2.2.3.1 .....	56
Figura 14 - Gráfico da função definida por $f(x) = 1$ .....	56
Figura 15 - Gráfico da função definida por $g(x) = -2$ .....	57
Figura 16 - Gráfico da função definida por $f(x) = x - 3$ .....	57
Figura 17 - Gráfico da função definida por $f(x) = -2x + 1$ .....	58
Figura 18 - Gráfico de função não-decrescente .....	58
Figura 19 - Gráfico de função não crescente .....	59
Figura 20 - Gráfico para análise de intervalos de crescimento/decrescimento	59
Figura 21 - Gráfico para análise de valores máximos e mínimos.....	60
Figura 22 - Gráfico de função par.....	62
Figura 23 - Gráfico de função ímpar.....	62

Figura 24 - Gráfico de função nem par nem ímpar.....	63
Figura 25 - Gráfico para análise de sinal de função .....	63
Figura 26 - Diagrama de Ven-Euler – exemplo de função sobrejetora.....	64
Figura 27 - Diagrama de Ven-Euler – exemplo de função injetora.....	65
Figura 28 - Diagrama de Ven-Euler – exemplo de função bijetora.....	65
Figura 29 - Gráfico da função definida por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ .....	66
Figura 30 - Gráfico da função definida por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$ .....	67
Figura 31 - Gráfico da função definida por $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ .....	67
Figura 32 - Gráfico da função definida por $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$ .....	68
Figura 33 - Gráfico de função - Atividade 1 .....	70
Figura 34 - Gráfico da função F - Atividade 2.....	71
Figura 35 - Gráfico de função - Atividade 3.....	72
Figura 36 - Gráficos das funções f e g - Atividade 4.....	74
Figura 37 - Gráfico de função - Atividade 5.....	75
Figura 38 - Gráfico de função - Atividade 6.....	76
Figura 39 - Gráfico de função - Atividade 7.....	77
Figura 40 - Gráfico de função - Atividade 8.....	78
Figura 41 - Gráfico das funções f, g e h – Atividade 9.....	79
Figura 42 - Gráfico das funções f, g e h – Atividade 9.....	80
Figura 43 - Gráfico das funções f, g e h – Atividade 10.....	81
Figura 44 - Perguntas 7 a 11 do QA.....	99
Figura 45 - Perguntas 8 a 11 do QAS .....	134



## LISTA DE SIGLAS

EPCAR – Escola Preparatória de Cadetes do Ar

AFA – Academia da Força Aérea

CPCAR – Curso Preparatório de Cadetes do Ar

ITA – Instituto Tecnológico da Aeronáutica

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFSJ – Universidade Federal de São João del Rei

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

DEMAT – Departamento de Matemática

FAB – Força Aérea Brasileira

FUNREI – Fundação de Ensino Superior de São João del Rei

CCO – Campus Centro-Oeste “Dona Lindu”

CDB – Campus Dom Bosco

CSA – Campus Santo Antônio

CTAn – Campus Tancredo Neves

CSL – Campus Sete Lagoas

SISU – Sistema de Seleção Unificada

ENEM – Exame Nacional de Ensino Médio

QA – Questionário aos alunos da EPCAR

QPE – Questionário aos professores da EPCAR

QAS – Questionário aos alunos da UFSJ

QPES – Questionário aos professores da UFSJ

G1 – Grupo 1 de alunos da EPCAR

G2 – Grupo 2 de alunos da EPCAR

GEM – Grupo de alunos da UFSJ do curso de Engenharia Mecânica

GCC – Grupo de alunos da UFSJ do curso de Ciências da Computação

## SUMÁRIO

<b>1. CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b> .....	<b>16</b>
1.1. JUSTIFICATIVA .....	20
1.2. CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA: .....	27
1.2.1 A EPCAR E A COMUNIDADE PESQUISADA: .....	27
1.2.2 A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI E A COMUNIDADE PESQUISADA: .....	29
<b>2. CAPÍTULO 2 - APORTES TEÓRICOS</b> .....	<b>32</b>
2.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO (AO LONGO DA HISTÓRIA) .....	32
2.2.1 ÉPOCA ANTIGA .....	33
2.2.2 A IDADE MÉDIA .....	34
2.2.3 O PERÍODO MODERNO.....	35
2.2 A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E SEUS ELEMENTOS CARACTERIZADORES 44	
2.2.1 PRELIMINARES .....	45
2.2.1.1 Par .....	45
2.2.1.2 Par Ordenado.....	45
2.2.1.3 Plano Cartesiano .....	45
2.2.1.4 Produto Cartesiano .....	47
2.2.1.5 Relação Binária.....	48
2.2.2 FUNÇÃO .....	50
2.2.2.1 Definição .....	50
2.2.2.2 Gráfico de uma Função.....	52
2.2.2.3 Notação de uma Função .....	53
2.2.2.4 Imagem de um elemento .....	53
2.2.2.5 Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem .....	53
2.2.2.6 Domínio das Funções Numéricas .....	54
2.2.2.7 Funções Iguais .....	55

2.2.3	ANÁLISE DE GRÁFICO DE FUNÇÕES: .....	55
2.2.3.1	Raíz(es) ou Zero(s) de uma Função.....	55
2.2.3.2	Monotonicidade .....	56
2.2.3.3	Máximo e Mínimo de uma Função.....	60
2.2.3.4	Taxa Média de Variação de uma Função .....	61
2.2.3.5	Função Par e Função Ímpar .....	61
2.2.3.6	Sinal de uma Função.....	63
2.2.3.7	Classificação das Funções: Injetora, Sobrejetora e Bijetora.....	64
2.2.3.8	Assíntotas .....	68
3	CAPÍTULO 3 - APRESENTAÇÃO DE ATIVIDADES SOBRE DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES E SEUS ELEMENTOS ESTRUTURANTES .....	69
3.1	EXEMPLOS DE ATIVIDADES QUE SÃO PASSADAS AOS ALUNOS PARA FIXAÇÃO E COMPREENSÃO DAS DEFINIÇÕES ABORDADAS.....	70
	Atividade 1 .....	70
	Atividade 2.....	71
	Atividade 3.....	72
	Atividade 4.....	73
	Atividade 5.....	74
	Atividade 6.....	75
	Atividade 7.....	76
	Atividade 8.....	77
	Atividade 9.....	79
	Atividade 10.....	81
4	CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA .....	83
4.1	Modalidade da Pesquisa .....	83
4.2	Instrumentos de coleta de dados .....	84
4.3	Rotina de aplicação dos instrumentos de coleta de dados.....	84
4.4	Os sujeitos da pesquisa.....	85
4.5	Descrição dos instrumentos de obtenção de dados.....	86

4.6	A Estratégia de Análise dos dados .....	87
<b>5</b>	<b>CAPÍTULO 5 - ANÁLISE E DISCUSSÃO .....</b>	<b>88</b>
5.1	PRIMEIRA FASE.....	88
5.1.1	Análise descritiva e qualitativa com auxílio de gráficos e quadros para compreender o QA.....	88
5.1.2	Análise descritiva e qualitativa com auxílio de quadros para compreender o QPE.....	112
5.1.3	Análise descritiva e qualitativa com auxílio de gráficos e quadros para compreender o QAS.....	121
5.1.4	Análise descritiva e qualitativa com auxílio de quadros para compreender o QPES .....	148
5.2	SEGUNDA FASE .....	155
5.2.1	Cruzamento das opiniões dos alunos e professores da EPCAR nas perguntas que se repetiram no QA e QPE.....	155
5.3	TERCEIRA FASE.....	161
5.3.1	Cruzamento das opiniões dos alunos e professores da UFSJ nas perguntas que se repetiram no QAS e QPES.....	161
<b>6</b>	<b>CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>166</b>
6.1	CONCLUSÃO .....	168
6.2	RECOMENDAÇÕES .....	172
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>174</b>
<b>8</b>	<b>APÊNDICE .....</b>	<b>177</b>
8.1	QUESTIONÁRIO QA.....	177
8.2	QUESTIONÁRIO QPE .....	179
8.3	QUESTIONÁRIO QAS .....	182
8.4	QUESTIONÁRIO QPES .....	184
8.5	TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA ALUNOS DA ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR - EPCAR .....	186
8.6	TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PROFESSOR DA ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR (EPCAR). .....	187
8.7	AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO (EPCAR).....	188
8.8	TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI (UFSJ).....	189

8.9	TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PROFESSOR DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI (UFSJ)	190
8.10	AUTORIZAÇÃO DO COODENADOR DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA.....	191
8.11	AUTORIZAÇÃO DO COODENADOR DO CURSO DE CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO .....	192
9	ANEXOS.....	193
9.1	ATIVIDADE 1 .....	193
9.2	ATIVIDADE 2 .....	194
9.3	ATIVIDADE 3 .....	195
9.4	ATIVIDADE 4 .....	196
9.5	ATIVIDADE 5 .....	197
9.6	ATIVIDADE 6 .....	198
9.7	ATIVIDADE 7 .....	199
9.8	ATIVIDADE 8 .....	200
9.9	ATIVIDADE 9 .....	201
9.10	ATIVIDADE 10 .....	203

## 1. CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Ao longo de mais de 25 anos de experiência em sala de aula, venho ministrando aulas de matemática para turmas da Educação Básica, antes denominadas de Ensino Fundamental e Médio, em escolas tanto públicas quanto particulares. Nos últimos 20 anos, estou somente na rede federal de ensino, ministrando aulas apenas no Ensino Médio. Há mais de 15 anos estou apenas no primeiro ano desse segmento.

Um dos conteúdos que fazem parte do ensino de matemática no primeiro ano do Ensino Médio é funções. Deparei-me sempre com alunos que questionavam e questionam o ensino de funções, demonstrando ter dificuldades e por vezes até certo desinteresse pelo assunto. A experiência tem-me mostrado que os alunos apresentam dificuldades na compreensão do conceito de funções e da interpretação de uma função pelas propriedades que a caracterizam.

Nesses meus mais de 15 anos ministrando aulas para o 1º ano do Ensino Médio na Escola Preparatória de Cadetes do Ar (EPCAR), juntamente com a equipe de professores de matemática dessa série, adotamos uma prática do ensino de funções que prioriza a definição e suas propriedades básicas, quais sejam: domínio, imagem, crescimento, decrescimento, máximos e mínimos, raízes, paridade e outras, dando ênfase à definição e interpretação gráfica desses entes.

À medida que o embasamento dos conceitos acima citados é priorizado, o aluno consolida o entendimento desses conteúdos e assimila o estudo das funções por famílias, que acontece posteriormente. A abordagem das funções dessa forma demanda um número maior de tempos de aula, no entanto, o processo de ensino leva a um aprendizado mais efetivo.

Entende-se, também, que essa abordagem pode facilitar, além do estudo das funções no Ensino Médio, o estudo de Cálculo Diferencial e Integral aos alunos que futuramente ingressarem num curso da área de exatas: engenharias, matemática, ciências da computação e outros, que têm em seu currículo tal disciplina mencionada.

Essa percepção se deve a meu trabalho como professora de matemática na EPCAR, que prepara alunos para o ingresso na Academia da Força Aérea (AFA). A AFA recebe os egressos da EPCAR que ingressam num curso superior e que tem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral logo que os estudantes lá iniciam o curso.

Em contato com esses egressos que ingressaram na AFA ou mesmo em outras instituições e que estão cursando a área de exatas e também alunos que estão cursando o 1º ano da EPCAR, mas que já haviam cursado o 1º ano do Ensino Médio antes de ingressarem na EPCAR, frequentemente ouço relatos do tipo *“Professora, a forma como foi ministrado o ensino de funções na EPCAR tem me ajudado muito na condução de meu curso na disciplina de Cálculo”*. *“O ensino de funções na EPCAR é muito diferente do que eu já havia estudado, é mais detalhado e nos prepara para a interpretação mais global de uma função”*. Já dos alunos que entram na EPCAR tendo cursado até o 9º ano do Ensino Fundamental, ouço relatos do tipo: *“Pelo que vi sobre o assunto de funções no 9º ano, achei que estudaria somente as funções polinomiais do 1º grau e quadrática. Não sabia que podia estudar função assim”*.

Nessa perspectiva, apresento, a seguir, o depoimento de um aluno egresso da EPCAR que concluiu o Curso Preparatório de Cadetes do Ar (CPCAR) no final do ano de 2015 e foi aprovado no Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), tendo iniciado o curso no ITA em 2016<sup>1</sup>. No depoimento a respeito do curso de funções que teve na EPCAR, esse ex-aluno nos dá mais motivação e evidências para que façamos a condução desta dissertação. Relato escrito pelo ex-aluno:

*“Do ensino de funções do primeiro ano foi passado para a gente que deveria se ter uma visão analítica de cada função e analisar os gráficos e propriedades, prestar atenção no estudo de sinais e não cometer erros pequenos como em escala ou nomeação dos eixos. A sequência com que foi abordado o assunto foi satisfatória, e lembro-me que sempre era estimulada uma certa “desrobotização” dos alunos, i.e., incentivar a gente a entender o porquê do comportamento de*

---

<sup>1</sup> O depoimento desse aluno foi tomado informalmente numa conversa durante uma visita dele quando já cursava o ITA. Ele, por incentivo meu, resolveu colocar seu relato por escrito e me autorizou usá-lo para a finalidade a que se propõe esta pesquisa, mas mantenho a identidade desse ex-aluno da EPCAR em sigilo.

*cada função e não somente decorar, o que se aprende nos cursinhos. Eu gostei bastante do ensino da EPCAr durante o 1º ano, principalmente o de matemática, como disse acima, a gente era estimulado a raciocinar e analisar diferentes situações”.*

Nota-se que, mesmo que a primeira vista os alunos sintam-se um pouco “assustados” com a abordagem da definição de função da maneira como mencionada, no decorrer do curso do 1º ano, ao estudar as funções por famílias, os alunos sentem-se mais preparados para compreenderem a função como um todo, descolando um pouco da parte algébrica, e aliando a álgebra à interpretação gráfica, sendo capazes, inclusive, de resolverem questões sobre cálculo de domínio de funções racionais e inequações, inequações simultâneas, produto e quociente graficamente, por exemplo.

Nesse sentido, destaca-se que o objetivo desta pesquisa foi **verificar se o estudo das Funções, com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função** pode colaborar para que o aluno interprete o gráfico de uma função, seja capaz de caracterizá-la, e se tal metodologia é facilitadora para que os alunos possam construir o gráfico das funções.

Dessa forma, pretende-se **verificar se a abordagem de funções da maneira como foi explicitada pode contribuir para facilitar o acompanhamento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral no curso superior.**

Com este trabalho, buscamos (a) apresentar uma metodologia de ensino da definição de funções reforçando a caracterização global de uma função, conforme já discriminado acima nos objetivos da pesquisa; (b) verificar a percepção dos alunos, personagens principais na conduta da metodologia que apresentaremos, visando confirmar ou não se há por parte do aluno melhor compreensão da definição de função e entes que a caracterizam, assim como do gráfico global de uma função. Ainda pretendemos (c) verificar, com professores que ministram ou ministraram aulas desse assunto, adotando a metodologia citada, se eles entendem que essa metodologia é facilitadora ou



não no processo do ensino da definição de funções e seus entes caracterizadores e, posteriormente, do estudo das funções por famílias e também a percepção dos professores a respeito da aprendizagem por parte de seus alunos.

Com essa sequência de investigação, fez-se necessário contrapor sujeitos de pesquisa distantes em sua raiz: estudantes de primeiro ano do Ensino Médio e estudantes de Cálculo I. Por si só, isso já constitui um desafio nesta pesquisa. Ademais, acredita-se que a posição ocupada por estes pode suscitar reflexão tanto nos próprios envolvidos, quanto naqueles interessados pelos resultados alcançados e as potencialidades dessa investigação. Para além do que se pôde observar nos dados coletados nesta pesquisa, está também o desejo de trazer à luz mais um percurso metodológico visando à melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem.

Outro aspecto que foi motivação para o trabalho que apresentaremos nesta dissertação foi o fato de estar matriculada no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ) e, em conversa com professores do curso e com colegas que ministram aulas no Ensino Superior, eles afirmam que têm percebido certa defasagem dos alunos no que se refere ao estudo das funções, o qual é muito importante para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral<sup>2</sup>, além de outras disciplinas do curso superior da área de exatas.

Nessa perspectiva, com esta pesquisa, constituiu-se objetivo, também, (d) verificar com professores do ensino superior da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral quais as dificuldades que eles têm percebido dos alunos com relação à base do estudo de funções para o acompanhamento da referida disciplina e se consideram que tal metodologia<sup>3</sup> pode contribuir para um melhor acompanhamento dos alunos no curso de Cálculo.

Entende-se que com a pesquisa poderemos incentivar professores dos Ensinos Fundamental e especialmente aos de Ensino Médio a adotarem uma

---

<sup>2</sup> O conteúdo de funções é importante para muitas outras disciplinas de cursos superiores voltados à área de exatas como Álgebra Linear, Física, entre outras. O fato de mencionarmos a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral refere-se ao caminho que pretendemos percorrer nesta dissertação.

<sup>3</sup> Foi aplicado um questionário a professores do Ensino Superior. Neste questionário, é explicado em linhas gerais a metodologia mencionada.

postura no ensino de Funções com a abordagem que apresentaremos neste trabalho como forma de facilitar o ensino das funções elementares e desmitificar o ensino deste assunto tão importante para tantas outras áreas do ensino.

### 1.1. JUSTIFICATIVA

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação, em acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (2002) [6].

Pretende-se, com esta investigação, abordar o ensino de funções, com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função, injetividade e sobrejetividade.

Percebe-se que tais características são essenciais para a interpretação do gráfico de uma função. Dessa forma, compreende-se, também, que o aluno terá mais conhecimentos para esboçar o gráfico de uma função, digam-se as funções elementares, principalmente as funções definidas por mais de uma sentença e as funções polinomiais e racionais.

Pretende-se, ao abordar o ensino de funções como descrito acima, facilitar o percurso para o aprendizado do aluno, proporcionando a ele condições de obter o esboço do gráfico de uma função, mesmo sem conhecer a curva característica uma vez que, no Ensino Médio, dá-se ênfase ao estudo de funções, principalmente, por famílias: (Funções: afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica, trigonométricas).

Ponte (1990) [25] destaca que a “interpretação de aspectos complexos dos gráficos deve ter igualmente um lugar bem estabelecido no currículo de Matemática.” (p. 7). Esse mesmo pesquisador indica que as

ideias relacionadas com a variação (crescimento, decrescimento, constância, máximo, mínimo) e com a variação da variação (variação rápida e lenta, taxa de variação, regularidade, continuidade), são melhor apreendidas a partir de representações gráficas. (p. 7).

Com a abordagem de ensino já explicitada, pretende-se dar ao aluno a oportunidade de, ao ter conhecimentos detalhados da caracterização de uma função pela interpretação dos gráficos e seus elementos estruturantes, ser capaz de, posteriormente, construir o gráfico de uma função sem ser informado da curva característica da família da função e sem utilizar uma tabela de valores arbitrários.

A compreensão de Dugdale (1993, apud Ferraz, 2009 [16]) também é consonante com essa proposta de pesquisa, quando ressalta que, para melhorar a leitura e compreensão dos gráficos, deve-se melhorar a forma como são passados certos conceitos aos estudantes a partir da interpretação do significado global do gráfico.

Archela (1999) [2] destaca que a linguagem gráfica é um sistema de signos com significados e significantes. Compreende-se, como ela, que a interpretação do gráfico de uma função por parte dos alunos poderá ser importante para a compreensão da mesma. Aquela pesquisadora enfatiza que

é importante lembrar que na medida em que o usuário deixa de ser passivo diante de uma mensagem comunicada através de uma imagem, na tentativa de compreendê-la, estabelece-se um processo de decodificação. Assim, uma das formas de estudo das imagens refere-se a análise de seus elementos e as relações entre suas partes (p. 5).

Entende-se, como Ferraz (2009) [16], que o processo metodológico da apresentação tradicional do gráfico de funções é um dos fatores que dificultam a aprendizagem do aluno. Considera-se importante embasar o aluno de

definições que vão facilitar o entendimento global das funções com características genéricas. Nesse sentido, faz parte da nossa prática em sala de aula uma metodologia na qual, inicialmente, dá-se ênfase a um gráfico completo, abordando-se todos os seus elementos e as relações entre os mesmos.

Acredita-se, como Ferraz (2009) [16], que utilizando-se da prática de construir o gráfico de uma função somente a partir de uma tabela de valores arbitrários,

[m]uitas vezes o aluno nem mesmo sabe por que, ou como está, de fato, utilizando tal processo. Há, então, uma mecanização na atividade (p. 5).

Ele destaca ainda que

[e]sboçar o gráfico de uma função é, portanto, dar um tratamento representativo ao ente Matemático a partir do conhecimento de como seus elementos constitutivos (Crescimento, Decrescimento, Concavidade, etc.) são representados num sistema Cartesiano. Além disso, o conhecimento desses elementos pode fornecer informações que nos levem tanto a entender a função em si mesmo, quanto ao que ela pode vir a representar. (p. 6)

Colaborando com essa perspectiva, destacamos ainda das Orientações Curriculares do Ensino Médio que:

[s]empre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções. (Orientações curriculares do Ensino Médio, 2006, vol 02, p. 72) [7]

Têm-se também como foco a possibilidade da continuação dos estudos daquele que finaliza o Ensino Médio e ingressa num curso de nível superior. De forma mais geral, pode-se pressupor alguns conhecimentos da base dos estudos. Destacamos, assim, desta maneira, a importância de se trabalhar tais

conceitos como crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, raízes, concavidade, sinal e outros.

Entende-se que no ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, diferentes famílias de funções são estudadas conjuntamente sem que seja viável trabalhar pelo reconhecimento da curva que representa o gráfico da equação apresentada. É nesse sentido que, no estudo do Cálculo, o traçado do gráfico de uma função tende a utilizar o esboço como estratégia de obtenção do gráfico.

Rezende (2003) [27] destaca que no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral a Álgebra participa fundamentalmente no desenvolvimento da noção de variável que possibilitou a construção de um dos conceitos básicos do Cálculo e da própria matemática que é o conceito de função. Ele ainda destaca que

a forma como este conceito é trabalhado em geral no ensino médio e fundamental provoca sérios desvios de natureza epistemológica no ensino de Cálculo e da própria matemática. Apesar de muitos desses alunos já terem sido apresentados à definição formal de função (...) não é essa a representação de função que caracteriza as atitudes dos estudantes. (...) se caracterizam, em geral, e são identificadas pelos estudantes por suas expressões analíticas. Assim, a função é a expressão  $\text{sen}x$ , ou  $x^2$ , etc (p. 343).

Ainda nesse mesmo sentido, apontam Schwartz e Yerushalmy (1993, p. 42, *apud* Ferraz (2009) [16]) que os alunos tendem a aprender a manipular funções manipulando os símbolos que as representam, mas afirmam que como as funções podem ser representadas graficamente, os alunos podem aprender a manipular os gráficos que as representam.

Ferraz (2009) [16], em sua pesquisa, conclui que uma aula em que a metodologia utilizada busque iniciar mostrando um gráfico completo e as relações entre os elementos do gráfico, assim como o motivo dessas relações, pode fornecer ao aluno uma ferramenta cognitiva que destrói o abismo entre o cálculo correto dos entes característicos e o traçado da curva.

Entende-se que, mesmo que no ensino das funções do Ensino Médio nem sempre se aborde as funções fracionárias, essas ideias podem ser

importantes para facilitar o estudo posterior dessas funções e para discutir os elementos matemáticos inerentes ao estudo do esboço de gráficos de função. Acredita-se que seja importante fazer um estudo, mesmo que básico, das funções fracionárias, não somente na parte algébrica, quando se pede para resolver inequações, determinar o conjunto domínio e imagem, mas também do comportamento dessas funções pelas caracterizações já mencionadas anteriormente.

Características como intervalos de crescimento, decrescimento ou estabilidade (função constante), pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão, concavidade, assíntotas, sinal e raízes são utilizadas no sentido de converter essas informações para a representação gráfica e, então, trazer um esboço do gráfico da função trabalhada.

No sentido de mencionar as dificuldades encontradas por alunos que estudam a disciplina de Cálculo, Santos (2013) [33] destaca em sua pesquisa que alguns pesquisadores como Cabral e Catapani (2003) [8], ao estudarem o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, no Ensino Superior, realçam a dificuldade dos alunos com os conceitos abordados nessa disciplina.

Santos (2013) [33] aponta que Cabral e Catapani (2003) [8] perceberam a existência de uma ligação direta com estudo das funções e suas formas gráficas ainda em sua abordagem dos conceitos iniciais. Enfatizam ainda que alguns indicadores dessa problemática estão comprovados pelas taxas de reprovação, repetência e abandono das disciplinas de Cálculo.

Carvalho (2016) [11], em sua pesquisa de mestrado intitulada “*A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino*”, conclui, dentre outros aspectos, que a construção e interpretação de gráfico é uma deficiência apresentada pelos alunos pesquisados com relação às dificuldades apresentadas na disciplina de Cálculo I.

Reafirmamos então, conforme já elucidado, que, nesta investigação, pretendíamos verificar se o estudo das Funções, com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes e

caracterizadores<sup>4</sup>, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função, sobrejetividade e injetividade pode colaborar para que o aluno interprete o gráfico de uma função e seja capaz de caracterizá-la, e tenha condições de esboçar o gráfico dessa função, facilitando o acompanhamento da disciplina de Cálculo I para os alunos de graduação na área de exatas: engenharias, matemática, ciências da computação, entre outras.

Esta dissertação está estruturada em cinco partes. Na primeira, pretende-se fazer um breve histórico da origem da definição de função até ao que é usado nos tempos de hoje, perpassando pelos conceitos primitivos que surgiram mesmo que sem fundamentação na antiguidade e pelos matemáticos Newton (1642 – 1727), Leibniz (1646 - 1716), Bernoulli (1667 – 1748), Euler (1707 - 1783), Dirichlet (1805 - 1859), e com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845 – 1918), no final do século XIX, mostrar a interpretação e a ampliação do estudo de função como bem destaca Ponte (1990) [ver 25, pag. 4] ao propor que

a noção de função acabaria por ser estendida já no Século XX de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

Num segundo momento, apresentaremos a metodologia utilizada para o ensino e comportamento de funções na EPCAR norteada pelas definições formais de função e seus elementos estruturantes, a saber: definição de função, domínio de uma função, conjunto imagem de uma função, raiz ou zero de uma função, crescimento, decrescimento e estabilidade de uma função, máximos e mínimos de uma função, paridade, sinal de uma função, gráfico de uma função, assíntota do gráfico de uma função.

Na terceira parte do texto, serão apresentados exemplos de atividades que são passadas aos alunos no 1º ano do Ensino Médio da EPCAR para a aprendizagem do referido assunto, seguindo a proposta delineada nos objetivos e justificativa deste texto.

---

<sup>4</sup> Em todo este texto quando nos referirmos a elementos estruturantes e caracterizadores de uma função, entenda-se os explicitados acima.

Na sequência, no quarto momento da dissertação, destacaremos uma análise quantitativa e qualitativa do questionário que foi aplicado a 75 alunos do 1º ano do Ensino Médio da EPCAR, a 75 alunos da UFSJ, a 4<sup>5</sup> professores da EPCAR, e a 5 professores que ministram ou ministraram Cálculo I<sup>6</sup> nos cursos da UFSJ.

Com os alunos da EPCAR, pretendia-se verificar se, na visão deles, enquanto ainda estudantes de Ensino Médio, o estudo das funções, com tal abordagem, facilita a interpretação do gráfico de uma função e se, em suas percepções, sentem-se embasados para a construção e caracterização de uma função.

Já com os professores da EPCAR que utilizam essa metodologia, pretendia-se verificar se eles percebem que a forma como é ministrado este assunto é diferente de como eles faziam anteriormente ou não, dando seus depoimentos sobre esta prática metodológica como facilitador ou não dos processos de ensino de funções e aprendizagem desse conteúdo.

Para finalizar, com os alunos dos cursos de Engenharia Mecânica e Ciências da Computação<sup>7</sup> e professores de curso de graduação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, na UFSJ, pretendia-se verificar se há deficiência ou não dos alunos nessa disciplina, bem como se há dificuldades do estudo das funções na percepção dos próprios alunos e professores, oriundas de deficiência nesse assunto que foi ministrado no Ensino Médio.

A confluência de todas as análises dos instrumentos citados, além dos referenciais, servirá para nos orientar a fazer a quinta parte desta dissertação, qual seja as Considerações Finais, momento em que retomamos às questões da pesquisa e, com as evidências construídas, sugerimos respostas a essas questões, bem como algumas implicações pedagógicas.

---

<sup>5</sup> Um dos professores da EPCAR que preencheu o questionário aposentou no ano de 2015. Optamos por convidá-lo a preencher o questionário pela sua grande experiência em trabalhar na EPCAR no 1º ano.

<sup>6</sup> Os professores que ministram Cálculo nos cursos da UFSJ são do Departamento de Matemática (DEMAT)

<sup>7</sup> Para realizar a pesquisa de campo na UFSJ tínhamos opção de diversos cursos que oferecem a disciplina de Cálculo I. Fizemos a escolha destes dois cursos pela facilidade de acesso aos professores dos referidos cursos. Inicialmente, pretendíamos fazer a pesquisa também com alunos do curso de Matemática. No entanto, a grade curricular na disciplina Cálculo I no curso de Matemática é diferente, visto que no primeiro semestre do referido curso, os alunos têm a disciplina de Introdução ao Cálculo I, momento em que se faz uma revisão das funções reais.



## **1.2. CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA:**

Esta pesquisa foi realizada na EPCAR e na UFSJ. Trataremos a seguir, de mencionar as características destas instituições e da comunidade pesquisada em ambas.

### **1.2.1 A EPCAR E A COMUNIDADE PESQUISADA:**

A EPCAR é uma Escola Militar de Ensino Médio que prepara os futuros Cadetes da Força Aérea Brasileira (FAB). Além da formação acadêmica, mantém a formação militar e esportiva para que os alunos matriculados no CPCAR possam dar continuidade na carreira, já que se formarão Oficiais da FAB, após o curso de quatro anos que será realizado na AFA.

O ingresso dos alunos na EPCAR é feito através de concurso público de abrangência nacional. Até o concurso realizado no ano de 2015, para o qual foram disponibilizadas 180 vagas para ingressar no CPCAR 2016, o candidato só poderia ser do sexo masculino. A partir do concurso do CPCAR 2017, que foi realizado em 2016, para os candidatos que concorreram a vagas para o 1º ano do CPCAR, foram disponibilizadas 20 vagas para candidatos do sexo feminino e 160 vagas para candidatos do sexo masculino.

Para realizar o concurso, podem ser candidatos aqueles que já concluíram o 9º ano do ensino fundamental até a data da matrícula na EPCAR e possuem idade igual ou superior a 14 anos e que não tenha completado 19 anos até 31 de dezembro do ano da matrícula no curso<sup>8</sup>.

Os alunos da EPCAR estudam em regime de internato por três anos. O CPCAR engloba as disciplinas do que se chama Campo Geral, previstas na legislação em vigor (Lei de Diretrizes e Bases – LDB, 9394/96 e nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN) para o Ensino Médio, além de conteúdos específicos necessários à formação militar, previstos para o chamado Campo Militar.

---

<sup>8</sup> Conforme IE/EA CPCAR 2017 (Instruções Específicas para o Exame de Admissão ao CPCAR 2017) [http://www.fab.mil.br/cabine/concursos/IE\\_EA\\_CPCAR%20\\_2017.pdf](http://www.fab.mil.br/cabine/concursos/IE_EA_CPCAR%20_2017.pdf) (acesso em junho de 2016)

A EPCAR recebe alunos de todas as regiões do Brasil e alguns deles vão para casa somente duas vezes por ano nos períodos de maior recesso escolar. As disciplinas do Campo Geral são ministradas por um corpo docente constituído de professores civis e militares e seguem orientações curriculares nacionais (BRASIL, PCN, 1998) como nas demais escolas do país.

Na disciplina de Matemática, são ministradas, no 1º ano, 5 aulas semanais com duração de 45 minutos e, nas demais séries, 2º e 3º anos, são ministradas 4 aulas semanais, também com duração de 45 minutos.

O currículo da disciplina de Matemática para os três anos do CPCAR tem carga horária de 380 horas/aula. O Quadro 1 abaixo apresenta os objetivos específicos do currículo de Matemática do CPCAR e a ementa dessa disciplina.

Quadro 1 - Currículo Mínimo do CPCAR/Ementa (Adaptado)

<b>DISCIPLINA: MATEMÁTICA</b>	<b>CARGA HORÁRIA: 380 h/a</b>
<p><b>Objetivos específicos:</b> a) interpretar gráficos; b) aplicar noções básicas de conjuntos numéricos; relações; introdução às funções; função do primeiro grau; função do segundo grau; função modular; função recíproca; função exponencial; função logarítmica; funções trigonométricas na resolução de problemas; c) aplicar noções básicas de progressão aritmética, progressão geométrica, matrizes, determinantes, sistemas lineares, análise combinatória, binômio de Newton, probabilidade e geometria espacial em novas situações; d) aplicar noções básicas de geometria analítica no plano, números complexos, polinômios, equações polinomiais, matemática financeira, estatística, funções na resolução de problemas; e) utilizar linguagem simbólica de matemática, reconhecendo sua simplicidade, economia e universalidade; f) manipular tabelas; g) traçar gráficos; h) comparar medidas; e i) valorizar a matemática como ciência fundamental, em consonância com o desenvolvimento da era tecnológica.</p>	
<p><b>EMENTA:</b> 1) Conjuntos Numéricos. 2) Relações. 3) Introdução às Funções. 4) Função do Primeiro Grau. 5) Função do Segundo Grau. 6) Função Modular. 7) Função Recíproca. 8) Função Exponencial. 9) Função Logarítmica. 10) Funções Trigonométricas. 11) Progressão Aritmética. 12) Progressão Geométrica. 13) Matrizes. 14) Determinantes. 15) Sistemas Lineares. 16) Análise Combinatória. 17) Binômio de Newton. 18) Probabilidade. 19) Geometria Espacial. 20) Geometria Analítica no Plano. 21) Números Complexos. 22) Polinômios. 23) Equações Polinomiais. 24) Matemática Financeira. 25) Estatística.</p>	

**Fonte:** O Conteúdo deste Quadro é uma adaptação do Currículo de Matemática do CPCAR – que consta do documento denominado ICA 37-15 – Currículo Mínimo do Curso Preparatório de Cadetes do Ar de 2016

Nesse contexto, entendemos que a EPCAR é uma escola com realidade de ensino e também com alunos que proporcionam campo fértil para pesquisa como já constataram Rodrigues (2010) [30], Cantaruti (2012) [9], Ávila (2012) [3], Simão (2014) [36] e Cavaca (2015) [12]. Para a etapa da pesquisa que preconiza o Ensino de Funções no Ensino Médio com as características já enunciadas nesta dissertação, foram convidados 75 alunos do 1º ano do CPCAR, série em que se estuda o assunto de Funções e 4 professores de matemática também da EPCAR que ministram ou ministraram aula de matemática para esta série.

### **1.2.2 A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI E A COMUNIDADE PESQUISADA:**

A Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)<sup>9</sup> foi instalada em 21 de abril de 1987 como Fundação de Ensino Superior de São João del-Rei (FUNREI). No ano de 2002, foi transformada em Universidade. Hoje a UFSJ está presente em 5 municípios.

Seus cursos estão distribuídos em 6 unidades educacionais: Campus Alto Paraopeba (CAP), localizado na divisa dos municípios de Ouro Branco e Congonhas; Campus Centro-Oeste “Dona Lindu” (CCO), localizado em Divinópolis; Campus Dom Bosco (CDB) e Campus Santo Antônio (CSA), Campus Tancredo Neves (CTAn), ambos localizados em São João del-Rei e Campus Sete Lagoas (CSL), localizado em Sete Lagoas.

Esta instituição oferece cursos de graduação e pós-graduação nas diversas áreas, conforme pode ser constatado no site da instituição. A UFSJ extinguiu o Vestibular tradicional e atualmente adere ao Sistema de Seleção Unificada (SISU) do Ministério da Educação.

No que se refere à nossa pesquisa, realizamos a investigação com alunos que iniciaram curso de Engenharia Mecânica e Ciências da Computação no segundo semestre de 2016, conforme já mencionado anteriormente. Optamos por alunos dos referidos cursos pela facilidade de acesso aos professores de

---

<sup>9</sup> Estas informações foram obtidas no site <<<http://www.ufsj.edu.br/dplag/aufsj.php>>> (acesso em junho de 2016)

Cálculo I nessas turmas. As vagas oferecidas para os cursos com entrada no 2º semestre/2016 na UFSJ foram disponibilizadas para o SISU, portanto, o ENEM (Exame Nacional de Ensino Médio) foi obrigatório para a seleção de seus alunos, através do SISU. Para o SISU 2016/2 (2º semestre de 2016) a UFSJ utilizou o ENEM 2015<sup>10</sup>.

Esta etapa da pesquisa foi realizada com alunos dos cursos de graduação em Engenharia Mecânica do Campus CSA e Ciências da Computação do Campus CTAn e com professores que ministram ou ministraram Cálculo I na UFSJ. Responderam ao questionário 75 alunos<sup>11</sup> e 5 professores. Tais alunos estavam matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no segundo semestre de 2016 e os professores lecionaram a respectiva disciplina no mesmo ano e também em outros anos anteriores.

A disciplina de Cálculo I nas Ciências da Computação e na Engenharia Mecânica é ministrada no primeiro semestre do curso. A carga horária é de 108 horas-aula e 96 horas-aula, respectivamente, conforme Quadros 2 e 3 abaixo.

Quadro 2 - Ementa da disciplina de Cálculo I para o curso de Ciência da Computação (Adaptado)

DISCIPLINA: CÁLCULO I – CURSO: CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO	CARGA HORÁRIA: 108 h/a
<p><b>EMENTA:</b> 1) Números reais. Funções de uma variável real; 2) Limite e continuidade de funções de uma variável real; 3) Derivada de funções de uma variável real; 4) Teorema do Valor para derivadas. Aplicações da Derivada; 5) Regra de L'Hôpital. Antiderivada; 6) Integral Indefinida; 7) Integral de Riemann; 8) Integral definida; 9) Teorema Fundamental do Cálculo; 10) Métodos de Integração: substituição, por partes, frações parciais e integrais trigonométricas; 11) Aplicações da integral definida; e 12) Integrais Impróprias.</p>	
<p><b>OBJETIVOS:</b> Capacitar o aluno a reconhecer e operar com funções algébricas e transcendentais, representar graficamente as funções, analisar tais gráficos e apresentar conclusões sobre seu comportamento. Criar condições para que o aluno defina e calcule derivadas de funções e aplique-as na resolução de problemas. Integrar a prática desses conhecimentos na Computação.</p>	

**Fonte:** O conteúdo deste Quadro é uma adaptação dos Currículos dos cursos citados – que consta dos respectivos Projetos Pedagógicos. Tais informações obtivemos dos sites <<<http://www.ufsj.edu.br/ccomp/>>> e <<<http://www.ufsj.edu.br/comec/>>>

<sup>10</sup> Estas informações foram obtidas em [http://www.ufsj.edu.br/vestibular/sisu\\_20162.php](http://www.ufsj.edu.br/vestibular/sisu_20162.php)

<sup>11</sup> Dos 75 alunos da UFSJ, 43 são do curso de Engenharia Mecânica e 32 do curso de Ciências da Computação.

Quadro 3 - Ementa da disciplina de Cálculo I para o curso de Engenharia Mecânica (Adaptado)

DISCIPLINA: CÁLCULO I – CURSO: ENGENHARIA MECÂNICA	CARGA HORÁRIA: 96 h/a
<b>EMENTA:</b> 1) Números reais e funções de uma variável; 2) Gráficos; 3) Funções de primeiro e segundo grau; 4) Funções exponenciais, trigonométricas e suas inversas; 5) Limites e continuidade; 6) Derivadas e aplicações; 7) Séries de Taylor e McLaurin; 8) Integrais definidas e indefinidas; e 9) Formas indeterminadas e integrais impróprias.	
<b>OBJETIVOS:</b> Capacitar para a análise e interpretação de funções, limites, derivadas, séries e integrais visando às aplicações em engenharia.	

**Fonte:** O conteúdo deste Quadro é uma adaptação dos Currículos dos cursos citados – que consta dos respectivos Projetos Pedagógicos. Tais informações obtivemos dos sites <<<http://www.ufsj.edu.br/ccomp/>>> e <<<http://www.ufsj.edu.br/comec/>>>

Entende-se também, dessa forma, que a UFSJ, assim como os alunos da UFSJ dos cursos supracitados, também são campo fértil de pesquisa para o que se pretende alcançar nos objetivos da dissertação em questão.

Desta maneira, passaremos agora aos capítulos seguintes da dissertação, conforme foi elucidado anteriormente.

## 2. CAPÍTULO 2 - APORTES TEÓRICOS

Visto que o estudo que proponho envolve (I) o conceito de função (ao longo da história), (II) a definição de função e seus elementos caracterizadores; (III) apresentação de uma metodologia de ensino de função e seus elementos caracterizadores e (IV) exemplos de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula relativas ao ensino de função e seus elementos caracterizadores, dedico essa seção à apresentação de algumas contribuições teóricas que se relacionam às temáticas em questão.

### 2.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO (AO LONGO DA HISTÓRIA)

O conceito de função é considerado um dos mais importantes de toda a Matemática. A partir do final do século XVII e durante o século XVIII, não são mais objetos centrais de estudos as grandezas geométricas, nem os números, mas sim as funções. Ponte (1990) [25, p. 3] ressalta que

[a]s noções de função e derivada constituem a partir de então o fundamento do Cálculo Infinitesimal, a nova teoria que acabou por se revelar capital no desenvolvimento da Matemática contemporânea.

Nota-se, então, que a noção de função não é muito antiga. Também é verdade que aspectos simples do conceito de função já podem ser encontrados em épocas anteriores como na elementar operação de contagem. No entanto, o surgimento como conceito claramente individualizado e como objeto de estudo em Matemática remonta apenas aos finais do Século XVII.

Segundo Caraça (1951) [10], o conceito de função está diretamente ligado ao de variável. Este autor define função como um instrumento matemático, que tem por objetivo estudar as leis quantitativas que tem por essência a correspondência entre dois conjuntos.

Caraça (1951) [10] explica que

O conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjuntos de todos os pontos

que gozam de uma mesma propriedade). Para estabelecer esta correspondência não há mais que, a cada expressão analítica, fazer corresponder aquele lugar que define a mesma função que ela. A expressão analítica, ou melhor, a igualdade  $y = \text{expressão analítica}$  chama-se equação do lugar que lhe corresponde (p. 139).

Veremos no discorrer do texto a seguir, em que mostraremos a evolução histórica do conceito de função, que os matemáticos, ao buscarem definir função utilizaram três ideias básicas: 1) a de relação entre quantidades variáveis; 2) a de relação entre conjuntos; 3) a de transformação.

Faremos, dessa forma, um passeio pela história da matemática com o intuito de conhecer toda a trajetória desse assunto na matemática até os tempos atuais. Nesse sentido, destacamos as pesquisas dos seguintes autores: Caraça (1951) [10], Ponte (1990) [25], Eves (1995) [15], Neto (1998) [23], Silva (1999) [35], Chaves e Carvalho (2004) [13], Botelho e Rezende (2007) [4], Souza e Mariani (2005) [37], Sastre Vázquez, Rey e Boubée (2008) [34], Rey, Boubée, Sastre e Cañibano (2009) [29], Rezende (2008) [28], Roque e Pitombeira (2012) [31], Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014) [1] e Cruz (2015) [14].

### 2.2.1 ÉPOCA ANTIGA

Sastre Vázquez, Rey e Boubée (2008) [34], em sua pesquisa, destacam que na época antiga (das antigas civilizações do Egito, Mesopotâmia, China e Índia) não existia uma ideia abstrata de variável, as quantidades eram descritas verbalmente por meio de gráficos. No entanto, naquela época iniciou-se o desenvolvimento de algumas relações que continham a noção de função.

Pode-se dizer que a noção de função tem suas raízes no desenvolvimento do conceito de números. As quatro operações aritméticas elementares são funções de duas variáveis. As tabelas babilônicas (2000 a.C. – 500 a.C.) são exemplos de que o conceito de função já era usado naquela época. Os babilônios tinham um manejo algébrico muito desenvolvido, caracterizado pela substituição e troca de variáveis.

Segundo Sastre Vázquez, Rey e Boubée (2008) [34, p 143], os babilônios não usavam o conceito de função, no entanto,

a noção deste conceito encontra-se implícita nas tabelas astronômicas, já que estas expressam observações diretas de fenômenos ligados por uma relação aritmética, como por exemplo, os períodos de um planeta e a distância angular desse planeta ao Sol. (tradução nossa)

A partir da fundação da primeira escola filosófica grega realizada por Tales de Mileto, em torno do ano 600 a.C. os cientistas e filósofos procuraram dar explicações mais racionais para os fenômenos que ocorriam. Estudos de mudanças físicas, como a do movimento, teve Aristóteles (384 322 a.C.) como principal figura. Ele abordava a física qualitativa, conforme destacam Botelho e Rezende (2007) [4, p. 66].

Posteriormente, destacaremos que o conceito de função nasceu a partir do momento em que os cientistas passaram a descrever o movimento de forma quantitativa.

### 2.2.2 A IDADE MÉDIA

Durante a Idade Média, os filósofos cientistas estudavam fenômenos naturais como: luz, calor, densidade, distância e velocidade média de um movimento uniformemente acelerado. Sem dar definições específicas, os estudos eram desenvolvidos mediante variáveis dependentes e independentes. Dessa forma, a evolução da noção de função estava sendo associada ao estudo dos movimentos. Uma função era definida por uma descrição verbal e suas propriedades, mediante um gráfico, porém não se usavam as fórmulas, segundo Sastre Vásquez, Rey e Boubée (2008) [34, p 144].

Nicole Oresme (1323 – 1382) em seus estudos desenvolveu uma teoria geométrica das latitudes e das formas. Em sua obra *Tractatus de latitudinibus formarum* as funções aparecem desenhadas pela primeira vez, passando para o plano o que os geógrafos haviam feito na esfera. (Boyer, 1996) [5].

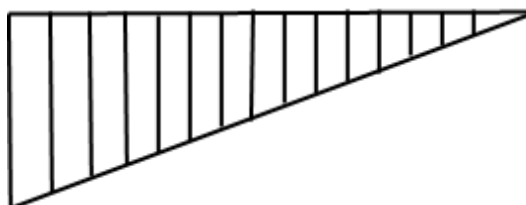
Os termos latitude e longitude, que Oresme (1323 – 1382) usou, são equivalentes, num sentido amplo, aos termos ordenada e abscissa que usamos hoje. Este matemático considerava que tudo o que varia poderia ser imaginado como uma quantidade contínua representada mediante um segmento retilíneo.

Ao estudar o movimento uniformemente acelerado, representou num gráfico a velocidade variando com o tempo. Ele marcou instantes de tempo ao



longo de uma linha horizontal para ele denominada de longitude e representou em cada tempo linhas verticais, perpendiculares à linha horizontal as quais denominou latitudes.

Figura 1 - Representação gráfica de Nicole Oresme



Fonte: (BOYER [5], 1996, p. 181) (Adaptado)

Essa representação, além de ilustrar a variação entre duas grandezas (velocidade e tempo) por um gráfico, também estabelece uma relação entre essas grandezas. Implicitamente, tem-se aí o conceito de função estabelecido por meio da curva (uma reta) que indica que a taxa de variação entre as grandezas é constante. Ainda faltavam alguns detalhes essenciais para dar explicação ao conceito de função. Tal fato se deu posteriormente.

### 2.2.3 O PERÍODO MODERNO

No final do século XVI as funções eram equivalentes a funções analíticas. De 1450 a 1650 foram produzidos estudos fundamentais para o desenvolvimento do conceito de função, dentre eles: 1) A extensão do conceito de números aos números reais e também a números complexos (Bombelli, Stifel); 2) A criação da Álgebra simbólica (Viète e Descartes); 3) O estudo do movimento como problema central da ciência (Kepler, Galileu) e 4) A união entre a Álgebra e a Geometria (Fermat e Descartes), (conforme Sastre Vásquez, Rey e Boubée, 2008 [34, p 145]).

A Álgebra, até o século XVII, estava subordinada à Geometria. Foi então, a partir de estudos de François Viète<sup>12</sup> (1540-1603) e, logo a seguir, de Descartes (1596-1650) que a dependência da Álgebra e da Geometria começa a ser invertida, pois eles usaram a Álgebra para resolver problemas de construções geométricas.

<sup>12</sup> Foi o matemático francês Viète quem propôs o uso de letras para representar variáveis, (Boyer, 1996) [5]. Segundo Roque e Pitombeira (2012) [31] a noção de variável foi introduzida formalmente no século XIX, mas a noção de variação já estava presente nos séculos XVI e XVII.

Outro cientista que contribuiu para a noção de função foi Galileu (1564-1642). Em suas obras, encontram-se numerosas expressões que remetem a relações funcionais. Rezende (2008) [28] destaca, por exemplo, quando Galileu, em seus estudos *“Estabeleceu a relação funcional entre grandezas observando apenas que a sequência de dados obtidos para as medidas do espaço percorrido pelo corpo em queda livre gerava uma progressão aritmética de segunda ordem”*.

Descartes (1596-1650) em sua única obra matemática, *La Géométrie*, também utilizou a álgebra para resolver problemas geométricos. Esse matemático associou curvas a equações algébricas e o uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis que estavam envolvidas naquelas equações (confere com Botelho e Rezende, 2007) [4]. Descartes também foi o primeiro a deixar claro que uma equação em  $x$  e  $y$  é uma forma de mostrar uma dependência entre quantidades variáveis, de tal forma que os valores de uma delas podem ser calculados em função dos valores correspondentes da outra, (Sastre Vásquez, Rey e Boubée, 2008 [34, p 145-146]).

Boyer (1996) [5, p. 237-238] indica que

[m]esmo que Descartes conhecesse a representação gráfica de Oresme de funções, e isso não é evidente, não há nada em sua forma de pensar que indique ter ele percebido qualquer semelhança entre a finalidade da latitude de formas e sua própria classificação das construções geométricas. A teoria das funções veio a tirar grande proveito da obra de Descartes, mas a noção de forma ou função não teve papel aparente no desenvolvimento da geometria cartesiana.

Também Fermat (1601-1665), deixou sua contribuição para o desenvolvimento da definição de função. Em Boyer (1996) [5], tem-se destacado a contribuição de Fermat com a Teoria dos Números, das Equações, da Geometria Analítica e do Cálculo. Esse matemático familiarizava-se com o trabalho de Viète com relação ao uso da Álgebra para resolver problemas matemáticos.

Fermat utilizou, no estudo de curvas, um sistema de coordenadas e relacionou as duas variáveis que apareciam no final de uma equação a partir do seguinte princípio: “Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva” (Boyer, 1996, p. 238) [5]. Vê-se que a relação entre as incógnitas é indicada por um lugar geométrico, ou seja, o que

conhecemos hoje como expressão algébrica de uma função, que tanto para Descartes e Fermat, era uma curva.

James Gregory (1638-1675) em 1667 deu a definição mais explícita de função até então. Para ele função seria *“uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável”*. (Kline (1990), *apud* Botelho e Rezende, 2007) [4].

Vindo para o período da Idade Moderna e saindo das primeiras ideias sobre o conceito de função, tem-se que a origem da noção de função confunde-se com os primórdios do Cálculo Infinitesimal com Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), destacam Roque e Pitombeira (2012) [31].

Segundo Ponte (1990) [25], a noção de função surge de uma forma confusa nos “fluentes” e “fluxões” de Newton (1642-1727), que usou os termos “relata quantitas” para designar variável dependente e “genita” para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

No início do ano de 1665, Newton apresenta suas primeiras descobertas, que resultaram em exprimir funções em termos de séries infinitas. Tinha verificado que a análise por séries infinitas estava sujeita às mesmas leis gerais que a álgebra de quantidades finitas *“As séries infinitas já não deviam mais ser consideradas apenas como instrumentos de aproximação; eram outras formas das funções que representavam.”* (Boyer, 1996, p. 271) [5].

Não se pode dizer que Leibniz é o responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra “função”, praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje. Ele introduziu este conceito em 1694 com o intuito de descrever quantidades relacionadas a uma curva, o que atualmente é denotado por funções diferenciáveis, que formam a base do Cálculo Infinitesimal. Mais tarde, em 1676, Leibniz fala sobre funções racionais, irracionais, algébricas ou transcendentais (palavra que ele inventou). Introduziu também as palavras: constantes, variáveis e parâmetros (Boyer, 1996 [5] e Ferreira, 2005 [17]).

Roque e Pitombeira (2012) [31] esclarecem que apesar de identificarmos esboços da noção de função nos cálculos de Leibniz e Newton, o conceito propriamente dito foi formulado alguns anos mais tarde. Roque e Pitombeira (2012) [31] esclarecem ainda que

[a] falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra variável, motiva a definição de função, que aparece pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli. No final do século XVII, Johann Bernoulli já emprega a palavra função relacionando-a indiretamente a quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes. Em resposta a uma carta de Bernoulli, de 1698, Leibniz discute sobre a melhor notação para uma função. (p 300-301)

Bernoulli (1667-1748) experimentou várias notações para uma função, das quais “fx” é a que mais se aproxima da atual utilizada (Souza e Mariani, 2005, [37]). Os estudos de Leonard Euler (1707-1783), um dos discípulos de Bernoulli, foram muito importantes para a Análise de Newton e Leibniz. Dessa época em diante a ideia de função tornou-se fundamental na Análise.

Foi Euler quem formalizou a notação  $y = f(x)$  para representar uma função qualquer envolvendo variáveis e constantes. Segundo Boyer, (1996) [5] Euler foi o fundador da Análise, pois a organizou e a colocou formalmente, isolada da Geometria. Mesmo que Euler não tenha sido o precursor no que se refere à noção de função, foi ele o primeiro a considerar o Cálculo como uma teoria formal de funções.

Sastre Vásquez, Rey e Boubée (2008) [34] abordam que Euler afirmou que se a toda função corresponde uma curva, também toda linha curva deveria ser representada por uma função. Admitindo, assim, como funções as chamadas *curvas mecânicas*. Ao ampliar o conceito de função, distingue duas classes: as “contínuas” e as “descontínuas”. Naquela época estes termos não tinham o significado atual<sup>13</sup>.

Euler considera não somente funções algébricas, mas também as transcendentais, as quais podem ser definidas não somente por operações algébricas ou combinação de operações algébricas repetidas um número finito de vezes. Ele define assim uma expressão analítica, enumerando as operações por meio das quais ela pode ser obtida. Primeiramente estão as operações algébricas, (incluem resolução de equações algébricas) e, a seguir, lista as operações transcendentais, incluindo assim logaritmos, exponenciais e funções obtidas por integração de equações diferenciais.

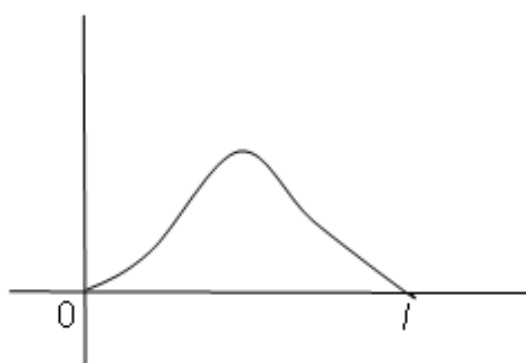
---

<sup>13</sup> Segundo Euler, uma função contínua é aquela que está representada por uma só equação ou quando conste de mais de um ramo de curva, como a hipérbole. As descontínuas, aquelas que não têm uma equação conhecida.

Em torno do tema funções, houve também uma discussão entre D'Alembert (1717-1783), Euler e Bernoulli ao tentarem solucionar o problema das cordas vibrantes, a respeito do significado de “função”, o que provocou um novo entendimento sobre o conceito de função. O problema é o seguinte:

Uma corda elástica com extremidades fixas  $O$  e  $l$  é deformada até uma posição inicial, e em seguida liberada. A corda começará a vibrar e o problema é o de determinar a função que descreve a forma da corda em um instante  $t$ . (Ver em Roque e Pitombeira, 2012, p. 303) [31]

Figura 2 - Problema das cordas vibrantes



Fonte: (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 303)

As discussões em cima desse problema duraram anos, e segundo Kliner (1989, *apud* Botelho e Rezende, 2007) [4] foram importantes para estender o conceito de função, como a seguir:

- Funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos.
- Funções desenhadas à mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos.

Outro matemático personagem deste histórico da evolução da noção de funções foi Fourier (1768 - 1830). Ele deu sua contribuição no estudo de funções dizendo que qualquer função  $y = f(x)$  pode ser representada por uma série, hoje conhecida por série de Fourier. Tal representação fornece uma generalidade maior que a série de Taylor, quanto ao tipo de funções que podem ser estudadas. Mesmo que tenhamos muitos pontos em que a derivada não exista ou em que a função não é contínua, a função pode ter expansão em série de Fourier (Boyer, 1996) [5].

Botelho e Rezende (2007) [4] destacam ainda que Cauchy (1789-1857) “foi o principal responsável pela transformação do Cálculo Diferencial e Integral de variáveis (de Newton e Leibniz) no Cálculo Diferencial e Integral de Funções, como temos hoje” (p. 72).

Percebe-se então que, desde Euler até Cauchy, os matemáticos pareciam estar de acordo com a natureza “arbitrária” das funções. No entanto, na prática, eles pensavam nas funções como expressões analíticas ou curvas. Foi Dirichlet (1805-1859) o primeiro a considerar a noção de função como uma “correspondência arbitrária”. Ele restringiu o domínio de uma função a um intervalo (Sastre Vásquez, Rey e Boubée, 2008, p. 150 [34]).

Dessa maneira, pode-se notar que a formalização do conceito de função teve muitos obstáculos, pois os pesquisadores desenvolviam seus trabalhos, muitas vezes com linhas de raciocínio não coincidentes entre si. No entanto, tais ideias e definições serviram de base para, no século XIX, Dirichlet dar a definição de função mais próxima da que temos hoje.

Em Boyer (1996) [5] encontra-se que Dirichlet sugeriu uma definição geral para função em que função é um caso especial de relação, considerada a definição formal da função moderna. Dirichlet, em 1837, sugeriu uma definição muito geral para função. Segundo ele,

[s]e uma variável  $y$  está relacionada com uma variável  $x$  de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a  $x$ , existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de  $y$ , então se diz que  $y$  é função da variável independente  $x$ . (Boyer, 1996, p. 352) [5]

Essa definição de função indicada por Dirichlet é bem próxima da compreensão moderna do termo função de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas, nessa época, ainda não se tinham estabelecidos os conceitos de número real e conjunto. (Boyer, 1996) [5].

Para mostrar o conceito de função como uma relação arbitrária entre as variáveis, independente de fórmulas algébricas, Dirichlet definiu a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{se } x \text{ é racional} \\ d, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Este foi o primeiro exemplo de uma função que não era representado por uma fórmula, com combinação de símbolos matemáticos.

Dedekind (1831-1916) e Riemann (1826-1866), influenciados por Dirichlet, apresentaram o conceito de função dizendo que: “Uma aplicação  $\Phi$  de um sistema  $S$  é uma lei que associa a cada elemento  $s$  de  $S$  uma certa coisa, que é chamada imagem de  $s$  e que escrevemos  $\Phi(s)$ ”, em que o domínio e o contradomínio podem ser qualquer conjunto, não somente de números, mas de matrizes, vetores e mesmo de funções, (Boyer, 1996) [5]

Após a consideração de funções definidas com domínios mais amplos que o dos números reais, o conceito de função passa a ser visto como um tipo especial de relação entre conjuntos. Essa visão foi reforçada com o surgimento da teoria dos conjuntos e da preocupação em dar um tratamento axiomático à Matemática. Assim, uma variável passa a ser vista como elemento de um conjunto. À noção dinâmica de função, herdada da física, substitui-se uma noção estática.

A teoria dos conjuntos iniciada por Cantor (1845-1918) veio a produzir uma nova evolução do conceito de função, incluindo “toda correspondência arbitrária que satisfaça à condição de unicidade entre conjuntos numéricos ou não numéricos” (Sastre Vásquez, Rey e Boubée, 2008, p. 151 [34]).

O desenvolvimento da Álgebra abstrata e da Topologia deram lugar ao surgimento de novas definições teóricas com conjuntos. O grupo Bourbaki<sup>14</sup>, em 1939, define função como uma correspondência entre dois conjuntos de forma semelhante à de Dirichlet em 1837:

Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável  $x$  de  $E$  e uma variável  $y$  de  $F$  é dita uma relação funcional em  $y$ , ou relação funcional de  $E$  em  $F$ , se, para qualquer  $x \in E$  existe um único  $y \in F$ , e apenas um, que está na relação dada com  $x$ . Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento  $x \in E$  o elemento  $y \in F$  que se encontra na relação dada com  $x$ ; dizemos  $y$  é o valor da função para o elemento  $x$ , e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (Botelho e Rezende, 2007) [4]

Bourbaki também formulou uma definição de função como um conjunto de pares ordenados: Para este grupo,

---

<sup>14</sup> Bourbaki é um personagem inventado por um grupo de matemáticos franceses com o objetivo de estudar e desenvolver teorias matemáticas. Os criadores são: Henri Cartan, Elie Cartan, Claude Chevalley, Jean Dersart, Jean Dieu. O grupo foi crescendo e existe até hoje. O grupo possui uma obra que é admirada no mundo todo, que serve de fonte de pesquisa de álgebra, análise, geometria e topologia, com métodos altamente axiomáticos.

[u]ma função do conjunto E em um conjunto F se define como um subconjunto do produto cartesiano  $E \times F$  (Sastre Vásquez, Rey e Boubée, 2008, p. 152 [34]).

Dessa forma, através do histórico esboçado, verifica-se que o conceito de função foi construído lentamente e passou por algumas mudanças. Podemos identificar representações do conceito de função no decorrer da história: função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação.

Durante aproximadamente 3.700 anos, o conceito de função foi usado quase que intuitivamente. Foram necessários cerca de 300 anos para se desenvolver o conceito de função e se chegar ao que se usa hoje, que inicialmente surgiu dos problemas do Cálculo e da Análise.

No Quadro 4, abaixo, buscamos mostrar um resumo das definições de função nos séculos XVII, XVIII e XIX e no Quadro 5, abaixo, retratar a ordem em que os matemáticos foram aprimorando a definição de função.

Quadro 4 - Resumo das definições de função nos séculos XVII, XVIII e XIX (Adaptado)

<b>Período</b>	<b>Definição de Função</b>
<b>Século XVII</b>	Qualquer relação entre variáveis
	Uma quantidade obtida de outras quantidades mediante operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável
	Qualquer quantidade que varia de um ponto ao outro numa curva
	Quantidades formadas usando expressões algébricas e transcendentais de variáveis e constantes
<b>Século XVIII</b>	Quantidades que dependem de uma variável
	Função de certa variável como uma quantidade que está composta de alguma forma por variáveis e constantes.
	Qualquer expressão útil para calcular
<b>Século XIX</b>	Correspondência entre variáveis
	Correspondência entre um conjunto A e os números reais
	Correspondência entre dois conjuntos

Fonte: (SASTRE VÁSQUEZ, REY e BOUBÉE, 2008 [34])



Quadro 5 - A evolução do conceito de função e os matemáticos

SÉCULO XIV	SÉCULO XVI E XVII	SÉCULO XVII E XVIII	SÉCULO XVIII	SÉCULO XVII E XIX	SÉCULO XIX E XX	SÉCULO XX
 <p>NICOLE ORESME - (1323-1382)</p>	 <p>JAMES GREGORY – (1638-1675)</p>  <p>RENÉ DESCARTES – (1596-1650)</p>	 <p>ISAAC NEWTON – (1642-1727)</p>  <p>LEIBNIZ – (1646- 1716)</p>  <p>BERNOULLI – (1667-1748)</p>	 <p>EULER – (1707-1783)</p>  <p>D’LAMBERT – (1717-1783)</p>	 <p>FOURIER – (1768-1830)</p>	 <p>DIRICHLET – (1805-1859)</p>  <p>DEDEKIND – (1831-1916)</p>  <p>RIEMANN – (1826-1866)</p>	 <p>GRUPO FUNDADOR</p> <p>O congresso Bourbaki de 1938- (O grupo Bourbaki existe até os dias de hoje)</p>

Fonte: Elaborado pelo próprio autor. As figuras são da web.

Entendemos que conhecer as origens dos principais conteúdos escolares pode servir de importante ferramenta didática que os docentes podem utilizar de forma criativa, tendo como meta a aprendizagem mais significativa. Conhecer a história dos conhecimentos faz com o que o professor se torne apto a promover a conceituação da Matemática como uma ciência em permanente construção, que não é eterna nem imutável, mas que é um recurso para resolver problemas e que valida os conhecimentos e as produções científicas.

Finalizamos aqui esta parte da dissertação destacando Eves (1995, p. 661) [15] a respeito da evolução do conceito de função:

[o] conceito de função permeia grande parte da matemática, (...), O conceito de função parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor será para sua formação matemática.

## **2.2 A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E SEUS ELEMENTOS CARACTERIZADORES**

Conforme já enunciado anteriormente quando foi apresentada a estrutura dessa dissertação, passaremos agora a enunciar algumas definições relativas à definição de função e aos elementos estruturantes que a caracterizam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função, sobrejetividade e injetividade.

As definições aqui apresentadas são recortes da teoria apresentada pelos autores: Leithold (1994) [20]; Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1999) [21]; lezzi e Murakami (2013) [18] lezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2014) [19], Muniz Neto (2015) [23] e da minha experiência como professora de Ensino Médio.

É importante esclarecer que as definições que serão apresentadas, a seguir, são as mesmas que são passadas aos alunos do 1º ano do CPCAR.

## 2.2.1 PRELIMINARES

Julga-se importante, antes de formalizar a definição de função, apresentar a definição de alguns elementos que facilitam o entendimento da definição de função conforme será apresentado em seguida.

### 2.2.1.1 Par

Chama-se **par** todo conjunto formado por dois elementos. Dessa forma, os conjuntos  $\{1, 2\}$ ,  $\{3, -1\}$ ,  $\{a, b\}$  indicam pares. Do conceito de igualdade de conjuntos, tem-se que invertendo a ordem dos elementos dos conjuntos citados, não se produz um novo par, portanto tem-se que:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \{3, -1\} = \{-1, 3\} \text{ e } \{a, b\} = \{b, a\}$$

Em Matemática, existem situações em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos, pode-se citar, por exemplo, as soluções de um sistema de equações do tipo  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$  em que  $x = 3$  e  $y = 1$  é solução, no entanto  $x = 1$  e  $y = 3$  não é solução. Mas,  $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ . Assim, nesse caso, não poderíamos dizer que o conjunto solução do sistema dado é  $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ . Por causa disso, diz-se que a solução do sistema é o conjunto que contém o par ordenado  $(3, 1)$ , ou seja é o conjunto  $\{(3, 1)\}$ , em que fica subentendido que o primeiro elemento 3, refere-se à incógnita **x** e o segundo elemento 1, refere-se à incógnita **y**.

### 2.2.1.2 Par Ordenado

Para cada elemento  $x$  e cada elemento  $y$ , admitiremos a existência de um terceiro elemento  $(x, y)$ , que se denomina par ordenado, de modo que se tenha

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$$

### 2.2.1.3 Plano Cartesiano

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é chamado de plano numérico, denominado  $\mathbb{R}^2$  e cada par ordenado  $(x, y)$  será um ponto do plano numérico. Assim como podemos identificar  $\mathbb{R}$  com os pontos de um eixo

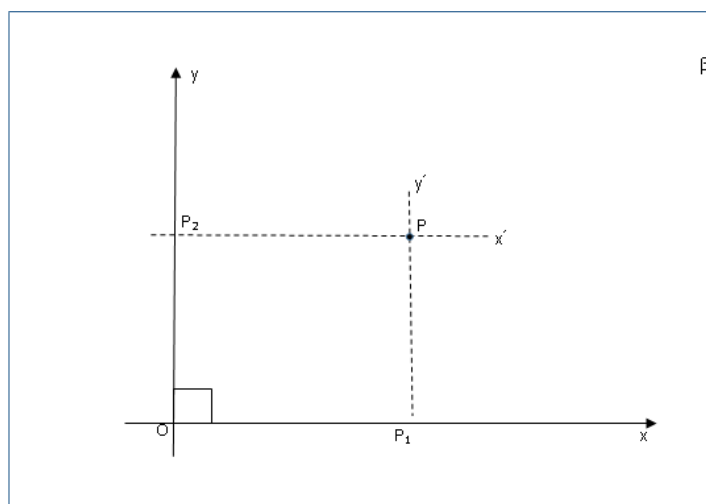
(espaço unidimensional), podemos identificar  $\mathbb{R}^2$  com os pontos de um plano geométrico (espaço bidimensional). O plano usado em  $\mathbb{R}^2$  deve-se a Descartes.

Para representar graficamente os pares ordenados  $(a,b)$ , usaremos o Sistema de Coordenadas Cartesianas.

Consideremos dois eixos  $x$  e  $y$ , perpendiculares em  $O$ , os quais determinam o plano  $\beta$ .

Dado um ponto  $P$  qualquer,  $P \in \beta$ , devemos conduzir por  $P$  duas retas  $x'$  e  $y'$  que sejam paralelas aos eixos  $x$  e  $y$ . Denominando  $P_1$  a interseção de  $x$  com  $y'$  e  $P_2$  a interseção de  $y$  com  $x'$ . (ver Figura 3)

Figura 3 - Sistema de Coordenadas Cartesianas



Fonte: (IEZZI e MURAKAMI (2013) [18], p. 65)

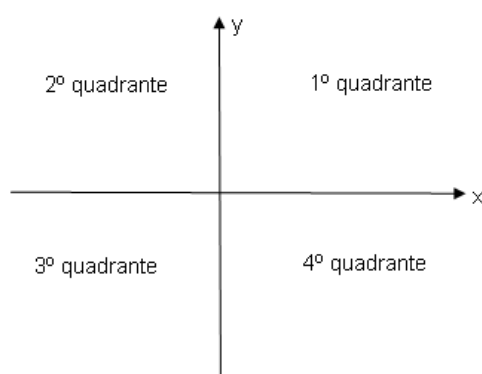
Sendo assim, define-se:

- a **abscissa** de  $P$  é o número real  $x_P$  representado por  $P_1$ ;
- a **ordenada** de  $P$  é o número real  $y_P$  representado por  $P_2$ ;
- as **coordenadas** de  $P$  são os números reais  $x_P$  e  $y_P$ , que são indicados na forma de par ordenado  $(x_P, y_P)$  em que  $x_P$  é o primeiro termo e  $y_P$  é o segundo termo;
- o **eixo das abscissas** é o eixo  $x$  ou  $Ox$ ;
- o **eixo das ordenadas** é o eixo  $y$  ou  $Oy$ ;
- o sistema de eixos cartesianos ortogonais (ou ortonormais ou retangulares) é o sistema  $xOy$ ;

- a **origem** do sistema é o ponto  $O(0, 0)$  e
- o plano  $\beta$  é o **plano cartesiano**.

Estabelece-se a direita da origem como sendo a parte positiva do eixo  $Ox$ ; para o eixo  $Oy$  a parte positiva fica acima da origem; os eixos  $Ox$  e  $Oy$  (eixos coordenados) dividem o plano em quatro partes, denominadas **quadrantes**, o primeiro quadrante é aquele cujas coordenadas são positivas, isto é, o quadrante superior direito e os demais, são numerados na direção anti-horária. (Ver Figura 4)

Figura 4 - Sistema de Coordenadas Cartesianas dividido em quadrantes



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

#### 2.2.1.4 Produto Cartesiano

##### Definição

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios. Define-se produto cartesiano de  $A$  por  $B$  o conjunto  $A \times B$  cujos elementos são todos os pares ordenados  $(x, y)$  em que o primeiro elemento pertence a  $A$  e o segundo elemento pertence a  $B$ . Simbolicamente<sup>15</sup>, tem-se:

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Observações:

- $A \times B$  lê-se “ $A$  cartesiano  $B$ ” ou “produto cartesiano de  $A$  por  $B$ ”;
- Se  $A$  ou  $B$  for o conjunto vazio então  $A \times \{\} = \{\}$ ,  $\{\} \times B = \{\}$ ,  $\{\} \times \{\} = \{\}$ , em que  $\{\}$  representa o conjunto vazio;

<sup>15</sup> Faz parte da nossa prática em sala de aula passar para o aluno as definições em símbolos lógico-matemáticos também para fazer com que ele se familiarize com a simbologia e consiga ler e interpretar as definições

- Se  $A \neq B$ , então  $A \times B \neq B \times A$ , ou seja, o produto cartesiano entre dois conjuntos não goza da propriedade comutativa;
- Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos com  $m$  e  $n$  elementos, respectivamente, então  $A \times B$  possui  $(m \cdot n)$  elementos;
- Se  $A$  ou  $B$  for infinito e nenhum deles for o conjunto vazio, então  $A \times B$  é um conjunto infinito.

Exemplo:

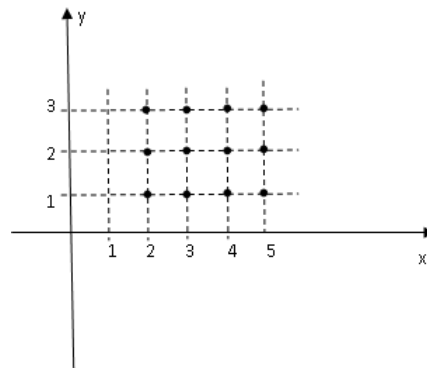
- 1) Dados  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$ , determine  $A \times B$  analiticamente e graficamente.

Resolução analítica:

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

Resolução gráfica

Figura 5 - Resolução gráfica - exemplo 1 – 2.2.1.4



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

### 2.2.1.5 Relação Binária

#### Definição

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios, chama-se relação binária de  $A$  em  $B$  todo subconjunto  $R$  de  $A \times B$ , ou seja:

$$R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset A \times B$$

Se os conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais, todo subconjunto de  $A \times A$  é chamado relação binária em  $A$ , assim:

$R$  é relação binária em  $A \Leftrightarrow R \subset A \times A$

Exemplo:

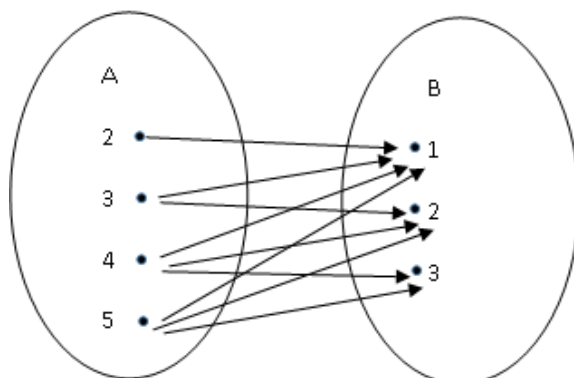
Determine os elementos da relação de  $A$  em  $B$  dada por  $R = \{(x,y) \in A \times B; x > y\}$ , em que  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$ .

Os elementos de  $R$  são os pares ordenados formados pela associação de cada elemento  $x \in A$  com cada elemento  $y \in B$  em que  $x > y$ . Temos então que  $R = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

A representação da relação binária  $R$  do exemplo anterior é a representação analítica. Pode-se representar uma relação também por diagramas de Venn-Euler ou graficamente.

Por diagrama de Venn-Euler (Figura 6):

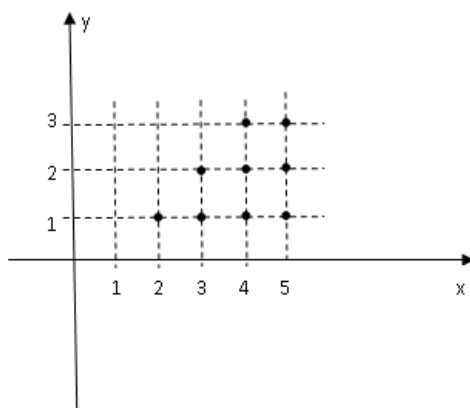
Figura 6 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo 2.2.1.5



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Representação gráfica (Figura 7):

Figura 7 - Representação gráfica – exemplo 2.2.1.5



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

## 2.2.2 FUNÇÃO

### 2.2.2.1 Definição

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ <sup>16</sup>, não vazios, uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  recebe o nome de aplicação de  $A$  em  $B$  ou função definida em  $A$  com imagens em  $B$  se, e somente se, para todo  $x$  pertencente a  $A$  existe um único  $y$  pertencente a  $B$  tal que  $(x, y)$  pertence a  $f$ . Simbolicamente, tem-se:

$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A \exists \text{ um único } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in f)^{17}$$

### Esquema de flechas

Abordaremos a seguir, com o auxílio do esquema de flechas, que condições deve satisfazer uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  para ser função.

- É necessário que todo elemento  $x \in A$  participe de pelo menos um par  $(x, y) \in f$ . Isto é, todo elemento de  $A$  “deve servir como ponto de partida de flecha”.
- É necessário que cada elemento  $x \in A$  participe de apenas um único para  $(x, y) \in f$ . Isto é, cada elemento de  $A$  “deve servir como ponto de partida de uma única flecha”.

Uma relação  $f$  não é função se não satisfizer uma das condições acima citadas, isto é:

- Se existir um elemento de  $A$  do qual não parta flecha alguma ou
- Se existir um elemento de  $A$  do qual partam duas ou mais flechas.

Exemplos:

Considerar os conjuntos  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$  e verificar se as relações abaixo são funções de  $A$  em  $B$ .

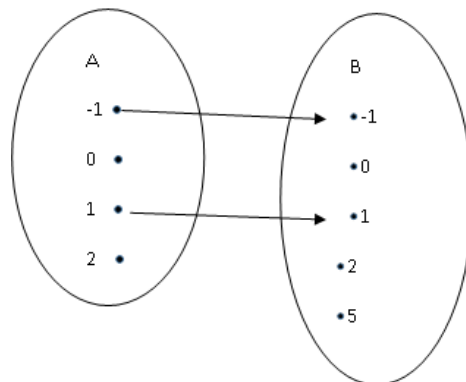
$$a) R = \left\{ (x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{x} \right\}$$

<sup>16</sup> Em todo o estudo de funções fica estabelecido que  $A$  e  $B$  estão contidos no conjunto dos números reais.

<sup>17</sup> Há de se esclarecer aqui que antes de apresentar a definição de função formalmente como se destaca neste texto, apresentamos aos alunos a noção intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência ou resultado de um movimento. Isso se dá a partir de exemplos contextualizados do livro adotado e também de outros livros.



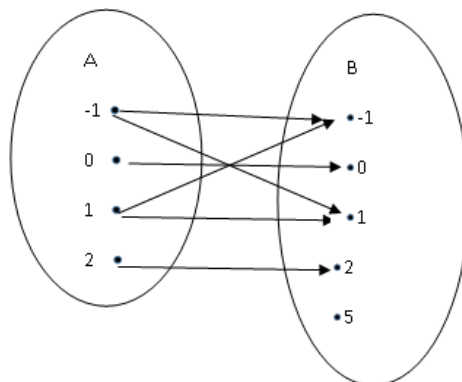
Figura 8 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo a) 2.2.2.1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

$$b) T = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$$

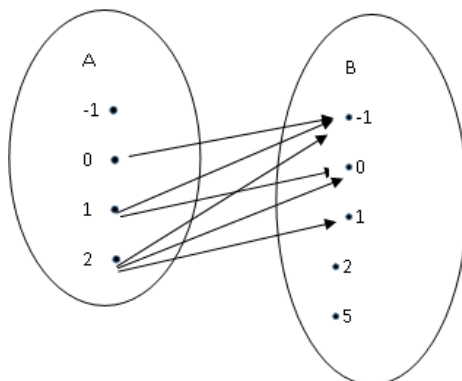
Figura 9 - Representação diagrama de Venn-Euler– exemplo b) 2.2.2.1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

$$c) S = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$$

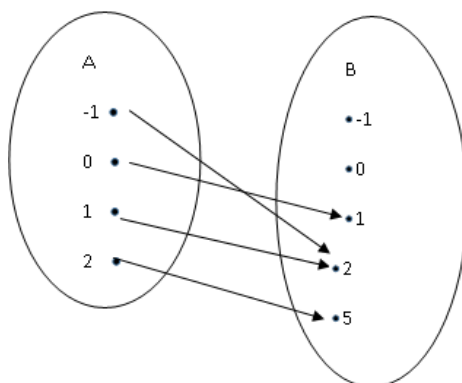
Figura 10 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo c) 2.2.2.1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

$$d) W = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$$

Figura 11 - Representação em diagrama de Venn-Euler – exemplo d) 2.2.2.1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Das relações de A em B anteriores, a única que atende às condições de ser função é a W.

### 2.2.2.2 Gráfico de uma Função

O Gráfico de uma função  $f: A \rightarrow B$  é o subconjunto  $G(f)$  do produto cartesiano  $A \times B$  formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$  em que  $x$  é um elemento qualquer de A e  $y = f(x)$ . Assim:

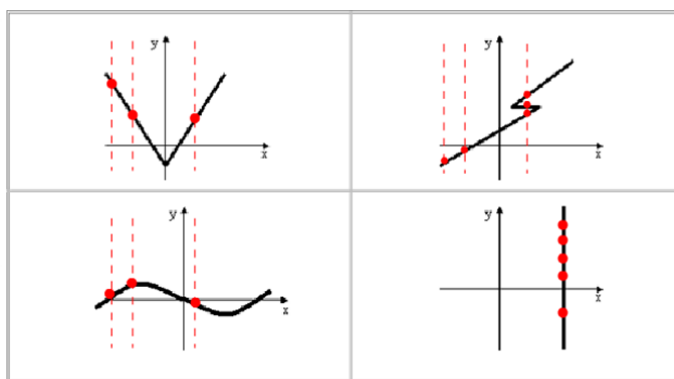
$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

Para que o subconjunto  $G(f) \subset A \times B$  seja o gráfico de alguma função  $f: A \rightarrow B$  é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

- Para todo  $x \in A$  existe um par ordenado  $(x, y) \in G$ ;
- Se  $P = (x, y)$  e  $Q = (x, y')$  são pares ordenados pertencentes a G com a mesma primeira coordenada  $x$  então  $y = y'$ , isto é  $P = Q$

Em resumo, um subconjunto qualquer de  $A \times B$  é o gráfico de uma função de A para B se esse conjunto cumpre as condições 1) e 2) acima determinadas.

Pode-se verificar, pela representação cartesiana da relação f de A em B, se f é ou não função. Para isto basta verificar se a reta paralela ao eixo Oy conduzida pelo ponto  $(x, 0)$ , em que  $x \in A$ , intercepta sempre o gráfico de f em um só ponto, conforme exemplos da Figura 12, abaixo.

Figura 12 - Verificação da representação cartesiana de uma função<sup>18</sup>

Fonte: Retirado da web.

### 2.2.2.3 Notação de uma Função

Toda função é uma relação binária de  $A$  em  $B$ , sendo assim, é um conjunto de pares ordenados.

Em geral, existe uma sentença aberta  $y=f(x)$  que expressa a lei mediante a qual, dado  $x \in A$ , determina-se  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ . Então:

$$f = \{(x, y); x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\},$$

o que significa que, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , a função  $f$  tem a lei de correspondência  $y = f(x)$

Para indicar uma função  $f$ , definida em  $A$  com imagens em  $B$ , segundo a lei de correspondência  $y = f(x)$ , usa-se uma das seguintes notações:

$$\begin{array}{l} f : A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ tal que} \\ y = f(x) \end{array}$$

### 2.2.2.4 Imagem de um elemento

Se  $(a, b) \in f$ , o elemento **b** é chamado **imagem** de **a** pela aplicação  $f$  ou valor de  $f$  no elemento **a**, e indicamos  $f(a) = b$ , que se lê “ $f$  de **a** é igual a **b**”.

### 2.2.2.5 Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem

#### Domínio:

Chama-se domínio **D** de uma função  $f:A \rightarrow B$  o conjunto  $D$  dos elementos  $x \in A$  para os quais existe  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ , ou seja:

<sup>18</sup> As relações dos exemplos são de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .

**Domínio = conjunto de partida** , isto é  $D(f) = A$

**Contradomínio:**

Chama-se contradomínio **CD** de uma função  $f : A \rightarrow B$  ao conjunto de chegada da aplicação, ou seja:

$$CD(f) = B$$

**Conjunto Imagem:**

Chama-se de conjunto imagem de uma função  $f : A \rightarrow B$ , denotado por **Im**, o conjunto dos elementos  $y \in B$  para os quais existe  $x \in A$  tal que  $(x, y) \in f$ , portanto o conjunto imagem é subconjunto do contradomínio, isto é:

$$Im \subset B$$

Estes entes acima definidos, feita a representação cartesiana de  $f$ , são:

**Domínio** é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de  $f$ , isto é, é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de  $f$ .

**Conjunto-imagem** é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de  $f$ , isto é, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de  $f$ .

**2.2.2.6 Domínio das Funções Numéricas**

As funções numéricas são aquelas em que o domínio  $A$  e o contradomínio  $B$  são subconjuntos do conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. Uma função fica completamente definida quando são dados o seu domínio  $D$ , o seu contradomínio  $CD$  e a lei de correspondência  $y = f(x)$ .

Muitas vezes se faz referência a uma função  $f$ , dizendo apenas qual é a lei de correspondência que a define. Quando não é dado explicitamente o domínio  $D$  da função  $f$ , deve-se subentender que  $D$  é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de  $x$  na lei de correspondência  $y = f(x)$ , de modo que efetuados os cálculos, resulte um  $y$  real.

$$x \in D \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

### 2.2.2.7 Funções Iguais

Duas funções  $f: A \rightarrow B$  e  $g: C \rightarrow D$  são iguais se, e somente se, apresentarem:

- Domínios iguais ( $A = C$ );
- Contradomínios iguais ( $B = D$ ) e
- $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  do domínio.

### 2.2.3 ANÁLISE DE GRÁFICO DE FUNÇÕES:

Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser obtidas a partir do seu gráfico. Assim, se as caracterizações que enunciaremos a seguir forem bem compreendidas, acredita-se que poderá ser feito um esboço do gráfico de uma função com mais facilidade e naturalidade, sem ter que se recorrer a tabelas de valores além de poder fazer a classificação de uma função quanto a ser sobrejetora, injetora e bijetora.

Após ter sido apresentada a definição de função, passaremos então a definir alguns entes que caracterizam uma função e que nos auxiliam na interpretação e construção do gráfico de uma função, a saber: raiz ou zero de uma função, crescimento, decréscimo e estabilidade de uma função, máximos e mínimos de uma função, paridade, sinal de uma função.

#### 2.2.3.1 Raíz(es) ou Zero(s) de uma Função

Denomina-se raiz ou zero de uma função todo valor de  $x$  cuja imagem é nula, isto é, a abscissa do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo  $Ox$ . Equivalentemente:

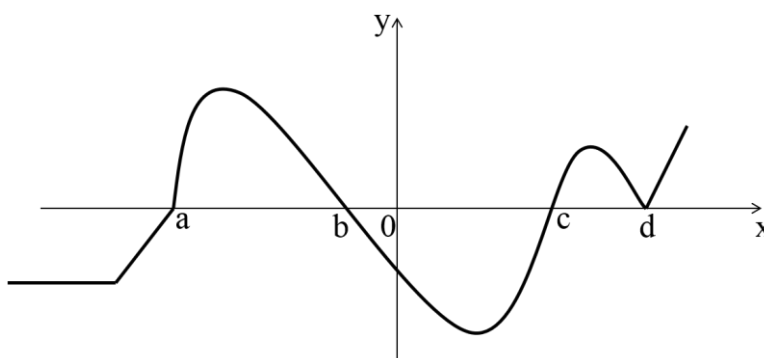
$$x = a \text{ é raiz de uma função } f \Leftrightarrow f(a) = 0$$

Exemplo:

- Na função real  $f$  definida por  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ , os zeros reais são  $x = -2$  ou  $x = -1$  ou  $x = 1$
- Considerando a função real  $f$  cujo gráfico está esboçado abaixo (Figura 13), as raízes de  $f$  são os números reais  $x = a$  ou  $x = b$  ou  $x = c$  ou  $x = d$

Figura 13 - Gráfico de uma função real com raízes representadas – exemplo –

2.2.3.1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

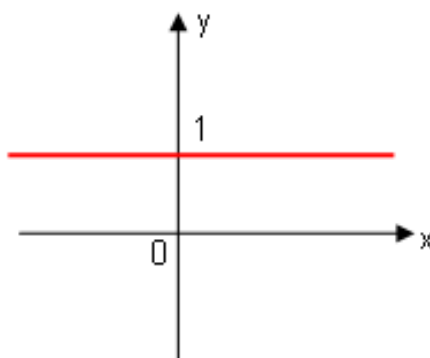
### 2.2.3.2 Monotonicidade

A fim de prosseguir com o estudo das funções, faz-se necessário apresentar as definições abaixo.

**Função constante:** Dada a função  $f:A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é constante quando para todo  $x$  pertencente  $A$  tem-se que  $y = f(x) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$

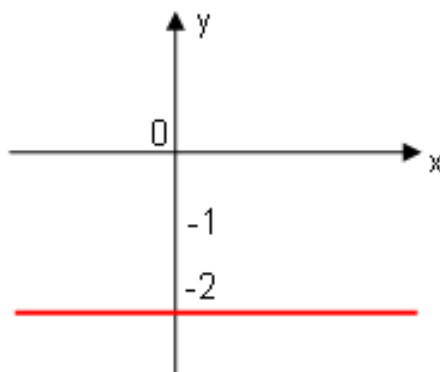
O gráfico dessa função é uma reta paralela ao eixo  $Ox$  que passa pelo ponto de coordenadas  $(0, k)$

Exemplo: Considerando as funções reais  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = 1$  e  $g(x) = -2$ , tem-se abaixo a representação gráfica de  $f$  (Figura 14) e  $g$  (Figura 15):

Figura 14 - Gráfico da função definida por  $f(x) = 1$ 

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 15 - Gráfico da função definida por  $g(x) = -2$

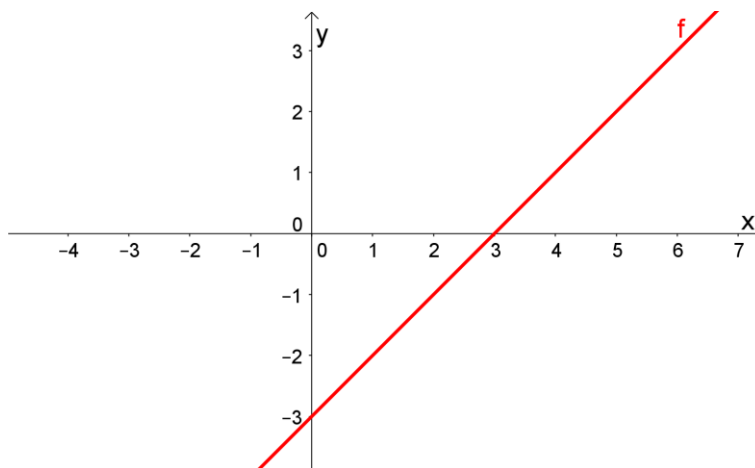


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

**Função crescente:** Dada a função  $f:A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é crescente no conjunto  $A_1 \subset A$  se para dois valores quaisquer  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes a  $A_1$  com  $x_1 < x_2$  tivermos  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Exemplo: o gráfico abaixo (Figura 16) é da função real  $f$  definida por  $f(x) = x - 3$ , que é uma função crescente

Figura 16 - Gráfico da função definida por  $f(x) = x - 3$

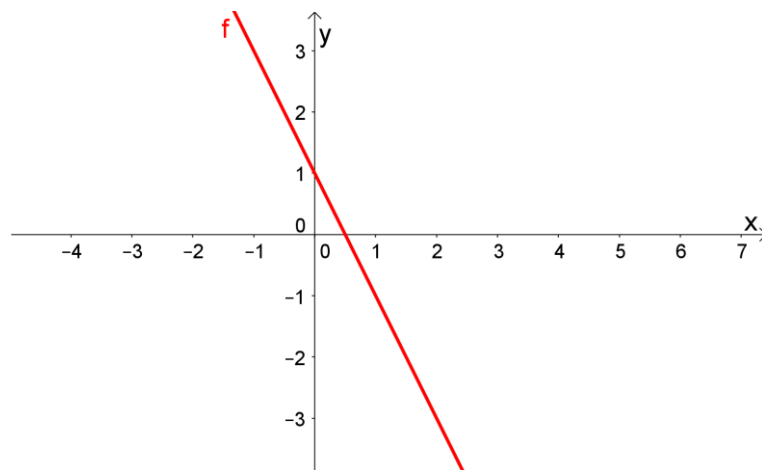


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

**Função decrescente:** Dada a função  $f:A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é decrescente no conjunto  $A_1 \subset A$  se para dois valores quaisquer  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes a  $A_1$  com  $x_1 < x_2$  tivermos  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Exemplo: o gráfico abaixo (Figura 17) é da função real  $f$  definida por  $f(x) = -2x + 1$ , que é de uma função decrescente.

Figura 17 - Gráfico da função definida por  $f(x) = -2x + 1$



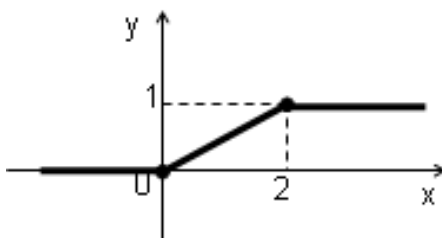
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

**Função não decrescente:** Dada a função  $f: A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é não decrescente no conjunto  $A_1 \subset A$  se para dois valores quaisquer  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes a  $A_1$  com  $x_1 < x_2$  tivermos  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Exemplo: O gráfico abaixo (Figura 18) é o da função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{se } 0 < x \leq 2, \text{ que é não decrescente.} \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Figura 18 - Gráfico de função não-decrescente



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

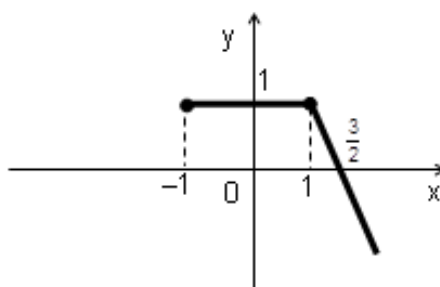


**Função não crescente:** Dada a função  $f:A \rightarrow B$ , dizemos que  $f$  é não crescente no conjunto  $A_1 \subset A$  se para dois valores quaisquer  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes a  $A_1$  com  $x_1 < x_2$  tivermos  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Exemplo: O gráfico abaixo (Figura 19) é o da função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -2x + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \text{ que é não crescente.}$$

Figura 19 - Gráfico de função não crescente

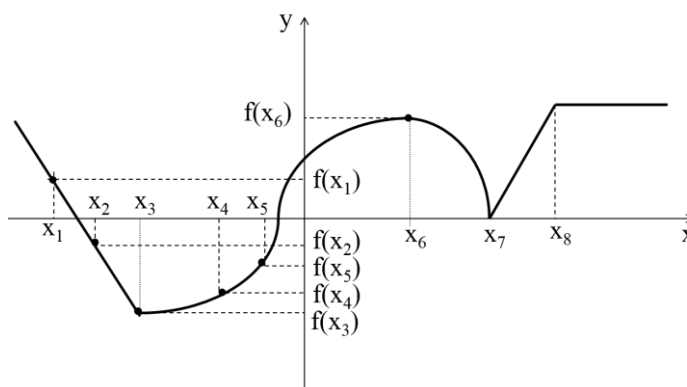


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observemos a seguir uma função em  $\mathbb{R}$  que muda o comportamento em seu domínio.

Exemplo: Considere a função real  $f$  dada pelo gráfico abaixo:

Figura 20 - Gráfico para análise de intervalos de crescimento/decrescimento



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Analisando o gráfico de  $f$  tem-se que a função  $f$  é:

- crescente no intervalo  $\{x \in \mathbb{R} \mid x_3 \leq x \leq x_6 \text{ ou } x_7 \leq x \leq x_8\}$

- decrescente no intervalo  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x_3 \text{ ou } x_6 \leq x \leq x_7\}$
- constante no intervalo  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_8\}$

### 2.2.3.3 Máximo e Mínimo de uma Função

Seja  $S$  um subconjunto do domínio de uma função e seja  $x_0 \in S$ .

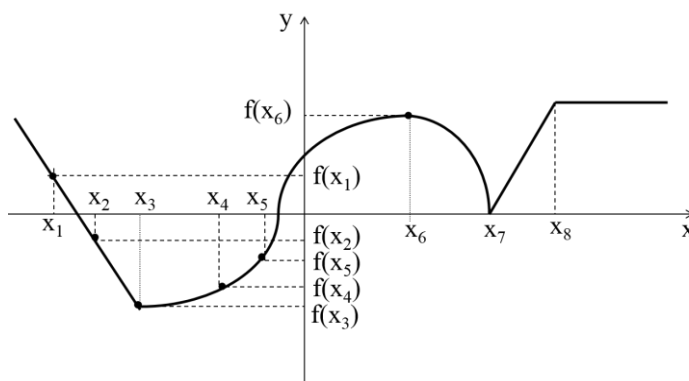
Se, para todo  $x$  pertencente a  $S$ , temos  $f(x) \geq f(x_0)$ , então  $(x_0, f(x_0))$  é o ponto de mínimo de  $f$  em  $S$ , e  $f(x_0)$  é o valor mínimo de  $f$  em  $S$ .

Se, para todo  $x$  pertencente a  $S$ , temos  $f(x) \leq f(x_0)$ , então  $(x_0, f(x_0))$  é o ponto de máximo de  $f$  em  $S$ , e  $f(x_0)$  é o valor máximo de  $f$  em  $S$ .

No gráfico da Figura 21, abaixo, tem-se que:

- Considerando o intervalo  $I = [x_1, x_6]$ , tem-se que o ponto  $(x_3, f(x_3))$  é ponto de mínimo de  $f$  em  $I$  e  $f(x_3)$  é o valor mínimo que a função assume em  $I$ ;
- Considerando o intervalo  $J = [x_5, x_7]$ , tem-se que o ponto  $(x_6, f(x_6))$  é ponto de máximo de  $f$  em  $J$  e  $f(x_6)$  é o valor máximo que a função assume em  $J$ ;
- Quando consideramos o domínio da função, qual seja o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , observamos que o ponto  $(x_3, f(x_3))$  é o ponto de mínimo de  $f$  em  $\mathbb{R}$  e que a função, em  $\mathbb{R}$ , não admite valor máximo. O valor mínimo de  $f$  em  $\mathbb{R}$  é dado por  $f(x_3)$

Figura 21 - Gráfico para análise de valores máximos e mínimos



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

### 2.2.3.4 Taxa Média de Variação de uma Função

**Definição:** Seja  $f$  uma função definida por  $y = f(x)$ ; sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois valores do domínio de  $f$ , em que  $x_1 \neq x_2$ , cujas imagens são, respectivamente,  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ .

O quociente  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  recebe o nome de taxa média de variação da função  $f$ , para  $x$  variando de  $x_1$  até  $x_2$ .

Deve-se ressaltar que a taxa média de variação depende dos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  tomados e que  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-[f(x_1) - f(x_2)]}{-(x_1 - x_2)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ , assim, verifica-se que é indiferente escolher o sentido em que calculamos a variação (de  $x_1$  para  $x_2$  ou de  $x_2$  para  $x_1$ ), desde que se mantenha o sentido escolhido no numerador e denominador.

### 2.2.3.5 Função Par e Função Ímpar

**Simetria:**<sup>19</sup>

O gráfico de uma função  $y = f(x)$  será:

- simétrico em relação ao eixo  $Ox$  se, e somente se, obtivermos uma equação equivalente ao substituímos  $y$  por  $-y$  na equação dada;
- simétrico em relação ao eixo  $Oy$  se, e somente se, obtivermos uma equação equivalente ao substituímos  $x$  por  $-x$  na equação dada;
- simétrico em relação a origem se, e somente se, obtivermos uma equação equivalente quando  $x$  for substituído por  $-x$  e  $y$  for substituído por  $-y$  na equação dada.

### Função Par

Uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é uma função par se, e somente se, para todo  $x$  pertencente a  $A$  tem-se que  $f(x) = f(-x)$ .

$$f : A \rightarrow B \text{ é par} \Leftrightarrow f(x) = f(-x) \forall x \in A$$

<sup>19</sup> Neste ponto vale lembrar com o aluno as definições de simetria entre pontos em relação a outro ponto, entre pontos em relação a uma reta e de uma curva em relação a uma reta.

## Função Ímpar

Uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é uma função ímpar se, e somente se, para todo  $x$  pertencente a  $A$  tem-se que  $f(x) = -f(-x)$

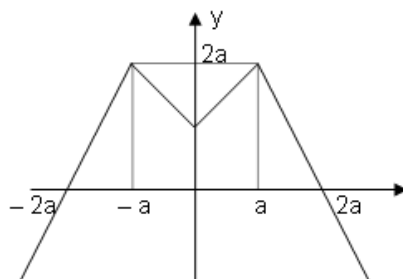
$$f : A \rightarrow B \text{ é ímpar} \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \forall x \in A$$

Sendo assim, tem-se que:

- Se uma função  $f$  é **PAR**, então o gráfico de  $f$  é simétrico em relação ao eixo  $Oy$ .
- Se uma função é **ÍMPAR**, então o gráfico de  $f$  é simétrico em relação à origem.
- Uma função que **NÃO** atende a nenhuma das definições acima é **NEM PAR NEM ÍMPAR**.

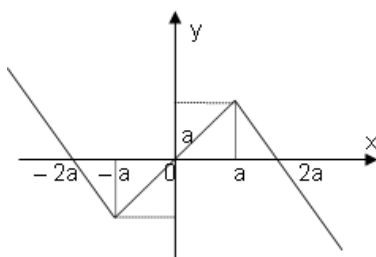
Exemplo: Classificando as funções cujos gráficos estão abaixo, quanto a paridade, tem-se que:

Figura 22 - Gráfico de função par



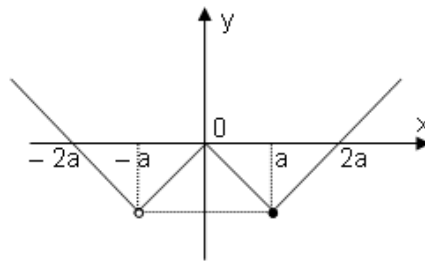
**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor

Figura 23 - Gráfico de função ímpar



**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor

Figura 24 - Gráfico de função nem par nem ímpar

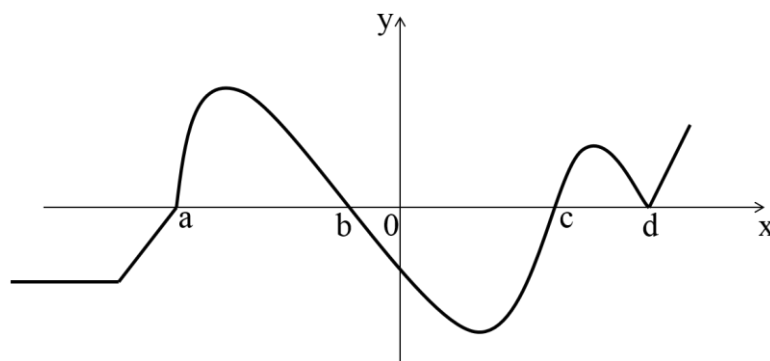


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

### 2.2.3.6 Sinal de uma Função

Estudar o sinal de uma função real  $f$  é verificar para quais valores de  $x$  a função  $f$  é positiva ( $f(x) > 0$ ), negativa ( $f(x) < 0$ ) ou nula ( $f(x) = 0$ ).

Figura 25 - Gráfico para análise de sinal de função



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observando o gráfico da figura acima (Figura 25), tem-se que

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \text{ ou } x > c \text{ e } x \neq d\}$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \text{ ou } b < x < c\}$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x = a \text{ ou } x = b \text{ ou } x = c \text{ ou } x = d\}$

### 2.2.3.7 Classificação das Funções: Injetora, Sobrejetora e Bijetora<sup>20</sup>

#### Definições

**Função Sobrejetora:** Dada uma função  $f$  de  $A$  em  $B$ , dizemos que  $f$  é sobrejetora (sobrejetiva, ou uma sobrejeção) se, e somente se, para todo  $y$  pertencente a  $B$  existe um  $x$  pertencente a  $A$  tal que  $y = f(x)$ .

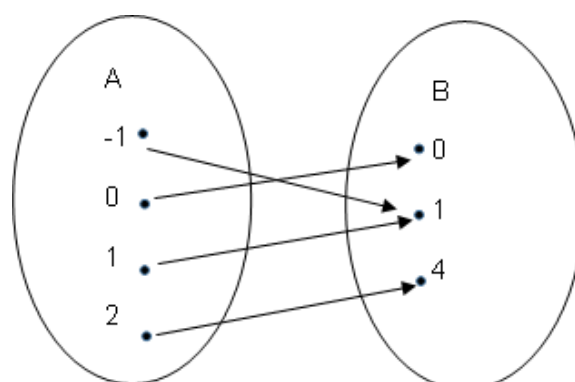
Simbolicamente, tem-se:

$$f : A \rightarrow B \text{ é sobrejetor a } \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists x, x \in A \mid f(x) = y$$

Isto é equivalente a dizer que  $f : A \rightarrow B$  é sobrejetor a  $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = B$

Exemplo: Sendo  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{0, 1, 4\}$  a função  $f : A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = x^2$  é sobrejetora.

Figura 26 - Diagrama de Ven-Euler – exemplo de função sobrejetora.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

**Função Injetora:** Uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é injetora (injetiva ou uma injeção) se, e somente se, para quaisquer que sejam  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes a  $A$ , se  $x_1 \neq x_2$  então  $f(x_1) \neq f(x_2)$

Simbolicamente, tem-se:

$$f : A \rightarrow B \text{ é injetora } \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A, \forall x_2, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

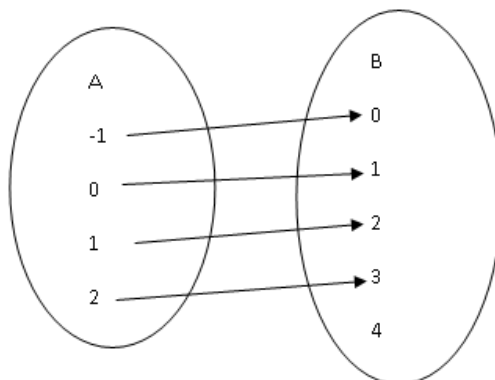
Esta definição é equivalente a:

$$f : A \rightarrow B \text{ é injetora } \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A, \forall x_2, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

<sup>20</sup> Acredita-se que quando o aluno conhece bem os entes estruturantes que caracterizam uma função, ele será capaz de classificar uma função quanto a injeção, sobrejeção, bijeção ou não é injetora e não é sobrejetora, porque ele já é capaz de esboçar o gráfico de uma função com mais facilidade.

Exemplo: Sendo  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  a função  $f : A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = x + 1$  é injetora.

Figura 27 - Diagrama de Ven-Euler – exemplo de função injetora.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

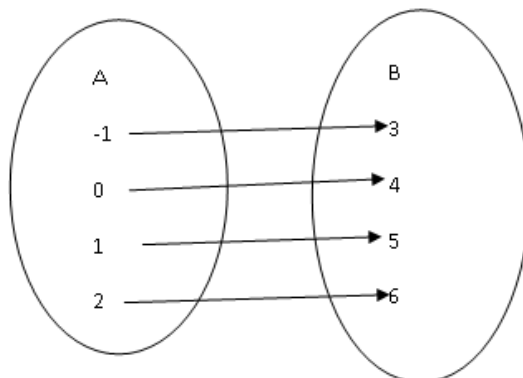
**Função Bijetora:** Uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é bijetora (bijetiva ou uma bijeção) se, e somente se,  $f$  é sobrejetora e injetora, ou seja,  $f$  de  $A$  em  $B$  é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento  $y$  pertencente a  $B$ , existe um único elemento  $x$  pertencente a  $A$  tal que  $f(x) = y$

Simbolicamente, tem-se:

$$f : A \rightarrow B \text{ é bijetora} \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists | x, x \in A | f(x) = y$$

Exemplo: Sendo  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  a função  $f : A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = x + 4$  é bijetora.

Figura 28 - Diagrama de Ven-Euler – exemplo de função bijetora.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

### Reconhecimento de Funções Sobrejetoras, Injetoras e Bijetoras através do Gráfico:

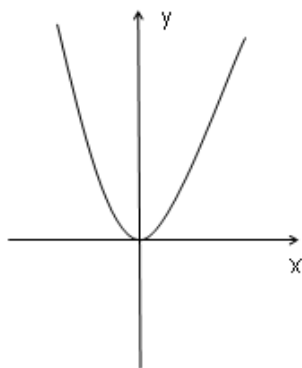
Consideremos todas as retas paralelas ao eixo dos  $x$  passando pelos pontos de coordenadas  $(0,y)$ ,  $y$  pertencente ao contradomínio da função dada .

- 1) Se toda reta intercepta o gráfico em um ou mais pontos, então a função é sobrejetora.
- 2) Se cada uma das retas intercepta o gráfico em um só ponto ou não intercepta o gráfico, então a função é injetora.
- 3) Se toda reta intercepta o gráfico em um só ponto, então a função é bijetora.

Exemplos:

- a) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$ , cujo gráfico está representado abaixo, não é sobrejetora nem injetora. Pela regra das retas paralelas citadas anteriormente, não atende a nenhuma das condições.

Figura 29 - Gráfico da função definida por  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$

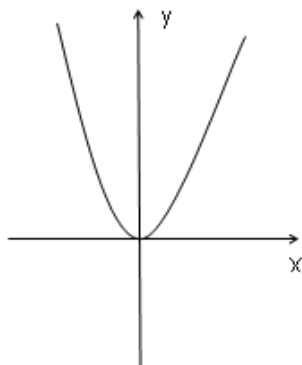


**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor.

- b) A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = x^2$ , cujo gráfico está representado abaixo, é somente sobrejetora. Pela regra das retas paralelas citadas anteriormente, atende à condição 1.



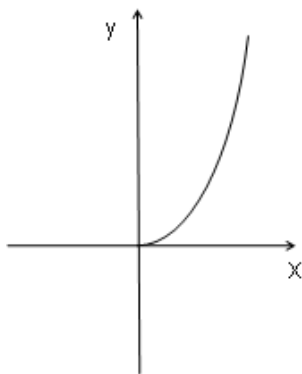
Figura 30 - Gráfico da função definida por  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = x^2$



**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor.

- c) A função  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$ , cujo gráfico está representado abaixo, é somente injetora. Pela regra das retas paralelas citadas anteriormente, atende à condição 2

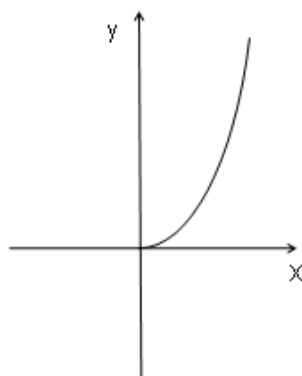
Figura 31 - Gráfico da função definida por  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$



**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor.

- d) A função  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = x^2$ , cujo gráfico está representado abaixo, é bijetora. Pela regra das retas paralelas citadas anteriormente, atende à condição 3.

Figura 32 - Gráfico da função definida por  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

### 2.2.3.8 Assíntotas<sup>21</sup>

No Ensino Médio, não se apresenta a definição de assíntotas usando a ideia de limites. Dá-se uma noção intuitiva, visto que as assíntotas são importantes para interpretar gráficos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

As assíntotas são retas das quais o gráfico de uma função  $y = f(x)$  se aproxima de tal forma que, quando se está infinitamente longe da origem, ponto  $(0,0)$ , o gráfico da função tende a “encostar”<sup>22</sup> no gráfico da reta, sem no entanto tocar ou interceptar essa reta.

Existem três tipos de assíntotas: horizontais, verticais e oblíquas. Daremos a seguir uma noção intuitiva das assíntotas verticais e horizontais que são usadas nos gráficos das funções reais estudados no Ensino Médio, não faremos menção às assíntotas oblíquas por não haver aplicação no estudo em questão.

**Assíntotas verticais:** A reta  $x = c$  é uma assíntota vertical do gráfico da função  $f$  se  $f(x)$  tende para  $+\infty$  ou  $-\infty$  quando  $x$  tende a  $c$  pela esquerda ou pela direita.

**Assíntotas horizontais:** A reta  $y = c$  é uma assíntota horizontal do gráfico da função  $f$  se  $f(x)$  tende para  $c$  quando  $x$  tende para  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

No próximo capítulo dessa dissertação, apresentaremos exemplos de atividades com funções que possuem assíntotas.

<sup>21</sup> As definições citadas para assíntotas de uma curva são inferências da autora do que consta no artigo que pode ser obtido em <http://mtm.ufsc.br/~mericles/arquivos/Assintota.PDF>.

<sup>22</sup> A palavra “encostar” não é de uso comum para definir uma assíntota, mas faz grande sentido na explicação do conceito desejado quando em sala de aula.

### 3 CAPÍTULO 3 - APRESENTAÇÃO DE ATIVIDADES SOBRE DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES E SEUS ELEMENTOS ESTRUTURANTES

Neste capítulo, apresentaremos exemplos de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula no sentido de propiciar ao aluno uma melhor compreensão acerca dos elementos estruturantes de uma função que definimos na seção anterior. Conforme o objetivo desta pesquisa: **poderá ser verificado se o estudo das Funções, com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decréscimo, função constante, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função** pode colaborar para que o aluno interprete o gráfico de uma função, seja capaz de caracterizá-la, e se tal metodologia é facilitadora para que o alunos possam construir o gráfico das funções.

Entendemos que uma contribuição para professores de matemática, ou seja, para o ensino de matemática, advinda de um trabalho de um Mestrado Profissional em Matemática possa ser a apresentação de uma estrutura sistemática de aulas e também de atividades de um determinado assunto, além de uma compilação da história e dos conceitos e definições desse mesmo assunto. No nosso caso, o Capítulo 2 faz essa compilação histórico-conceitual. Assim, neste Capítulo 3, pretendemos apresentar uma estrutura de atividades desenvolvidas em aulas já testada para o desenvolvimento do estudo de funções conforme o objetivo desta investigação. Dessa forma, o leitor, interessado na replicação dessas atividades de aulas e no método proposto, poderá consultar os anexos deste trabalho para ter acesso a todo o material que propomos aqui.

As atividades<sup>23</sup> que serão apresentadas a seguir são criações nossa com a equipe de Professores do 1º ano da EPCAR e são passadas aos alunos do 1º ano do CPCAR concomitantemente à transmissão de toda a teoria apresentada no capítulo anterior. À medida que as definições são

---

<sup>23</sup> O leitor interessado na aplicação dessas Atividades pode encontrá-las nos Anexos dessa Dissertação.

apresentadas, algumas das atividades, são passadas aos alunos, ao final de toda a transmissão dos conceitos e definições que embasam a caracterização de uma função com o objetivo de fixar a aprendizagem e verificar a necessidade de intervenções.

Acreditamos e esperamos que uma metodologia de ensino da definição de funções reforçando a caracterização global de uma função, conforme já descrito acima, poderá ser fonte inspiradora para outros professores.

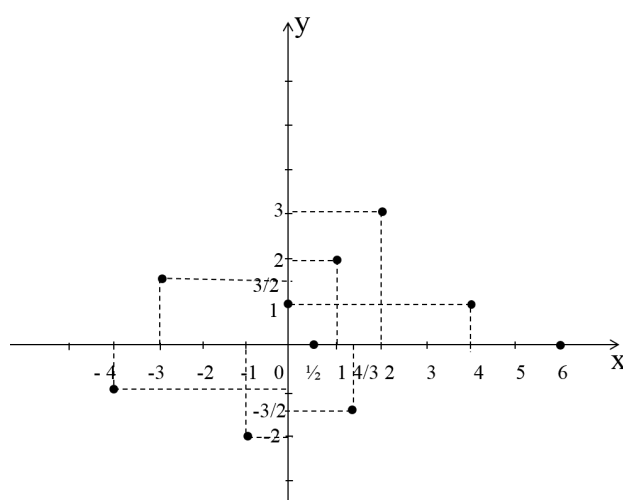
### 3.1 EXEMPLOS DE ATIVIDADES QUE SÃO PASSADAS AOS ALUNOS PARA FIXAÇÃO E COMPREENSÃO DAS DEFINIÇÕES ABORDADAS

#### Atividade 1

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue identificar pelo gráfico o conjunto domínio e o conjunto imagem, máximo e mínimo, sinal e raiz de função que não está definida em intervalos reais e sim definida para um conjunto finito de números reais. É uma oportunidade de fazer com que o aluno compreenda que uma função não deverá ter, necessariamente, uma lei de correspondência (expressão analítica que define a função).

Considere a função real  $f$  de  $A$  em  $B$ , cujo gráfico está indicado abaixo (Figura 33)

Figura 33 - Gráfico de função - Atividade 1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Analise o gráfico de  $f$  e responda ao que se pede:

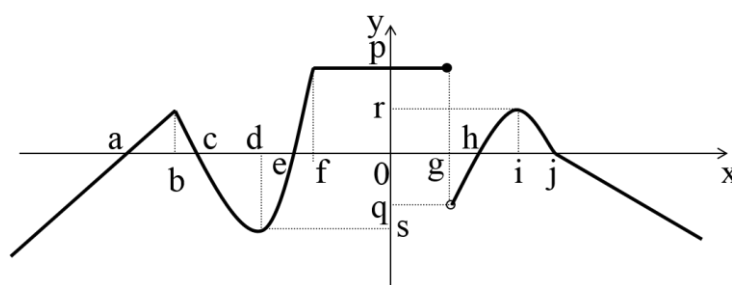
- Qual é o conjunto domínio da função  $f$ ?
- Qual é o conjunto imagem de  $f$ ?
- Para quais valores de  $x$  a função  $f$  é positiva?
- Para quais valores de  $x$  a função  $f$  é negativa?
- Para quais valores de  $x$  a função  $f$  é nula?
- Determine os valores de  $f(0)$ ,  $f(-4)$  e  $f(\frac{1}{2})$ .
- A função  $f$  admite um valor máximo? Em caso afirmativo, determine esse valor.
- A função  $f$  admite um valor mínimo? Em caso afirmativo, determine esse valor.

### Atividade 2

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue identificar pelo gráfico de uma função real o conjunto de valores de  $x$  para os quais uma função é crescente, decrescente, constante, nula (raiz), positiva, negativa. Pretende-se identificar também o conjunto imagem da função e a imagem em um intervalo restrito do domínio. É uma oportunidade de fazer com que o aluno compreenda que uma função poderá ser definida por mais de uma sentença.

Considere a função real  $F$ , cujo gráfico está indicado abaixo (Figura 34)

Figura 34 - Gráfico da função  $F$  - Atividade 2



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Determine:

- O conjunto de valores de  $x$  para os quais a função  $F$  é
  - crescente:
  - decrescente:

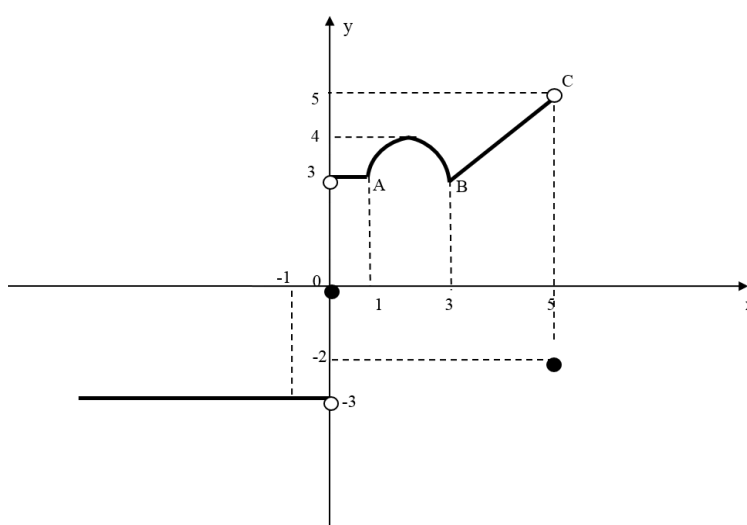
- c) constante:
- d) positiva:
- e) negativa:
- f) nula:
- 2) O conjunto imagem de  $F$ :
- 3) O(s) valor(es) de  $x$  para os quais  $F(x) = p$

### Atividade 3

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue identificar pelo gráfico de uma função real o conjunto de valores de  $x$  para os quais uma função é crescente, decrescente, constante, nula (raiz), positiva, negativa, identificar também o conjunto domínio e o conjunto imagem de uma função, imagem de um elemento do domínio, a imagem em um intervalo restrito do domínio e o valor máximo de uma função num intervalo definido. É uma oportunidade de fazer com que o aluno compreenda que uma função poderá ser definida por mais de uma sentença e também poderá admitir saltos e furos no gráfico. Pode-se também falar de continuidade de funções de forma intuitiva.

Considere a função real  $h$ , cujo gráfico está indicado abaixo (Figura 35). Considere que  $AB$  é uma semicircunferência.

Figura 35 - Gráfico de função - Atividade 3



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Analise o gráfico da função real  $h$  e determine:

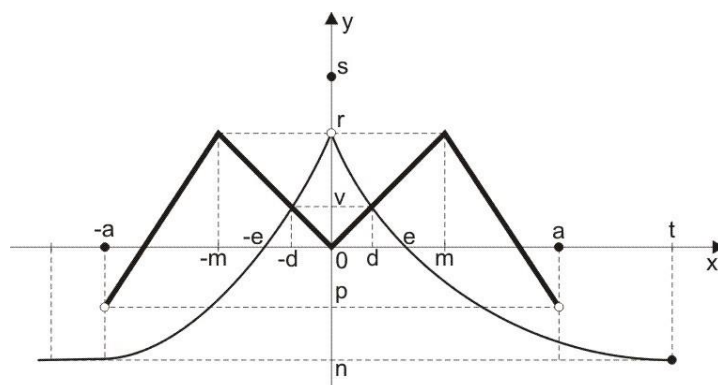
- a) O domínio de  $h$
- b) O conjunto imagem de  $h$
- c) O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é constante.
- d) O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é crescente.
- e) O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é decrescente.
- f) O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é positiva.
- g) O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é negativa.
- h) A(s) raiz(es) de  $h$
- i) O valor de  $h(5)$
- j) O(s) valor(es) de  $x$  para os quais  $h(x) = -3$
- k) O ponto de máximo de  $h$  no intervalo  $]-\infty, 3]$

#### Atividade 4

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue identificar gráfico de diferentes funções esboçados num mesmo plano cartesiano a partir da interpretação de características pré-determinadas. Também pretende-se verificar se o aluno consegue identificar pelo gráfico de função real o conjunto de valores de  $x$  para os quais uma função é nula (raiz), o conjunto imagem da função e a imagem de um elemento do domínio, assim como valores máximos e mínimos e também comparar funções graficamente.

Considere, num mesmo plano cartesiano, os gráficos abaixo (Figura 36) das funções reais  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ . Sabe-se que  $g(-a) < f(-a)$ ;  $g(0) > f(0)$ ;  $g(a) < f(a)$  e  $g(x) = n \forall x \leq -a$

Figura 36 - Gráficos das funções f e g - Atividade 4



Fonte: Elaborado pelo próprio autor<sup>24</sup>

Analise os gráficos das funções f e g e identifique, nos gráficos, qual é o gráfico de f e qual é o gráfico de g. Em seguida, determine:

- $\text{Im}(g)$
- o conjunto de valores de x para os quais  $g(x) = 0$
- $g(0)$
- $f(0)$
- o valor máximo da função g
- o ponto em que a função g admite valor máximo
- o domínio da função f
- o conjunto de valores de x para os quais  $f(x) > g(x)$
- considerando que  $x \in [-m, m]$ , o valor mínimo de f

### Atividade 5

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue identificar gráfico de diferentes funções esboçados num mesmo plano cartesiano a partir da interpretação de características pré-determinadas. Também pretende-se verificar se o aluno consegue resolver graficamente inequações

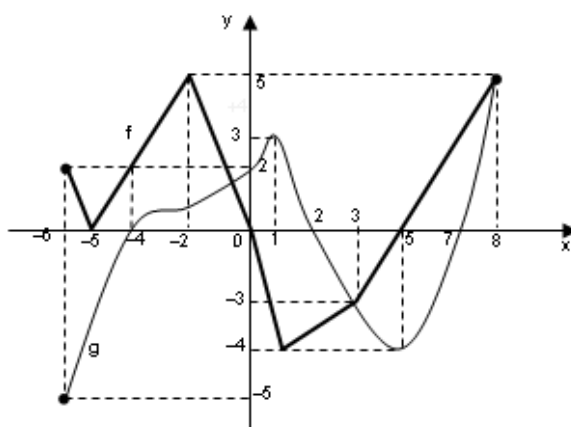
<sup>24</sup> Este gráfico é de uma questão do concurso da AFA 2014. A Banca de elaboração das questões dos concursos da AFA são compostas por professores da EPCAR, inclusive pela autora dessa dissertação e este gráfico é de uma questão elaborada pela própria autora.



produto/quociente e determinar o domínio de uma função que será determinada pelo quociente das duas funções que foram indicadas pelos respectivos gráficos e não pelas leis de correspondências.

Na figura abaixo (Figura 37) estão representados os gráficos das funções reais  $f: [-6, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: [-6, 8] \rightarrow \mathbb{R}$

Figura 37 - Gráfico de função - Atividade 5



Fonte: Elaborado pelos professores do 1º ano do CPCAR 2016

Determine o conjunto de valores de  $x$  para os quais

a)  $f(x)g(x) \geq 0$ <sup>25</sup>

b) a função  $h$  definida por  $h(x) = \sqrt{-\frac{[f(x)]^2}{g(x)}}$  está definida

### Atividade 6

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue, dado o gráfico de uma função real  $g$ , esboçar gráfico de uma função real  $h$  que foi definida considerando operações com a função  $g$ , sem encontrar a lei de correspondência de  $g$ . O esboço do gráfico de  $h$  deverá ser feito analisando o gráfico de  $g$  e a lei da função  $h$  que é dada por operações com a função  $g$ . Neste tipo de atividade, o aluno também deverá compreender bem o valor absoluto de um número real e associá-lo às funções em  $\mathbb{R}$ .

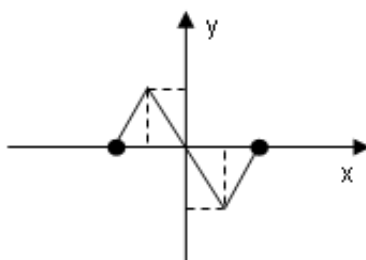
<sup>25</sup> Resolução de inequação produto e quociente graficamente.

Para que o aluno consiga esboçar o gráfico com mais facilidade, sugere-se os seguintes passos:

- 1) esboçar o gráfico do valor absoluto de  $g$ ;
- 2) esboçar o gráfico da subtração  $y = g(x) - |g(x)|$ ;
- 3) esboçar o gráfico de  $y = \frac{g(x) - |g(x)|}{2}$  e, por fim,
- 4) fazer a translação de duas unidades no eixo  $Oy$ , obtendo o esboço do gráfico da função  $h$ .

Seja a função real  $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo conjunto imagem é  $\text{Im} = [-2, 2]$  e cujo gráfico está esboçado abaixo (Figura 38)

Figura 38 - Gráfico de função - Atividade 6



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Considere a função  $h: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x) = \frac{g(x) - |g(x)|}{2} + 2$$

Determine um esboço do gráfico que representa a função  $h$

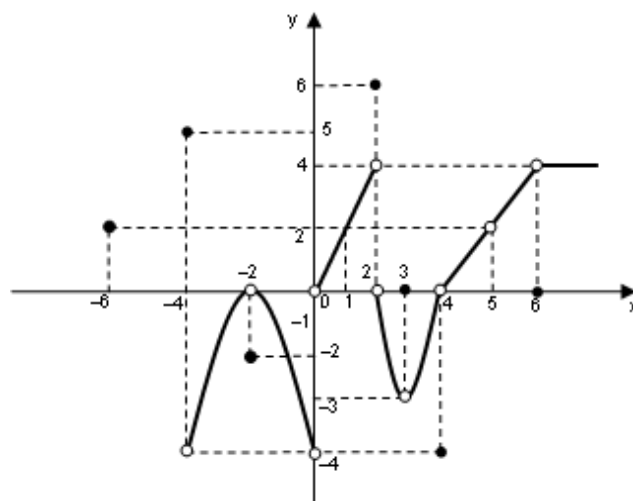
### Atividade 7

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue identificar que o conjunto  $A$  referido na alternativa a) dos questionamentos representa o conjunto domínio da função  $f$ . Também pretende-se identificar graficamente o conjunto domínio analisando o gráfico, o(s) intervalo(s) de crescimento, a quantidade de raízes, a imagem em um o intervalo restrito do domínio,

sabendo interpretar o símbolo de, se e somente se, o valor mínimo de uma função e imagem de um elemento.

Considere o gráfico abaixo (Figura 39), da função real  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Figura 39 - Gráfico de função - Atividade 7



Fonte: Elaborado pelos professores do 1º ano do CPCAR 2016

Analise as proposições abaixo e escreva, para cada uma delas, V para verdadeiro ou F para falso. Para as afirmativas falsas, reescrevas, por completo, corrigindo a sentença matemática que estiver em desacordo.

- O conjunto  $A$  é dado por  $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4 \text{ ou } x = -6 \}$
- $f$  é crescente se  $x \in ]4, 5[$
- $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [1, 3[ \cup ]5, 6[$
- A função  $f$  se anula para apenas dois valores distintos de  $x$ .
- A função  $f$  não admite um valor mínimo.
- Não existe  $y$  pertencente a  $\mathbb{R}$  tal que  $x = 2$

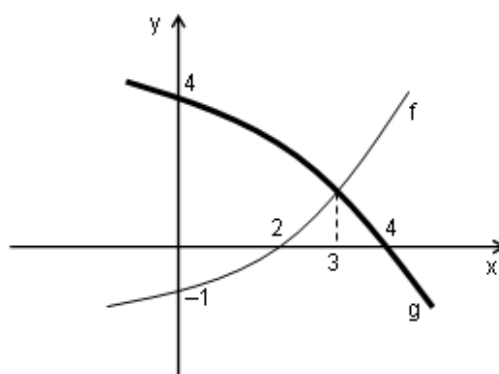
### Atividade 8

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue comparar graficamente funções reais (alternativas a e b dos questionamentos), obter o gráfico da uma função que é a oposta de uma função dada fazendo o

rebatimento da função em relação ao eixo das abscissas (alternativa b dos questionamentos), relacionar domínio e imagem de uma função em intervalos definidos (alternativa c dos questionamentos), fazer translações de gráficos (alternativa c dos questionamentos), resolver inequações produto graficamente sem recorrer a processos algébricos e sem se preocupar em encontrar a lei de correspondência da função (alternativa d dos questionamentos).

Na figura abaixo (Figura 40) estão representados os gráficos das funções reais, de variável real, **f** e **g**.

Figura 40 - Gráfico de função - Atividade 8



**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor

Analise as proposições abaixo e escreva, para cada uma delas, V para verdadeiro ou F para falso, justificando sua resposta.

- a) (\_\_\_)  $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]3, +\infty[$
- b) (\_\_\_)  $f(x) + g(x) < 0$  para todo  $x \in ]-\infty, 3[$
- c) (\_\_\_)  $f(x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 0]$
- d) (\_\_\_) A função  $h$  definida por  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x) \cdot g(x)}}$  está definida somente se  $x \in [3, 4[$

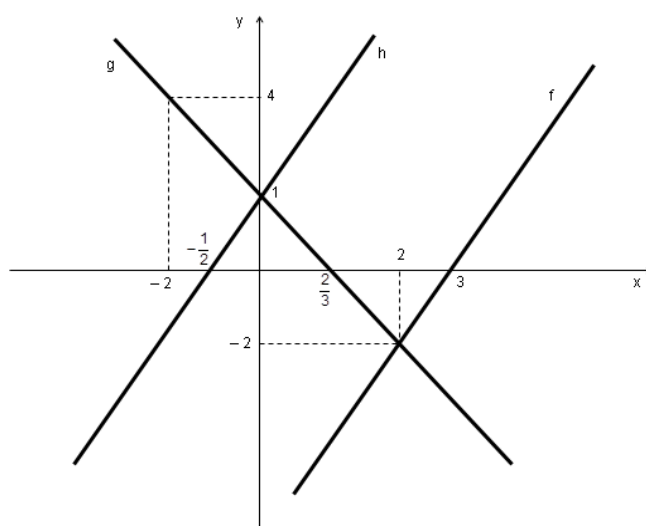
### Atividade 9<sup>26</sup>

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue comparar graficamente funções reais, resolver graficamente inequações (alternativas a, b, c e h do item 01 abaixo), resolver inequações, inequações produto e quociente graficamente sem recorrer a processos algébricos e sem se preocupar em encontrar a lei de correspondência da função, embora o aluno tenha condições de obter as leis de correspondências das funções dadas (alternativas d, e, f e g do item 01). Pretende-se também verificar se o aluno consegue resolver inequações simultâneas graficamente (alternativas a, b e c do item 02 – p. 80).

Uma boa opção para garantir que o aluno faça a análise somente gráfica e não algébrica é trocar os valores numéricos de domínio e imagem indicados nos gráficos por letras do nosso alfabeto.

01) Na Figura 41 abaixo estão representados os gráficos das funções reais, de variável real, f, g e h.

Figura 41 - Gráfico das funções f, g e h – Atividade 9



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

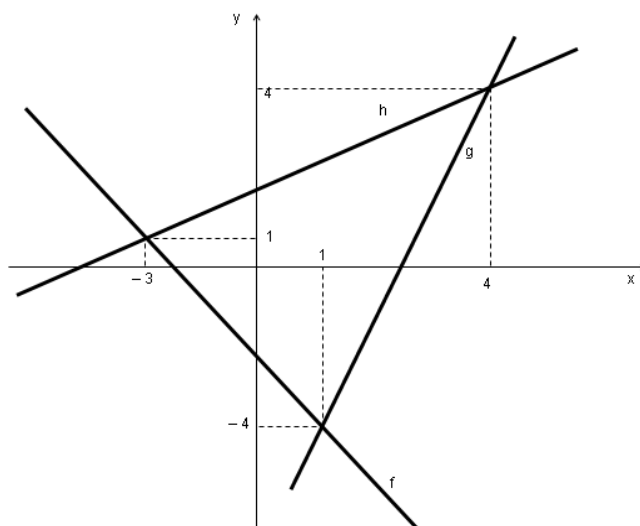
<sup>26</sup> Neste tipo de atividade sugere-se que o aluno resolva graficamente.

Se  $h // f$ , determine os valores de  $x \in \mathbb{R}$ , tais que:

- a)  $f(x) > g(x)$
- b)  $g(x) \leq h(x)$
- c)  $f(x) \geq h(x)$
- d)  $g(x) > 4$
- e)  $f(x) \leq 0$
- f)  $[f(x)] \cdot [g(x)] \leq 0$
- g)  $\frac{h(x)}{g(x)} \geq 0$
- h)  $h(x) \geq f(x)$

02) Com base nos gráficos das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  definidas em  $\mathbb{R}$  (Figura 42), determine os valores de  $x \in \mathbb{R}$ , tais que:

Figura 42 - Gráfico das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  – Atividade 9



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- a)  $f(x) < g(x) \leq h(x)$
- b)  $g(x) \leq f(x) < h(x)$
- c)  $h(x) \leq f(x) < g(x)$

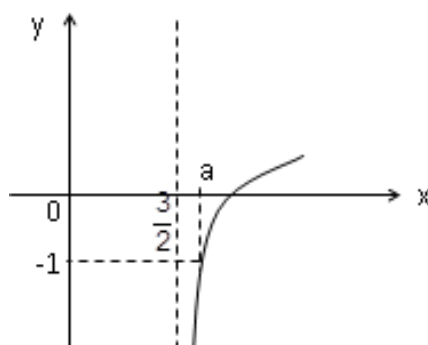
### Atividade 10

Nesta atividade, pretende-se verificar se o aluno consegue compreender o que é uma assíntota e a importância de uma assíntota no gráfico de uma função, também verificar se o aluno consegue interpretar o que representa um ponto pertencer ao gráfico de uma função.

É uma atividade que deverá ser aplicada quando o aluno tiver conhecimento de função inversa e também funções exponencial e logarítmica.

Se o gráfico abaixo (Figura 43) representa a função inversa da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{a}{b} + 2^x$ , então determine o valor de  $a - b$

Figura 43 - Gráfico das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  – Atividade 10



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Com a apresentação das atividades acima, entendemos que podemos contribuir de alguma maneira para uma reflexão dos docentes do Ensino Médio no sentido de procurarem aprofundar a apresentação dos conteúdos de definição de função, assim como dos elementos estruturantes que caracterizam uma função.

Nossa prática em sala de aula tem nos mostrado que esta conduta facilita a apresentação das funções por famílias: afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométricas e também prepara o aluno para esboçar gráficos de funções sem usar somente tabelas de valores, tendo uma

interpretação mais adequada e efetiva do gráfico das funções pelas suas características.

Com essas dez atividades, acreditamos que poderemos inspirar os professores de Ensino Médio no sentido de ousarem mais além das atividades propostas nos livros didáticos e criarem atividades que tendam a uma apresentação mais ampla dos conceitos apresentados anteriormente.

Dessa forma, encerramos com essa seção nossa contribuição direta para a formatação e formalização de aulas de função com vistas ao nosso objetivo de pesquisa. No próximo capítulo, descreveremos os processos metodológicos percorridos para levantamento de evidências que podem embasar nossas hipóteses.



## 4 CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA

### 4.1 Modalidade da Pesquisa

Com o intuito de responder as questões da pesquisa, optou-se pela proposta metodológica que consistiu em uma investigação de cunho qualitativo, amparada nos moldes de uma pesquisa descritiva. Segundo Rudio (1991) [32], a pesquisa descritiva procura “descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los.” (p. 56). Para esse autor, os dados obtidos pelo pesquisador devem ser analisados e interpretados.

Nessa perspectiva, acrescenta Rampazzo (2004) [26] que

toda pesquisa descritiva observa, registra, analisa e correlaciona fatos ou fenômenos (...), sem manipulá-los; estuda fatos e fenômenos (...) e, especialmente do mundo humano, sem a interferência do pesquisador (p. 55).

Esse mesmo autor destaca também algumas das diversas formas que a pesquisa descritiva pode assumir. Seguindo essa vertente, optou-se por realizar um estudo descritivo que analise e descreva as características, propriedades e relações existentes nas comunidades pesquisadas.

Colaborando com a opção da pesquisa descritiva, destacamos novamente Rampazzo (2004) [26]. Ele aponta que a pesquisa descritiva busca “descobrir” (p. 55) a frequência com que o fato ocorre, sua relação e conexão com outros fatos, bem como procura conhecer os diversos aspectos do comportamento humano, do indivíduo em si, “como de grupos e comunidades mais complexas” (p.55). Assim, o estudo descritivo favorece as tarefas da formulação clara dos problemas e da hipótese como tentativa de solução (p.56).

Para dar maior credibilidade à pesquisa, percebemos a necessidade de interpretar, qualitativamente, as opiniões e informações dos membros das comunidades: EPCAR e UFSJ que estariam envolvidos na coleta de dados. Tivemos como objetivo classificar e organizar os dados obtidos, bem como analisar, melhor compreender e descrever o que os sujeitos pesquisados

relatam. Optamos, então, por realizar uma pesquisa descritiva de cunho qualitativo tendo como auxílio alguns dados gráficos e numéricos para assim obter um panorama amplo que confirmasse nossos objetivos da pesquisa.

## 4.2 Instrumentos de coleta de dados

Utilizamos-nos de questionários como instrumentos de coletas de dados. Optou-se pelo questionário de perguntas objetivas e subjetivas. Segundo Rampazzo (2004) [26], a combinação dessas respostas possibilita mais informações sobre o assunto.

Para a coleta de dados com os alunos da EPCAR e da UFSJ, aplicamos questionários denominados, respectivamente, Questionário aos Alunos da EPCAR (QA) e Questionário aos Alunos da UFSJ (QAS). Também utilizamos de questionários para coletar os dados com os professores da EPCAR e da UFSJ, denominados, respectivamente, Questionário aos Professores da EPCAR (QPE) e Questionário aos Professores da UFSJ (QPES)<sup>27</sup>.

## 4.3 Rotina de aplicação dos instrumentos de coleta de dados

No Quadro 6 abaixo será apresentada, em linhas gerais, a rotina empreendida para a aplicação dos instrumentos de coletas de dados.

Quadro 6 - Rotina de aplicação dos instrumentos de coletas de dados

PERÍODO	ATIVIDADE
Final do mês de junho de 2016	Encaminhamento do documento de pedido de autorização para realização da pesquisa, ao então Comandante da EPCAR. <sup>28</sup>
Julho de 2016	Realização do convite aos professores da EPCAR para participarem da pesquisa e preencherem o QPE. <sup>29</sup>

<sup>27</sup> Os referidos questionários constam do Apêndice desta pesquisa.

<sup>28</sup> O modelo do documento assinado pelo então Comandante da EPCAR consta do Apêndice desta pesquisa.

Julho de 2016	Convite aos alunos da EPCAR para participarem da pesquisa, explicando os objetivos da pesquisa e entrega dos termos de consentimento <sup>30</sup> .
Julho de 2016	Aplicação do questionário aos alunos do CPCAR <sup>31</sup>
Setembro de 2016	Encaminhamento do documento de pedido de autorização para realização da pesquisa, aos coordenadores dos cursos de Engenharia Mecânica e Ciências da Computação <sup>32</sup> .
Setembro de 2016	Realização do convite aos professores da UFSJ para participarem da pesquisa e preencherem o QPES <sup>33</sup> .
Outubro de 2016	Convite aos alunos da UFSJ para participarem da pesquisa, explicando os objetivos da pesquisa e entrega dos termos de consentimento <sup>34</sup> .
Outubro de 2016	Aplicação do questionário aos alunos da UFSJ.

#### 4.4 Os sujeitos da pesquisa

Na pesquisa foram envolvidos: alguns alunos do 1º ano do CPCAR 2016, alguns alunos dos cursos de Ciências da Computação e de Engenharia Mecânica da UFSJ, professores de matemática da EPCAR que ministram ou já

<sup>29</sup> Neste momento foi entregue aos professores da EPCAR que ministram ou já ministraram aula no 1º ano do CPCAR o termo de livre consentimento para assinatura que consta do Apêndice desta pesquisa, assim como o questionário QPE para que pudessem fazer o preenchimento.

<sup>30</sup> O convite foi feito a três turmas do 1º ano do CPCAR (turmas A, D e E). O número total de turma do 1º ano em 2016 foi de 7. A escolha pelas turmas foi aleatória e, como eu também ministrava aulas para o 1º ano do CPCAR, optou-se por não escolher nenhuma das turmas em que eu lecionava. O total de alunos pesquisados foi 75 de um universo de 172 alunos matriculados na referida série até a data da aplicação do questionário. Todos os alunos das turmas A, D e E aceitaram participar da pesquisa.

<sup>31</sup> O questionário QA foi aplicado no dia da Avaliação de Matemática do 2º trimestre na parte da tarde, momento em que os alunos estavam em horário reservado para estudo obrigatório.

<sup>32</sup> O modelo do documento assinado pelos então Coordenadores dos cursos de Engenharia Mecânica e Ciências da Computação da UFSJ consta do Apêndice dessa pesquisa.

<sup>33</sup> Neste momento, foi entregue a 5 professores de Cálculo da UFSJ o termo de livre consentimento para assinatura que consta do Apêndice desta pesquisa, assim como o questionário QPES para que pudessem fazer o preenchimento.

<sup>34</sup> Optou-se por realizar a pesquisa com alunos de Cálculo I do curso de Ciências da Computação e de Engenharia Mecânica do segundo semestre de 2016, conforme já mencionado anteriormente. No dia em que foi aplicado os questionários a ambos os cursos, todos os alunos presentes na aula de Cálculo I aceitaram preencher o questionário.

ministraram aula de matemática no 1º ano do CPCAR, alguns professores da UFSJ que ministram ou já ministraram aula de Cálculo I nos cursos da UFSJ.

Consideramos que os alunos e professores de ambas as instituições são colaboradores/descriitores/relatores envolvidos relativamente ao tema e objetivos propostos na pesquisa que auxiliam para que nossas impressões e questionamentos sobre o tema proposto sejam respondidos.

#### **4.5 Descrição dos instrumentos de obtenção de dados**

Tendo como foco o objetivo da pesquisa, pretendíamos que os instrumentos de coleta de dados, quais sejam, os questionários QA, QAS, QPE e QPES nos fornecessem todas as possíveis informações necessárias para alcançarmos o êxito desejado com a pesquisa. Para isso, pesquisamos em materiais como livros, artigos e dissertações os instrumentos que poderiam ser usados e ou adaptados à nossa realidade de pesquisa tendo sempre como referência o tema proposto. Também criamos perguntas para os questionários que pudessem responder nossas questões da pesquisa.

O QA é composto de 14 questões cujo objetivo foi verificar se, na percepção de aluno do CPCAR, a metodologia que os professores de matemática da EPCAR usam para apresentar a definição de função - notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função, é facilitadora para que o aluno possa compreender tais aspectos, interpretando o gráfico de uma função e se, com essa metodologia, o aluno torna-se mais bem preparado para esboçar gráficos de funções e caracterizá-las.

O QPE possui 11 questões cujo objetivo foi verificar se, na percepção de professor, a metodologia que a equipe de matemática da EPCAR usa para apresentar a definição de função - notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função -, é facilitadora para que o aluno possa compreender tais aspectos, interpretando o gráfico de uma função e se, com essa metodologia, o aluno torna-se mais

bem preparado para esboçar gráficos de funções e caracterizá-las. Além disso, se a referida metodologia poderá embasar e auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingressar num curso superior que tenha a disciplina de Cálculo possa acompanhar com mais facilidade tal disciplina.

Já o QAS e o QPES foram elaborados com, respectivamente, 14 e 10 questões. O objetivo de ambos foi verificar se há deficiência (ou não) dos alunos na disciplina de Cálculo I, bem como se há dificuldades do estudo das funções na percepção dos próprios alunos e professores, oriundas de deficiência nesse assunto que foi ministrado no Ensino Médio.

No QA e no QPE, assim como no QAS e QPES foram repetidas e ou adaptadas algumas perguntas com o intuito de cruzar as informações fornecidas pelos alunos e professores de cada uma das comunidades, EPCAR e UFSJ.

#### **4.6 A Estratégia de Análise dos dados**

Depois de realizada a coleta de dados e as transcrições das respostas dos questionários, fizemos uma pré-análise de todo o material obtido, buscando encontrar e selecionar o que de mais relevante havíamos obtido para fazer uma análise clara e condizente com nossos objetivos da pesquisa.

No próximo capítulo, apresentaremos a análise dos dados coletados. Essa análise foi dividida em três fases: (I) análise descritiva e qualitativa com auxílio de gráficos e quadros para compreender o QA, o QPE, o QAS e o QPES; (II) Cruzamento das opiniões dos alunos e professores da EPCAR nas perguntas que se repetiram no QA e QPE e (III) Cruzamento das opiniões dos alunos e professores da UFSJ nas perguntas que se repetiram no QAS e QPES.

Nessa análise, o símbolo (...) indica que parte de uma fala foi omitida das transcrições. Se a transcrição for fiel ao que lemos dos questionários, elas serão escritas com a fonte em *itálico*. Já as nossas falas e comentários serão escritos entre colchetes [ ].

## **5 CAPÍTULO 5 - ANÁLISE E DISCUSSÃO**

Durante a pesquisa de campo, entendemos que uma melhor maneira para apresentação dos dados obtidos, com a finalidade de mostrar à comunidade científica os nossos resultados de pesquisa acerca de nossos objetivos com a maior clareza possível, seria, como esclarecemos no final do capítulo anterior, apresentar tais dados em três fases distintas.

### **5.1 PRIMEIRA FASE**

#### **5.1.1 Análise descritiva e qualitativa com auxílio de gráficos e quadros para compreender o QA**

Após uma leitura criteriosa dos dados fornecidos pelo QA, destacamos alguns pontos importantes que, no nosso entendimento, responderam questionamentos da pesquisa. É importante esclarecer que, em algumas análises de resultados do QA, separamos os alunos da EPCAR em dois grupos, a saber:

- GRUPO 1 (G1) - Alunos que estão cursando o 1º ano do Ensino Médio pela primeira vez.
- GRUPO 2 (G2) - Alunos que já haviam cursado o 1º ano do Ensino Médio.

Acreditamos que fosse importante observar os alunos nos grupos G1 e G2 para que pudéssemos ter uma análise mais completa e condizente com nossos objetivos. Dessa forma, acreditávamos que fosse possível perceber o alcance da metodologia utilizada para apresentar a definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função.

Durante nosso desenvolvimento na análise dos dados, entendemos que algumas das respostas poderiam ser tabuladas e apresentadas de forma gráfica. Assim sendo, omitimos a fonte dos gráficos colocados nessa seção, uma vez que todos são de elaboração própria da pesquisadora.

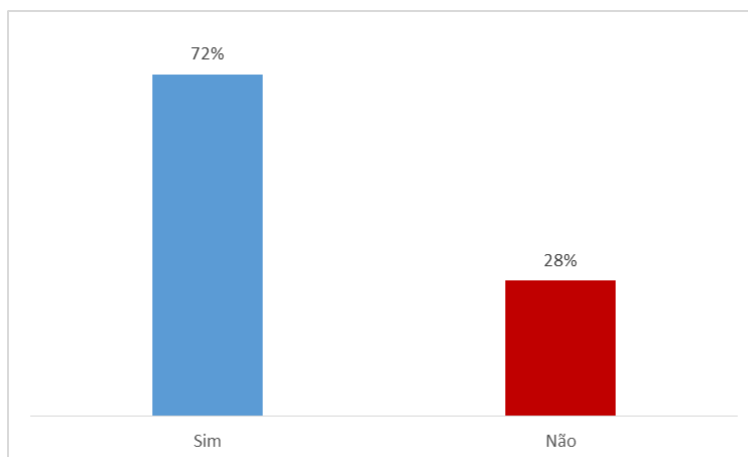
Na primeira pergunta do QA, buscamos saber quais dos alunos estavam cursando o 1º ano do ensino médio pela primeira vez. Dos 75 alunos que

preencheram o questionário 14 (19%) estavam cursando o 1º ano do Ensino Médio pela primeira vez e 61 (81%) já haviam cursado o 1º ano do Ensino Médio<sup>35</sup>.

A segunda pergunta do QA dizia: “Durante quase toda sua vida escolar, você teve a disciplina de Matemática. Se você tivesse a chance de escolher as disciplinas que fosse estudar, você escolheria Matemática?” Somente 3 (4%) dos 75 alunos responderam que **não** escolheriam e 72 (96%) responderam **sim**. Os que responderam não são alunos do G2. As respostas a essa pergunta já nos indicam que os alunos do CPCAR têm afinidade com a disciplina de Matemática, o que de certa forma, por percepção própria, facilita o trabalho em sala de aula.

Com relação à terceira pergunta do QA: “Você teve no seu currículo nos anos anteriores o conteúdo de definições de funções e elementos estruturantes das funções, conforme descrito acima?” As respostas podem ser verificadas pelo Gráfico 1 abaixo.

Gráfico 1 - Respostas à pergunta 3 do QA: “Você teve no seu currículo nos anos anteriores o conteúdo de definições de funções e elementos estruturantes das funções, conforme descrito acima?”



Do G1, 9 alunos responderam **sim**, 4 alunos responderam **não** e 1 aluno escreveu **poucos deles**, embora não tivesse essa opção de resposta. Em contrapartida, do G2, 44 alunos responderam **sim** e 17 responderam **não**.

<sup>35</sup> Dessa forma, tem-se 14 alunos do G1 e 61 alunos do G2.

Na quarta e quinta perguntas do QA que diziam, respectivamente: “Que importância você atribuía ao estudo de funções antes de ser aluno na EPCAR?” e “Após este período de quase seis meses estudando este assunto, como você considera o estudo de funções?” obtivemos o resultado explicitado nos Gráficos 2 e 3 abaixo.

Gráfico 2 - Respostas à pergunta 4 do QA: “Que importância você atribuía ao estudo de funções antes de ser aluno na EPCAR?”

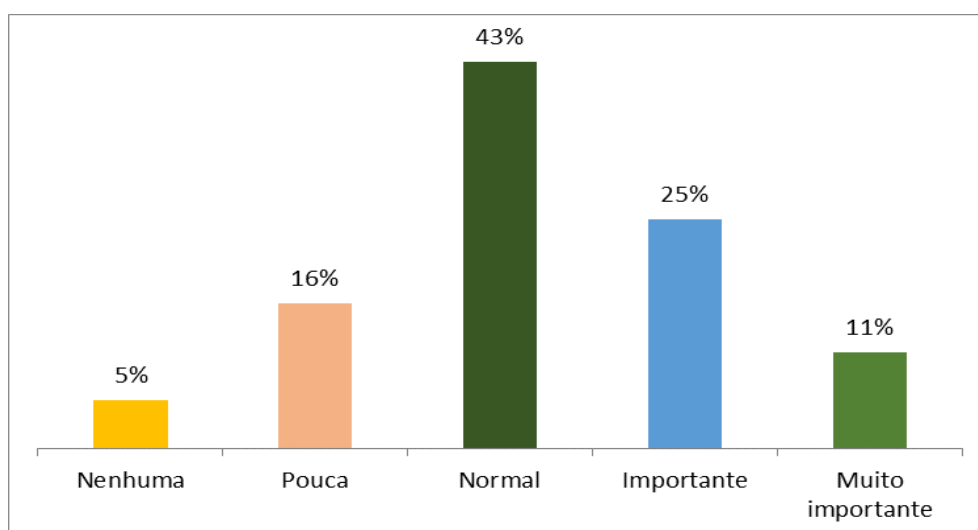
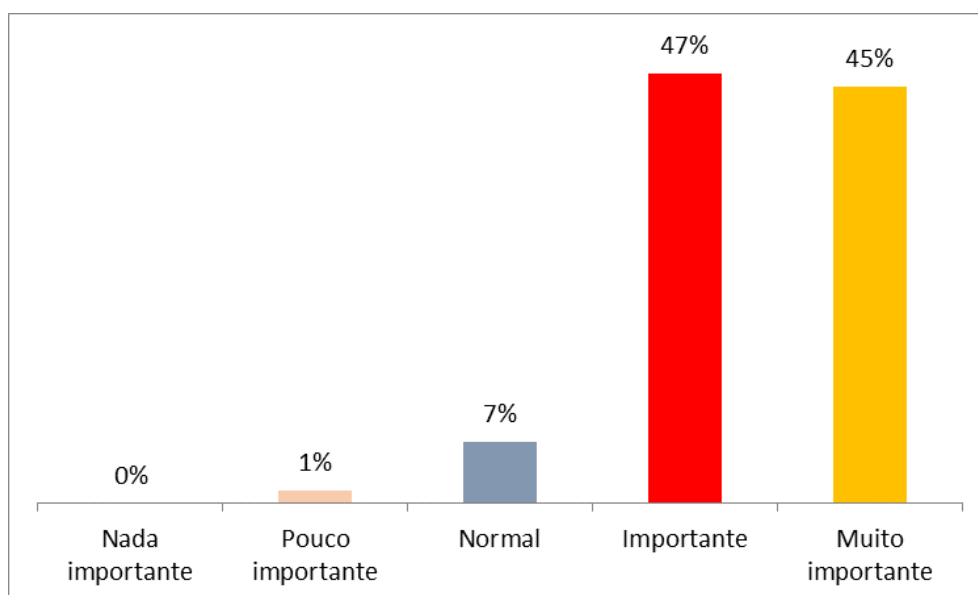


Gráfico 3 - Respostas à pergunta 5 do QA: “Após este período de quase seis meses estudando este assunto, como você considera o estudo de funções?”





Nota-se pela análise dos Gráficos 2 e 3 que houve uma considerável mudança de opinião dos alunos em relação à importância que davam ao estudo de funções com a importância que atualmente dão.

Em relação à pergunta 4, dos alunos do G1, 12 davam pouca importância ao estudo de funções, 32 julgavam que era normal, 19 consideravam importante e somente 8 entendiam como muito importante. Dos alunos do G2, 4 alunos marcaram que não davam nenhuma importância, 11 assinalaram pouca, 25 consideravam normal, 16 importante e 5 muito importante.

As respostas à pergunta 5, considerando o G1, foram que: 1 aluno considera pouco importante o estudo de funções, também 1 aluno considera normal, 2 alunos importante e 11 alunos assinalaram muito importante. Em relação aos alunos do G2, 1 aluno considera pouco importante o estudo de funções depois desse seis meses de estudo, 4 assinalaram normal, 33 alunos consideraram importante e 23 alunos muito importante.

Em ambos os grupos, G1 e G2, percebe-se a mudança de opinião em relação à importância dada ao ensino de funções, após seis meses de estudo na EPCAR. Pelo Gráfico 3, observamos que 92% dos 75 alunos consideraram importante ou muito importante o assunto, enquanto que antes de ingressar na EPCAR a maioria considerava normal, nada importante ou pouco importante o estudo.

Nos Quadros 7 e 8 abaixo destacamos, dos 75 alunos, alguns depoimentos com relação à atribuição de valor que eles deram às perguntas 4 e 5<sup>36</sup>. Em cada depoimento indicaremos ao final qual foi a marcação realizada pelo aluno com relação às perguntas 4 e 5. No Quadro 7 apresentamos os depoimentos dos alunos do G1 e, no Quadro 8, os depoimentos dos alunos do G2.

---

<sup>36</sup> A partir desse momento faremos referência aos alunos da EPCAR envolvidos na pesquisa por A01, A02, A03, ..., A75 com o fim de preservar suas identidades.

Quadro 7 - G1: Justificativa da atribuição dada às perguntas 4 e 5 do QA

DEPOIMENTOS/ATRIBUIÇÃO DADA ÀS PERGUNTAS 4 E 5, REPECTIVAMENTE - G1	ALUNO
<p><i>Funções fazem parte do nosso dia a dia, e nos ajudam a entender certos mecanismos (ex: lucro), são a base de outros conteúdos de igual importância. Nos ajuda a desenvolver nosso raciocínio e perceber mais detalhes.</i></p> <p><b>Importante/Muito importante</b></p>	A01
<p><i>Antes de entrar na EPCAR, eu não conseguia, por exemplo, reconhecer o que é realmente domínio, contradomínio e imagem e sempre errava as questões deste assunto. Porém, aqui eu consegui visualizar que aquela reta que eu traçava nos gráficos significava uma relação entre x e y. Agora as funções demonstram todas as relações de duas incógnitas e, quando releio as questões que eu errava percebo o quanto eram fáceis.</i></p> <p><b>Importante/Muito importante</b></p>	A03
<p><i>Na EPCAR, o estudo de funções se tornou mais complexo e com mais detalhes, o que me ajudou a desenvolver melhor meus conhecimentos.</i></p> <p><b>Normal/Importante</b></p>	A05
<p><i>Antes de entrar na EPCAR, eu estudava funções de maneira superficial. Hoje eu sei e entendo sua importância.</i></p> <p><b>Normal/Muito importante</b></p>	A06
<p><i>Antes de ingressar no CPCAR, não possuía o hábito de praticar o estudo de funções como acontece hoje em dia.</i></p> <p><b>Pouca/Muito importante</b></p>	A11
<p><i>Antes de ingressar na EPCAR, o assunto funções era como qualquer outro, possuía sua importância curricular de ser um assunto base para vários outros. Após minha entrada na EPCAR, percebi que função é a base para todo o estudo de Cálculo e por isso sua importância é ainda maior.</i></p> <p><b>Importante/Muito importante</b></p>	A14

Quadro 8 – G2: Justificativa da atribuição dada às perguntas 4 e 5 do QA

DEPOIMENTOS/ATRIBUIÇÃO DADA ÀS PERGUNTAS 4 E 5, REPECTIVAMENTE – G2	ALUNO
<i>Não gostava de estudar função antes de ser aluno da EPCAR. Aprendi a gostar e dar relevância ao assunto</i> <b>Pouca/ importante</b>	<b>A22</b>
<i>Nas escolas em que estudei função, exceto a EPCAR, esse assunto não foi tratado de forma aprofundada, apenas “fazia porque fazia e não sabia o porquê de fazer”. Porém, aqui na escola, o estudo das funções é aprofundado e aplicado, logo, eu não apenas faço, eu entendo, por isso, agora, sou capaz de aplicá-lo na realidade, fora dos papéis.</i> <b>Nenhuma/Importante</b>	<b>A23</b>
<i>Antes de eu ser aluno da EPCAR, o estudo de funções era uma parte indiferente das outras dentro da matemática, todavia, depois de seis meses estudando função de uma forma consideravelmente mais aprofundada e com questões e análises bem mais elaboradas, percebo que o estudo de funções ganha um certo destaque mediante outras matérias</i> <b>Normal/Importante</b>	<b>A25</b>
<i>Depois de estudar na EPCAR, eu aprendi o quanto é importante ter uma boa compreensão de funções, pois elas estão, de certa forma, interligadas com diversos outros assuntos matemáticos e pode ser um instrumento de compreensão e resolução de diversos problemas</i> <b>Normal/Muito Importante.</b>	<b>A29</b>
<i>Antes de entrar para a EPCAR, eu via o estudo de funções como apenas uma matéria para passar no concurso, agora, vejo a sua importância que terá mais para frente em minha vida acadêmica, principalmente nos campos da física e matemática</i> <b>Normal/Muito Importante</b>	<b>A30</b>
<i>Eu não sabia o que realmente era função e duvidava da importância. Portanto, a partir do momento que há uma melhor preparação, como aqui na EPCAR, vejo maior importância.</i> <b>Pouca/Importante</b>	<b>A33</b>
<i>Antes de estudar na EPCAR, tinha muita dificuldade e negligenciava função por não saber sua importância. Atualmente, após várias aulas sobre o assunto, sei a importância por conta do aprofundamento da matéria.</i> <b>Normal/Muito Importante</b>	<b>A43</b>

<p><i>Pelo fato de estar cursando o 1º ano do ensino médio pela segunda vez, já sabia da importância do estudo de funções, após esse período como aluno do CPCAR, com essa metodologia, me senti mais preparado e comecei a valorizar mais os detalhes que deixam a função melhor definida</i></p> <p><b>Importante/Muito Importante</b></p>	<b>A44</b>
<p><i>Antes de ser aluno da EPCAR atribuía pouca importância pois era um tema abordado de maneira rápida e superficial. A partir do ingresso na EPCAR, nesses 6 meses, abordando esse assunto, vejo que o aprofundamento e estudo mais prolongado desse assunto fez-me perceber que é uma matéria importante.</i></p> <p><b>Pouca/Muito Importante</b></p>	<b>A48</b>
<p><i>[Na EPCAR] O assunto de funções foi bem ministrado em sala de aula, com os mestres trazendo mais materiais para estudo além do livro.</i></p> <p><b>Pouca/Importante</b></p>	<b>A49</b>
<p><i>Aqui na EPCAR, devido ao aprofundamento do conteúdo foi possível perceber a importância das funções. Em outras escolas via-se esse conteúdo, porém de forma corriqueira, sem detalhes, tornando, assim, o estudo de funções irrelevante.</i></p> <p><b>Normal/Muito Importante</b></p>	<b>A74</b>

Esses depoimentos acima destacados, nos dão indícios de que a metodologia aplicada no 1º ano do CPCAR para apresentação da definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função faz com que o aluno compreenda a necessidade de se estudar o referido assunto, assim como nos indica que a forma apresentada é mais aprofundada, dando então possibilidade ao aluno de ser mais crítico em relação à importância que dava ao assunto e à sua opinião hoje em dia.

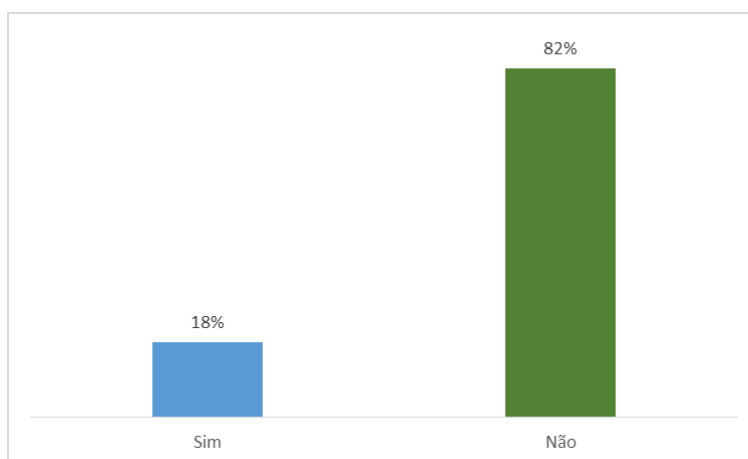
A pergunta 6 do QA foi de grande importância para verificarmos, na percepção dos alunos da EPCAR, a eficiência ou não da metodologia aplicada para o ensino de definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função.

Pedimos que essa pergunta fosse respondida somente por alunos que já haviam estudado a definição de função antes de ser aluno da EPCAR. Dos 75 alunos, 7 não responderam, o que nos fez entender que estes, não estudaram

definição de funções antes do ingresso na EPCAR. Note-se aqui que, mesmo fazendo parte do rol de assuntos da matemática no Ensino Básico, alguns alunos afirmam ter encerrado parte de seus anos escolares sem ter conhecimento do assunto de funções, o que nos parece um equívoco.

O Gráfico 4 abaixo elucida o resultado obtido com a pergunta 6 que dizia: “A abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava antes era a mesma que recebeu na EPCAR?”

Gráfico 4 - Respostas à pergunta 6 do QA: “A abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava antes era a mesma que recebeu na EPCAR?”



De todos os alunos que responderam a essa pergunta, ou seja, de 68, 12 (18%) responderam **sim**, sendo 3 do G1 e 9 do G2 e 56 (82%) responderam **não**, com 10 alunos do G1 e 46 do G2. O Quadro 9 abaixo, contém comentários de alguns alunos que responderam **não** à pergunta 6.

Quadro 9 – Comentários dos alunos que responderam não à pergunta 6

DEPOIMENTOS – G1	ALUNO
<i>Em minha escola, foi passado de maneira <b>superficial</b> funções e a forma como foi passada não permitiu que eu entendesse com clareza seus conceitos. Eu <b>apenas decorava</b> os passos para fazer os exercícios. Na EPCAR, os gráficos são mais difíceis e isso me forçou a buscar entender o conceito</i>	A03
<i>Como vim do 9º ano do ensino fundamental, a abordagem feita na escola, era mais <b>superficial</b>.</i>	A04
<i>Na escola o ensino <b>não foi tão abrangente</b>, no cursinho eu aprofundei bastante, mas na EPCAR, <b>aprendi alguns conceitos que nunca tinha visto</b></i>	A08
<i>Estudo <b>bem mais aprofundado</b> sobre o assunto no CPCAR.</i>	A11
<i>Aqui eu aprendi mais <b>detalhadamente</b> sobre função. Antes, no meu antigo colégio o método utilizado não era tão bem planejado.</i>	A12
<i>A <b>abordagem</b> era feita de forma <b>mais algébrica</b> e <b>menos gráfica</b>.</i>	A14
DEPOIMENTOS – G2	ALUNO
<i>Na minha antiga escola havia <b>pouca ênfase na construção de gráficos</b> e no estudo dos tipos de função (modular, composta, inversa e etc.)</i>	A17
<i>O conteúdo da EPCAR é <b>mais detalhado e aprofundado</b>.</i>	A19
<i>Durante meu 1º ano do ensino médio inteiro aprendi somente função do 1º grau e 2º grau. Aqui na EPCAR o assunto é trabalhado <b>mais detalhadamente</b> e já aprendi outros tipos de função em 6 meses.</i>	A21
<i>Na EPCAR o assunto foi abordado com <b>mais profundidade</b>, diferente do método que me foi passado anteriormente.</i>	A27
<i>Anteriormente eu apenas aprendia funções para resolver exercícios, mas agora consigo compreender bem o assunto e <b>relacioná-lo com outros assuntos de exatas</b>.</i>	A29
<i>Na EPCAR o estudo de definição de funções é <b>mais aprofundado</b>.</i>	A35

<i>A valorização e o <b>tempo dados à matéria</b> eram menores</i>	<b>A38</b>
<i>Forma de explicação, <b>abordagem do assunto</b> e <b>profundidade</b> no desenvolvimento da matéria</i>	<b>A54</b>
<i>Embora eu tenha visto boa parte do conteúdo de função antes de eu entrar na EPCAR, após meu ingresso, pude ter uma <b>visão mais crítica</b> acerca <b>da análise do gráfico e das características</b> de uma função</i>	<b>A55</b>
<i>Aqui na EPCAR o assunto foi mais aprofundado, gerando uma melhor compreensão do assunto e <b>uma ótima base para estudar os tipos de funções</b></i>	<b>A59</b>
<i>O <b>rigor na estrutura e escrita matemática</b></i>	<b>A70</b>
<i>O <b>aprofundamento nos desenhos dos gráficos</b>, a complexidade dos problemas e principalmente a <b>notação</b></i>	<b>A71</b>

Os termos destacados com negrito não estão no original, mas assim o fizemos para colocarmos atenção às palavras dos alunos sobre sua percepção da abordagem do assunto de funções anteriormente.

Fizemos marcação em negrito, pois esses elementos colaboram para que possamos creditar e confirmar nossas impressões sobre a eficiência ou não da metodologia aplicada para se explicar funções no 1º ano do CPCAR.

Esclarecemos ainda que muitos outros depoimentos foram ao encontro dos destacados no Quadro 9 acima. No entanto, julgamos melhor fazer uma seleção para não ficar repetitivo.

Os trechos em negrito elucidam nossas percepções e nos dão indícios do que mais colabora na condução da metodologia aplicada para apresentar a definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função, conforme apresentado nessa pesquisa. São eles: apresentação **abrangente, detalhada e aprofundada** do conteúdo, **interpretação do gráfico** de funções, **maior tempo** dispensado à apresentação do conteúdo, faz com que o aluno tenha uma **visão mais crítica** acerca **da análise do gráfico e das características** de uma função, **rigor na escrita** matemática, ênfase à **notação** de uma função e melhor preparo para **construção de gráficos**.

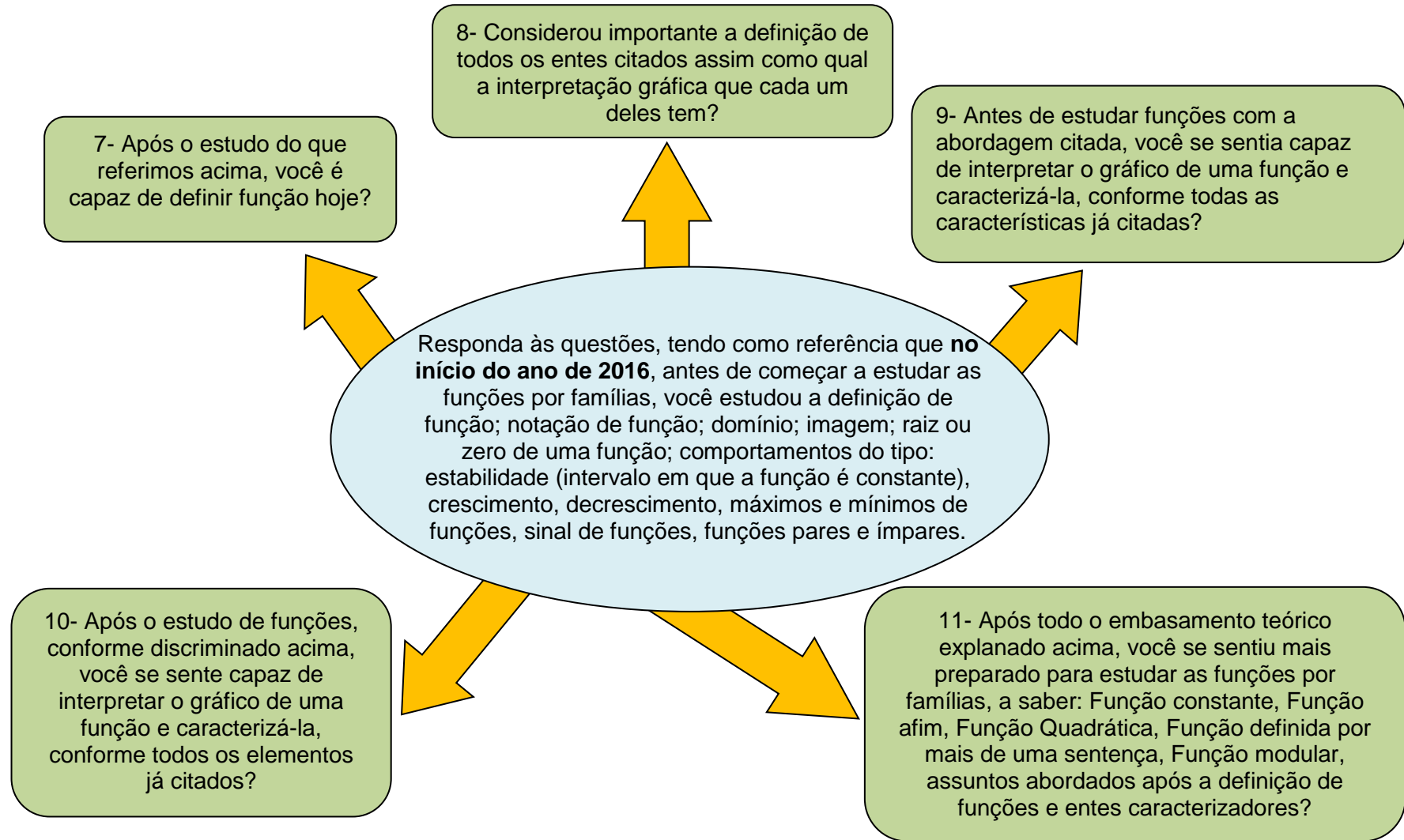
A seguir, apresentaremos os resultados das questões de **7 a 14**. Solicitamos nessas perguntas que o aluno, ao responder os questionamentos

tivesse como referência que no início do ano de 2016, antes de começar a estudar as funções por famílias, estudou a definição de função; notação de função; domínio; imagem; raiz ou zero de uma função; comportamentos do tipo: estabilidade (intervalo em que a função é constante), crescimento, decrescimento, máximos e mínimos de funções, sinal de funções, funções pares e ímpares.

A Figura 44 abaixo contém as perguntas mencionadas. Em seguida, apresentamos os Gráficos 5 a 9 com os resultados das respostas, com algumas observações que podem colaborar para creditar nossas impressões de pesquisa.



Figura 44 - Perguntas 7 a 11 do QA



Indicamos a seguir, nos Gráficos 5 a 9 um panorama quantitativo sobre as percepções dos alunos do CPCAR quanto as perguntas 7 a 11.

Gráfico 5 - Respostas à pergunta 7 do QA: “Após o estudo do que referimos acima, você é capaz de definir função hoje?”

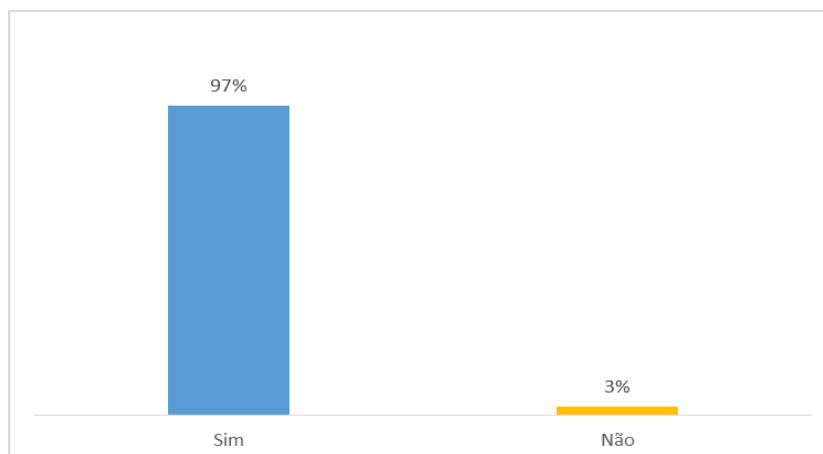


Gráfico 6 - Respostas à pergunta 8 do QA: “Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem?”

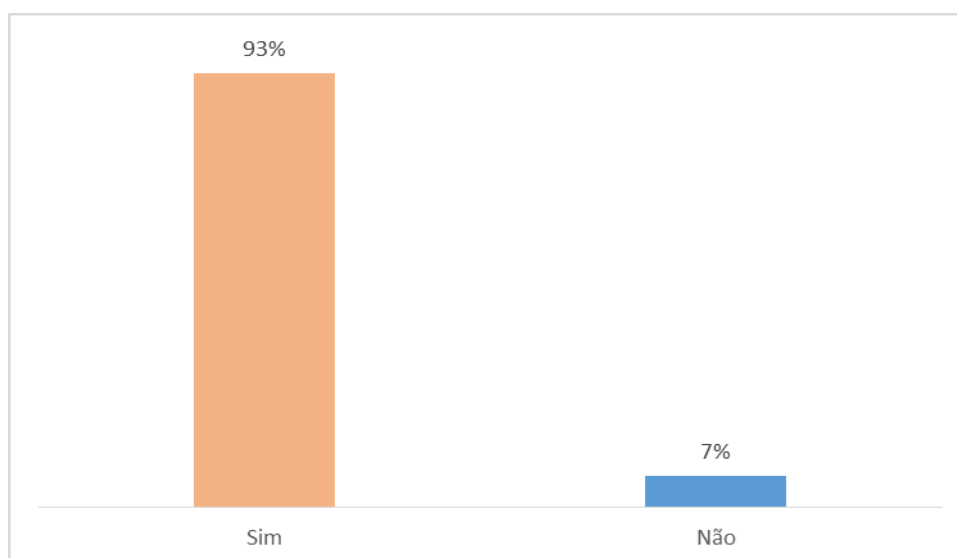


Gráfico 7 - Respostas à pergunta 9 do QA: “Antes de estudar funções com a abordagem citada, você se sentia capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?”

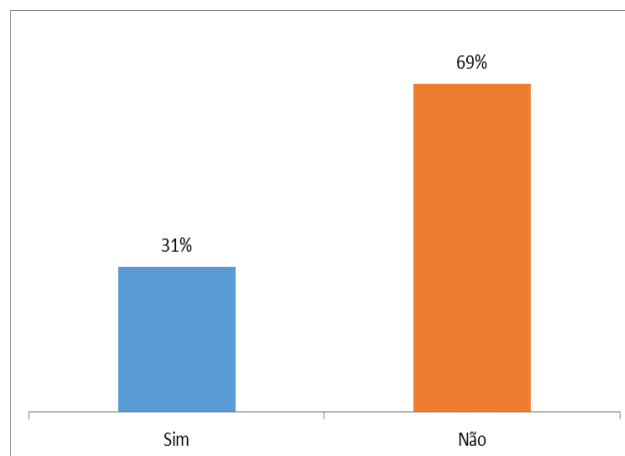


Gráfico 8 - Respostas à pergunta 10 do QA: “Após o estudo de funções, conforme discriminado acima, você se sente capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todos os elementos já citados?”

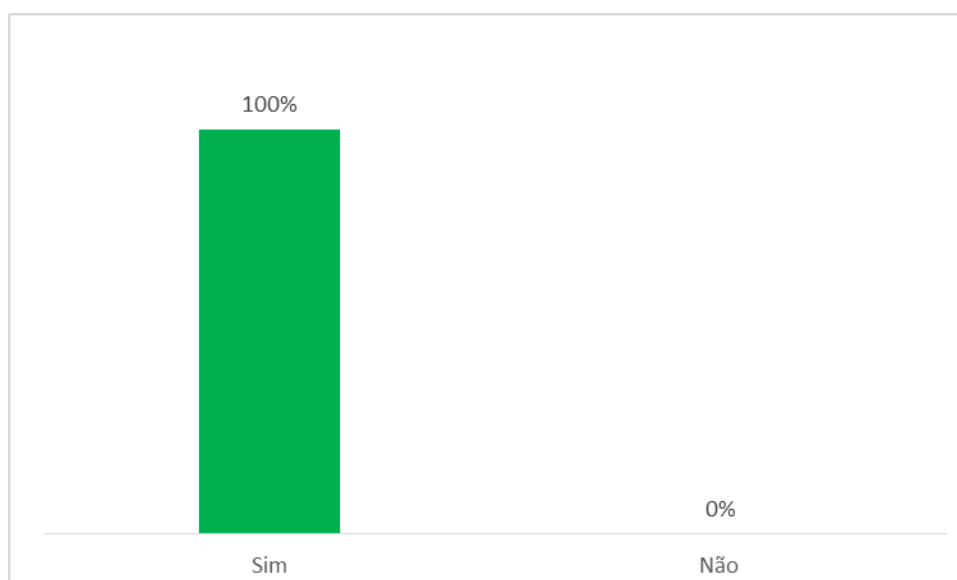
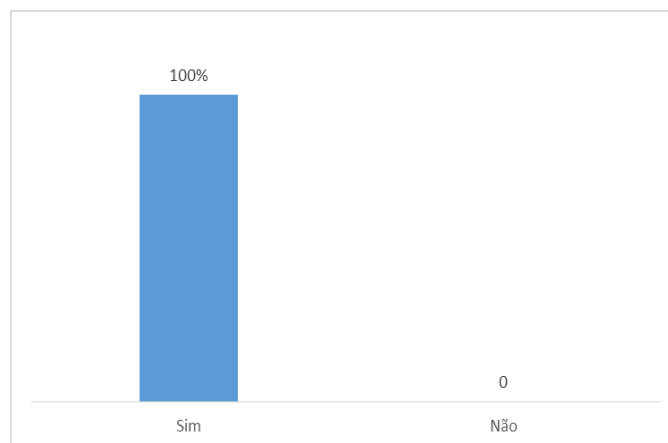


Gráfico 9 - Respostas à pergunta 11 do QA: “Após todo o embasamento teórico explanado acima, você se sentiu mais preparado para estudar as funções por famílias, a saber: Função constante, Função afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função modular, assuntos abordados após a definição de funções e entes caracterizadores?”



O Quadro 10 abaixo apresenta a quantidade de alunos que respondeu **sim** ou **não** às perguntas 7 a 11, separadas por grupo G1 e G2.

Quadro 10 - Respostas às perguntas 7 a 11 por grupo: G1 e G2

	<b>SIM</b>	<b>NÃO</b>
<b>PERGUNTA 7:</b> Após o estudo do que referimos acima, você é capaz de definir função hoje?	<b>G1:</b> 14 <b>G2:</b> 59	<b>G1:</b> zero <b>G2:</b> 02
<b>PERGUNTA 8:</b> Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem?	<b>G1:</b> 13 <b>G2:</b> 57	<b>G1:</b> 01 <b>G2:</b> 04
<b>PERGUNTA 9:</b> Antes de estudar funções com a abordagem citada, você se sentia capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?	<b>G1:</b> 06 <b>G2:</b> 17	<b>G1:</b> 08 <b>G2:</b> 44
<b>PERGUNTA 10:</b> Após o estudo de funções, conforme discriminado acima, você se sente capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas os elementos já citados?	<b>G1:</b> 14 <b>G2:</b> 61	<b>G1:</b> zero <b>G2:</b> zero
<b>PERGUNTA 11:</b> Após todo o embasamento teórico explanado acima, você se sentiu mais preparado para estudar as funções por famílias, a saber: Função constante, Função afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função modular, assuntos abordados após a definição de funções e entes caracterizadores?	<b>G1:</b> 14 <b>G2:</b> 61	<b>G1:</b> zero <b>G2:</b> zero

De maneira geral e pela maioria, as respostas indicadas no Quadro 10 acima nos indicam que um de nossos objetivos da pesquisa, qual seja, verificar se, na visão dos alunos da EPCAR, enquanto ainda estudantes de Ensino Médio, o estudo das funções, com a abordagem mencionada nessa pesquisa, facilita a interpretação do gráfico de uma função e se, eles se sentem embasados para a construção do gráfico e caracterização de uma função, foi alcançado e o resultado é bastante positivo.

Entendemos com isso que a prática adotada para o ensino da definição de função e elementos estruturantes e caracterizadores de uma função poderá ser benéfica e conduz a um resultado que poderá propiciar um melhor preparo para o estudo de função, das funções por famílias e também para estudos futuros na área de matemática, como o Cálculo I, ratificando as referências apresentadas na Introdução desta dissertação, quando fizemos a justificativa do nosso trabalho, apontando para esse entendimento.

Com relação a pergunta 12, destacamos no Quadro 11 abaixo os resultados, assim como os Gráficos 10, 11, 12, 13 e 14, que apresentaremos na sequência, com a quantificação dos resultados. É importante destacar que para que os alunos respondessem aos questionamentos da pergunta 12 (de **a** até **e**) foi solicitado o seguinte: *“Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule **apenas um** dos números para indicar sobre suas percepções sobre o ensino de Funções no CPCAR. Use de 5 = “excelente”, até 1 = “fraco”.*”

Quadro 11 - Respostas aos questionamentos da pergunta 12 por grupo: G1 e G2

QUESTIONAMENTOS	<p style="text-align: center;"><b>NOTA</b>  <b>VARIAÇÃO: 1-2 -3-4-5</b>  <b>De 5 = excelente até 1 = fraco</b></p>
a) O quanto você acha que aprendeu sobre o assunto funções?	<p><b>Nota 5:</b> G1: 8 e alunos e G2:29 alunos.  <b>Nota 4:</b> G1: 6 alunos e G2: 26 alunos.  <b>Nota 3:</b> G1:nenhum aluno e G2: 6 alunos  <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum aluno</p>
b) O quanto você acha que ficou bom no assunto definição de função e propriedades caracterizadoras, após este estudo no CPCAR?	<p><b>Nota 5:</b> G1: 7 e alunos e G2:21 alunos.  <b>Nota 4:</b> G1: 6 alunos e G2: 33 alunos.  <b>Nota 3:</b> G1:1 aluno e G2: 7 alunos  <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum aluno</p>
c) O quanto você é capaz de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?	<p><b>Nota 5:</b> G1: 11 e alunos e G2:32 alunos.  <b>Nota 4:</b> G1: 3 alunos e G2: 24 alunos.  <b>Nota 3:</b> G1: nenhum aluno e G2: 5 alunos  <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum aluno</p>
d) O quanto você consegue resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções?	<p><b>Nota 5:</b> G1: 7 e alunos e G2:22 alunos.  <b>Nota 4:</b> G1: 3 alunos e G2: 25 alunos.  <b>Nota 3:</b> G1: 2 alunos e G2: 13 alunos  <b>Notas 2:</b> G1: 2 alunos e G2: 1 aluno.  <b>Nota 1 :</b> nenhum aluno</p>
e) Após todo o embasamento teórico sobre definição de funções e característica de <b>seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função</b> , o quanto você se sentiu mais preparado para estudar as funções por famílias, a saber, Função constante, Função Afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função Modular; Classificação de funções: sobrejetividade, injetividade, bijeção e Função Inversa?	<p><b>Nota 5:</b> G1: 9 e alunos e G2:32 alunos.  <b>Nota 4:</b> G1: 5 alunos e G2: 24 alunos.  <b>Nota 3:</b> G1: nenhum aluno e G2: 5 alunos  <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum aluno</p>

Gráfico 10 - Percentual da Resposta à pergunta 12 a) do QA

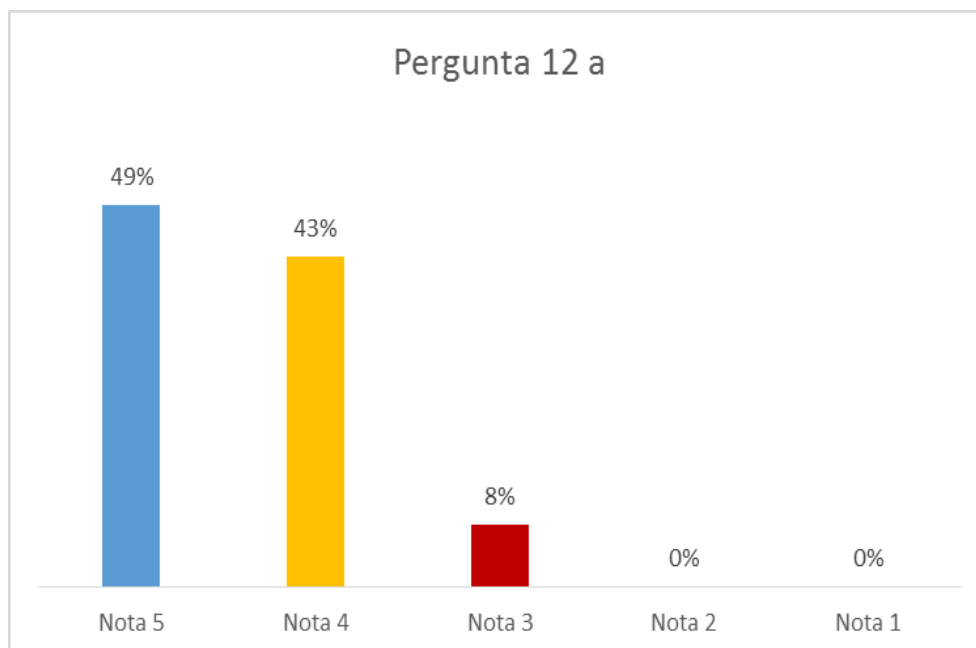


Gráfico 11 - Percentual da Resposta à pergunta 12 b) do QA

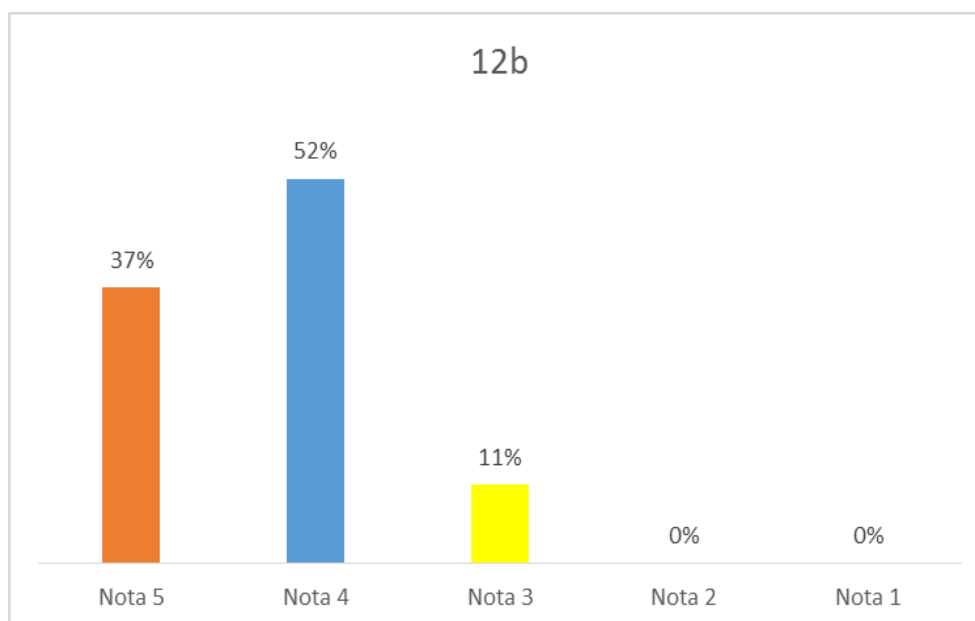


Gráfico 12 - Percentual da Resposta à pergunta 12 c) do QA

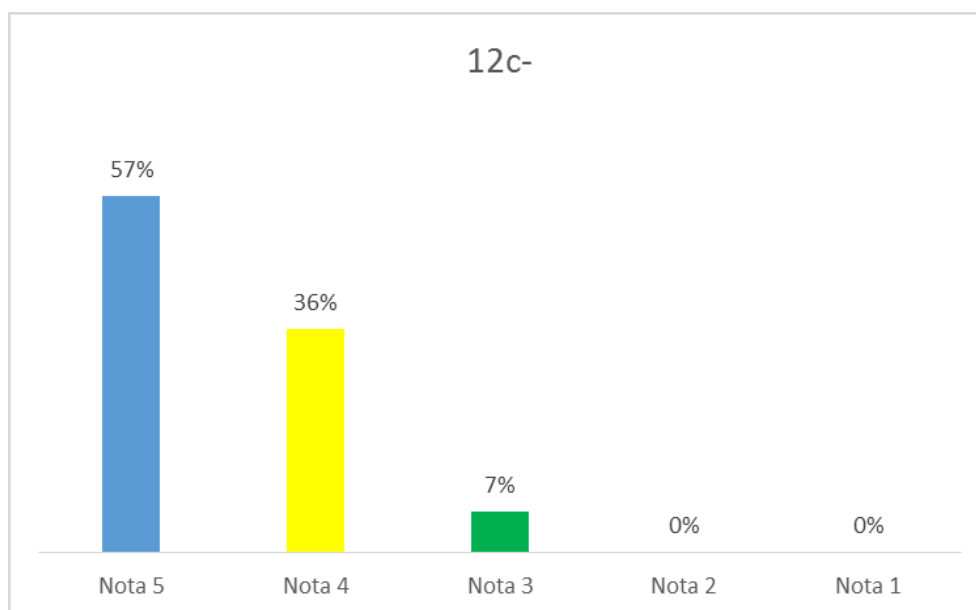


Gráfico 13 - Percentual da Resposta à pergunta 12 d) do QA

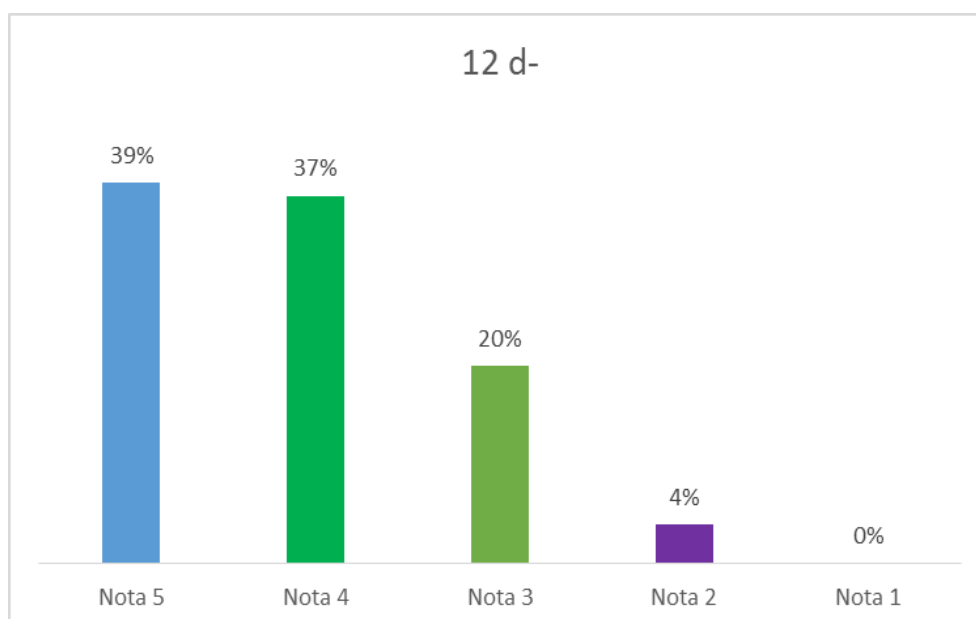
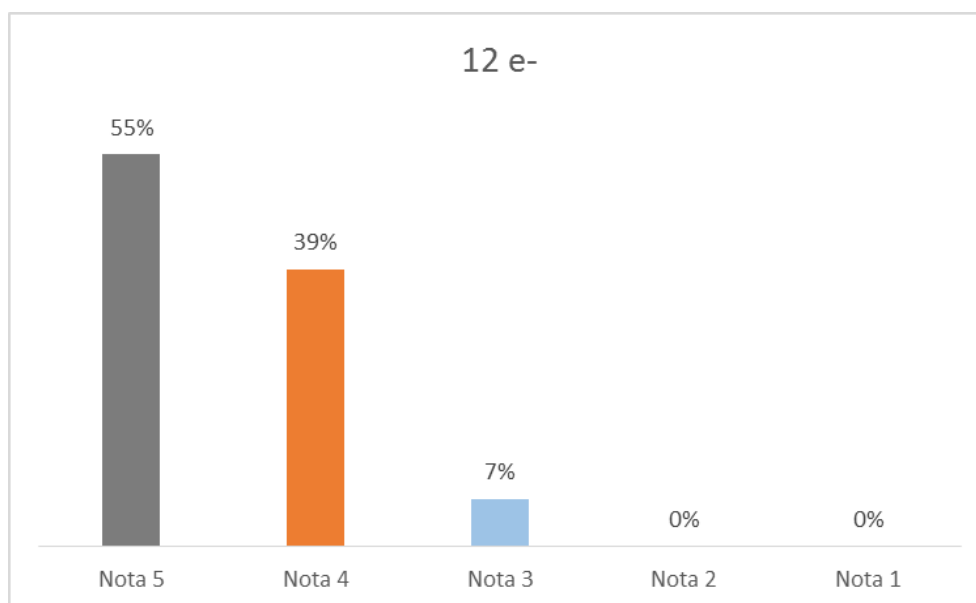




Gráfico 14 - Percentual da Resposta à pergunta 12 e) do QA



Apresentaremos a seguir, no Quadro 12, o resultado obtido com o 13º questionamento do QA, momento em que solicitamos que os alunos destacassem os pontos positivos e também negativos da metodologia utilizada nas aulas de Matemática do 1º ano do CPCAR com relação ao conteúdo de definição de função e características de seus elementos estruturantes.

Quadro 12 - Respostas aos questionamentos da pergunta 13 por grupo: G1 e G2<sup>37</sup>

PONTOS POSITIVOS	PONTOS NEGATIVOS
GRUPO 1	GRUPO 1
<b>A01:</b> <i>Estudar o máximo de situações possíveis. Enfatizar os elementos básicos. Definir bem os elementos básicos. Clareza.</i>	<b>A01:</b> <i>Rapidez.</i>
<b>A03:</b> <i>Gráficos sempre serem feitos; maior elaboração dos mesmos; a mudança de alguns detalhes para ver o novo resultado (e se fosse módulo?, por exemplo).</i>	<b>A03:</b> <i>Exercícios demais, que se tornam maçantes depois de um tempo.</i>
<b>A04:</b> <i>Execução de uma grande gama de <b>exercícios para fixar</b> a teoria; <b>explicação detalhada.</b></i>	<b>A04:</b> <i>Falta de tempo para executar todos os exercícios.</i>
<b>A05:</b> <i>Proposta de exercícios; abrangência da matéria.</i>	<b>A07:</b> <i>Há <b>muitos exercícios</b> propostos e, muitas vezes não é possível fazer todos. Deveria ter menos exercícios sobre o mesmo tema.</i>
<b>A06:</b> <i>É bem <b>aprofundada; prepara para o estudo de cálculo</b> em qualquer instituição de nível superior que seja necessário.</i>	
<b>A09:</b> <i>Gera uma <b>boa base; internaliza o conteúdo;</b> abordagem profunda.</i>	
<b>A10:</b> <i>Listas de exercícios extra são <b>importantíssimas para a fixação do conteúdo</b> sobre “funções”.</i>	
GRUPO 2	GRUPO 2
<b>A16:</b> <i><b>Aprofundamento</b> na matéria; <b>ausência de “macetes”</b></i>	<b>A26:</b> <i><b>sobrecarga de matéria</b></i>

<sup>37</sup> Há de se esclarecer que todos os 75 alunos apontaram aspectos positivos e 25 alunos não apontaram aspectos negativos.

<p><b>A17:</b> Preocupação com <b>detalhes</b>; <b>Exercícios aplicados.</b></p>	<p><b>A34: Acúmulo de matéria;</b> excesso de exercícios.</p>
<p><b>A19:</b> <b>Detalhamento</b> da matéria; <b>aprofundamento</b> do conteúdo; resolução de vários exercícios; conteúdo aplicado desde sua base; <b>evolução</b> coerente de conteúdo.</p>	<p><b>A39: Abordagem rápida,</b> porém profunda.</p>
<p><b>A22:</b> Melhor definição de função; <b>identificação de características e elementos</b></p>	<p><b>A58: Muitos detalhes</b> acabam atrapalhando o desempenho do aluno.</p>
<p><b>A30:</b> Aulas dinâmicas; os exercícios propostos; <b>preocupação com o aprendizado; estímulo ao estudo.</b></p>	<p><b>A63: Matéria excessiva.</b></p>
<p><b>A31:</b> A <b>ênfase</b> às <b>características do gráfico;</b> a variedade de funções apresentadas.</p>	<p><b>A64: Excesso de abordagem</b></p>
<p><b>A33: Preparação para Cálculo;</b> foco nas partes mais difíceis; <b>embasamento</b> sobre todo o conteúdo.</p>	<p><b>A65: Repetição</b> de exercícios iguais.</p>
<p><b>A44:</b> Definição mais dinâmica; <b>método mais completo.</b></p>	<p><b>A74:</b> Repetitividade e muita <b>massificação.</b></p>
<p><b>A45:</b> Real entendimento do assunto; didática excepcional do conteúdo; <b>disponibilidade de material.</b></p>	<p><b>A75:</b> Às vezes é interessante <b>saber</b> em qual <b>situação tal função é utilizada, na prática.</b></p>
<p><b>A46:</b> Professores prestativos, sempre abertos para responder dúvidas; <b>matéria bem explicada e bem estruturada.</b></p>	
<p><b>A47:</b> <b>Abordagem mais profunda</b> do tema; atenção aos <b>detalhes; ênfase em gráficos;</b> forma de <b>construção de gráfico.</b></p>	
<p><b>A50:</b> Estudo <b>gradativo,</b> bem dividido, <b>facilita em outros tipos de funções.</b></p>	
<p><b>A68:</b> Aprofundamento no conteúdo; <b>embasamento teórico</b> para resolução de questões.</p>	

Os trechos em negrito do Quadro 12 acima nos mostram aspectos positivos e negativos da metodologia aplicada. Como foram muitos comentários, fizemos uma seleção, dos mais relevantes para o propósito de nossa pesquisa. Os aspectos positivos nos fornecem, mais uma vez, indicativos de que a metodologia corresponde às nossas expectativas. Já os aspectos negativos servem de base para repensar e sempre aprimorar a prática em sala de aula.

Sendo professora do 1º ano do CPCAR, é válido que eu com os demais professores da série, façamos uma análise tanto dos aspectos positivos citados, quanto dos negativos e, após a análise busquemos fazer discussões no sentido de buscar soluções e tomar atitudes que contemplem sempre o bem do aluno no processo de ensino e de aprendizagem.

Finalizamos a análise do QA, apresentando no Quadro 13 abaixo, alguns comentários dos alunos com relação à questão 14 do QA, em que foi reservado um espaço para que o aluno do 1º ano do CPCAR pudesse apresentar contribuições para a proposta da nossa pesquisa.

Quadro 13 - Questão 14 do QA: Depoimentos de alunos do CPCAR que contribuem com a proposta de pesquisa.

<b>DEPOIMENTOS – GRUPO G1</b>	<b>ALUNO</b>
<i>O ensino, explanação do conceito básico de função, máximo, mínimo, vértice, paridade e outros é de suma importância para facilitar a compreensão dos tipos de funções.</i>	<b>A04</b>
<i>O estudo de funções no CPCAR tem um nível excelente, principalmente para quem pretende cursar qualquer instituição de nível superior que cobre a matéria de Cálculo.</i>	<b>A06</b>
<i>A metodologia de ensino de funções no CPCAR é muito boa, visto que os mestres apresentam diversos exemplos de variados tipos de funções, o que ajuda o aluno na fixação do conteúdo aprendido, além de que nos oferecem exercícios extras que são imprescindíveis para o aprendizado.</i>	<b>A10</b>
<b>DEPOIMENTOS – GRUPO G2</b>	<b>ALUNO</b>
<i>A metodologia utilizada, em geral, ajudou bastante para o estudo mais avançado sobre funções.</i>	<b>A30</b>

<i>Creio que há uma grande quantidade de matéria, que por conta do tempo curto, apesar de importante, acaba sobrecarregando o aluno.</i>	<b>A38</b>
<i>O ensino de funções no CPCAR é profundo, contudo, pode causar uma certa sobrecarga no aluno, devido a cobrança feita de maneira exaustiva. No entanto, sem essa abordagem, o aprendizado efetivo não seria possível.</i>	<b>A39</b>
<i>Considero possível contribuir com minhas informações pois nunca havia estudado a matéria desta maneira e fui muito auxiliado. Hoje já consigo lidar muito melhor com funções e gosto da matéria.</i>	<b>A40</b>
<i>O estudo de função no CPCAR capacita altamente o aluno sobre esse assunto através do aprofundamento.</i>	<b>A43</b>
<i>Continuar estimulando o aluno a ter uma visão crítica de função tendo como base o gráfico.</i>	<b>A55</b>
<i>Antes de entrar na EPCAR, eu nunca tinha conseguido aprender função, achava algo impossível e que iria reprovar em matemática na EPCAR.</i>	<b>A56</b>
<i>O modo e profundidade com que a equipe de matemática da EPCAR ensina o conteúdo de funções ajuda o aluno a aprender conteúdos do ensino superior com mais facilidade.</i>	<b>A72</b>
<i>Este método foi um bom método aplicado, porém de certa forma torna maçante e cansativo. Entretanto, me auxiliou mais do que anteriormente e me mostrou a importância do conteúdo.</i>	<b>A74</b>

Contrapondo todos os questionamentos do QA e as respostas que obtivemos, julgamos que a análise geral e abrangente das justificativas e também os quantificadores obtidos são elementos que validam nossas impressões e também vão ao encontro de muitas observações de pesquisadores mencionados no primeiro capítulo desta dissertação: Introdução, em Justificativas da pesquisa.

Encerramos esta parte da análise de dados com o reporte dos alunos do CPCAR de que a metodologia aplicada no CPCAR para o ensino de definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função entendendo que, em seu aspecto mais amplo, a metodologia é positiva e colabora para que o aluno consolide o aprendizado do assunto em questão.

A seguir, apresentaremos as impressões dos Professores da EPCAR que utilizaram ou utilizam dessa metodologia com o intuito de dar maiores subsídios para a análise.

### 5.1.2 Análise descritiva e qualitativa com auxílio de quadros para compreender o QPE

Apresentaremos em seguida os resultados obtidos com o QPE. Buscamos responder a outro objetivo de nossa pesquisa: verificar se os professores que ministraram ou ministram matemática no 1º ano do CPCAR percebem que a forma como é apresentada ao aluno a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores é diferente de como eles faziam anteriormente ou não. Além disso, seguem-se os depoimentos deles sobre esta prática metodológica como facilitador ou não dos processos de ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Ainda pretendemos verificar com os professores que preencheram o QPE se a referida metodologia poderá embasar e auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingressar num curso superior que tenha a disciplina de Cálculo e acompanhar com mais facilidade tal disciplina.

Reiteramos que o QPE foi aplicado a 4 professores que foram nomeados por **P1**, **P2**, **P3** e **P4**. O critério para identificar cada professor se deu pela ordem em que nos foram entregues os questionários respondidos<sup>38</sup>.

Com relação às respostas às perguntas 1 e 2 do QPE, que questionavam a respeito do tempo de experiência como professor de Matemática e o tempo que atuou ou atua como professor de Matemática no 1º ano do CPCAR, entendemos que, conforme apresentássemos os resultados, os sujeitos poderiam ser facilmente identificados.

Assim, optamos por apresentar o tempo de experiência dos professores e há quanto tempo atuam ou atua no 1º ano do CPCAR, com uma ordem aleatória, à nossa escolha: um deles tem 42 anos de docência e 20 anos no 1º ano do CPCAR; outro tem 24 anos de docência e 10 anos no 1º ano do CPCAR; ainda um com 21 anos de docência e 2 anos no 1º ano do CPCAR; e um último com 11 anos de docência e 2 anos no 1º ano do CPCAR.

---

<sup>38</sup> Por se tratar de um grupo pequeno de colaboradores, estes podem ser facilmente reconhecidos nos seus depoimentos, entretanto não foi finalidade desta pesquisa que isso acontecesse. De outra forma, todos autorizaram este estudo e entendemos que a finalidade deles e nossa é convergente quanto a propostas para melhoria do ensino e da aprendizagem do assunto abordado. Assim sendo, não nos preocuparemos com associações livres que os leitores possam fazer em relação aos colaboradores e os depoimentos utilizados.

Na pergunta 3 do QPE: “Se seus alunos da EPCAR tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam matemática?”, obtivemos as respostas abaixo.

**P1** respondeu que 70% dos alunos escolheriam matemática e a justificativa foi: *Observo que é um perfil dos alunos que recebemos gostar de matemática.*

**P2** respondeu que 90% dos alunos escolheriam matemática e a justificativa foi: *No contexto da EPCAR, a aprendizagem da matemática é muito forte. É uma espécie de exigência que perpassa o tempo na instituição. Parece que passam os anos, mas essa importância torna-se tão forte quanto aquela de preparar-se fisicamente, ou tornar-se militar, ou, ainda, de ter a oportunidade de voar. Por observação, digo que os alunos têm admiração pelos assuntos da matemática. Conseguem fazer uma exigência quase que pessoal de serem bons no conteúdo porque assim sendo, serão bons no objetivo ao qual se propõem de ser pilotos. Sinto que de tradição, ainda que não escrita, [há] algo meio que tácito nesse desejo de serem bons em matemática para serem bons pilotos militares.*

**P3** respondeu que 70% dos alunos escolheriam matemática e a justificativa foi: *Como são todos do sexo masculino e homens, têm facilidade maior de aprendizagem na área de exatas.*

**P4** respondeu que 80% dos alunos escolheriam matemática e a justificativa foi: *Porque eles pretendem, no futuro, fazer cursos que envolvem ciências exatas.*

Com relação às perguntas 4 e 5 do QPE: “A **abordagem** que você dava ao ministrar o estudo de definição de funções e seus elementos estruturantes antes de ministrar aulas na EPCAR era a mesma dada no CPCAR?” e “A **metodologia** que você usava ao ministrar o estudo de definição de funções e seus elementos estruturantes antes de ministrar aulas na EPCAR era a mesma que você utiliza no CPCAR?” **P1**, **P2** e **P4** responderam **não** a ambas as perguntas e **P3** respondeu **sim**, também a ambas.

Pedimos, então, que caso marcassem **não** o professor explicasse em que considera que é diferente. Nesse sentido, eles responderam:

**P1:** *Na EPCAR consegui, junto com meus colegas professores de matemática, oferecer um estudo contextualizado, assim como um aprofundamento do conteúdo, que não tinha aplicado em outra escola.*

**P2:** *Em muitos aspectos considero que tanto a abordagem quanto a metodologia que eu usava em turmas que ministrei matemática para turmas de primeiro ano do ensino médio foi diferente. Creio que por, à época, encarar o conteúdo como mais um dos que deveriam ser ministrados e não o caracterizar com a tal importância devida. (...) [M]as creio que o mais significativo era que a abordagem metodológica se resumia ao conteúdo do livro. Assim, não me preocupava com os elementos estruturantes e conceituais que embasam o estudo das funções. O estudo era muito voltado para a parte algébrica do estudo das funções. Nem a interpretação gráfica, nem as propriedades de cada função eram tomadas como relevantes. O foco estava em dar ferramentas algébricas para que o aluno pudesse resolver questões.*

**P4:** *São várias as diferenças: as condições de trabalho, o tempo destinado a cada assunto, o comprometimento dos alunos, o número de alunos em sala de aula, a seleção dos alunos, a disciplina dos alunos.*

Compreendemos com esses depoimentos que a abordagem e a metodologia usadas no CPCAR para apresentar no 1º ano do CPCAR a definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função podem ser consideradas mais amplas e aprofundadas do que as trabalhadas além dos muros da EPCAR. O professor **P3**, afirmou ter usado essa metodologia anteriormente; no entanto, é nosso entendimento, até pelo contato profissional que mantivemos enquanto ele ministrou aula no 1º ano do CPCAR, que ele passava todo o conteúdo citado, mas não com abordagem que damos na EPCAR.

Acreditamos que a abordagem dada por muitos dos professores de Ensino Médio ao ensino de função se restringe ao apresentado na maioria dos livros didáticos e apostilas do mercado atual. Por nossa prática docente, percebemos que as atividades que apresentamos no capítulo 3 desta dissertação não são encontradas com tantos detalhes nos livros atuais dos quais temos conhecimento. E, também, na maioria das vezes as apresentações das definições e conceitos abordados no capítulo 3 não são



retratadas, além da EPCAR, dando ênfase aos elementos estruturantes e caracterizadores de uma função.

Os questionamentos da questão 6 foram realizados em cinco etapas: 6a, 6b, 6c, 6d e 6e. Essas perguntas deveriam ser respondidas pelos professores considerando “a metodologia utilizada no 1º ano do CPCAR para definir funções: notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função.”

Todos os professores foram unânimes em responder **sim** às perguntas **6a, 6b, 6c, 6d e 6e**. A seguir, apresentaremos as perguntas e justificativas de cada professor.

Pergunta 6: “Considerando a metodologia que vocês professores do 1º ano do CPCAR utilizam para definir funções: **notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função**, você considera que esta prática”

- a) “é facilitadora para que seus alunos consigam **interpretar** o gráfico de uma função?”

**P1:** *A metodologia leva o aluno a observar um gráfico na sua forma mais ampla.*

**P2:** *É com esses elementos que os alunos percebem o gráfico como um todo e podem fazer movimentações da curva que não podem facilmente ser percebidas algebricamente.*

**P3:** *Os elementos estruturantes e o esboço do gráfico são ferramentas imprescindíveis para o aluno ter uma compreensão melhor do movimento das funções.*

**P4:** *Porque a interpretação do gráfico de uma função só é possível através do conhecimento das definições ou dos conceitos dos itens citados.*

- b) “é facilitadora para que seus alunos consigam **esboçar** o gráfico de uma função?”

**P1:** *Cada função tem sua característica e, ao trabalharmos os conceitos iniciais das funções, há um amadurecimento no aluno para uma visão ampla destas características.*

**P2:** *Eles conseguem se libertar de coisas como tabelas e algebrização e perceber o esboço/desenho mais facilmente.*

**P3:** *Se o Aluno tiver o conhecimento prévio de todos os elementos estruturantes de uma função e compreendê-los de que forma eles irão influenciar no movimento do gráfico daquela função, ele poderá, antes de iniciar o esboço do gráfico, imaginar o movimento que a função irá fazer e assim evitar erros.*

**P4:** *Conhecendo bem os itens citados, os alunos podem ter ideia do gráfico antes de esboçá-lo, facilitando assim na construção.*

c) “contribui para que o aluno possa resolver inequações, inequações simultâneas e inequações produto e/ou quociente graficamente ao invés de algebricamente?”

**P1:** *Associamos as equações e inequações com representações gráficas.*

**P2:** *À princípio, [os alunos] têm uma resistência nesse aspecto, mas com o tempo e a prática percebem a importância pela rapidez que proporciona tanto no desenvolver das questões quanto da pouca necessidade de cálculo.*

**P3:** *Os alunos terão ferramentas suficientes para resolver as inequações e ao resolvê-las graficamente, o aluno conseguirá observar e entender de forma clara o que os cálculos algébricos demonstram. Somente com os cálculos algébricos, sob o meu ponto de vista, os alunos automatizam o conteúdo e não tem o perfeito entendimento do que aquilo representa.*

**P4:** *A análise do gráfico permite estudar cada item citado, facilitando a identificação do conjunto solução de inequações e com isso evitar cálculos algébricos.*

d) “facilita, por parte dos alunos, o estudo das funções por famílias (afim, quadrática, função definida por várias sentenças, modular, exponencial, logarítmica e trigonométricas)?”

**P1:** *Cada função tem sua característica e, ao trabalharmos os conceitos iniciais das funções, há um amadurecimento no aluno para uma visão ampla destas características.*

**P2:** *Com a sequência das funções eles vão desenvolvendo mecanismos de raciocínio que simplificam cada uma delas.*

*Isso é dado pelo estudo anterior e com muita ênfase no caminho do básico com a estruturação das funções.*

**P3:** *Acredito que adotando este método, o aluno terá facilidade para memorizar as características de todas as funções, fazendo com que o mesmo as reconheça, seja pelo movimento do gráfico ou pela expressão que as representam.*

**P4:** *Se o aluno conhece os itens citados, então o entendimento das funções particulares fica facilitado, porque desse modo a atenção do aluno fica voltada apenas para as características particulares das funções.*

e) “poderá contribuir para o estudo da disciplina de Cálculo, caso o aluno venha a estudar a referida disciplina em um curso superior?”

**P1:** *Os livros de Cálculo (ou alguns deles) trazem no seu início exercícios que buscam lembrar ao aluno exatamente o que trabalhamos na EPCAR.*

**P2:** *É o que temos de retorno de nossos alunos quando vão para a academia ou quando vão para cursos que envolvem essa disciplina. O reporte é sempre com relação à forma como estudaram função no 1º ano na EPCAR.*

**P3:** *Um aprendizado eficaz das diferentes funções ministradas no Ensino Médio, de suas características, comportamento e seus elementos estruturantes formam uma forte base para o aprendizado de Cálculo.*

**P4:** *Sem dúvida, sem os conceitos sobre os itens citados é impossível iniciar com êxito o estudo da disciplina citada, pois estudar Cálculo é um aprofundamento do estudo das funções.*

A pergunta 7 dizia: “Você considera a metodologia que usa no CPCAR para ensinar a definição de função e seus elementos estruturantes eficiente e eficaz?”. Todos responderam que **sim**. Perguntados do porquê, os professores justificaram:

**P1:** *O testemunho do próprio aluno me leva a crer nisso.*

**P2:** *Pelo fato de libertar o aluno do raciocínio algébrico e fornecer a ele maiores ferramentas para interpretação de uma forma ampla e geral.*

**P3:** *O conteúdo é repassado de forma mais ampla, rica e completa, fazendo com que os alunos tenham habilidades para*

*resolver qualquer exercício envolvendo funções. Além disso, os alunos desenvolvem uma ótima habilidade na interpretação e construção de gráficos.*

**P4:** *Porque ela permite a participação do aluno durante todo o tempo de exposição do assunto e também durante os exercícios práticos propostos.*

Com relação à pergunta 8: “Você mudaria alguma coisa em relação à sua prática e conduta em sala de aula na transmissão do conteúdo de definição de função e seus elementos estruturantes?” os professores P1, P2 e P3 afirmaram que **sim**, já o professor P4, assinalou **não**.

As justificativas de terem assinalado sim foram:

**P1:** *Creio que podemos sempre buscar coisas novas, mesmo observando eficiência na atual prática.*

**P2:** *Infelizmente, com a quantidade de aulas que temos não conseguimos trabalhar com ferramenta da informática, e considero que isso poderia ser feito em um tempo maior e de forma desafiadora. Também, pelo tempo, infelizmente não conseguimos trabalhar aspectos de limite de uma função (derivada também), mas esses dois são trabalhados na física. Considero que estamos a poucos passos de ampliar a visão dos alunos com a forma como abordamos o estudo das funções.*

**P3:** *Utilizaria mais exemplos associados a uma situação real.*

O Quadro 14 abaixo elucida as respostas da pergunta 9 que foi realizada em etapas tendo como referência básica: “Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule **apenas um** dos números para indicar sobre suas percepções de como você percebe o quanto seus alunos evoluíram no aprendizado de funções, após terem estudado no 1º ano do CPCAR, conforme a metodologia já descrita.”

Quadro 14 - Respostas aos questionamentos da pergunta 9 do QPE

QUESTIONAMENTOS	<b>NOTA</b> <b>VARIAÇÃO: 1–2 –3–4–5</b> <b>De 5 = excelente até 1 = fraco</b>
a) O quanto você acha que seus alunos do CPCAR aprenderam sobre o assunto funções?	<b>Nota 5:</b> P2 <b>Nota 4:</b> P1, P3 e P4 <b>Nota 3, 2 e 1:</b> nenhum professor
b) O quanto você acha que seus alunos ficaram bons no assunto definição de funções e propriedades caracterizadoras, após este estudo no CPCAR?	<b>Nota 5:</b> P2 <b>Nota 4:</b> P1, P3 e P4 <b>Nota 3, 2 e 1:</b> nenhum professor
c) O quanto você acha que seus alunos são capazes de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?	<b>Nota 5:</b> P2 <b>Nota 4:</b> P3 e P4 <b>Nota 3:</b> P1 <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum professor
d) O quanto você acha que seus alunos conseguem resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções?	<b>Nota 5:</b> P3. <b>Nota 4:</b> P2 e P4 <b>Nota 3:</b> P1 <b>Notas 2 e 1:</b> nenhum professor
e) Após todo o embasamento teórico sobre definição de funções e característica de <b>seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função</b> , o quanto você considera que seus alunos se sentem mais preparados para estudar as funções por famílias, a saber, Função Constante, Função Afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função Modular; Função Exponencial, Função Logarítmica e Funções Trigonométricas; Classificação de funções: sobrejetividade, injetividade, bijeção e Função Inversa?	<b>Nota 5:</b> P1, P2, P3 e P4 <b>Nota 4, 3, 2 e 1:</b> nenhum professor

Finalizando, teremos a seguir, no Quadro 15, o resultado obtido com a pergunta 10 em que solicitamos que os professores destacassem os pontos positivos e também negativos da metodologia utilizada nas aulas de Matemática do 1º ano do CPCAR com relação ao conteúdo de definição de função e características dos elementos estruturantes e caracterizadores de uma função.

Quadro 15 - Respostas aos questionamentos da pergunta 10 do QPE

PONTOS POSITIVOS	PONTOS NEGATIVOS
<b>P1:</b> <i>Levar o aluno ao raciocínio; Fazer conexão dos conteúdos.</i>	Nada registrado.
<b>P2:</b> <i>Estudo de gráficos de função de maneira geral; Sinal de uma função; Crescimento/Decrescimento.</i>	<b>P2:</b> <i>Não podermos ampliar os conhecimentos de forma a contemplar uma proximidade com os conceitos de limite e derivada.</i>
<b>P3:</b> <i>Análise de gráficos/gráficos complexos; Resolução de Inequações através de gráficos; Esboço dos gráficos de funções através de seus elementos estruturantes.</i>	<b>P3:</b> <i>Pouca utilização de situações-problema Interdisciplinaridade.</i>
<b>P4:</b> <i>Tempo disponível, discussão do assunto, material didático, exigências das tarefas.</i>	Nada registrado.

Por fim, deixamos um espaço no QPE para que os professores pudessem fazer outros comentários que considerassem que poderiam contribuir com a pesquisa. Não houve relato de nenhum professor.

A análise do QPE nos permitiu ter uma visão de profissionais da área de ensino de matemática, ou seja, professores de matemática do Ensino Médio com considerável experiência de atuação, acerca da metodologia que usamos para definir função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função na EPCAR. O resultado, no nosso entendimento, é positivo e pode servir de incentivo aos docentes que tiverem contato com essa pesquisa a refletirem sobre sua prática.

O entendimento dos professores **P1**, **P2**, **P3** e **P4**, vai ao encontro de nossas impressões de que uma metodologia que priorize a definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função poderão ser facilitadora para a compreensão geral de uma função, construção e análise dos gráficos, resolução de inequações, assim como do estudo das funções por famílias: afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica, trigonométricas, racionais.

Ainda, concordando com nossas percepções, os professores **P1**, **P2**, **P3** e **P4** confirmaram que essa abordagem dada ao ensino de função poderá contribuir para o estudo da disciplina de Cálculo, caso o aluno venha a estudar a referida disciplina em um curso superior, objeto de nossa pesquisa inclusive.

Na seção seguinte, apresentaremos a análise do QAS. Essa abordagem será descritiva também com auxílio de gráficos e quadros como já fizemos até aqui.

### **5.1.3 Análise descritiva e qualitativa com auxílio de gráficos e quadros para compreender o QAS**

Nessa etapa da pesquisa, apresentaremos o resultado do QAS. A análise será apresentada para tentar alcançar outro objetivo da pesquisa qual seja: verificar se, na percepção do aluno que está cursando Cálculo I, ele apresenta dificuldades ou não para acompanhar a referida disciplina, bem como se tem dificuldade na definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores que foram estudados no Ensino Médio e, caso haja defasagem na aprendizagem de tais assuntos, quais as influências desta defasagem para o acompanhamento do Cálculo I.

O QAS foi aplicado a 75<sup>39</sup> alunos da UFSJ, sendo 43 alunos do 1º período (2º semestre de 2016) do curso de Engenharia Mecânica e 32 alunos do 1º período (2º semestre de 2016) do curso de Ciências da Computação.

Após análise das informações obtidas pelas respostas do QAS, apresentaremos nessa seção pontos relevantes que, na nossa perspectiva dos objetivos da pesquisa, responderam alguns de nossos questionamentos iniciais. Destacaremos as análises do QAS fazendo, em alguns momentos, distinção dos alunos da UFSJ em dois grupos, conforme abaixo:

- **GRUPO 1 (GEM)** - Alunos que estão cursando Cálculo I, matriculados no curso de Engenharia Mecânica.

---

<sup>39</sup> A partir desse momento faremos referência aos alunos da UFSJ envolvidos na pesquisa por AS01, AS02, AS03, ..., AS75, sendo que de AS01 a AS43 nomeamos os alunos do curso de Engenharia Mecânica e de AS44 a AS75, nomeamos os alunos do curso de Ciências da Computação.

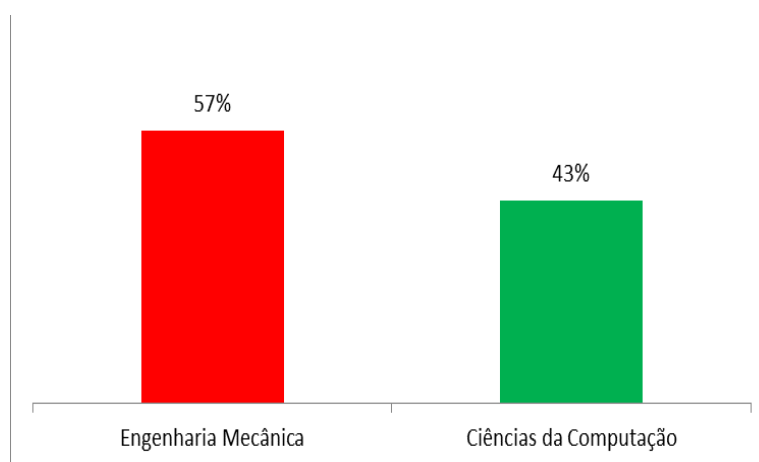
- GRUPO 2 (GCC) - Alunos que estão cursando Cálculo I, matriculados no curso de Ciências da Computação.

Além dos dois grupos acima citados, também faremos a análise destacando o grupo de alunos que já haviam cursado Cálculo I, o qual nomeamos por (S), do grupo de alunos que estão cursando Cálculo I pela primeira vez, o qual nomeamos por (N).

Consideramos importante fazer a distinção entre os alunos da UFSJ nos grupos citados, pois entendemos que assim, nossas conclusões serão mais fiéis à nossa linha de pensamento.

A primeira pergunta se deu para identificarmos os alunos dos respectivos cursos, Engenharia Mecânica e Ciências da Computação: “Você é aluno de qual curso da UFSJ?” O Gráfico 15 abaixo retrata o percentual de alunos de cada curso que respondeu ao QAS. Do GEM foram 43 alunos e do GCC foram 32 alunos.<sup>40</sup>

Gráfico 15 - Respostas à pergunta 1 do QAS: “Você é aluno de qual curso na UFSJ?”



Na segunda pergunta do QAS, perguntamos: “Você está cursando Cálculo I pela primeira vez?”. Dos 75 alunos, 43 responderam que **sim** (57%) e 32 alunos responderam que **não** (43%). Dos que responderam **sim**, 21 são do GEM e 22 do GCC, os que responderam **não** 22 são do GEM e 10 do GCC.

---

<sup>40</sup> O QAS foi aplicado em uma aula de Cálculo I. Conforme já mencionamos anteriormente, todos os alunos que estavam presentes no dia da aplicação foram voluntários a preencher o QAS.



O fato de 43% dos alunos terem cursado Cálculo I nos indica, de certa maneira, que muitos alunos que cursam essa disciplina têm que cursá-la novamente. Considerando que pouco menos da metade dos alunos já fizeram Cálculo I pelo menos uma vez, entendemos que esse número é elevado. Isso, a priori, poderá nos indicar a dificuldade dos alunos em ter sucesso na conclusão do Cálculo I. Essa tendência havia sido mostrada anteriormente por nós quando citamos as pesquisas de Santos (2013) [33], Cabral e Capatani (2003) [8].

Em relação à terceira pergunta do QAS: “Se você tivesse a chance de escolher as disciplinas que fosse estudar no curso que está matriculado atualmente, você escolheria Cálculo I?” Somente 9 (12%) responderam que **não** e os demais, 66 (88%) responderam **sim**. Destacamos abaixo, no Quadro 16, algumas justificativas dos porquês daqueles que responderam “sim” ou “não” a essa pergunta.

Quadro 16 - Justificativas das respostas à Pergunta 3 do QAS

	SIM	NÃO
<b>AS02</b> – <i>Base para o curso de Engenharia</i> (S)	x	
<b>AS06</b> – <i>Porque acredito que Cálculo I seja uma <b>matéria fundamental para que eu entenda outras disciplinas futuras</b> no meu curso.</i> (N)	x	
<b>AS10</b> – <i>Pois é <b>pré-requisito</b> de várias outras matérias e é uma matéria importante no meu curso.</i> (S)	x	
<b>AS11</b> – <i>Apesar de ser uma matéria difícil, <b>cálculo é interessante e bom de se aprender.</b></i> (S)	x	
<b>AS17</b> – <i>É uma matéria que <b>te faz entender melhor as funções</b> com uma visão mais ampla e que é de grande <b>importância para futuras matérias.</b></i> (N)	x	
<b>AS21</b> – <i>É a <b>base</b> da matemática para todos os <b>futuros cálculos.</b></i> (S)	x	
<b>AS22</b> – <i>Porque é uma matéria base. É necessário cursar o Cálculo I, por ser um dos <b>pilares do curso</b>, principalmente o de engenharia mecânica.</i> (S)	x	
<b>AS27</b> – <i>Cálculo é a <b>base</b> para toda a engenharia. Não é possível cursar engenharia sem a disciplina de Cálculo I.</i> (N)	x	
<b>AS54</b> – <i>Pois é <b>essencial</b> para o curso.</i> (N)	X	

<b>AS37</b> - Porque já tinha condições de dar sequência no curso, mas <b>tenho dificuldades</b> em alguns fundamentos do Cálculo. (S)		x
<b>AS47</b> – Porque acho que <b>deveria ter um Cálculo Zero</b> . (N)		x
<b>AS50</b> – Pois <b>não estou tão preparado</b> para a matéria quanto eu precisava. (N)		x
<b>AS52</b> – Porque deveria <b>ter uma preparação antes</b> . (N)		x
<b>AS57</b> – Teria que ter <b>pré-cálculo, ou uma introdução</b> mais vinculada com o curso. (N)		x
<b>AS75</b> – Porque cálculo I é <b>necessário para</b> o entendimento das <b>disciplinas futuras</b> do curso. (N)	x	

Fizemos uma seleção das justificativas da pergunta 3 buscando apresentar as diversas motivações. Esclarecemos que a maioria das justificativas tem, em outras palavras, o mesmo sentido das que selecionamos.

A maioria das justificativas dos alunos que responderam que escolheriam a disciplina de Cálculo I entendem a necessidade da disciplina para o curso e, portanto, a valorizam, já os que responderam que não escolheriam sugerem uma preparação anterior, como por exemplo um pré-Cálculo. Essas nossas impressões podem ser confirmadas pelas marcações em negrito que fizemos no Quadro 15.

Os termos destacados com negrito não estão no original, mas assim o fizemos para colocarmos atenção às palavras dos alunos sobre suas percepções da justificativa de que caso tivessem a opção, escolheriam a disciplina de Cálculo I para cursar ou não.

A grande maioria dos alunos, ou seja, 65 (87%) dos 75 alunos disseram **sim** à quarta pergunta do QAS “No Ensino Médio, você teve, no currículo, o conteúdo de definição de função e elementos estruturantes das funções, com ênfase na notação de função, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função?”.

Na quinta e sexta perguntas do QAS que diziam, respectivamente: “Que importância você atribuía ao estudo de funções quando era aluno do Ensino Médio?” e “Após este período de estudo no curso de Cálculo I, que importância você atribui ao estudo de funções?” temos o resultado explicitado nos Gráficos 16 e 17 abaixo.

Gráfico 16 - Respostas à pergunta 5 do QAS: “Que importância você atribuiu ao estudo de funções quando era aluno do Ensino Médio?”

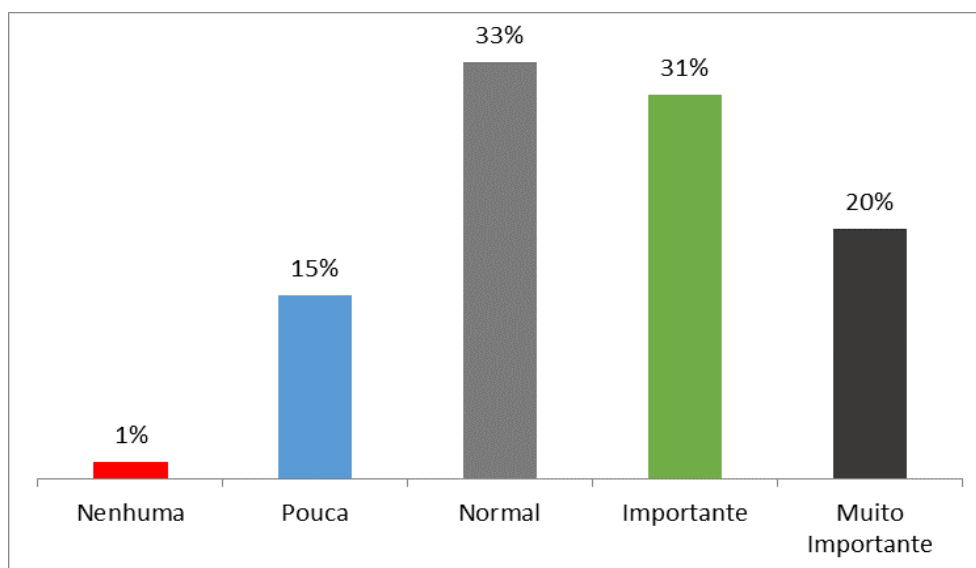
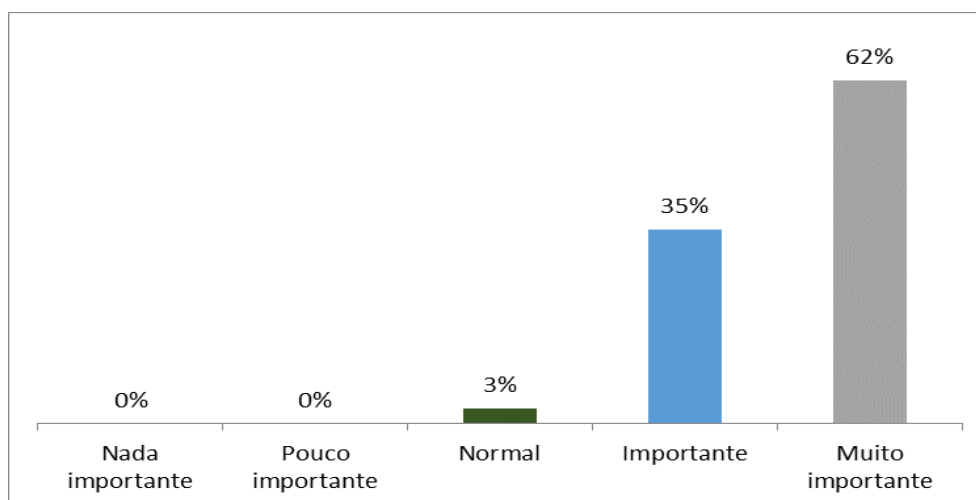


Gráfico 17 - Respostas à pergunta 6 do QAS: “Após este período de estudo no curso de Cálculo I, que importância você atribui ao estudo de funções?”



Observando os gráficos acima podemos verificar que após este período estudando Cálculo I a maioria dos alunos, ou seja, 97%, percebe que o estudo de funções é importante ou muito importante, enquanto que antes, no Ensino Médio, cerca da metade dos alunos, ou seja, 51% davam essas atribuições ao estudo de funções.

Em relação à pergunta 5, dos alunos do GEM, 6 davam pouca importância ao estudo de funções, 14 julgavam que era normal, 14

consideravam importante e somente 9 entendiam como muito importante. Dos alunos do GCC, 1 aluno marcou que não dava nenhuma importância, 5 assinalaram pouca, 11 consideravam normal, 9 importante e 6 muito importante.

As respostas à pergunta 6<sup>41</sup>, levando em conta o GEM, foi que nenhum aluno considera nada importante ou pouco importante o estudo de funções após esse período estudando Cálculo I, 1 aluno considera normal, 10 alunos importante e 31 alunos assinalaram muito importante. Em relação aos alunos do GCC, somente 1 aluno assinalou normal o estudo de funções depois de estar cursando Cálculo I, 16 alunos consideraram importante e 15 alunos muito importante.

Nota-se, em ambos os grupos, GEM e GCC, que houve mudança de opinião em relação à importância dada ao ensino de funções, após esse período de estudo de Cálculo I o que explica também as respostas obtidas na questão 3.

A seguir, nos quadros 17 e 18 apresentaremos alguns depoimentos com relação à atribuição de valor que eles deram às perguntas 5 e 6. Em cada depoimento indicaremos ao final qual foi a marcação realizada pelo aluno relativas às perguntas 5 e 6. No Quadro 17, apresentamos os depoimentos dos alunos do GEM e no Quadro 18 os depoimentos dos alunos do GCC, assim como o grau de importância que davam no assunto funções no Ensino Médio e após esse período de estudo de Cálculo I, respectivamente.

Quadro 17 - Justificativa da atribuição dada às perguntas 5 e 6 do QAS - GEM

DEPOIMENTOS/ATRIBUIÇÃO DADA ÀS PERGUNTAS 5 E 6, REPECTIVAMENTE – GEM	ALUNO
--	-------

<sup>41</sup> Por uma falha de impressão no questionário QAS, um aluno não respondeu às perguntas 6 a 11. Como o aluno não reclamou enquanto estava preenchendo o questionário, somente verificamos isso ao transcrever as informações. Dessa forma, nessas perguntas consideraremos um universo de 74 alunos.

<p><i>Desdenhava funções pois não via utilidade no dia a dia, mas com a chegada do Cálculo I percebi que funções são bem importantes.</i></p> <p><b>Pouca/Muito importante</b></p>	<b>AS04</b>
<p><i>No ensino médio o curso de funções não foi dado com a devida importância, já na faculdade, pude ver que o estudo de funções é extremamente importante.</i></p> <p><b>Normal/Muito importante</b></p>	<b>AS07</b>
<p><i>No ensino médio o estudo de funções foi tido com uma matéria normal, sem o professor enfatizar que seria uma matéria “cobrada” no curso de engenharia. Já no ensino superior, a cobrança é maior, mostrando que o estudo das funções é mais importante do que imaginávamos.</i></p> <p><b>Normal/Importante.</b></p>	<b>AS17</b>
<p><i>Com o estudo de Cálculo I foi possível dar maior significado ao estudo de funções, tornando-o mais importante.</i></p> <p><b>Importante/Muito importante</b></p>	<b>AS20</b>
<p><i>Quando a gente está no Ensino Médio não consideramos tantas coisas assim importantes mas percebemos que quando entramos no Ensino Superior essas coisas que não demos importância no passado tem importância sim.</i></p> <p><b>Normal/Importante</b></p>	<b>AS25</b>
<p><i>Em meu ensino médio o “valor” dado às funções foi pouco, tanto pelo professor quanto por mim, e por esse motivo eu cheguei ao ensino superior com uma base fraca quando o assunto é função, o que é muito importante em meu curso.</i></p> <p><b>Pouca/Importante.</b></p>	<b>AS36</b>
<p><i>Porque sem a base do ensino de funções não seríamos capaz[es] de acompanhar a disciplina, pois no curso o tempo é mais corrido, se nós não soubéssemos nada de função não conseguimos acompanhar a disciplina.</i></p> <p><b>Muito importante/Muito importante</b></p>	<b>AS38</b>
<p><i>No ensino médio considerava necessário pois sabia que influenciaria no curso superior que escolhi. Dentro da disciplina Cálculo I, o estudo de funções é fundamental para compreender limites e mais para frente elaboração de gráficos.</i></p> <p><b>Normal/Muito importante</b></p>	<b>AS40</b>
<p><i>Não dava o devido valor no ensino médio, por essa matéria não ser cobrada tão a fundo no enem, ou seja, precisava focar em outras matérias.</i></p> <p><b>Pouca/Importante</b></p>	<b>AS43</b>

Quadro 18 - Justificativa da atribuição dada às perguntas 5 e 6 do QAS - GCC

DEPOIMENTOS/ATRIBUIÇÃO DADA ÀS PERGUNTAS 5 E 6, REPECTIVAMENTE – GCC	ALUNO
<p><i>No ensino médio eu achava que não usaria funções, hoje vejo que precisarei para minha vida profissional.</i>  <b>Normal/Importante</b></p>	AS47
<p><i>Entrando na faculdade e cursando cálculo I deu para ver que função é muito mais do que aprendemos na escola.</i>  <b>Normal/Importante</b></p>	AS49
<p><i>No ensino médio eu não via aplicações práticas para os estudos das funções, tanto que no 1º período não dei importância ao cálculo, dando importância somente as matérias de computação. Nas matérias de computação comecei a ver aplicações práticas para o estudo das funções.</i>  <b>Nenhuma/Muita importância.</b></p>	AS51
<p><i>Encontrei grandes problemas pois não obtive uma “base” de qualidade.</i>  <b>Importante/Muito Importante</b></p>	AS55
<p><i>No ensino médio eu não sabia para o que servia funções, agora na faculdade eu sei a importância.</i>  <b>Pouca/Muito importante</b></p>	AS56
<p><i>Simplesmente o que aconteceu foi que a matéria funções na escola também não foi “vinculada” a nada que fosse útil futuramente, como poderia ser usada no futuro.</i>  <b>Normal/Muito importante</b></p>	AS57
<p><i>Não existe um incentivo no ensino médio, talvez porque o assunto é solto. Já no Cálculo I é mais direto e aplicado, daí a importância.</i>  <b>Normal/Importante</b></p>	AS67
<p><i>O estudo de funções é de extrema importância para o aprendizado de pessoas que pretendem seguir algum curso da área de exatas, o estudo prévio delas facilita muito a vida acadêmica do aluno.</i>  <b>Importante/Muito importante</b></p>	AS68
<p><i>Não era tão importante considerando que meu professor não deu muito foco em funções no ensino médio.</i>  <b>Norma/Importante</b></p>	AS73
<p><i>No ensino médio, as aulas eram mal dadas e por isso não estimulava o interesse.</i>  <b>Pouca/Importante</b></p>	AS74

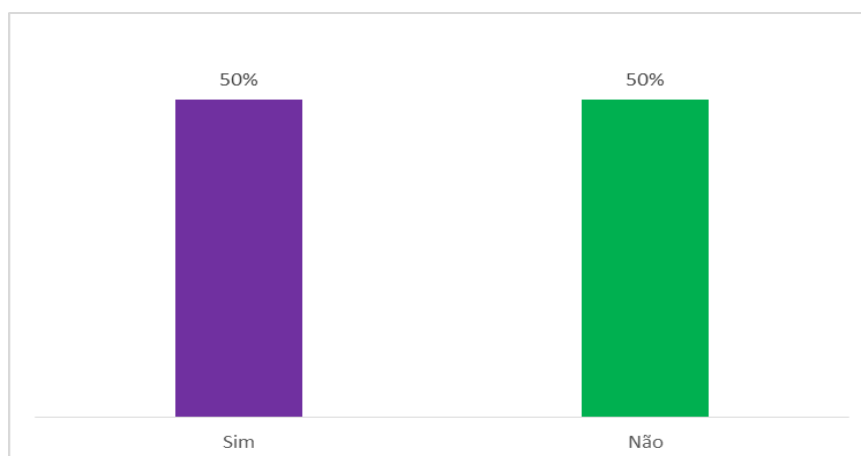
Dentre os depoimentos dados pelos alunos da UFSJ quanto às perguntas 5 e 6, percebemos justificativas bem parecidas nos grupos GEM e GCC. Muitas outras respostas foram similares com as que destacamos nos Quadros 17 e 18 acima, por isso fizemos uma seleção.

Em linhas gerais a maioria das justificativas concentra-se, por parte dos alunos, em: não via utilidade em funções e com o Cálculo I passou a enxergar a utilidade; faltou aprofundamento do assunto no Ensino Médio; falta de maturidade do aluno de Ensino Médio para o estudo de funções; pouca ênfase por parte do professor do Ensino Médio; o não conhecimento da importância de função para cursos de engenharia; no ENEM não se cobra tanto o assunto e falta de base.

Alguns alunos demonstraram saber a importância do assunto para o curso o qual seriam candidatos a entrar na universidade. Esses justificam que tinham intenção prévia sobre o curso que fariam.

A pergunta 7 do QAS foi: “Você considera que a abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava no Ensino Médio foi suficiente para você estar acompanhando o curso de Cálculo I?”. O Gráfico 18 abaixo tem o quantitativo de alunos que marcaram **sim** ou **não**.

Gráfico 18 - Respostas à pergunta 7 do QAS: Você considera que a abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava no Ensino Médio foi suficiente para você estar acompanhando o curso de Cálculo I?”



Comparando os resultados por grupos temos: responderam **sim** 23 alunos do GEM e 14 alunos do GCC e responderam **não** 19 alunos do GEM e 18 alunos do GCC. Vemos que há mais alunos do GEM que consideraram suficiente a abordagem. Registraremos abaixo no Quadro 19 as justificativas de quem marcou **sim** por grupo GEM e GCC e no Quadro 20 as justificativas de quem marcou **não**, também por grupo GEM e GCC.

Quadro 19 - Justificativa de ter assinalado sim à perguntas 7 do QAS

ASSINALOU SIM À PERGUNTA 7 – GEM	ALUNO
<i>Pois o <b>conteúdo</b> foi <b>bem passado na minha antiga escola</b>.</i>	<b>AS04</b>
<i>Foi o <b>suficiente</b>, mas eu <b>não estudei</b> o necessário.</i>	<b>AS10</b>
<i>Estudei em <b>escola particular</b> e acredito que <b>tive um ensino médio completo</b>, mesmo não me importando na época.</i>	<b>AS12</b>
<i>Apesar de algumas dificuldades, <b>fui bastante cobrado</b>. Tendo hoje que apenas recordar algumas coisas.</i>	<b>AS17</b>
<i>Na verdade <b>mais ou menos</b> porque no ensino médio <b>não aprofundamos</b> tanto na matéria, só usamos superficialmente</i>	<b>AS25</b>
<i>Os fundamentos apresentados a mim <b>foram os necessários</b> para entender funções, mas <b>sem muitos detalhes</b></i>	<b>AS29</b>
ASSINALOU SIM À PERGUNTA 7 – GCC	ALUNO
<i>Porque eu estudava em uma <b>boa escola</b>.</i>	<b>AS48</b>
<i>Porque a <b>professora era bem detalhista</b> e explicou bem a matéria.</i>	<b>AS62</b>
<i>Pois como eu vim de uma <b>escola particular</b> que <b>dá uma base muito boa</b>, o estudo feito no EM foi bem suficiente.</i>	<b>AS68</b>



Quadro 20 - Justificativa de ter assinalado não à pergunta 7 do QAS

ASSINALOU NÃO À PERGUNTA 7 - GEM	ALUNO
<i>Porque vi funções de uma maneira <b>superficial</b> e não tive professores bons.</i>	AS01
<i>Alguns conteúdos <b>não foram ensinados</b>, como <b>função exponencial, logarítmica e trigonométrica</b>.</i>	AS02
<i>Pois <b>não foi uma base suficientemente boa</b> para a compreensão prévia do estudo de limites e derivadas.</i>	AS05
<i>Pois meu professor do ensino médio <b>não deu muita ênfase</b> no estudo de função.</i>	AS07
<i>Porque foi ensinada de maneira <b>superficial</b>.</i>	AS15
<i>Na escola em que estudei sequer foi ministrado função constante, máximo e mínimo, etc. A <b>abordagem foi apenas o simples possível sobre função do 1º e 2º grau</b>.</i>	AS27
<i>Alguns conteúdos essenciais para acompanhar o curso de Cálculo I <b>não foram ensinados</b>, tais como: <b>logaritmo natural, número de Euler, funções trigonométricas, inversas</b>, entre outros.</i>	AS30
<i>Pois as <b>questões eram muito básicas</b> e querendo ou não Cálculo I você precisa treinar muitos exercícios.</i>	AS35
<i>Porque eu comecei a aprender coisas em cálculo que só poderiam ser entendidas se eu já tivesse conhecimento bom sobre funções e a parte <b>básica/elementos da matemática, e eu não tinha</b>.</i>	AS36
<i>Apesar de ser um tema presente no Ensino Médio ele <b>não é abordado com profundidade necessária</b>.</i>	AS41
<i>Porque foi uma <b>abordagem muito fraca e simples</b> sobre tudo e as vezes até <b>distorcida</b>.</i>	AS42
<i>Porque <b>no cálculo se cobra função muito mais a fundo e com uma pluralidade muito maior de elementos, para os quais não vim devidamente preparado do ensino médio</b>.</i>	AS43
ASSINALOU NÃO À PERGUNTA 7 - GCC	ALUNO
<i>Era <b>muito básica</b>.</i>	AS50
<i>O estudo foi <b>defasado</b>.</i>	AS55

<i>Porque <b>não foi passada a matéria mais aprofundada.</b></i>	<b>AS57</b>
<i>Não, pela forma que me foi passado o conteúdo, além da <b>falta de incentivo</b>, acredito que estes fatores tornaram difícil a aprendizagem, que conseqüentemente atrapalhou meu rendimento na disciplina de cálculo I.</i>	<b>AS58</b>
<i><b>Focava apenas na resolução dos exercícios e não no entendimento dos conceitos</b> relacionados.</i>	<b>AS63</b>
<i>Acho que o que foi aplicado no ensino médio não é condizente ao que é cobrado no curso de Cálculo I. O que foi passado no ensino médio <b>é o básico.</b></i>	<b>AS64</b>
<i>Porque a <b>abordagem não foi muito completa</b>, então cheguei aqui com bastante dificuldade no assunto.</i>	<b>AS73</b>
<i>Porque <b>não cheguei a ver totalmente a matéria</b> no ensino médio.</i>	<b>AS74</b>

Analisando o quantitativo de marcações à questão 7, verificamos que 50% dos alunos da UFSJ consideram que a abordagem de funções que tiveram no Ensino Médio tenha sido suficiente e os outros 50% consideram que não foi suficiente.

Fizemos uma seleção das justificativas, conforme apresentado nos Quadros 19 e 20 acima buscando colocar os elementos mais identificados pelos alunos para justificarem suas respostas.

As marcações em negrito de alguns trechos das justificativas elencadas são de uma seleção feita por nós buscando destacar os comentários mais frequentes. Essas marcações indicam nossas percepções e nos mostram o pensamento dos alunos da UFSJ quanto à bagagem que chegou de função para poder realizar o curso de Cálculo I.

Verificamos que para quem marcou **sim** (Quadro 19), o que mais influenciou foi: a **escola particular** dando uma **boa base** para o aluno e também **a forte cobrança**, o **conteúdo bem** passado e também **o suficiente**. Nos chama a atenção a justificativa de alguns alunos que assinalaram sim à pergunta 7, em que afirmam que o conteúdo não foi aprofundado e também foi ministrado sem muitos detalhes. Outro ponto que destacamos foi o fato de alguns dizerem que foi por falta de estudo deles mesmos.

Em relação ao Quadro 20, dos comentários dos alunos que assinalaram não à pergunta 7, evidenciamos das justificativas dadas pelos alunos o que

mais nos parece relevante. São eles: **abordagem fraca, incompleta e defasada** do conteúdo de funções, **omissão de alguns conteúdos** como, por exemplo, funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas; número de Euler; logaritmo natural e função inversa; além de ser também mencionadas a **falta de conhecimento sobre funções e elementos básicos**<sup>42</sup> e a **falta de entendimento dos conceitos**, aliadas ao treino de **questões básicas** e elementares, o que, na visão de alguns alunos, não é suficiente para acompanhar a disciplina de Cálculo I.

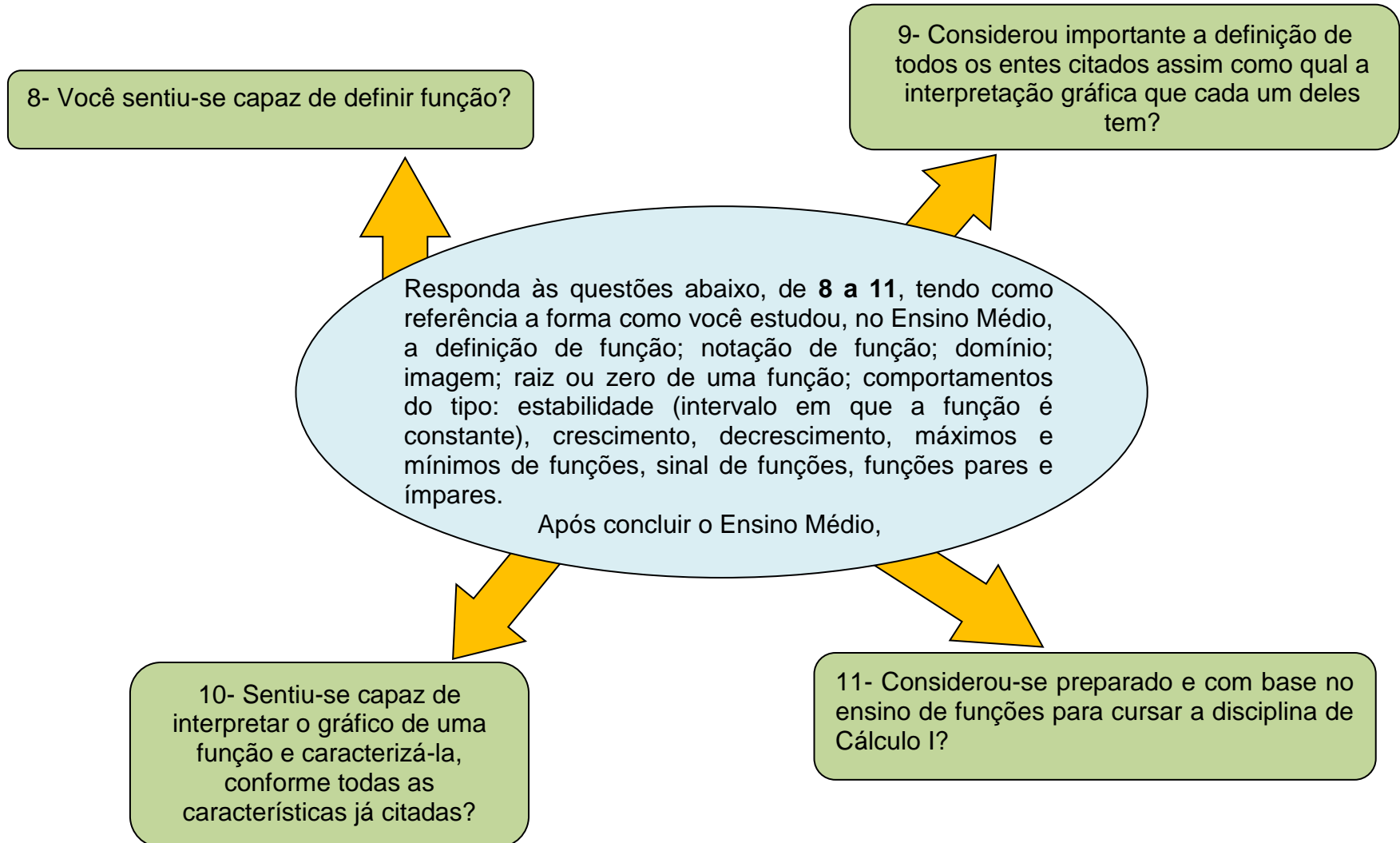
Destacamos a seguir os resultados das questões de 8 a 11. Solicitamos nessas perguntas que o aluno, ao responder os questionamentos tivesse como referência a forma como estudou, no Ensino Médio, a definição de função; notação de função; domínio; imagem; raiz ou zero de uma função; comportamentos do tipo: estabilidade (intervalo em que a função é constante), crescimento, decrescimento, máximos e mínimos de funções, sinal de funções, funções pares e ímpares.

A Figura 45 abaixo contém essas perguntas. Logo após essa figura apresentamos os Gráficos 17 a 20 com o resultado das respostas. Também elucidaremos, após esses gráficos, nossas impressões acerca das marcações escolhidas pelos alunos da UFSJ.

---

<sup>42</sup> Entendemos que essa falta de conhecimentos de elementos básicos se refere aos elementos estruturantes e caracterizadores de uma função.

Figura 45 - Perguntas 8 a 11 do QAS



Indicamos a seguir, nos Gráficos 19 a 22, um panorama quantitativo sobre as percepções dos alunos da UFSJ quanto as perguntas 8 a 11.

Gráfico 19 - Respostas à pergunta 8 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Você sentiu-se capaz de definir função?”

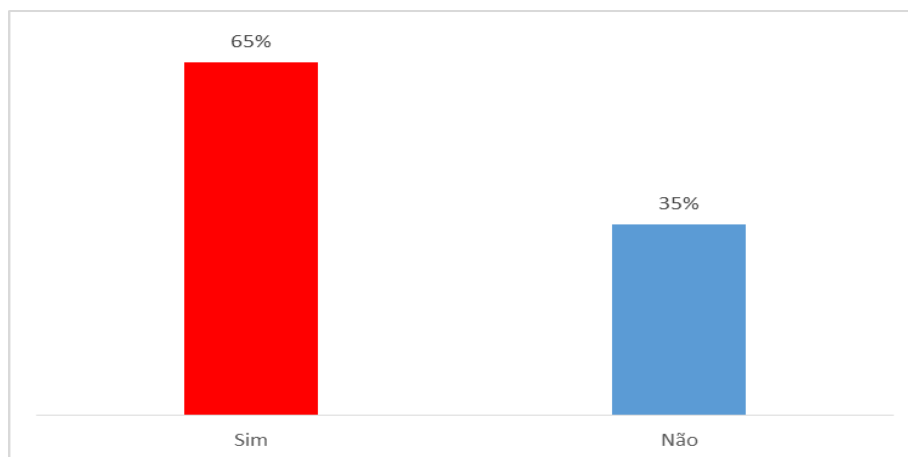


Gráfico 20 - Respostas à pergunta 9 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem?”

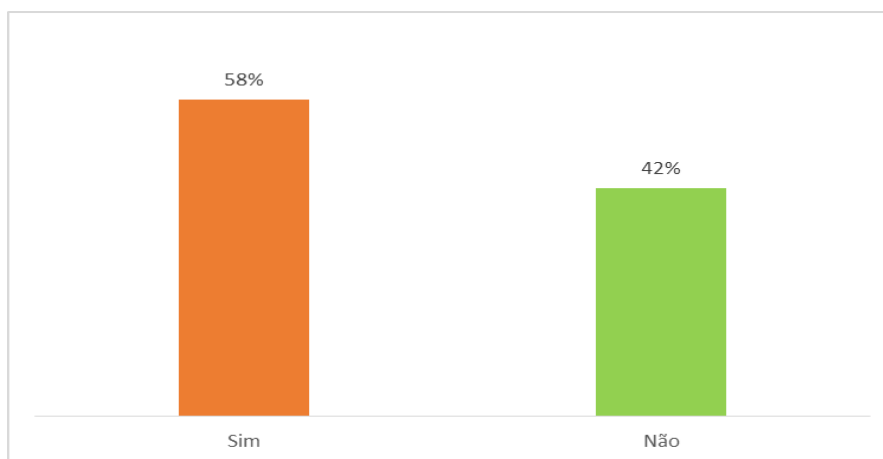


Gráfico 21 - Respostas à pergunta 10 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Sentiu-se capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?”

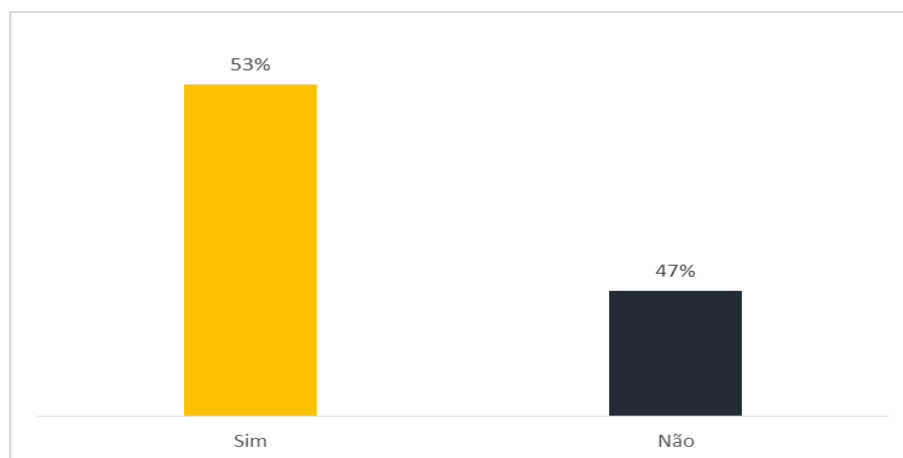
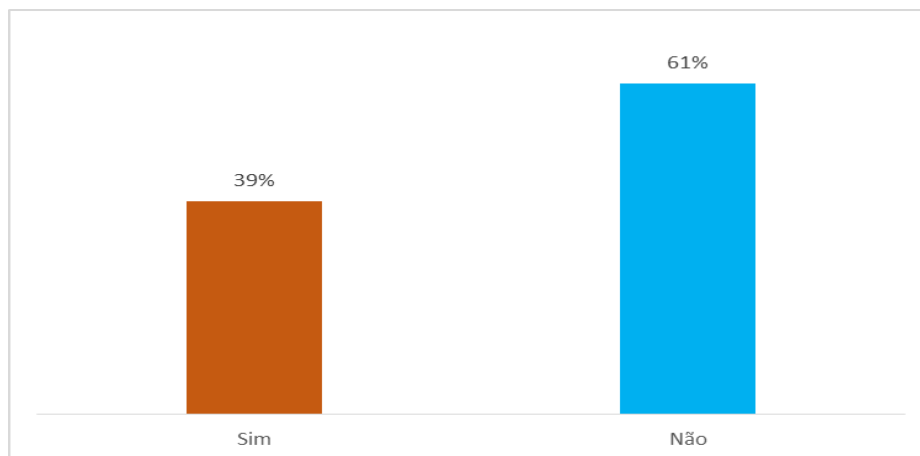


Gráfico 22 - Respostas à pergunta 11 do QAS: Após concluir o Ensino Médio, “Considerou-se preparado e com base no ensino de funções para cursar a disciplina de Cálculo I?”



O quadro abaixo apresenta a quantidade de alunos que respondeu **sim** ou **não** às perguntas 8 a 11, separadas por grupo GEM e GCC.

Quadro 21 - Respostas às perguntas 8 a 11 por grupo: GEM e GCC

	<b>SIM</b>	<b>NÃO</b>
<b>PERGUNTA 8:</b> Após concluir o Ensino Médio, “Você sentiu-se capaz de definir função?”	<b>GEM:</b> 30 <b>GCC:</b> 18	<b>GEM:</b> 12 <b>GCC:</b> 14
<b>PERGUNTA 9:</b> Após concluir o Ensino Médio, “Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem?”	<b>GEM:</b> 23 <b>GCC:</b> 20	<b>GEM:</b> 19 <b>GCC:</b> 12
<b>PERGUNTA 10:</b> Após concluir o Ensino Médio, “Sentiu-se capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?”	<b>GEM:</b> 25 <b>GCC:</b> 14	<b>GEM:</b> 17 <b>GCC:</b> 18
<b>PERGUNTA 11:</b> Após concluir o Ensino Médio, “Considerou-se preparado e com base no ensino de funções para cursar a disciplina de Cálculo I?”	<b>GEM:</b> 18 <b>GCC:</b> 11	<b>GEM:</b> 24 <b>GCC:</b> 21

Analisando os resultados do Quadro 21, com relação às perguntas de 8 a 11, podemos verificar que, ao concluir o Ensino Médio, dos alunos dos grupos GEM e GCC pouco mais da metade sentiram-se capazes de: definir função (pergunta 8), interpretar o gráfico de uma função conforme todas as características de uma função (pergunta 10) e também pouco mais da metade considerou importante a definição dos entes caracterizadores de uma função assim como a interpretação gráfica de cada um deles (pergunta 9).

No nosso entendimento, esse é um resultado que influencia nos acompanhamento e desenvolvimento que esses alunos estão tendo em Cálculo I, haja visto que quase dois terços dos alunos que preencheram o QAS não se consideraram preparados e com base no ensino de funções para cursar a disciplina de Cálculo I (pergunta 11). Entendemos que, numa situação ideal, as porcentagens deveriam estar maiores ou iguais a 75%.

Até o momento, tendo como motivação para a aplicação do QAS verificar se na percepção do aluno que está cursando Cálculo I ele apresenta dificuldades ou não para acompanhar a referida disciplina, bem como se tem dificuldade no assunto funções, principalmente no que se refere à caracterização, percebemos que, na visão dos alunos dos grupos GEM e GCC, esta dificuldade se dá para cerca da metade deles.

De certa maneira, é importante, nesse momento, considerarmos também que 43% desses alunos que preencheram o QAS não estão fazendo Cálculo I pela primeira vez, conforme já destacado por nós na apresentação dos quantitativos da pergunta 2, o que de certa forma reforça a dificuldade de acompanhar a disciplina de Cálculo I.

Sobre a pergunta 12, apresentamos no Quadro 22, a seguir, os resultados, e, em seguida, serão destacados os Gráficos 23 a 28, com os quantitativos dos resultados. É importante destacar que para que os alunos respondessem aos questionamentos da pergunta 12 (de **a** até **f**) foi solicitado o seguinte: *“Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule **apenas um** dos números para indicar sobre suas percepções sobre o ensino de Funções que você teve no Ensino Médio e sobre o seu aprendizado na disciplina de Cálculo. Use de 5 = “excelente”, até 1 = “fraco”.*”



Quadro 22 - Respostas aos questionamentos da pergunta 12 por grupo GEM e GCC

QUESTIONAMENTOS	<p style="text-align: center;"><b>NOTA</b>  <b>VARIAÇÃO: 1-2 -3-4-5</b>  <b>De 5 = excelente até 1 = fraco</b></p>
a) O quanto você acha que aprendeu sobre o assunto funções no Ensino Médio?	<p><b>Nota 5:</b> GEM: 2 alunos e GCC: 1 aluno.  <b>Nota 4:</b> GEM: 14 alunos e GCC: 09 alunos.  <b>Nota 3:</b> GEM: 19 alunos e GCC: 9 alunos.  <b>Notas 2 :</b> GEM: 8 alunos e GCC: 10 alunos.  <b>Notas 1:</b> GEM: nenhum aluno e GCC: 3 alunos.</p>
b) O quanto você acha que ficou bom no assunto “definição de função e propriedades caracterizadoras”, no Ensino Médio?	<p><b>Nota 5:</b> GEM: 2 alunos e GCC: 1 aluno.  <b>Nota 4:</b> GEM: 10 alunos e GCC: 5 alunos.  <b>Nota 3:</b> GEM: 21 alunos e GCC: 10 alunos  <b>Notas 2:</b> GEM: 9 alunos e GCC: 12 alunos.  <b>Notas 1:</b> GEM: 1 aluno e GCC: 4 alunos.</p>
c) O quanto você foi capaz de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características, após concluir o Ensino Médio?	<p><b>Nota 5:</b> GEM: 2 alunos e GCC: 2 alunos.  <b>Nota 4:</b> GEM: 14 alunos e GCC: 10 alunos.  <b>Nota 3:</b> GEM: 18 alunos e GCC: 11 alunos  <b>Notas 2:</b> GEM: 7 alunos e GCC: 4 alunos.  <b>Notas 1:</b> GEM: 2 alunos e GCC: 5 alunos.</p>
d) O quanto você consegue resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções, após concluir o Ensino Médio?	<p><b>Nota 5:</b> GEM: nenhum aluno e GCC: 2 alunos.  <b>Nota 4:</b> GEM 9 alunos e GCC: 6 alunos.  <b>Nota 3:</b> GEM: 19 alunos e GCC: 10 alunos.  <b>Notas 2:</b> GEM: 13 alunos e GCC: 11 alunos.  <b>Notas 1:</b> GEM: 2 alunos e GCC: 3 alunos.</p>
e) O quanto você considera que o conhecimento de funções pode contribuir para seu desempenho no curso de Cálculo?	<p><b>Nota 5:</b> GEM: 27 alunos e GCC: 15 alunos.  <b>Nota 4:</b> GEM 11 alunos e GCC: 12 alunos.  <b>Nota 3:</b> GEM: 4 alunos e GCC: 1 aluno.  <b>Notas 2:</b> GEM: 1 aluno e GCC: 3 alunos.  <b>Notas 1:</b> GEM: nenhum aluno e GCC: 1 aluno.</p>
f) Até o momento, o quanto você acha que está bom na disciplina de Cálculo?	<p><b>Nota 5:</b> GEM: 3 alunos e GCC: 2 alunos.  <b>Nota 4:</b> GEM 9 alunos e GCC: 6 alunos.  <b>Nota 3:</b> GEM: 20 alunos e GCC: 16 alunos.  <b>Notas 2:</b> GEM: 10 alunos e GCC: 4 alunos.  <b>Notas 1:</b> GEM: 1 aluno e GCC: 4 alunos.</p>

Gráfico 23 - Percentual da Resposta à pergunta 12a do QAS

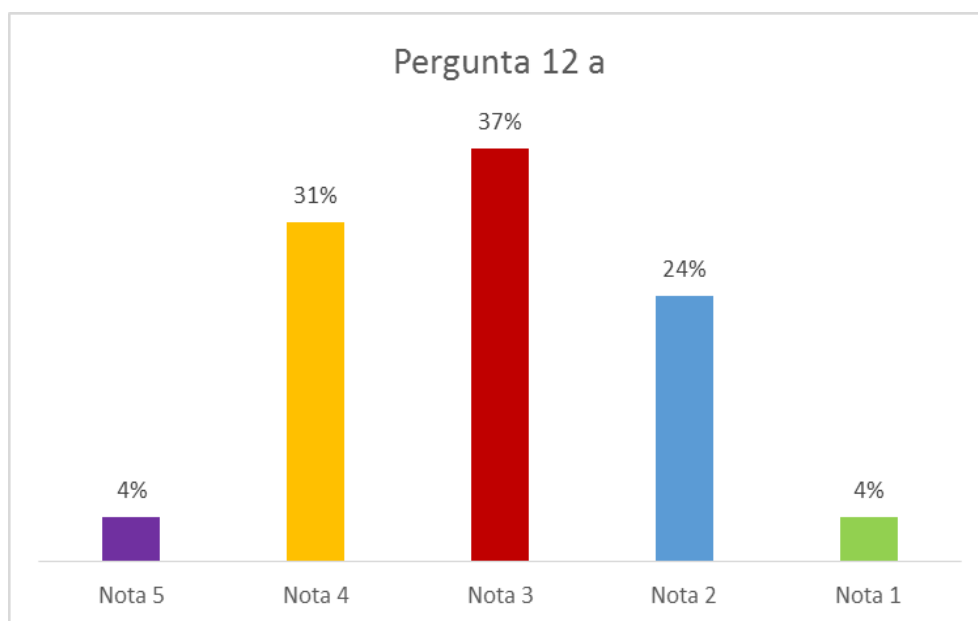


Gráfico 24 - Percentual da Resposta à pergunta 12b do QAS

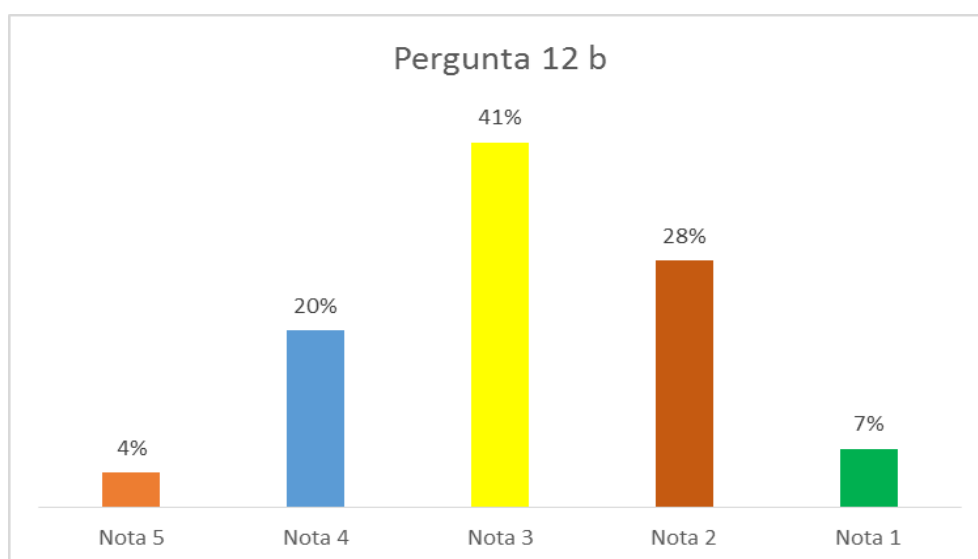


Gráfico 25 - Percentual da Resposta à pergunta 12c do QAS

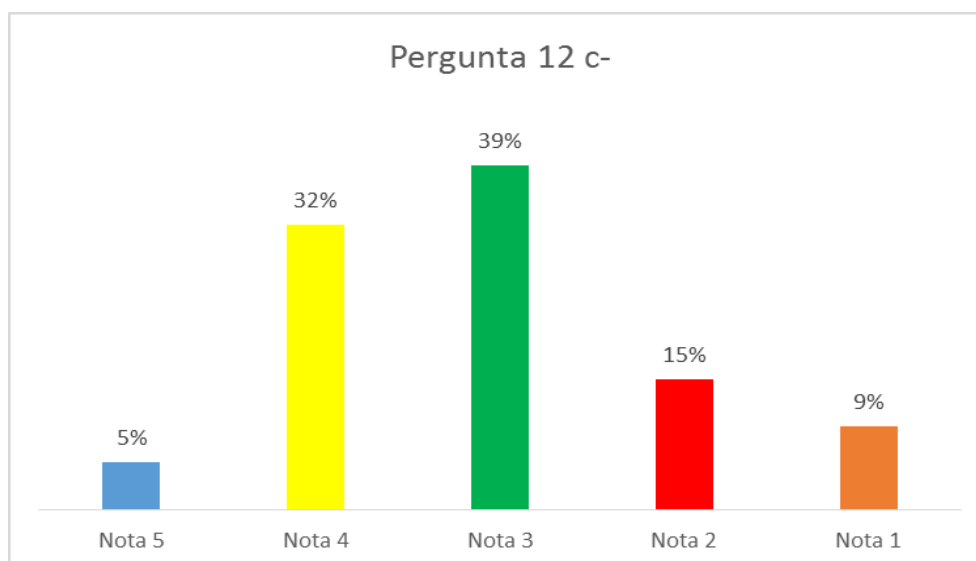


Gráfico 26 - Percentual da Resposta à pergunta 12d do QAS

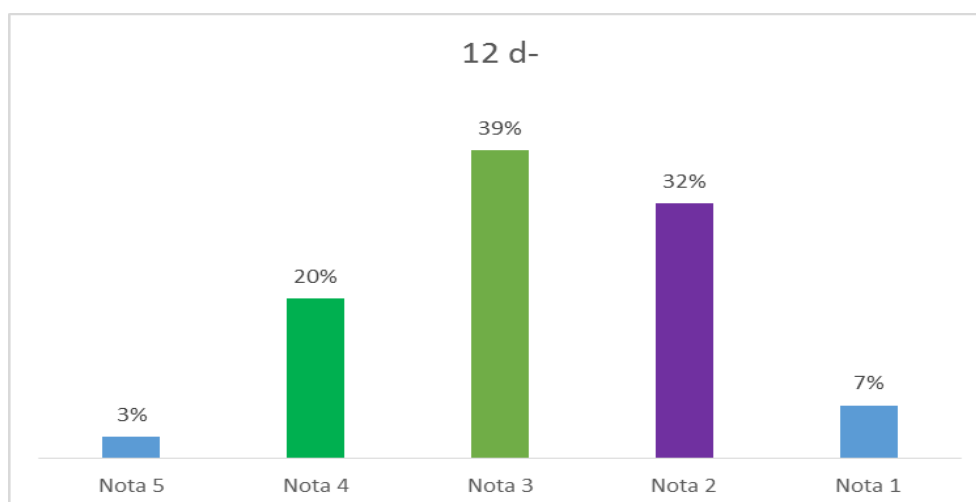


Gráfico 27 - Percentual da Resposta à pergunta 12e do QAS

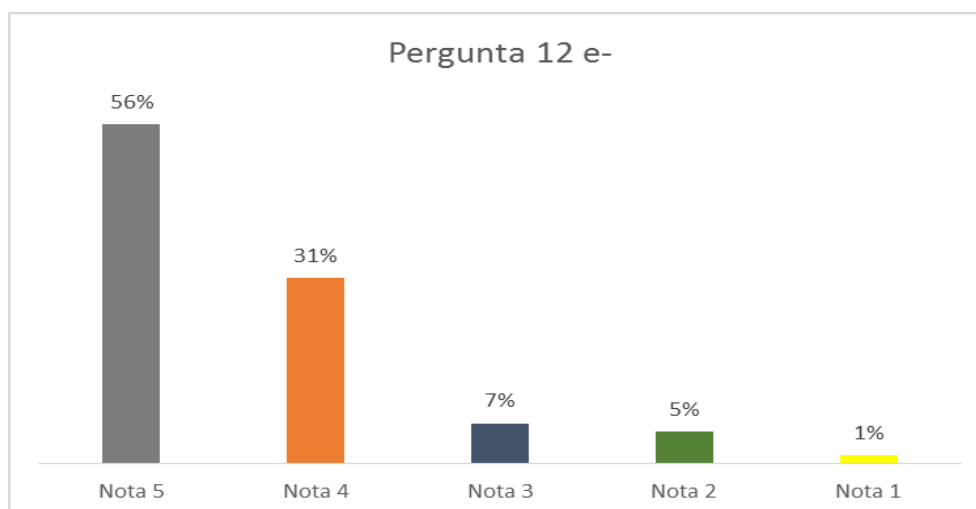
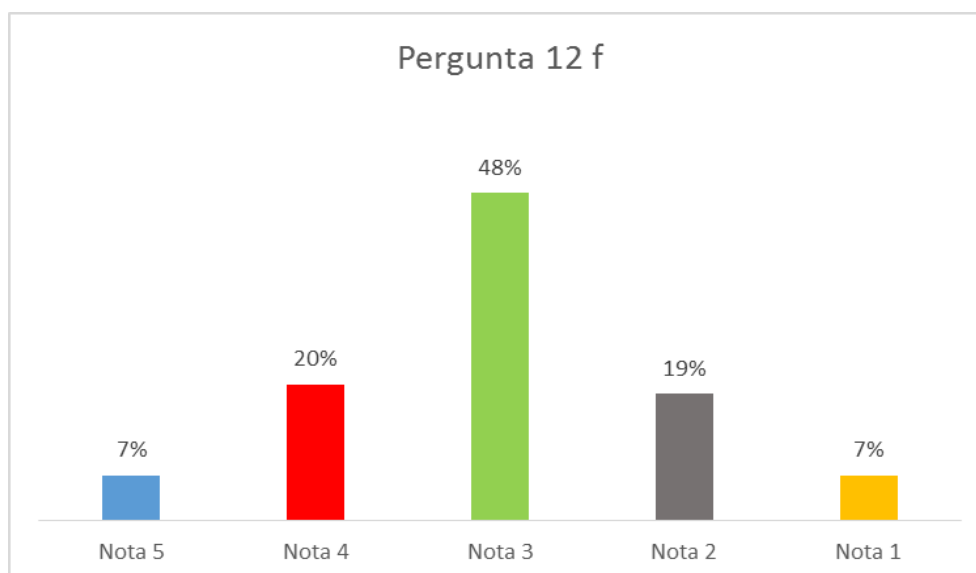


Gráfico 28 - Percentual da Resposta à pergunta 12f do QAS



Com relação às respostas da questão 12, percebemos que nos questionamentos 12a, 12b, 12c, 12d e 12f a maioria dos alunos, quando têm que dar uma nota a algum comportamento seu diante da aprendizagem de função no Ensino Médio e atualmente de Cálculo I atribui nota 3, enquanto que quando têm que quantificar o quanto consideram que o conhecimento de funções pode contribuir para seu desempenho no curso de Cálculo, a atribuição dada pela maioria é nota 5 ou 4, cerca de 87% dos alunos.

Esses dados podem nos sugerir que os alunos apresentam alguma dificuldade no assunto funções e seus elementos estruturantes e

caracterizadores, assim como essa defasagem tem interferido no resultado deles em Cálculo I. Pareceu-nos que uma marcação de resultados na centralidade dos pontos poderia ser mais cômoda para os alunos.

A pergunta 13 do QAS dizia: “Você tem apresentado dificuldades para acompanhar o curso de Cálculo I?” De todos os 75 alunos, 43 (57%) afirmaram que sim, sendo que 26 são do GEM e 17 do GCC e 32 (43%) assinalaram que não, sendo 17 do GEM e 15 do GCC.

No Quadro 23, que apresentamos a seguir, destacamos a explicação de alguns alunos quanto ao fato de estar com dificuldade ou não para acompanhar o curso de Cálculo I, diferenciando os alunos que já cursaram Cálculo I alguma vez (S) dos alunos que estão cursando pela primeira vez (N), procurando selecionar as justificativas para não ficar repetitivo.

Quadro 23 - Respostas aos questionamentos da pergunta 13 por grupo GEM e GCC - Você tem apresentado dificuldades para acompanhar o curso de Cálculo I?”

<b>GRUPO DE ALUNOS QUE JÁ CURSOU CÁLCULO I ALGUMA VEZ (S)</b>	<b>SIM</b>	<b>NÃO</b>
<b>AS01</b> – <i>Porque já estudei Cálculo I anteriormente e já tenho noção, mas na primeira vez apresentei muita dificuldade.</i>		X
<b>AS07</b> – <i>Questões que são necessários um maior conhecimento prévio de funções, apresentaram grande dificuldade para mim.</i>	X	
<b>AS12</b> – <i>Já fui apresentado à disciplina de Cálculo I em outro curso.</i>		X
<b>AS13</b> – <i>É a segunda vez que faço a matéria.</i>		X
<b>AS21</b> – <i>Após cursar o cálculo I pela terceira vez me sinto mais preparado agora.</i>	X	
<b>AS29</b> – <i>O curso em si não apresenta grandes dificuldades, apenas é necessário ter a base.</i>		X
<b>AS30</b> – <i>Na primeira vez que cursei a disciplina o professor fez uma revisão muito rápida sobre o que vimos no Ensino Médio.</i>	X	
<b>AS36</b> – <i>Como já dito eu já precisava ter um bom conhecimento de funções.</i>	X	
<b>AS37</b> – <i>Acho difícil acompanhar pelo fraco ensino médio que tive.</i>	X	

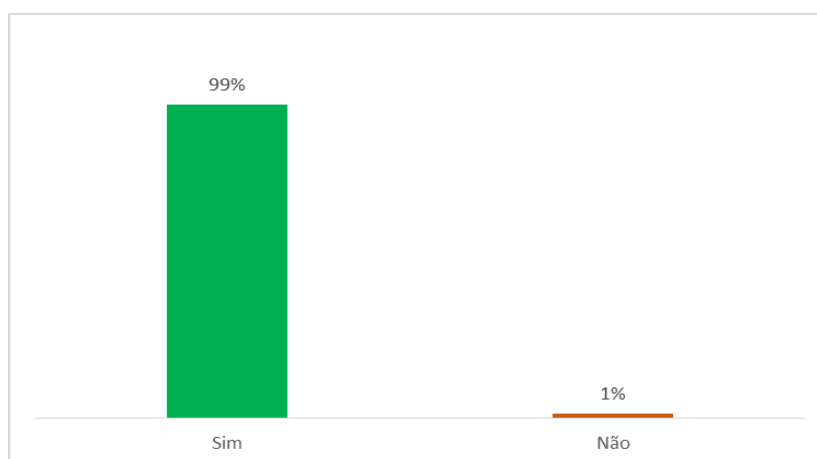
<b>AS39</b> – <i>Da segunda vez é mais fácil, né.</i>		X
<b>AS58</b> – <i>Como não é a primeira vez que faço a matéria estou tendo menos dificuldade. Porém, no primeiro período não consegui acompanhar a disciplina.</i>		X
<b>AS65</b> – <i>Principalmente na parte de trigonometria e gráficos.</i>	X	
<b>GRUPO DE ALUNOS QUE ESTÁ CURSANDO CÁLCULO I PELA PRIMEIRA VEZ (N)</b>	<b>SIM</b>	<b>NÃO</b>
<b>AS02</b> – <i>Base fraca em trigonometria.</i>	X	
<b>AS08</b> – <i>A matéria está sendo bem vista e não estou tendo dificuldades com os exercícios.</i>		X
<b>AS06</b> – <i>Não apresentei grande dificuldade pois desde Ensino Médio sou acostumado a estudar bastante por “conta própria”.</i>		X
<b>AS14</b> – <i>Apresento um pouco de dificuldade, apesar de se basear nas funções algumas coisas são bastante diferentes das ensinadas no ensino médio.</i>	X	
<b>AS26</b> – <i>Desfalque no meu conhecimento em funções e o fato de não ser uma matéria de fácil compreensão.</i>	X	
<b>AS27</b> – <i>Grande parte do conteúdo de cálculo I, tem por base coisas já estudadas no ensino médio. E grande parte dessas matérias base não foram trabalhadas por meus professores. Assim, cheguei aqui com defasagem nesses conteúdos base. E sem eles é quase impossível se sair bem em cálculo.</i>	X	
<b>AS35</b> – <i>Como meu Ensino Médio foi fraco, eu tenho errado muitas coisas de matemática básica.</i>	X	
<b>AS38</b> – <i>Porque o professor do ensino médio me deu uma base muito boa e o professor da disciplina de Cálculo I também é muito bom.</i>		X
<b>AS41</b> – <i>O curso tem apresentado uma grande quantidade de matéria para ser estudada, sendo necessário um investimento de tempo e esforço muito grande.</i>	X	
<b>AS50</b> – <i>Não consigo resolver certas funções, tanto em limite quanto em derivada.</i>	X	
<b>AS59</b> – <i>Devido o gosto de matemática eu me esforço mais.</i>		X
<b>AS64</b> – <i>A base do ensino médio não foi muito boa.</i>	X	
<b>AS75</b> – <i>Com a base do EM e resolvendo exercícios a matéria de cálculo I não é tão incompreensível assim.</i>		X

Percebemos, ao analisar as justificativas da pergunta 13, que tanto alunos que já cursaram Cálculo I como os que estão cursando pela primeira vez podem apresentar dificuldade ou não para acompanharem o curso de Cálculo I. No entanto, considerando que 43% dos alunos já teriam cursado Cálculo I, essa evidência, no nosso entendimento, de certa forma é grande e as justificativas vão ao encontro da necessidade de se ter uma boa base em função para poder ter sucesso nessa disciplina.

Concluindo a análise do QAS, destacamos que somente 1 aluno marcou não à pergunta 14: “Você considera que um bom embasamento no assunto funções pode contribuir para um melhor acompanhamento do curso de Cálculo?”. No Quadro 24 abaixo, apresentamos alguns comentários dos porquês apresentados pelos alunos que preencheram o questionário quanto ao que assinalou nessa pergunta.

O Gráfico 29 abaixo e o Quadro 24 esboçam o retrato do resultado dessa pergunta.

Gráfico 29 - Percentual da Resposta à pergunta 14 do QAS



Quadro 24 - Alguns Depoimentos dos porquês apresentados pelos alunos que preencheram o QAS relativos à pergunta 14

DEPOIMENTOS – GRUPO GEM	ALUNO
<i>Acredito que um bom embasamento no assunto funções seja fundamental para o bom desempenho de Cálculo I.</i>	<b>AS06</b>
<i>Pois o curso básico de Cálculo é totalmente dependente de um conhecimento prévio de funções.</i>	<b>AS07</b>

<i>Pois ao ter-se uma melhor base em funções o professor poderia entrar diretamente em limite, otimizando e dinamizando as aulas para um melhor aproveitamento do tempo de aula e do semestre letivo.</i>	<b>AS05</b>
<i>Como cálculo I se baseia no estudo de função, uma boa base é fundamental.</i>	<b>AS08</b>
<i>Porque é uma das bases do Cálculo I.</i>	<b>AS10</b>
<i>Com uma base melhorada em funções, o entendimento das matérias em cálculo seria mais fácil e despertaria um interesse maior sobre o assunto.</i>	<b>AS11</b>
<i>Sabendo caracterizar uma função, esboçar um gráfico, resolver inequações entre outros, facilita muito o curso de cálculo I, você chega mais preparado.</i>	<b>AS14</b>
<i>Pois o conhecimento de funções facilita o entendimento das matérias em Cálculo I.</i>	<b>AS16</b>
<i>Porque o curso é baseado em funções. Desde limite até integral estamos trabalhando com funções. Uma boa base dessa matéria implica em um excelente acompanhamento do curso de Cálculo.</i>	<b>AS22</b>
<i>Porque funções é a base para o estudo de Cálculo e sem ele é quase impossível dominar a matéria.</i>	<b>AS27</b>
<i>Porque elas são peças fundamentais para os estudos de limite e derivada.</i>	<b>AS31</b>
<i>O Cálculo traz um aprofundamento ao estudo de funções.</i>	<b>AS39</b>
<i>Porque haveria menos dificuldade por parte de alunos assim como eu, que hoje precisa saber sobre a matéria de Cálculo.</i>	<b>AS42</b>
<b>DEPOIMENTOS – GRUPO GCC</b>	<b>ALUNO</b>
<i>Sem a base que tive no Ensino Médio eu demoraria mais para entender o que me impediria de acompanhar o curso com mais dedicação, pois teria que me dedicar a aprender o que perdi no Ensino Médio.</i>	<b>AS44</b>
<i>Porque estaremos entrosados com o assunto, facilitando a compreensão do mesmo.</i>	<b>AS468</b>
<i>Porque é a base para os Cálculos.</i>	<b>AS52</b>
<i>Sem dúvida. A base para Cálculo é o estudo das funções e seus comportamentos. Com uma base consolidada o aprendizado torna-se mais intuitivo.</i>	<b>AS58</b>
<i>A maioria dos erros não é na matéria em si, mas na base ou falta dela.</i>	<b>AS65</b>
<i>Porque Cálculo I aborda funções em nível avançado e ter uma boa base é necessário.</i>	<b>AS75</b>



Esclarecemos que o aluno que marcou não à pergunta 14 do QAS, de certa forma foi incoerente em sua justificativa. Não conseguimos alcançar seus pensamentos. Esse aluno assinalou que está tendo dificuldade para acompanhar o curso de Cálculo I e atribuiu 2 ao quanto acha que está bom em Cálculo e também 2 ao quanto que acha que o conhecimento de funções pode contribuir para seu desempenho em Cálculo. No entanto, a justificativa do aluno para a pergunta 14 foi: *As funções cobradas no Cálculo são mais avançadas.*

Revedo em conjunto todos os questionamentos do QAS e as respostas obtidas e destacadas na análise desse questionário, consideramos que a análise qualitativa e também os quantificadores obtidos são elementos que validam nossas impressões com relação às dificuldades ou não enfrentadas pelos alunos de um curso superior que cursa a disciplina de Cálculo I. Essas dificuldades são relativas a uma base na definição de função e de seus elementos estruturantes e caracterizadores, conforme havíamos destacado no capítulo de Introdução em Justificativas.

Acrescentamos que com o questionário QAS não buscamos identificar quais são as dificuldades específicas que os alunos têm enfrentado na disciplina de Cálculo I. Talvez o leitor dessa nossa pesquisa esteja se perguntando porque nós não colocamos alguma atividade apresentada no capítulo 3 para os alunos que preencheram o QAS fizessem e assim teríamos dados para destacar as dificuldades dos alunos de um curso de Cálculo I, relativas ao estudo de funções.

Optamos por não usarmos essa estratégia porque não pretendíamos que os alunos achassem que estivessem sendo avaliados. Nossa intenção com o QAS foi verificar com o aluno de um curso superior que cursa a disciplina de Cálculo I, segundo a sua percepção, a importância do estudo da definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores para acompanhar o curso e se ele tem enfrentado dificuldade ou não para acompanhar a disciplina de Cálculo I devido a alguma defasagem no ensino de função, destacando quais as influências dessa possível discrepância.

Em linhas gerais, percebemos que os alunos que preencheram o QAS, tanto os do grupo GEM e GCC, mesmo já tendo cursado a disciplina de Cálculo I outra vez, podem apresentar dificuldade para acompanhar a referida disciplina, o

mesmo acontece com o aluno que está cursando pela primeira vez. Nesse sentido, os depoimentos dos alunos reforçam o fato do quão importante é uma boa base do estudo de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores para o bom acompanhamento da disciplina de Cálculo I.

Entendemos, pela maioria dos depoimentos, que de certa forma, há um descompasso da apresentação desse conteúdo no Ensino Médio que culmina nas dificuldades que eles têm tido para alcançar êxito em Cálculo I. Nesse sentido, esperamos que possamos com essa pesquisa contribuir para algumas reflexões em relação à condução do Ensino Médio na disciplina de Matemática no que se refere à função e também ao aprendizado em Cálculo, no intuito de que os alunos que iniciam um curso superior, possam estar tão preparados quanto deviam para iniciar o estudo de Cálculo I.

Ainda tentando obter mais subsídios que colaborem com nossas conclusões finais, apresentaremos em seguida, para finalizar a primeira fase da análise de dados, a análise do questionário QPES aplicado a professores da UFSJ que já ministraram ou ministram Cálculo I e que se dispuseram a respondê-lo.

#### **5.1.4 Análise descritiva e qualitativa com auxílio de quadros para compreender o QPES**

Para finalizar a primeira fase de nossa análise dos dados, apresentaremos a seguir nossa leitura do QPES cujo objetivo principal foi verificar com professores que ministram ou já ministraram Cálculo I se há deficiência ou não dos alunos nessa disciplina, bem como se os alunos apresentam dificuldades no estudo de definição de função, seus elementos estruturantes e caracterizadores, assunto que foi ministrado no Ensino Médio.

O QPES foi aplicado a 5 professores da UFSJ que nomeamos por **PS1**, **PS2**, **PS3**, **PS4** e **PS5**<sup>43</sup>. O critério que usamos para identificar esses professores foi pela ordem em que digitamos as respostas dos professores, após a entrega dos questionários preenchidos e respondidos<sup>44</sup>.

---

<sup>43</sup> Dentre esses professores um deles já atuou também no Ensino Médio e atualmente atua somente no Ensino Superior.

<sup>44</sup> Também como com os professores da EPCAR, entendemos que por se tratar de um grupo pequeno de colaboradores, estes podem ser facilmente reconhecidos nos seus depoimentos,

Nas perguntas 1 e 2 do QPES, buscamos verificar com esses professores o tempo de experiência como professor e quantas vezes atuou ou atua como professor de Cálculo I. Para que os professores não fossem identificados, optamos por apresentar o tempo de experiência como professor e o número de vezes que ministrou Cálculo I sem indicar quem é o professor.

Apresentaremos a experiência como professor e o número de vezes que atua ou atuou ministrando Cálculo I, respectivamente: 25 anos e 30 vezes; 7 anos e 4 vezes; 21 anos e 14 vezes; 2 anos e 8 vezes; 2 anos e 2 vezes.

Na pergunta 3 do QPES: “Em quais cursos você já ministrou ou ministra Cálculo I na UFSJ?”, obtivemos as seguintes respostas: Engenharias Elétrica, Mecânica, de Produção, Mecatrônica, de Telecomunicações, de Bioprocessos; Ciências Biológicas; Química; Física; Ciências da Computação e Economia. Apresentamos os cursos de forma geral, pois entendemos que se indicássemos por professor **PS1**, **PS2**, **PS3**, **PS4** e **PS5**, estes poderiam ser identificados, o que não é nossa intenção.

A quarta pergunta foi: “Na sua opinião, se seus alunos tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam Cálculo I?”

**PS1** respondeu que 30% escolheriam Cálculo I e sua justificativa do porquê foi: *Tendo em vista a dificuldade para trabalhar os conceitos básicos, principalmente sobre função.*

**PS2** respondeu que 40% dos alunos escolheriam Cálculo I e a justificativa foi: *É a média de alunos interessados realmente por esta disciplina.*

**PS3** respondeu que 30% dos alunos escolheriam Cálculo I e a justificativa foi: *A maior parte dos alunos tem dificuldade em Cálculo I o que gera aversão à disciplina.*

**PS4** respondeu que 10% dos alunos escolheriam Cálculo I e a justificativa foi: *Eu destaco duas razões: os alunos não enxergam as vantagens desta disciplina (como raciocínio lógico, por exemplo), além de questionar quando*

---

entretanto não foi finalidade desta pesquisa que isso acontecesse. De outra forma, todos autorizaram este estudo e entendemos que a finalidade deles e nossa é convergente quanto a propostas para melhoria do ensino e da aprendizagem do assunto abordado do Ensino Médio, assim como buscar alternativas para que os alunos que cursem a disciplina de Cálculo não tenham tantas dificuldades. Assim sendo, não nos preocuparemos com associações livres que os leitores possam fazer em relação aos colaboradores e os depoimentos utilizados.

*utilizarão tais conteúdos. O outro ponto/razão é a deficiência em matemática que os alunos, em geral, trazem do ensino médio.*

**PS5** respondeu que 40% e sua justificativa foi: *Estou colocando um valor médio entre os alunos das diversas áreas de graduação. Acredito que cerca de 90% dos alunos que escolhem no processo seletivo uma área agrária ou biológica não desejam cursar nenhuma disciplina de matemática, poucos dão valor ao conhecimento que pode ser adquirido com esta disciplina na atuação profissional deles. Grande parte deles tem até “aversão” a matemática. Por outro lado, a grande maioria dos alunos que opta por cursos da área de engenharia sabem que cursarão tais disciplinas, normalmente estão mais preparados e têm um ritmo de estudo que os auxilia em aprovação.*

Na quinta pergunta, questionamos: “Você tem observado se os alunos egressos do Ensino Médio que começam a fazer a disciplina de Cálculo I têm, em sua maioria, dificuldade ou falta de base no estudo de funções?”. Todos os professores responderam que **sim**.

Com relação à pergunta 6, pretendíamos entender a resposta dada pelos professores na pergunta 5, por isso questionamos: Se respondeu sim à pergunta anterior, diga com que porcentagem você considera que tal fato vem ocorrendo? A que você atribui tal defasagem? Quais dificuldades os alunos mais têm com relação ao estudo de Cálculo relacionado às funções reais?

Justificativas dadas pelos professores:

**PS1:** 50%. *À falta de um estudo mais efetivo.*

**PS2:** 80%. *Eles foram aprovados no Ensino Médio, porém não aprenderam. Isso mostra que o ensino-aprendizagem é altamente falho.*

**PS3:** 80%. *Pela minha experiência, adquirida ao ministrar essa disciplina por muitas vezes seguidas, percebo que a dificuldade maior concentra-se não necessariamente nos novos conceitos de Cálculo, mas sim nos pré-requisitos, isto é, conceitos básicos aprendidos no ensino médio e fundamental. Como os alunos não dominam esses conceitos básicos, não conseguem desenvolver as atividades propostas. Eles não compreendem os significados associados a funções, por exemplo.*

**PS4:** 80%. *Eu atribuo tal defasagem ao desinteresse dos alunos no estudo de matemática desde as séries iniciais. Com uma base “fraca”, o desinteresse do aluno em aprender novos e mais complexos conteúdos é muito grande. Em relação ao estudo de funções reais, é difícil especificar as maiores dificuldades dos alunos, uma vez que muitos não compreendem conceitos básicos como domínio, imagem, etc.*

**PS5:** 80%. *Muitas vezes a falta de comprometimento com o estudo, tanto dos alunos, quanto dos professores, que muitas vezes até ensinam, mas acabam não cobrando adequadamente devido ao desinteresse o que levaria ao alto índice de evasão e reprovação. Muitos alunos sabem apenas “substituir x e y”, não entenderam realmente o sentido das funções reais. Resolvem as atividades de forma mecânica sem realmente raciocinar e compreender o que estão fazendo e para tentarmos fazer um estudo de cálculo com um pouco mais de qualidade é necessário “revisar” ou mesmo ensinar conceitos básicos antes.*

A pergunta 7 foi: “Você considera que se os alunos, antes de realizarem o curso de Cálculo I, tivessem o curso de Introdução ao Cálculo dando ênfase às funções reais, chegariam mais bem preparados para cursarem o Cálculo I?”. Todos foram unânimes em responder sim.

Pelas respostas e justificativas que os professores da UFSJ deram para as perguntas 4, 5 e 6, conseguimos compreender bem a resposta dada por eles à questão 7.

Fica então, com essa pesquisa, um registro de que na opinião de professores, considerando a defasagem apresentada pelos alunos que começam a estudar Cálculo I, seria conveniente ministrar Introdução ao Cálculo ou algo similar, dando ênfase às funções reais e suas caracterizações.

Os questionamentos da questão 8 foram realizados em cinco etapas: 8a, 8b, 8c, 8d e 8e. As perguntas foram realizadas com a introdução: “Considerando uma **metodologia** do ensino de função no Ensino Básico/Médio que enfatiza a definição e suas propriedades básicas, quais sejam: domínio, imagem, crescimento, decréscimo, máximos e mínimos, raízes, sinal, paridade e outras, dando ênfase à definição e interpretação gráfica destes entes, você considera que esta prática”

Pergunta 8a: “poderá contribuir para um melhor acompanhamento dos alunos no curso de Cálculo I?”

Pergunta 8b: “poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo de Limite e Continuidade de funções de uma variável real?”

Pergunta 8c: “poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo de Derivada e Diferenciais de Funções de uma Variável Real?”

Pergunta 8d: “poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo do traçado de um gráfico através da derivada de uma função?”

Pergunta 8e: “poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo da Integração e aplicação de integrais de Funções de uma Variável Real?”

Todos foram novamente unânimes em responder sim aos questionamentos da pergunta 8. De certa forma, as justificativas que os professores deram na pergunta 6 também confirmam que os alunos que estão ingressando na universidade e têm que cursar a disciplina de Cálculo I estão chegando com defasagem no estudo de definição de função e seus elementos estruturantes.

Dessa maneira, reafirmamos que o fato de usarmos na EPCAR uma metodologia do ensino desse assunto nos moldes que apresentamos na nossa pesquisa, poderá ser um dos caminhos para tentar preparar melhor os alunos do Ensino Médio e que ingressam em uma universidade numa área que tem por exigência o cumprimento da disciplina de Cálculo I.

No Quadro 25 abaixo, apresentaremos as respostas da pergunta 9 que foi realizada em etapas tendo como referência básica: “Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule apenas um dos números para indicar sobre suas percepções de como você entende o quanto seus alunos possuem conhecimento sobre funções e o aprendizado na disciplina de Cálculo I”.

Quadro 25 - Respostas dos professores à pergunta 9 do QPES

QUESTIONAMENTOS	<b>NOTA</b> <b>VARIAÇÃO: 1-2 -3-4-5</b> <b>De 5 = excelente até 1 = fraco</b>
a) “O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I conhecem e dominam sobre o assunto funções?”	<b>Nota 5 e 4:</b> nenhum professor <b>Nota 3:</b> PS1, PS2, PS3, PS4 e PS5 <b>Notas: 2 e 1:</b> nenhum professor

b) “O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I são bons no assunto definição de funções e propriedades caracterizadoras?”	<b>Nota 5, 4 e 3:</b> nenhum professor <b>Nota 2:</b> PS1, PS2, PS3, PS4 e PS5 <b>Nota 1:</b> nenhum professor
c) “O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I são capazes de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?”	<b>Nota 5, 4 e 3:</b> nenhum professor <b>Nota 2:</b> PS1, PS2 e PS3 <b>Nota 1:</b> PS4 e PS5
d) “O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I estão preparados para cursarem a referida disciplina?”	<b>Nota 5 e 4:</b> nenhum professor. <b>Nota 3:</b> PS3 <b>Nota 2:</b> PS1, PS2 e PS5 <b>Notas 1:</b> PS4
e) “Ao final do curso da disciplina de Cálculo I, o quanto você considera que seus alunos têm conhecimento e dominam os assuntos que foram ministrados?”	<b>Nota 5 e 4:</b> nenhum professor <b>Nota 3:</b> PS1, PS2, PS3, PS4 e PS5 <b>Nota 2 e 1:</b> nenhum professor.

Na questão 10, reservamos um espaço para que o professor que preencheu o questionário pudesse tecer comentários que colaborassem com nossa pesquisa. Finalizando essa análise do QAS, apresentaremos os comentários dos professores.

**PS1:** *Muitos alunos chegam na universidade sem maturidade na disciplina de estudo. E diante das dificuldades para acompanhar o curso, desistem da disciplina Cálculo I.. E um dos pilares para o desestímulo é a falta de base no tratamento com as funções.*

**PS2:** *No item 9 acho que a questão é muito subjetiva, pois há bons alunos com uma base de pré-Cálculo, segundo minha experiência (10%) e outra porcentagem (20%) que atinge uma base suficiente para acompanhar a disciplina. Porém, as respostas do item 9 referem-se aos 70% dos alunos que entram nos cursos.*

**PS3:** *O que acredito estar acontecendo com os alunos iniciantes dos cursos que já ministrei e estou ministrando é a junção de dois problemas: a falta de base (incluindo a dificuldade com a interpretação de texto) aliada a falta de empenho diante dessa falta de base. Infelizmente, acontece de o aluno não ter domínio sobre pré-requisitos (basicamente, conhecimento sobre funções) o que prejudica seu desenvolvimento na disciplina. Então, o que*

*procuro é proporcionar aos alunos uma revisão (breve, já que a carga horária é apertada) para que eles tenham um mínimo de condições para dar andamento à disciplina.*

**PS4:** *O problema da educação brasileira é crônico. Em particular, no caso da matemática, como um todo, os alunos, em grande parte, não conseguem interpretar e aplicar os conhecimentos e definição adquiridos durante as aulas. Conseqüentemente, quando tais alunos iniciam um curso de cálculo, que exige domínio de conteúdos anteriores e abstração, sentem dificuldades e desmotivação, muitas vezes abandonando o curso.*

**PS5:** *A ideia da disciplina de introdução ao Cálculo é interessante, no entanto necessita de maior carga horaria na grade dos cursos de graduação o que também irá prejudicar sua formação. Ou seja, estamos transferindo para o ensino superior um problema que deveria ser resolvido no ensino médio, principalmente das escolas públicas. O estudo de funções é essencial para várias áreas, mas no ensino médio há dificuldade em se resgatar tal importância pela falta de infraestrutura e disposição de todos os envolvidos no sistema educacional. É muito mais fácil ser o professor bonzinho que não reprova do que enfrentar alunos, familiares, direção, coordenação pedagógica e todo o sistema quando o assunto é “reprovação”. A necessidade de mudança de postura sobre o ensino de funções é essencial e imediata. Ser menos “robotizado” e mais compreendido.*

A análise do QPES, de profissionais da área de matemática que atuam no ensino superior e que possuem considerável experiência atuando como professor de Cálculo I, trouxe-nos bastante reflexão. O resultado, embora não agradando a nós educadores, reflete uma realidade do Ensino Superior que não é a que nós esperamos, muito menos a que desejamos.

O entendimento dos professores **PS1**, **PS2**, **PS3**, **PS4** e **PS5**, a respeito da necessidade de que os alunos cheguem à universidade com um melhor preparo na definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores converge para a proposta de nossa pesquisa. No entanto, fica evidente também, segundo relatos desses professores e pelos quantitativos que obtivemos com o QAS que os alunos não estão chegando à universidade tão bem preparados para cursarem Cálculo I.

Finalizamos, assim, a primeira fase da análise dos dados obtidos. Tentaremos nas próximas fases em que cruzaremos as informações obtidas fazê-lo com objetividade, pontuando o que for mais relevante.



## 5.2 SEGUNDA FASE

### 5.2.1 Cruzamento das opiniões dos alunos e professores da EPCAR nas perguntas que se repetiram no QA e QPE

Essa fase da análise de dados foi idealizada por nós com o objetivo de que, com as perguntas que repetimos em ambos os questionários, pudéssemos contrapor as respostas obtidas com o QA e o QPE. Entendemos que essa seja uma estratégia que também pode colaborar para obter elementos que confirmem nossos objetivos da pesquisa.

Também entendemos que seja favorável à pesquisa procurar compreender as percepções da comunidade da EPCAR, quer sejam os alunos do 1º ano do CPCAR e os professores, relativas à metodologia e abordagem dada para ministrar a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores naquela instituição.

O Quadro 26 abaixo indica as perguntas repetidas em cada questionário.

Quadro 26 - Perguntas repetidas no QA e no QPE

PERGUNTAS DO QA	PERGUNTAS DO QPE
<b>Pergunta 2)</b> “Durante quase toda sua vida escolar, você teve a disciplina de Matemática. Se você tivesse a chance de escolher as disciplinas que fosse estudar, você escolheria Matemática?”	<b>Pergunta 3)</b> “Se seus alunos da EPCAR tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam matemática? Por quê?”
<b>Pergunta 6)</b> “A abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava antes era a mesma que recebeu na EPCAR?”	<b>Pergunta 4)</b> “A <b>abordagem</b> que você dava ao ministrar o estudo de definição de funções e seus elementos estruturantes antes de ministrar aulas na EPCAR era a mesma dada no CPCAR?”
<b>Pergunta 12)</b> “Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule <b>apenas um</b> dos números para indicar sobre suas percepções sobre o ensino de Funções no CPCAR.	<b>Pergunta 9)</b> “Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule <b>apenas um</b> dos números para indicar sobre suas percepções de como você percebe o quanto seus alunos

Use de 5 = “excelente” até 1 = “fraco”.	evoluíram no aprendizado de funções, após terem estudado no 1º ano do CPCAR, conforme a metodologia já descrita. Use de 5 = “excelente”, até 1 = “fraco”.
<p><b>Pergunta 13)</b> “No quadro a seguir, explicita pontos positivos e pontos negativos da metodologia utilizada nas aulas de Matemática do 1º ano do CPCAR com relação ao conteúdo de definição de função e características de seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função. Preencha seguindo uma ordem de maior importância para você. (Não é necessário completar o quadro todo! Coloque aquilo que é (foi) mais relevante para você.”</p>	<p><b>Pergunta 10)</b> “No quadro a seguir, explicita pontos positivos e pontos negativos da metodologia utilizada nas aulas de Matemática do 1º ano do CPCAR com relação ao conteúdo de definição de funções e características de seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função. Preencha seguindo uma ordem de maior importância para você. (Não é necessário completar o quadro todo! Coloque aquilo que na sua percepção é mais relevante.)</p>

Observando as respostas à pergunta 2 do QA e à pergunta 3 do QPE, percebemos que os alunos do 1º ano do CPCAR possuem maior afinidade com a disciplina de Matemática do que os próprios professores da EPCAR esperam. Os percentuais de respostas dessas perguntas nos dois grupos são elevados, sendo o dos alunos de 94% enquanto que, dos professores varia de 70% a 90%.

No nosso entendimento, isso se deve ao fato de o professor ser mais crítico que o aluno e ter também uma visão mais global dos alunos, tanto no que se refere ao ensino e aprendizado dos alunos, quanto também ao rendimento acadêmico. Pelas respostas que destacamos dos professores da EPCAR na análise do QPE, temos evidências de que os professores lidam com alunos que gostam de matemática e possuem afinidade e interesse pela matéria.

Comparando as respostas da questão 6 do QA com a questão 4 do QPE temos que tanto aluno quanto professor da EPCAR consegue perceber que a

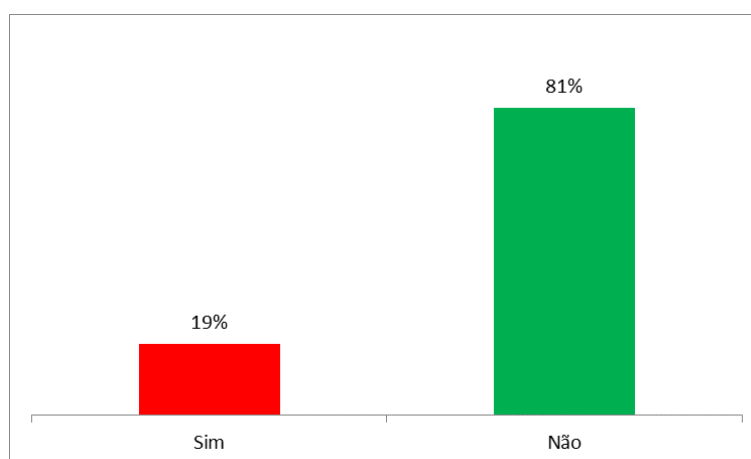
abordagem que é ministrado a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores é diferente da que o aluno havia tido antes de entrar na EPCAR e o professor conduzia em suas aulas antes de trabalhar na EPCAR.

Conforme já havíamos indicado anteriormente, dos 75 alunos que preencheram o QA, 68 preencheram a pergunta 6. Nessa pergunta, pedimos que respondesse somente quem já havia estudado função conforme descrevemos. Desses 68 alunos, 56 (82%) assinalaram que a abordagem que eles receberam antes não foi a mesma que receberam na EPCAR sendo que 46 alunos já haviam feito o 1º ano do ensino médio,

Esse fato é bastante significativo, evidencia e confirma nossas percepções registradas no capítulo de Introdução dessa pesquisa quanto ao fato de os alunos relatarem que a forma como é ensinada função na EPCAR é diferente da que eles já estudaram.

No Gráfico 30 abaixo, fica explícito que de todos os alunos que preencheram o QA 61 alunos (81%) já haviam cursado o 1º ano do Ensino Médio. Os 46 alunos desses 61 que assinalaram não à pergunta 6 correspondem a pouco mais de 75% dos alunos que já haviam cursado o 1º ano do Ensino Médio.

Gráfico 30 - Percentual de Resposta à pergunta 6 do QA



Dessa forma, entendemos que os alunos puderam fazer comparação entre a abordagem que tiveram nesse ensino antes e após ingressarem na EPCAR. Os comentários que destacamos no Quadro 9 da página 96 dessa dissertação colaboram também com essa perspectiva.

Convergindo para essa percepção dos alunos quanto à abordagem da definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores, temos também os depoimentos dos professores que destacam principalmente como conduta dos professores ao ministrarem função: a abordagem mais profunda do conteúdo, descolamento do livro didático criando atividades que colaboram para a aprendizagem e fixação do conteúdo, destaque dado ao significado dos elementos caracterizadores de uma função, ênfase à interpretação gráfica de uma função e suas características, tempo destinado ao ensino do assunto, assim como interesse e comprometimento dos alunos.

Com relação às perguntas 12 do QA e 9 do QPE, apresentaremos no Quadro 27 abaixo um comparativo das respostas dos alunos e dos professores para termos uma visão abrangente e objetiva dessas questões.

Quadro 27 - Quadro comparativo das respostas às perguntas 12 do QA e 9 do QPE

QUESTIONAMENTOS	<b>NOTA</b> <b>VARIAÇÃO: 1-2 -3-4-5</b> <b>De 5 = excelente até 1 = fraco</b>
<b>QA:</b> a) O quanto você acha que aprendeu sobre o assunto funções? <b>QPE:</b> a) O quanto você acha que seus alunos do CPCAR aprenderam sobre o assunto funções?	<b>Nota 5:</b> 38 alunos (49%) e o professor P2 <b>Nota 4:</b> 32 alunos (43%) e os professores P1, P3 e P4 <b>Nota 3:</b> 6 alunos (8%) <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum aluno
<b>QA:</b> b) O quanto você acha que ficou bom no assunto definição de função e propriedades caracterizadoras, após este estudo no CPCAR? <b>QPE:</b> b) O quanto você acha que seus alunos ficaram bons no assunto definição de funções e propriedades caracterizadoras, após este estudo no CPCAR?	<b>Nota 5:</b> 28 alunos (37%) e o professor P2 <b>Nota 4:</b> 39 alunos (52%) os professores P1, P3 e P4 <b>Nota 3:</b> 8 alunos (11%) <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum aluno
<b>QA:</b> c) O quanto você é capaz de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características? <b>QPE:</b> c) O quanto você acha que seus alunos são capazes de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?	<b>Nota 5:</b> 43 alunos (57%) e o professor P2 <b>Nota 4:</b> 27 alunos (36%) e os professores P3 e P4 <b>Nota 3:</b> 5 alunos (7%) e o professor P1 <b>Notas 2 e 1 :</b> nenhum aluno

<p><b>QA:</b> d) O quanto você consegue resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções?</p> <p><b>QPE:</b> d) O quanto você acha que seus alunos conseguem resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções?</p>	<p><b>Nota 5:</b> 29 alunos (39%) e o professor P3</p> <p><b>Nota 4:</b> 28 alunos (37%) e os professores P2 e P4</p> <p><b>Nota 3:</b> 15 alunos (20%) e o professor P1</p> <p><b>Notas 2:</b> 1 aluno (4%).</p> <p><b>Nota 1:</b> nenhum aluno</p>
<p><b>QA:</b> e) Após todo o embasamento teórico sobre definição de funções e característica de <b>seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função</b>, o quanto você se sentiu mais preparado para estudar as funções por famílias, a saber: Função constante, Função Afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função Modular; Classificação de funções: sobrejetividade, injetividade, bijeção e Função Inversa?</p> <p><b>QPE:</b> e) Após todo o embasamento teórico sobre definição de funções e característica de <b>seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função</b>, o quanto você considera que seus alunos se sentem mais preparados para estudar as funções por famílias, a saber, Função Constante, Função Afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função Modular; Função Exponencial, Função Logarítmica e Funções Trigonométricas; Classificação de funções: sobrejetividade, injetividade, bijeção e Função Inversa?</p>	<p><b>Nota 5:</b> 41 alunos (55%) e os professores P1, P2, P3 e P4</p> <p><b>Nota 4:</b> 29 alunos (39%).</p> <p><b>Nota 3:</b> 5 alunos (6%)</p> <p><b>Notas 2 e 1:</b> nenhum aluno</p>

Nessas questões, as respostas também são muito parecidas. Mais uma vez percebemos que os professores são mais exigentes em relação às respostas, no entanto o resultado é bastante positivo e vai ao encontro de nosso entendimento de que a abordagem e metodologia utilizados no CPCAR para apresentar a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores, na visão dos alunos e professores do 1º ano do CPCAR é frutífera e está colaborando para que os alunos atinjam o conhecimento necessário.

Para finalizarmos o cruzamento da análise entre o QA e o QPE, apresentaremos a comparação entre as questões 13 do QA e 10 do QPE no Quadro 28 abaixo em que palavras/trechos foram transcritos dos comentários realizados por alunos e professores da EPCAR no sentido de ilustrar o cenário que encontramos quanto aos aspectos positivos e negativos elencados por esses personagens quanto à metodologia utilizada nas aulas de Matemática do 1º ano do CPCAR com relação ao conteúdo de definição de função e elementos estruturantes e caracterizadores de uma função.

Quadro 28 - Quadro comparativo das respostas às perguntas 13 do QA e 10 do QPE

<b>PONTOS POSITIVOS</b>	<b>PONTOS NEGATIVOS</b>
<b>ALUNOS:</b>	<b>ALUNOS</b>
Clareza, maior elaboração de gráficos, exercícios para fixação, explanação detalhada, abrangência da matéria, prepara para o estudo de cálculo, boa base; internalização do conteúdo, aprofundamento, ausência de “macetes”, detalhes; exercícios aplicados, identificação de características e elementos, preocupação com o aprendizado; estímulo ao estudo, ênfase às características do gráfico; método mais completo, disponibilidade de material, matéria bem explicada e bem estruturada, gradativo, embasamento teórico.	Exercícios demais, falta de tempo, sobrecarga de matéria, muitos detalhes, excesso de abordagem, repetição de exercícios.

PROFESSORES	PROFESSORES
Levar ao raciocínio, conexão dos conteúdos, estudo e esboço de gráficos de função com análise do comportamento e dos elementos estruturantes da função, resolução de inequações através de gráficos; tempo disponível, material didático.	Falta de tempo para abordar ideias de limites e derivadas, pouca utilização de situações problema.

Percebemos, analisando as palavras e trechos que buscamos nos comentários dos alunos e professores a respeito das questões 13 do QA e 10 do QPE, que os alunos que vivenciam o processo de aprendizagem de funções e seus elementos caracterizadores com a metodologia e abordagem que aplicamos na EPCAR destacam bastante aspectos positivos. Já os professores expressam também suas opiniões de forma positiva e objetiva, porém abrangente.

Na próxima etapa, apresentaremos o cruzamento das respostas e justificativas dos alunos que estão cursando Cálculo I e dos Professores, ambos da UFSJ, analisando os questionários QAS e QPES.

### 5.3 TERCEIRA FASE

#### 5.3.1 Cruzamento das opiniões dos alunos e professores da UFSJ nas perguntas que se repetiram no QAS e QPES

A terceira fase da análise de dados tem também como objetivo de, com as perguntas que repetimos ou que têm o mesmo propósito em ambos os questionários QAS e QPES, contrapor as respostas obtidas. Entendemos que essa também seja uma maneira de verificar nossas percepções iniciais da pesquisa.

No nosso entendimento é mais uma oportunidade de compreender as percepções da comunidade da UFSJ que envolvemos como personagens dessa pesquisa: alunos que estão cursando Cálculo I e professores que ministram ou já ministraram essa disciplina, em relação ao nosso último objetivo da pesquisa.

Esse último objetivo trata de verificar se os alunos possuem dificuldade para acompanhar a disciplina de Cálculo I e se há defasagem dos alunos em relação ao estudo de funções que tiveram no Ensino Médio e caso haja, quais as influências dessa defasagem para o estudo da referida disciplina.

O Quadro 29 abaixo indica as perguntas repetidas e ou similares em cada questionário.

Quadro 29 - Perguntas repetidas e ou similares do QAS e QPES

PERGUNTAS DO QAS	PERGUNTAS DO QPES
<p><b>Pergunta 3)</b> “Se você tivesse a chance de escolher as disciplinas que fosse estudar no curso que está matriculado atualmente, você escolheria Cálculo I?”</p>	<p><b>Pergunta 4)</b> “Na sua opinião, se seus alunos tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam Cálculo I Por Quê?”</p>
<p><b>Pergunta 7)</b> “A abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava antes era a mesma que recebeu na EPCAR?” e</p> <p><b>Pergunta 11)</b> (...) Após concluir o Ensino Médio, considerou-se preparado e com base no ensino de funções para cursar a disciplina de Cálculo I?”</p> <p><b>Pergunta 13)</b> “Você tem apresentado dificuldades para acompanhar o curso de Cálculo I?”</p>	<p><b>Pergunta 5)</b> “Você tem observado se os alunos egressos do Ensino Médio que começam a fazer a disciplina de Cálculo I têm, em sua maioria, dificuldade ou falta de base no estudo de funções?” e</p> <p><b>Pergunta 6)</b> “Se respondeu sim à pergunta anterior, diga com que porcentagem você considera que tal fato vem ocorrendo? A que você atribui tal defasagem? Quais dificuldades os alunos mais têm com relação ao estudo de Cálculo relacionado às funções reais?”</p> <p><b>Pergunta 12 d):</b> O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I estão preparados para cursarem a referida disciplina?</p>
<p><b>Pergunta 12)</b> Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule <b>apenas um</b> dos números para indicar sobre suas percepções sobre o ensino de Funções que você teve no Ensino Médio e sobre o seu aprendizado na disciplina de Cálculo I, Use de 5 = “excelente”, até 1 = “fraco”.</p>	<p><b>Pergunta 9)</b> Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule <b>apenas um</b> dos números para indicar sobre suas percepções de como você entende o quanto seus alunos possuem conhecimento sobre funções e o aprendizado na disciplina de Cálculo I. Use de 5 = “excelente”, até 1 = “fraco”.</p>



Ao compararmos as respostas que obtivemos dos alunos e professores da UFSJ quanto às perguntas 3 do QAS e 4 do QPES, vimos uma disparidade muito grande de opiniões entre alunos e professores. Dos 75 alunos que preencheram o QAS, 66 (88%) deles escolheriam a disciplina de Cálculo I para cursar, enquanto que na opinião dos professores o percentual não passaria de 40%.

A maioria das justificativas dos alunos quanto à escolha são no sentido de que entendem a necessidade do estudo de Cálculo para o curso ao qual estão matriculados, no nosso caso alunos de Engenharia Mecânica e Ciências da Computação. Alguns alunos até relatam o fato de terem defasagem em função e isso atrapalhar o seu desempenho, no entanto, ainda assim, veem a importância da disciplina de Cálculo I para o curso.

As justificativas dos professores em relação à quantidade de alunos que escolheriam a disciplina de Cálculo I caso tivessem a opção de fazê-lo, vão muito ao encontro da defasagem e falta de base dos conteúdos do Ensino Médio dos alunos, destacando o assunto de funções e também da falta de interesse por parte de alguns alunos que questionam a aplicabilidade do conteúdo inclusive para o curso. Segundo o professor PS3, a dificuldade enfrentada gera uma aversão à disciplina.

As perguntas 7, 11 e 13 do QAS têm propósitos similares às perguntas 5, 6 e 12(d) do QPES. Fazendo uma comparação dos resultados que obtivemos na pergunta 7 do QAS, verificamos que cerca de metade dos alunos consideram que a abordagem do assunto de funções que tiveram no Ensino Médio foi suficiente para que estivesse acompanhando a disciplina de Cálculo I enquanto que, dos professores, somente um deles considera também que 50% dos alunos estão preparados. Os outros três professores consideram que 80% dos alunos chegam com defasagem nesse assunto.

Conjugando a essa análise as respostas da questão 11 do QAS com relação ao fato de indicarem se estão preparados e têm base do ensino de funções para cursar a disciplina de Cálculo I encontramos que 61% dos alunos afirmam que não se consideram preparados, havendo aí um aumento percentual no resultado se comparado às da questão 7 do QAS. Ainda na questão 13 do QAS 57% dos alunos da UFSJ relatam estar tendo dificuldades

para acompanhar o curso de Cálculo I enfatizando que uma boa base de funções é primordial para o acompanhamento da disciplina.

Analisando as justificativas dos professores da UFSJ em relação às perguntas 5 e 6 do QPES que comungam com as questões 7, 11 e 13 do QAS os professores chamam atenção para o fato de haver desinteresse e falta de esforço dos alunos que aliados à falta de base retrata muitas vezes no insucesso com relação à disciplina de Cálculo I.<sup>45</sup>Essa perspectiva se confirma quando observamos o quanto os professores marcaram na questão 12 (d) (de 1= fraco a 5= excelente) aos alunos iniciantes do curso de Cálculo I quanto ao fato de estarem preparados para cursarem a referida disciplina: um dos professores assinalou nota 3, três deles nota 2 e um outro assinalou nota 1.

No Quadro 30 abaixo apresentaremos um comparativo relativo às questões 12(a, b, c, f) do QAS e 9(a, b, c, e) do QPES. Em seguida faremos uma comparação das respostas tendo como referência nosso entendimento da leitura dessas questões.

Quadro 30 - Quadro comparativo das respostas às perguntas 12(a, b, c, f) do QAS e 9(a, b, c, e) do QPES

QUESTIONAMENTOS	NOTA VARIAÇÃO: 1-2 -3-4-5 De 5 = excelente até 1 = fraco
<p><b>QAS:</b> a) O quanto você acha que aprendeu sobre o assunto funções no Ensino Médio?</p> <p><b>QPES:</b> a) O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I conhecem e dominam sobre o assunto funções?</p>	<p><b>Nota 5:</b> 3 alunos (4%)  <b>Nota 4:</b> 23 alunos (31%)  <b>Nota 3:</b> 28 alunos (37%) e professor <b>PS2</b> e <b>PS3</b>  <b>Nota 2:</b> 18 alunos (24%) e professores <b>PS1</b>, <b>PS4</b> e <b>PS5</b>  <b>Nota 1:</b> 3 alunos (4%)</p>
<p><b>QAS:</b> b) O quanto você acha que ficou bom no assunto “definição de função e propriedades caracterizadoras”, no Ensino Médio?</p> <p><b>QPES:</b> b) O quanto você acha que seus</p>	<p><b>Nota 5:</b> 3 alunos (4%)  <b>Nota 4:</b> 15 alunos (20%)  <b>Nota 3:</b> 32 alunos (41%)  <b>Nota 2:</b> 25 alunos (28%) e os professores <b>PS1</b>, <b>PS2</b>, <b>PS3</b>, <b>PS4</b> e <b>PS5</b></p>

<sup>45</sup> Esclarecemos nesse momento que era nossa intenção apresentar aqui o índice de aprovação/reprovação dos alunos que preencheram o QAS, mas tendo em vista a greve que ocorreu, não foi possível.

alunos iniciantes do curso de Cálculo I são bons no assunto definição de funções e propriedades caracterizadoras?	<b>Nota 1:</b> 5 alunos (7%)
<b>QAS:</b> c) O quanto você foi capaz de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características, após concluir o Ensino Médio? <b>QPES:</b> c) O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I são capazes de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?	<b>Nota 5:</b> 4 alunos (5%) <b>Nota 4:</b> 24 alunos (32%) <b>Nota 3:</b> 29 alunos (39%) <b>Notas 2:</b> 11 (15%) e os professores <b>PS1, PS2 e PS3</b> <b>Nota 1:</b> 7 alunos (9%) e os professores <b>PS4 e PS5</b>
<b>QAS:</b> f) Até o momento, o quanto você acha que está bom na disciplina de Cálculo? <b>QPES:</b> e) Ao final do curso da disciplina de Cálculo I, o quanto você considera que seus alunos têm conhecimento e dominam os assuntos que foram ministrados?	<b>Nota 5:</b> 5 alunos (7%) <b>Nota 4:</b> 15 alunos (20%) <b>Nota 3:</b> 36 alunos (48%) e os professores <b>PS1, PS2, PS3, PS4 e PS5</b> <b>Notas 2:</b> 14 alunos (19%). <b>Nota 1:</b> 5 alunos (7%)

Observando o Quadro 30, podemos perceber que no que se refere à base de conhecimento sobre definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores e a capacidade de esboçar o gráfico de uma função, temos que uma média de 70% dos alunos considera que suas notas variam de 3 a 5, concentrando a maioria em nota 3. No entanto, os professores, por terem uma visão mais crítica e geral dessas questões atribuem aos alunos notas variando de 1 a 3, concentrando-se a maioria das vezes na nota 2.

Esse fato nos chama muito a atenção. Compreendemos com isso que a base de função que os alunos consideram que têm para acompanhar a disciplina de Cálculo I tem sido insuficiente. Acreditamos que não há ninguém melhor do que o professor que recebe os alunos advindos do Ensino Médio para avaliar essas questões.

Para finalizar essa etapa, comparando as perguntas (12 f) do QAS e (9 e) do QPES, vimos que o grau atribuído pelos alunos ao quanto consideram que estão bons em Cálculo I varia de 3 a 5, concentrando-se mais na nota 3, enquanto que na opinião de todos os professores a nota atribuída para o quanto os alunos dominam e conhecem os conteúdos de Cálculo I é nota 3. Vimos aí uma convergência de opiniões.

## 6 CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após todo o percurso que tomamos para chegar até aqui, quais sejam, cumprir todas as disciplinas do curso PROFMAT dedicando-me ao máximo, com o propósito de, mesmo com uma experiência de mais de 25 anos de vivência em sala de aula como professora de matemática, aprender novos assuntos; apreender aqueles que já dominava e buscar um tema de trabalho de conclusão do curso que fosse ao encontro dos objetivos do curso em si, aliando a isso minhas inquietações e experiências do exercício da docência, acredito que tudo tenha valido a pena!

Ainda que já possuindo um mestrado na área de Educação, que foi realizado no exterior e revalidado numa universidade pública de nosso país, acredito que estava escrito: eu tinha que fazer o PROFMAT! Ao olhar para trás, percebo que todos os “apertos” passados para cumprir as disciplinas e dar conta de tantas atividades propostas durante a trajetória foram compensadores ao ver o resultado do nosso trabalho final de curso.

O tema função, pelo qual optei para apresentar neste trabalho, é um assunto que muito me encanta. Além disso, o fato de ter contato com alunos que sempre nos relatam que o ensino de funções na EPCAR é conduzido diferente, na maioria das vezes, da forma que é tratado em outras instituições foi grande motivação para desenhar neste trabalho o que nos propusemos a apresentar.

Outra motivação, que também já mencionei, foi ouvir de meus professores do PROFMAT que os alunos têm chegado à universidade com uma defasagem na área de matemática que vem influenciando num resultado indesejável de forma geral em todas as disciplinas. Em se tratando de Cálculo I, essa defasagem no assunto função fica bastante evidenciada.

Idealizamos, então, esta proposta de pesquisa que apresentamos aqui, na intenção de contribuir de alguma forma para reflexões acerca do tema e que este trabalho possa ser inspirador para outros, complementando, questionando e/ou reafirmando nossas impressões.

Assim sendo, por estar concluindo o Mestrado Profissional em Matemática, entendemos que esta dissertação poderá ser uma contribuição para professores de matemática. Esse entendimento se deve ao fato de nossas propostas, primeiramente, apresentar uma compilação da história sobre função e uma estrutura sistemática dos conceitos e definições sobre função e seus elementos estruturantes e caracterizadores, seguida de uma seleção de atividades mais abrangentes desse assunto e que, por nossa experiência, têm se mostrado mais eficazes ao serem trabalhadas com os alunos.

É importante deixar registrado que não temos a soberba de supor que a estrutura de aulas que apresentamos aqui sejam inéditas e/ou que os professores de matemática, que atuam no Ensino Médio, não estejam ministrando esse assunto baseados nas definições e conceitos formais de função. Entendemos que nossa proposta se trata de uma ferramenta didática que os docentes podem utilizar de forma complementar às que já praticam, tendo como meta a aprendizagem mais significativa.

O que apresentamos aqui é a metodologia que usamos na EPCAR para apresentar tais definições. Como já ressaltamos, entendemos que é mais abrangente e detalhada, além de realizada com um número maior de aulas, atentando-se para os detalhes com a intenção de familiarizar o aluno aos conceitos necessários e assim prepará-lo para esboçar o gráfico de uma função e caracterizá-la, assim como também estudar com maior propriedade as funções por famílias. Além disso, também melhor preparar o aluno do Ensino Médio que porventura venham a estudar Cálculo I no Ensino Superior.

Num segundo momento, buscamos envolver alunos e professores da EPCAR, como também alunos da UFSJ que estão cursando Cálculo I e professores desta mesma Instituição que ministram ou já ministraram a referida disciplina. Foi o momento em que, apresentando os resultados dos instrumentos QA, QPE, QAS e QPES, intencionamos poder confirmar nossas hipóteses de pesquisa.

## 6.1 CONCLUSÃO

Destacamos que foi um desafio nessa investigação contrapor opiniões e percepções de sujeitos da pesquisa que são distantes de sua origem. Essa nossa atitude, a princípio, poderia parecer ao leitor desta dissertação algo incoerente e absurdo. Ao término deste trabalho vimos que foi bastante enriquecedora e interessante a análise realizada.

Ao mostrarmos nessa pesquisa a metodologia e a abordagem que usamos na EPCAR para apresentar a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores visando à melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem, intencionamos também apresentar as opiniões dos professores e alunos envolvidos nesse processo para que pudéssemos dar maior credibilidade à nossa prática em sala de aula.

Em outro cenário, já mais à frente, no Ensino Superior, temos visto por pesquisas realizadas e relatos de professores que os alunos que ingressam na universidade estão chegando com grande defasagem em matemática. Fato que pudemos confirmar nesta pesquisa ao analisarmos o QAS e principalmente o QPES.

Aliando essas duas realidades, da EPCAR e da UFSJ, consideramos que ao apresentarmos nesta pesquisa uma metodologia já aplicada que aborda o ensino da definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores, exemplos de atividades que podem enriquecer as aulas e o consequente aprendizado do assunto, assim como também as análises do QA, QPE, QAS, QPES e os cruzamentos de dados desses questionários, pudemos trazer à tona nossas intenções de pesquisa cujo objetivo central foi:

- **verificar se o estudo das Funções, com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função** pode colaborar para que o aluno interprete o gráfico de uma função, seja capaz de caracterizá-la, e se tal metodologia é facilitadora para que os alunos possam construir o gráfico das funções e

- **verificar se a abordagem de funções da maneira como foi explicitada pode contribuir para facilitar o acompanhamento da disciplina Cálculo Diferencial e Integral no curso superior.**

Assim, atrelado ao fato de, nesta dissertação, apresentarmos uma metodologia de ensino da definição de funções reforçando a caracterização global de uma função, buscamos responder algumas questões que se tornaram de certa forma instrumentos do nosso objetivo central, para dar credibilidade a nossas percepções.

No Quadro 31 abaixo, destacamos tais questionamentos e em que comunidade, EPCAR ou UFSJ, buscamos respostas.

Quadro 31 – Questionamentos da pesquisa por comunidade – EPCAR e UFSJ

COMUNIDADE	QUESTÕES INICIAIS DA PESQUISA
<b>EPCAR</b>	<p>Verificar com os alunos do 1º ano da EPCAR a eficiência ou não da metodologia utilizada para definir função e seus elementos estruturantes e caracterizadores dada para ensinar função e da abordagem que é dada para ministrar esse conteúdo;</p> <p>Verificar com professores que ministram ou ministraram aulas desse assunto, adotando a metodologia citada, se eles entendem que essa metodologia é facilitadora ou não no processo do ensino da definição de funções e seus entes caracterizadores e, posteriormente, do estudo das funções por famílias e também a percepção dos professores a respeito da aprendizagem por parte de seus alunos.</p>
<b>UFSJ</b>	<p>Verificar se, na percepção do aluno que está cursando Cálculo I, ele apresenta dificuldades ou não para acompanhar a referida disciplina, bem como se tem dificuldade na definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores que foram estudados no Ensino Médio e, caso haja defasagem na aprendizagem de</p>

	<p>tais assuntos, quais as influências dessa defasagem para o acompanhamento do Cálculo I.</p> <p>Verificar com professores do ensino superior da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral se observam dos seus alunos dificuldades com relação à base do estudo de funções para o acompanhamento da disciplina de Cálculo I e se consideram que uma metodologia que aborde definição de função como apresentado nesta dissertação pode contribuir para um melhor acompanhamento dos alunos no curso de Cálculo.</p>
--	--

Buscaremos então a apresentar, a seguir, o panorama geral dos dados obtidos nas comunidades EPCAR e UFSJ com a intenção de indicar de forma objetiva e concisa todas as nossas percepções no decorrer da pesquisa.

Ressaltamos que se deve levar em conta que nossas observações das análises que apresentamos são originárias do retrato de uma realidade vista de maneira única pelos personagens dessa narrativa, que deram seus depoimentos de acordo com seus conhecimentos e vivências naquele instante.

As respostas e justificativas que obtivemos com o QA e o QPE foram bastante relevantes e abrangentes. Ouvir alunos e professores da EPCAR refletiu-se em um rico acervo de depoimentos e respostas que ratificam nossos objetivos principais da pesquisa.

Os quantificadores assim como os depoimentos dos alunos e professores da EPCAR nos deram subsídios para constatar que a metodologia aplicada no 1º ano do CPCAR para o ensino de definição de função e os elementos estruturantes e caracterizadores de uma função tem se mostrado eficiente e positiva e colabora para que o aluno tenha o aprendizado pautado em uma base mais consistente.

Outra questão que destacamos, com a apresentação da metodologia citada e das análises do QA e do QPE, é que nossa proposta pode servir de incentivo a professores do Ensino Médio que tiverem contato com esta dissertação a refletirem sobre sua prática em sala de aula, sobre o assunto em



questão e, com os exemplos de atividades que apresentamos no Capítulo 3, possam se sentir desafiados a percorrer caminhos mais densos e abrangentes.

Relato forte dos professores da EPCAR é que uma metodologia mais abrangente e detalhada para apresentar definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores é bastante eficiente principalmente para trabalhar posteriormente com os alunos as funções por famílias. E essa constatação é também dos alunos do 1º ano do CPCAR, evidenciada em vários depoimentos que destacamos ao longo da análise do QA e do QPE.

Com o QAS e o QPES tivemos também material bastante rico e profundo, estes para responder aos outros questionamentos destacados no Quadro 31. O desafio de observar uma comunidade que não é nossa realidade diária, o Ensino superior, fez-nos produzir nesta dissertação, elementos que podem, além de contribuir com esta pesquisa, ser incentivo para abrir espaço e diálogo com um setor da educação no Brasil que de certa forma nos dá a impressão de que caminha sem olhar para trás e sem entender que tipo de estudantes estão saindo do Ensino Médio e entrando na universidade.

Reavaliando a análise que fizemos do QAS e do QPES, vislumbramos material sólido que, quer seja pelos depoimentos, quer seja pelos quantificadores das respostas dos alunos e professores da UFSJ, colaboraram para que tivéssemos a confirmação de que uma base sólida em função é bastante importante para o sucesso dos alunos na disciplina de Cálculo I.

Da análise desses instrumentos de coleta de dados, pudemos constatar que os alunos egressos do Ensino Médio, de maneira geral, têm chegado ao Ensino Superior apresentando defasagem no ensino de função e conseqüentemente em Cálculo I. Destacamos novamente neste momento que 43% dos alunos que preencheram o QAS já haviam cursado a disciplina de Cálculo I pelo menos uma vez.

Buscar caminhos que possam contribuir para termos um Ensino Superior cada vez de mais qualidade é algo que não se pode atingir isoladamente. Há que se unirem todos os setores da educação. Pensamos que um caminho, além do repensar em cada uma de suas partes, pode ser o de conversa entre esses setores, o Ensino Médio e o Ensino Superior, a fim de buscar melhores

caminhos para que a educação no nosso país possa alcançar lugar de respeito no cenário nacional e quiçá internacional.

## 6.2 RECOMENDAÇÕES

Esta pesquisa foi desenvolvida acreditando que foi possível acrescentar ideias e novas perspectivas às pesquisas com esse tema e propor ações no sentido de aprimorar o ensino de função e por consequência também colaborar com o ensino de Cálculo I no curso superior.

Ainda que num contexto privilegiado como o da EPCAR, procuramos com a pesquisa apresentar visões acerca do tema em questão que pudessem apontar aos professores de matemática, que tiverem acesso a essa dissertação, a importância de se apresentar a definição de função e seus elementos estruturantes e caracterizadores de uma forma mais abrangente e detalhada.

Durante todo o processo da pesquisa, preocupamo-nos em apresentar os resultados que obtivemos voltados não somente para a EPCAR, como também para toda a comunidade de pessoas envolvidas com a matemática do Ensino Médio. Cada professor de matemática que tiver acesso ao que foi apresentado por nós aqui poderá relacionar o seu ambiente escolar a essa nossa perspectiva, respeitando as peculiaridades de cada escola e de cada aluno.

Não se pretende, com isso, partir do pressuposto de que a metodologia apresentada aqui para apresentar função e seus elementos estruturantes e caracterizadores é a melhor das opções. Apresentamos aqui mais uma proposta que aliada à experiência de cada educador que tiver contato com esta pesquisa poderá ser fonte de inspiração.

Ainda na perspectiva da pesquisa reafirmamos, neste momento final, que, tanto alunos quanto professores da UFSJ, entendem que seria uma alternativa positiva para tentar minimizar as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo I que fosse realizada a inserção de uma disciplina anterior ao Cálculo I que contemplasse e abordasse o assunto de função.

Dessa forma, pensamos que, mesmo com nossas limitações demos ênfase ao tema em questão, confiantes de que conseguimos mostrar outros

caminhos para futuras pesquisas inspiradas nos dados aqui apresentados por nós, confiantes de que faremos professores de matemática do Ensino Médio refletirem sobre suas práticas.

Assim, não estaremos aqui finalizando um processo, mas apresentando ideias que contribuem também para o amadurecimento do nosso trabalho e aprimorarmos nossa prática em sala de aula. Ao término desta etapa e do caminho que percorremos até aqui para apresentar este trabalho, entendemos que devemos continuar a trajetória e conscientes de que os caminhos que percorreremos daqui para frente serão alicerçados nessas nossas reflexões apresentadas aqui.

## 7 REFERÊNCIAS

- [1] ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaíne Maria; O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a.C até o século XX – REVEMAT. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014, Disponível em <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n1p159> (acesso em junho de 2016)
- [2] ARCHELA, R. S. Imagem e Representação Gráfica. Disponível em <http://www.uel.br/projeto/cartografia/artigos/artigo02.htm> Acessado em 20 de junho de 2016.
- [3] ÁVILA, Sheila Cristina Alves de, O Call na Aprendizagem da Habilidade de Escrita dos Alunos do Nível pós-intermediário de Língua Inglesa do CPCAR, .2012
- [4] BOTELHO, L. ; REZENDE, W. M.. Um Breve Histórico do Conceito de Função. Em: Caderno Dá-Licença 6, pp. 64–75. 2007.
- [5] BOYER, Carl B., História da Matemática 2ª ed., São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [6] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2002. BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2) disponível em [http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf), acesso em junho de 2016.
- [8] CABRAL, T.C.B. e CATAPANI, E. Imagens e Olhares em uma disciplina de Cálculo em serviço, Zetetikê, Vol 11, nº. 09, 2003, pp- 101-115. Disponível em <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2492/2252>, acesso em junho de 2016
- [9] CANTARUTI, Andréa Cristina Rocha. Um Estudo sobre a Influência de Emoções e Sentimentos no Processo Avaliativo de Matemática: uma perspectiva de pedagogos, psicólogos, alunos e professores do Ensino Médio da Escola Preparatória De Cadetes do Ar. Barbacena/MG, 2012.
- [10] CARAÇA, B. de J. Conceitos Fundamentais da Matemática. 1ª edição conjunta das partes I, II e III). Lisboa: Sá da Costa.
- [11] CARVALHO, Heloisa de Andrade - A análise dos erros dos alunos em cálculo I como estratégia de ensino. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2016.
- [12] CAVACA, Carlos Henrique da Silva. Um Estudo sobre o Uso de Problemas do Cotidiano como Fator Motivador para o Ensino de Matemática Financeira, 2015.
- [13] CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; CARVALHO, Hamilton Cunha de, Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio- Anais do VIII ENEM – Comunidade Científica GT 3 – Educação Matemática no Ensino Médio, 15 a 18 de julho de 2004.

- [14] CRUZ, Paulo Henrique Correia Araújo da Cruz. Funções no 1º ano do ensino médio - Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2015.
- [15] EVES, H. Introdução à história da matemática. Editora da Unicamp, Campinas, 1995.
- [16] FERRAZ, Ademir Gomes. ANÁLISE DE LIVROS TEXTO DE CÁLCULO E UMA PROPOSTA DE ALTERAÇÃO METODOLÓGICA RPD –0919 Revista Profissão Docente, Uberaba, v.9, n. 20, p. 116-142 , jan/jul. 2009 – ISSN 1519- Disponível em: <[www.revistas.uniube.br/index.php/rpd/article/download/238/232](http://www.revistas.uniube.br/index.php/rpd/article/download/238/232)> Acesso em 29 de maio de 2016.
- [17] FERREIRA, E. S.. História do Conceito de Função, 2005. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~lem/publica/>, acesso em junho de 2016
- [18] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1 – Conjuntos, Funções – 9ª edição – São Paulo, Atual Editora, 2013.
- [19] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto e ALMEIDA, Nilze. Matemática: ciência e aplicações - Vol. 1: ensino médio – 8ª edição – São Paulo, Atual Editora, 2014.
- [20] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica – Volume 1- 3ª edição, 1994 – Editora Harbra Ltda.
- [21] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo César Pinto; WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio – Volume 1 – Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, 1999, Rio de Janeiro.
- [22] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Fundamentos de Cálculo – Rio de Janeiro: SBM, 2015. Coleção PROFMAT, 15)
- [23] NETO, Tharcílio Alexandre de Queiroz Ferreira, Caderno de Licenciatura em Matemática, Dezembro de 1998 – Número 1 – ano 1 p.33-38.
- [24] PCNs Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. 144 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>> Acesso em: 10/11/2014.
- [25] PONTE, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. Educação e Matemática, 15, 3-9. Disponível em: <<http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4473>> Acesso em 29 de maio de 2016
- [26] RAMPAZZO, Lino. Metodologia Científica: para alunos dos cursos de graduação e pós-graduação. Edições Loyola, São Paulo, Brasil, 2004. 4ª edição, 146 p
- [27] REZENDE (a), Wanderley Moura: O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica – Tese de Doutorado – Universidade de São Paulo – Faculdade de Educação – Programa de Pós-Graduação em Educação, 2003
- [28] REZENDE (b), Wanderley Moura: Gallileu e as novas tecnologias no estudo das funções polinomiais no ensino básico, 2008, disponível em <http://limc.ufrj.br/htem4/papers/23.pdf>, acesso em junho de 2016
- [29] REY, G.; BOUBÉE, C.; SASTRE, P.; CAÑIBANO, A. Aportes didácticos para abordar el concepto de función - Revista Iberoamericana de Educación Matemática – Diciembre de 2009, Número 120, páginas 153-162 – ISS: 1815-0640

- [30] RODRIGUES, Alexandre José. Um estudo das identidades matemáticas de alunos do ensino médio da escola preparatória de cadetes do ar. Belo Horizonte/MG, 2010.
- [31] ROQUE, Tatiane; PITOMBEIRA, João Bosco, - Tópicos de História da Matemática – Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [32] RUDIO, Franz Victor . Introdução ao projeto de pesquisa científica – Petrópolis, Vozes, 1991. 120p
- [33] SANTOS, Marcele Rodrigues Moreno. Uma Abordagem para o Ensino de Funções no Ensino Médio – Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.
- [34] SASTRE VÁZQUEZ, P.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función a través de la Historia – Revista Iberoamericana de Educación Matemática – Diciembre de 2008, Número 16, páginas 141-155 – ISS: 1815-0640
- [35] SILVA, Maria Helen Moraes, Análise Histórica do Conceito de Função - Caderno de Licenciatura em Matemática - - Número2 – ano 2, 1999 - disponível em [http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume2/Anlise\\_Histrica\\_do\\_Conceito\\_de\\_Funcao.pdf](http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume2/Anlise_Histrica_do_Conceito_de_Funcao.pdf) , acesso em junho de 2016.
- [36] SIMÃO, Marisa Rezende. Números Complexos: Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3o ano do Ensino Médio. Juiz de Fora/MG, 2014.
- [37] SOUZA Viviane Dal Molin, e MARIANI, Viviana Cocco,. Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função, disponível em <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCC1021.pdf>, acesso em junho de 2016

## 8 APÊNDICE

### 8.1 QUESTIONÁRIO QA

#### QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS DA EPCAR - QA

Caro aluno, o questionário abaixo se destina à minha Pesquisa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São João del-Rei UFSJ. A Dissertação tem o seguinte título: “Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: Uma Abordagem com ênfase no comportamento das funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo.”

Suas respostas às questões abaixo irão ajudar-me a verificar se, na sua percepção de aluno do EPCAR, a metodologia que os professores de matemática da EPCAR usam para apresentar a definição de função - **notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função**, é facilitadora para que você possa compreender tais aspectos interpretando o gráfico de uma função e se, com essa metodologia, se torna melhor preparado para esboçar gráficos de funções e caracterizá-las.

Solicito a você que responda às questões do questionário com o máximo de cuidado e franqueza, para que eu possa construir um retrato o mais fiel possível do objetivo proposto.

Sua colaboração é de fundamental importância. Pela sua contribuição, desde já agradeço.

Professora Andréa Cristina Rocha Cantaruti

Nome \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

- Você está cursando o primeiro ano do ensino médio pela primeira vez?  
( ) Sim ( ) Não
  - Durante quase toda sua vida escolar, você teve a disciplina de Matemática. Se você tivesse a chance de escolher as disciplinas que fosse estudar, você escolheria Matemática?  
( ) Sim ( ) Não
  - Você teve no currículo nos anos anteriores o conteúdo de definição de função e elementos estruturantes das funções, conforme descrito acima?  
( ) Sim ( ) Não
  - Que importância você atribuía ao estudo de funções antes de ser aluno na EPCAR?  
( ) Nenhuma ( ) Pouca ( ) Normal ( ) Importante ( ) Muito Importante
  - Após este período de quase seis meses estudando este assunto, como você considera o estudo de funções?  
( ) Nada importante ( ) Pouco importante ( ) Normal ( ) Importante ( ) Muito Importante
- Eu gostaria que você fizesse um pequeno texto para justificar sua atribuição de valor às duas perguntas anteriores.
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

**Responda a esta pergunta somente quem já havia estudado a definição de função antes de ser aluno da EPCAR.**

- A abordagem dada no ensino de definição de função e seus elementos estruturantes na escola em que você estudava antes era a mesma que recebeu na EPCAR?  
( ) Sim ( ) Não

Se você respondeu **não** à pergunta anterior, explique em que você considerou diferente:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Responda às questões abaixo, de **7 a 14**, tendo como referência que **no início do ano de 2016**, antes de começar a estudar as funções por famílias, você estudou a definição de função; notação de função; domínio; imagem; raiz ou zero de uma função; comportamentos do tipo: estabilidade (intervalo em que a função é constante), crescimento, decrescimento, máximos e mínimos de funções, sinal de funções, funções pares e ímpares.

- Após o estudo do que referimos acima, você é capaz de definir função hoje?  
( ) Sim ( ) Não

8. Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem?

( ) Sim ( ) Não

9. Antes de estudar funções com a abordagem citada, você se sentia capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?

( ) Sim ( ) Não

10. Após o estudo de funções, conforme discriminado acima, você se sente capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas os elementos já citados?

( ) Sim ( ) Não

11. Após todo o embasamento teórico explanado acima, você se sentiu mais preparado para estudar as funções por famílias, a saber: Função constante, Função afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função modular, assuntos abordados após a definição de funções e entes caracterizadores?

( ) Sim ( ) Não

12. Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule **apenas um** dos números para indicar sobre suas percepções sobre o ensino de Funções no CPCAR. Use de 5 = "excelente", até 1 = "fraco".

QUESTIONAMENTOS	Excelente				Fraco
f) O quanto você acha que aprendeu sobre o assunto funções?	5	4	3	2	1
g) O quanto você acha que ficou bom no assunto definição de função e propriedades caracterizadoras, após este estudo no CPCAR?	5	4	3	2	1
h) O quanto você é capaz de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?	5	4	3	2	1
i) O quanto você consegue resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções?	5	4	3	2	1
j) Após todo o embasamento teórico sobre definição de funções e característica de <b>seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função</b> , o quanto você se sentiu mais preparado para estudar as funções por famílias, a saber ,Função constante, Função Afim, Função Quadrática, Função definida por mais de uma sentença, Função Modular; Classificação de funções: sobrejetividade, injetividade, bijeção e Função Inversa?	5	4	3	2	1

13. No quadro a seguir, explicita pontos positivos e pontos negativos da metodologia utilizada nas aulas de Matemática do 1º ano do CPCAR com relação ao conteúdo de definição de função e características de seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função. Preencha seguindo uma ordem de maior importância para você.

(Não é necessário completar o quadro todo! Coloque aquilo que é (foi) mais relevante para você.

PONTOS POSITIVOS	PONTOS NEGATIVOS

14. Este espaço foi reservado para você fazer comentários do que considera que vai contribuir para a proposta da pesquisa:

\_\_\_\_\_



## 8.2 QUESTIONÁRIO QPE

### QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES DA EPCAR - QPE

Caro Professor, o questionário abaixo se destina à minha Pesquisa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São João del-Rei UFSJ. A Dissertação tem o seguinte título: “Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: Uma Abordagem com ênfase no comportamento das Funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo.”

Suas respostas às questões abaixo irão ajudar-me a verificar se, na sua percepção de professor, a metodologia que os professores de matemática da EPCAR usam para apresentar a definição de função - **notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função** - é facilitadora para que o aluno possa compreender tais aspectos interpretando o gráfico de uma função e se, com essa metodologia, torna-se melhor preparado para esboçar gráficos de funções e caracterizá-las e se ainda a referida metodologia poderá embasar e auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingressar num curso superior que tenha a disciplina de Cálculo, possa acompanhar com mais facilidade tal disciplina.

Solicito a vocês que respondam às questões do questionário com o máximo de cuidado e franqueza, para que eu possa construir um retrato o mais fiel possível do objetivo proposto.

Sua colaboração é de fundamental importância. Pela sua contribuição, desde já agradeço.

Professora Andréa Cristina Rocha Cantaruti

Nome \_\_\_\_\_

1. Há quanto tempo você atua como professor de Matemática? \_\_\_\_\_
2. Há quanto tempo você atua ou já atuou como professor de Matemática do 1º ano na EPCAR? \_\_\_\_\_
3. Se seus alunos da EPCAR tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam matemática?  
 10%  20%  30%  40%  50%  60%  70%  80%  90%  100%

Por quê? \_\_\_\_\_

4. A **abordagem** que você dava ao ministrar o estudo de definição de funções e seus elementos estruturantes antes de ministrar aulas na EPCAR era a mesma dada no CPCAR? ( ) Sim ( ) Não
5. A **metodologia** que você usava ao ministrar o estudo de definição de funções e seus elementos estruturantes antes de ministrar aulas na EPCAR era a mesma que você utiliza no CPCAR? ( ) Sim ( ) Não

Se você respondeu **não** a uma das duas perguntas anteriores, explique em que você considera que é diferente.

6. Considerando a metodologia que vocês professores do 1º ano do CPCAR utilizam para definir funções: **notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função**, você considera que esta prática

3) é facilitadora para que seus alunos consigam **interpretar** o gráfico de uma função?

( ) Sim ( ) Não

Justifique: \_\_\_\_\_

4) é facilitadora para que seus alunos consigam **esboçar** o gráfico de uma função?  
 Sim  Não

Justifique: \_\_\_\_\_

5) contribui para que o aluno possa resolver inequações, inequações simultâneas e inequações produto e/ou quociente graficamente ao invés de algebricamente?  
 Sim  Não

Justifique: \_\_\_\_\_

6) facilita, por parte dos alunos, o estudo das funções por famílias (afim, quadrática, função definida por várias sentenças, modular, exponencial, logarítmica e trigonométricas)?  Sim  Não

Justifique: \_\_\_\_\_

7) poderá contribuir para o estudo da disciplina de Cálculo, caso o aluno venha a estudar a referida disciplina em um curso superior?  Sim  Não

Justifique: \_\_\_\_\_

7. Você considera a metodologia que usa no CPCAR para ensinar a definição de função e seus elementos estruturantes eficiente e eficaz?

Sim  Não

Por quê? \_\_\_\_\_

Você mudaria alguma coisa em relação à sua prática e conduta em sala de aula na transmissão do conteúdo de definição de função e seus elementos estruturantes?

Sim  Não

Caso tenha marcado **sim**, explique o porquê.

\_\_\_\_\_

8. Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule **apenas um** dos números para indicar sobre suas percepções de como você percebe o quanto seus alunos evoluíram no aprendizado de funções, após terem estudado no 1º ano do CPCAR, conforme a metodologia já descrita.

Use de 5 = "excelente", até 1 = "fraco".

QUESTIONAMENTOS	Excelente					Fraco				
a) O quanto você acha que seus alunos do CPCAR aprenderam sobre o assunto funções?	5	4	3	2	1					
b) O quanto você acha que seus alunos ficaram bons no assunto definição de funções e propriedades caracterizadoras, após este estudo no CPCAR?	5	4	3	2	1					
c) O quanto você acha que seus alunos são capazes de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?	5	4	3	2	1					
d) O quanto você acha que seus alunos conseguem resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções?	5	4	3	2	1					
e) Após todo o embasamento teórico sobre definição de funções e característica de <b>seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função</b> , o quanto você considera que seus alunos se sentem mais preparados para estudar as funções por famílias, a saber, Função Constante, Função Afim, Função Quadrática,	5	4	3	2	1					

Função definida por mais de uma sentença, Função Modular; Função Exponencial, Função Logarítmica e Funções Trigonométricas; Classificação de funções: sobrejetividade, injetividade, bijeção e Função Inversa?	
--	--

9. No quadro a seguir, explicita pontos positivos e pontos negativos da metodologia utilizada nas aulas de Matemática do 1º ano do CPCAR com relação ao conteúdo de definição de funções e características de seus elementos estruturantes: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, função constante, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função. Preencha seguindo uma ordem de maior importância para você. (Não é necessário completar o quadro todo! Coloque aquilo que na sua percepção é mais relevante).

PONTOS POSITIVOS	PONTOS NEGATIVOS

10. Este espaço foi reservado para você fazer outros comentários que considera que vão contribuir para a proposta da pesquisa.
-



Por quê? \_\_\_\_\_

Responda às questões abaixo, de **8 a 11**, tendo como referência a forma como você estudou, no Ensino Médio, a definição de função; notação de função; domínio; imagem; raiz ou zero de uma função; comportamentos do tipo: estabilidade (intervalo em que a função é constante), crescimento, decrescimento, máximos e mínimos de funções, sinal de funções, funções pares e ímpares.

Após concluir o Ensino Médio,

9. Você sentiu-se capaz de definir função? ( ) Sim ( ) Não

10. Considerou importante a definição de todos os entes citados assim como qual a interpretação gráfica que cada um deles tem? ( ) Sim ( ) Não

11. Sentiu-se capaz de interpretar o gráfico de uma função e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?( ) Sim ( ) Não

12. Considerou-se preparado e com base no ensino de funções para cursar a disciplina de Cálculo I? ( ) Sim ( ) Não

13. Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule **apenas um** dos números para indicar sobre suas percepções sobre o ensino de Funções que você teve no Ensino Médio e sobre o seu aprendizado na disciplina de Cálculo I

Use de 5 = “excelente”, até 1 = “fraco”.

QUESTIONAMENTOS	Excelente					Fraco				
a) O quanto você acha que aprendeu sobre o assunto funções no Ensino Médio?	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
b) O quanto você acha que ficou bom no assunto “definição de função e propriedades caracterizadoras”, no Ensino Médio?	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
c) O quanto você foi capaz de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características, após concluir o Ensino Médio?	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
d) O quanto você consegue resolver inequações, inequações simultâneas, inequações produto e/ou quociente usando como recurso somente o gráfico das funções, após concluir o Ensino Médio?	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
e) O quanto você considera que o conhecimento de funções pode contribuir para seu desempenho no curso de Cálculo?	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
f) Até o momento, o quanto você acha que está bom na disciplina de Cálculo?	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1

14. Você tem apresentado dificuldades para acompanhar o curso de Cálculo I?

( ) Sim ( ) Não

Você pode explicar o seu sim/não?

15. Você considera que um bom embasamento no assunto funções pode contribuir para um melhor acompanhamento do curso de Cálculo?

( ) Sim ( ) Não

Por quê? \_\_\_\_\_

## 8.4 QUESTIONÁRIO QPES

## QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES DA UFSJ - QPES

Caro Professor, o questionário abaixo se destina à minha Pesquisa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ). A Dissertação tem o seguinte título: “Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: Uma Abordagem com ênfase no comportamento das Funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo.”

Suas respostas às questões abaixo irão ajudar-me a verificar se, na sua percepção de professor de nível superior na disciplina de Cálculo I, você considera que uma metodologia do ensino de definição de função, ocorrida no Ensino Básico com ênfase na - **notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função** - é facilitadora para que o aluno possa compreender tais aspectos interpretando o gráfico de uma função e se, com essa metodologia, torna-se melhor preparado para esboçar gráficos de funções e caracterizá-las. Além disso, saber também se a referida metodologia poderá embasar e auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingressar num curso superior que tenha a disciplina de Cálculo, possa acompanhar com mais facilidade tal disciplina e ainda quais dificuldades você tem percebido dos alunos que estão cursando Cálculo I em relação à base do estudo de funções para o acompanhamento da referida disciplina.

Solicito a vocês que respondam às questões do questionário com o máximo de cuidado e franqueza, para que eu possa construir um retrato, o mais fiel, possível do objetivo proposto.

Sua colaboração é de fundamental importância. Pela sua contribuição, desde já agradeço.

Professora Andréa Cristina Rocha Cantaruti

Nome \_\_\_\_\_

1. Há quanto tempo você atua como professor? \_\_\_\_\_
2. Considerando que a Disciplina de Cálculo I é ministrada em um semestre, quantas vezes você atua ou já atuou como professor de Cálculo I no ensino superior?
- \_\_\_\_\_

3. Em quais cursos você já ministrou ou ministra Cálculo I na UFSJ? \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

4. Na sua opinião, se seus alunos tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam Cálculo I?

10%  20%  30%  40%  50%  60%  70%  80%  90%  100%

Por quê? \_\_\_\_\_

5. Você tem observado se os alunos egressos do Ensino Médio que começam a fazer a disciplina de Cálculo I têm, em sua maioria, dificuldade ou falta de base no estudo de funções? ( ) Sim ( ) Não

6. Se respondeu sim à pergunta anterior, diga com que porcentagem você considera que tal fato vem ocorrendo?

10%  20%  30%  40%  50%  60%  70%  80%  90%  100%

A que você atribui tal defasagem? Quais dificuldades os alunos mais têm com relação ao estudo de Cálculo relacionado às funções reais?

\_\_\_\_\_

7. Você considera que se os alunos, antes de realizarem o curso de Cálculo I, tivessem o curso de Introdução ao Cálculo dando ênfase às funções reais, chegariam mais bem preparados para cursarem o Cálculo I? ( ) Sim ( ) Não
8. Considerando uma **metodologia** do ensino de função no Ensino Básico/Médio que enfatiza a definição e suas propriedades básicas, quais sejam: domínio, imagem, crescimento, decrescimento, máximos e mínimos, raízes, sinal, paridade e outras, dando ênfase à definição e interpretação gráfica destes entes, você considera que esta prática
- a) poderá contribuir para um melhor acompanhamento dos alunos no curso de Cálculo I?  
( ) Sim ( ) Não
- b) poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo de Limite e Continuidade de funções de uma variável real? ( ) Sim ( ) Não
- c) poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo de Derivada e Diferenciais de Funções de uma Variável Real?  
( ) Sim ( ) Não
- d) poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo do traçado de um gráfico através da derivada de uma função?  
( ) Sim ( ) Não
- e) poderá facilitar, por parte dos alunos, o estudo da Integração e aplicação de integrais de Funções de uma Variável Real?  
( ) Sim ( ) Não
9. Para cada uma das perguntas seguintes do quadro abaixo, circule **apenas um** dos números para indicar sobre suas percepções de como você entende o quanto seus alunos possuem conhecimento sobre funções e o aprendizado na disciplina de Cálculo I.
10. Use de 5 = “excelente”, até 1 = “fraco”.

QUESTIONAMENTOS	Excelente					Fraco				
a) O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I conhecem e dominam sobre o assunto funções?	5	4	3	2	1					
b) O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I são bons no assunto definição de funções e propriedades caracterizadoras?	5	4	3	2	1					
c) O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I são capazes de esboçar o gráfico de uma função a partir de tais características?	5	4	3	2	1					
d) O quanto você acha que seus alunos iniciantes do curso de Cálculo I estão preparados para cursarem a referida disciplina?	5	4	3	2	1					
e) Ao final do curso da disciplina de Cálculo I, o quanto você considera que seus alunos têm conhecimento e dominam os assuntos que foram ministrados?	5	4	3	2	1					

11. Este espaço foi reservado para você fazer outros comentários que considera que vão contribuir para a proposta da pesquisa.
-

## 8.5 TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA ALUNOS DA ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR - EPCAR

### ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR (EPCAR)

Caros alunos do "1º esquadrão - 2016" da EPCAR,

Estamos encaminhando este documento para consentimento da realização da pesquisa, cujo objetivo será **verificar se o estudo das Funções, com a abordagem dada na EPCAR (com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decréscimo, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função) pode colaborar para que o aluno interprete o gráfico de uma função e seja capaz de caracterizá-la.**

A pesquisa será realizada por mim, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, professora de matemática da EPCAR há 20 anos, com acompanhamento de meu orientador do curso de mestrado, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, da Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ).

Esta pesquisa será realizada para fazer meu Trabalho de Conclusão de Curso do Curso Pós-graduação stricto sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que estou cursando junto à UFSJ. É uma atividade obrigatória para obtenção do título de Mestre e tem como objetivo principal o aprimoramento profissional de professores da Educação Básica.

A pesquisa envolverá aplicação de questionários aos alunos do 1º esquadrão da EPCAR e aplicação de questionário e ou entrevistas gravadas em áudio e vídeo com professores da EPCAR. Informamos que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das aulas de matemática. Os dados coletados nos questionários e nas entrevistas serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude de vocês. Também garantimos que nenhum de vocês será penalizado ou prejudicado se discordar em participar da pesquisa, ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa. Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nomes fictícios para vocês, que terão, assim, suas identidades preservadas.

Com esta pesquisa pretendemos verificar se a metodologia utilizada para ministrar o assunto de Funções na EPCAR, poderá auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingresse num curso superior que tenha a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, tenha embasamento para acompanhar tal disciplina.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientador:

Prof. Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha

<http://www.carlosraposo.com.br>

Mestranda:

Profª. Andréa Cristina Rocha Cantaruti

[acantaruti@yahoo.com.br](mailto:acantaruti@yahoo.com.br)

### AUTORIZAÇÃO DO ALUNO

Eu, \_\_\_\_\_ (nome completo do aluno), concordo em participar da pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, fazendo preenchimento de questionários.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

Assinatura do aluno

### AUTORIZAÇÃO DOS PAIS DO ALUNO (CASO O ALUNO SEJA MENOR DE IDADE)

Eu, \_\_\_\_\_ (nome do pai/responsável pelo aluno), concordo que o aluno \_\_\_\_\_ participier da pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, fazendo preenchimento de questionários.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

Assinatura dos pais ou responsável



## 8.6 TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PROFESSOR DA ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR (EPCAR)

Prezado(a) Professor(a) \_\_\_\_\_

Estamos encaminhando este documento para consentimento da realização da pesquisa, cujo objetivo será **verificar se o estudo das Funções, com a abordagem dada na EPCAR (com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função) pode colaborar para que o aluno interprete o gráfico de uma função e seja capaz de caracterizá-la.**

A pesquisa será realizada por mim, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, professora de matemática da EPCAR há 20 anos, com acompanhamento de meu orientador do curso de mestrado, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, da Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ).

Esta pesquisa será realizada para fazer meu Trabalho de Conclusão do Curso de Pós-graduação Stricto Sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que estou cursando junto à UFSJ. É uma atividade obrigatória para obtenção do título de Mestre e tem como objetivo principal o aprimoramento profissional de professores da Educação Básica.

A pesquisa envolverá aplicação de questionários aos alunos do 1º esquadrão da EPCAR e aplicação de questionário e ou entrevistas gravadas em áudio e vídeo com professores da EPCAR. Informamos que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das aulas de matemática. Os dados coletados nos questionários e nas entrevistas serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação dos comportamentos ou atitudes suas. Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nome fictício para você, que terá, assim, sua identidade preservada.

Com esta pesquisa pretendemos verificar com o senhor, professor de matemática da EPCAR, se a metodologia utilizada para ministrar o assunto de Funções na EPCAR é diferente do que o senhor(a) fazia anteriormente ou não, e se na sua visão, a prática metodológica aplicada poderá facilitar ou não os processos de ensino e aprendizagem do conteúdo de funções, podendo embasar e auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingressar em um curso superior que tenha a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, possa acompanhar tal disciplina.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientador:

Prof. Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha  
<http://www.carlosraposo.com.br>

Mestranda:

Prof<sup>a</sup>. Andréa Cristina Rocha Cantaruti  
[acantaruti@yahoo.com.br](mailto:acantaruti@yahoo.com.br)

### AUTORIZAÇÃO DO(A) PROFESSOR(A)

Eu, \_\_\_\_\_ (nome completo do(a) professor(a)), concordo em participar da pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, fazendo preenchimento de questionários e ou participando de entrevista(s).

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

\_\_\_\_\_  
 Assinatura do(a) professor(a)

## 8.7 AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO (EPCAR)

Exmo Sr Coronel Moura, Comandante Interino da ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES-DO-AR (EPCAR),

Eu, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, Professora na EPCAR desde 1996 e aluna do Curso de Pós-graduação Stricto Sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, junto à Universidade Federal de São João Del Rei, solicito autorização de V. Exa. para realizar uma pesquisa de campo junto a alunos do 1º esquadrão e Professores de Matemática da EPCAR.

Tal atividade é pré-requisito para conclusão do curso de mestrado citado. O meu projeto de pesquisa tem por objetivo **verificar se o estudo das Funções, com a abordagem dada na EPCAR (com ênfase na definição, notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes, quais sejam: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função e sinal de uma função) pode colaborar para que o aluno interprete o gráfico de uma função e seja capaz de caracterizá-la.**

A pesquisa será realizada por mim, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, professora de matemática da EPCAR há 20 anos, com acompanhamento de meu orientador do curso de mestrado, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, da Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ).

Com esta pesquisa pretendemos verificar se a metodologia utilizada para ministrar o assunto de Funções na EPCAR, poderá auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingresse num curso superior que tenha a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, tenha embasamento para acompanhar tal disciplina.

Para que a pesquisa possa ser realizada, é necessário o desenvolvimento desse trabalho de campo que será constituído pelo preenchimento de questionários pelos alunos do 1º esquadrão e preenchimento de questionário e/ou entrevistas em áudio e vídeo realizada com professores de matemática da EPCAR.

Para realizar essa pesquisa, queremos solicitar o consentimento de V. Exa., garantindo que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina dos alunos nem das aulas de Matemática. Os dados coletados nos questionários e nas entrevistas serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude dos envolvidos.

A divulgação dos resultados acontecerá com prévia autorização dos alunos maiores, dos pais/responsáveis dos menores e dos professores.

Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nomes fictícios para os envolvidos, que terão, assim, suas identidades preservadas.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientador:

Prof. Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha  
<http://www.carlosraposo.com.br>

Mestranda:

Prof<sup>ª</sup>. Andréa Cristina Rocha Cantaruti  
[acantaruti@yahoo.com.br](mailto:acantaruti@yahoo.com.br)

### AUTORIZAÇÃO

Eu, \_\_\_\_\_ concordo que a pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, seja realizada.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

Assinatura

## 8.8 TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI (UFSJ)

Caros alunos do curso de \_\_\_\_\_

Estamos encaminhando este documento para consentimento da realização da pesquisa, que tem como um dos objetivos verificar se na sua percepção de aluno do curso de Cálculo I, você apresenta dificuldades ou não para acompanhar a referida disciplina, bem como se você tem dificuldade no assunto funções, principalmente no que se refere à **notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função, que você estudou no Ensino Médio** e, caso haja defasagem na aprendizagem de tais assuntos, quais as influências desta defasagem para o acompanhamento do Cálculo I.

A pesquisa será realizada por mim, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, professora de matemática há 25 anos, com acompanhamento de meu orientador do curso de mestrado, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, da Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ).

Esta pesquisa será realizada para fazer meu Trabalho de Conclusão de Curso do Curso Pós-graduação *stricto sensu*, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que estou cursando junto à UFSJ. É uma atividade obrigatória para obtenção do título de Mestre e tem como objetivo principal o aprimoramento profissional de professores da Educação Básica.

A pesquisa envolverá aplicação de questionários aos alunos do 1º período dos cursos das Engenharias e/ou Ciências da Computação da UFSJ e aplicação de questionário a professores da disciplina de Cálculo I da UFSJ que ministrem ou ministraram aulas de Cálculo I. Informamos que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das aulas. Os dados coletados nos questionários serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude de vocês. Também garantimos que nenhum de vocês será penalizado ou prejudicado se discordar em participar da pesquisa, ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa. Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nomes fictícios para vocês, que terão, assim, suas identidades preservadas.

Com a pesquisa pretendemos verificar as dificuldades ou as ausências delas apresentadas pelos alunos dos cursos de graduação de Engenharia e/ou Ciência da Computação da UFSJ na disciplina de Cálculo I, bem como se há por parte dos alunos dificuldade no estudo das funções e quais as influências desta defasagem para o acompanhamento da referida disciplina.

Agradecemos desde já sua colaboração.  
Atenciosamente,

Orientador:  
Prof. Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha  
raposo@ufs.edu.br

Mestranda:  
Profª. Andréa Cristina Rocha Cantaruti  
acantaruti@yahoo.com.br

### AUTORIZAÇÃO DO ALUNO

Eu, \_\_\_\_\_ (nome completo do aluno), concordo em participar da pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, fazendo preenchimento de questionários.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

\_\_\_\_\_  
Assinatura do aluno

## 8.9 TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PROFESSOR DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI (UFSJ)

Prezado(a) Professor(a)

Estamos encaminhando este documento para consentimento da realização da pesquisa, que tem como um dos objetivos verificar se, na sua percepção de professor de nível superior na disciplina de Cálculo I, você considera que uma metodologia do ensino de definição de função, ocorrida no Ensino Básico com ênfase na - **notação, comportamento das funções e seus elementos estruturantes de: estudo de domínio, imagem, raízes, crescimento, decrescimento, máximos, mínimos, paridade de função, sinal de uma função** - é facilitadora para que o aluno possa compreender tais aspectos interpretando o gráfico de uma função e se, com essa metodologia, torna-se mais bem preparado para esboçar gráficos de funções e caracterizá-las. Além disso, desejamos saber também se a referida metodologia poderá embasar e auxiliar o aluno que, ao finalizar o Ensino Médio e ingressar num curso superior que tenha a disciplina de Cálculo I, possa acompanhar com mais facilidade tal disciplina e ainda quais dificuldades você tem percebido dos alunos que estão cursando Cálculo I em relação à base do estudo de funções para o acompanhamento da referida disciplina.

A pesquisa será realizada por mim, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, professora de matemática há 25 anos, com acompanhamento de meu orientador do curso de mestrado, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, da Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ).

Esta pesquisa será realizada para fazer meu Trabalho de Conclusão do Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu*, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que estou cursando junto à UFSJ. É uma atividade obrigatória para obtenção do título de Mestre e tem como objetivo principal o aprimoramento profissional de professores da Educação Básica.

A pesquisa envolverá aplicação de questionários aos alunos dos cursos de Engenharia e/ou Ciências da Computação, e professores da UFSJ que ministram ou ministraram a disciplina de Cálculo I. Informamos que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das aulas. Os dados coletados nos questionários serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação dos comportamentos ou atitudes suas. Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nome fictício para você, que terá, assim, sua identidade preservada.

Com a pesquisa pretendemos verificar as dificuldades ou as ausências delas apresentadas pelos alunos dos cursos de graduação de Engenharia e/ou Ciências da Computação da UFSJ na disciplina de Cálculo I, bem como se há por parte dos alunos dificuldade no estudo das funções e quais as influências desta defasagem para o acompanhamento da referida disciplina.  
Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientador:

Prof. Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha  
raposo@ufs.edu.br

Mestranda:

Profª. Andréa Cristina Rocha Cantaruti  
acantaruti@yahoo.com.br

### AUTORIZAÇÃO DO(A) PROFESSOR(A)

Eu,

\_\_\_\_\_, (nome completo do(a) professor(a)), concordo em participar da pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, fazendo preenchimento de questionários.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

## 8.10 AUTORIZAÇÃO DO COODENADOR DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Ilmo Sr Professor Dr. Antônio Luiz Ribeiro Sabariz, Coordenador do curso de Engenharia Mecânica da UFSJ,

Eu, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, aluna do Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu*, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, junto à Universidade Federal de São João Del Rei, solicito autorização de sua senhoria, para realizar uma pesquisa de campo junto a alunos da turma de Cálculo I (segundo semestre de 2016) do curso de Engenharia Mecânica da UFSJ.

Tal atividade é pré-requisito para conclusão do curso de mestrado citado. Minha dissertação tem o seguinte título: **“Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: Uma Abordagem com ênfase no comportamento das funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo.”**

A pesquisa será realizada por mim, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, professora de matemática há 25 anos, com acompanhamento de meu orientador do curso de mestrado, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, da Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ).

Para que a pesquisa possa ser realizada, é necessário o desenvolvimento de trabalho de campo. Uma das atividades refere-se ao preenchimento de um questionário pelos alunos da turma de Cálculo I (segundo semestre de 2016) do curso de Engenharia Mecânica da UFSJ.

Para realizar essa pesquisa, queremos solicitar o consentimento do Senhor, garantindo que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina dos alunos nem das aulas de Cálculo I. Os dados coletados nos questionários serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude dos envolvidos.

A divulgação dos resultados acontecerá com prévia autorização dos alunos maiores, dos pais/responsáveis dos menores..

Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nomes fictícios para os envolvidos, que terão, assim, suas identidades preservadas.

Agradecemos desde já sua colaboração.  
Atenciosamente,

Orientador:  
Prof. Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha  
raposo@ufsj.edu.br

Mestranda:  
Prof<sup>a</sup>. Andréa Cristina Rocha Cantaruti  
acantaruti@yahoo.com.br

### AUTORIZAÇÃO

Eu, \_\_\_\_\_ concordo que a pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, seja realizada.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Coordenador

## 8.11 AUTORIZAÇÃO DO COODENADOR DO CURSO DE CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

Ilmo Sra Professora Dra Michelli Marlane Silva Loureiro, Coordenadora do curso de Ciências da Computação da UFSJ,

Eu, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, aluna do Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu*, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, junto à Universidade Federal de São João Del Rei, solicito autorização de sua senhoria, para realizar uma pesquisa de campo junto a alunos da turma de Cálculo I (segundo semestre de 2016) do curso de Engenharia Mecânica da UFSJ.

Tal atividade é pré-requisito para conclusão do curso de mestrado citado. Minha dissertação tem o seguinte título: **“Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: Uma Abordagem com ênfase no comportamento das funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo.”**

A pesquisa será realizada por mim, Andréa Cristina Rocha Cantaruti, professora de matemática há 25 anos, com acompanhamento de meu orientador do curso de mestrado, Professor Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha, da Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ).

Para que a pesquisa possa ser realizada, é necessário o desenvolvimento de trabalho de campo. Uma das atividades refere-se ao preenchimento de um questionário pelos alunos da turma de Cálculo I (segundo semestre de 2016) do curso de Ciências da Computação da UFSJ.

Para realizar essa pesquisa, queremos solicitar o consentimento da Senhora, garantindo que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina dos alunos nem das aulas de Cálculo I. Os dados coletados nos questionários serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude dos envolvidos.

A divulgação dos resultados acontecerá com prévia autorização dos alunos maiores, dos pais/responsáveis dos menores..

Os resultados da pesquisa serão comunicados utilizando nomes fictícios para os envolvidos, que terão, assim, suas identidades preservadas.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientador:  
Prof. Doutor Carlos Alberto Raposo da Cunha  
raposo@ufs.edu.br

Mestranda:  
Prof<sup>a</sup>. Andréa Cristina Rocha Cantaruti  
acantaruti@yahoo.com.br

### AUTORIZAÇÃO

Eu, \_\_\_\_\_ concordo que a pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, seja realizada.

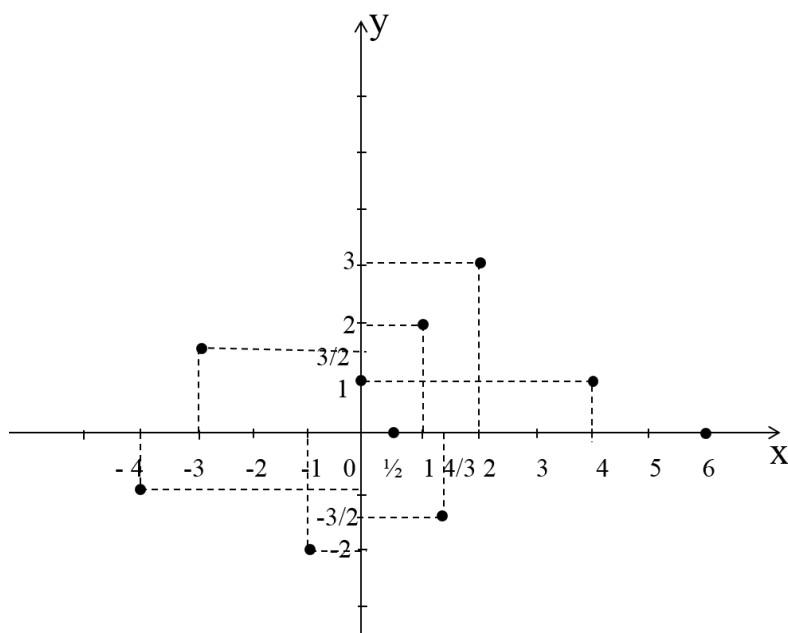
\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2016

\_\_\_\_\_  
Assinatura

## 9 ANEXOS

## 9.1 ATIVIDADE 1

Considere a função real  $f$  de  $A$  em  $B$ , cujo gráfico está indicado abaixo.

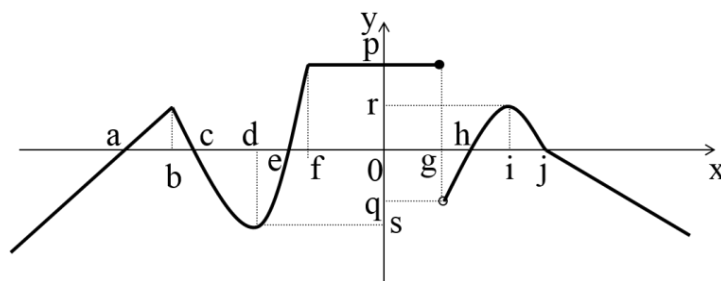


Analise o gráfico de  $f$  e responda ao que se pede:

- Qual é o conjunto domínio da função  $f$ ?
- Qual é o conjunto imagem de  $f$ ?
- Para quais valores de  $x$  a função  $f$  é positiva?
- Para quais valores de  $x$  a função  $f$  é negativa?
- Para quais valores de  $x$  a função  $f$  é nula?
- Determine os valores de  $f(0)$ ,  $f(-4)$  e  $f(1/2)$
- A função  $f$  admite um valor máximo? Em caso afirmativo, determine esse valor.
- A função  $f$  admite um valor mínimo? Em caso afirmativo, determine esse valor.

## 9.2 ATIVIDADE 2

Considere a função real  $F$ , cujo gráfico está indicado abaixo:



Determine:

1) O conjunto de valores de  $x$  para os quais a função  $F$  é

- a) crescente:
- b) decrescente:
- c) constante:
- d) positiva:
- e) negativa:
- f) nula:

2) O conjunto imagem de  $F$ :

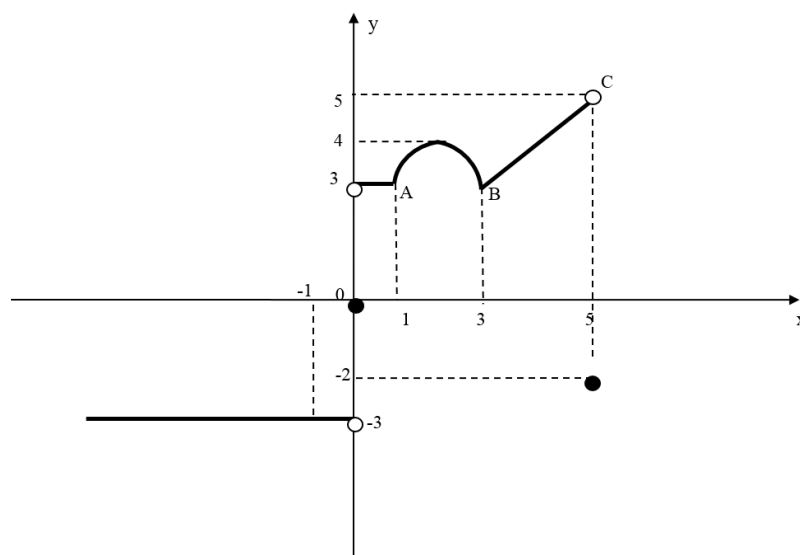
3) O(s) valor(es) de  $x$  para os quais  $F(x) = p$



## 9.3 ATIVIDADE 3

Considere a função real  $h$ , cujo gráfico está indicado abaixo.

Considere que  $AB$  é uma semicircunferência.



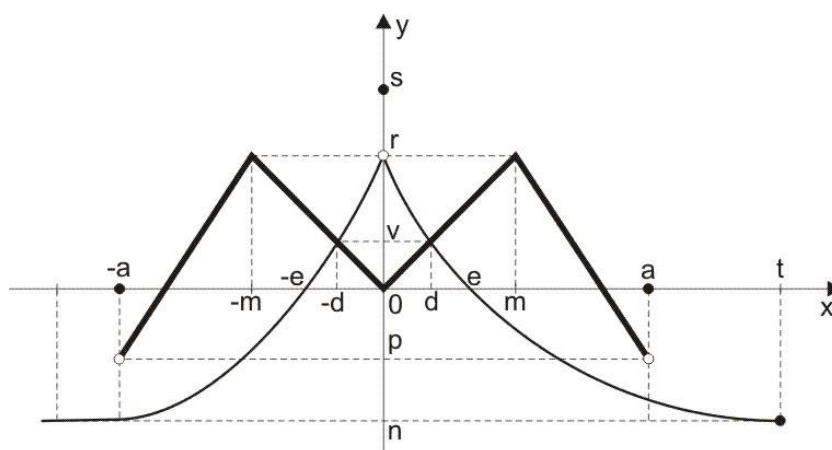
Análise o gráfico da função real  $h$  e determine:

- O domínio de  $h$
- O conjunto imagem de  $h$
- O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é constante.
- O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é crescente.
- O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é decrescente.
- O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é positiva.
- O conjunto de valores de  $x$  para os quais  $h$  é negativa.
- A(s) raiz(es) de  $h$
- O valor de  $h(5)$
- O(s) valor(es) de  $x$  para os quais  $h(x) = -3$
- O ponto de máximo de  $h$  no intervalo  $]-\infty, 3]$

## 9.4 ATIVIDADE 4

Considere, num mesmo plano cartesiano, os gráficos abaixo das funções reais  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sabe-se que  $g(-a) < f(-a)$ ;  $g(0) > f(0)$ ;  $g(a) < f(a)$  e  $g(x) = n \forall x \leq -a$

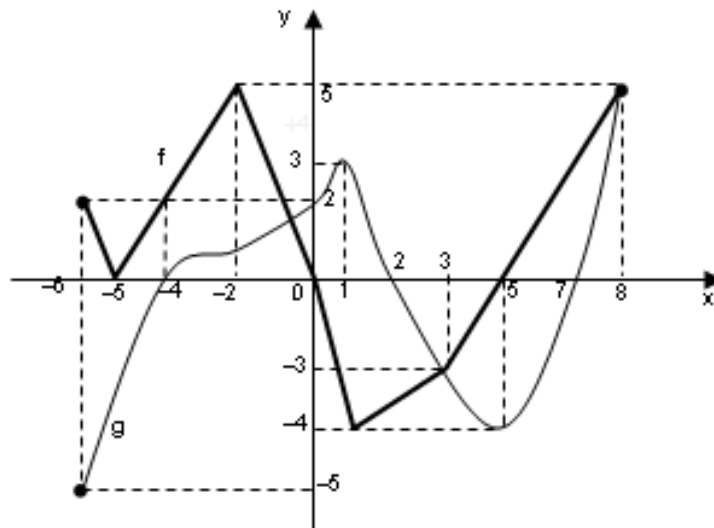


Analise os gráficos das funções  $f$  e  $g$  e identifique, nos gráficos, qual é o gráfico de  $f$  e qual é o gráfico de  $g$ . Em seguida, determine:

- $\text{Im}(g)$
- o conjunto de valores de  $x$  para os quais  $g(x) = 0$
- $g(0)$
- $f(0)$
- o valor máximo da função  $g$
- o ponto em que a função  $g$  admite valor máximo
- o domínio da função  $f$
- o conjunto de valores de  $x$  para os quais  $f(x) > g(x)$
- considerando que  $x \in [-m, m]$ , o valor mínimo de  $f$

## 9.5 ATIVIDADE 5

Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções reais  $f: [-6, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: [-6, 8] \rightarrow \mathbb{R}$



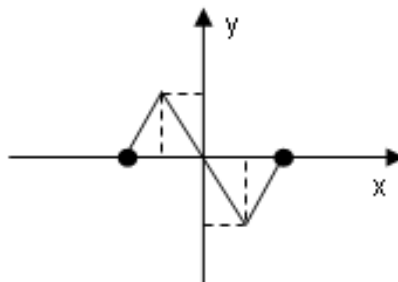
Determine o conjunto de valores de  $x$  para os quais

a)  $f(x)g(x) \geq 0$

b) a função  $h$  definida por  $h(x) = \sqrt{-\frac{[f(x)]^2}{g(x)}}$  está definida

## 9.6 ATIVIDADE 6

Seja a função real  $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo conjunto imagem é  $\text{Im} = [-2, 2]$  e cujo gráfico está esboçado abaixo.

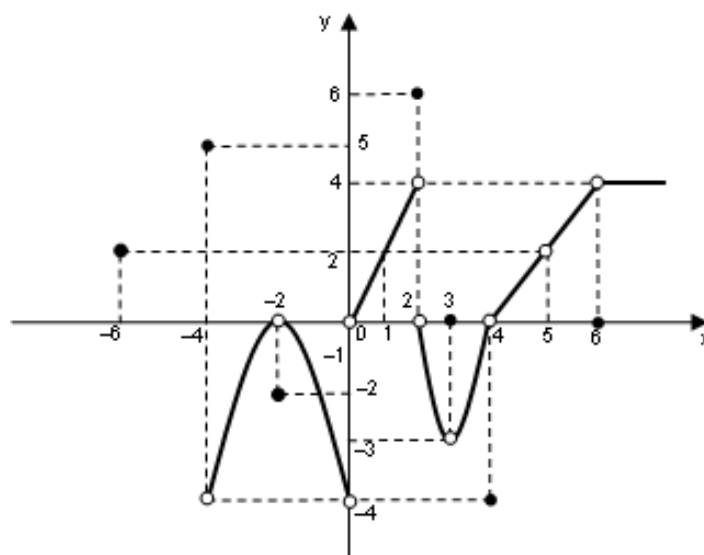


Considere a função  $h: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = \frac{g(x) - |g(x)|}{2} + 2$

Determine um esboço do gráfico que representa a função  $h$

## 9.7 ATIVIDADE 7

Considere o gráfico abaixo (Figura 39), da função real  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

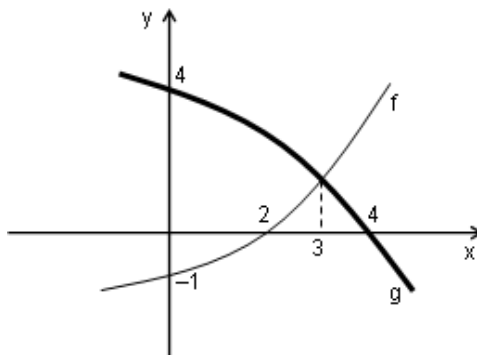


Analise as proposições abaixo e escreva, para cada uma delas, V para verdadeiro ou F para falso. Para as afirmativas falsas, reescreva-as, por completo, corrigindo a sentença matemática que estiver em desacordo.

- O conjunto  $A$  é dado por  $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4 \text{ ou } x = -6 \}$
- $f$  é crescente se  $x \in ]4, 5[$
- $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [1, 3[ \cup ]5, 6[$
- A função  $f$  se anula para apenas dois valores distintos de  $x$ .
- A função  $f$  não admite um valor mínimo.
- Não existe  $y$  pertencente a  $\mathbb{R}$  tal que  $x = 2$

## 9.8 ATIVIDADE 8

Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções reais, de variável real, **f** e **g**.



Analise as proposições abaixo e escreva, para cada uma delas, V para verdadeiro ou F para falso, justificando sua resposta.

a) (\_\_\_)  $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]3, +\infty[$

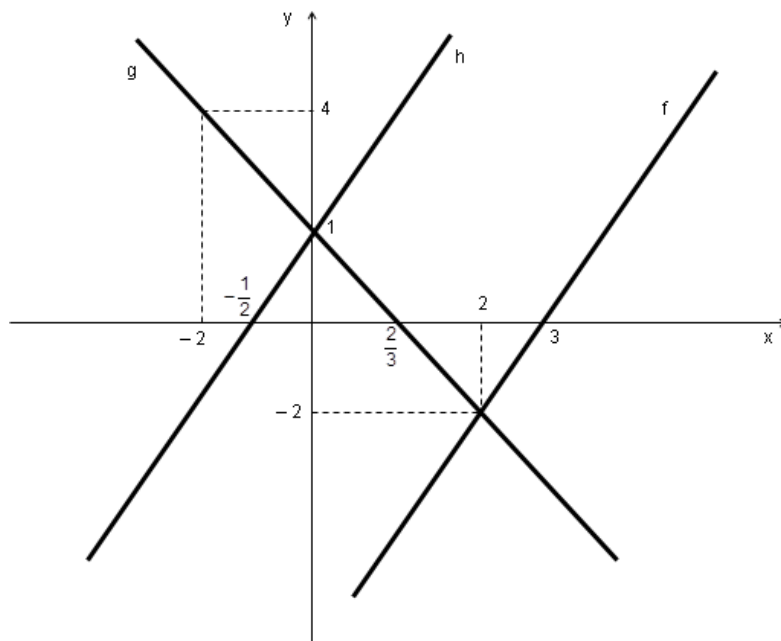
b) (\_\_\_)  $f(x) + g(x) < 0$  para todo  $x \in ]-\infty, 3[$

c) (\_\_\_)  $f(x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 0]$

d) (\_\_\_) A função  $h$  definida por  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x) \cdot g(x)}}$  está definida somente se  $x \in [3, 4[$

## 9.9 ATIVIDADE 9

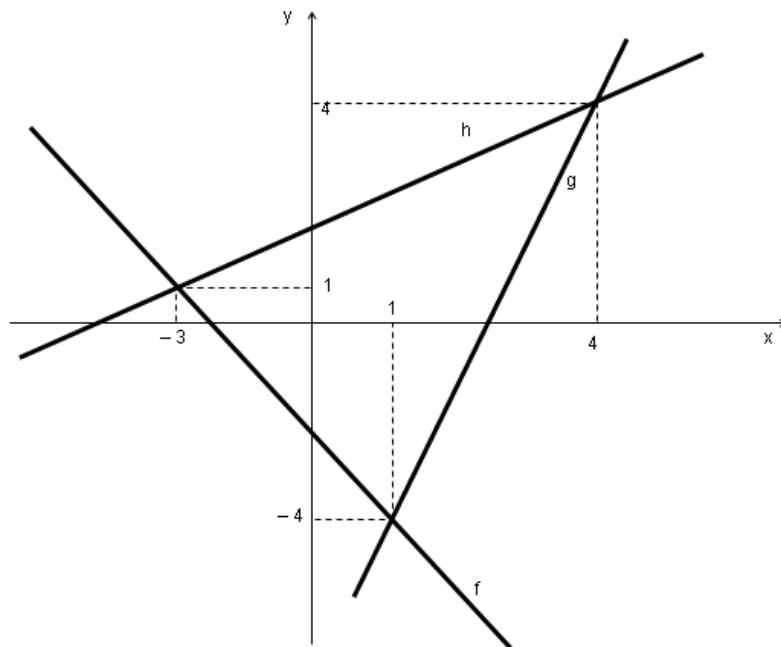
01) Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções reais, de variável real,  $f$ ,  $g$  e  $h$ .



Se  $h \parallel f$ , determine os valores de  $x \in \mathbb{R}$ , tais que:

- $f(x) > g(x)$
- $g(x) \leq h(x)$
- $f(x) \geq h(x)$
- $g(x) > 4$
- $f(x) \leq 0$
- $[f(x)] \cdot [g(x)] \leq 0$
- $\frac{h(x)}{g(x)} \geq 0$
- $h(x) \geq f(x)$

02) Com base nos gráficos das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  definidas em  $\mathbb{R}$ , determine os valores de  $x \in \mathbb{R}$ , tais que:



- d)  $f(x) < g(x) \leq h(x)$
- e)  $g(x) \leq f(x) < h(x)$
- f)  $h(x) \leq f(x) < g(x)$



## 9.10 ATIVIDADE 10

Se o gráfico abaixo representa a função inversa da função  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{a}{b} + 2^x, \text{ então determine o valor de } \mathbf{a - b}$$

