UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FRANCIELLE GONÇALVES SENTONE

PARADOXOS GEOMÉTRICOS EM SALA DE AULA

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2017

FRANCIELLE GONÇALVES SENTONE

PARADOXOS GEOMÉTRICOS EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

CURITIBA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S478p Sentone, Francielle Gonçalves
2017 Paradoxos geométricos em sala de aula / Francielle Gonçalves Sentone.-- 2017.
98 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017.
Bibliografia: f. 76-78.

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Paradoxos - Matemática. 3. Teoria dos números. 4. Lógica simbólica e matemática. 5. Paradoxo de Banach-Tarski. 6. Fibonacci, Números de. 7. Aprendizagem. 8. Atividades criativas na sala de aula. 9. Matemática recreativa. 10. Matemática - Dissertações. I. Nós, Rudimar Luiz, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 -- 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Curitiba
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Título da Dissertação No. 035

“Paradoxos geométricos em sala de aula”

por

Francielle Gonçalves Sentone

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 10 de fevereiro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Rudimar Luiz Nós, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Vitor José Petry, Dr.
(UFFS)

Profa. Mari Sano, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Profa. Neusa Nogas Tocha, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

A Deus, que nas horas difíceis confortou meu coração e me deu forças para prosseguir na minha caminhada. Aos meus pais, Wilson e Rosicler, que me ensinaram a ser uma pessoa ética e a batalhar para alcançar meus objetivos. À minha família, esposo e filha, Marcelo e Alice, que foram compreensíveis nos momentos de estudo, que tiveram paciência comigo e me ajudaram a concluir esta etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

- Aos meus colegas de turma, pelo esforço e compartilhamento de conhecimentos.
- Aos meus professores, que foram responsáveis pelo meu aprendizado.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós, que com todo seu conhecimento e paciência tornou possível a elaboração desta dissertação.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

Sinto-me compelido ao trabalho literário: (...) pelo meu não reconhecimento da fronteira realidade-irrealidade; (...) pelo meu amor platônico às matemáticas; (...) porque através do lirismo propendo à geometria.

Murilo Mendes (1901-1975)
Poeta e prosador brasileiro, expoente do surrealismo brasileiro.
Na tradução para o português da obra *Elementos*, de Euclides.

RESUMO

GONÇALVES SENTONE, Francielle. PARADOXOS GEOMÉTRICOS EM SALA DE AULA. 98 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

Apresentamos neste trabalho alguns paradoxos lógico-matemáticos, como o paradoxo de Galileu, e alguns paradoxos geométricos, como os paradoxos de Curry, de Hooper e de Banach-Tarski. Empregamos os paradoxos de Curry e de Hooper para avaliar, de maneira lúdica, a aprendizagem de conceitos de Geometria, tais como área, semelhança de triângulos, o Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo e o coeficiente angular da reta, através da aplicação de roteiros de atividades em sala de aula. Sugerimos também atividades recreativas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio envolvendo alguns paradoxos geométricos.

Palavras-chave: o princípio da distribuição oculta, o paradoxo de Curry, o paradoxo de Hooper, o paradoxo de Banach-Tarski, a sequência de Fibonacci, Matemática Recreativa.

ABSTRACT

GONÇALVES SENTONE, Francielle. GEOMETRIC PARADOXES IN CLASSROOM. 98 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

We present in this work some logical-mathematical paradoxes, as Galileo's paradox, and some geometric paradoxes, such as Curry's paradox, Hooper's paradox and the Banach-Tarski paradox. We use the Curry and Hooper paradoxes to playfully evaluate the learning of geometric concepts, such as area, triangle similarity, the Pythagorean Theorem, trigonometric ratios in the right triangle, and the angular coefficient of the line, through the application of activities guides in classroom. We also suggest recreational activities for Elementary and High School classes involving some geometric paradoxes.

Keywords: the hidden distribution principle, Curry's paradox, Hooper's paradox, the Banach-Tarski paradox, Fibonacci's sequence, Recreational Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$:$	tal que
$\forall$	para todo, para qualquer, para cada
$\in$	pertence
$\Leftrightarrow$	bicondicional, equivale, se e somente se
$\exists$	existe
$\exists!$	existe um único
$\wedge$	conjunção lógica *e*
$\emptyset$	conjunto vazio
$\notin$	não pertence
$\vee$	conjunção lógica *ou*
$\Rightarrow$	condicional, implica, se...então
$\subseteq$	é um subconjunto próprio de
$\cap$	intersecta com
$\neq$	não é igual a
$\neg$	negação lógica
$\longrightarrow$	seta de função, de...para
$\approx$	é aproximadamente
$\leq$	menor ou igual do que
$\cup$	união com
$\geq$	maior ou igual do que
$\subset$	está contido em
$\supset$	contém
$\equiv$	equivalente a

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um paradoxo é uma declaração que vai contra o censo comum, expectativas ou definições; é uma proposição que, apesar de aparentar um raciocínio coerente, demonstra falta de lógica, escondendo contradições decorrentes de uma análise incorreta de sua estrutura interna; é o oposto do que alguém pensa ser a verdade. Na Filosofia e na Lógica, por exemplo, os paradoxos são importantes argumentos críticos e já foram responsáveis pela organização ou reorganização de fundamentos de várias áreas do conhecimento.

A palavra paradoxo provém do grego *paradoksos*: o prefixo *para* significa contrário a, ou oposto de, e o sufixo *doxo*, opinião. No latim, *paradoxum* é uma sentença que se opõe à opinião comum. Como figura de linguagem (ou pensamento), paradoxo é, na definição de Rocha Lima em Gramática Normativa da Língua Portuguesa, "a reunião de ideias contraditórias em um só pensamento, o que nos leva a enunciar uma verdade com aparência de mentira". Um bom exemplo é o paradoxo do altruísta, mencionado a seguir.

Paradoxo 1.1 (Paradoxo do altruísta)**.** *Uma pessoa é altruísta se não pensa em si mesma. Considere um indivíduo que pensa em uma pessoa somente se ela é altruísta.*

- *Se o indivíduo é altruísta, então ele pensa em si mesmo. Logo, ele não é altruísta. Contraditório!*
- *Se o indivíduo não é altruísta, então ele não pensa em si mesmo. Logo, ele é altruísta. Novamente, contraditório!*

Para Farlow (FARLOW, 2014), "The best paradoxes are the easiest to state and the hardest to resolve", ou seja, os melhores paradoxos são os mais fáceis de afirmar e os mais difíceis de resolver. Então, solucionar um paradoxo seria como desvendar um truque? Seria mágica? Poderíamos, enquanto professores de Matemática, empregar paradoxos de forma lúdica para introduzir/investigar conceitos, principalmente geométricos? Para Alves e Morais Filho (ALVES; MORAIS FILHO, S.d.), a resposta é sim. Segundo eles, "Os Paradoxos Geométricos são tratados na Matemática Recreativa, desenvolvendo habilidades de raciocínio matemático por parte do aluno, tornando a Matemática e o raciocínio lógico dedutivo mais atrativos".

Inspirados em Falow (FARLOW, 2014) e Alves e Filho (ALVES; MORAIS FILHO, S.d.), apresentamos neste trabalho alguns paradoxos geométricos para avaliar, de maneira lúdica, a aprendizagem de conteúdos de Geometria, como área, semelhança de triângulos, o Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo e o coeficiente angular da reta. Propomos também algumas atividades para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. O trabalho está estruturado da seguinte forma:

1. no Capítulo 1, apresentamos a justificativa e os objetivos e discorremos sobre paradoxos matemáticos assim como temas relevantes para o desenvolvimento dos próximos capítulos: o paradoxo de Galileu, o princípio da distribuição oculta, o axioma da escolha e a sequência de Fibonacci;
2. no Capítulo 2, descrevemos o paradoxo do tabuleiro, o paradoxo de Curry, o paradoxo de Hooper e o Paradoxo de Banach-Tarski;
3. no Capítulo 3, apresentamos e analisamos os resultados das atividades aplicadas em sala de aula no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior e sugerimos atividades para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio envolvendo paradoxos geométricos;
4. no Capítulo 4, mencionamos as conclusões;
5. nos Apêndices, apresentamos os roteiros de atividades para três níveis de ensino e listamos algumas soluções apresentadas pelos estudantes.

1.1 JUSTIFICATIVA

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ministério da Educação, 2013), a Matemática é muito importante para o cidadão:

> A Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ministério da Educação, 2013), os alunos do Ensino Fundamental serão capazes de questionar a realidade, de formular e resolver problemas:

> Um dos objetivos do Ensino Fundamental é que o aluno seja capaz de questionar a realidade formulando problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

A Geometria tem sido pouco explorada nas aulas de Matemática, mas ela desempenha um papel fundamental no currículo, proporcionando aos estudantes o desenvolvimento das capacidades de argumentação e de demonstração, essencias à postura crítica. Sobre a importância da Geometria, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ministério da Educação, 2013) dizem:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Assim, fundamentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais para Matemática e motivados a contribuir para a melhoria do ensino de Geometria no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, escolhemos o tema *Paradoxos geométricos em sala de aula* para aplicar conceitos geométricos na solução de problemas apresentados de forma lúdica.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Apresentar alguns paradoxos geométricos, empregando-os para avaliar, de forma lúdica, a aprendizagem de conteúdos de Geometria, estimulando os estudantes do Ensino Fundamental e do Ensio Médio a compreender e aplicar conceitos geométricos na solução de problemas.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar um paradoxo, exemplificando com paradoxos não geométricos, como o paradoxo de Galileu, e com paradoxos geométricos, como os paradoxos de Curry, de Hooper e de Banach-Tarski;
- Revisar alguns conteúdos de Geometria e de Teoria dos Números, como o cálculo da área de algumas figuras planas, a semelhança de triângulos, o Teorema de Pitágoras, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, o coeficiente angular da reta e a sequência de Fibonacci;

- Empregar conceitos geométricos para elucidar paradoxos geométricos, como os paradoxos de Curry e de Hooper;

- Aplicar atividades sobre os paradoxos de Curry e de Hooper em turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, utilizando o Geogebra para construir figuras geométricas planas;

- Verificar o domínio de conceitos geométricos por parte dos futuros professores de Matemática, aplicando atividades no Curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina Geometria 2, sobre os paradoxos de Curry e de Hooper;

- Organizar atividades recreativas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio envolvendo paradoxos geométricos.

1.3 PARADOXOS LÓGICO-MATEMÁTICOS

"Muitas vezes situações que não conseguimos compreender ou que escapam à lógica são as causas de pequenas brigas ou grandes guerras. Declarar por escrito a própria condição de analfabeto e procurar os óculos sem enxergar nada são exemplos de sentenças cujo conteúdo é paradoxal" (APROSIO, 2015).

O problema paradoxal que despertou interesse de lógicos e matemáticos surgiu na Grécia Antiga, quando o cretense Epimênides, que viveu no século VI a.C., afirmou que "todos os cretenses são mentirosos". Como Epimênides era cretense, sua frase não poderia ser verdadeira, senão ele estaria mentindo. Caso sua frase fosse falsa, deveria existir pelo menos um cretense que dizia a verdade e, se fosse esse cretense o próprio Epimênides, sua afirmação deveria ser verdadeira.

Mas a concepção de paradoxo é atribuída a Eubulides de Mileto (século IV a.C.), que formulou a primeira versão conhecida do paradoxo do mentiroso: "Um homem diz que está mentindo. O que ele diz é verdadeiro ou falso?" Outra versão para o paradoxo do mentiroso é o paradoxo de pinóquio, que diz: "meu nariz está crescendo". Se for verdade, ele está mentindo; se não for verdade, o nariz vai crescer. Como assim? Que contraditório!

Citamos a seguir uma relação de paradoxos intrigantes. Na sequência, discorremos sobre alguns paradoxos mencionados em Aprósio (APROSIO, 2015).

1. Cinco paradoxos da lógica e da matemática (SUPERINTERESSANTE, 2014):

   (a) O paradoxo de Russell;

   (b) O paradoxo do mentiroso;
   (c) O problema de Monty Hall;
   (d) Aquiles e a tartaruga;
   (e) O paradoxo do enforcamento inesperado;

2. Dez paradoxos para explodir sua cabeça (HYPESCIENCE, 2013):
   (a) O hotel infinito de Hilbert;
   (b) O problema do bonde;
   (c) O paradoxo da trombeta de Gabriel e do pintor;
   (d) O barco de Teseu;
   (e) O paradoxo do bartender;
   (f) O paradoxo de Newcomb;
   (g) Os macacos datilógrafos;
   (h) O paradoxo dos gêmeos;
   (i) O dilema do veneno de Kavka;
   (j) A terra gêmea;

3. Dez alucinantes paradoxos que o vão deixar confuso (CIÊNCIAONLINE, 2014):
   (a) O paradoxo de Banach-Tarski;
   (b) O paradoxo de Peto;
   (c) O problema do presente;
   (d) O paradoxo de Moravec;
   (e) A lei de Benford;
   (f) O paradoxo C-value;
   (g) Uma formiga imortal numa corda;
   (h) O paradoxo do enriquecimento;
   (i) O paradoxo Tritono;
   (j) O efeito Mpemba.

No romance de Joseph Heller (1923-1999), *Ardil 22*, de 1961, o autor traça uma crítica contundente à guerra e coloca em evidência seu absurdo utilizando um regulamento militar fictício intencionalmente contraditório. De acordo com o regulamento, qualquer um que seja louco pode pedir dispensa do fronte. Por outro lado, o mesmo regulamento diz que qualquer um que peça afastamento da zona de combate não é louco. As sentenças de Heller são contraditórias.

No cotidiano das pessoas também acontecem situações contraditórias, como "Procura-se funcionário com experiência". Mas como posso ter experiência se ninguém me contrata sem que eu já tenha?

Seria possível comprimir sua biblioteca em um simples talho em um bastão de madeira? Na prática seria impossível. Na teoria não há dificuldade que impeça a existência de um ponto preciso no qual fazer o talho. "Esse é um dos problemas que separam a Matemática da Engenharia" (APROSIO, 2015). O escritor argentino Jorge Luis Borges (1899-1986) utilizou uma versão parecida desse paradoxo em seu conto "A biblioteca de Babel". A história, que apareceu pela primeira vez em 1941, na antologia "O jardim dos caminhos que se bifurcam", narra um mundo composto por infinitas galerias hexagonais. Essas galerias contêm livros de gêneros de primeira necessidade para o sustento dos seres humanos. Nelas, há trinta prateleiras com 32 livros em cada uma e todos os volumes têm 410 páginas. Os personagens descobrem que nesses infinitos hexágonos estão todos os possíveis livros de 410 páginas presentes, passados e futuros. Existirá até mesmo mais de um exemplar do mesmo livro e existirão infinitos exemplares do mesmo livro. Contraditório, não?

O paradoxo do aniversário, criado em 1939 pelo matemático e engenheiro mecânico austríaco Richard Von Mises (1883-1953), é um problema solucionável da teoria das probabilidades, mas que é considerado um paradoxo pela sua natureza não intuitiva. O problema consiste em se calcular quantas pessoas são nescessárias para que a probabilidade de que duas delas tenham nascido no mesmo dia seja maior do que 50%. Considerando que o ano tem 365 dias, a intuição nos faria pensar que dois aniversários caiam no mesmo dia na presença de pelo menos 183 pessoas. A solução mais simples, dada por George Gamow (1904-1968), começa calculando a probabilidade de que duas pessoas não façam aniversário no mesmo dia. Essa probabilidade é igual a $364/365$. Acrescentando-se uma pessoa, a probabilidade de que ela não faça aniversário em um dos dois dias em que as outras duas fazem é $363/365$. Multiplicando os dois valores, obtém-se a probabilidade de que as três façam aniversário em dias diferentes. Prosseguindo desta maneira, multiplica-se por $362/365$ se forem quatro pessoas e assim por diante. Os valores obtidos representam a probabilidade de que nenhuma das pessoas faça aniversário no mesmo dia que qualquer outra. Quando se considera o número de 23 pessoas, pela primeira vez a probabilidade fica abaixo de 50%. Este evento é oposto ao considerado, isto é, que a probabilidade de que haja pelo menos duas pessoas nascidas no mesmo dia seja maior do que 50%.

A versão clássica da próxima situação paradoxal narra a história de um jovem que adorava visitar duas amigas que moravam em direções opostas. Visto que não conseguia escolher qual amiga visitar, deixava a escolha ao acaso: ia para a estação de trem e pegava o primeiro a passar. Como os trens em direção ao leste e ao oeste tinham a mesma frequência, de meia em meia hora, nenhuma amiga teria privilégio. Porém, o horário dos trens tinha influência sobre a direção a ser seguida. Observando a Tabela 1.1, fica evidente que, para tomar o trem em direção ao oeste, o jovem deveria chegar à estação entre 12h e 12h01min, enquanto que para ir para o leste, deveria chegar em qualquer momento entre 12h01min e 12h30min. O mesmo raciocínio vale para os outros horários. Portanto, o rapaz ia à casa da amiga que morava ao leste cerca de 29 vezes em trinta, e apenas uma vez em trinta à casa da amiga que morava ao oeste.

Tabela 1.1: Horários das partidas

Trens para o leste	Trens para o oeste
12h	12h01min
12h30min	12h31min
13h	13h01min
13h30min	13h31min
...	...

Uma reformulação do problema anterior é o paradoxo do elevador, que utiliza elevadores ao invés de trens e também se baseia no tempo. Dois físicos, o professor Stern e o professor Gamow, trabalham no mesmo edifício de vinte andares, mas em andares diferentes. O escritório de Stern fica no 15º andar e o de Gamow fica no 2º. Todo dia, Stern sai do seu escritório, aperta o botão do elevador e, desapontado, percebe que o elevador está subindo. Já Gamow fica feliz que o elevador geralmente está descendo. Imagine que o elevador vai do térreo ao último andar, e vice-versa, sem interrupções, e leva dez segundos para ir de um andar para o andar seguinte, incluindo o tempo de parada. No caso do professor Stern, que está no 15º andar, o elevador ficará por cem segundos acima do seu andar e por 300 segundos abaixo do seu andar, ou seja, será mais provável chamar o elevador quando estiver abaixo do seu andar. Já para Gamow, que está no 2º andar, o elevador estará por 40 segundos abaixo do seu andar e por 360 segundos acima do seu andar, ou seja, a probabilidade de que o elevador esteja acima do seu andar é maior. Este paradoxo foi proposto pelos físicos George Gamow e Marvin Stern (1935-1974), que, de fato, trabalhavam no mesmo edifício, um em um andar baixo e o outro em um andar alto.

A probabilidade da distribuição do sexo de quatro filhos de um casal também é um paradoxo, pois o censo comum nos faria pensar que seria uma quantidade equilibrada. Façamos a distribuição das probabilidades, como na Tabela 1.2, com os dezesseis casos possíveis, na qual com H indicamos homem e com M, mulher.

Tabela 1.2: Probabilidade da distribuição do sexo de quatro filhos de um casal sem distinção do gênero

HHHH - 4-0	HHHM - 3-1	HHMH - 3-1	HHMM - 2-2
HMHH- 3-1	HMHM - 2-2	HMMH - 2-2	HMMM - 3-1
MHHH - 3-1	MHHM - 2-2	MHMH - 2-2	MHMM - 3-1
MMHH - 2-2	MMHM - 3-1	MMMH - 3-1	MMMM - 4-0

Constatamos que o caso 4-0, que corresponde a ter todos os filhos do mesmo sexo, é o menos provável, com probabilidade $2/16 = 1/8$; o caso 2-2, que corresponde a dois homens e duas mulheres, tem probabilidade $6/16 = 3/8$; e o caso 3-1, que corresponde a três filhos de um sexo e um do outro, tem maior probabilidade, sendo esta igual a $8/16 = 1/2$. Contudo, quando consideramos a distinção de gênero, como na Tabela 1.3, verificamos que o caso 2-2 é mais frequente, ou seja, a probabilidade de ter dois filhos homens e duas filhas mulheres é maior.

Tabela 1.3: Probabilidade da distribuição do sexo de quatro filhos de um casal com distinção do gênero

HHHH 4H-0M	HHHM 3H-1M	HHMH 3H-1M	HHMM 2H-2M
HMHH 3H-1M	HMHM 2H-2M	HMMH 2H-2M	HMMM 1H-3M
MHHH 3H-1M	MHHM 2H-2M	MHMH 2H-2M	MHMM 1H-3M
MMHH 2H-2M	MMHM 1H-3M	MMMH 1H-3M	MMMM 0H-4M

O paradoxo do voto, também denominado paradoxo de Condorcet, provoca desconserto em relação à efetiva existência de um sistema de voto que garanta o respeito à vontade do povo. Imaginemos que em uma eleição com três partidos políticos - de esquerda, de centro e de direita, o partido de direita obtenha 44% dos votos, o de centro 13% e o de esquerda 43%, como mostra a Tabela 1.4.

Tabela 1.4: Resultado no primeiro turno

ESQUERDA	43%
CENTRO	13%
DIREITA	44%

Em uma eleição com um único turno, o partido de direita venceria mesmo sem ser escolhido pela maioria da população. Para resolver este problema, alguns sistemas de eleição preveem uma segunda disputa entre os dois adversários mais votados no primeiro turno. Mas não sabemos efetivamente qual seria a segunda escolha de um grupo de eleitores. Suponhamos que no segundo turno os eleitores do partido de centro dividam seus votos (13%) do seguinte modo: 5% à esquerda e 8% à direita. Assim, teríamos o resultado conforme ilustra a Tabela 1.5.

Tabela 1.5: Resultado no segundo turno

ESQUERDA	43% + 5% = 48%
DIREITA	44% + 8% = 52%

Como 52% dos eleitores votaram no mesmo candidato, o sistema de eleição parece ser justo e respeitar a vontade do povo. Mas, e se houvesse uma disputa entre os candidatos de esquerda e de centro? Consideremos a hipótese de que os votantes do partido de direita prefiram o partido de centro ao de esquerda. Neste caso, teríamos o resultado mostrado na Tabela 1.6. O candidato de centro venceria o de esquerda com uma vantagem maior do que a obtida pelo partido de direita frente ao partido de esquerda, Tabela 1.5.

Tabela 1.6: Opção 2 para o segundo turno

ESQUERDA	43%
CENTRO	13% + 44% = 57%

E se agora a disputa fosse entre os candidatos de direita e de centro? Caso os eleitores de esquerda prefiram o candidato de centro, o resultado seria aquele mostrado na Tabela 1.7.

Tabela 1.7: Opção 3 para o segundo turno

DIREITA	44%
CENTRO	13% + 43% = 56%

Novamente o candidato de centro seria vencedor. Portanto, será que temos certeza de que o sistema eleitoral que prevê uma disputa entre os dois candidatos mais votados respeita a vontade da população? O marquês de Condorcet (1743-1794) foi o primeiro a colocar este problema, no século XVIII, quando descobriu que o resultado de uma votação pode ser influenciado pela ordem dos turnos.

O paradoxo de Monty Hall foi um jogo da televisão americana, *Let's make a deal*, apresentado por Monte Halperin, conhecido como Monty Hall. É considerado um paradoxo por não ser intuitivo, mas a solução matemática existe. Neste programa, o concorrente escolhia entre três portas fechadas que escondiam um carro e duas cabras. Em 1990 foi proposta na revista *Parade* a seguinte questão: se fosse oferecida ao concorrente a possibilidade de mudar sua escolha depois que o apresentador tivesse aberto uma das portas que escondem a cabra, o que ele deveria fazer? A resposta foi dada por Marilyn vos Savant, que tinha uma coluna na mesma revista. Usando o cálculo das probabilidades, no início do jogo o concorrente tinha uma probabilidade igual a $1/3$ de escolher a porta que escondia o carro. As outras duas portas, que escondiam as cabras, representavam os $2/3$ restantes. Depois que o apresentador abrir uma porta que esconde uma cabra, zera a probabilidade do carro estar naquela porta, e a probabilidade de $2/3$ recai inteiramente sobre a porta restante, ou seja, o concorrente deveria mudar sua escolha. Esta resposta não convenceu os leitores que, em 92% das cartas enviadas à revista, diziam que este resultado estava errado.

Aqui no Brasil, o paradoxo de Monty Hall se aplica à brincadeira *Porta dos desesperados*, do programa *Oradukapeta*, no SBT, apresentado por Sérgio Neiva Cavalcanti, conhecido como Sergio Mallandro, nos anos de 1987 a 1990. Nesse programa, uma criança do auditório era selecionada para brincar e escolher uma das três portas onde havia um brinquedo incrível e as outras duas que tinham monstros ou gorilas.

O paradoxo das três portas é uma variante do paradoxo das três cartas, proposto em 1950 pelo matemático americano Warren Weaver (1894-1978), que deriva do paradoxo das três caixas, formulado em 1889 pelo matemático francês Joseph Bertrand (1822-1900). Outra versão desse paradoxo foi proposta por Martin Gardner (1914-2010) em 1959. Três prisioneiros aguardavam a execução. Como no mesmo dia era celebrado o aniversário do rei, este decidiu salvar a vida de um dos três com a condição de que nenhum deles soubesse, até o último momento, qual seria seu destino. O primeiro prisioneiro falou ao carcereiro: "Já que dois de nós serão condenados, com certeza um de meus companheiros terá este destino. Não lhe custa nada dizer o nome de um, você não vai revelar quem de nós será agraciado. Em troca, darei meu relógio a você". O guarda, pensando que o prisioneiro tinha razão, lhe confidenciou que o terceiro companheiro não fora agraciado. O detento agradeceu, pensando que sua chance de se salvar tinha aumentado de $1/3$ para $1/2$. Mas na verdade, a probabilidade do detento se salvar continua sendo $1/3$. É o segundo prisioneiro que tem $2/3$ de chances de se salvar.

O paradoxo do barbeiro é mais uma afirmação contraditória. Ele estabelece que um barbeiro que vive em um vilarejo barbeia todos aqueles que não se barbeiam sozinhos. Mas quem barbeia o barbeiro? Se ele se barbeasse sozinho, a afirmação de que barbeia todos aqueles que não se barbeiam sozinhos seria falsa. Por outro lado, se ele não se barbeasse sozinho, pertenceria à categoria que afirma barbear. Bertrand Arthur Russell (1872-1970) utilizou o paradoxo do barbeiro para explicar outro paradoxo lógico que ele descobriu após a publicação, em 1884, da obra "Fundamentos da Aritmética" de Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-

1925). Frege desenvolveu uma teoria dos conjuntos chamada Princípio de Abstração (ou de Compreensão). Segundo este princípio, cada conceito define um conjunto formado por todos os objetos que correspondem às características do conceito do objeto. Podemos então imaginar o conjunto de todos os conjuntos e o conjunto que não contém ele mesmo. Mas quando falamos de conjuntos que contêm outros conjuntos e pode conter ele mesmo, há o risco de entrarmos em contradição. Bertrand Russell descobriu isto quando considerou o conjunto dos conjuntos que não contêm eles mesmos. Se esse conjunto não fosse elemento de si mesmo, deveria ser por definição; se fosse elemento de si mesmo, não deveria mais ser. Para solucionar este problema, Bertrand Russell reformulou, juntamente com Alfred Whitehead (1861-1947), a teoria de Frege excluindo todos os conjuntos que causassem contradições. Russell percebeu que a definição de um conjunto não era suficinte para determiná-lo e idealizou a Teoria dos Tipos, segundo a qual existe uma hierarquia entre os conceitos.

Imagine que um professor diga: "Haverá uma prova surpresa em um dos próximos dois dias". Então, a prova não poderá acontecer no segundo dia pois se acontecer saberíamos, ao término do primeiro dia, quando seria e não seria mais uma surpresa. Seria no primeiro dia? Também saberíamos com antecedência a data da prova. Portanto, a prova não tem como acontecer. Mas se considerarmos a hipótese da prova não acontecer, ela volta a ser uma surpresa. E a indecisão fica: a prova será dada ou não? Este paradoxo foi observado em 1943, na Suécia, durante a Segunda Guerra Mundial, quando foi feita uma transmissão radiofônica convidando a população para ficar pronta para um exercício de defesa civil que aconteceria em um dia qualquer da semana seguinte. Para que acontecesse de forma mais realista e para que a população estivesse sempre pronta, o dia exato da simulação não foi divulgado. Lennart Ekbom (1919-2002), professor de Matemática, percebeu a incongruência e falou sobre isso com seus alunos, dando início a uma discussão que continua até hoje, desde a publicação do problema na revista inglesa *Mind*, em 1948.

Tratar conceitos lógicos ao contrário pode produzir paradoxos interessantes que não levam a nenhuma contradição, mas são de difícil compreensão, contrários ao senso comum. Consideremos, por exemplo, a frase "Todos os corvos são pretos". Qualquer um poderia julgar verdadeira a afirmação, mas do ponto de vista teórico, antes de conferir todos os corvos do universo, jamais teríamos certeza. Para analisar o problema de uma forma lógico-matemática, podemos reformular a hipótese com a dupla negação "Todos os objetos não pretos não são corvos", equivalente à primeira afirmação. O primeiro a descobrir esse paradoxo foi o alemão Karl Gustav Hempel (1905-1997), em 1945. Ele afirmou que encontrar uma mesa marron aumenta a probabilidade de que os corvos sejam pretos. Mas o número de objetos não corvos é tão grande que o aumento desta probabilidade é irrelevante.

Idealizada em 1920 pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943), a história do Grande Hotel de Hilbert tem raízes mais antigas e explica que para os conjuntos infinitos não valem as mesmas regras que para os finitos. Nos conjuntos finitos há correspondência biunívoca entre dois conjuntos com o mesmo número de elementos. Já para um conjunto infinito, a correspondência biunívoca será entre o conjunto e um de seus subconjuntos. O paradoxo do hotel infinito ilustra este caso. O hotel tem infinitos quartos numerados com naturais consecutivos. Em uma certa data, o hotel está lotado, com seus quartos todos ocupados e chega mais um hóspede. Para alojar esse hóspede, transfere-se o hóspede do quarto 1 para o 2, do quarto 2 para o 3, do quarto n para o $n+1$ e assim sucessivamente. E assim, o quarto 1 fica disponível para o novo hóspede. Como os quartos são infinitos, este processo não tem fim e todos os hóspedes ficam satisfeitos. O primeiro a descobrir estas propriedades foi Galileu Galilei (1564-1642), que tratou disto em *Discursos e demonstrações matemáticas acerca de duas novas ciências*, em 1638. Ele percebeu que o conjunto de todos os números naturais podia ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos quadrados perfeitos. As reflexões de Galileu foram formalizadas séculos mais tarde pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), que definiu, como sugerido por Richard Dedekind (1831-1916), um conjunto infinito como aquele que tem a propriedade de poder ser colocado em correspondência biunívoca com um de seus subconjuntos. Lima (LIMA, 2013) apresenta este mesmo paradoxo para tratar de conjuntos infinitos como uma fantasia matemática chamada *O Grande Hotel Georg Cantor*.

Há quase 2500 anos, o filósofo grego Zenão enunciou pela primeira vez um raciocínio para uma história que tinha como protagonistas Aquiles e a tartaruga. Esta desafiou o herói para uma corrida de um quilômetro, mesmo sabendo que corria com a velocidade de $1/10$ de seu rival. Aquiles deu cem metros de vantagem à tartaruga. A corrida teve início. Depois que Aquiles tinha percorrido cem metros, a tartaruga tinha avançado um. Aquiles ultrapassou aquele um metro, mas a tartaruga avançou mais dez centímetros. Aquiles alcançou esses dez centímetros, mas a tartaruga avançou mais um centímetro. Como isto continua infinitamente, segundo Zenão, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga. O problema se resolve com o cálculo infinitesimal. Mas Zenão e os matemáticos de sua época não dispunham deste conhecimento e não encontraram o erro no raciocínio. Eles pensavam que a soma de números infinitos resultava sempre em um número infinito. Isto só foi elucidado após mais de 2 mil anos, tempo transcorrido de Zenão a Cantor.

O mundo da literatura e do cinema apresenta narrativas que falam de viagens no tempo. Esse tipo de viagem é logicamente possível? A resposta é não. Além do limite físico, do ponto de vista da coerência uma viagem no tempo levaria a contradições, paradoxos de solução impossível. Imaginemos que um homem construa uma máquina do tempo, volte dez anos e se mate. Como faria para inventar a máquina do tempo? Para qual futuro ele voltaria? Por anos, físicos e filósofos quebraram a cabeça com isso, e forneceram duas soluções: a primeira é a dos universos paralelos, na qual em uma viagem no tempo o universo se bifurca em duas cópias diferentes, uma com a linha temporal e outra com a nova linha temporal modificada pelo tempo. Na trilogia cinematográfica dirigida por Robert Zemeckis no fim dos anos 1980, *De volta para o futuro*, Doc, o cientista inventor da máquina do tempo, utiliza-se deste expediente e os protagonistas retornam a sua época original com as coisas alteradas. A segunda hipótese, formulada pelo físico russo Igor Dmitriyevich Novikov e por seu colega americano Kip Thorne, chama-se princípio da autoconsciência (ou da autocompatibilidade) e estabelece que a linha do tempo não pode ser alterada. Por exemplo, se voltássemos no tempo e tentássemos nos matar, aconteceria uma série de eventos que nos impediriam de fazê-lo. Esta hipótese é apresentada no filme *A máquina do tempo*, de 2002, baseado no romance de H. G. Wells (1866-1946), no qual um jovem inventor do fim do século XIX, Alexander Hartdegen, consegue construir uma máquina do tempo. Um dia sua noiva é morta durante um assalto. Alexander volta ao passado e salva a moça, mas pouco depois ela é atropelada por uma carruagem. Ele tenta salvá-la novamente, e ela é mais uma vez morta. A linha temporal se mantém como uma espécie de destino que não pode ser modificado.

1.4 O PARADOXO DE GALILEU

Existem diferentes tipos de paradoxos: os que levam à contradição; os que envolvem problemas lógicos, linguísticos ou semânticos; os que são contrários à intuição, como o Paradoxo de Galileu Galilei (1564-1642).

O matemático grego Euclides escreveu por volta de 300 a.C. sua famosa obra *Elementos*. Nela (EUCLIDES, 2009), no Livro1, Euclides propõe definições, postulados e noções comuns. Na lista de noções comuns consta “E o todo é maior do que a parte”. Quanto à esta noção comum, é muito provável que uma pessoa que nunca havia pensado nela a aceite como verdadeira. Contudo, a aceitação e a generalização desta noção levou à rejeição dos números infinitos.

A noção geral de conjunto, incluindo os conjuntos infinitos, é atribuída a Georg Cantor, no século XIX. Mas as totalidades infinitas foram discutidas por séculos e muitas vezes rejeitadas. Se considerarmos como *todo* o conjunto dos números naturais e como *parte do todo* o conjunto dos quadrados destes números, estabeleceremos uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos. Se pensarmos que a palavra igual se refere à correspondência biunívoca, então *o todo é igual à parte*. O paradoxo de Galileu é baseado nesta contradição, que levou à conclusão de que *maior*, *menor* ou *igual* não podem ser aplicados ao infinito.

Cantor percebeu que as propriedades válidas para os conjuntos finitos não podem ser generalizadas para os conjuntos infinitos. Ele realizou um processo de abstração, estabelecendo que existe um salto entre o finito e o infinito. "Quando nossas intuições sobre magnitudes finitas são ingenuamente extrapoladas para os conjuntos infinitos, obtêm-se contradições e resultados contraintuitivos" (GONZÁLEZ, 2011). O paradoxo de Galileu extrapola as propriedades dos conjuntos finitos para os infinitos, desconsiderando o salto existente entre o finito e o infinito.

1.5 O AXIOMA DA ESCOLHA

Paradoxo 1.2 (Paradoxo de Russell)**.** *Dada uma propriedade $P(x)$, referente a objetos x, existe o conjunto*

$$A = \{x : P(x)\},$$

formado por todos os objetos que satisfazem a $P(x)$.

A partir do paradoxo 1.2, os matemáticos perceberam que a definição vaga e intuitiva para a determinação de um conjunto (teoria ingênua dos conjuntos) não era suficiente, pois poder-se-ia entrar em contradição.

Ernst Zermelo (1871-1953), filósofo e matemático alemão, apresentou em um artigo de 1908 um grupo de axiomas que caracterizam a primeira axiomatização da Teoria dos Conjuntos. Esses axiomas são descritos a seguir, conforme Silva e de Jesus (SILVA; DE JESUS, 2007) e Sanchis (SANCHIS, S.d.).

1. Axioma da Extensionalidade

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são conjuntos e possuem os mesmos elementos, então $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\forall \mathbf{z} (\mathbf{z} \in \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})$$

2. Axioma da Separação (ou Axioma da Compreensão ou Axioma da Especificação)

Para cada propriedade que quantifica somente conjuntos, existe uma classe cujos elementos são exatamente os conjuntos que satisfazem esta propriedade, ou seja, para toda fórmula $\phi(\mathbf{x})$, possivelmente com outras variáveis livres além de $\mathbf{x}$, e nenhuma delas sendo $\mathbf{y}$, a seguinte fórmula é um axioma:

$$\forall \mathbf{z} \exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} (\mathbf{x} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{z} \wedge \phi(\mathbf{x})).$$

3. Axioma do Vazio (ou Axioma da Existência)

O vazio é um conjunto. Tem-se um único $\mathbf{y}$ denotado pelo símbolo $\emptyset$ e chamado de conjunto vazio.

$$\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \notin \mathbf{y})$$

4. Axioma do Par

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são conjuntos, então a classe $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é um conjunto.

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} \forall \mathbf{w}(\mathbf{w} \in \mathbf{z} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{x} \vee \mathbf{w} = \mathbf{y})$$

5. Axioma da União

Se $\mathbf{x}$ é uma família de conjuntos, então $\bigcup \mathbf{x}$ é um conjunto.

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists \mathbf{w}(\mathbf{z} \in \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} \in \mathbf{x}))$$

6. Axioma do Infinito

Existe um conjunto $\mathbf{x}$ que tem o conjunto vazio como elemento, e que, para todo elemento $\mathbf{y}$, ele contém seu sucessor $\mathbf{S}(\mathbf{y})$.

$$\exists \mathbf{x}(\emptyset \in \mathbf{x} \wedge \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} \in \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{y}) \in \mathbf{x}))$$

7. Axioma das Partes (ou Axioma da Potência)

Se $\mathbf{x}$ é um conjunto, então a classe $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, formada por todos os subconjuntos de $\mathbf{x}$, é um conjunto.

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \subseteq \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y})$$

8. Axioma da Substituição

Se $\mathbf{x}$ é um conjunto, $\mathbf{w}$ é uma classe e $\mathbf{f} : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{w}$ é uma função, então $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é um conjunto.

$$\forall \mathbf{w}(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{w} \exists ! \mathbf{y} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow \exists \mathbf{z} \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} \in \mathbf{z} \Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbf{w}(\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))))$$

9. Axioma da Regularidade (ou Axioma da Fundação)

Para cada conjunto não vazio $\mathbf{x}$, existe $\mathbf{y} \in \mathbf{x}$ tal que $\mathbf{y} \cap \mathbf{x} = \emptyset$.

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \mathbf{y}(\mathbf{y} \in \mathbf{x} \wedge \neg \exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} \in \mathbf{y})))$$

O sistema formado pelos axiomas descritos anteriormente é denominado de axiomático ZF (de Zermelo-Fraenkel - Abraham Fraenkel (1891-1965)). Quando se agrega o axioma da escolha (AC) a esse sistema, o mesmo passa a ser denominado de axiomático ZFC.

Sobre o axioma da escolha:

> O axioma da escolha é muito polêmico devido ao caráter não construtivo e à possibilidade de fazer infinitas escolhas arbitrárias. Intuitivamente, o axioma da escolha afirma que, dada uma família infinita de conjuntos não vazios, podemos formar um conjunto escolhendo exatamente um elemento de cada um dos conjuntos não vazios da família (SILVA; DE JESUS, 2007).

Para completar o axiomático ZFC, devemos incluir o axioma da escolha.

Definição 1.3. *Seja* $\mathbf{x}$ *um conjunto. Uma função* $\mathbf{f} : \mathbf{x} \longrightarrow \bigcup \mathbf{x}$ *é uma função-escolha para* $\mathbf{x}$ *se* $\mathbf{f}(\mathbf{y}) \in \mathbf{y}$*, para todo* $\mathbf{y} \in \mathbf{x}$*.*

10. Axioma da escolha

Toda família de conjuntos cujos elementos são conjuntos não vazios possui uma função-escolha.

Equivalentemente, dada uma família $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ não vazia, de conjuntos não vazios, existe um conjunto C ao qual pertence exatamente um elemento de cada A_α. Em outras palavras, o produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios, é não vazio.

O axioma da escolha difere dos outros axiomas de ZFC por postular a existência de um conjunto sem estabelecer uma forma de construí-lo, diferentemente dos axiomas do par e da união, por exemplo. Isto causou inicialmente muita polêmica entre os matemáticos, que aos poucos foram aceitando o axioma pela necessidade do mesmo em diversas áreas da Matemática, como Teoria dos Conjuntos, Topologia, Álgebra e Análise Funcional. O caráter não construtivo do axioma da escolha, permitindo escolhas arbitrárias sem descrever como fazê-las, pode gerar argumentos para a não validação do axioma.

> Alguns dos resultados que foram provados com o uso de AC têm um caráter fortemente contraintuitivo, que são suporte para argumentos para recusar sua validade. Como exemplo são os resultados sobre decomposições paradoxais, em especial o *Paradoxo de Banach-Tarski* (RÊGO, 2007).

No Capítulo 2 deste trabalho, apresentamos o Paradoxo de Banach-Tarski e a sua relação com o axioma da escolha e o Paradoxo de Galileu.

1.6 O PRINCÍPIO DA DISTRIBUIÇÃO OCULTA

O princípio da distribuição oculta consiste no recorte de uma figura em um número finito de partes e no reagrupamento dessas partes de modo que, no reagrupamento, uma parte da figura inicial desapareça misteriosamente. E quando as partes são reagrupadas na posição inicial, a parte que havia sumido volta a aparecer.

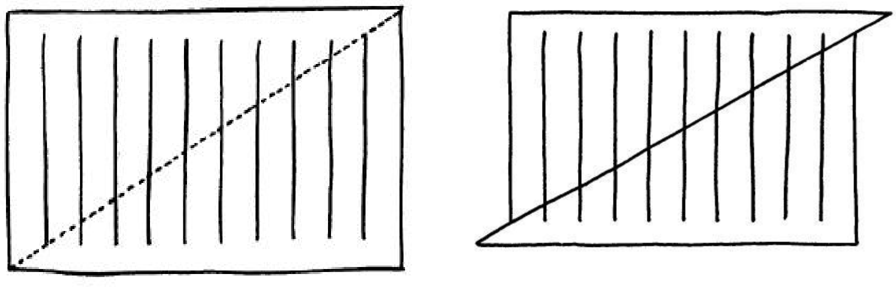
Martin Gardner (1914-2010) foi um escritor americano de Matemática Recreacional que publicou mais de cem livros e que se interessava por prestidigitação e ilusionismo. Considerado o decano dos quebra-cabeças americanos e um dos mágicos mais importantes do século XX, ele escreveu a coluna *Mathematical Games* para a revista *Scientific American* no período de 1956 a 1981 (WIKIPEDIA, 2016b). Em sua obra *Mathematics, magic and mistery* (GARDNER, 1956), ele descreve o princípio da distribuição oculta da seguinte maneira:

> All of them involve the cutting and rearranging of parts of a figure. After the rearrangement is completed, a portion of the original figure (either part of its area or one of a series of pictures drawn on the figure) has apparently vanished without trace! When the pieces are returned to their original form, the missing area or picture mysteriously appears once more. It is this curious vanishing and reappearing that justifies regarding these paradoxes as mathematical magic.

Mencionamos na sequência alguns paradoxos baseados no princípio da distribuição oculta.

1.6.1 O PARADOXO DA LINHA

Para caracterizar o paradoxo da linha (*The line paradox*), consideremos um retângulo com dez linhas verticais equidistantes e de mesmo comprimento, como na Figura 1.1(a). Cortemos o retângulo segundo sua diagonal, formando dois triângulos. Para finalizar, desloquemos os dois triângulos como na Figura 1.1(b).



(a) Retângulo com as dez linhas (b) Deslocamento dos triângulos

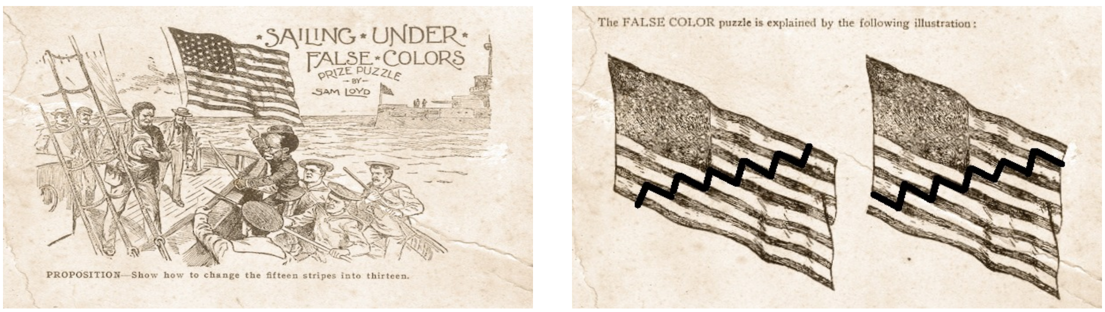
Figura 1.1: Paradoxo da linha - (GARDNER, 1956)

Inicialmente tínhamos dez linhas, mas surpreendentemente, como mágica, quando cortamos e deslocamos as peças uma das linhas sumiu, restando apenas nove linhas. Mas o que aconteceu? A resposta é simples. Ao cortarmos o retângulo segundo sua diagonal, duas linhas ficam inteiras e as outras oito são divididas em dezesseis segmentos. Quando um dos triângulos é deslocado, o inferior para a esquerda, por exemplo, o primeiro segmento cortado prolonga a primeira linha, que havia permanecido inteira, e todos os demais segmentos prolongam as linhas que os antecedem. E assim, some uma das linhas.

O Paradoxo da linha é como uma “pegadinha”. A análise superficial do paradoxo leva à conclusão de que uma linha sumiu. Na verdade, essa linha foi distribuída entre as outras nove, que tiveram seus comprimentos aumentados. Quando deslocamos as peças à posição inicial, temos as dez linhas novamente.

1.6.2 O PARADOXO DE LOYD

Samuel Loyd (1841-1911) foi um matemático recreacional norte-americano, autor de quebra-cabeças, charadas e sofismas e que gostava de humor e fantasia. Autor de uma série de problemas sobre xadrez, ele foi um dos melhores enxadristas norte-americanos e um dos vinte melhores do mundo na sua época, de acordo com chessmetrics.com (WIKIPEDIA, 2016d). Samuel Loyd criou o quebra-cabeças da bandeira de Sam Loyd, “Sam Loyd´s Flag Puzzle”. Neste quebra-cabeça, a bandeira norte-americana é cortada de modo interessante, como mostra a Figura 1.2. O problema paradoxal consiste em cortar a bandeira americana de quinze listras em duas peças que, unidas de maneira diferente, formem uma bandeira de treze listras.



(a) Bandeira de Sam Loyd

(b) Corte da bandeira de Sam Loyd

Figura 1.2: Quebra-cabeça da bandeira de Sam Loyd - (TOMATIS, S.d.b)

No entanto, a maior criação de Samuel Loyd foi o enigma de Sam Loyd “Get off the earth”(Fuja da terra) ou paradoxo de Loyd (*Loyd’s vanishing chinese warrior paradox*). O quebra-cabeça foi inventado em 1896 e vendeu mais de 10 milhões de cópias. O problema paradoxal é uma ilusão de ótica. A figura inicial apresenta doze guerreiros chineses. Essa figura é recortada de forma circular e rotacionada no sentido horário. As peças se encaixam e surge mais um guerreiro, como ilustra a Figura 1.3.

Figura 1.3: O enigma de Sam Loyd *Get off the earth* - (TOMATIS, S.d.b)

1.6.3 O PARADOXO DE DELAND

Theodore Louis DeLand Jr. (1873-1931) foi um escriturário da Casa da Moeda dos Estados Unidos que criou, entre 1906 e 1915, o fenômeno dos pacotes de truques. Nesse período, ele comercializou quase cem truques usando cartões e baralhos, muitos destes criações suas (MAGICPEDIA, 2014).

O paradoxo de DeLand consiste em cortar figuras em três partes e reagrupar essas partes de maneira que algo na figura aparentemente some (SAMPAIO, S.d.). Segundo Gardner (GARDNER, 1956), o paradoxo de DeLand é uma variação engenhosa do paradoxo da linha. As Figuras 1.4, 1.5, 1.6 e 1.7 ilustram diferentes versões desse paradoxo. Na Figura 1.4, as três peças foram encaixadas de maneira que uma carta sumiu. Eram dezesseis cartas na primeira disposição e apenas quinze na segunda. Na Figura 1.5, quando trocamos as peças *A* e *B* de lugar, um coelho some. Na Figura 1.6, quando trocamos as duas peças menores de lugar, uma face some completamente e as faces ganham uma porção a mais como um queixo grande, um nariz comprido, uma testa maior; as faces ficam mais alongadas. Na Figura 1.7, quando permutamos as peças menores, um lápis vermelho some e surge um azul em seu lugar.

Outros paradoxos estão relacionados à distribuição oculta, responsável por misteriosos "ganhos" ou "perdas" de áreas. Alguns desses paradoxos serão apresentados no Capítulo 2.

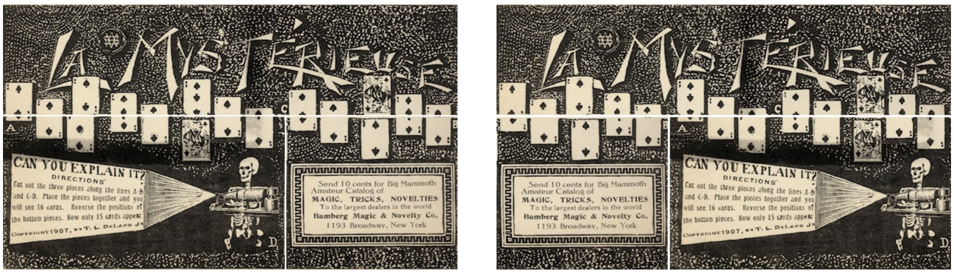


Figura 1.4: Versão de DeLand do paradoxo de DeLand - (TOMATIS, S.d.b)

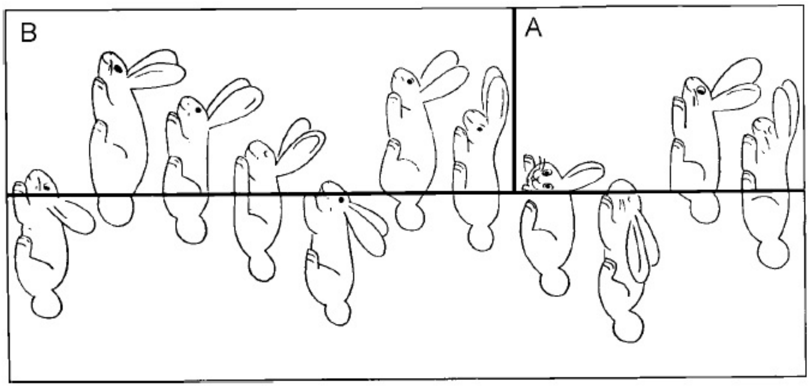


Figura 1.5: Versão de Martin Gardner, *the vanishing rabbit*, publicada na *Parents Magazine*, em abril de 1952 , do paradoxo de DeLand - (SAMPAIO, S.d.)

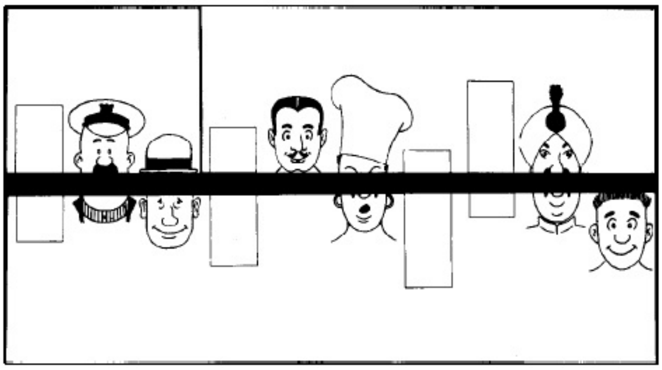


Figura 1.6: Versão de Mel Stover (1912-1999) do paradoxo de DeLand - (SAMPAIO, S.d.)

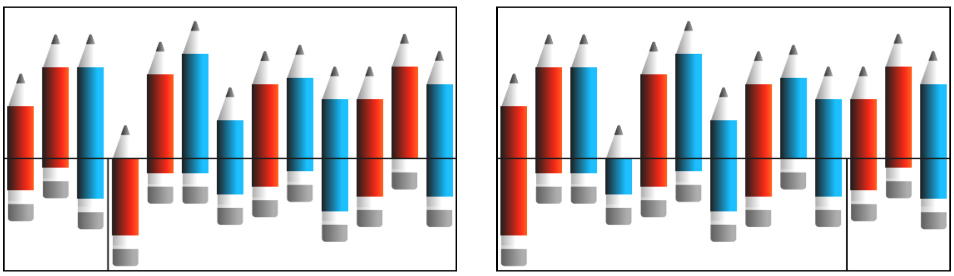


Figura 1.7: Outra versão de Mel Stover do paradoxo de DeLand - (TOMATIS, S.d.b)

1.7 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo Bonacci (1175-1250), também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano Bigollo, Leonardo Fibonacci ou simplesmente Fibonacci, foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa (WIKIPEDIA, 2016a).

"Muitas pessoas ouviram falar sobre a sequência de Fibonacci pela primeira vez no best-seller de Dan Brown, *O código da Vinci*. Mas estes números têm pouca relação com o que foi mencionado no livro" (STEWART, 2009).

Conforme Stewart (STEWART, 2009), tudo começou com o livro *Liber Abaci*, ou "Livro dos cálculos"ou "Livro do ábaco", publicado em 1202 por Leonardo Fibonacci, que traz o seguinte exercício:

> "Um homem pôs um par de coelhos em um lugar cercado por paredes de todos os lados. Quantos pares de coelhos serão produzidos por esse par em um ano, se supusermos que a cada mês, cada par produzirá um novo par, que se tornará fértil a partir do segundo mês de vida?"
> Resolvendo temos: no começo, no mês 0, teremos um par fértil.
> No mês 1, esse par gera um par ainda não fértil, portanto um par fértil e outro não fértil - no total, 2 pares.
> No mês 2, o par fértil gera outro par não fértil; o par não fértil se torna fértil mas não gera nada. Então agora temos 2 pares férteis e 1 par não fértil - no total, 3 pares.
> No mês 3, os 2 pares férteis geram outros 2 pares não férteis; o par não fértil se torna fértil mas sem gerar nada. E agora temos 3 pares férteis e 2 não férteis - no total, 5 pares.
> Continuando passo a passo, obtemos para os meses 0,1,2,3,...,12, a sequência:
>
> $$1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377.$$
>
> A resposta para este problema, que envolve o crescimento de uma população de coelhos com base em pressupostos idealizados, é 377 (STEWART, 2009).

A sequência

$$1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,... \tag{1}$$

é conhecida como a sequência de Fibonacci. Segundo (WIKIPEDIA, 2016b), os matemáticos indianos já conheciam essa sequência no século VI. Cada termo da sequência (1), após o segundo, é igual à soma dos outros dois termos que o antecedem. Por convenção, coloca-se no início os termos 0 e 1. Assim, o n-ésimo termo S_n da sequência é dado por

$$S_n = \begin{cases} 0, \; n = 0, \\ 1, \; n = 1, \\ S_{n-1} + S_{n-2}, \; n \geq 2. \end{cases} \tag{2}$$

Stewart (STEWART, 2009) descreve algumas curiosidades envolvendo a sequência de Fibonacci.

- As razãos entre números de Fibonacci sucessivos, como $\frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}$ e assim por diante, se tornam cada vez mais próximas do número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$.

- Se formarmos quadrados cujos lados são números de Fibonacci, eles se encaixam ordenadamente e podemos desenhar quartos de círculos neles, criando a *espiral de Fibonacci*, como ilustra a Figura 1.8. Essa espiral é o símbolo (logotipo) da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, como mostra a Figura 1.9.

- Há uma ocorrência surpreendente dos números de Fibonacci em criaturas vivas, particularmente nas plantas. As flores em uma quantidade impressionante de espécies têm pétalas em números de Fibonacci. Os lírios têm 3 pétalas, ervas-ciáticas têm 5, esporinhas têm 8, calêndulas têm 13, ásteres têm 21, a maioria das margaridas têm 34, 55 ou 89, os girassóis muitas vezes têm 55, 89 ou 144.

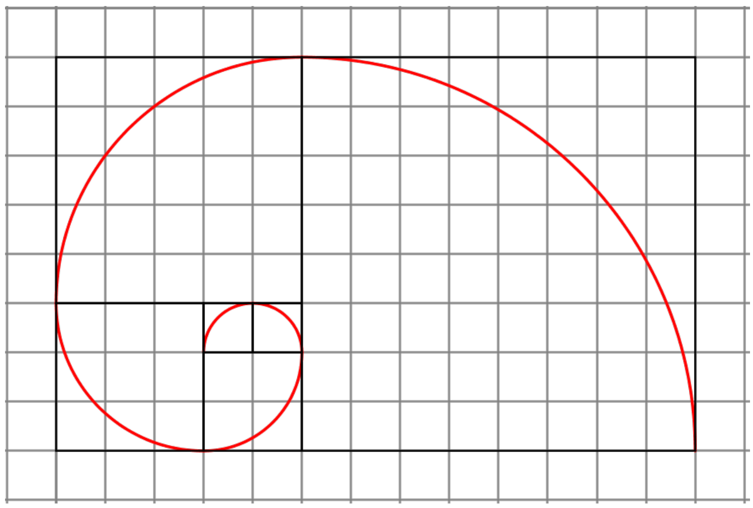


Figura 1.8: Espiral de Fibonacci (Construção no Geogebra)

SBM

Sociedade Brasileira de Matemática

Figura 1.9: Logotipo da Sociedade Brasileira de Matemática

Os números de Fibonacci também surgem nas medidas das peças dos paradoxos geométricos apresentados no Capítulo 2.

2 PARADOXOS GEOMÉTRICOS

Apresentamos neste capítulo alguns paradoxos geométricos baseados no princípio da distribuição oculta e no axioma da escolha.

2.1 O PARADOXO DO TABULEIRO

O paradoxo do tabuleiro (*The checkerboard paradox*) é mais um paradoxo no qual o princípio da distribuição oculta é responsável por misteriosos "ganhos" ou "perdas" de áreas.

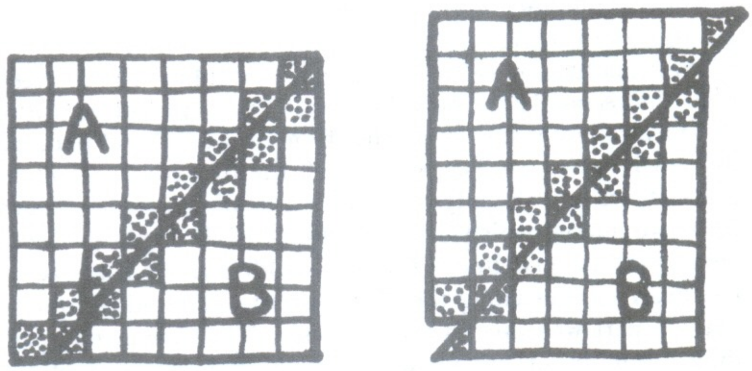


Figura 2.1: Paradoxo do tabuleiro (GARDNER, 1956)

Na Figura 2.1, temos à esquerda um tabuleiro quadrado 8×8 com área igual a 64. Esse tabuleiro é cortado em duas partes que, reencaixadas, formam a figura à direita com área igual a 63. Na manipulação, uma unidade de área some. Como explicar isto?

O tabuleiro não é cortado segundo sua diagonal. Ele é cortado do último quadrado da primeira linha até o segundo quadrado da última linha. Devido a este corte, cada quadrado cortado não foi cortado ao meio, mas sim de maneira que, quando deslocados, pareçam quadrados como os demais, mas não são. E quando deslocamos as peças de maneira que se encaixem, percebemos, como na Figura 2.2, que as duas peças se sobrepõem e a área da região sobreposta é a área do quadrado que sumiu.

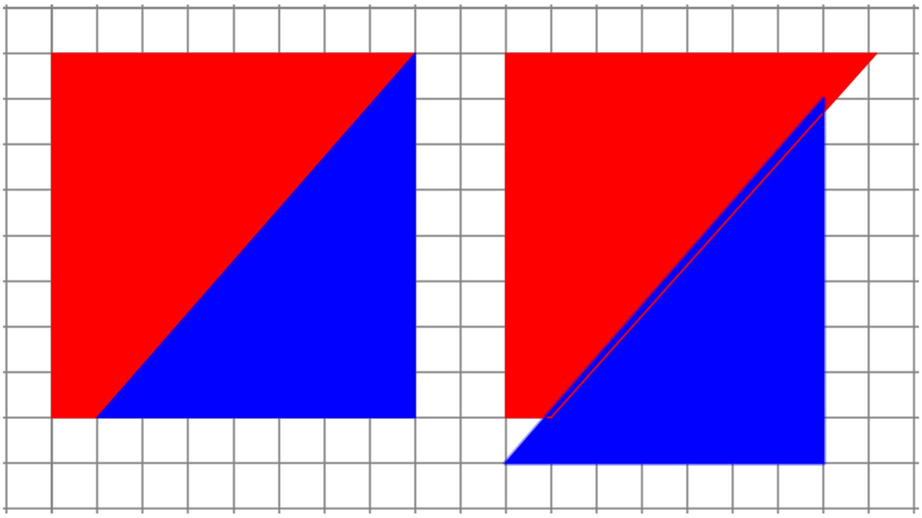


Figura 2.2: Desvendando o paradoxo do tabuleiro (Construção no Geogebra)

2.2 O PARADOXO DE CURRY

Paul Jerome Curry (1917-1986) foi o vice-presidente da Companhia de Seguros Blue Cross de Nova Iorque e um famoso mágico amador. Tornou-se famoso na comunidade mágica por inventar um truque com cartões altamente original. Sua criação mais famosa é *Out of this world*, de 1942. Em 12 de março de 1977, a Academia de Artes Mágicas concedeu-lhe um prêmio no *Magic Castle*. Criador do enigma do quadrado perdido, Curry é autor de uma série de livros e manuscritos que descrevem muitas das suas criações mágicas (WIKIPEDIA, 2016c).

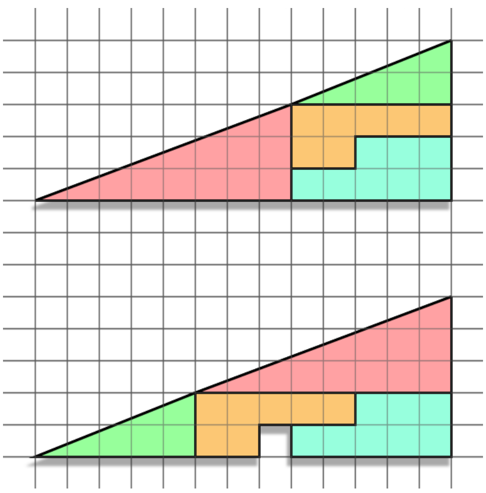


Figura 2.3: Paradoxo do quadrado perdido (COLDWELL, 2017)

O enigma do quadrado perdido é uma ilusão de ótica com figuras geométricas planas. Devido à ilusão, muitos autores não o consideram um paradoxo geométrico. Neste trabalho, adotamos a terminologia de Farlow (FARLOW, 2014) e Gardner (GARDNER, 1956), ou seja, o enigma do quadrado perdido é denominado paradoxo do quadrado perdido ou paradoxo de Curry. Neste paradoxo, quatro figuras são reagrupadas de maneira a faltar um quadrado, o quadrado perdido, como ilustra a Figura 2.3. Esse paradoxo não pode ser confundido com um paradoxo da Teoria Ingênua dos Conjuntos, também denominado paradoxo de Curry, em homenagem ao seu criador Haskell Brooks Curry (1900-1982).

Precisamos justificar o sumiço do quadrado na Figura 2.3, ou então, o surgimento do buraco no triângulo. Como o paradoxo de Curry é geométrico, empregaremos conceitos geométricos na investigação.

2.2.1 ÁREA

Comecemos pela Figura 2.4, na qual temos um retângulo dividido em cinco peças que, reorganizadas, formam um retângulo de medidas congruentes às medidas do primeiro retângulo, porém com um quadrado a menos. Mas como é possível dois retângulos com as mesmas medidas terem áreas diferentes?

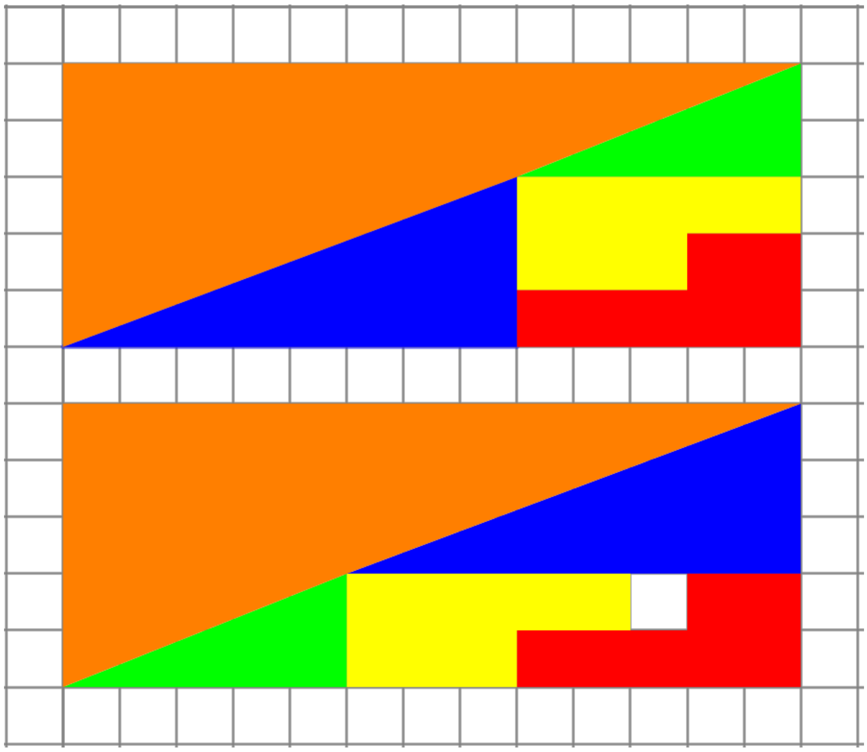


Figura 2.4: Paradoxo de Curry - Retângulo (Construção no Geogebra)

Para Muniz Neto (MUNIZ NETO, 2013) e Lima et al (LIMA et al., 2012), isto não é possível. Segundo eles:

> "Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e serve para quantificar o espaço por ela ocupado. Para encontrar a área de uma figura F, devemos comparar sua superfície, espaço ocupado, com a de outra figura tomada como unidade. O resultado será um número que exprime quantas unidades de área está contida na figura F. Para o conceito de área ter validade, uma das propriedades válidas afirma que polígonos congruentes têm áreas iguais".

Considerando os retângulos da Figura 2.4, “para que sejam congruentes devemos deslocar um deles no espaço, sem deformá-lo, até coincidir com o outro” (MUNIZ NETO, 2013). Ao deslocarmos um retângulo de maneira a fazê-lo coincidir com o outro, a área do quadrado faltante não será comum a ambos os retângulos. Logo, os retângulos não são congruentes uma vez que não têm a mesma área.

Para calcular as áreas das partes da Figura 2.4 usaremos como unidade de medida o quadrado unitário, ou seja, o quadrado que tem o lado medindo uma unidade de comprimento, representada por $1uc$, e área igual a uma unidade de área, representada por $1ua$. Assim, o retângulo cujos lados medem $5uc$ e $13uc$, doravante denominado retângulo 5×13, tem 65 quadrados unitários, ou seja, tem área igual a $5 \times 13 = 65ua$. A área do triângulo retângulo cujos catetos medem $5uc$ e $13uc$, doravante denominado triângulo retângulo 5×13, também pode ser calculada desta maneira, considerando que sua área é igual à metade da área do retângulo ou à metade do produto das medidas dos catetos. Calculando a área de todas as partes do retângulo superior da Figura 2.4, temos que:

1. Área do triângulo retângulo 5×13: $\dfrac{5 \times 13}{2} = 32,5ua$;
2. Área do triângulo retângulo 3×8: $\dfrac{3 \times 8}{2} = 12ua$;
3. Área do triângulo retângulo 2×5: $\dfrac{2 \times 5}{2} = 5ua$;
4. Área dos polígonos não-convexos: $3 + 5 = 8ua$ e $2 + 5 = 7ua$.

Somando as áreas das peças, determinamos uma área total de $64,5ua$. Há uma falta de $0,5ua$ para a área do retângulo 5×13. No retângulo inferior da Figura 2.4, precisamos somar à área das peças a área do buraco, que é um quadrado unitário. Assim, determinamos uma área de $65,5ua$. Neste caso, há uma sobra de $0,5ua$ para a área do retângulo 5×13. Portanto, essas cinco peças não podem formar o retângulo 5×13.

2.2.2 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Já temos uma primeira inconsistência em relação às áreas. Verifiquemos então se a hipotenusa h_1 do triângulo retângulo 5×13 equivale à soma das hipotenusas h_2 e h_3 dos triângulos retângulos 3×8 e 2×5, respectivamente, como sugere o retângulo inferior da Figura 2.4. Usaremos para tanto o Teorema de Pitágoras. Lima et al (LIMA et al., 2012) enuncia o Teorema de Pitágoras, “um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos”, da seguinte forma.

Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.*

Empregando o Teorema 2.1, constatamos que:

1. Hipotenusa h_1 do triângulo retângulo 5×13: ${h_1}^2 = 5^2 + 13^2 \Rightarrow h_1 = \sqrt{194}$;
2. Hipotenusa h_2 do triângulo retângulo 3×8: ${h_2}^2 = 3^2 + 8^2 \Rightarrow h_2 = \sqrt{73}$;
3. Hipotenusa h_3 do triângulo retângulo 2×5: ${h_3}^2 = 2^2 + 5^2 \Rightarrow h_3 = \sqrt{29}$.

Como, visualmente, $h_1 = h_2 + h_3$, temos que:

$$\begin{aligned}
h_1 &= h_2 + h_3;\\
\sqrt{194} &= \sqrt{73} + \sqrt{29};\\
\left(\sqrt{194}\right)^2 &= \left(\sqrt{73} + \sqrt{29}\right)^2;\\
194 &= 73 + 29 + 2\sqrt{73 \times 29};\\
194 - 73 - 29 &= 2\sqrt{73 \times 29};\\
\frac{92}{2} &= \sqrt{73 \times 29};\\
46^2 &= \left(\sqrt{73 \times 29}\right)^2;\\
2116 &= 2117. \qquad (4)
\end{aligned}$$

A igualdade (4) é uma contradição. Assim, a desigualdade impõe-nos a seguinte questão: seria a medida da diagonal do retângulo 5×13 não congruente à hipotenusa do triângulo retângulo 5×13? Como isto é possível?

2.2.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Após constatarmos outra inconsistência de medidas, investiguemos agora se os triângulos retângulos 5×13, 3×8 e 2×5 são semelhantes. Dolce e Pompeo (DOLCE; POMPEO, 1993) define a semelhança de triângulos como a seguir.

Definição 2.2. *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos internos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

Dessa forma, se dois pares de lados correspondentes forem proporcionais, então os ângulos internos correspondentes serão congruentes e dois triângulos serão semelhantes. Comparemos os três triângulos retângulos da Figura 2.4.

1. Triângulos retângulos 5×13 e 3×8:
$$\frac{5}{3} = \frac{13}{8}. \tag{5}$$
A igualdade (5) não é verdadeira, uma vez que para tal, 40 deveria ser igual a 39.

2. Triângulos retângulos 5×13 e 2×5:
$$\frac{5}{2} = \frac{13}{5}. \tag{6}$$
A igualdade (6) não é verdadeira, uma vez que para tal, 25 deveria ser igual a 26.

3. Triângulos retângulos 3×8 e 2×5:
$$\frac{3}{2} = \frac{8}{5}. \tag{7}$$
A igualdade (7) não é verdadeira, uma vez que para tal, 15 deveria ser igual a 16.

As igualdades (5)-(7) são falsas. Dessa forma, os triângulos retângulos não são semelhantes. Novamente, perguntamo-nos: a diagonal do retângulo 5×13 é congruente à hipotenusa do triângulo retângulo 5×13?

2.2.4 DECLIVIDADE DA RETA

Depois da terceira inconsistência de medidas, analisemos se a reta suporte da hipotenusa h_1 do triângulo retângulo 5×13 é a reta suporte das hipotenusas h_2 e h_3 dos triângulos retângulos 3×8 e 2×5, respectivamente. Isto equivale a verificar inicialmente se as retas suportes têm a mesma declividade. O retângulo inferior da Figura 2.4 sugere que a reta suporte das três hipotenusas é a mesma. Iezzi (IEZZI, 1993) define o coeficiente angular de uma reta r, ilustrada na Figura 2.5, da forma que segue.

Definição 2.3. *O coeficiente angular de uma reta r não perpendicular ao eixo das abcissas é o número real m tal que*
$$m = \tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}. \tag{8}$$

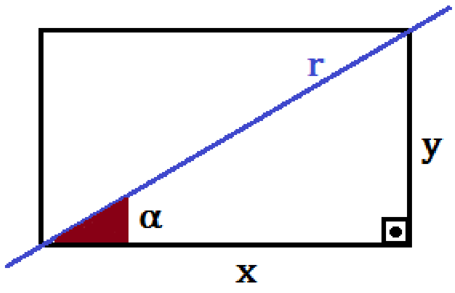


Figura 2.5: Declividade da reta r: coeficiente angular $m = \tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$

A partir da igualdade (8), podemos determinar a medida do ângulo α de inclinação da reta r:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9}$$

Empregando as relações (8) e (9), obtemos:

1. Coeficiente angular m_1 da reta suporte da hipotenusa h_1: $m_1 = \dfrac{5}{13} \approx 0,385$;
   Ângulo de inclinação α_1 da reta suporte de h_1: $\alpha_1 = \arctan\left(\dfrac{5}{13}\right) \approx 21,04°$;

2. Coeficiente angular m_2 da reta suporte da hipotenusa h_2: $m_2 = \dfrac{3}{8} = 0,375$;
   Ângulo de inclinação α_2 da reta suporte de h_2: $\alpha_2 = \arctan\left(\dfrac{3}{8}\right) \approx 20,56°$;

3. Coeficiente angular m_3 da reta suporte da hipotenusa h_3: $m_3 = \dfrac{2}{5} = 0,4$;
   Ângulo de inclinação α_3 da reta suporte de h_3: $\alpha_3 = \arctan\left(\dfrac{2}{5}\right) \approx 21,80°$.

Como os coeficientes angulares são diferentes, as hipotenusas dos triângulos retângulos 5×13, 3×8 e 2×5 têm retas suportes distintas. Mais uma vez nos perguntamos: a diagonal do retângulo 5×13 é congruente à hipotenusa do triângulo retângulo 5×13?

2.2.5 DESVENDANDO O PARADOXO DE CURRY

Os números 2, 3, 5, 8 e 13, medidas dos catetos dos três triângulos retângulos da Figura 2.4, são números consecutivos da sequência de Fibonacci (2). É possível construir outros enigmas geométricos com figuras cujos lados têm medidas dadas por termos da sequência de Fibonacci, como mostra a Figura 2.6, onde as figuras têm lados com medidas $1, 2, 3$ e 5.

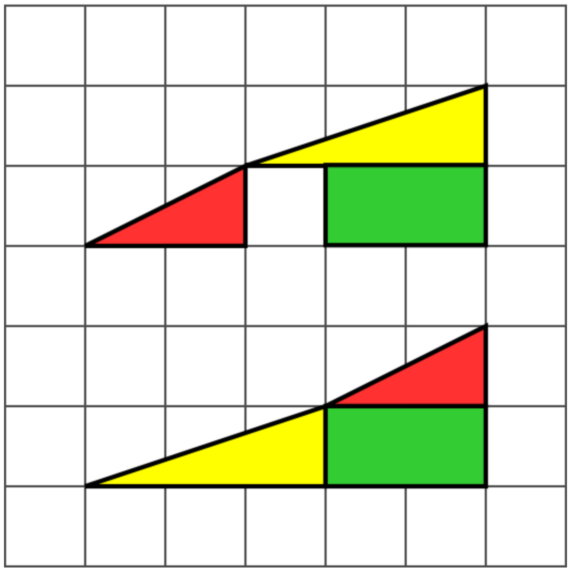


Figura 2.6: Enigma geométrico com a sequência de Fibonacci: $1,2,3,5$ **(HOMESCHOOLMATH, 2015)**

Gardner (GARDNER, 1956) descreve o sistema de equações (10) para calcular os "ganhos" ou "perdas" de área em figuras que têm os números da sequência de Fibonacci como medida dos lados.

Proposição 2.4. *Sejam A, B e C três números consecutivos da sequência de Fibonacci e X a perda ou ganho de área. As equações do sistema*

$$\begin{cases} A+B=C, \\ B^2 = A\cdot C \pm X, \end{cases} \tag{10}$$

relacionam A, B, C e X.

Considerando $A=5$, $B=8$ e $C=13$ no sistema (10), obtemos $X=-1$. Desse modo, $X=-1$ significa que o reagrupamento das peças provocou o "ganho" de um quadrado unitário. Contudo isto não explica as inconsistências verificadas anteriormente.

Observemos a Figura 2.7. Na configuração inicial das peças, falta a área de um triângulo obtusângulo próximo à diagonal do retângulo. Essa área mede exatamente a quantidade faltante determinada na subseção 2.2.1, ou seja, $0,5ua$. Na redistribuição das peças, o triângulo retângulo 5×13 e os triângulos retângulos 3×8 e 2×5 e um dos polígonos não-convexos se sobrepõem. A área da região sobreposta mede a quantidade excedente calculada na subseção 2.2.1, isto é, $0,5ua$. As áreas faltante e excedente totalizam $1ua$, exatamente a área do quadrado perdido. Portanto, as cinco peças não formam um retângulo. A figura como um todo é uma ilusão de ótica! As falhas são visualmente imperceptíveis. E isto não muda mesmo quando aumentamos o lado do quadrado unitário que define a malha na qual as figuras foram construídas.

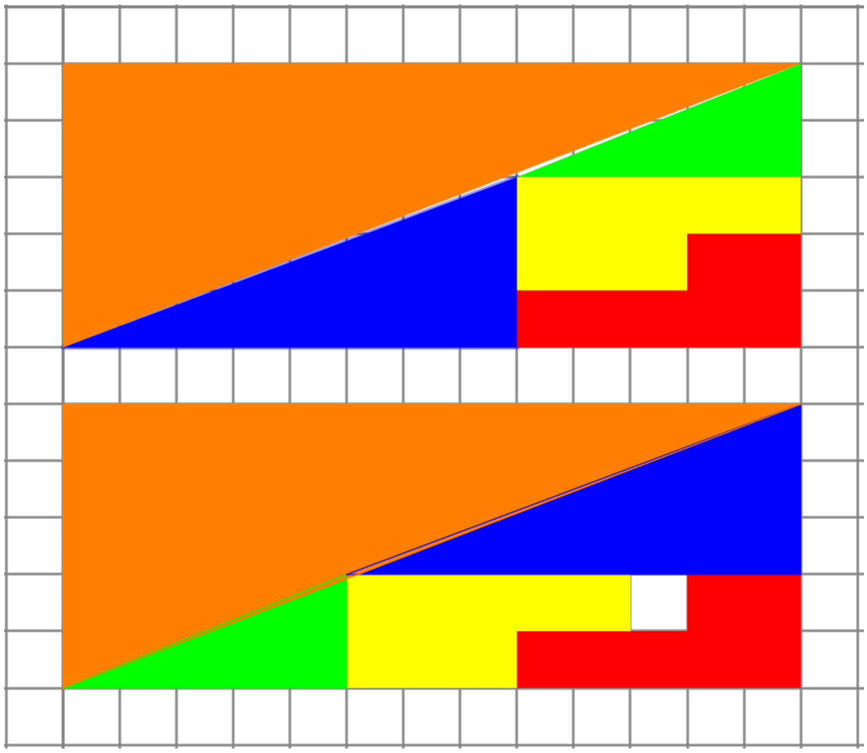


Figura 2.7: Desvendando o paradoxo de Curry - Retângulo (Construção no Geogebra)

Outra forma do paradoxo de Curry é a forma quadrada. Nesta, um quadrado de lado ℓ é divido em peças que formam outro quadrado de lado ℓ, porém com um "buraco". Curry trabalhou em muitas variações de quadrados, mas não conseguiu construir um quadrado que pudesse ser dividido em menos de cinco peças e ainda produzisse um "buraco" que não tocasse a borda. Ele conseguiu construir um quadrado de quatro peças, mas com o "buraco" na borda, e outros com cinco peças, conforme ilustram as Figuras 2.8, 2.10, 2.12 e 2.14.

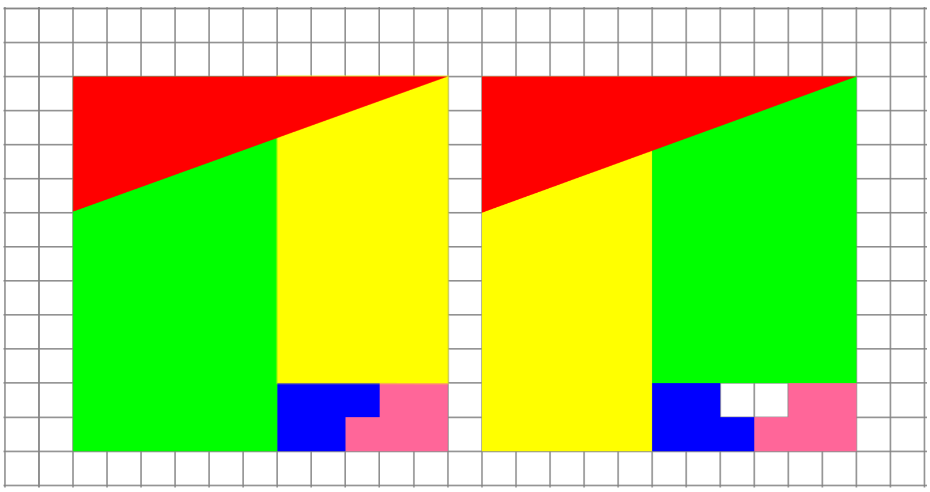


Figura 2.8: Paradoxo de Curry - Quadrado 1 (Construção no Geogebra)

Na Figura 2.8, o quadrado 11×11 foi dividido em cinco peças que, reorganizadas, formam um quadrado 11×11 com um "buraco" formado por dois quadrados unitários. Observando a Figura 2.9, constatamos que na configuração inicial das peças há um triângulo obtusângulo próximo à hipotenusa do triângulo retângulo. Já na segunda, o triângulo retângulo e os dois trapézios retângulos se sobrepõem. A área do triângulo obtusângulo mais a área da sopreposição definem a área dos dois quadrados unitários que faltam. Portanto, as cinco peças não podem formar um quadrado. Outra ilusão de ótica!

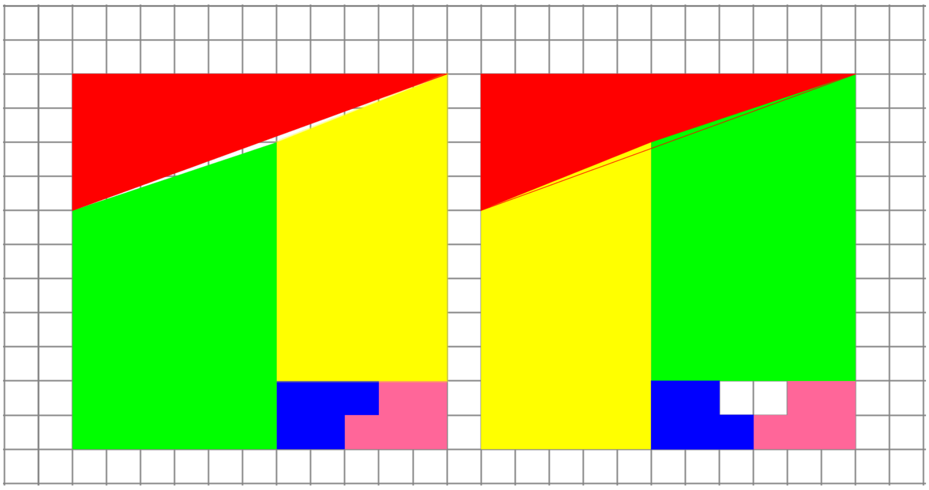


Figura 2.9: Desvendando o paradoxo de Curry - Quadrado 1 (Construção no Geogebra)

Os quadrados 12×12 e 7×7 das Figuras 2.10 e 2.12 também são divididos em cinco peças e, na reorganização, falta um quadrado unitário. A explicação é análoga ao quadrado da Figura 2.8 e pode ser verificada visualmente nas Figuras 2.11 e 2.13.

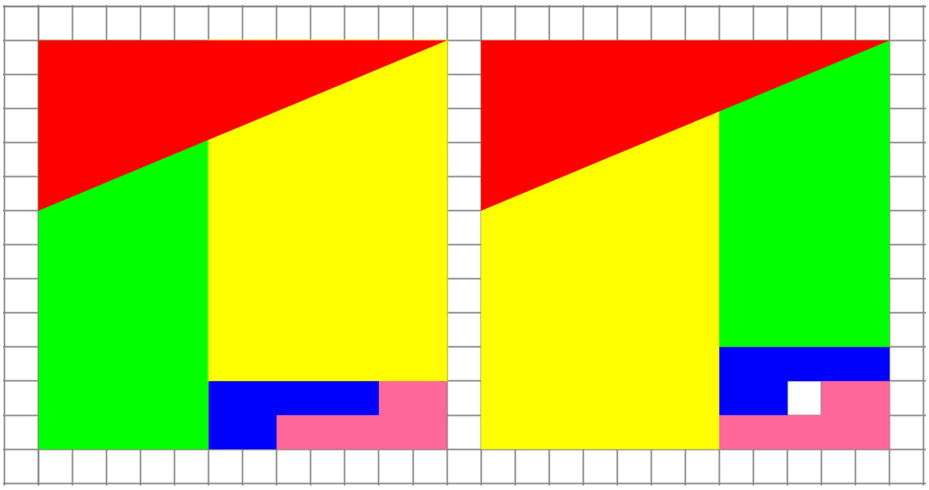


Figura 2.10: Paradoxo de Curry - Quadrado 2 (Construção no Geogebra)

O quadrado da Figura 2.14 é dividido em quatro peças, o menor número de peças que Curry conseguiu empregar, mas na redistribuição das peças falta um quadrado unitário, que

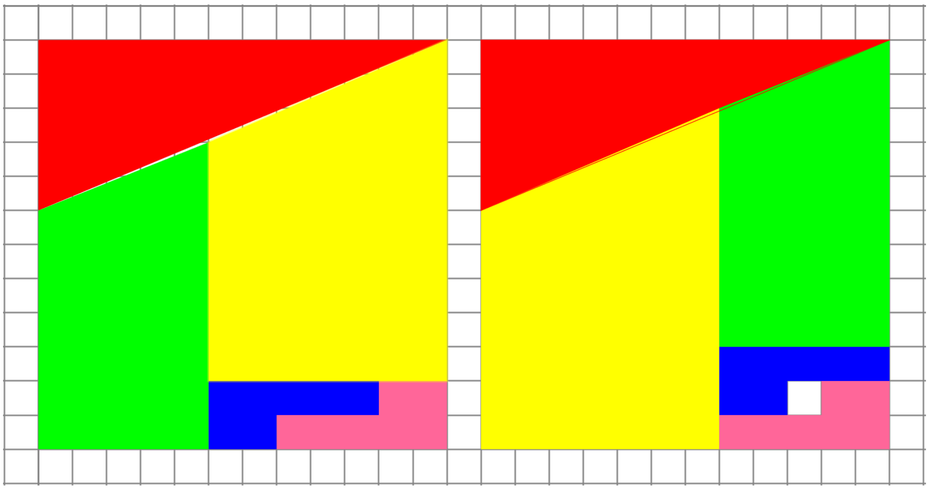


Figura 2.11: Desvendando o paradoxo de Curry - Quadrado 2 (Construção no Geogebra)

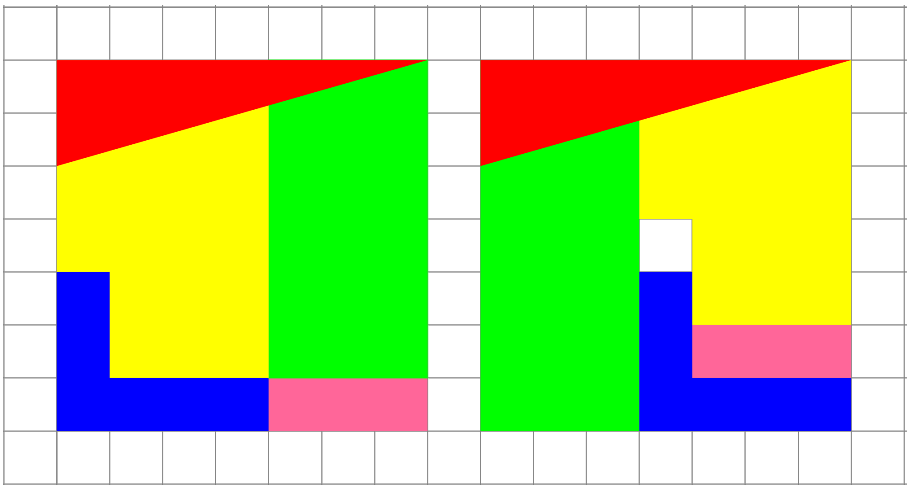


Figura 2.12: Paradoxo de Curry - Quadrado 3 (Construção no Geogebra)

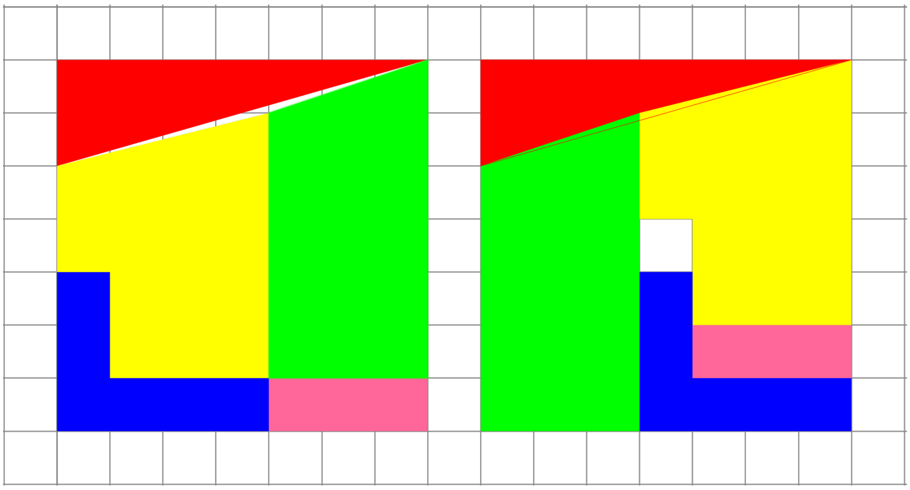


Figura 2.13: Desvendando o paradoxo de Curry - Quadrado 3 (Construção no Geogebra)

encosta na borda do quadrado inicial. Usando quatro peças, Curry não conseguiu fazer com que o “quadrado perdido” não encostasse na borda do quadrado original. A explicação para o “ganho” de área continua análoga a anterior e podemos verificar visualmente a falha na Figura 2.15.

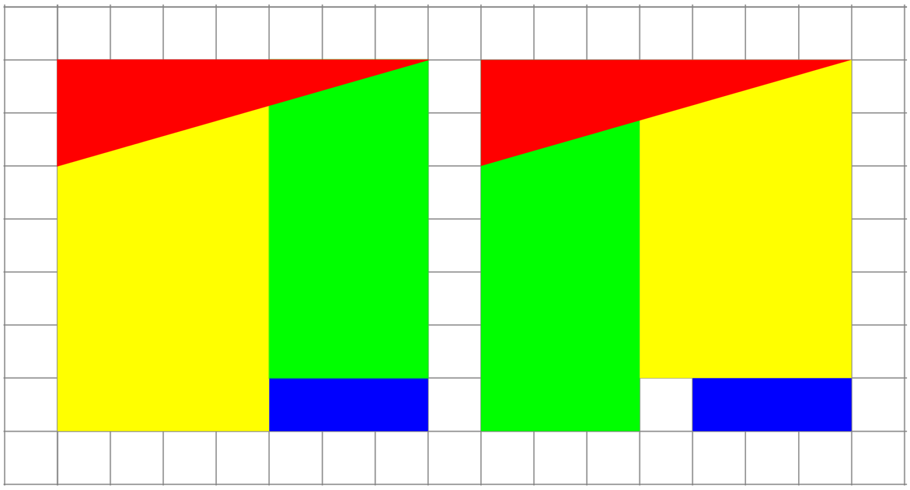


Figura 2.14: Paradoxo de Curry - Quadrado 4 (Construção no Geogebra)

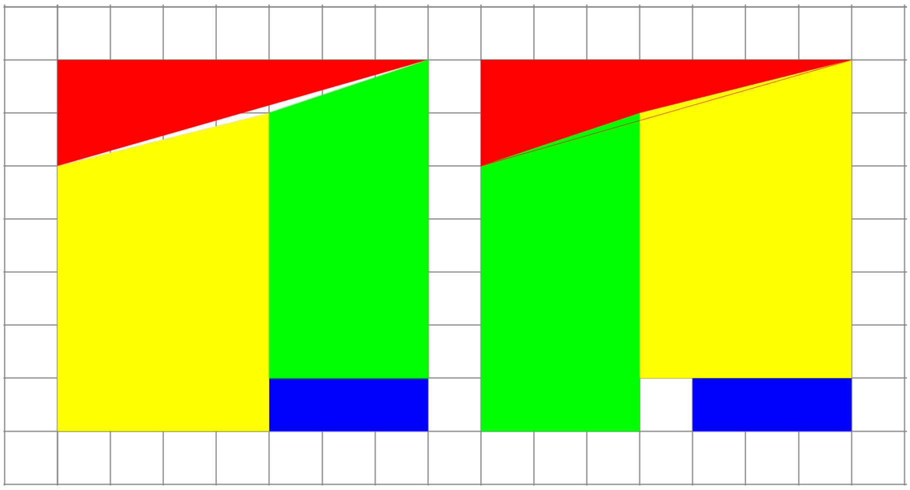


Figura 2.15: Desvendando o paradoxo de Curry - Quadrado 4 (Construção no Geogebra)

Gardner (GARDNER, 1956) contribuiu para aumentar o número de casos para o paradoxo de Curry com formas triangulares. Na Figura 2.4, o triângulo retângulo 5×13 ocupa uma posição fixa, enquanto as outras quatro peças são permutadas. Então esse triângulo pode ser descartado, deixando apenas outro triângulo retângulo 5×13 dividido em quatro peças, conforme a Figura 2.16. A explicação para o quadrado perdido permanece a mesma dada para o caso do retângulo e podemos constatar visualmente a falha na Figura 2.17.

No paradoxo de Curry, além do triângulo retângulo há uma variedade interessante de triângulos isósceles divididos em quatro, cinco, seis ou sete peças que formam um “buraco” de dois, quatro ou seis quadrados unitários. Esses triângulos podem ser construídos de duas

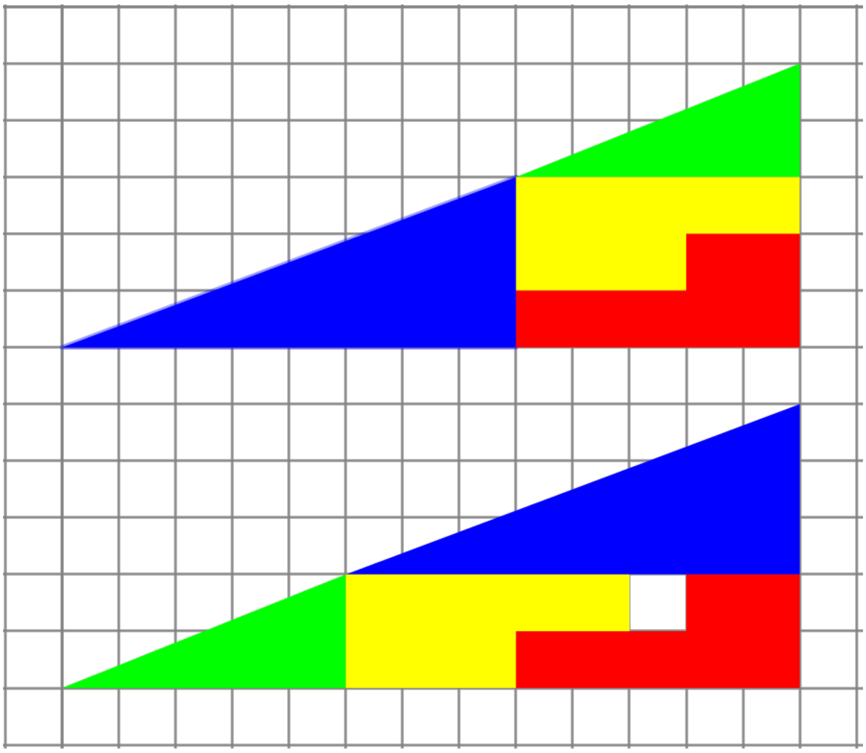


Figura 2.16: Paradoxo de Curry - Triângulo 1 (Construção no Geogebra)

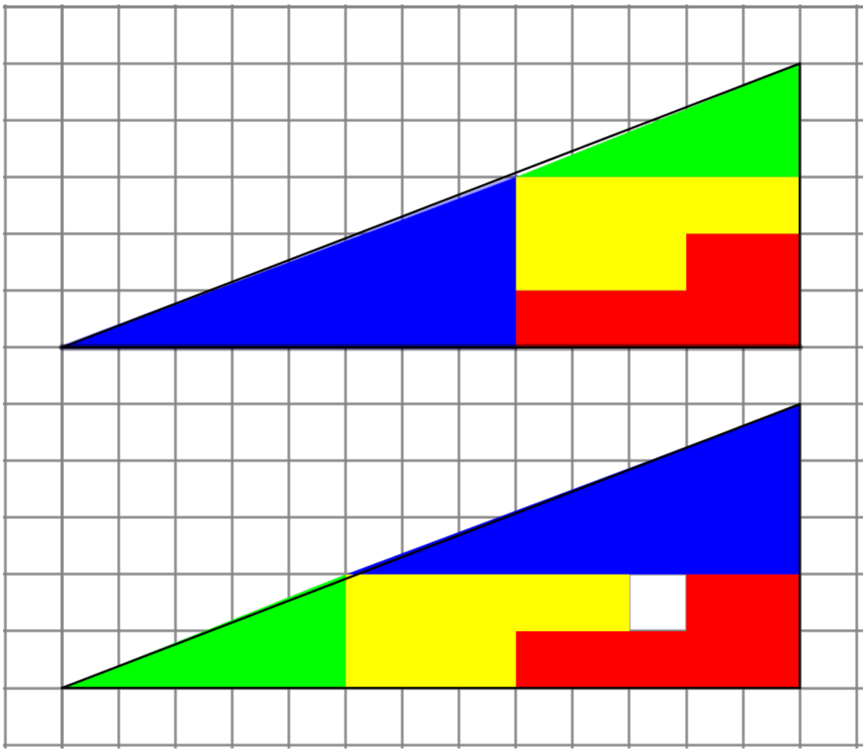


Figura 2.17: Desvendando o paradoxo de Curry - Triângulo 1 (Construção no Geogebra)

maneiras:

1. os lados congruentes do triângulo isósceles não coincidem com os lados das peças, como

nas Figuras 2.18, 2.20, 2.24 e 2.26;

2. as peças se sobrepõem, como na Figura 2.22.

A explicação para estes paradoxos, os triângulos isósceles de Curry, continua a mesma: as figuras são uma ilusão de ótica. Podemos observar as falhas nas Figuras 2.19, 2.21, 2.23, 2.25 e 2.27.

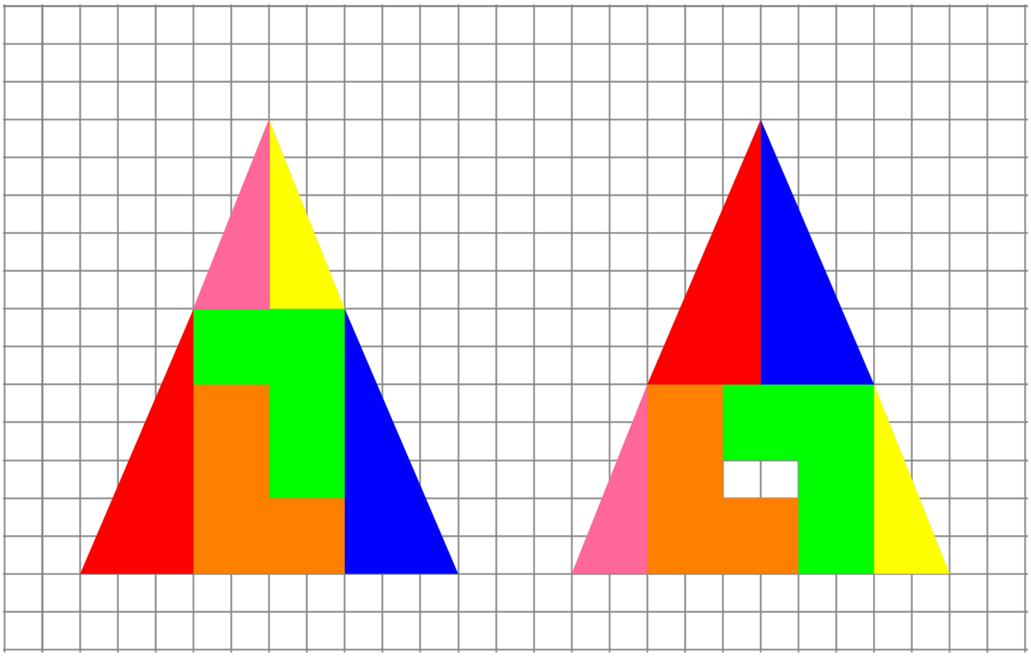


Figura 2.18: Paradoxo de Curry - Triângulo 2 (Construção no Geogebra)

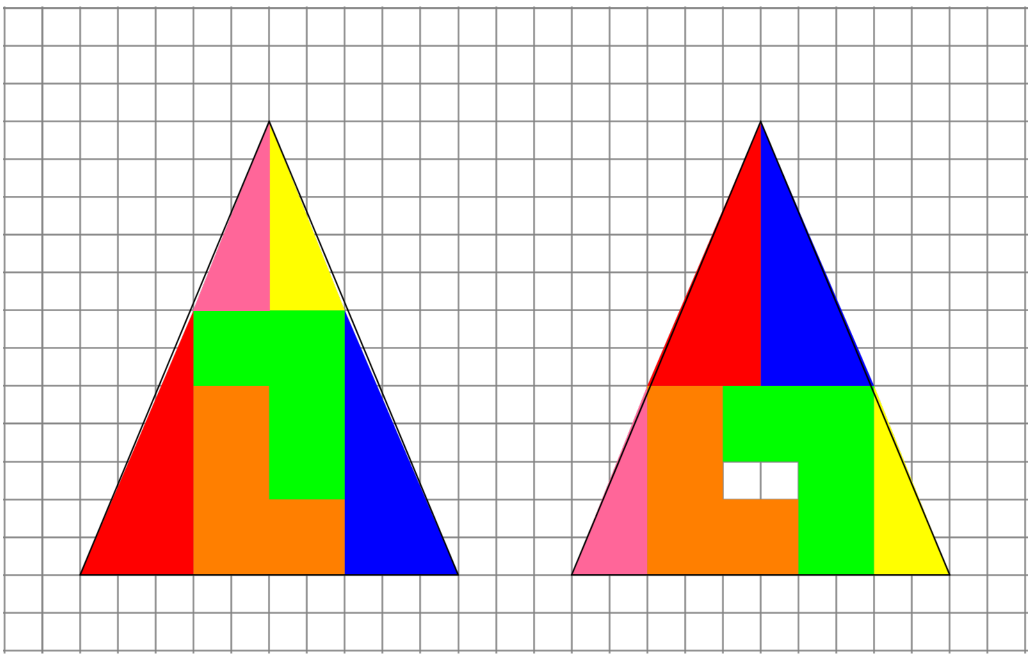


Figura 2.19: Desvendando o paradoxo de Curry - Triângulo 2 (Construção no Geogebra)

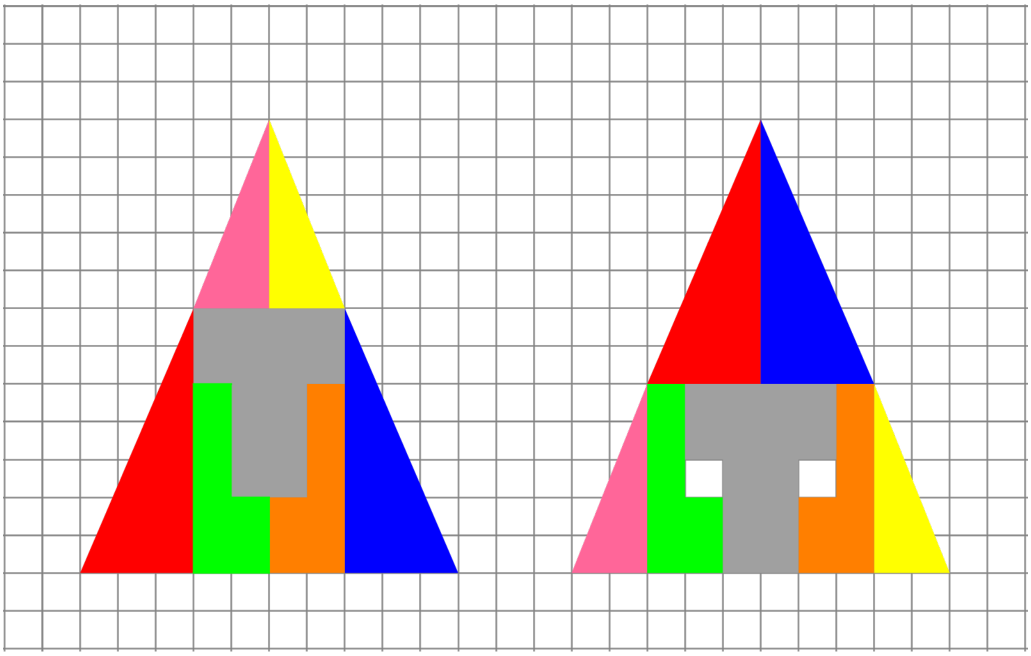


Figura 2.20: Paradoxo de Curry - Triângulo 3 (Construção no Geogebra)

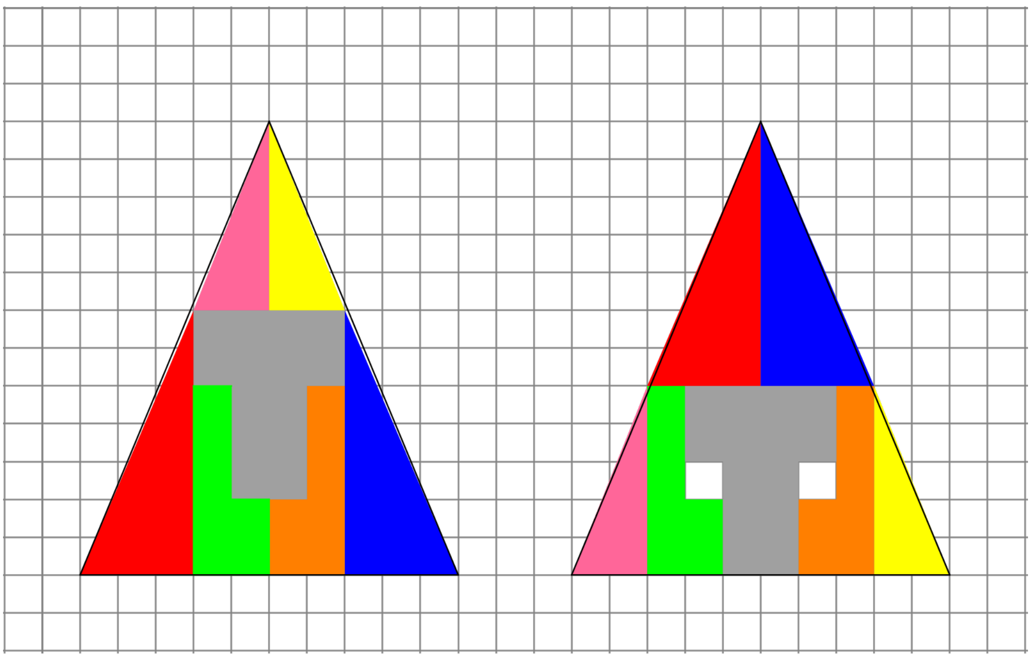


Figura 2.21: Desvendando o paradoxo de Curry - Triângulo 3 (Construção no Geogebra)

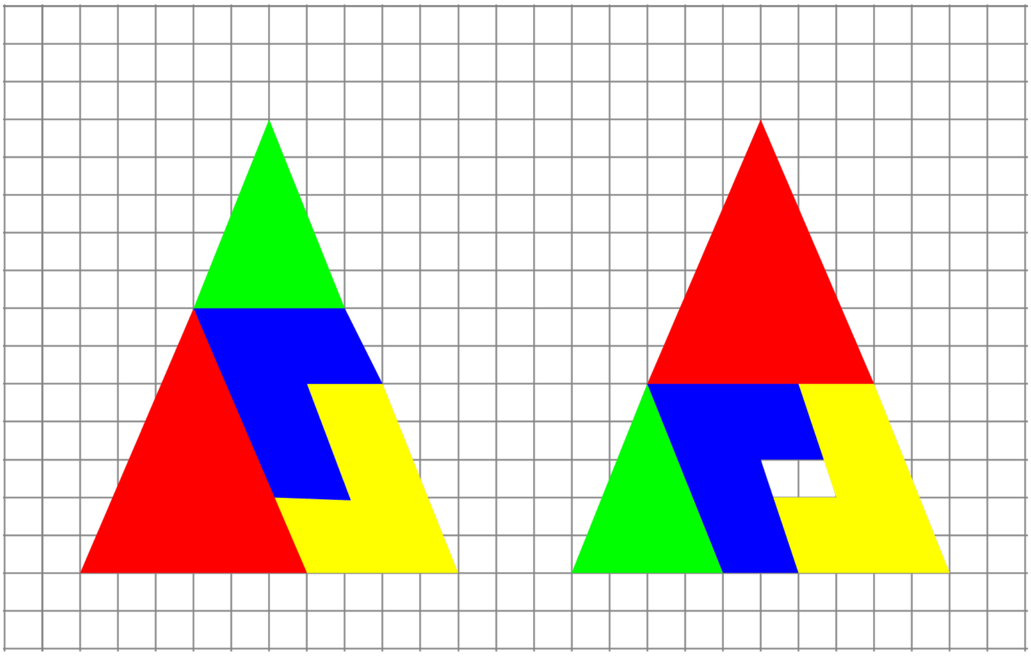


Figura 2.22: Paradoxo de Curry - Triângulo 4 (Construção no Geogebra)

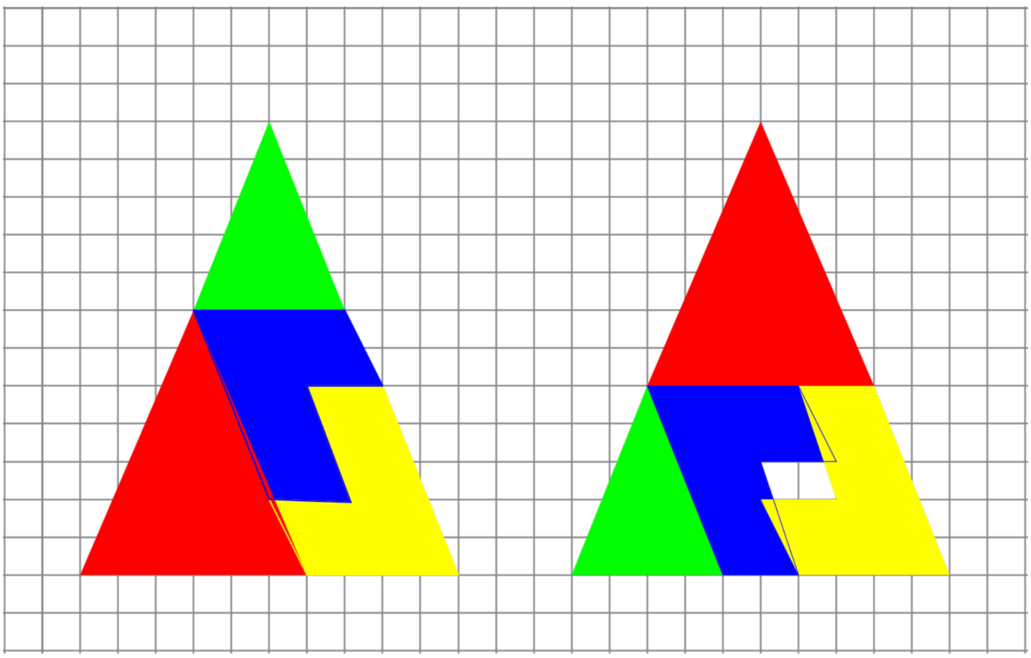


Figura 2.23: Desvendando o paradoxo de Curry - Triângulo 4 (Construção no Geogebra)

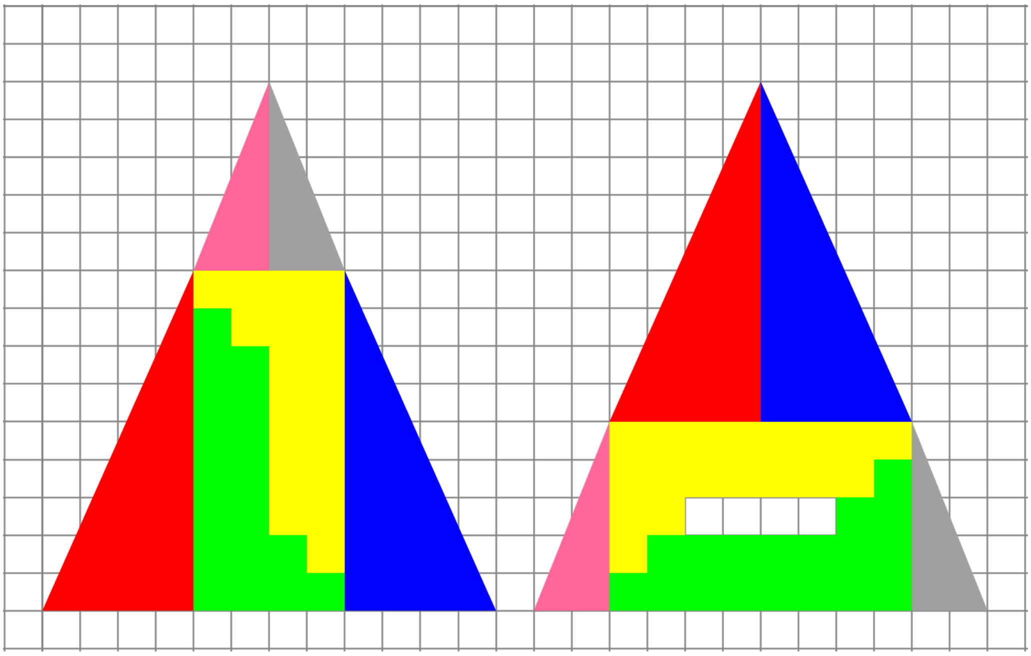


Figura 2.24: Paradoxo de Curry - Triângulo 5 (Construção no Geogebra)

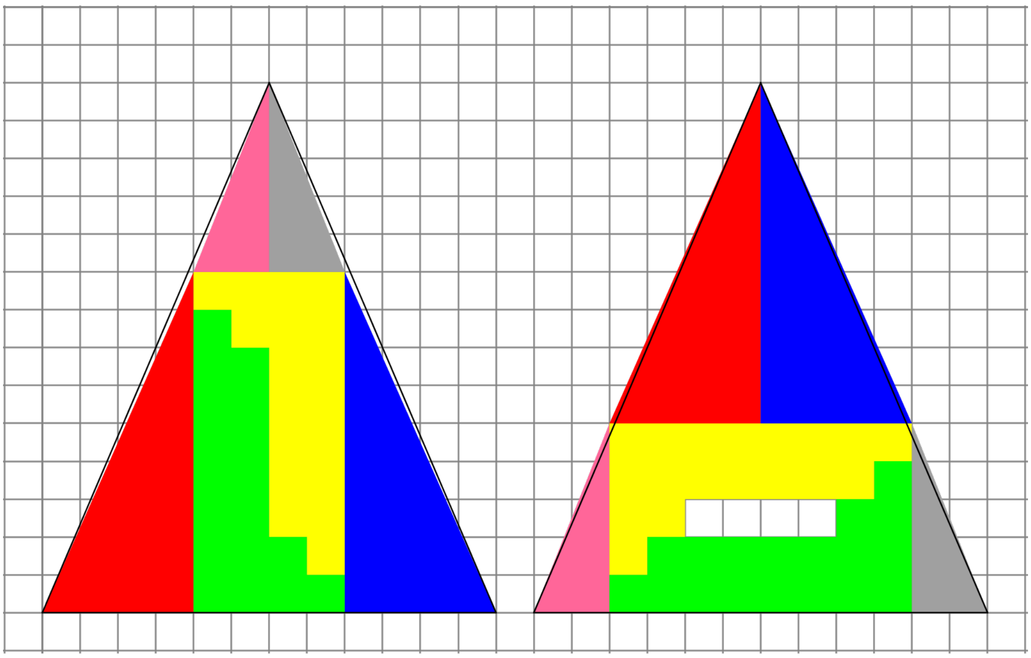


Figura 2.25: Desvendando o paradoxo de Curry - Triângulo 5 (Construção no Geogebra)

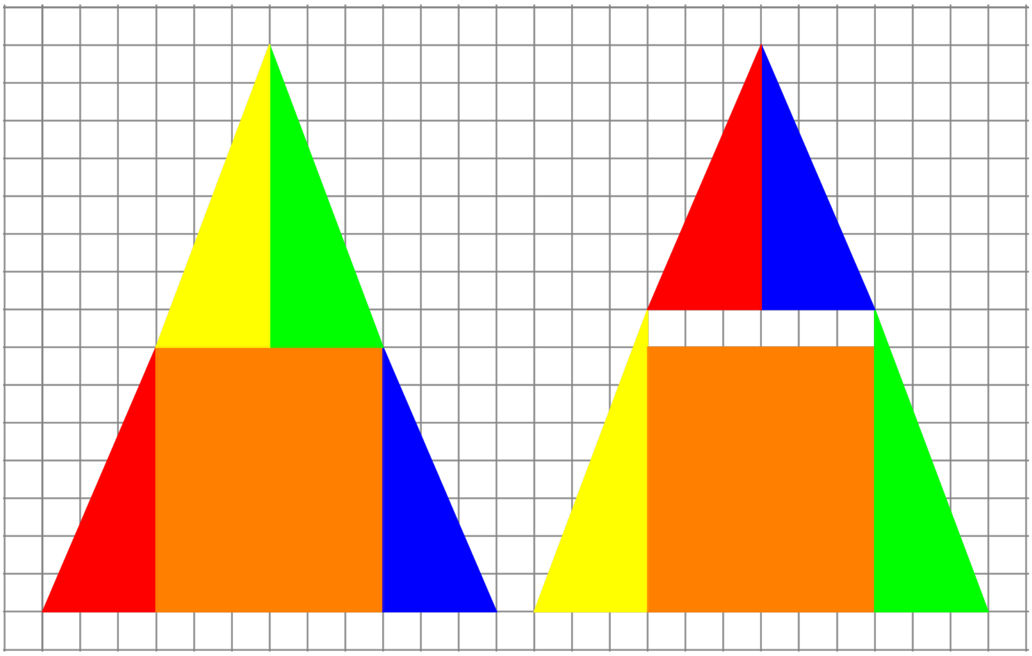


Figura 2.26: Paradoxo de Curry - Triângulo 6 (Construção no Geogebra)

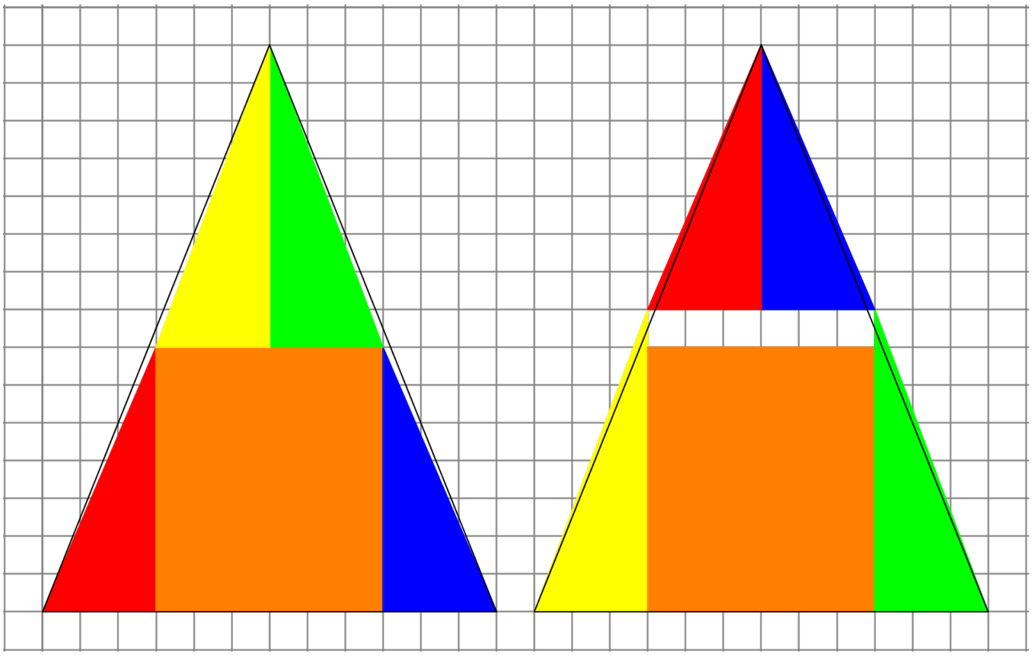


Figura 2.27: Desvendando o paradoxo de Curry - Triângulo 6 (Construção no Geogebra)

2.3 O PARADOXO DE HOOPER

Segundo Gardner (GARDNER, 1956), outro paradoxo baseado no princípio da distribuição oculta e que provoca a "perda" ou o "ganho" de área é encontrado originalmente em *Rational Recreations* de William Hooper, uma obra de quatro volumes publicada em Londres em 1774. O paradoxo de Hooper consiste na divisão de uma figura em peças e no reagrupamento destas para formar outra figura, porém com área diferente da figura original, como na Figura 2.28. Como podemos ter figuras formadas pelas mesmas peças com áreas diferentes?

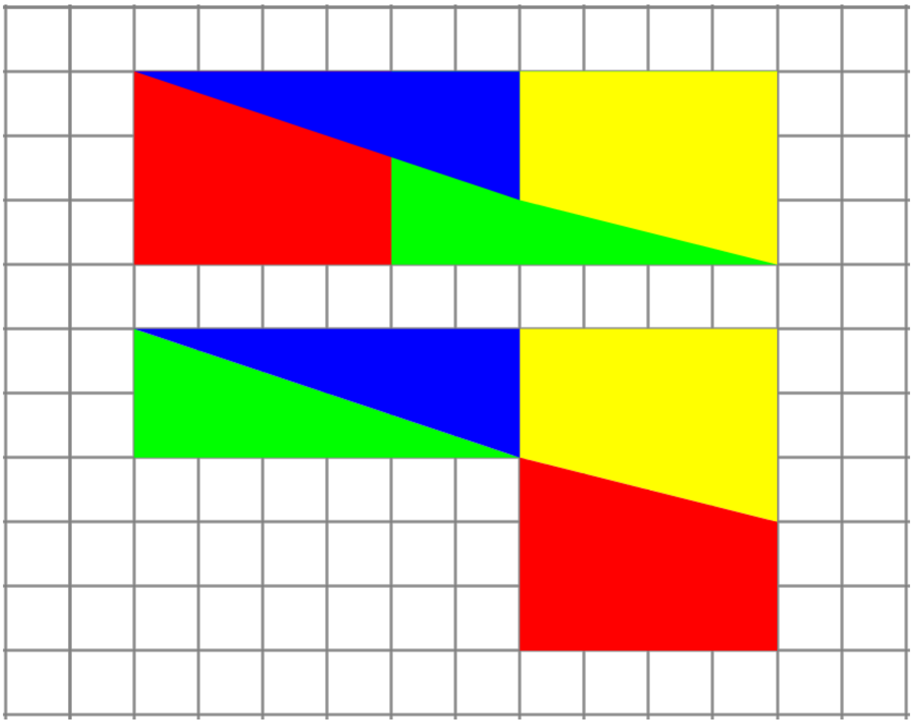


Figura 2.28: Paradoxo de Hooper: $30 = 32$? **(Construção no Geogebra)**

Na Figura 2.28, o retângulo 3×10, de área igual a $30ua$, é dividido em dois triângulos retângulos e dois trapézios retângulos. Quando as quatro peças são reagrupadas, formam dois retângulos de área igual a $32ua$. Neste caso, pensar em figuras congruentes não nos ajuda a elucidar o enigma, uma vez que as peças formam figuras com áreas diferentes. Contudo, todas as demais inconsistências verificadas no paradoxo de Curry - Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e a declividade da reta, também são verificadas no exemplo em discussão. Novamente, a explicação lógica para o paradoxo está na sobreposição das peças, conforme mostra a Figura 2.29. A figura composta pelos dois retângulos não tem nenhuma falha, porém a figura do retângulo 3×10 apresenta uma região sobreposta, cuja área é igual à área de dois quadrados unitários.

Gardner (GARDNER, 1956) e Mello e Souza (SOUZA, 2006) apresentam um qua-

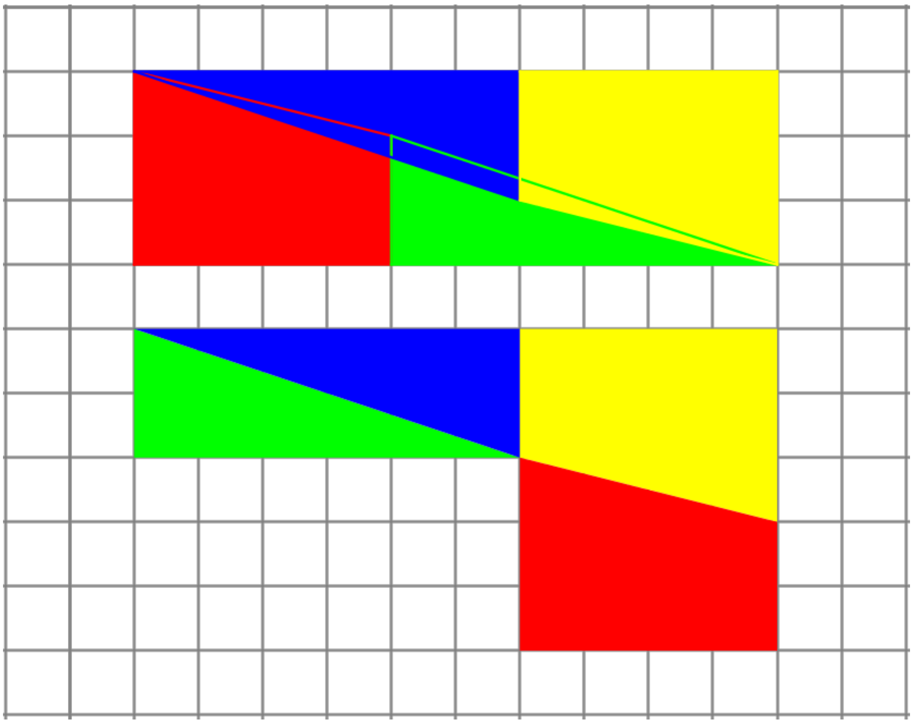


Figura 2.29: Desvendando o paradoxo de Hooper: $30 = 32$? **(Construção no Geogebra)**

drado 8×8 de área $64ua$, transformado em um retângulo 5×13 de área $65ua$, como ilustra a Figura 2.30.

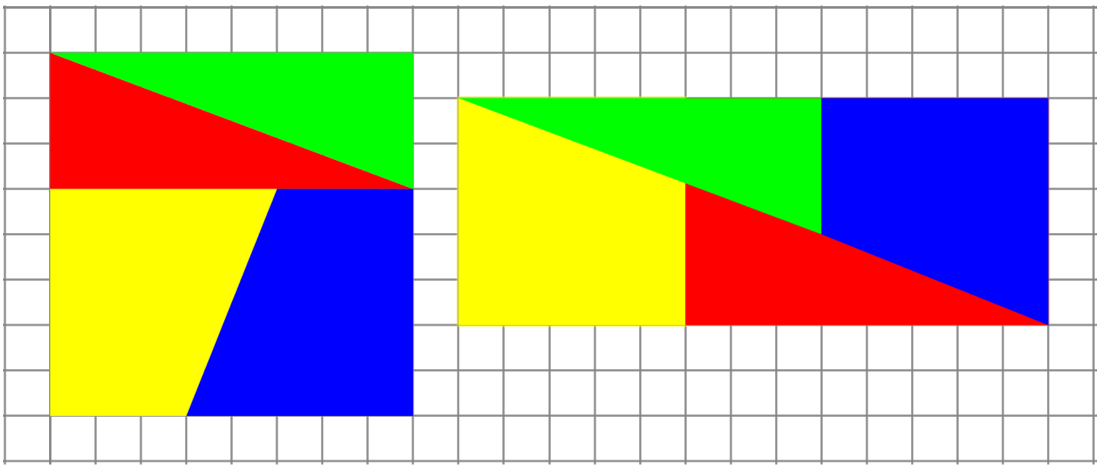


Figura 2.30: Paradoxo de Hooper: $64 = 65$? **(Construção no Geogebra)**

Neste caso, podemos observar na Figura 2.31 que o quadrado 8×8 não tem falhas, enquanto no retângulo falta uma área próxima à diagonal. Esta área mede $1ua$, exatamente o que o quadrado tem a menos do que o retângulo.

Segundo Gardner (GARDNER, 1956), o filho de Samuel Loyd, que adotou o nome do pai e continuou seu trabalho com enigmas, foi o primeiro a descobrir que as quatro peças do quadrado da Figura 2.30 poderiam ser organizadas de outra forma, transformando o quadrado

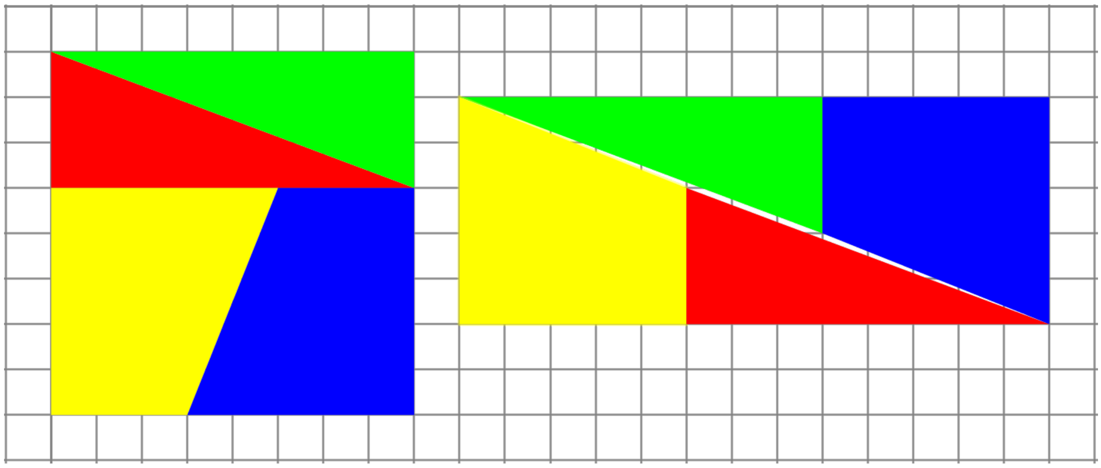


Figura 2.31: Desvendando o paradoxo de Hooper: $64 = 65$? **(Construção no Geogebra)**

de área $64ua$ em uma figura de área $63ua$, como mostra a Figura 2.32.

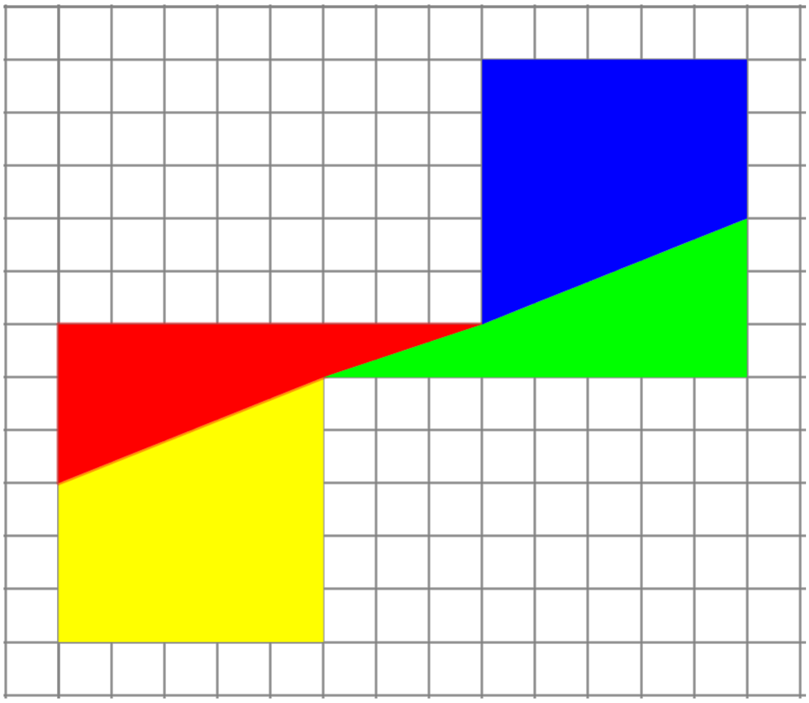


Figura 2.32: Paradoxo de Hooper: $64 = 63$? **(Construção no Geogebra)**

A explicação para a unidade de área perdida pode ser observada na Figura 2.33. Na verdade, há uma região de sobreposição de todas as peças. A área dessa região mede a unidade de área que falta na figura obtida com a reorganização das peças.

O quadrado da Figura 2.30 pode ser construído com outras medidas e gerar os mesmos conflitos. Analisemos na Figura 2.34 o quadrado 13×13, onde os números 5, 8 e 13, medidas de alguns dos lados dos triângulos retângulos e dos trapézios retângulos, são três termos consecutivos da sequência de Fibonacci (2). A reorganização das quatro peças gera um retângulo

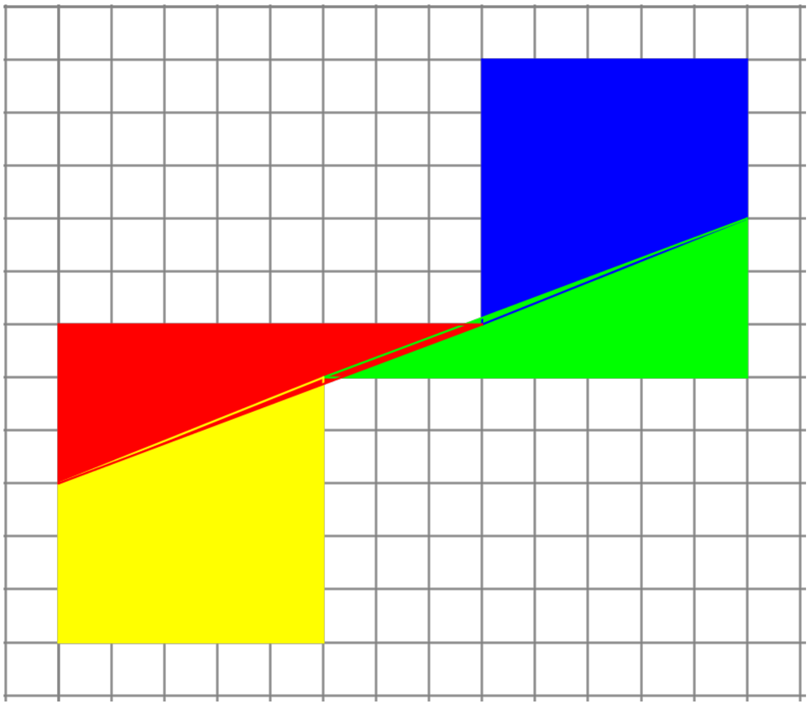


Figura 2.33: Desvendando o paradoxo de Hooper: $64 = 63$? **(Construção no Geogebra)**

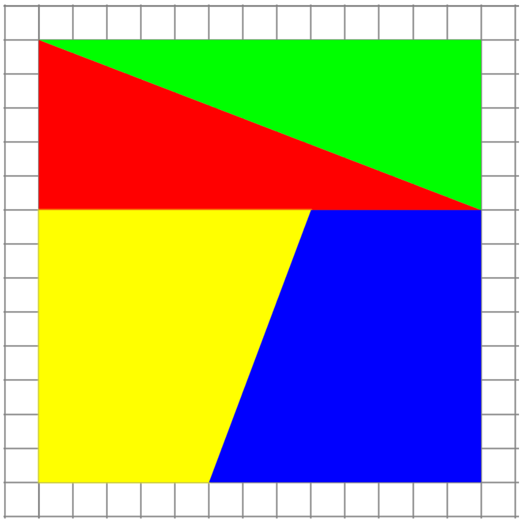


Figura 2.34: Paradoxo de Hooper - Quadrado 13×13 **(Construção no Geogebra)**

8×21, sendo que 8, 13 e 21, onde 13 é a medida do lado do quadrado original, são também três termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Conforme Gardner (GARDNER, 1956), três termos consecutivos a, b e c da sequência de Fibonacci satisfazem a seguinte propriedade:

$$b^2 = ac \pm 1. \tag{11}$$

A relação (11) é a Identidade de Cassini (Jean-Dominique Cassini (1625-1712))

$$S_{n-1}S_{n+1} - {S_n}^2 = (-1)^n, \tag{12}$$

onde S_n, $\forall n \geq 1$, é um termo qualquer da sequência de Fibonacci (2). A propriedade (12) pode ser demonstrada por indução matemática.

Assim, considerando $a = 8$, $b = 13$ e $c = 21$ na relação (11), temos que:

$$13^2 = 8 \times 21 + 1,$$

ou seja, a reorganização do quadrado de lado 13 gera um retângulo 8×21 com uma "perda" de uma unidade de área. Já para o quadrado da Figura 2.30, temos $a = 5$, $b = 8$, $c = 13$ e

$$8^2 = 5 \times 13 - 1,$$

isto é, a reorganização das peças do quadrado de lado 8 produz um retângulo 5×13 com um "ganho" de uma unidade de área.

É possível generalizarmos a relação da construção do retângulo a partir do quadrado com a sequência de Fibonacci? Segundo Gardner (GARDNER, 1956), V. Schlegel (1879) foi o primeiro a tentar uma generalização da relação do paradoxo do quadrado-retângulo, uma variante do paradoxo de Hooper, com a sequência de Fibonacci.

O paradoxo de Langman (Harry Langman) é outra versão do paradoxo de Hooper. Nesse paradoxo, um retângulo é dividido em partes que, reorganizadas, formam outro retângulo, porém com área diferente da área do primeiro, conforme ilustra a Figura 2.35.

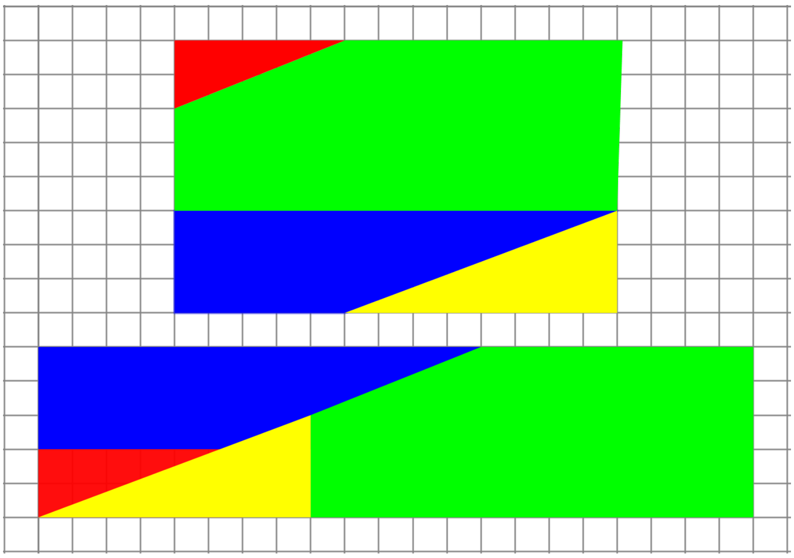


Figura 2.35: Paradoxo de Hooper - Versão Langman (Construção no Geogebra)

Na Figura 2.35, o retângulo 8×13, de área $104ua$, foi dividido em quatro peças e reorganizado em um retângulo 5×21, de área $105ua$. No rearranjo, há um "ganho" de uma unidade de área. A explicação para este "ganho" está ilustrada na Figura 2.36. Nesta, observamos que não há falhas no retângulo 8×13 e que sobra uma área de $1ua$ no retângulo 5×21.

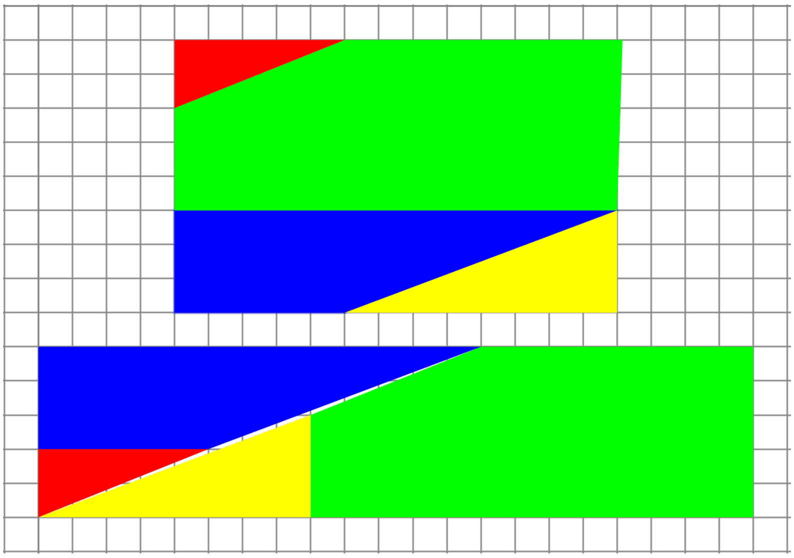


Figura 2.36: Desvendando o paradoxo de Hooper - Versão Langman (Construção no Geogebra)

A versão Langman também pode ser construída com outras medidas, como por exemplo o retângulo 8×21 da Figura 2.37. Este retângulo, na redistribuição das peças, forma um retângulo 5×34 com um "ganho" de duas unidades de área.

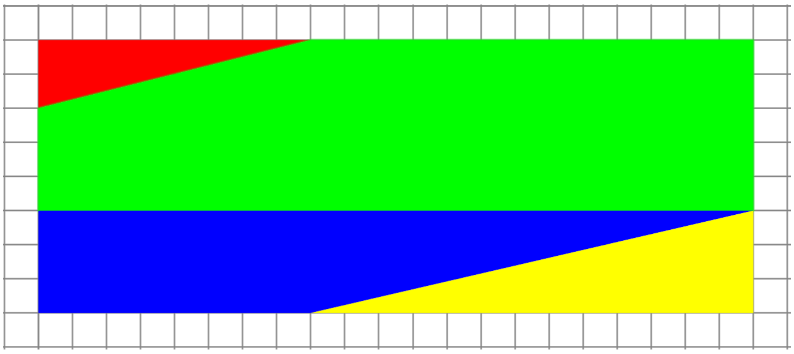


Figura 2.37: Paradoxo de Hooper - Versão Langman 8×21 (Construção no Geogebra)

2.4 O PARADOXO DE BANACH-TARSKI

Stefan Banach (1892-1945) foi um matemático polonês, considerado por muitos um dos mais importantes e influentes matemáticos do século XX. Banach foi um dos fundadores da moderna Análise Funcional e sua principal obra é *Théorie des opérations linéaires* (Teoria das operações lineares), a primeira monografia sobre a teoria geral da Análise Funcional, publicada em 1932. Espaços de Banach, o teorema de Banach-Tarski, o teorema de Hahn-Banach e o teorema de Banach-Steinhaus são alguns dos conceitos matemáticos notáveis que levam o nome de Banach (WIKIPEDIA, 2016e).

Alfred Tarski (1901-1983) foi um lógico, matemático e filósofo polonês, considerado, juntamente com Aristóteles, Frege e Kurt Gödel, um dos quatro maiores lógicos de todos os tempos. Prolífico autor, mais conhecido por seu trabalho sobre Teoria de Modelos e Lógica Algébrica, Tarski também fez contribuições importantes em Teoria dos Conjuntos e Topologia (WIKIPÉDIA, 2016).

Em 1924, Banach e Tarski provaram que, se o axioma da escolha é aceito, então uma bola pode ser cortada em um número finito de pedaços e depois remontada em uma bola de tamanho maior, ou, alternativamente, pode ser remontada em duas bolas cujos tamanhos são iguais aos da original, como ilustra a Figura 2.38. Este resultado é denominado de Teorema de Banach-Tarski, e apesar de poder ser provado formalmente é considerado um paradoxo por ser um resultado contraintuitivo, contudo não contraditório (WIKIPÉDIA, 2015), assim como o paradoxo de Galileu. Para González (GONZÁLEZ, 2011), seria contraditório se dividíssemos a bola, ou a esfera, da maneira como dividimos uma laranja em gomos e juntássemos os gomos para formar duas laranjas de tamanho igual à original. Os gomos da laranja têm um volume definido e a soma desses volumes equivale ao volume da laranja. Não existe contradição porque o paradoxo de Banach-Tarski fundamenta-se na não preservação de volumes, sendo definido por conjuntos de pontos.

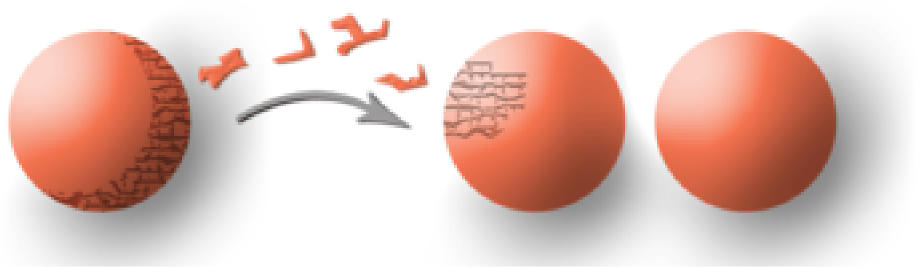


Figura 2.38: A decomposição de uma esfera em duas de mesmo tamanho da original (WIKIPÉDIA, 2015)

Definição 2.5. *Em um espaço métrico* (X,d)*, a* bola fechada $B(O,r)$*, centrada no ponto O e de raio r, é o conjunto de pontos cuja distância ao ponto O não é superior a r, ou seja,*

$$B(O,r) = \{y \in X : d_{y,O} \leq r\}.$$

Teorema 2.6 (Teorema de Banach-Tarski)**.** *Se* $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ *são bolas disjuntas de mesmo raio, então*

$$B_1 \cup B_2 \equiv B_1.$$

O Teorema 2.6 é uma abstração matemática. Não há uma prova construtivista para o mesmo, isto é, que descreva a maneira como a bola, ou a esfera, deve ser repartida. Para demonstrá-lo, faz-se uso de álgebra matricial, do axioma da escolha e de conceitos de Análise. A demonstração do Teorema de Banach-Tarski pode ser encontrada em Panek (PANEK, 2004) e também nas notas de aula do PICME (STAGNI, 2016).

A situação paradoxal do Teorema 2.6 é que podemos, teoricamente, dividir a esfera em pedaços de qualquer forma. Contudo, na prática, somos limitados pela natureza do material do qual a esfera é composta e, em última instância, pelo tamanho dos átomos. Para dividirmos a esfera de qualquer maneira, deveria haver nela uma infinidade de pontos e ela teria que ser infinitamente densa com esses pontos. Uma vez separados, os pontos determinariam formas tão complexas que não teriam volume definido. Poderíamos então reorganizar essas formas, cada uma contendo ainda infinitos pontos, em uma esfera de raio arbitrário. Poderíamos obter de uma ervilha esférica uma esfera do tamanho do sol.

O paradoxo de Banach-Tarski tem consequências importantes em Matemática, uma das quais é a impossibilidade de se definir uma noção de volume que se aplique a todo e qualquer conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$. O Teorema 2.6 pode ser generalizado para dimensões maiores e para bolas com raios distintos.

Teorema 2.7 (Teorema de Banach-Tarski generalizado)**.** *Se $n \geq 3$ e $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ tais que $X \supset B_1$ e $Y \supset B_2$, onde B_1 e B_2 são bolas de raio positivo, então $X \equiv Y$.*

3 ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Analisamos neste capítulo as atividades sobre os paradoxos de Curry e de Hooper aplicadas em turmas do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e do Ensino Superior. Essas atividades foram propostas com o intuito de mensurar, de forma lúdica, o domínio de conceitos de Geometria Plana e/ou de Geometria Analítica por partes dos estudantes dos três níveis de ensino. Nas turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, apresentamos o paradoxo de Curry para os estudantes construindo os triângulos no Geogebra, Figura 3.1, e em Etil Vinil Acetato - EVA, Figura 3.2. Inicialmente, planejamos as atividades considerando que os estudantes construiriam os triângulos em EVA. Devido ao tempo de duração das aulas, modificamos o planejamento. Complementamos o capítulo sugerindo algumas atividades recreativas com paradoxos geométricos.

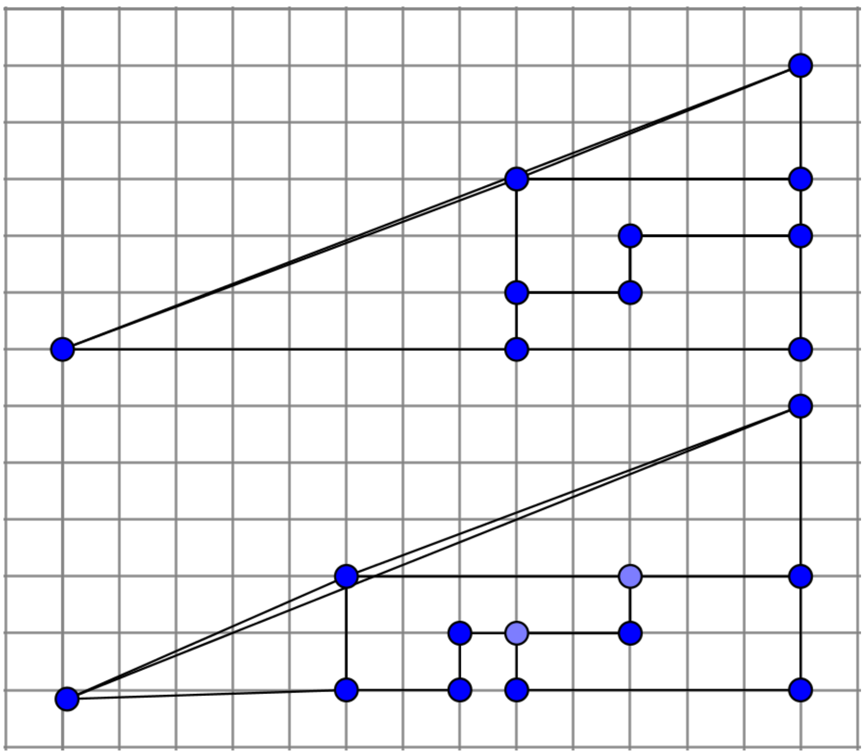


Figura 3.1: Triângulos de Curry no Geogebra

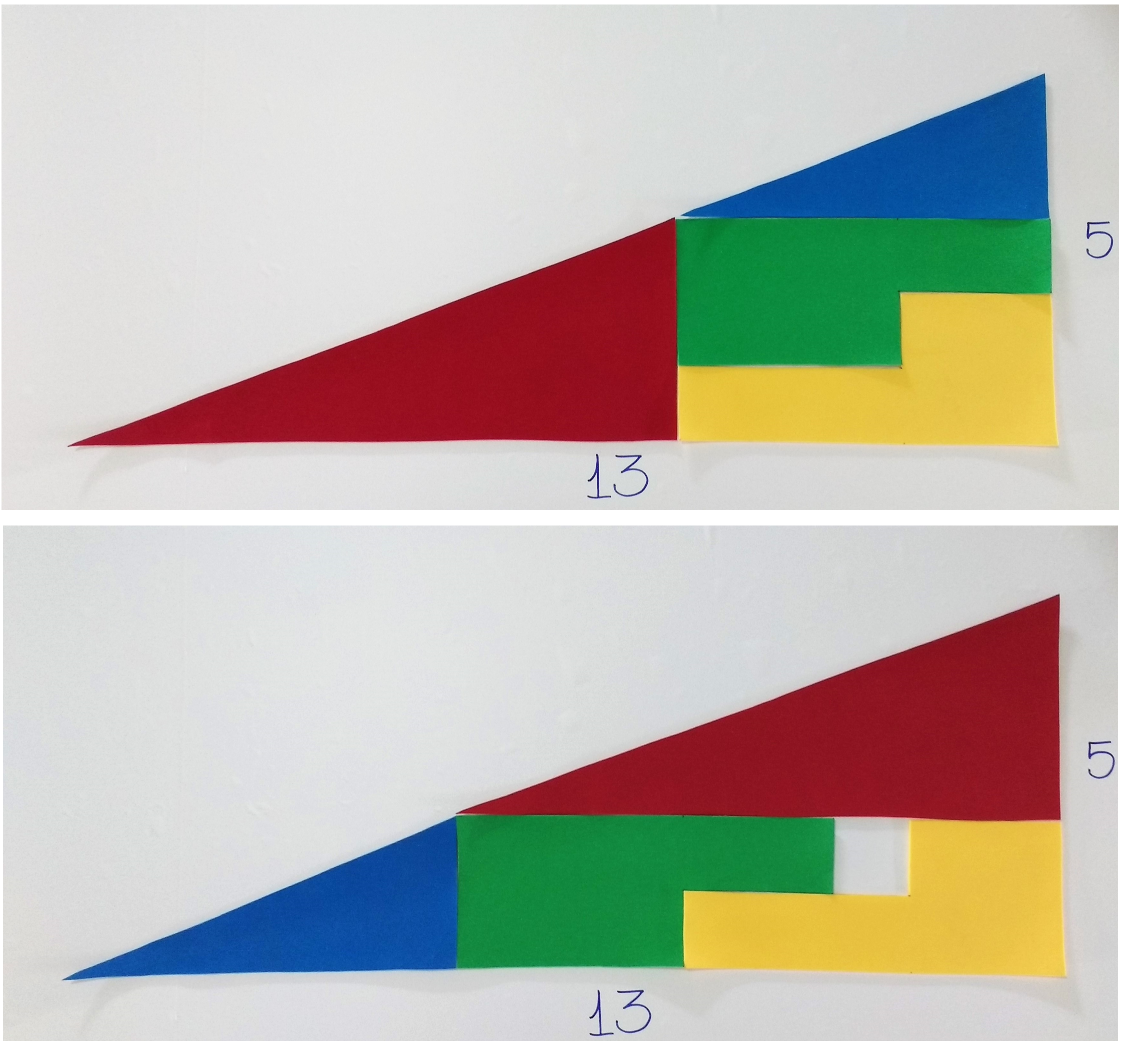


Figura 3.2: Triângulos de Curry em EVA

3.1 ENSINO FUNDAMENTAL

A atividade descrita no Apêndice A, com quatro questões, foi aplicada no dia 06 de dezembro de 2016 em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual em Matinhos-PR. Dos 22 estudantes dessa turma, 17 estavam presentes no dia em que a atividade foi aplicada. Discutimos com os estudantes o que seria um paradoxo e apresentamos o paradoxo de Curry projetando a imagem dos triângulos feitos em EVA e também construindo os mesmos com o auxílio do Geogebra. Conceitos geométricos como área de algumas figuras planas e o Teorema de Pitágoras foram revistos. Essa primeira parte durou 50min, o tempo de uma aula. Na aula seguinte, durante mais 50min, os estudantes responderam, trabalhando individualmente, às questões propostas na atividade. Analisamos a seguir as respostas dadas pelos estudantes.

Questão 3.1 (1^a questão)**.** *A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos forma-*

dos pelas peças?

Figura 3.3: Respostas da questão 1 - Ensino Fundamental

Dos 17 estudantes, 2 responderam “não” e justificaram corretamente a resposta; 10 responderam “não”, mas sem justificar a resposta; 5 responderam “não sei”, “não entendi” ou deixaram em branco. Considerando estes 5 últimos como “não responderam” e incorretas as questões não justificadas, o gráfico da Figura 3.3 ilustra os percentuais de acertos e erros da questão.

Questão 3.2 (2^a questão)**.** *Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui? Empregue a máquina calculadora para justificar sua conclusão.*

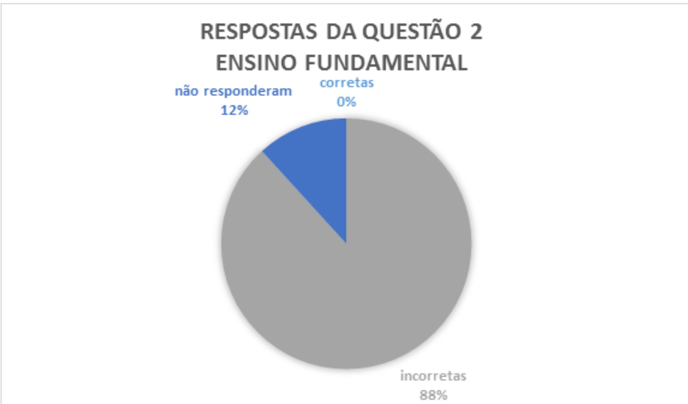


Figura 3.4: Respostas da questão 2 - Ensino Fundamental

Dos 17 estudantes, 4 calcularam as hipotenusas corretamente, mas concluíram apenas que as hipotenusas são diferentes; 2 concluíram que a soma das hipotenusas dos triângulos retângulos menores não é igual à hipotenusa do triângulo retângulo maior (formado pelas peças), porém sem apresentar os cálculos; 3 calcularam as hipotenusas corretamente, mas não escreveram a conclusão; 5 concluíram apenas que as hipotenusas são diferentes e não apresentaram nenhum cálculo; 1 realizou cálculos incompletos sem concluir nada; 2 responderam “não entendi” ou deixaram em branco. Considerando estes 2 últimos como “não responderam” e incorretas também as questões incompletas, o gráfico da Figura 3.4 ilustra os percentuais de acertos e erros da questão.

Questão 3.3 (3^a questão)**.** *Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?*

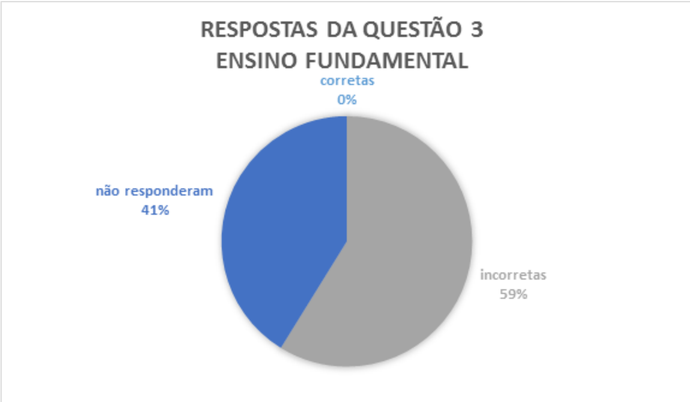


Figura 3.5: Respostas da questão 3 - Ensino Fundamental

Dos 17 estudantes, 2 responderam que "a colocação das peças está torta"; 5 concluíram que "o triângulo não ficou reto" ou "não é um triângulo pois não forma uma linha reta"; 1 disse que "as hipotenusas são diferentes e isso influencia na reta"; 2 escreveram "a soma dos catetos não é a hipotenusa"; 7 responderam "não entendi", "não compreendi", "não sei" ou ainda deixaram em branco. Considerando estes 7 últimos como "não responderam" e as demais respostas incorretas, mesmo as incompletas, o gráfico da Figura 3.5 ilustra os percentuais de acertos e erros da questão.

Questão 3.4 (4^a questão)**.** *Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?*

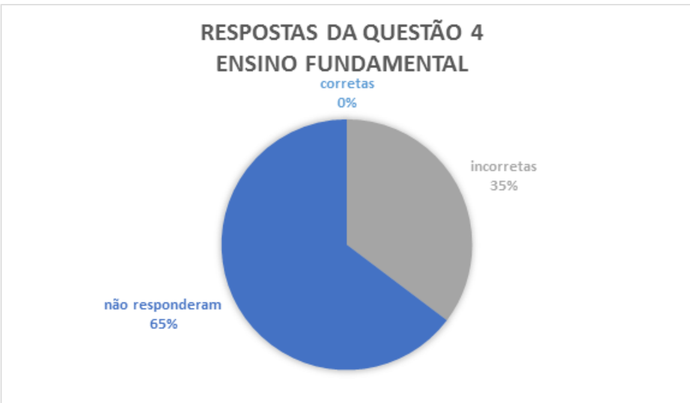


Figura 3.6: Respostas da questão 4 - Ensino Fundamental

Dos 17 estudantes, 1 respondeu que "as hipotenusas são diferentes e isso influencia na reta"; 3 disseram que "quando as peças são redistribuídas, a área muda"; 1 concluiu que "quando as peças são redistribuídas, as hipotenusas são diferentes e acaba ficando torto"; 1 escreveu que "quando as peças têm áreas diferentes são iguais"; 11 escreveram respostas como "não sei", "não entendi", "não compreendi", "não tenho argumentos", "não tenho explicação" ou ainda deixaram a questão em branco. Considerando estes últimos 11 como "não responderam" e o restante das respostas como incorretas, o gráfico da Figura 3.6 ilustra os percentuais de acertos e erros da questão.

A atividade evidenciou as dificuldades que os estudantes da turma do 9º ano do Ensino Fundamental têm para solucionar problemas aplicando conceitos geométricos. Uma minoria foi capaz de calcular corretamente a área de triângulos e polígonos não-convexos e a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos com medidas conhecidas. É importante destacar que os triângulos de Curry foram apresentados em uma malha quadriculada. Os estudantes do 9º ano não foram capazes de calcular a área contando o número de quadrados unitários de cada figura. Fica evidente a noção falha que os mesmos têm acerca do cálculo de áreas. A Figura 3.7 mostra os resultados gerais da atividade.

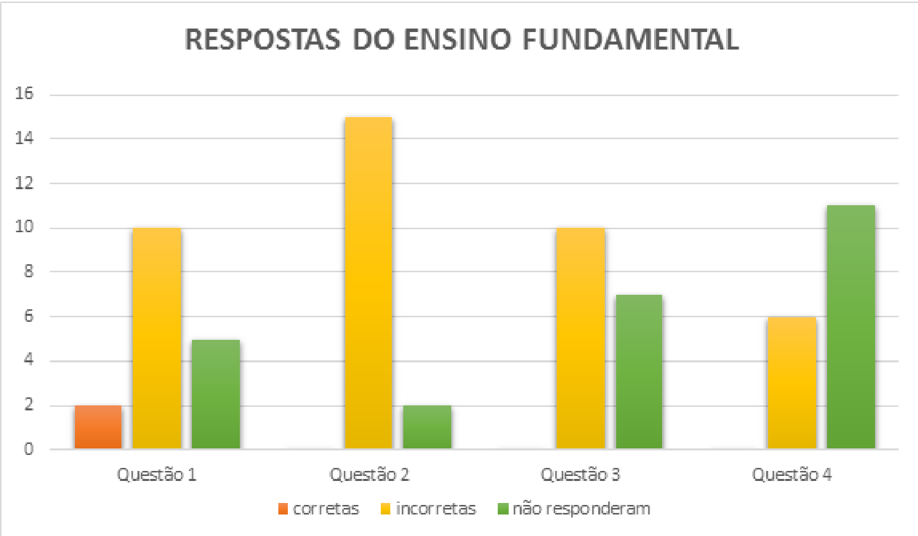


Figura 3.7: Respostas às questões da atividade para o Ensino Fundamental

3.2 ENSINO MÉDIO

A atividade descrita no Apêndice B, com cinco questões, foi aplicada no dia 16 de novembro de 2016 em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de um colégio público estadual em Matinhos-PR. Dos 39 estudantes dessa turma, 30 estavam presentes no dia em que a atividade foi aplicada e 24 responderam às questões propostas. Discutimos com os estudantes o que seria um paradoxo e apresentamos o paradoxo de Curry projetando a imagem dos triângulos feitos em EVA e também construindo os mesmos com o auxílio do Geogebra. Conceitos de Geometria Analítica, como a equação geral da reta e o coeficiente angular da reta, foram revisados. Essa primeira parte durou uma aula de 50min. Na aula seguinte, durante mais 50min, os estudantes responderam, trabalhando individualmente, às questões da atividade. Observamos o desinteresse generalizado dos estudantes pela atividade, sendo que muitos não entregaram suas respostas ou entregaram o roteiro contendo apenas o nome. Constatamos que o desinteresse não foi pelo tema, mas sim pelo fato da atividade não ser quantificada em termos de nota e ser aplicada por alguém que não era o professor regente da turma. Analisamos a seguir as respostas dadas pelos estudantes.

Questão 3.5 (1^a questão)**.** *Determine a equação geral* $y = mx + n$ *da reta suporte da diagonal* *dos retângulos de dimensões* 13×5, 8×3 *e* 5×2. *Use a máquina calculadora para determinar o ângulo de inclinação das retas.*

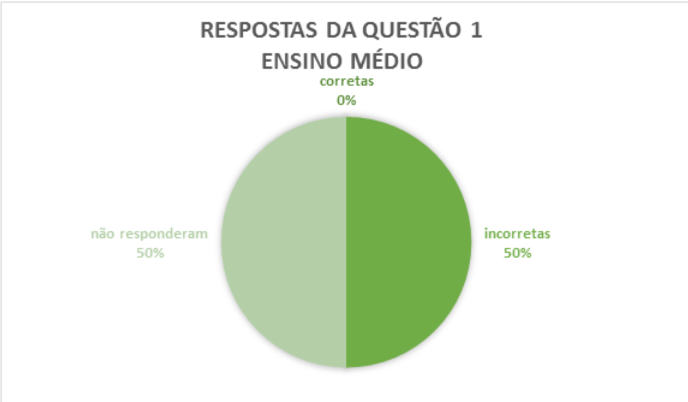


Figura 3.8: Respostas da questão 1 - Ensino Médio

Dos 24 estudantes, 12 escreveram respostas incompletas e os outros 12 entregaram o roteiro em branco. Das respostas incompletas, em 6 faltaram os ângulos de inclinação das retas e nas outras 6, além dos ângulos, também faltaram as equações das retas suportes das hipotenusas dos triângulos retângulos menores. Considerando as respostas incompletas como incorretas e as questões em branco como "não responderam", o gráfico da Figura 3.8 ilustra os percentuais de acertos e erros da questão.

Questão 3.6 (2^a questão)**.** *No primeiro triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a)* $y(0)$ *; b)* $y(8)$*; c)* $y(13)$. *As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?*

Questão 3.7 (3^a questão)**.** *No segundo triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a)* $y(0)$*; b)* $y(5)$*; c)* $y(13)$. *As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?*

Figura 3.9: Respostas das questões 2 e 3 - Ensino Médio

Na segunda questão, dos 24 estudantes 3 responderam corretamente; 5 calcularam as imagens, mas não responderam se coincidiam com os valores verificados na figura; 4 responderam "alguns", mas não apresentaram nenhum cálculo e nem argumentos; 12 deixaram a reposta em branco. Na terceira questão, os resultados foram os mesmos. Perguntamo-nos se o fato de escrevermos a equação geral da reta como $y = mx + n$, ao invés de $y(x) = mx + n$, possa ter influenciado o baixo número de acertos. Considerando as respostas incompletas como incorretas e as respostas em branco como “não responderam”, o gráfico da Figura 3.9 ilustra os percentuais de acertos e erros das duas questões.

Questão 3.8 (4^a questão)**.** *Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?*

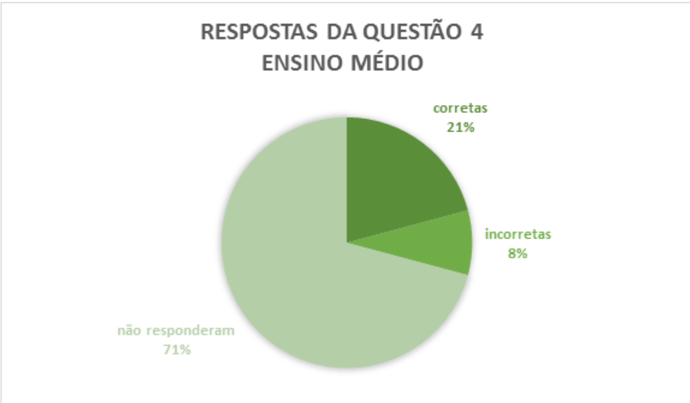


Figura 3.10: Respostas da questão 4 - Ensino Médio

Dos 24 estudantes, 5 apresentaram conclusões coerentes como “a reta suporte da hipotenusa não passa por todos os pontos” e “ as figuras não formam triângulos”; 2 responderam que “os triângulos possuem mesmo diâmetro, apesar da forma diferente”; 17 não responderam a questão. O gráfico da Figura 3.10 ilustra os percentuais de acertos e erros da questão.

Questão 3.9 (5^a questão)**.** *Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?*

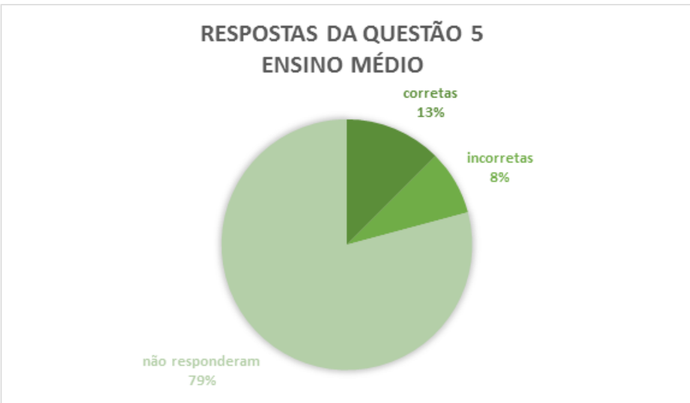


Figura 3.11: Respostas da questão 5 - Ensino Médio

Dos 24 estudantes, 3 escreveram respostas coerentes como “As peças não se encaixam na reta suporte da diagonal do retângulo”; 2 disseram que “o paradoxo de Curry e de Hooper possuem a mesma área”; 19 não responderam. O gráfico da Figura 3.11 ilustra os percentuais de acertos e erros da questão.

No que diz respeito à solucionar problemas aplicando conceitos geométricos, os estudantes da turma do 3º ano do Ensino Médio também tiveram dificuldades. Poucos estudantes efetuaram os cálculos corretamente e ainda, alguns destes poucos não souberam concluir, atestando que não conseguiram interpretar o problema adequadamente. O uso de conceitos incorretos, como “o diâmetro do triângulo”, ressalta que os estudantes não sabem definir e/ou conceituar em Matemática. Também nos preocupou o desinteresse pela atividade, fato não observado com a turma do 9º ano do Ensino Fundamental. A Figura 3.12 mostra os resultados gerais da atividade.

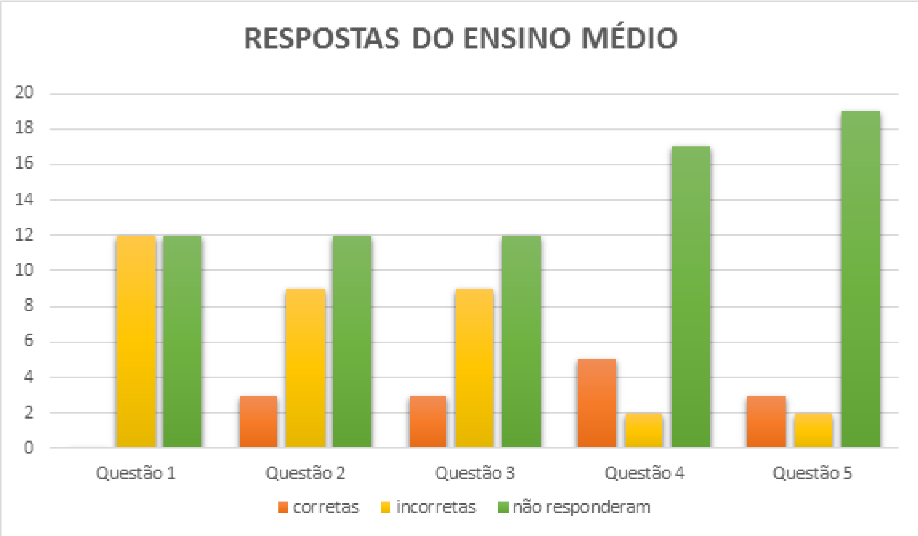


Figura 3.12: Respostas às questões da atividade para o Ensino Médio

3.3 LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A atividade descrita no Apêndice C, com quatro questões, foi aplicada no dia 18 de novembro de 2016 em uma turma do 2º período do Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública federal, na disciplina Geometria 2. Dos 37 estudantes dessa turma, 13 estavam presentes no dia em que a atividade foi aplicada. Discutimos com os estudantes o que seria um paradoxo, exemplificando com paradoxos lógico-matemáticos e também geométricos. Diferentemente das atividades para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, nessa turma não construímos os triângulos de Curry em EVA e no Geogebra. Os estudantes trabalharam em duplas durantes duas aulas de 50min. O roteiro de atividades proposto para o Ensino Superior é praticamento o mesmo proposto para o Ensino Fundamental. O motivo é que a disciplina Geometria Analítica é ministrada no terceiro semestre do curso. E não queríamos que as respostas fossem influenciadas apenas pelo que os estudantes vivenciaram no Ensino Médio. Como todos já haviam cursado Geometria 1, um curso de Geometria Plana, as questões propostas para o Ensino Fundamental eram mais apropriadas. Analisamos a seguir as respostas dadas pelos estudantes.

Questão 3.10 (1^a questão)**.** *A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?*

Questão 3.11 (2^a questão)**.** *Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui?*

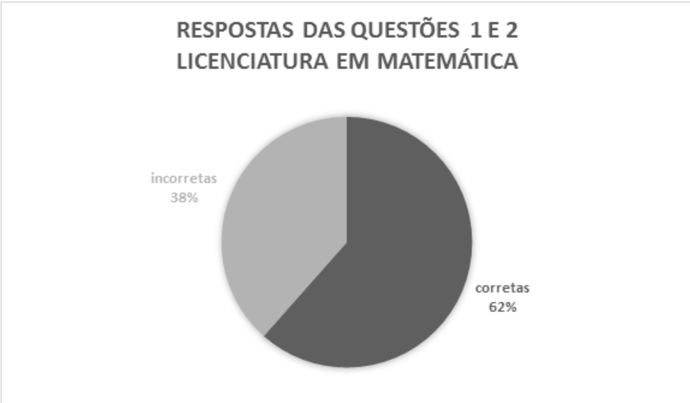


Figura 3.13: Respostas das questões 1 e 2 - Licenciatura em Matemática

Na primeira questão, dos 13 estudantes, 8 responderam corretamente; 5 responderam "não", mas com justificativas inconsistentes com a pergunta, como "a área do segundo triângulo têm um quadrado a mais do que a soma das áreas de cada peça", "o primeiro triângulo tem inclinação negativa e o segundo, inclinação positiva" e "a figura não é um triângulo". Esta última afirmação é verdadeira, mas não justifica a soma das áreas das peças não ser igual à da figura formada pelas peças. O gráfico da Figura 3.13 mostra os percentuais de acertos e erros da questão.

A análise dos erros/acertos da segunda questão coincide com a análise da primeira questão. Dos 13 estudantes, 8 responderam corretamente, enquanto 5 forneceram conclusões incompletas, como "as hipotenusas têm medidas diferentes" e "nenhuma das raízes é exata", ou apenas fizeram os cálculos sem concluir. O gráfico da Figura 3.13 mostra os percentuais de acertos e erros da questão.

Questão 3.12 (3^a questão)**.** *Qual é sua explicação para o quadrado perdido?*

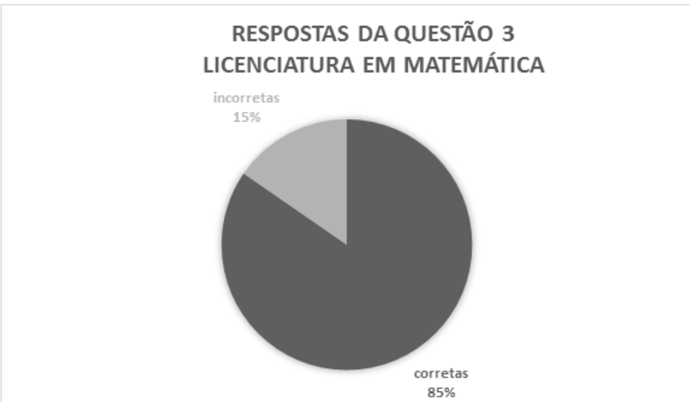


Figura 3.14: Respostas da questão 3 - Licenciatura em Matemática

Dos 13 estudantes, 11 escreveram respostas coerentes como "as hipotenusas dos triângulos menores são dois segmentos com inclinações de retas diferentes, assim a figura é um quadrilátero", "a soma das hipotenusas dos triângulos menores deveria ser igual à hipotenusa do triângulo formado pelas peças, mas não é e assim as figuras formadas pelas peças não são triângulos", "a figura não é um triângulo pois os triângulos não são semelhantes", "se soprepusermos as figuras, haverá uma diferença entre a diagonal do retângulo e os triângulos, que formam o quadrado perdido", "a área do quadrado perdido está distribuida na hipotenusa", "as quatro peças não formam um triângulo"; 2 responderam incorretamente afirmando que "o que seria a hipotenusa de um triângulo retângulo é uma linha curva". O gráfico da Figura 3.14 mostra os percentuais de acertos e erros da questão.

Questão 3.13 (4^a questão). *Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?*

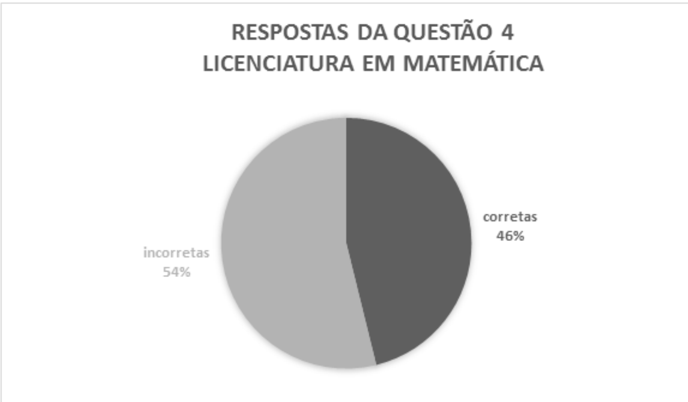


Figura 3.15: Respostas da questão 4 - Licenciatura em Matemática

Dos 13 estudantes, 6 deram respostas coerentes como "a linha grossa da diagonal esconde espaços", "na montagem dos recortes do retângulo, há uma diferença na diagonal", "há um buraco na segunda figura", "na segunda figura, o triângulo com o trapézio reto não formam um triângulo, mas sim um quadrilátero"; 7 responderam incorretamente, afirmando que "os triângulos (recortes) têm inclinações diferentes, não são semelhantes", "os triângulos (recortes) são trapézios" e "não consegui concluir". O gráfico da Figura 3.15 mostra os percentuais de acertos e erros da questão.

Os resultados dos estudantes da licenciatura foram satisfatórios, como mostra o gráfico da Figura 3.16. A maioria foi capaz de empregar os conceitos geométricos assimilados na disciplina de Geometria para elucidar os dois paradoxos. Contudo, constatamos a falta de rigor matemático na escrita e o emprego de terminologia inadequada.

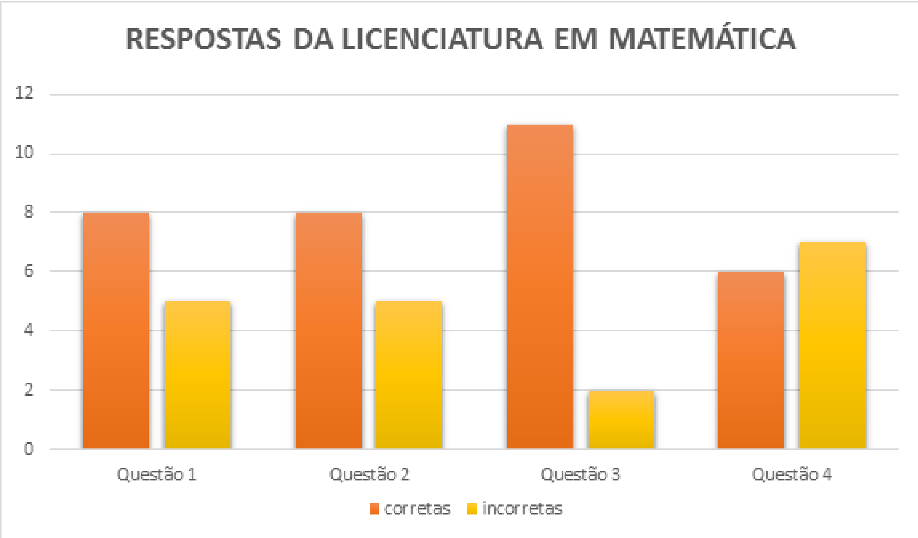


Figura 3.16: Respostas às questões da atividade para a Licenciatura em Matemática

3.4 ATIVIDADES SUGERIDAS

3.4.1 PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Questão 3.14. *Observe o quadrado de lado de medida 7uc, dividido em cinco peças, ilustrado no Figura 3.17.*

1. *Construa, em papel milimetrado, o quadrado de lado de medida 7uc e decomponha o mesmo em cinco peças, como na Figura 3.17.*
2. *Calcule a área de cada uma das cinco peças.*
3. *Compare a soma das áreas das cinco peças com a área do quadrado de lado de medida 7uc. Essas medidas são iguais? Por quê?*

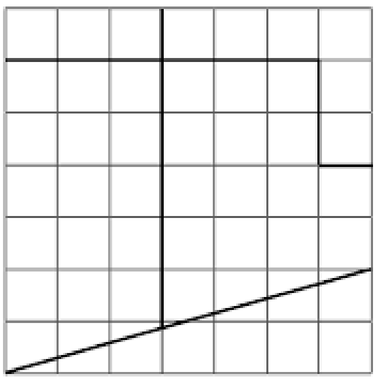


Figura 3.17: Quadrado de lado de medida 7*uc* dividido em cinco peças

Questão 3.15. *Na Figura 3.18, um retângulo é decomposto em dois quadrados.*

1. *Construa, em papel milimetrado, o retângulo de lados de medidas* 10*uc e* 13*uc e decomponha o mesmo em seis peças, como na Figura 3.18, formando com elas os dois quadrados.*

2. *Calcule a área do retângulo e a área dos dois quadrados e compare as medidas obtidas.*

3. *As peças empregadas na composição dos dois quadrados são as mesmas peças que formam o retângulo?*

4. *Por que a soma das áreas dos dois quadrados não é igual à área do retângulo?*

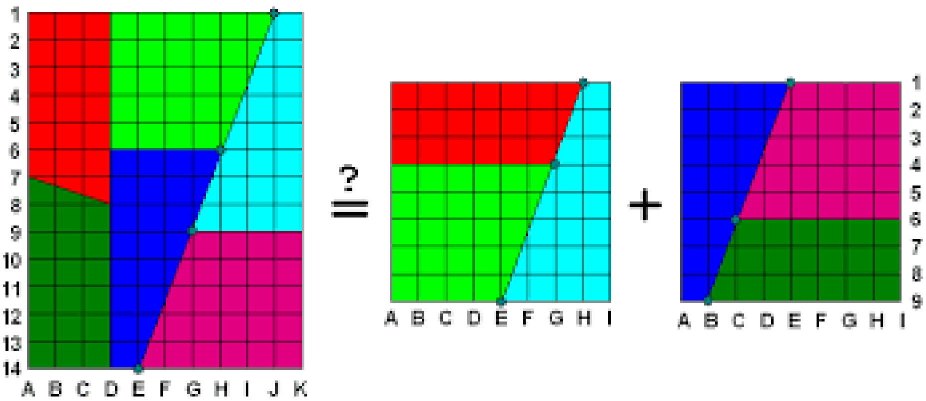


Figura 3.18: Retângulo decomposto em dois quadrados (BOGOMOLNY, 2017)

Questão 3.16. *Na Figura 3.19, um quadrado de lado de medida* 9*uc é dividido em quatro peças de maneira que o rearranjo de três delas (a peça A é mantida fixa) produza o mesmo quadrado, porém com uma unidade de área a mais. Essa decomposição é baseada no paradoxo do tabuleiro.*

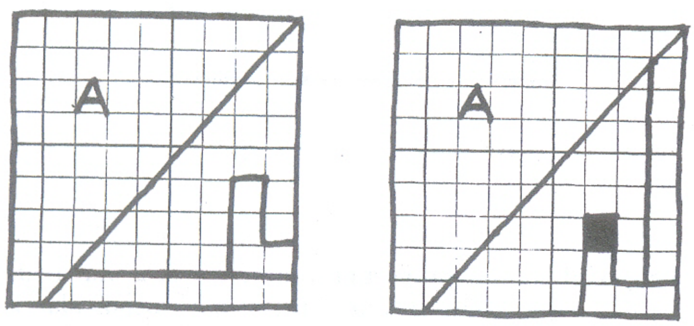


Figura 3.19: Quadrado de lado 9*uc* **dividido em quatro peças (GARDNER, 1956)**

1. *Calcule a área de cada uma das peças. A soma dessas áreas é igual à área do quadrado de lado de medida* 9*uc?*

2. *Determine a medida do maior lado do trapézio retângulo A e da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos de medidas* 8*uc e* 9*uc. O que você conclui?*

3. *Justifique porque o segundo quadrado tem uma unidade de área a mais do que o primeiro.*

Questão 3.17. *O Tangram é um antigo quebra-cabeça chinês composto por sete peças que formam um quadrado, como ilustra a Figura 3.20. O mesmo conjunto de peças do Tangram pode produzir duas figuras com áreas aparentemente diferentes, uma das quais é um subconjunto apropriado da outra, como na Figura 3.22. Dudeney (DUDENEY, 1958) denominou essa contradição de* paradoxo do Tangram.

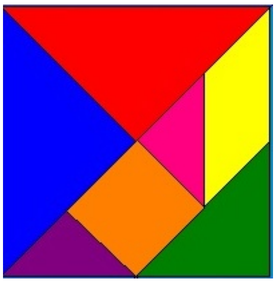


Figura 3.20: Peças do Tangram

1. *Usando o Tangram, construa as imagens da Figura 3.21. Qual tem a maior área? Justifique.*

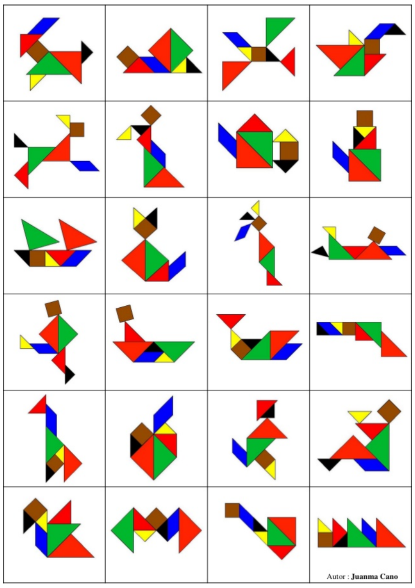


Figura 3.21: Figuras construídas com o Tangram (CANO, 2017)

2. *Na Figura 3.22, qual das duas gravuras de um chinês tem a maior área? Por quê?*

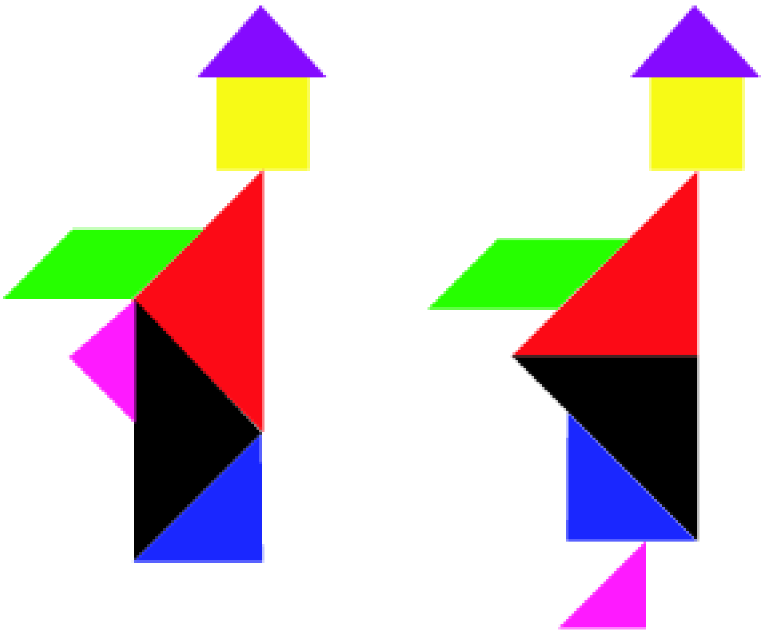


Figura 3.22: Paradoxo do Tangram (WOLFRAMMATHWORLD, 2017b)

3.4.2 PARA O ENSINO MÉDIO

Questão 3.18. *Na Figura 3.23, um triângulo de Curry de área* 60*ua é decomposto em seis peças que, reorganizadas, formam outro triângulo de Curry, de área* 58*ua, ou um polígono não convexo de área* 59*ua.*

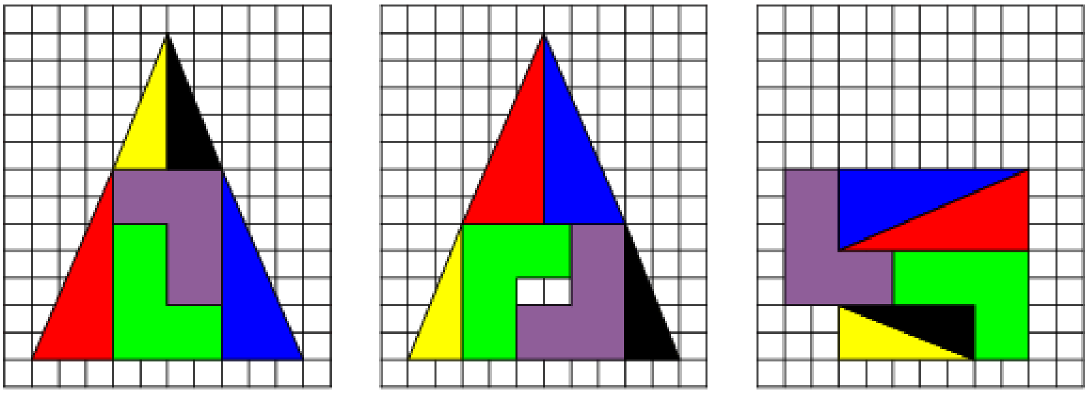


Figura 3.23: Decomposição de um triângulo de Curry (WOLFRAMMATHWORLD, 2017a)

1. *O triângulo inicial é equilátero? Justifique.*

2. *Calcule a área de cada uma das seis peças. A soma dessas áreas é igual à área do triângulo que elas formam?*

3. *Das seis peças, quatro são triângulos retângulos congruentes dois a dois. Os triângulos retângulos de catetos de medidas $2uc$ e $5uc$ e $3uc$ e $7uc$ são semelhantes? Justifique.*

4. *A reta suporte das hipotenusas dos triângulos retângulos de catetos de medidas $2uc$ e $5uc$ e $3uc$ e $7uc$ é a mesma? Justifique.*

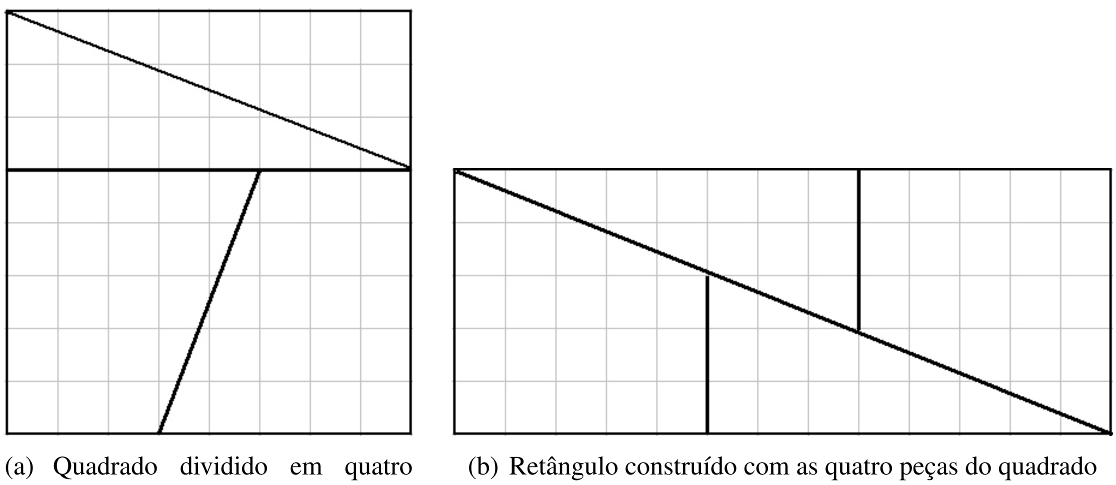
5. *Por que as três figuras geométricas não têm a mesma área?*

Questão 3.19. *A Figura 3.24 ilustra o paradoxo de Hooper: um quadrado de lado de medida $8uc$, de área $64ua$, é decomposto em quatro peças, dois triângulos retângulos congruentes e dois trapézios retângulos congruentes. Essas peças, quando reorganizadas, formam um retângulo de lados de medidas $5uc$ e $13uc$, de área $65ua$.*

1. *Construa, em papel milimetrado, o quadrado de lado de medida $8uc$ e decomponha o mesmo em quatro peças, reorganizando-as como na Figura 3.24(b).*

2. *Na Figura 3.24(b), a reta suporte das hipotenusas dos triângulos retângulos de catetos de medidas $3uc$ e $8uc$ é a mesma da diagonal do retângulo de lados de medidas $5uc$ e $13uc$? Justifique.*

3. *Explique por que o retângulo tem uma unidade de área a mais do que o quadrado se ambos são formados pelas mesmas peças.*



(a) Quadrado dividido em quatro peças

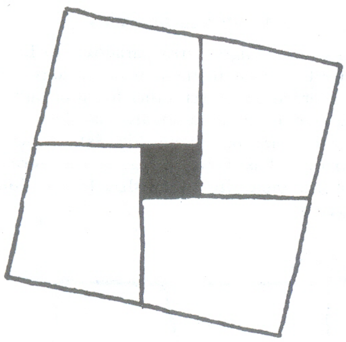
(b) Retângulo construído com as quatro peças do quadrado

Figura 3.24: O paradoxo de Hooper

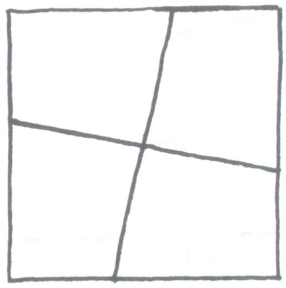
Questão 3.20. *O paradoxo de Mitsunobu Matsuyama consiste na divisão de um quadrado em quatro quadriláteros congruentes e um pequeno quadrado, como na Figura 3.25(a). Os quatro quadriláteros, quando rotacionados em torno dos seus centros, preenchem o espaço do pequeno quadrado, como na Figura 3.25(b), formando um novo quadrado de área aparentemente igual à área do quadrado inicial. A Figura 3.26 ilustra o paradoxo da carta de baralho de Robert Pages, uma variação do paradoxo de Mitsunobu Matsuyama.*

1. *Os quadrados das Figuras 3.25(a) e 3.25(b) têm a mesma área?*

2. *Explique o desaparecimento do pequeno quadrado na Figura 3.25(b).*



(a) Quadrado dividido em quatro quadriláteros congruentes e um quadrado



(b) Quadrado originado pela rotação dos quatro quadriláteros congruentes

Figura 3.25: O paradoxo de Mitsunobu Matsuyama (GARDNER, 1956)

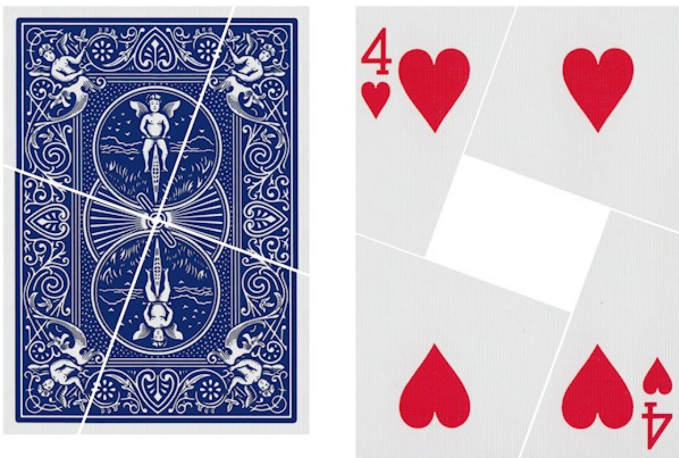


Figura 3.26: O paradoxo da carta de baralho de Robert Pages (*Robert Pages's business card paradox*) (TOMATIS, S.d.a)

4 CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho alguns paradoxos geométricos e os empregamos para avaliar, de forma lúdica, a aprendizagem de conteúdos de Geometria Plana e de Geometria Analítica. Organizamos também atividades para três níveis de ensino - Fundamental, Médio e Superior, com o intuito de verificar como os estudantes utilizam conceitos geométricos para solucionar problemas. A partir da análise das respostas dos roteiros de atividades, verificamos que os estudantes das turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio têm dificuldades para empregar conceitos e definições; uma minoria é capaz de efetuar os cálculos associados corretamente e, ainda, uma parte desta minoria não sabe como usar esses cálculos para justificar a solução dos problemas propostos. Quanto ao Ensino Superior, os resultados foram satisfatórios. Mesmo assim, constatamos a falta de rigor matemático nas soluções apresentadas, assim como o mau uso da linguagem escrita.

Mesmo constando nos Parâmetros Curriculares Nacionais para Matemática, os resultados das atividades que aplicamos, principalmente no que diz respeito ao cálculo de áreas, nos fazem pensar que a Geometria é negligenciada ou pouco abordada/explorada em sala de aula no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Pavanello (PAVANELLO, 1989), já afirmava/questionava:

> Quanto ao ensino de Geometria, o problema torna-se ainda mais grave: constata-se que ele vem gradualmente desaparecendo do currículo real das escolas. Será que este conhecimento não é necessário ao homem moderno? Terá a geometria perdido sua importância do ponto de vista educacional? Que outros motivos fizeram com que ela fosse praticamente expulsa da sala de aula?

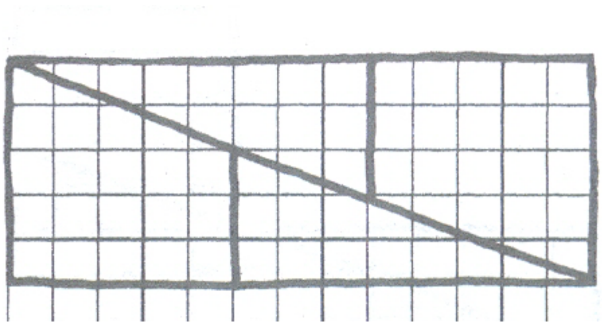
Transcorridos quase trinta anos, a situação nos parece a mesma ou pior. Estamos cientes de que os resultados de duas turmas são insuficientes para fazermos inferências representativas sobre o ensino de Geometria na Educação Básica brasileira. Contudo, os resultados da prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, que apresenta um número expressivo de questões sobre Geometria Plana e Geometria Espacial, parecem corroborar essa conclusão.

Dessa forma, devemos, enquanto professores de Matemática, trabalhar para incluir efetivamente a Geometria no currículo da Educação Básica. Deveríamos também empregar jogos e atividades lúdicas para estabelecer/explorar conceitos geométricos. Usar a Matemática Recreativa, que mistura o lúdico com diversão e imaginação e até mesmo mágica, pode ser estimulante, tanto para estudantes quanto para professores, à aprendizagem em Geometria. Nesse sentido, definimos este trabalho de conclusão de curso.

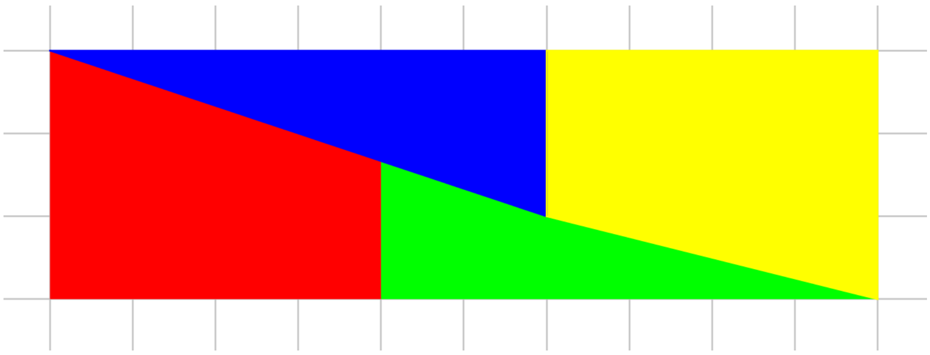
A principal dificuldade enfrentada na organização deste trabalho foi a escassa bibliografia disponível. Nossa principal referência, o livro de Gardner (GARDNER, 1956), não tem tradução para o Português. O mesmo ocorre com outras poucas referências, como o livro de Farlow (FARLOW, 2014). Também não encontramos referenciais históricos para descrever o inventor de alguns paradoxos, como por exemplo, William Hooper. E outra das características deste texto é descrever, mesmo que brevemente, o matemático ou o "mágico" envolvido na criação de cada um dos paradoxos mencionados. Não é possível ensinar Geometria, Álgebra ou Aritmética sem abordar História da Matemática.

Outra dificuldade foi a construção de algumas figuras no Geogebra. Falsos paradoxos geométricos, como os paradoxos de Curry e de Hooper, são uma ilusão de ótica. E provocar essa ilusão visualmente com o Geogebra não foi fácil; em alguns casos, o resultado não foi completamente satisfatório. Garder (GARDNER, 1956) apresenta todas as figuras desenhadas à mão. Neste caso, o uso de linhas de espessura maior encobre o sumiço/aparecimento de pequenas áreas. No Geogebra, é preciso sobrepor figuras. Como construímos as figuras sem uma borda mais espessa, as falhas se tornaram evidentes algumas vezes e a ilusão de ótica foi comprometida. A Figura 4.1 compara uma das figuras do paradoxo de Hooper feita à mão com outra construída no Geogebra.

Finalizando, acreditamos que este trabalho pode ser útil para os professores de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio como estímulo/suporte para a organização e aplicação de atividades recreativas em sala de aula. O trabalho também contribuiu para a reflexão sobre a prática docente da autora, gerando expectativas de mudanças e, consequentemente, de melhoria do processo ensino-aprendizagem em Matemática.



(a) Paradoxo de Hooper: figura construída à mão (GARDNER, 1956)



(b) Paradoxo de Hooper: figura construída no Geogebra

Figura 4.1: Comparação de figuras construídas à mão e no Geogebra

REFERÊNCIAS

ALVES, E. C. A.; MORAIS FILHO, D. C. de. Paradoxos geométricos recreativos como recurso didático. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE. **VII Semana da Matemática, 10 anos do PPGMAT**. Paraíba, S.d.

APROSIO, A. P. **Pinóquio no país dos paradoxos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

BOGOMOLNY, A. **Dissection of a Rectangle into Two Chessboards**. 2017. Disponível em: <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/TwoChessboards.shtml>. Acesso em: 16 de janeiro de 2017.

CANO, J. **Tangram**. 2017. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/juanmacano104/tangram-27965582?smtNoRedir=1>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2017.

CIÊNCIAONLINE. **Dez alucinantes paradoxos que o vão deixar confuso**. 2014. Disponível em: <http://www.ciencia-online.net/2014/04/10-alucinantes-paradoxos.html>. Acesso em: 16 de dezembro de 2016.

COLDWELL, N. **A collection of quant riddles answers**. 2017. Disponível em: <http://puzzles.nigelcoldwell.co.uk/>. Acesso em: 06 de janeiro de 2017.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

DUDENEY, H. **Amusements in Mathematics**. New York: Dover, 1958.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FARLOW, S. J. **Paradoxes in mathematics**. 1. ed. New York: Dover, 2014.

GARDNER, M. **Mathematics, magic and mystery**. 1. ed. New York: Dover, 1956.

GONZÁLEZ, C. G. Paradoxos, o infinito e a intuição geométrica. **Educação e Filosofia Uberlândia**, Uberlândia, v. 25, n. 50, p. 717–740, 2011.

HOMESCHOOLMATH. **Geometric vanish puzzles**. 2015. Disponível em: <http://www.homeschoolmath.net/teaching/geometric_vanishes_puzzles.php>. Acesso em: 06 de janeiro de 2017.

HYPESCIENCE. **Dez paradoxos para explodir sua cabeça**. 2013. Disponível em: <http://hypescience.com/10-paradoxos/>. Acesso em: 16 de dezembro de 2016.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT, v. 7).

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT, v. 5).

MAGICPEDIA. **Theodore DeLand**. 2014. Disponível em: <*http : //geniimagazine.com/magicpedia/Theodore_DeLand*>. Acesso em: 05 de janeiro de 2017.

Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral.** Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: <*http : //portal.mec.gov.br/secretaria − de − educacao − basica/apresentacao*>. Acesso em: 26 de outubro de 2016.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT, v. 9).

PANEK, L. O teorema de banach-tarski. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, v. 22, n. 2, p. 127–144, 2004.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, 1989.

RÊGO, E. F. O teorema de banach-tarski: paradoxo ou ilusão? Porto, 2007.

SAMPAIO, J. C. V. Diversões geométricas. S.l., S.d.

SANCHIS, R. O axioma da escolha, o lema de zorn e o teorema de zermelo. S.l., S.d.

SILVA, S. G. da; DE JESUS, J. P. C. Cem anos do axioma da escolha: Boa ordenação, lema de zorn e o teorema de tychonoff. **Matemática Universitária**, n. 42, p. 16–34, 2007.

SOUZA, J. C. de Mello e. **Matemática divertida e curiosa**. 22. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

STAGNI, H. **Notas de Aula do PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado em Combinatória**. 2016. Disponível em: <*https : //www.ime.usp.br/ tcco/picme/*>. Acesso em: 07 de janeiro de 2017.

STEWART, I. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009. Tradução Diego Alfaro, revisão técnica Samuel Jurkiewicz. Tradução de: Professor Stewart's cabinet of mathematical curiosities, 1945.

SUPERINTERESSANTE. **Cinco paradoxos da lógica e da matemática**. 2014. Disponível em: <*http : //super.abril.com.br/blog/superlistas/5 − paradoxos − da − logica − e − da − matematica/*>. Acesso em: 16 de dezembro de 2016.

TOMATIS, M. **Curse of the crystal skulls and other vanishing area puzzles**. S.d. Disponível em: <*http : //www.marianotomatis.it/blog/research.php?url* = 20110707>. Acesso em: 16 de dezembro de 2016.

TOMATIS, M. **A selection of vanishing puzzles**. S.d. Disponível em: <*http : //www.marianotomatis.it/blog/research.php?url* = 20110715>. Acesso em: 16 de dezembro de 2016.

WIKIPÉDIA. **Paradoxo de Banach-Tarski**. 2015. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_de_Banach%E2%80%93Tarski>. Acesso em: 07 de janeiro de 2017.

WIKIPÉDIA. **Alfred Tarski**. 2016. Disponível em: <https://translate.google.com.br/translate?hl=pt-BR&sl=en&u=https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_Tarski&prev=search>. Acesso em: 07 de janeiro de 2017.

WIKIPEDIA. **Fibonacci**. 2016. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci>. Acesso em: 06 de janeiro de 2017.

WIKIPEDIA. **Martin Gardner**. 2016. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Gardner>. Acesso em: 06 de janeiro de 2017.

WIKIPEDIA. **Paul Curry**. 2016. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Curry>. Acesso em: 06 de janeiro de 2017.

WIKIPEDIA. **Sam Loyd**. 2016. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sam_Loyd>. Acesso em: 06 de janeiro de 2017.

WIKIPEDIA. **Stefan Banach**. 2016. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach>. Acesso em: 07 de janeiro de 2017.

WOLFRAMMATHWORLD. **Curry Triangle**. 2017. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/CurryTriangle.html>. Acesso em: 16 de janeiro de 2017.

WOLFRAMMATHWORLD. **Tangram Paradox**. 2017. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/TangramParadox.html>. Acesso em: 16 de janeiro de 2017.

APÊNDICE A – ROTEIRO DE ATIVIDADES PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

ROTEIRO DE ATIVIDADES PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Estudante: ____

Paradoxo de Curry

Paul Curry (1917-1986): mágico amador de Nova Iorque, criou o enigma do quadrado perdido.
Na Figura 1, os triângulos são formados por quatro peças iguais dispostas de maneiras distintas, mas o segundo triângulo possui um quadrado a menos que o primeiro.

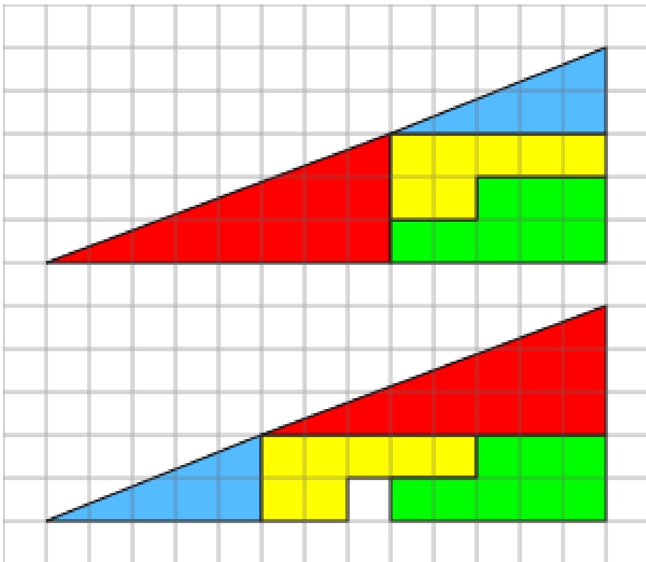


Figura 1 - Cadê o quadrado perdido?

1. A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?

____
____
____

2. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui? Empregue a máquina calculadora para justificar sua conclusão.

____
____

3. Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?

Paradoxo de Hooper

O Paradoxo de Hooper é similar ao Paradoxo de Curry. Um quadrado de área 64 foi decomposto em quatro partes que foram remontadas formando um retângulo de área 65, conforme ilustra a Figura 2.

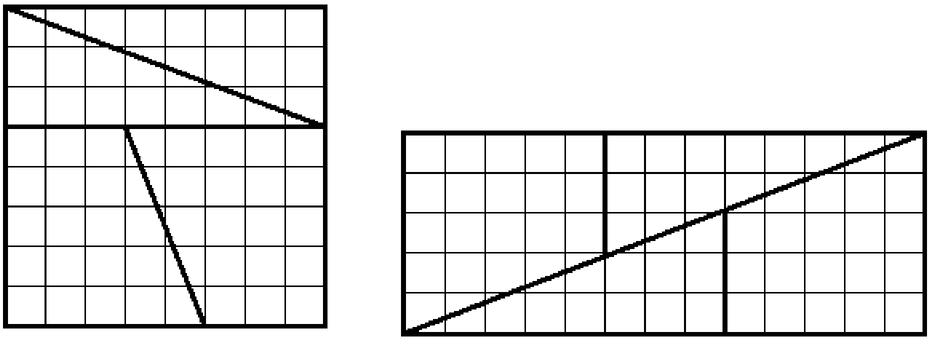


Figura 2 - Figuras equivalentes: 64=65?

4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Referências

[1] GARDNER, Martin. *Mathematics, magic and mystery*. New York: Dover, 1956.

[2] YOUTUBE. *Paradoxo de Curry*.

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XsAYs3nf8Jg

Acesso em 02/09/2016.

[3] WIKIPEDIA. *Paradoxo do quadrado perdido*.

Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5e/Missing_square_puzzle.svg/350px-Missing_square_puzzle.svg.png

Acesso em 02/09/2016.

APÊNDICE B – ROTEIRO DE ATIVIDADES PARA A 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

ROTEIRO DE ATIVIDADES PARA O 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Estudante: ______________________________________

Paradoxo de Curry

Paul Curry (1917-1986): mágico amador de Nova Iorque, criou o enigma do quadrado perdido.
Na Figura 1, os triângulos são formados por quatro peças iguais dispostas de maneiras distintas, mas o segundo triângulo possui um quadrado a menos que o primeiro.

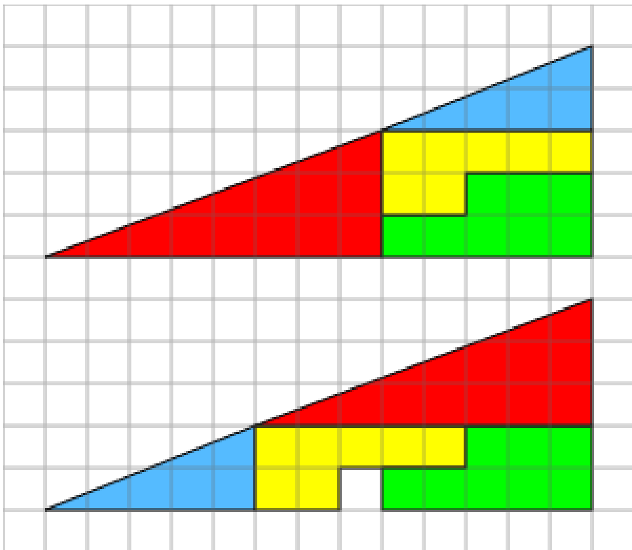
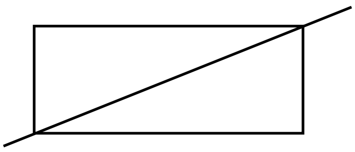


Figura 1 - Cadê o quadrado perdido?

1. Determine a equação geral $y = mx + n$ da reta suporte da diagonal dos retângulos de dimensões 13x5, 8x3 e 5x2. Use a máquina calculadora para determinar o ângulo de inclinação das retas.



2. No primeiro triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a) $y(0)$; b) $y(8)$; c) $y(13)$. As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?

____
____

3. No segundo triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a) $y(0)$; b) $y(5)$; c) $y(13)$. As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?

____
____

4. Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?

____
____
____
____
____
____

Paradoxo de Hooper

O Paradoxo de Hooper é similar ao Paradoxo de Curry. Um quadrado de área 64 foi decomposto em quatro partes que foram remontadas formando um retângulo de área 65, conforme ilustra a Figura 2.

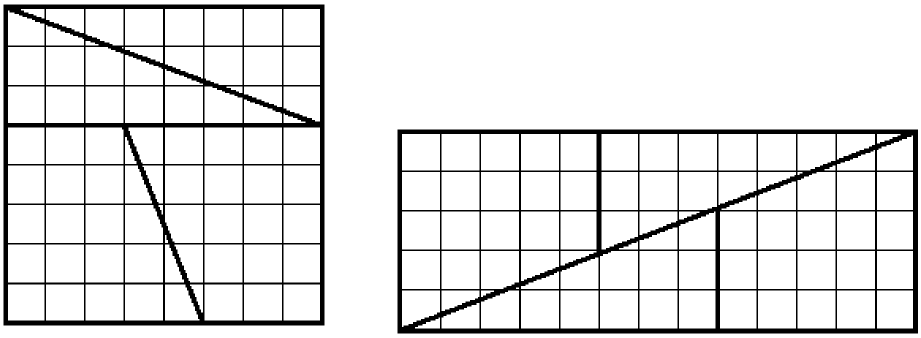


Figura 2 - Figuras equivalentes: 64=65?

5. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

____
____
____
____
____
____

Referências

[1] GARDNER, Martin. *Mathematics, magic and mystery*. New York: Dover, 1956.

[2] YOUTUBE. *Paradoxo de Curry*.

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XsAYs3nf8Jg

Acesso em 02/09/2016.

[3] WIKIPEDIA. *Paradoxo do quadrado perdido*.

Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5e/Missing_square_puzzle.svg/350px-Missing_square_puzzle.svg.png

Acesso em 02/09/2016.

APÊNDICE C – ROTEIRO DE ATIVIDADES PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ROTEIRO DE ATIVIDADES PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Estudante: ___________________________________

Paradoxo de Curry

Paul Curry (1917-1986): mágico amador de Nova Iorque, criou o enigma do quadrado perdido.
Na Figura 1, os triângulos são formados por quatro peças iguais dispostas de maneiras distintas, mas o segundo triângulo possui um quadrado a menos que o primeiro.

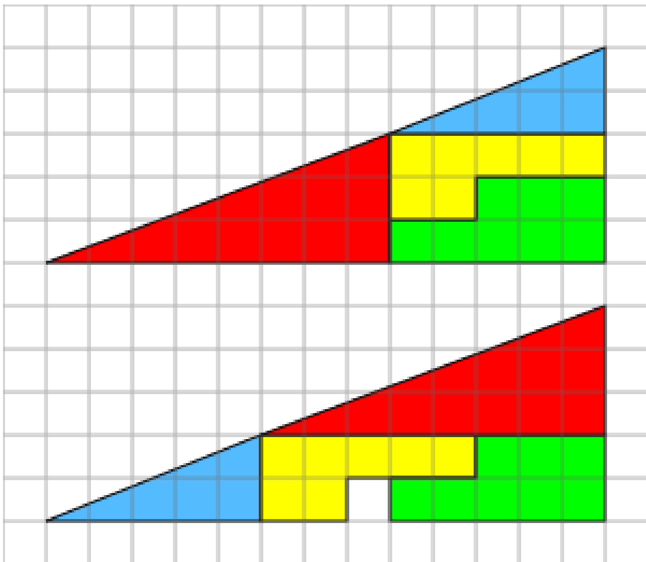


Figura 1 - Cadê o quadrado perdido?

1. A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?

____
____
____

2. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui?

____
____
____
____

3. Qual é sua explicação para o quadrado perdido?

Paradoxo de Hooper

O Paradoxo de Hooper é similar ao Paradoxo de Curry. Um quadrado de área 64 foi decomposto em quatro partes que foram remontadas formando um retângulo de área 65, conforme ilustra a Figura 2.

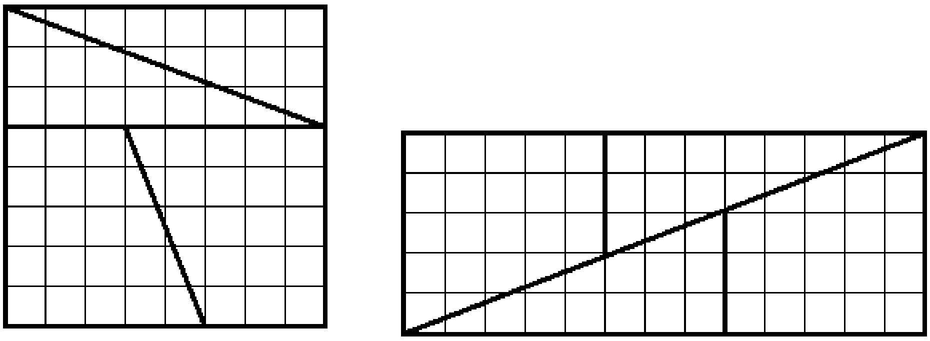


Figura 2 - Figuras equivalentes: 64=65?

4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Referências

[1] GARDNER, Martin. *Mathematics, magic and mystery*. New York: Dover, 1956.

[2] YOUTUBE. *Paradoxo de Curry*.

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XsAYs3nf8Jg

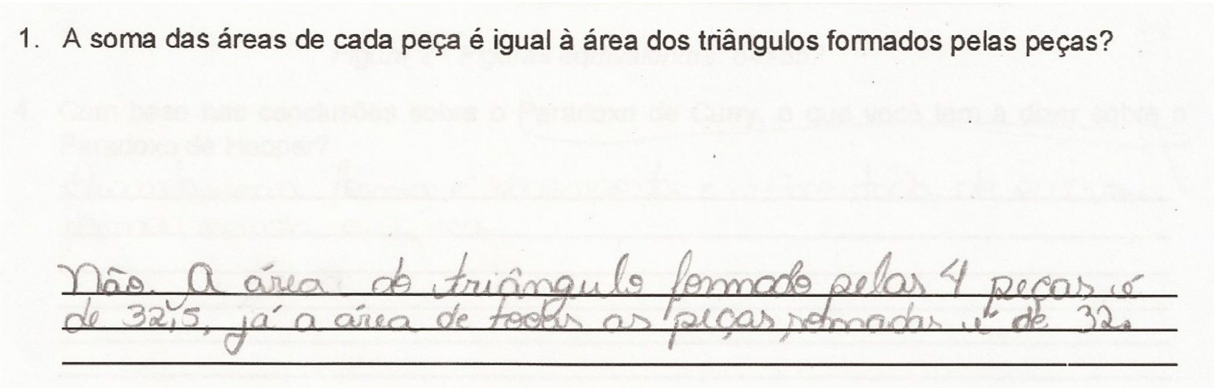
Acesso em 02/09/2016.

[3] WIKIPEDIA. *Paradoxo do quadrado perdido*.

Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5e/Missing_square_puzzle.svg/350px-Missing_square_puzzle.svg.png

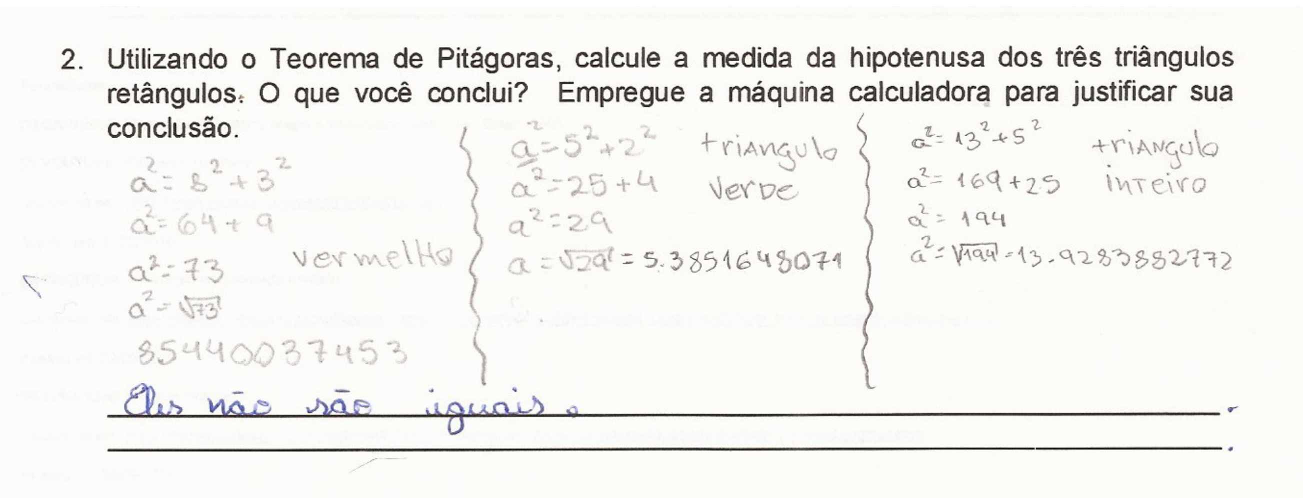
Acesso em 02/09/2016.

APÊNDICE D – ALGUMAS SOLUÇÕES APRESENTADAS PELOS ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL


1. A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?

Não. A área do triângulo formado pelas 4 peças é de 32,5, já a área de todas as peças somadas é de 32.

Figura D.1: Solução correta da questão 1 - Ensino Fundamental


2. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui? Empregue a máquina calculadora para justificar sua conclusão.

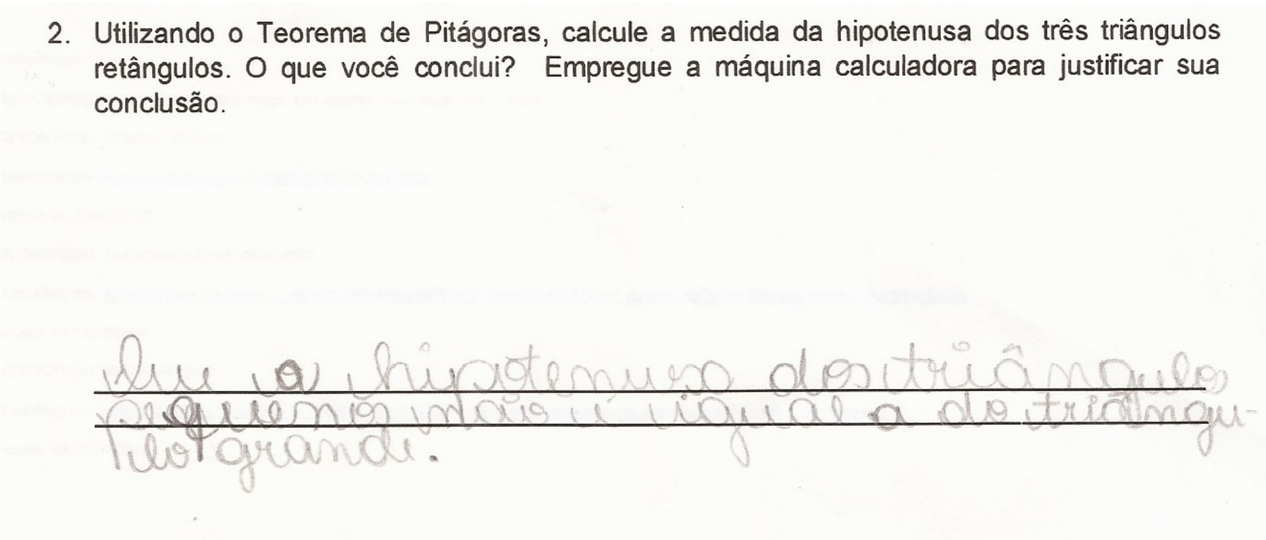
$a^2 = 8^2 + 3^2$
$a^2 = 64 + 9$
$a^2 = 73$ vermelho
$a^2 = \sqrt{73}$
85440037453

$a^2 = 5^2 + 2^2$ triangulo verde
$a^2 = 25 + 4$
$a^2 = 29$
$a = \sqrt{29} = 5.3851648071$

$a^2 = 13^2 + 5^2$ triangulo inteiro
$a^2 = 169 + 25$
$a^2 = 194$
$a^2 = \sqrt{194} = 13.9283882772$

Eles não são iguais.

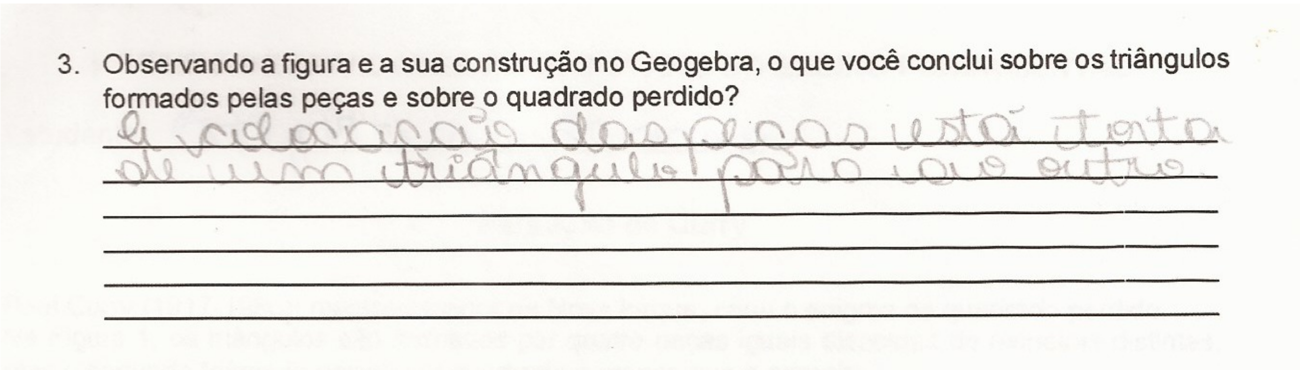
Figura D.2: Solução parcialmente correta da questão 2 - Ensino Fundamental



2. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui? Empregue a máquina calculadora para justificar sua conclusão.

Que a hipotenusa dos triângulos pequenos mais é igual a do triângu-lo grande.

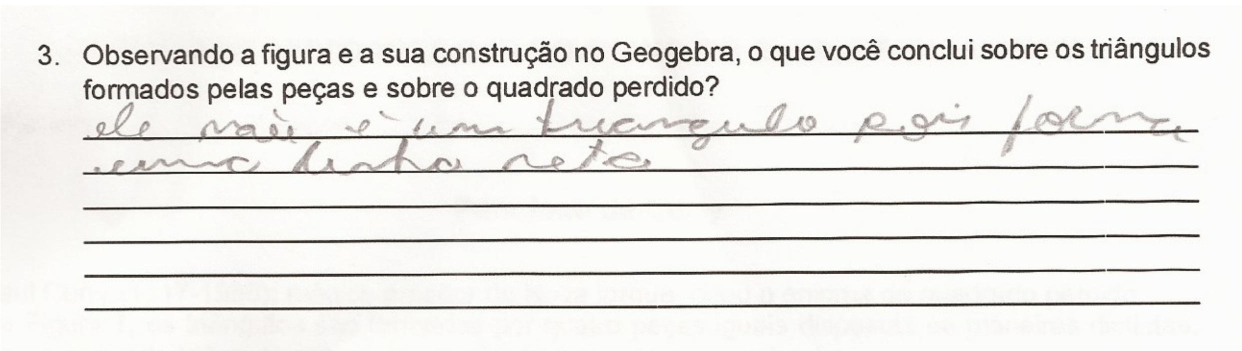
Figura D.3: Solução incorreta da questão 2 - Ensino Fundamental



3. Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?

A colocação das peças está torta de um triângulo para o outro

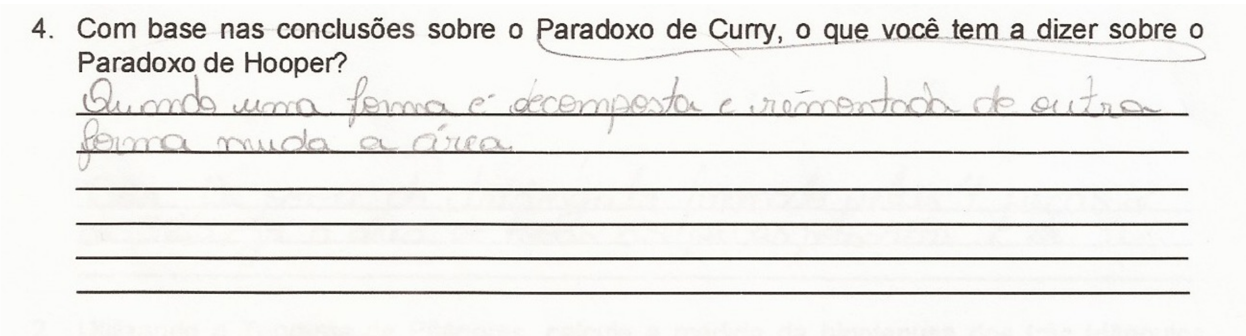
Figura D.4: Solução incorreta da questão 3 - Ensino Fundamental



3. Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?

ele não é um triangulo pois forma uma linha reta

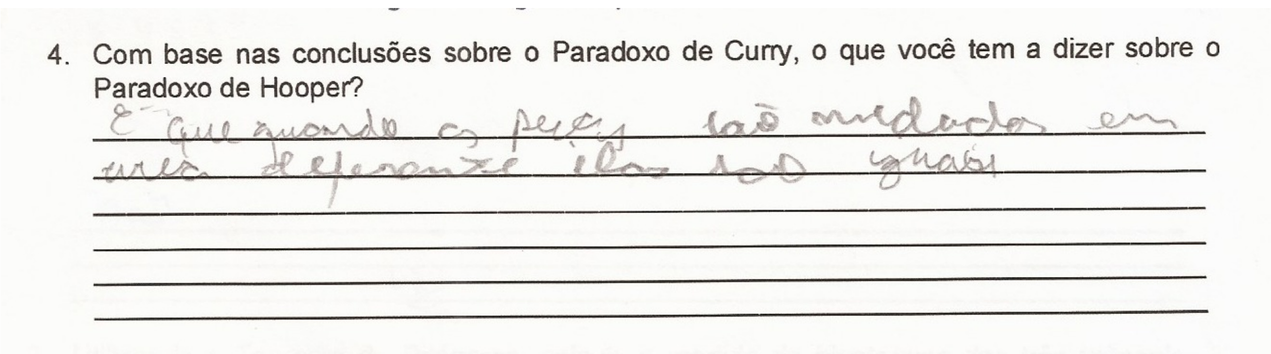
Figura D.5: Solucão incorreta da questão3 - Ensino Fundamental



4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Quando uma forma é decomposta e remontada de outra forma muda a área

Figura D.6: Solução incorreta da questão 4 - Ensino Fundamental

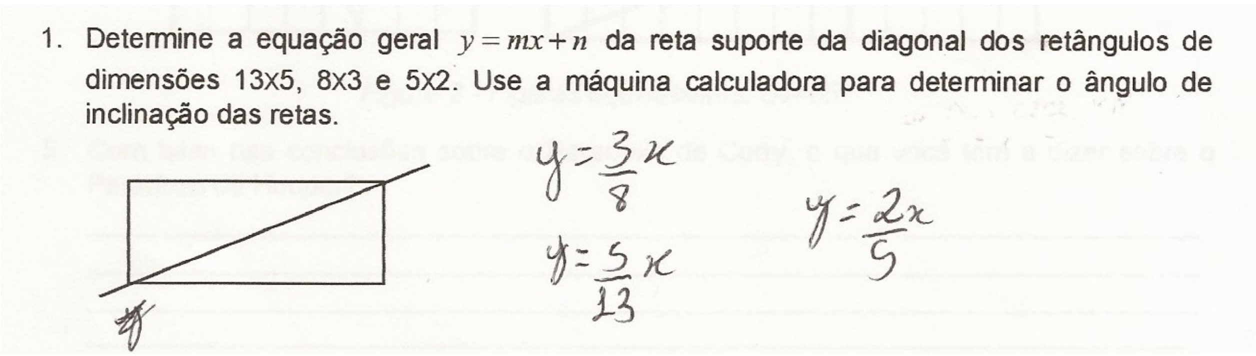


4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

É que quando as peças são mudadas em area deferenze elas são iguais

Figura D.7: Solução incorreta da questão 4 - Ensino Fundamental

APÊNDICE E – ALGUMAS SOLUÇÕES APRESENTADAS PELOS ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO



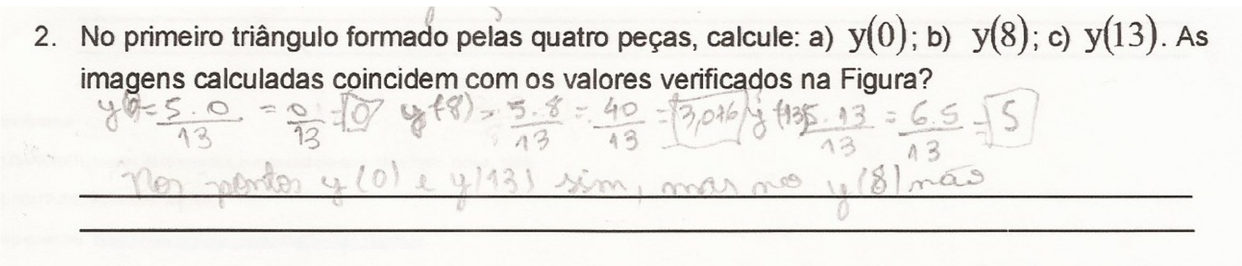
1. Determine a equação geral $y = mx + n$ da reta suporte da diagonal dos retângulos de dimensões 13x5, 8x3 e 5x2. Use a máquina calculadora para determinar o ângulo de inclinação das retas.

$y = \frac{3}{8}x$

$y = \frac{5}{13}x$

$y = \frac{2x}{5}$

Figura E.1: Solução parcialmente correta da questão 1 - Ensino Médio

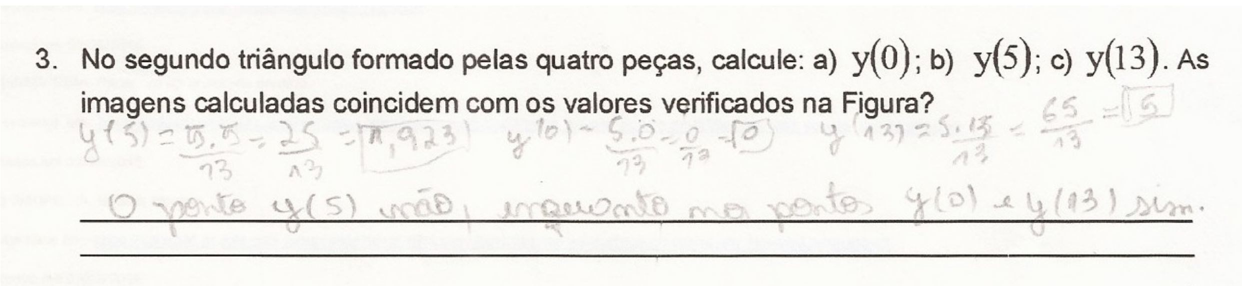


2. No primeiro triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a) $y(0)$; b) $y(8)$; c) $y(13)$. As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?

$y(0) = \frac{5.0}{13} = \frac{0}{13} = \boxed{0}$ $y(8) = \frac{5.8}{13} = \frac{40}{13} = \boxed{3{,}076}$ $y(13) = \frac{5.13}{13} = \frac{65}{13} = \boxed{5}$

Nos pontos y(0) e y(13) sim, mas no y(8) não

Figura E.2: Solução correta da questão 2 - Ensino Médio

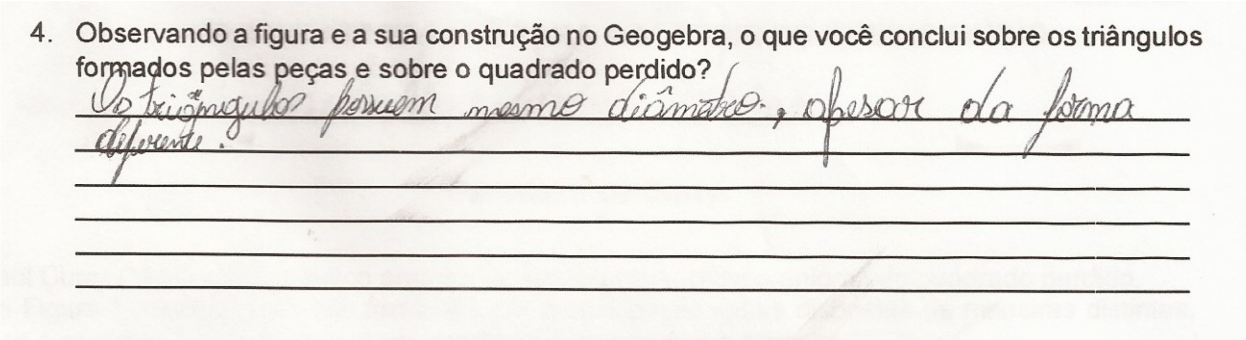


3. No segundo triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a) $y(0)$; b) $y(5)$; c) $y(13)$. As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na Figura?

$y(5) = \frac{5.5}{13} = \frac{25}{13} = \boxed{1{,}923}$ $y(0) = \frac{5.0}{13} = \frac{0}{13} = \boxed{0}$ $y(13) = \frac{5.13}{13} = \frac{65}{13} = \boxed{5}$

O ponto y(5) não, enquanto nos pontos y(0) e y(13) sim.

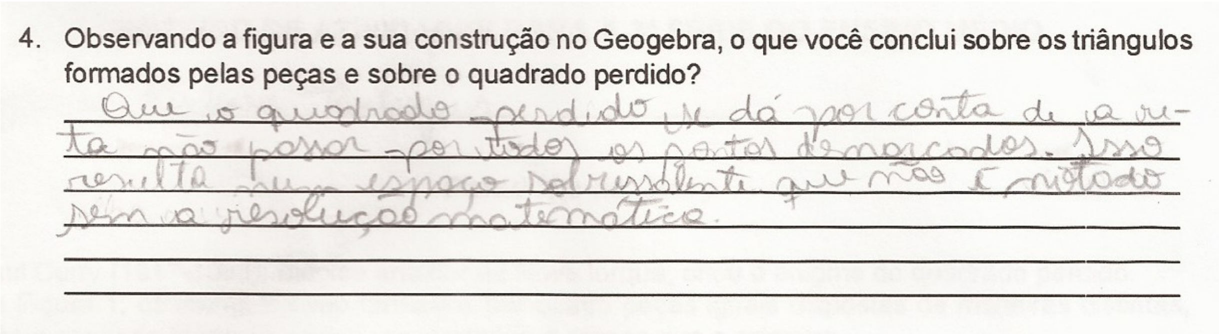
Figura E.3: Solução correta da questão 3 - Ensino Médio



4. Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?

Os triângulos possuem mesmo diâmetro, apesar da forma diferente.

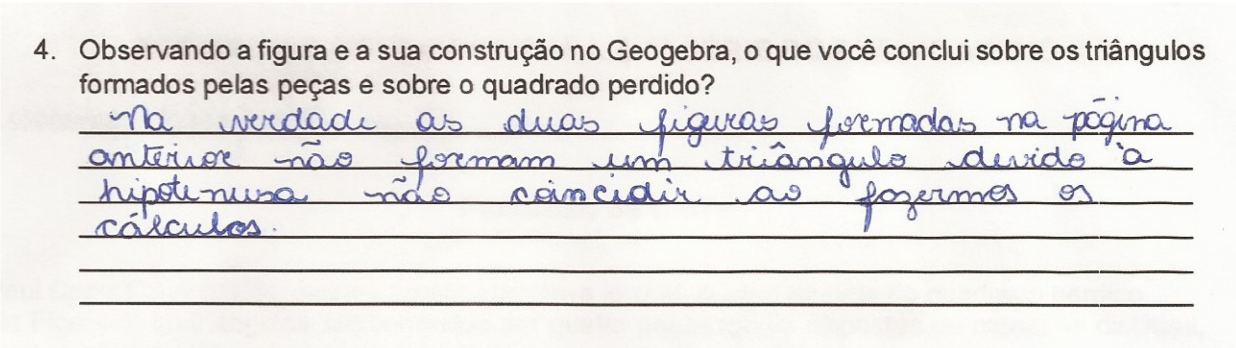
Figura E.4: Solução incorreta da questão 4 - Ensino Médio



4. Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?

Que o quadrado perdido se dá por conta de a reta não passar por todos os pontos demarcados. Isso resulta num espaço sobressalente que não é notado sem a resolução matemática.

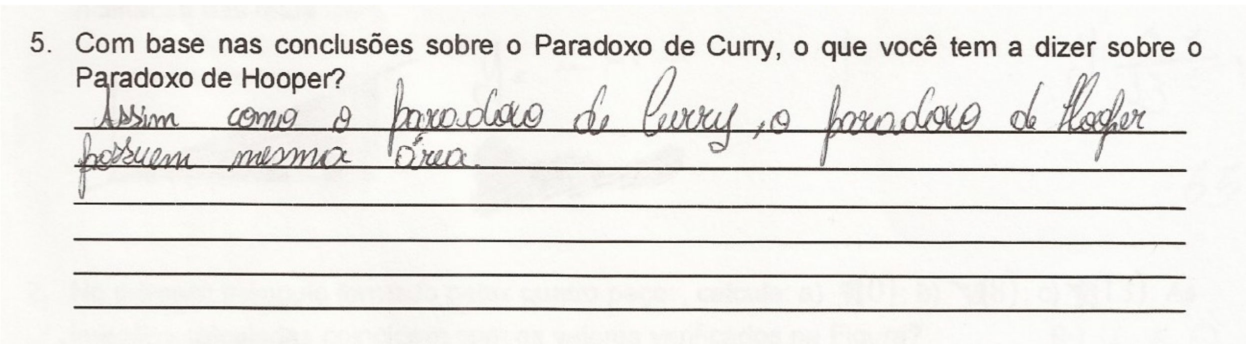
Figura E.5: Solução correta da questão 4 - Ensino Médio



4. Observando a figura e a sua construção no Geogebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?

Na verdade as duas figuras formadas na página anterior não formam um triângulo devido à hipotenusa não coincidir ao fazermos os cálculos.

Figura E.6: Solução correta da questão 4 - Ensino Médio



5. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Assim como o paradoxo de Curry, o paradoxo de Hooper possuem mesma área.

Figura E.7: Solução incorreta da questão 5 - Ensino Médio

5. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Que assim como no primeiro paradoxo por as retas não passarem pelos pontos, há variações de tamanho que possibilitam uma forma ter mais quadrados que a outra.

Figura E.8: Solução correta da questão 5 - Ensino Médio

5. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Nessa figura, as peças não se encaixam nas reta na figura de área 65.

Figura E.9: Solução correta da questão 5 - Ensino Médio

APÊNDICE F – ALGUMAS SOLUÇÕES APRESENTADAS PELOS ESTUDANTES DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

1. A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?

$AT_\Delta = \frac{13.5}{2} = \frac{65}{2}$ UA

$A_1 = \frac{8.3}{2} = \frac{24}{2} = 12$ UA

$A_2 = \frac{5.2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ UA

$A_3 = 2.2 + 1.3 = 7$ UA

$A_4 = 2.3 + 1.2 = 8$ UA

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$\Rightarrow 12 + 5 + 7 + 8$

$\Rightarrow 32$ UA

Não. A soma das áreas de cada peça é 32 unidades de área e a área dos triângulos formados é $\frac{65}{2}$ unidades de área.

Figura F.1: Solução correta da questão 1 - Licenciatura em Matemática

1. A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?

Não. Pois a área do segundo triângulo é menor que o primeiro pelo fato do segundo ter uma peça a mais.

Figura F.2: Solução incorreta da questão 1 - Licenciatura em Matemática

1. A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?

Não, pois a figura não é um triângulo

Figura F.3: Solução incorreta da questão 1 - Licenciatura em Matemática

2. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui?

I) $h=\sqrt{29}$; IV) $h=\sqrt{73}$; T) $h=\sqrt{194}$. É possível concluir que nenhuma dessas raízes é exata.

Figura F.4: Solução incorreta da questão 2 - Licenciatura em Matemática

2. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui?

1 $3^2+8^2=\sqrt{73}=8,544$

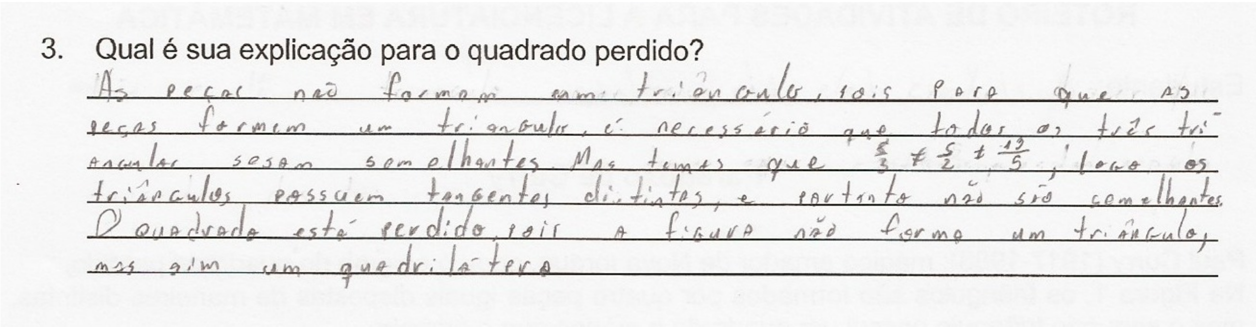
2 $2^2+5^2=\sqrt{29}=5,385$

Triângulo maior (T_1) => $5^2+13^2=\sqrt{194}=13,928$

$$\begin{array}{r} 8,544 \\ +\ 5,385 \\ \hline 13,929 \end{array}$$

A hipotenusa de T_1 não é a mesma da soma da hipotenusa 1 com 2.

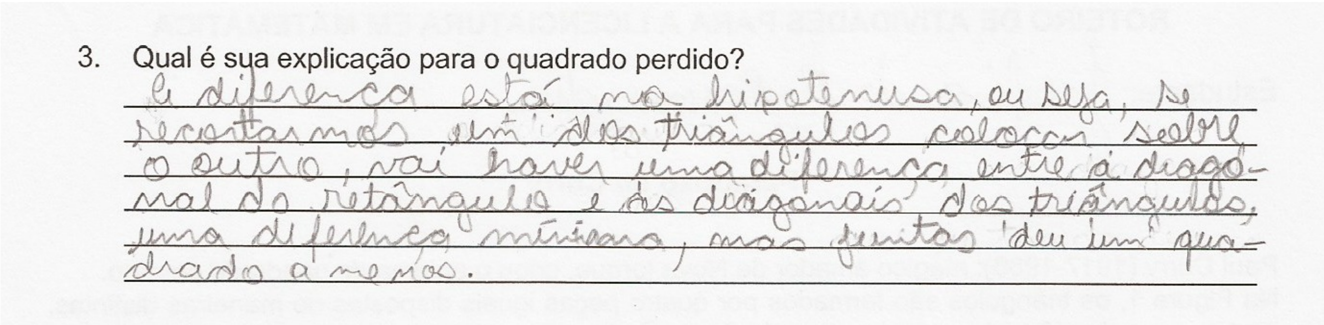
Figura F.5: Solução correta da questão 2 - Licenciatura em Matemática



3. Qual é sua explicação para o quadrado perdido?

As peças não formam um triângulo, pois para que as peças formem um triângulo, é necessário que todos os três triângulos sejam semelhantes. Mas temos que $\frac{5}{3} \neq \frac{5}{2} \neq \frac{13}{5}$, logo os triângulos possuem tangentes distintas, e portanto não são semelhantes. O quadrado está perdido, pois a figura não forma um triângulo, mas sim um quadrilátero

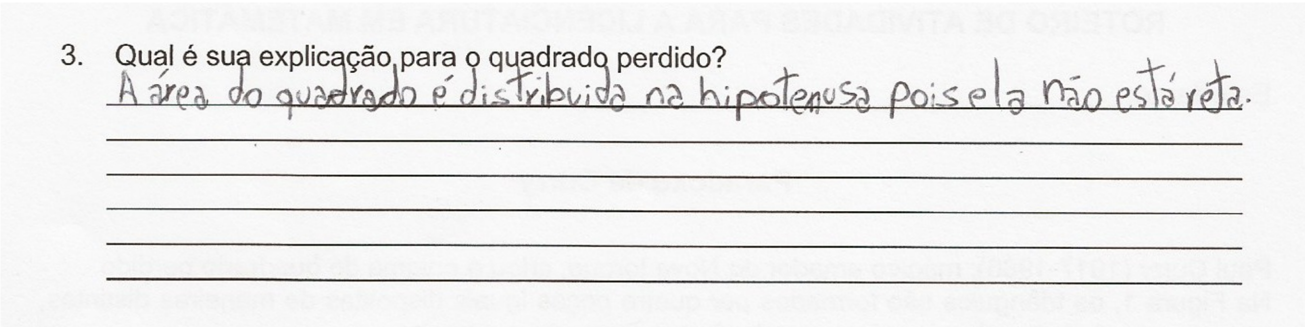
Figura F.6: Solução correta da questão 3 - Licenciatura em Matemática



3. Qual é sua explicação para o quadrado perdido?

A diferença está na hipotenusa, ou seja, se recortarmos um dos triângulos colocar sobre o outro, vai haver uma diferença entre a diagonal do retângulo e as diagonais dos triângulos, uma diferença mínima, mas juntas deu um quadrado a menos.

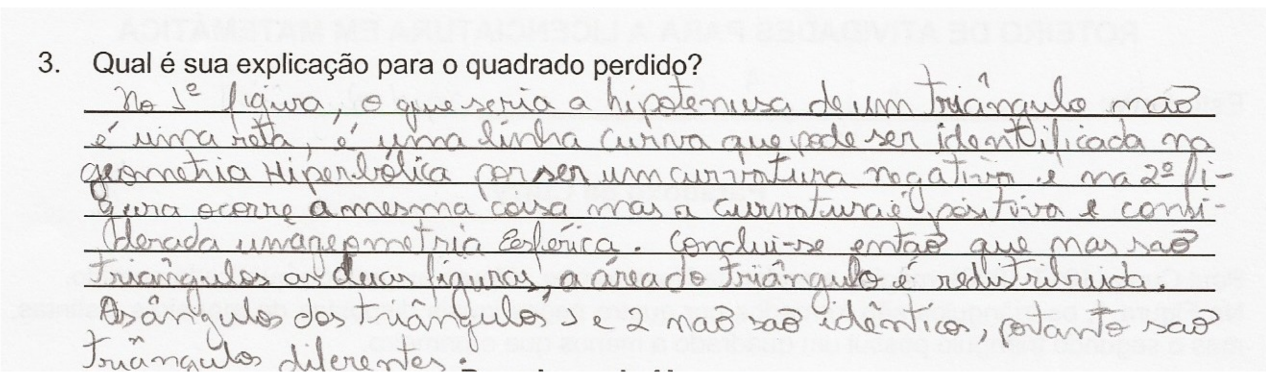
Figura F.7: Solução correta da questão 3 - Licenciatura em Matemática



3. Qual é sua explicação para o quadrado perdido?

A área do quadrado é distribuída na hipotenusa pois ela não está reta.

Figura F.8: Solução correta da questão 3 - Licenciatura em Matemática



3. Qual é sua explicação para o quadrado perdido?

Na 1ª figura, o que seria a hipotenusa de um triângulo não é uma reta, é uma linha curva que pode ser identificada na geometria Hiperbólica por ser uma curvatura negativa e na 2ª figura ocorre a mesma coisa mas a curvatura é positiva e considerada uma geometria Esférica. Conclui-se então que não são triângulos as duas figuras, a área do triângulo é redistribuída. Os ângulos dos triângulos 1 e 2 não são idênticos, portanto são triângulos diferentes.

Figura F.9: Solução incorreta da questão 3 - Licenciatura em Matemática

4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Que na segunda figura, o triângulo junto com o trapézio reto não forma um triângulo, mas sim um quadrilátero. Deste modo, a união da hipotenusa do triângulo com o trapézio não forma uma reta.

Figura F.10: Solução correta da questão 4 - Licenciatura em Matemática

4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

Podemos notar que a diagonal do retângulo não é bem a diagonal do retângulo. A linha grossa ajuda a esconder o quadradinho ganho.
A figura não é um retângulo.

Figura F.11: Solução correta da questão 4 - Licenciatura em Matemática

4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

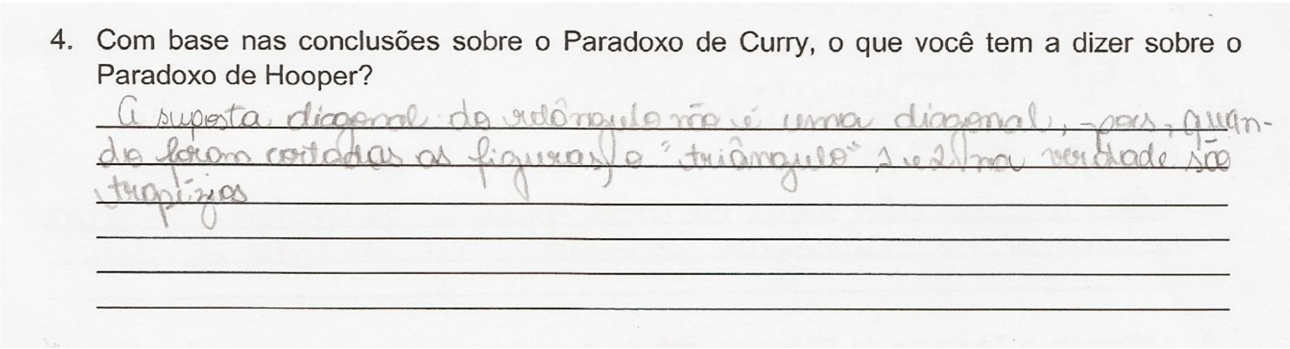
~~Existe~~ Há um "buraco" no meio da segunda figura

Figura F.12: Solução correta da questão 4 - Licenciatura em Matemática

4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

assim como no caso do Paradoxo de Curry, as tangentes dos triângulos que formam as figuras são diferentes, logo não são semelhantes e as hipotenusas não formam uma reta, logo não são triângulos

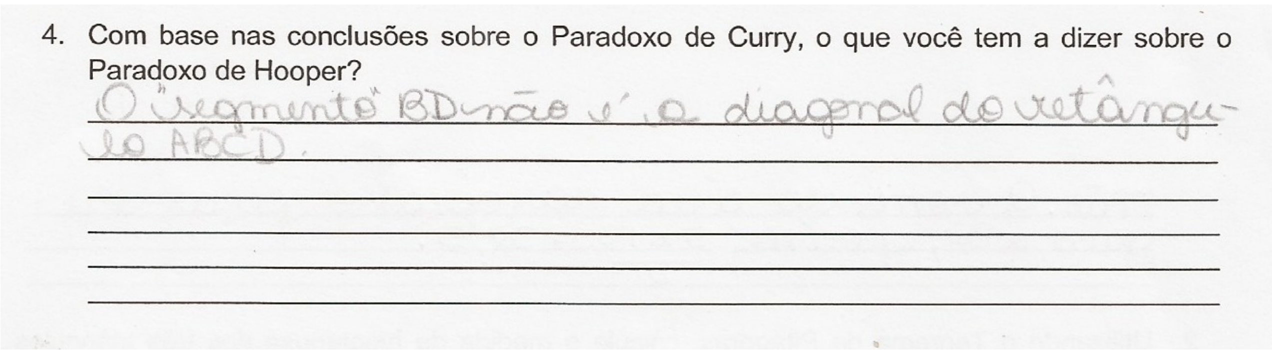
Figura F.13: Solução incorreta da questão 4 - Licenciatura em Matemática



4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

A suposta diagonal do retângulo não é uma diagonal, pois, quando foram cortadas as figuras, o "triângulo" 1 e 2 na verdade são trapézios

Figura F.14: Solução incorreta da questão 4 - Licenciatura em Matemática



4. Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?

O "segmento" BD não é a diagonal do retângulo ABCD.

Figura F.15: Solução incorreta da questão 4 - Licenciatura em Matemática