Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

# O Teorema de Pitágoras †

**por**

Amaro José de Oliveira Filho

**sob orientação do**

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Novembro/2016
Recife - PE

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

O48t Oliveira Filho, Amaro José de
O Teorema de Pitágoras /Amaro José de Oliveira Filho. -2016.
73f.

Orientador: Jorge Antonio Hinojosa Vera
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2016.
Inclui referências.

1. Teorema de Pitágoras 2. Demonstrações 3. Aplicações 4. Atividades didáticas I. Vera, Jorge Antonio Hinojosa, orient. II. Título

CDD 510

# O Teorema de Pitágoras

**por**

**Amaro José de Oliveira Filho**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DM - UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: escreva aqui sua área de concentração.

Aprovada por:

______________________________

**Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera** - UFRPE (Orientador)

______________________________

**Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva** - UFRPE

______________________________

**Prof. Dr. Vicente Francisco de Sousa Neto** - UNICAP

**Novembro/2016**

# Agradecimentos


1. Aos meus pais: Amaro José de Oliveira (in memoriam) e Edite Monteiro (in memoriam).

2. Ao Prof. Jorge Hinojosa, orientador e amigo.

3. Aos companheiros de turma José Constantino e Wildemar Marques.

# Resumo

A presente dissertação trata de uma pesquisa bibliográfica sobre as diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, suas aplicações na resolução de problemas e atividades didáticas utilizadas em sala de aula, temos também uma pequena nota histórica sobre Pitágoras e a escola pitagórica. As demonstrações aqui abordadas são de três tipos, as primeiras são as demonstrações "algébricas", estas são baseadas nas relações métricas no triângulo retângulo, as segundas são demonstrações "geométricas", estas são baseadas em comparações de áreas e as terceiras são demonstrações "vetoriais" baseadas no conceito de vetor e suas propriedades.

**Palavras-chave**: Teorema de Pitágoras, Demonstrações, Aplicações, Atividades didáticas.

# Abstract

This work is a bibliographical research on the various proofs of the Pythagoras theorem, its applications in solving problems and educational activities used in the classroom, we have also a small historical note about Pythagoras and the Pythagorean school. The proofs covered here are of three types, the first are the algebraic proofs are based on these metric relations in right triangle, the second are geometric proofs these are based on areas of comparisons and the third vector proofs are based on vector concept and its properties.

**Keywords**: Pythagoras theorem, Proofs, Applications, Educational activities.

# Lista de Figuras


1.1 Pitágoras . . . . . 14
1.2 Teorema de Pitágoras . . . . . 16
1.3 Triângulo retângulo isósceles . . . . . 17

2.1 Congruência de triângulos . . . . . 19
2.2 Semelhança de triângulos . . . . . 20
2.3 O círculo . . . . . 21
2.4 Ângulo central . . . . . 21
2.5 Ângulo inscrito . . . . . 22
2.6 Ângulo de segmento . . . . . 22
2.7 Tangente e secante . . . . . 23
2.8 Adição de vetores 1.1 . . . . . 27
2.9 Adição de vetores 1.2 . . . . . 27

3.1 Triângulo retângulo . . . . . 28
3.2 Demonstração de Bhaskara . . . . . 29
3.3 Demonstração 3 . . . . . 30
3.4 Demonstração de Kemper . . . . . 31
3.5 Demonstração de A. E. Colburn . . . . . 31
3.6 Demonstração de Lamy . . . . . 32
3.7 Demonstração 1 . . . . . 34
3.8 Demonstração de Garfield 1.2 . . . . . 35
3.9 Demonstração de Bhaskara 2 . . . . . 36
3.10 Demonstração de Euclides . . . . . 37
3.11 Demonstração de Hauff's work . . . . . 39
3.12 Demonstração de A. R. Colburn . . . . . 40

3.13 Demonstração de Stowell . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
3.14 Demonstração de Leonardo Da Vinci . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
3.15 quadrado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
3.16 Demonstração de Perigal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
3.17 Demonstração vetorial 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
3.18 Demonstração vetorial 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
3.19 Demonstração recíproca 1.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
3.20 Demonstração recíproca 1.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

4.1 Definição de cosseno . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
4.2 Lei dos cossenos 1.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
4.3 Lei dos cossenos 1.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
4.4 Teorema de Apolônio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
4.5 Prova do Teorema de Apolônio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
4.6 O problema de Hipócrates . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
4.7 A distância entre dois pontos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
4.8 A condição de perpendicularismo na Geometria Analítica . . . . . . . . . . 57
4.9 Generalizando o Teorema de Pitágoras . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
4.10 O cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo . . . . . . . . . . . . 59
4.11 Uma reta perpendicular a um plano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
4.12 Uma generalização do Teorema de Pitágoras no espaço . . . . . . . . . . . 60

5.1 Formando a figura 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
5.2 Formando o quebra-cabeça 1.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
5.3 Formando o quebra-cabeça 1.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
5.4 Formando a figura 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
5.5 Formando a figura 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
5.6 Comparando as áreas 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
5.7 Comparando as áreas 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
5.8 Formando a figura 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

# Sumário


**1 Notas Históricas** **14**

1.1 Pitágoras . . . . . . 14

1.2 O Teorema de Pitágoras . . . . . . 15

**2 Assuntos preliminares** **18**

2.1 Congruência de triângulos . . . . . . 18

2.2 Semelhança de triângulos . . . . . . 19

2.3 O círculo . . . . . . 20

2.4 Área de algumas figuras planas . . . . . . 23

2.4.1 Área do retângulo (axioma) . . . . . . 23

2.4.2 Área do paralelogramo . . . . . . 23

2.4.3 Área do triângulo . . . . . . 24

2.4.4 Área do trapézio . . . . . . 24

2.4.5 Área do círculo . . . . . . 24

2.4.6 Relação entre semelhança e área . . . . . . 24

2.5 Vetores no plano . . . . . . 24

2.5.1 Adição de vetores . . . . . . 26

2.5.2 Produto interno . . . . . . 27

**3 Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras** **28**

3.1 Demonstrações algébricas . . . . . . 28

3.1.1 Demonstração 1 (Bhaskara II) . . . . . . 28

3.1.2 Demonstração 2 . . . . . . 30

3.1.3 Demonstração 3 (C. J. Kemper) . . . . . . 30

3.1.4 Demonstração 4 (A. E. Colburn) . . . . . . 31

3.1.5 Demonstração 5 (R. P. Lamy) . . . . . . . . . . 32
3.1.6 Demonstração 6 (Heron) . . . . . . . . . . 33
3.2 Demonstrações geométricas . . . . . . . . . . 34
3.2.1 Demonstração 1 ("Pitágoras") . . . . . . . . . . 34
3.2.2 Demonstração 2 (Garfield) . . . . . . . . . . 35
3.2.3 Demonstração 3 (Bhaskara II) . . . . . . . . . . 35
3.2.4 Demonstração 4 (Euclides) . . . . . . . . . . 36
3.2.5 Demonstração 5 (Hauff's work) . . . . . . . . . . 38
3.2.6 Demonstração 6 (A. R. Colburn) . . . . . . . . . . 40
3.2.7 Demonstração 7 (T. P. Stowell) . . . . . . . . . . 41
3.2.8 Demonstração 8 (Leonardo Da Vinci) . . . . . . . . . . 41
3.2.9 Demonstração 9 (Perigal) . . . . . . . . . . 44
3.3 Algumas demonstrações vetoriais . . . . . . . . . . 49
3.3.1 Demonstração 1 . . . . . . . . . . 49
3.3.2 Demonstração 2 . . . . . . . . . . 49
3.4 A recíproca do Teorema de Pitágoras . . . . . . . . . . 50
3.4.1 Demonstração 1 . . . . . . . . . . 50
3.4.2 Demonstração 2 . . . . . . . . . . 51

**4 Aplicações do Teorema de Pitágoras e temas relacionados 52**
4.1 A lei dos cossenos . . . . . . . . . . 52
4.2 O Teorema de Apolônio . . . . . . . . . . 54
4.3 O problema de Hipócrates . . . . . . . . . . 55
4.4 A distância entre dois pontos na Geometria Analítica . . . . . . . . . . 56
4.5 A condição de perpendicularismo na Geometria Analítica . . . . . . . . . . 57
4.6 Generalizando o Teorema de Pitágoras . . . . . . . . . . 58
4.7 O cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo . . . . . . . . . . 58
4.8 Uma generalização do Teorema de Pitágoras no espaço . . . . . . . . . . 59
4.9 Ternos pitagóricos . . . . . . . . . . 61
4.10 Problemas . . . . . . . . . . 62
4.10.1 Profmat: exame nacional de acesso 2013 . . . . . . . . . . 62
4.10.2 Profmat: exame nacional de acesso 2014 . . . . . . . . . . 62
4.10.3 XVIII Olimpíadas Portuguesas de Matemática . . . . . . . . . . 64

**5 Atividades didáticas sobre o Teorema de Pitágoras** **66**
5.1 Atividade 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
5.2 Atividade 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
5.3 Atividade 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
5.4 Atividade 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
5.5 Atividade 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
5.6 Considerações finais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

**Referências Bibliográficas** **73**

# Introdução

> A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de joia preciosa.
>
> KEPLER, [4]

O Teorema de Pitágoras é um dos mais importante teorema da Geometria Plana devido as aplicações na resolução de problemas e ramificações como o teorema de Fermat-Wiles, permitindo o desenvolvimento de sofisticadas ferramentas que enriqueceram a matemática moderna, sendo assim, recopilamos algumas demonstrações e aplicações e elaboramos um trabalho para divulgá-lo um pouco mais. As demonstrações, aqui apresentadas, foram enriquecidas com mais detalhes para facilitar o entendimento. Acreditamos que algumas dessas demonstrações poderiam ser trabalhadas em sala de aula, dependendo dos pré-requisitos que possui o aluno, o professor pode escolher aquelas que melhor se adaptem ao momento, proporcionando um aprofundamento do conhecimento dos alunos em relação ao tema e que possam atraí-los para a sua construção.

No primeiro capítulo, abordamos uma pequena nota histórica sobre Pitágoras e sua escola pitagórica, em seguida tratamos sobre o surgimento do Teorema de Pitágoras. É conveniente esclarecer que a aplicação desse teorema, já era conhecida bem antes de Pitágoras, mas sua demonstração é atribuída à escola pitagórica.

No segundo capítulo, tratamos de alguns assuntos que servirão de pré-requisito para melhorar a compreensão dos capítulos seguintes, cabe ressaltar que leitores familiarizados com os conteúdos aqui abordados, podem iniciar a leitura no capítulo seguinte.

No terceiro capítulo, abordamos algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, baseado no livro de Elisha Scott Loomis (1852-1940), [12] essas demonstrações foram classificadas em "algébricas", "geométricas"e "vetoriais". As provas "algébricas"são as demonstrações baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos, as provas "geométricas" são as demonstrações baseadas em comparações de áreas e as "vetoriais"são as demonstrações em que são aplicadas o conceito de vetor e suas propriedades. Há certas provas abordadas como demonstrações "algébricas", por exemplo as demonstrações 4 e 5, que poderiam ser consideradas como demonstrações "geométricas", nós mantivemos essas demonstrações como "algébricas"obedecendo a classificação utilizada no livro texto [12]. Temos também nesse capítulo duas demonstrações da recíproca do Teorema de Pitágoras.

No capítulo quatro, incluímos algumas aplicações do Teorema de Pitágoras, tais como: lei dos cossenos, distância entre dois pontos, o cálculo da de diagonal de um paralelepípedo, etc e também problemas de concurso em que é utilizado o teorema.

No capítulo cinco, incluímos algumas atividades pedagógicas que podem ser trabalhadas na sala de aula e facilitem a compreensão desse teorema, as atividades citadas são baseadas em comparações de áreas e foram elaboradas para os alunos do nono ano do ensino fundamental, mas podem ser aplicadas em outro nível de ensino, desde que sejam trabalhados os conhecimentos prévios.

# Capítulo 1

# Notas Históricas

## 1.1 Pitágoras

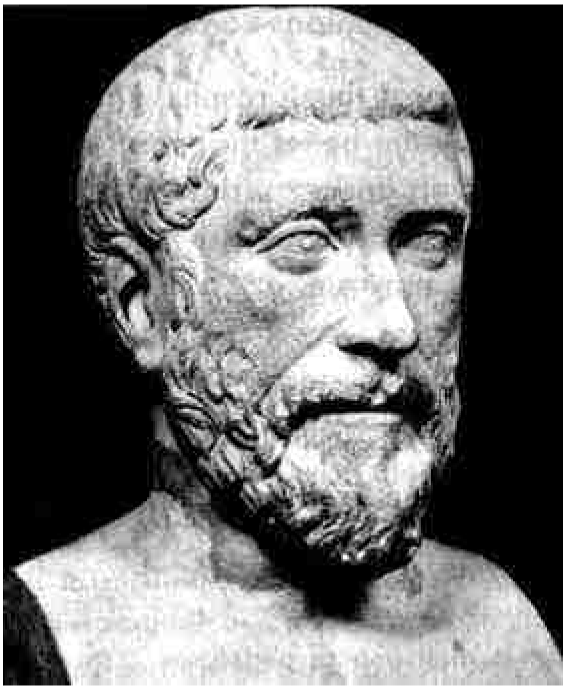


Figura 1.1: Pitágoras

Pitágoras (c.569-c.480 a.C.) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto onde 50 anos antes tinha nascido Tales. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era cinquenta anos mais jovem do que este e morava perto de Mileto local onde vivia Tales. Foi a partir das ideias desses dois grandes personagens que a Matemática se inicia como ciência e pôde se desenvolver enormemente nos séculos seguintes.

Pitágoras fez várias viagens pelo Egito, Babilônia e possivelmente indo até a Índia, durante suas peregrinações ele evidentemente absorveu não só informação matemática e astronômica como também muitas ideias religiosas, foi praticamente contemporâneo de Buda, Confúncio e Lao-tse, de modo que esse século foi crítico tanto para o desenvolvimento da religião bem como da Matemática.

Quando Pitágoras retornou a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa, então decidiu emigrar para Crotona na costa sudeste do que agora é a Itália. Lá ele fundou a famosa escola pitagórica, que além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias.

O fato de Pitágoras permanecer uma figura muito obscura se deve em parte a perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, mas se perderam, outra dificuldade que caracteriza a sua figura era da escola pitagórica ser uma sociedade secreta, conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola, dessa forma não se costuma falar da obra de Pitágoras, mas nas contribuições dos pitagóricos apesar de que na antiguidade era dado todo o crédito ao mestre.

Com o passar do tempo à influência e as tendências da escola pitagórica tornaram-se tão grande que o governo da época decidiu destruir os prédios da escola fazendo com que a irmandade se dispersasse. Segundo um relato Pitágoras fugiu para Tarento donde se dirigiu a Metaponto, e aí perdeu a vida numa segunda revolta. Cerca de 500 a.C., os pitagóricos, contudo voltaram a reunir-se e sua sociedade ainda teve existência por mais alguns séculos.

## 1.2 O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é uma relação métrica entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, que é um triângulo que tem um ângulo de $90^o$, o lado oposto a esse ângulo é denominado hipotenusa e tem maior comprimento os lados menores chamam-se catetos. Seu enunciado é da seguinte forma:

**Teorema 1.1** *A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados são cada um dos catetos desse mesmo triângulo.*

Se indicarmos a medida da hipotenusa por $a$ e os catetos por $b$ e $c$, o Teorema de Pitágoras afirma que vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

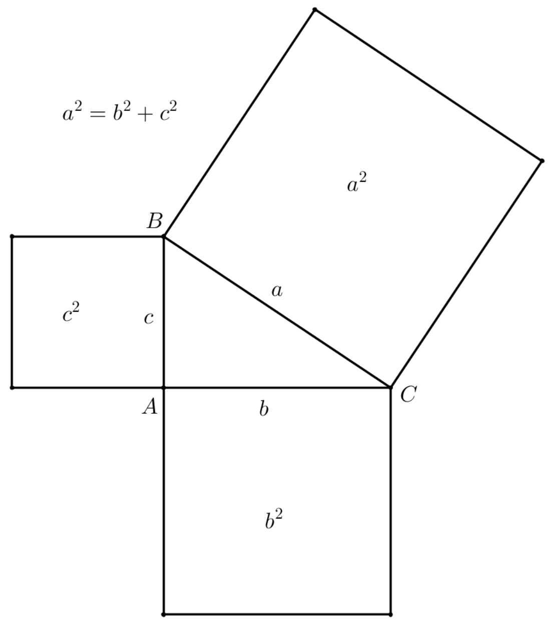



Figura 1.2: Teorema de Pitágoras

A demonstração desse teorema pelos pitagóricos foi muito lenta e penosa. Inicialmente eles conheciam o fato para os triângulos que têm lados proporcionais a 3, 4 e 5, como também para o triângulo de lados 5, 12 e 13.

Um resultado mais geral foi obtido para o triângulo retângulo isósceles, que tem a seguinte demonstração. Considere um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede $a$ e os catetos $b$, construímos quadrados de lados $a$ e $b$ sobre seus lados. Traçamos os segmentos $MA$, $AQ$, $BR$ e $CS$ como ilustra a figura seguinte.

Os triângulos numerados são todos triângulos retângulos isósceles iguais de hipotenusa igual a diagonal do quadrado de lado $b$ e lados iguais a $b$, daí temos $a^2 = b^2 + b^2$.

No caso geral, segundo relatos da História da Matemática não se sabe a demonstração elaborada na escola pitagórica nem se sabe se foi Pitágoras ou alguém da escola, mas tudo

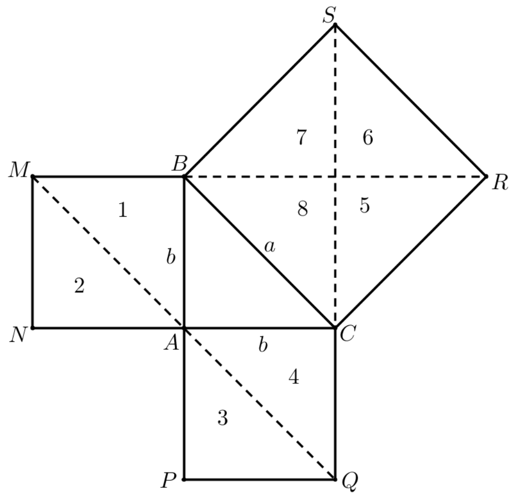



Figura 1.3: Triângulo retângulo isósceles

indica que a primeira demonstração surgiu na escola pitagórica, segundo os historiadores acredita-se que esta demonstração é baseada em comparações de áreas.

Existem várias demonstrações do Teorema de Pitágoras, por exemplo na literatura o livro mais conhecido é de Elisha Scott Loomis (1852-1940), professor de Matemática em Cleveland, Ohio (estados Unidos) [6] e [15]. O título do livro é The Pythagorean Proposition cuja tradução literal é A Proposição de Pitágoras. Ele colecionou demonstrações desse teorema durante vinte anos, de 1907 a 1927 agrupo-as formando o livro citado. A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações, a segunda edição publicada em 1940 o número de demonstrações foi aumentado para 370.

A recíproca do Teorema de Pitágoras também é verdadeira, isto é: um triângulo possui lados medindo $a$, $b$ e $c$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede $a$. Ela será apresentada no capítulo três.

# Capítulo 2

# Assuntos preliminares

Neste capítulo serão abordados alguns assuntos prévios para a melhor compreensão das questões dadas nos capítulos seguintes. Os leitores familiarizados com esses conteúdos podem começar a leitura no capítulo seguinte. Os livros pesquisados para esses conteúdos foram [3], [7], [11] e [14].

## 2.1 Congruência de triângulos

**Definição 2.1** *Diremos que dois segmentos $AB$ e $CD$ são congruentes quando eles tem o mesmo comprimento; diremos que dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida.*

Assim, as propriedades de igualdade de números passam a valer para a congruência de segmentos e ângulos.

Para simplificar nossa notação, iremos utilizar o símbolo " $=$ " para significar congruentes. Assim, $AB = CD$ deve ser lido como $AB$ é *congruente* a $CD$ e $\hat{A} = \hat{B}$ deve ser lido como *ângulo $A$ congruente com ângulo $B$*.

**Definição 2.2** *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Assim, se $ABC$ e $DEF$ são dois triângulos congruentes e se

$$A \longleftrightarrow D, \qquad B \longleftrightarrow E, \qquad C \longleftrightarrow F$$

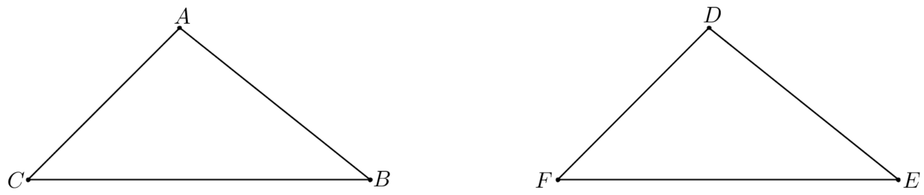



Figura 2.1: Congruência de triângulos

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

$$\begin{array}{ccc} AB = DE & BC = EF & AC = DF \\ \hat{A} = \hat{D} & \hat{B} = \hat{E} & \hat{C} = \hat{F} \end{array}$$

Escreveremos $ABC = DEF$ para significar que os triângulos $ABC$ e $DEF$ são congruentes e que a correspondência entre os vértices leva $A$ em $D$, $B$ em $E$ e $C$ em $F$.

Existem três casos de congruências, sendo que o primeiro caso é um axioma.

**Axioma 2.1 (1º caso de congruência de triângulos)** *Dados dois triângulos $ABC$ e $DEF$, se $AB = DF$, $AC = DE$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então $ABC = DEF$.*

A partir deste axioma são provados os dois seguintes casos:

**Teorema 2.1 (2º caso de congruência de triângulos)** *Dados dois triângulos $ABC$ e $DEF$, se $AB = DE$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC = DEF$.*

**Teorema 2.2 (3º caso de congruência de triângulos)** *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Estes três casos de congruência de triângulos também são conhecidos respectivamente por **LAL**, **ALA** e **LLL**.

## 2.2 Semelhança de triângulos

**Definição 2.3** *Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

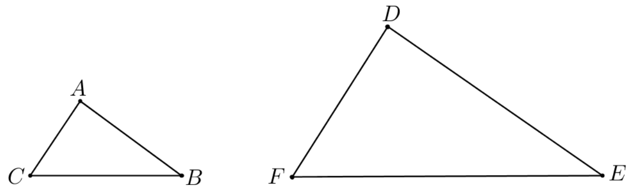



Figura 2.2: Semelhança de triângulos

Portanto, se $ABC$ e $DEF$ são dois triângulos semelhantes e se a correspondência entre seus vértices é:

$$A \longleftrightarrow D, \qquad B \longleftrightarrow E \quad \text{e} \quad C \longleftrightarrow F,$$

então valem as relações:

$$\hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{F} \quad \text{e} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamada razão de proporcionalidade entre os dois triângulos.

Escreveremos $ABC \sim DEF$ para denotar que os triângulos $ABC$ e $DEF$ são semelhantes, com a correspondência entre seus vértices $A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow E$ e $C \longleftrightarrow F$.

Existem três casos de semelhança de triângulos.

**Teorema 2.3 (1º caso de semelhança de triângulos)** *Dados dois triângulos $ABC$ e $DEF$, se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC \sim DEF$.*

**Teorema 2.4 (2º caso de semelhança de triângulos)** *Se, em dois triângulos $ABC$ e $DEF$ tem-se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, então $ABC \sim DEF$.*

**Teorema 2.5 (3º caso de semelhança de triângulos)** *Se, em dois triângulos $ABC$ e $DEF$ tem-se $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$, então $ABC \sim DEF$.*

Estes três casos de semelhança de triângulos também são conhecidos respectivamente por **AA**, **LAL** e **LLL**.

## 2.3 O círculo

Nosso ponto de partida nesta seção é a definição de círculo.

**Definição 2.4** *Seja $A$ um ponto do plano e $r$ um número real positivo. O círculo de centro $A$ e raio $r$ é o conjunto constituídos por todos os pontos $B$ do plano, tais que $AB = r$.*

Também chamaremos de *raio* ao segmento que une o centro do círculo a qualquer de seus pontos. O segmento ligando dois pontos de um círculo será denominado de *corda*. Toda corda que passa pelo centro do círculo é um *diâmetro*. Também chamaremos de diâmetro à distancia $2r$.

Sejam $A$ e $B$ dois pontos distintos de um círculo. Tracemos a reta que passa por estes dois pontos. Ela separa o plano em dois semi-planos. Cada um desses semi-planos contém uma parte do círculo. Estas partes são denominadas de *arcos* determinados pelos pontos $A$ e $B$. Quando $A$ e $B$ são extremidades de um diâmetro, estes arcos são denominados de *semicírculos*.

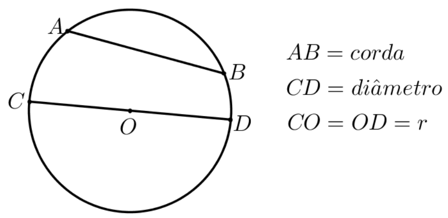



Figura 2.3: O círculo

**Definição 2.5** *Se $O$ é o centro do círculo então $A\hat{O}B$ é chamado de ângulo central. A medida em graus do arco menor determinado pelos pontos $A$ e $B$ é por definição a medida do ângulo central $A\hat{O}B$. A medida em graus do arco maior é definida como sendo*

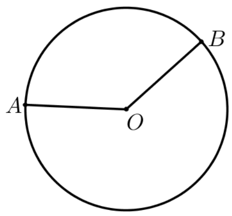



Figura 2.4: Ângulo central

*$360° - a°$, onde $a°$ é a medida em graus do arco menor. No caso em que $AB$ é um diâmetro a medida dos dois arcos é $180°$.*

**Definição 2.6** *Um ângulo se denomina inscrito em um círculo quando seu vértice $A$ é um ponto do círculo e seus lados cortam o círculo em pontos $B$ e $C$ distintos do ponto $A$.*

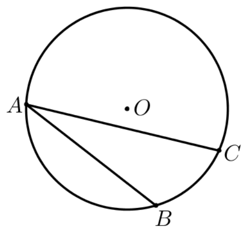



Figura 2.5: Ângulo inscrito

Na definição acima, os pontos $B$ e $C$ determinam dois arcos. O arco que não contém o ponto $A$ é chamado de arco correspondente ao ângulo inscrito. Diremos também que o ângulo subtende o arco.

**Proposição 2.1** *Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.*

Dizemos que um círculo e uma reta são *tangentes* ou, ainda que a reta é tangente ao círculo se tiverem exatamente um ponto em comum. Esse ponto em comum é denominado o *ponto de tangência* da reta e o círculo.

**Definição 2.7** *Denomina-se ângulo de segmento ao ângulo cujo vértice é um ponto de um círculo e seus lados são uma corda e o outro a tangente ao círculo no vértice do ângulo.*

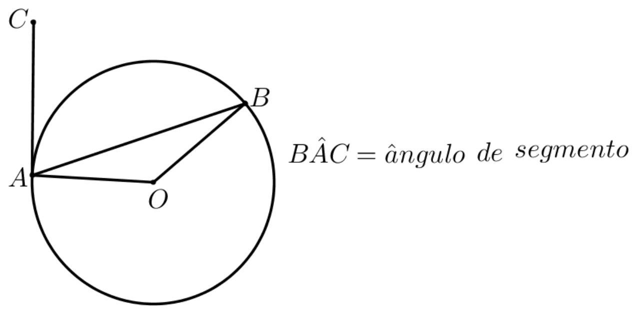



Figura 2.6: Ângulo de segmento

**Proposição 2.2** *Um ângulo de segmento tem a mesma medida que a metade do arco compreendido entre seus lados.*

**Teorema 2.6** *Sejam $AB$ e $CD$ cordas distintas de um mesmo círculo que se intersectam num ponto $P$. Então, $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.*

**Teorema 2.7** *Se $A$, $B$, $C$ e $P$ são pontos distintos no plano e $B$ pertence a $AP$, $C$ não pertence a reta $AB$, então $PA \cdot PB = PC^2$ se, e só se, o círculo que passa pelos pontos $A$, $B$ e $C$ for tangente à reta $PC$ em $C$.*

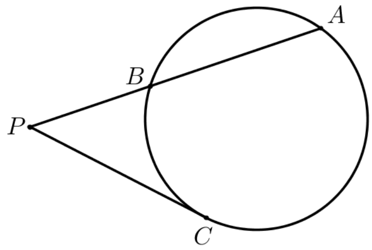



Figura 2.7: Tangente e secante

Os resultados desta seção encontram-se nos livros [3] e [14].

## 2.4 Área de algumas figuras planas

Daremos a seguir algumas proposições relativa a área de figuras planas, cabe ressaltar que a área do retângulo é dada como axioma. As demonstrações das áreas são tratadas nas fontes bibliográficas [3], [11] e [14].

### 2.4.1 Área do retângulo (axioma)

Um retângulo $ABCD$ de lados $a$ e $b$ tem área: $A(ABCD) = a \cdot b$.

### 2.4.2 Área do paralelogramo

A área de um paralelogramo $ABCD$ de base $b$ e altura $h$ é dada por: $A(ABCD) = b \cdot h$.

### 2.4.3 Área do triângulo

A área de um triângulo $ABC$ de base $b$ e altura $h$ é dada por: $A(ABC) = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

### 2.4.4 Área do trapézio

A área de um trapézio $ABCD$ qualquer de bases $AB = a$, $CD = b$ e altura $h$ é dada por: $A(ABCD) = \dfrac{(a+b) \cdot h}{2}$.

### 2.4.5 Área do círculo

Vamos designar a área de um círculo por $A_c$. Se tivermos um círculo de raio $r$ sua área é dada por $A_c = \pi r^2$, onde $\pi$ é um número real que vale aproximadamente $3,14$.

### 2.4.6 Relação entre semelhança e área

**Teorema 2.8** *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.*

## 2.5 Vetores no plano

**Definição 2.8** ***Segmentos orientados*** *Um segmento orientado é um par ordenado $(A, B)$ de pontos do plano. $A$ é dito origem, $B$ extremidade do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma $(A, A)$ são ditos nulos.*

**Definição 2.9** *Dizemos que os segmentos orientados $(A, B)$ e $(C, D)$ têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos $AB$ e $CD$ têm o mesmo comprimento (medida).*

- *Suponha que os segmentos orientados $(A, B)$ e $(C, D)$ são não nulos. Então, dizemos que $(A, B)$ e $(C, D)$ têm a mesma direção se $AB$ e $CD$ são paralelos. Nesse caso também dizemos que $(A, B)$ e $(C, D)$ são paralelos.*

- *Suponha que $(A, B)$ e $(C, D)$ têm mesma direção.*

(a) *Se as retas suporte dos segmentos $AB$ e $CD$ são distintas, dizemos que $(A, B)$ e $(C, D)$ tem mesmo sentido caso os segmentos $AC$ e $BD$ tenham interseção vazia. Caso $AC \cap BD \neq \phi$, dizemos que $(A, B)$ e $(C, D)$ têm sentido contrário.*

(b) *Segmentos* $AB$ *e* $CD$ *coincidem, considere* $(A', B')$ *tal que* $A'$ *não pertença a reta suporte de* $AB$ *e* $(A', B')$ *tenha a mesma direção, e mesmo sentido que* $(A, B)$. *Então dizemos que* $(A, B)$ *e* $(C, D)$ *têm mesmo sentido se* $(A', B')$ *e* $(C, D)$ *tem mesmo sentido. Se não dizemos que* $(A, B)$ *e* $(C, D)$ *têm sentido contrário.*

**Definição 2.10** *Dizemos que os segmentos orientados* $(A, B)$ *e* $(C, D)$ *do plano são equipolentes, e escrevemos* $(A, B) \equiv (C, D)$, *se um dos casos seguintes ocorrer:*

(a) *ambos são nulos;*

(b) *nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.*

A relação de equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados do plano. Isto é:

(a) $\equiv$ é reflexiva. Isto é, $(A, B) \equiv (A, B)$;

(b) $\equiv$ é simétrica. Isto é, $(A, B) \equiv (C, D) \Leftrightarrow (C, D) \equiv (A, B)$

(c) $\equiv$ é transitiva. Isto é, $(A, B) \equiv (C, D) \,\text{e}\, (C, D) \equiv (E, F) \Rightarrow (A, B) \equiv (E, F)$

Omitiremos a demonstração. Esta observação permite definir o vetor $\overrightarrow{AB}$ como a classe de equivalência, segundo a relação de equipolência, do segmento orientado $(A, B)$.

**Definição 2.11** *Sejam* $(A, B)$ *um segmento orientado do plano. O vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a* $(A, B)$. *Ou seja,*

$$\overrightarrow{AB} = \{(C, D) \,:\, (C, D) \equiv (A, B)\}$$

*Cada segmento equipolente a* $(A, B)$ *é um representante do vetor* $\overrightarrow{AB}$.

**Definição 2.12**

- *Chamaremos vetor nulo ao vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Indica-se o vetor nulo por* $\overrightarrow{0}$. *Note que todos os representantes do vetor nulo são segmentos orientados com origem e extremidade coincidentes.*
- *O vetor* $\overrightarrow{BA}$ *é chamado vetor oposto (ou simétrico) do vetor* $\overrightarrow{AB}$ *e também é indicado por* $-\overrightarrow{AB}$.

**Definição 2.13** *Chamaremos norma (ou módulo, ou comprimento) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de* $\overrightarrow{v}$ *por* $\|\overrightarrow{v}\|$. *Se* $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, *dizemos que o vetor* $\overrightarrow{v}$ *é unitário.*

**Definição 2.14** *Os vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *não nulos são paralelos (indica-se por* $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$*) se um representante de* $\overrightarrow{u}$ *é paralelo a um representante de* $\overrightarrow{v}$ *( e portanto a todos). Se* $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$, *dizemos que* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *têm o mesmo sentido (resp. sentido contrário) se um representante de* $\overrightarrow{u}$ *e um representante de* $\overrightarrow{v}$ *têm mesmo sentido (resp. sentido contrário).*

De um modo geral, conceitos geométricos como paralelismo, perpendicularismo, comprimento, ângulo etc., envolvendo vetores, são definidos usando os representantes (como foi feito acima). Temos também

- Os segmentos orientados $(A, B)$ e $(C, D)$ são equipolentes se, e somente se, representam o mesmo vetor. Isto é,

$$AB \equiv CD \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

- Dados um ponto $A$ e um vetor $\overrightarrow{v}$, existe um único ponto $B$ tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

### 2.5.1 Adição de vetores

**Definição 2.15** *Dados os vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$, *considere um representante qualquer* $(A, B)$ *do vetor* $\overrightarrow{u}$ *e o representante do vetor* $\overrightarrow{v}$ *que tem origem no ponto* $B$. *Seja* $C$ *tal que* $(B, C)$ *seja um representante do vetor* $\overrightarrow{v}$. *Fica determinado o segmento orientado de* $(A, C)$. *Por definição* $\overrightarrow{AC}$, *cujo representante é o segmento orientado* $(A, C)$, *é o vetor soma de* $\overrightarrow{u}$ *com* $\overrightarrow{v}$

- Pela definição da soma de vetores, temos $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- Para determinar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ basta "fechar o triângulo", tomando cuidado de escolher a origem do segundo coincidindo com a extremidade do primeiro.

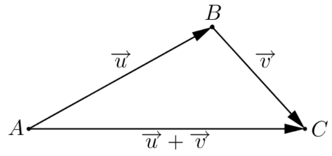



Figura 2.8: Adição de vetores 1.1

- Pode-se também escolher a "regra do paralelogramo", que consiste em tomar representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ com a mesma origem $A$. Escolhidos $(A, B)$ e $(A, D)$ representantes dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ respectivamente, construa o paralelogramo $ABCD$. O segmento orientado $(A, C)$ é um representante do vetor soma $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}$, pois ele "fecha o triângulo" $ABC$ e $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{u}$.

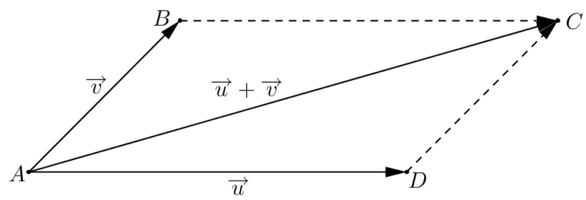



Figura 2.9: Adição de vetores 1.2

### 2.5.2 Produto interno

**Definição 2.16 (Produto interno)** *É uma operação entre vetores que associa a cada par de vetores um escalar. Outro nome também utilizado para esta operação é produto escalar, dando ênfase à natureza escalar do resultado da operação.*

*O produto interno entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\begin{cases} 0, \quad se \quad \overrightarrow{u}=0 \quad ou \quad \overrightarrow{v}=0 \\ ||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v}||\cdot cos\theta, \quad se \quad \overrightarrow{u}\neq 0 \quad ou \quad \overrightarrow{v}\neq 0 \end{cases}$$

*onde $\theta$ é o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $||\overrightarrow{u}||$ e $||\overrightarrow{v}||$ são os módulos ou comprimento desses vetores. Observe que se o ângulo $\theta$ entre os vetores for $90^o$ teremos $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v}||\cdot cos90^o=||\overrightarrow{u}||\cdot||\overrightarrow{v}||\cdot 0=0$.*

# Capítulo 3

# Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras

Nas demonstrações que seguem fixaremos o triângulo $ABC$ sempre reto em $A$. A medida da hipotenusa $a$ e catetos com medidas $b$ e $c$.

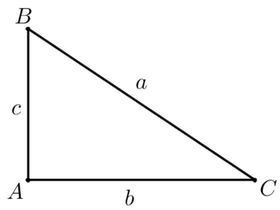



Figura 3.1: Triângulo retângulo

## 3.1 Demonstrações algébricas

As demonstrações algébricas são baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos, segundo a fonte bibliográfica [12]. Serão apresentadas seis demonstrações algébricas.

### 3.1.1 Demonstração 1 (Bhaskara II)

[1]Bhaskara II (1114-1185) nasceu na Índia e era conhecido em sua terra natal pelo nome de Bhaskaracharya-Bhaskara, o Professor. Filho de astrólogo eminente, Bhaskara assumiu o posto de chefe

Esta demonstração é a mais conhecida e consta sempre nos livros didáticos do ensino fundamental, provavelmente por ser curta e simples.

É considerada uma demonstração de Bhaskara, sendo redescoberta por John Wallis no século XVII.

Sua prova está baseada na seguinte afirmação: em qualquer triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela.

Para provar esta afirmação utilizamos semelhança de triângulos. De fato, seja $AD$ altura relativa a hipotenusa $BC$ do triangulo retângulo $ABC$. Sejam $m$ e $n$ respectivamente as projeções das medidas dos catetos $b$ e $c$ sobre a hipotenusa $a$, veja figura ilustrativa a seguir.

Pelo critério AA de semelhança de triângulos, os triângulos retângulos $ABC$ e $ACD$ são semelhantes, pois possuem o ângulo $A\hat{C}B$ em comum. Desta forma temos a proporção:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \frac{b}{m} = \frac{a}{b}$$

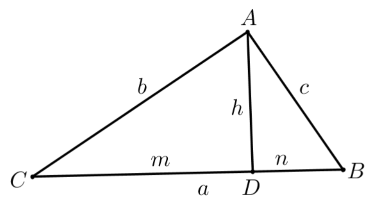



Figura 3.2: Demonstração de Bhaskara

Donde obtemos

$$b^2 = am \tag{3.1}$$

De modo análogo, utilizando a semelhança dos triângulos $ABC$ e $ABD$, obtemos

$$c^2 = an \tag{3.2}$$

Daí somando (3.1) e (3.2) segue

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a \cdot a = a^2$$

no Observatório Astronômico em Ujjain, o centro avançado de matemática indiana na época.

pois $m + n = a$.

Esta demonstração encontra-se em [6], [13] e [15] da referência bibliográfica.

### 3.1.2 Demonstração 2

Esta demonstração é baseada num teorema que é uma relação métrica no círculo: sejam $AB$ e $CD$ cordas distintas de um mesmo círculo que se intersectam num ponto $P$. Então, $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ (veja teorema 2.6).

Dado um triângulo $ABC$ reto em $A$. Construímos um círculo com centro $B$ e raio $BC = a$. Prolongamos os lados $BA$ e $CA$, formando respectivamente o diâmetro $DE$ e a corda $CF$ como na figura seguinte.

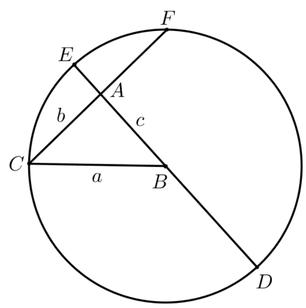



Figura 3.3: Demonstração 3

Notemos que $AC = AF$, pois o triângulo $BCF$ é isósceles porque os lados $BC$ e $BF$ são raios, consequentemente $AB$ é mediana do lado $CF$.

Como $AD = a + c$, $AE = a - c$, aplicando o teorema citado:

$$b^2 = (a + c)(a - c) = a^2 - c^2$$

daí, $a^2 = b^2 + c^2$.

Esta demonstração encontra-se em [12] da referência bibliográfica.

### 3.1.3 Demonstração 3 (C. J. Kemper)

Utilizaremos outra relação métrica no círculo: se $A$, $B$, $C$ e $P$ são pontos distintos no plano e $B$ pertence a $AP$, $C$ não pertence a reta $AB$, então $PA \cdot PB = PC^2$ se, e só se, o círculo que passa pelos pontos $A$, $B$ e $C$ for tangente à reta $PC$ em $C$ (veja teorema 2.7).

Dado um triângulo retângulo $ABC$, construímos um círculo de raio $AB = c$ e centro em $B$, obtendo o ponto $E$ no segmento $BC = a$, prolongando o segmento $BC$ obtemos o ponto $D$ no círculo como na figura seguinte.

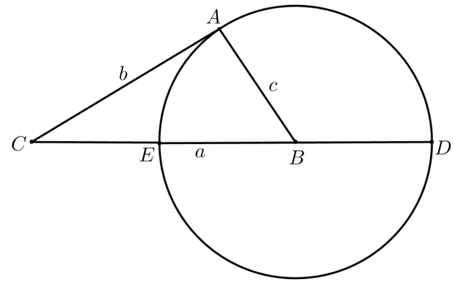



Figura 3.4: Demonstração de Kemper

Aplicando o teorema citado temos $b^2 = CD \cdot CE$, mas $CD = a + c$, $CE = a - c$, substituindo na igualdade obtemos $b^2 = (a + c)(a - c) = a^2 - c^2$, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Esta demonstração encontra-se em [12] da referência bibliográfica.

As demonstrações 4 e 5 a seguir apesar de serem de autoria diferentes são equivalentes.

### 3.1.4 Demonstração 4 (A. E. Colburn)

Seja o triângulo $ABC$ inscrito num semicírculo, o ângulo $B\hat{A}C$ é reto (proposição 2.1) e sendo os catetos $AB = c$, $AC = b$ e a hipotenusa $BC = a$.

Completando o quadrado $BCFG$ e traçando uma perpendicular $EAD$ sobre a hipotenusa do triângulo $ABC$, sabemos da demonstração 1 que $b^2 = am$ e $c^2 = an$. Daí temos

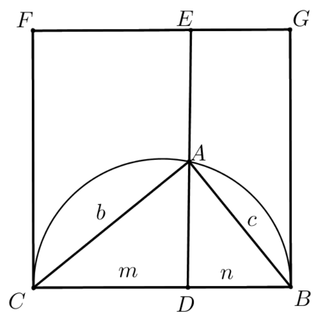



Figura 3.5: Demonstração de A. E. Colburn

$A(BCFG) = A(CDEF) + A(BDEG) = am + an$, então concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Esta demonstração encontra-se em [12] da referência bibliográfica.

### 3.1.5 Demonstração 5 (R. P. Lamy)

No triângulo retângulo $ABC$ construímos sobre a hipotenusa e os catetos, quadrados com lados medindo $a$, $b$ e $c$ respectivamente obtemos a seguinte figura.

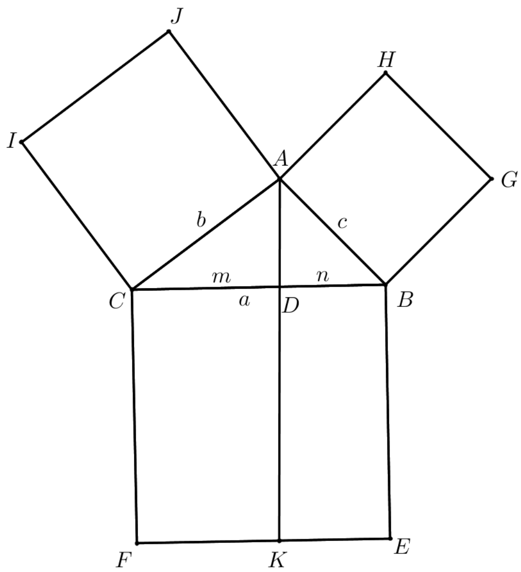



Figura 3.6: Demonstração de Lamy

Construímos a altura $AD$ sobre a hipotenusa $BC = a$, e prolonguemos esse segmento até se encontrar no ponto $K$ do lado $EF$ do quadrado $BCFE$.

O quadrado foi dividido em dois retângulos $CDKF$ e $BDKE$. Temos que

$$A(BCFE) = A(CDKF) + A(BDKE)$$

como $A(BCFE) = a^2$, $A(CDKF) = am$ e $A(BDKE) = an$, teremos

$$a^2 = am + an = b^2 + c^2.$$

Esta demonstração encontra-se em [6] e [12] da referência bibliográfica.

### 3.1.6 Demonstração 6 (Heron)

A fórmula de Heron que calcula a área de um triângulo em função das medidas dos lados é dada por $A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo $ABC$.

Sabemos que na demonstração da fórmula de Heron é utilizado o Teorema de Pitágoras. Reciprocamente, podemos utilizar a fórmula de Heron para estabelecer o Teorema de Pitágoras, é o que faremos a seguir.

Para estabelecer este resultado substituímos o valor do semiperímetro $p$ e em seguida, simplificando obtemos

$$A(ABC) = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

$$A(ABC) = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{(-a^2+ab+ac-ab+b^2+bc-ac+bc+c^2)\,(a^2+ab-ac-ab-b^2+bc+ac+bc-c^2)}{16}}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(-a^2+b^2+2bc+c^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}.$$

Como a área do triângulo retângulo pode ser o semiproduto dos catetos, podemos escrever a igualdade $\frac{1}{2}bc = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$, que elevando ao quadrado ambos os membros e efetuando as devidas simplificações, temos

$$\frac{1}{4}b^2c^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)$$

$$4b^2c^2 = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$$

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2 = 0$$

$$(a^2-b^2-c^2)^2 = 0$$

[2]Há muita controvérsia a respeito da época exata em que Heron viveu, havendo estimativas que variam de 150 a.C. a 250 d.C. Mais tem sido colocado na segunda metade do século I d.C.

então, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$. Esta demonstração é atribuída a Heron, encontrada no livro intitulado Metrica de sua autoria, este livro tratava fundamentalmente do cálculo de áreas e volumes de figuras planas e sólidos.

Esta demonstração encontra-se em [6] da referência bibliográfica.

## 3.2 Demonstrações geométricas

As demonstrações geométricas são baseadas em comparações de áreas, segundo a fonte bibliográfica [12]. Serão apresentadas nove demonstrações geométricas.

### 3.2.1 Demonstração 1 ("Pitágoras")

Os historiadores em geral acreditam que a demonstração pitagórica deve ter sido uma demonstração geométrica (baseada na comparação de áreas), provavelmente uma demonstração parecida com a que decorre das figuras adiante.

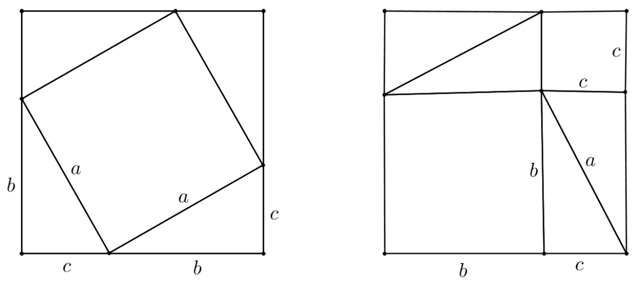



Figura 3.7: Demonstração 1

No quadrado à esquerda da figura a seguir que tem $b + c$ como lado, retiremos quatro triângulos retângulos iguais e obtemos um quadrado de lado $a$. Se fizermos a mesma operação no quadrado à direita (também de lado $b + c$), restarão dois quadrados de lado $b$ e $c$. Logo a área do quadrado de lado $a$ é a soma das áreas dos quadrados de lado $b$ e $c$, isto é $a^2 = b^2 + c^2$. Esta é considerada a demonstração mais bela do Teorema de Pitágoras.

Esta demonstração encontra-se em [13] e [15] da referência bibliográfica.

### 3.2.2 Demonstração 2 (Garfield)

No triângulo retângulo $ABC$ prolongamos $AC$ até o ponto $D$ de forma que $CD = c$. A partir de $D$, construímos o segmento $DE$, perpendicular a $AD$ tal que $DE = b$ e ao unirmos os pontos $B$ e $E$, obtemos o trapézio $ABED$ de bases $AB = c$, $DE = b$ e altura $b + c$. Finalmente traçamos o segmento $CE$ como ilustra a figura seguinte.

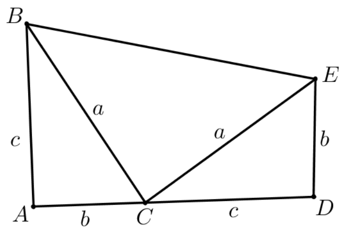



Figura 3.8: Demonstração de Garfield 1.2

Nessa figura, por construção os ângulos $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$ são complementares, logo o ângulo $B\hat{C}E$ é reto. Assim, podemos calcular a área do trapézio $ABED$ como a soma das áreas dos três triângulos retângulos, daí temos que:

$$\frac{1}{2}(b+c)(b+c) = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}aa$$

donde simplificando concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Essa prova do Teorema de Pitágoras é atribuída ao vigésimo presidente dos Estados Unidos James Abram Garfield.

Esta demonstração encontra-se em [6] e [15] da referência bibliográfica.

### 3.2.3 Demonstração 3 (Bhaskara II)

Nessa demonstração decompõe-se o quadrado construído sobre a hipotenusa em quatro triângulos retângulos, cada um deles congruentes ao triângulo dado, mais um quadrado de lado igual a diferença entre os catetos do triângulo dado como mostra o desenho 1 da figura seguinte.

[3]James Abram Garfield (1831-1881) foi advogado, militar e político estadunidense. Era republicano e assumiu a presidência dos E.U.A. em quatro de março de 1881, seu governo terminou subitamente em apenas 200 dias com o seu assassinato.

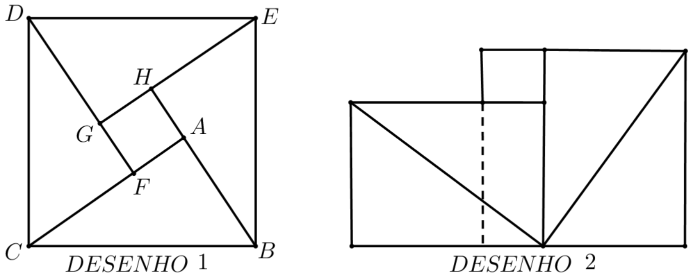



Figura 3.9: Demonstração de Bhaskara 2

A descrição de tal desenho foi elaborada da seguinte forma, construímos o quadrado $BCDE$ de lado igual a medida da hipotenusa com o triângulo $ABC$ interno, traçamos os segmentos $DF$ e $EG$, paralelos respectivamente aos catetos $AB$ e $AC$, com $F$ pertencente a $AC$ e $G$ pertencente a $DF$, em seguida prolongamos o segmento $AB$ até o ponto $H$ em $EG$. Facilmente pode-se estabelecer que os triângulos $CDF$, $DEG$ e $BEH$ são retângulos e congruentes, pelo caso ALA, ao triângulo $ABC$. Além disso, o quadrilátero formado internamente é um quadrado de lado igual a diferença entre os catetos do triângulo dado.

Agora, mudando a posição dos triângulos e do quadrado do desenho 1, podemos obter o desenho 2 onde a linha tracejada indica a separação dos quadrados dos catetos.

Essa demonstração foi elaborada por Bhaskara, segundo os livros de História da Matemática, Bhaskara desenhou a figura e não ofereceu nenhuma explicação, mas somente a palavra "Veja".

Usando um argumento algébrico é fácil verificar essa demonstração geométrica, basta denominar de $b$ e $c$ as medidas dos catetos e seja $a$ a medida da hipotenusa.

Percebe-se que a área do quadrado de lado $a$ é igual a soma das áreas dos quatro triângulos congruentes e do quadrado cujo lado é $b-c$, daí $a^2 = (b-c)^2 + 4 \cdot \dfrac{bc}{2} = b^2 + c^2$.

Esta demonstração encontra-se em [8], [10] e [12] da referência bibliográfica.

### 3.2.4 Demonstração 4 (Euclides)

[4]Euclides de Alexandria, os locais e datas de nascimento e morte são incertos, acredita-se que nasceu por volta de 325 a.C. e faleceu, aproximadamente em 265 a.C., em Alexandria. A Euclides é atribuída uma das maiores obras da matemática: os Elementos. Os Elementos perde somente para a Bíblia em número de edições publicadas.

Sobre o triângulo retângulo $ABC$ construímos, sobre cada um de seus lados, quadrados exteriores ao triângulo. Assim, sobre o cateto $AB$ construímos o quadrado $ABKH$ de lado $c$, sobre o cateto $AC$ construímos o quadrado $ACFG$ de lado $b$ e sobre a hipotenusa $BC$ construímos o quadrado $BCDE$ de lado $a$. Ainda traçamos os segmentos $BF$, $CK$, $AD$ que encontra a hipotenusa em $I$, $AE$ que encontra a hipotenusa em $M$ e o segmento $AL$ perpendicular a $DE$ em $L$. Este último segmento encontra a hipotenusa em $J$. Veja figura ilustrativa a seguir.

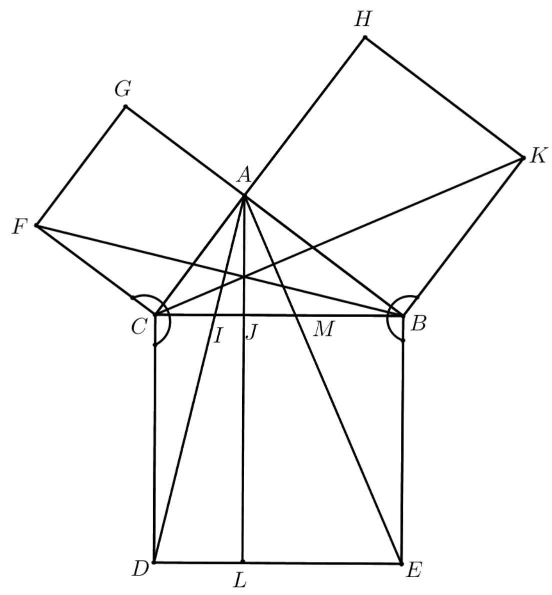



Figura 3.10: Demonstração de Euclides

Note que:

$$F\hat{C}B = F\hat{C}A + A\hat{C}B = 90 + A\hat{C}B = A\hat{C}B + B\hat{C}D = A\hat{C}D.$$

Portanto, pelo caso LAL de congruência de triângulo, obtemos

$$\triangle BCF \cong \triangle ACD, \quad \text{pois} \quad \begin{cases} BC = CD = a \\ F\hat{C}B = A\hat{C}D \\ CF = CA = b \end{cases}$$

Temos que a área do triângulo $BCF$ em relação a base $CF$ e a área do triângulo $ACD$

em relação a base $CD$ são, respectivamente,

$$A(BCF) = \frac{1}{2}(CF \cdot CF) = \frac{1}{2}b^2, \qquad A(ACD) = \frac{1}{2}(CD \cdot DL)$$

e a área do retângulo $CDLJ$ é $A(CDLJ) = CD \cdot DL$. Logo, como os triângulos $BCF$ e $ACD$ tem a mesma área, pois são congruentes, obtemos:

$$A(CDLJ) = CD \cdot DL = 2 \cdot A(ACD) = 2 \cdot A(BCF) = b^2. \tag{3.3}$$

De modo análogo temos que os triângulos $BCK$ e $BEA$ são congruentes (caso LAL), obtemos

$$A(BJLE) = BE \cdot LE = 2 \cdot A(BAE) = 2 \cdot A(BKC) = c^2 \tag{3.4}$$

Agora, como

$$A(BCDE) = A(CDLJ) + A(BJLE).$$

Segue, de (3.3) e (3.4), utilizado que o quadrado $BCDE$ tem lado $a$,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Esta demonstração encontra-se no livro Elementos de Euclides de Alexandria.

Esta demonstração encontra-se em [1], [4] e [6] da referência bibliográfica.

### 3.2.5 Demonstração 5 (Hauff's work)

Como na demonstração anterior, no triângulo retângulo $ABC$ construímos, sobre cada um de seus lados, quadrados exteriores ao triângulo. Agora, sobre o cateto $AB$ construímos o quadrado $ABEF$ de lado $c$, sobre o cateto $AC$ construímos o quadrado $ACGH$ de lado $b$ e sobre a hipotenusa $BC$ construímos o quadrado $BCDK$. Traçamos as paralelas $GP$ e $EN$ a hipotenusa $BC$. Ainda traçamos o segmento $AL$ perpendicular a $DK$ em $L$. Finalmente, traçamos as paralelas $DM$ e $MK$ aos respectivos catetos $AC$ e $AB$ do triângulo $ABC$. Veja, a seguir, a figura ilustrativa obtida na construção descrita acima.

Observe que os segmentos $CD$ e $CI$ podem ser vistos como a base e a altura respec-

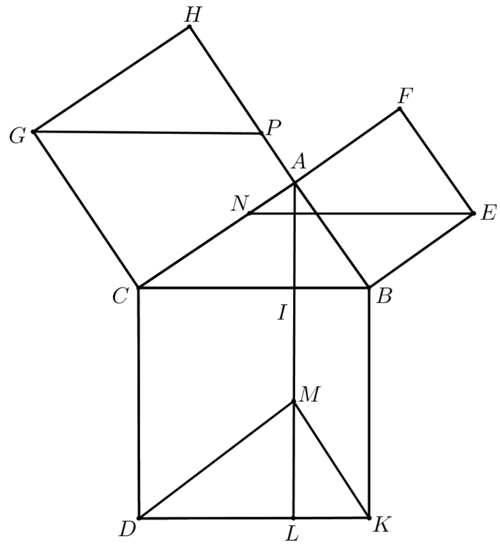



Figura 3.11: Demonstração de Hauff's work

tivamente do retângulo $CDLI$ e paralelogramo $ACDM$. Portanto,

$$A(CDLI) = A(ACDM) = CD \cdot CI. \tag{3.5}$$

Temos também que os paralelogramos $ACDM$ e $GCBP$ são iguais, pois $AC = GC$ (lado do quadrado $ACGH$), $CD = CB$ (lado do quadrado $BCDK$) e $A\hat{C}D = G\hat{C}B$ (veja demonstração anterior). Agora, a área do paralelogramo $GCBP$ pode ser calculada usando $GC$ como base e $GH$ como altura. Assim,

$$A(ACDM) = A(GCBP) = GC \cdot GH. \tag{3.6}$$

Assim, de (3.5) e (3.6), obtemos

$$A(CDLI) = A(ACDM) = GC \cdot GH = b^2. \tag{3.7}$$

Por argumentos similares, agora aplicados ao retângulo $BKLI$ e os paralelogramos $ABKM$ e $BCNE$, obtemos

$$A(BKLI) = A(ABKM) = A(BCNE) = BE \cdot AB = c^2 \tag{3.8}$$

Concluímos de (3.7) e (3.8) que

$$a^2 = A(BCDK) = A(CDLI) + A(BKLI) = b^2 + c^2.$$

Esta demonstração encontra-se em [12] da referência bibliográfica.

As demonstrações 6 e 7 a seguir apesar de serem de autoria diferentes são equivalentes.

### 3.2.6 Demonstração 6 (A. R. Colburn)

Seja o triângulo retângulo $ABC$, construímos o quadrado $BCDE$ de lado medindo $a$ e sobre cada lado desse quadrado construímos quatro triângulos congruentes ao triângulo $ABC$.

Formando o quadrado $FGHI$ de lado medindo $b + c$, como ilustra a figura seguinte.

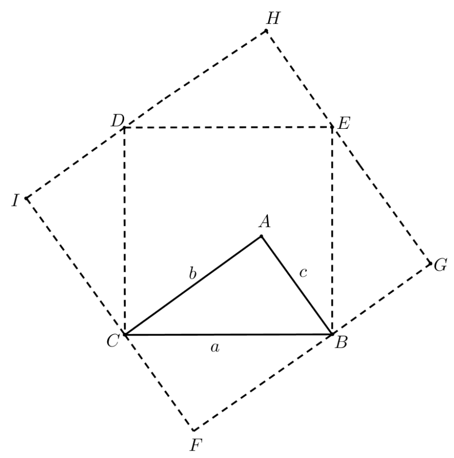



Figura 3.12: Demonstração de A. R. Colburn

A $A(FGHI) = (b + c)^2$, mas $A(FGHI) = A(BCDE) + 4A(ABC)$, pois os triângulos $BCF$, $BEG$, $CDI$ e $DEH$ são congruentes por construção (caso LLL), daí temos

$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = (b + c)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Esta demonstração encontra-se em [12] da referência bibliográfica.

### 3.2.7 Demonstração 7 (T. P. Stowell)

Seja $ABC$ um triângulo retângulo. Construímos sobre a hipotenusa $BC = a$ o quadrado $BCDE$, exterior ao triângulo dado. Ainda construímos o quadrado $AFHG$ de lado $b+c$, onde $b = AC$ e $c = AB$, de modo que os pontos $B$, $E$, $D$ e $C$ estejam sobre os lados deste quadrado, como mostra a figura seguinte.

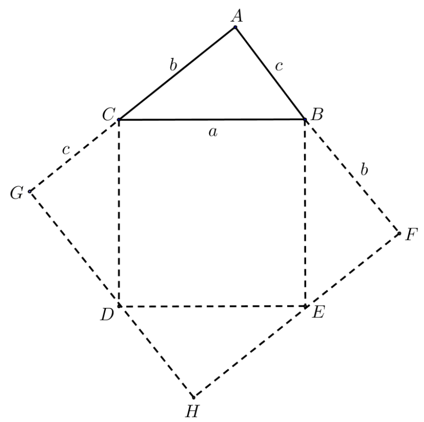



Figura 3.13: Demonstração de Stowell

Utilizado o critério LAL de congruência de triângulos temos que

$$\triangle ABC \cong \triangle FEB \cong \triangle HDE \cong \triangle GCD.$$

Temos assim que

$$A(BCDE) = A(AFHG) - 4A(ABC).$$

Portanto,

$$a^2 = (b+c)^2 - 4 \cdot \frac{bc}{2} = b^2 + c^2.$$

Esta demonstração encontra-se em [12] da referência bibliográfica.

### 3.2.8 Demonstração 8 (Leonardo Da Vinci)

[5]Leonardo Da Vinci (1452-1519) nasceu na Itália e durante um bom tempo ficou a serviço do Duque

Seja $ABC$ um triângulo retângulo de lados $a$, $b$ e $c$ como na seguinte figura. Construímos os quadrados $BCED$, $ABGI$ e $ACFH$ sobre os lados desse triângulo. Também construímos o triângulo $EDJ$, congruente ao triângulo $ABC$ ($AC = DJ$ e $AB = EJ$). Traçamos os segmentos $HI$, $FG$ e $AJ$ cuja interseção com os segmentos $BC$ e $ED$ determina respectivamente os pontos $L$ e $M$, como mostra na figura a seguir.

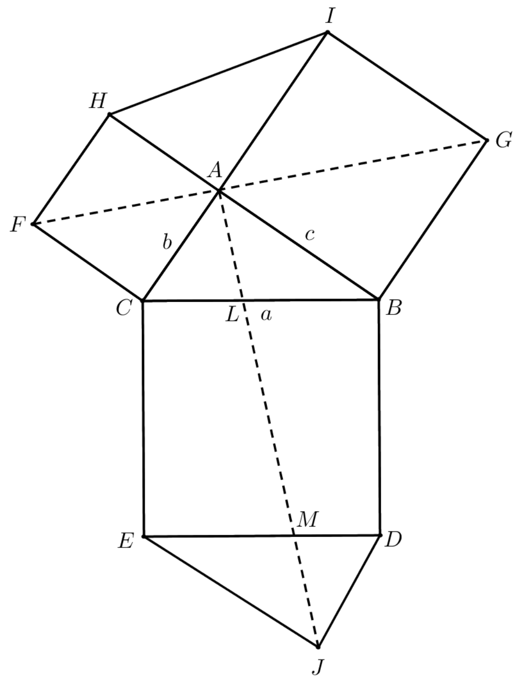



Figura 3.14: Demonstração de Leonardo Da Vinci

Note que a congruência dos triângulos $ABC$ e $EDJ$, fornece que $A\hat{C}L = J\hat{D}M$. Ainda os ângulos $A\hat{L}C$ e $J\hat{M}D$ são alternos externos à transversal $AJ$ que corta os segmentos paralelos $CB$ e $ED$, logo $A\hat{L}C = J\hat{M}D$. Segue que $C\hat{A}L = D\hat{J}M$. Assim, pelo caso ALA de congruência de triângulos, obtemos

$$\triangle ACL \cong \triangle JDM, \quad \text{pois} \begin{cases} A\hat{C}L = J\hat{D}M \\ AC = DJ \\ C\hat{A}L = D\hat{J}M \end{cases}.$$

de Milão, exercendo a função de pintor e engenheiro, sendo considerado um engenheiro mecânico e hidráulico. Nessa época, começou a ter os primeiros contatos com Geometria, estudando os trabalhos de Leon Battista e Piero della Francesca (Sobre a Pintura em Perspectiva), aprofundando-se com o estudo de Euclides e Paccioli.

Agora, observe que os quadriláteros $ABDJ$ e $GBCF$ são congruentes, pois $AB = GB$, $BD = BC$, $DJ = CF$, $A\hat{B}D = G\hat{B}C$ e $B\hat{D}J = B\hat{C}F$. Portanto,

$$A(ABDJ) = A(GBCF). \tag{3.9}$$

Decompondo essas áreas, como a soma das áreas das figuras geométricas que as compõem, obtemos

$$A(ABDJ) = A(ABL) + A(BDML) + A(JDM) \tag{3.10}$$

$$A(GBCF) = A(ABG) + A(ABL) + A(ACL) + A(ACF) \tag{3.11}$$

Agora, como $A(ABL)$ é comum na decomposição e $A(ACL) = A(JDM)$, obtemos de (3.9), (3.10) e (3.11) que

$$A(BDML) = A(ABG) + A(ACF) \tag{3.12}$$

Por argumentos similares podemos obter a congruência dos quadriláteros $GIHF$ e $JECA$ e decompondo suas áreas pelas polígonos que os compõem, obtemos

$$A(GIHF) = A(JECA),$$

$$A(GIHF) = A(GIA) + A(IHA) + A(AHF),$$

$$A(JECA) = A(JEM) + A(MECL) + A(CAL).$$

Segue, usando essas relações e o fato de $A(IHA) = A(CAL) + A(JEM)$

$$A(MECL) = A(GIA) + A(AHF). \tag{3.13}$$

Segue de (3.12) e (3.13) que

$$\begin{aligned} a^2 = A(BCED) &= A(BDML) + A(MECL) \\ &= (A(ABG) + A(ACF)) + (A(GIA) + A(AHF)) \\ &= (A(ACF) + A(AHF)) + (A(ABG) + A(GIA)) \\ &= A(ACFH) + A(ABGI) = b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Esta demonstração é atribuída a Leonardo Da Vinci (1452 - 1519), encontra-se em [6] da referência bibliográfica.

### 3.2.9 Demonstração 9 (Perigal)

Antes de iniciarmos a prova do Teorema de Pitágoras dado por Perigal, vamos provar o seguinte.

**Lema 3.1** *Seja $ABCD$ um quadrado e $O$ seu centro (interseção das diagonais). Seja $E$ um ponto qualquer sobre o lado $AD$. Considere o segmento $EF$ passando pelo ponto $O$ com $F$ sobre o lado $BC$ desse quadrado. Então:*
(*a*) *$O$ é ponto médio do segmento $EF$*
(*b*) $DE = BF$
(*c*) $AE = CF$
*Além disso, se o segmento $GH$ passa pelo centro do quadrado e é perpendicular ao segmento $EF$ com $G$ no segmento $AB$ e $H$ em $CD$, então os quadriláteros $EAGO$, $GBFO$, $FCHO$ e $HDEO$ são congruentes. Veja figura ilustrativa a seguir.*

**Prova:** Lembre que as diagonais de um quadrado bissetam os ângulos dos vértices e se cortam perpendicularmente no ponto médio. Temos, usando o caso ALA de congruência de triângulos que,

$$\triangle BOF \cong \triangle DOE, \text{ pois } \begin{cases} D\hat{O}E = B\hat{O}F & \text{(opostos pelo vértice)} \\ BO = DO & (O \text{ é ponto médio de } DB) \\ F\hat{B}O = E\hat{D}O = \frac{\pi}{4} & \end{cases}$$

[6]Henry Perigal (1801-1898) nasceu na inglaterra e o que se sabe hoje a seu respeito é devido a seu irmão, Frederick Perigal (dez anos mais jovem), que, na época da morte de Perigal, reuniu em um pequeno livro dados da vida de Henry e de outros.

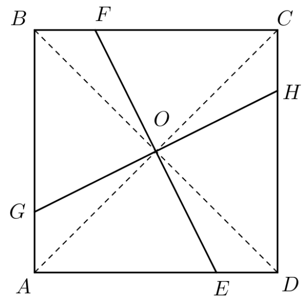



Figura 3.15: quadrado

Concluímos daí que $FO = EO$, isto é, $O$ é ponto médio de $EF$ e $DE = BF$. Agora, como $AD = BC$, segue que

$$AE = AD - DE = BC - BF = FC.$$

O que prova a primeira parte do lema. Agora, a prova da segunda parte do lema será dividida mostrando as seguintes afirmações:

**Afirmação 1.** Os triangulos $AOG$, $BOF$, $COH$ e $DOE$ são congruêntes.

**Afirmação 2.** Os triangulos $AOE$, $BOG$, $COF$ e $DOH$ são congruêntes.

Estas afirmações mostrarão que os quadriláteros $EAGO$, $GBFO$, $FCHO$ e $HDEO$ são congruentes, pois cada um deles é formado por um triângulo que está na lista da primeira afirmação junto com o triângulo adjacente que contém a metade de uma diagonal do quadrado, o qual está na lista da primeira afirmação. Isto é, usando $\square$ para significar quadrilátero,

$$\square EAGO = \triangle AOG \cup \triangle AOE, \qquad \square GBFO = \triangle BOF \cup \triangle BOG,$$
$$\square FCHO = \triangle COH \cup \triangle COF, \qquad \square HDEO = \triangle DOE \cup \triangle DOH.$$

Agora, para verificar a primeira afirmação mostremos que $\triangle BOF \cong \triangle COH$. Isto segue porque,

$F\hat{B}O = H\hat{C}O$ (as diagonais do quadrado bissetam os ângulos dos vértices)

$BO = CO$ (ambos segmentos são a metade da diagonal do quadrado)

$B\hat{O}F = C\hat{O}H$ (pois $B\hat{O}C = F\hat{O}H = 90°$ e ambos contém $F\hat{O}C$).

Assim, pelo critério ALA de congruência de triângulo, segue que $\triangle BOF \cong \triangle COH$. Analogamente, mostramos que $\triangle AOG \cong \triangle DOE$. Segue da prova da primeira parte do lema, onde mostramos que $\triangle BOF \cong \triangle DOE$, a afirmação 1.

Finalmente, para mostrar a afirmação 2, observe que pela afirmação 1, temos $AG = BF = CH = DE$, donde segue que $GB = FC = HD = EA$. Além disso, como o ponto $O$ é ponto médio de $EF$ e $GH$, a afirmação 2, segue usando o critério LLL de congruência de triângulos. Isto finaliza a prova do lema.

Agora, para mostrar a versão de Perigal do Teorema de Pitágoras, construímos sobre cada lado do triângulo retângulo $ABC$, de hipotenusa $BC = a$, catetos $AC = b$ e $AB = c$, os quadrados $ACDE$, $ABGF$ e $BCNM$. Ainda, passando pelo centro $L$, do quadrilátero $ABGF$ traçamos os segmentos $HJ$ e $IK$ respectivamente paralelo e perpendicular à hipotenusa $BC$. Finalmente, pelos pontos médios $R$, $Q$, $P$ e $O$ do quadrado $BCNM$, traçamos os segmentos $RV$ e $PT$ paralelos ao cateto $AC$ e os segmentos $QU$ e $OS$ paralelos ao cateto $AB$. Veja figura ilustrativa a seguir.

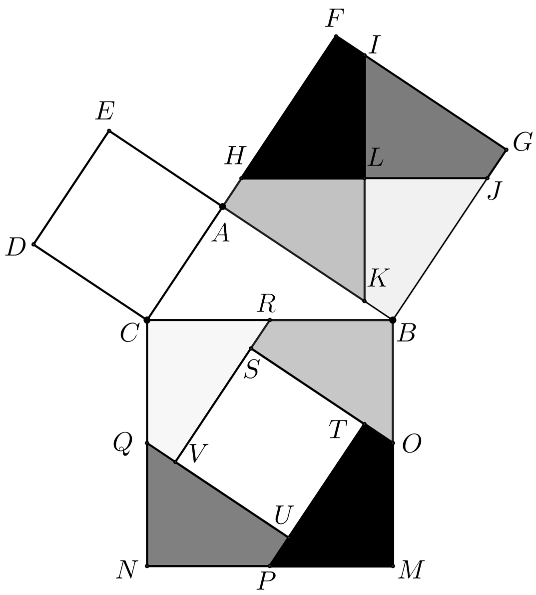



Figura 3.16: Demonstração de Perigal

Inicialmente, observamos que pelo lema temos que quadriláteros $AHLK$, $FILH$, $GJLI$ e $BKLJ$ são todos iguais. Daí, seguem as seguintes relações:

$$AH = FI = GJ = BK \tag{3.14}$$

$$HF = IG = JB = KA \tag{3.15}$$

$$HL = IL = JL = KL \tag{3.16}$$

Por outra parte, pela construção descrita acima que, o quadrilátero $BCHJ$ é um paralelogramo, logo seus lados opostos são iguais. Isto fornece:

$$BC = JH \quad \text{e} \quad CH = BJ. \tag{3.17}$$

Como $R$ é ponto médio de $BC$ e $L$ o ponto médio de $HJ$, segue de (3.17) que

$$HL = LJ = CR = RB \tag{3.18}$$

Para a prova de Perigal do Teorema de Pitágoras, vejamos a congruência dos seguintes quadriláteros

$$\begin{array}{ll} \square AHLK \cong \square RSOB, & \square FILH \cong \square TOMP, \\ \square GJLI \cong \square UPNQ, & \square BKLJ \cong \square VQCR \end{array}$$

Provemos, por exemplo, que $\square AHLK \cong \square RSOB$. Para isto, inicialmente observamos que pela construção descrita acima e a relação (3.18), obtemos

$$HL = LK = RB = BO, \qquad H\hat{L}K = R\hat{B}O \text{ (ângulos retos)}$$

Daí, pelo caso LAL de congruência de triângulos, obtemos

$$\triangle HLK \cong \triangle RBO. \tag{3.19}$$

Portanto,

$$HK = RO, \qquad L\hat{H}K = B\hat{R}O, \qquad L\hat{K}H = B\hat{O}R \tag{3.20}$$

Ainda, utilizando a notação // para indicar paralelismo, temos

$$HL /\!/ RB, \quad LK /\!/ BO, \quad KA /\!/ OS \quad \text{e} \quad AH /\!/ SR.$$

Daí, segue que

$$H\hat{L}K = R\hat{B}O, \quad L\hat{K}A = B\hat{O}S, \quad K\hat{A}H = O\hat{S}R \quad \text{e} \quad A\hat{H}L = S\hat{R}B \tag{3.21}$$

Logo,

$$A\hat{H}K = A\hat{H}L - K\hat{H}L = S\hat{R}B - O\hat{R}B = S\hat{R}O, \tag{3.22}$$

$$A\hat{K}H = A\hat{K}L - H\hat{K}L = S\hat{O}B - R\hat{O}B = S\hat{O}R \tag{3.23}$$

Assim, de (3.20), (3.22) e (3.23), usando o critério ALA de congruência de triângulos, obtemos

$$\triangle AHK \cong \triangle SRO \tag{3.24}$$

Agora, a congruência dos quadriláteros $AHLK$ e $RSOB$, segue de (3.19) e (3.24). Analogamente mostra-se a congruência dos outros quadriláteros.

Finalmente, mostremos que os quadrados $ACDE$ e $STUV$ são iguais. Note que pela congruência dos quadriláteros $CQVR$ e $LKBJ$, obtemos $VR = BJ$. Logo, de (3.17), segue que $VR = CH$. Sendo os quadriláteros $AHLK$ e $RSOB$ congruentes, temos $AH = SR$, portanto

$$VS = VR - SR = CH - AH = CA.$$

Sendo $VS$ e $CA$ os lados dos quadrados $ACDE$ e $STUV$, segue que eles são iguais. Assim, o quadrado sobre a hipotenusa pode ser preenchido utilizando os quadriláteros que estão sobre o cateto maior junto com o quadrado do cateto menor.

Esta demonstração do Teorema de Pitágoras é atribuída a Henry Perigal (1801 - 1898), foi anunciada em 1830 e ficou conhecida como Dissecção de Perigal.

Esta demonstração encontra-se em [12] e [13] da referência bibliográfica.

## 3.3 Algumas demonstrações vetoriais

As demonstrações vetoriais apresentadas aqui utilizam os conceitos de soma, módulo e produto escalar de vetores. Daremos aqui duas demonstrações vetoriais do Teorema de Pitágoras; a demonstração 1 se encontra nos livros [6] e [12] e a demonstração 2 é uma alteração de uma das demonstrações do livro [12].

### 3.3.1 Demonstração 1

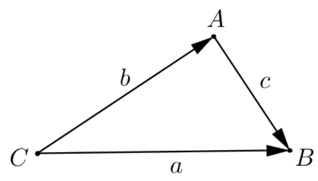



Figura 3.17: Demonstração vetorial 1

No triângulo retângulo da figura 3.18, considerando seus lados como vetores, temos que $||\overrightarrow{CA}|| = b$, $||\overrightarrow{AB}|| = c$ e $||\overrightarrow{CB}|| = a$. Sabemos que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ e que o produto interno $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, pois são perpendiculares. Temos também $||\overrightarrow{CB}||^2 = ||\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}||^2$, daí

$$||\overrightarrow{CB}||^2 = ||\overrightarrow{CA}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 + 2 \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

### 3.3.2 Demonstração 2

No triângulo retângulo $ABC$ reto em $A$ na figura seguinte, prolongamos o lado $AB$ até o ponto $D$ de tal forma que $AD = AB$ e traça-se o segmento $DC$.

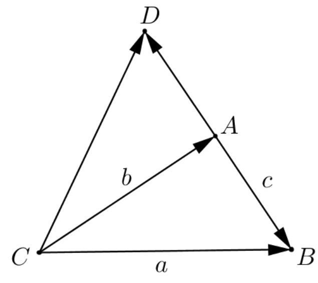



Figura 3.18: Demonstração vetorial 2

Sabemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, logo $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$. Daí temos:

$$||\overrightarrow{CB}||^2 = ||\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AD}||^2 = ||\overrightarrow{CA}||^2 + ||\overrightarrow{AD}||^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD}$$

e

$$||\overrightarrow{CD}||^2 = ||\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}||^2 = ||\overrightarrow{CA}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Somando essas igualdades membro a membro e sabendo que

$$-2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = 0$$

pois $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = 0$ e $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{AD}|| = c$, $||\overrightarrow{CB}|| = ||\overrightarrow{CD}|| = a$, os triângulos $ABC$ e $ACD$ são congruentes por construção daí $2a^2 = 2b^2 + 2c^2$, então $a^2 = b^2 + c^2$.

## 3.4 A recíproca do Teorema de Pitágoras

**Teorema 3.1** *Um triângulo possui lados medindo $a$, $b$ e $c$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede $a$.*

### 3.4.1 Demonstração 1

Seja um triângulo $ABC$, sendo $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ e $BD = h$ (altura do triângulo relativa ao lado $AC$).
Primeiro caso: $\hat{A} < 90^o$.

Vamos supor que $c \leq b$. Dessa forma o ponto $D$, projeção de $B$ sobre $AC$ cai no interior do lado $AC$. Sejam $AD = x$ e $BD = h$.

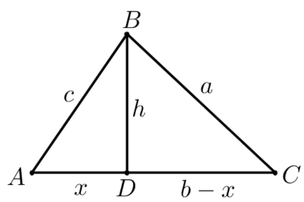



Figura 3.19: Demonstração recíproca 1.1

Sabemos que o triângulo $ABD$ é retângulo ($BD$ é altura), daí $c^2 = h^2 + x^2$, de modo análogo o triângulo $BCD$ é retângulo também temos

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 = h^2 + x^2 + b^2 - 2bx = b^2 + c^2 - 2bx \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

Segundo caso: $\hat{A} > 90^o$.
Neste caso o ponto $D$ cai fora do lado $AC$.

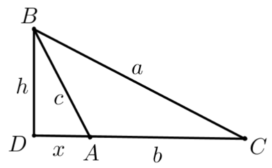



Figura 3.20: Demonstração recíproca 1.2

Aplicando o mesmo raciocínio do primeiro caso, concluímos que

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

Demonstramos então que em um triângulo $ABC$, de lados $a$, $b$ e $c$, quando

$$\hat{A} < 90^o \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\hat{A} > 90^o \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

logo se $a^2 = b^2 + c^2$ devemos ter $\hat{A} = 90^o$.
Esta demonstração encontra-se em [13] da referência bibliográfica.

### 3.4.2 Demonstração 2

Construa um triângulo retângulo cujos catetos meçam exatamente $b$ e $c$. Neste novo triângulo, de acordo com o Teorema de Pitágoras, a hipotenusa mede $\sqrt{b^2 + c^2} = a$. Portanto este novo triângulo (que é retângulo) tem lados medindo $a$, $b$ e $c$. E pelo caso de congruência de triângulos LLL (três lados congruentes), ele é congruente ao triângulo original. Logo o triângulo original é retângulo e sua hipotenusa mede $a$.

Esta demonstração encontra-se em [3] da referência bibliográfica.

# Capítulo 4

# Aplicações do Teorema de Pitágoras e temas relacionados

Daremos aqui alguns resultados relacionados com o Teorema de Pitágoras, como: A lei dos cossenos, O Teorema de Apolônio, O problema de Hipócrates, A distância entre dois pontos, etc e também alguns problemas de concursos como o problema da XVIII Olimpíadas Portuguesas de Matemática.

## 4.1 A lei dos cossenos

Para a prova dessa aplicação vamos precisar da seguinte definição.

**Definição 4.1** *Dado um triângulo $ABC$ retângulo reto em $A$ em que o ângulo $A\hat{C}B$ é igual a $\alpha$, definimos o cosseno de $\alpha$ como a razão entre o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa. No caso do ângulo $\alpha$ ser obtuso definiremos o seu cosseno sendo negativo e igual $-cos(180° - \alpha)$.*

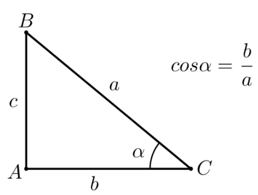



Figura 4.1: Definição de cosseno

**Lei dos cossenos**

Suponhamos que sejam conhecidos dois lados $AC = b$ e $AB = c$ de um triângulo $ABC$ e o ângulo $\hat{A}$ formado por eles. Qual é a medida do lado $BC$?

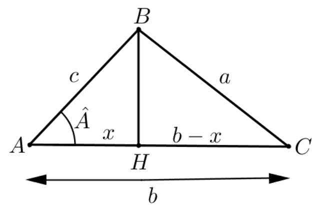



Figura 4.2: Lei dos cossenos 1.1

Solução:

Primeiro caso: $\hat{A} < 90^o$.

Traçamos a altura $BH$ relativa ao lado $AC$, vamos utilizar os triângulos retângulos $AHB$ e $BHC$. Designando $AH$ por $x$, temos $CH = b - x$. Escrevendo a relação de Pitágoras nos triângulos $AHB$ e $BHC$, temos:

$$c^2 = x^2 + (BH)^2$$

$$a^2 = (b - x)^2 + (BH)^2$$

Subtraindo as duas relações:

$a^2 - c^2 = (b - x)^2 - x^2$, ou seja $a^2 = c^2 + b^2 - 2bx + x^2 - x^2$, daí $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$. No triângulo $AHB$ temos $cos\hat{A} = \dfrac{x}{c}$. Logo, $x = ccos\hat{A}$ e finalmente, obtemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$, que é a lei dos cossenos.

Segundo caso: $\hat{A} > 90^o$.

Neste caso ocorre a situação da figura seguinte. Agora $CH = b + x$, repetindo os passos

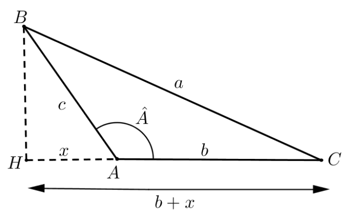



Figura 4.3: Lei dos cossenos 1.2

anteriores, chegamos a $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$ e como $x = ccos(180^\circ - \hat{A})$, teremos $a^2 =$

$b^2 + c^2 + 2bccos(180° - \hat{A}) = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}.$

## 4.2 O Teorema de Apolônio

Em geometria, o teorema de Apolônio, também chamado de teorema da mediana, é um teorema que relaciona o comprimento da mediana de um triângulo com o comprimento de seus lados.

**Teorema 4.1 (de Apolônio)** *Em todo triângulo a soma dos quadrados de dois lados quaisquer, é igual a metade do quadrado do terceiro lado mais o dobro do quadrado de sua mediana correspondente.*

Seja $ABC$ um triângulo de lados $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Seja $AP$ a mediana, de comprimento $d$, correspondente ao lado $BC$. Veja figura ilustrativa abaixo.

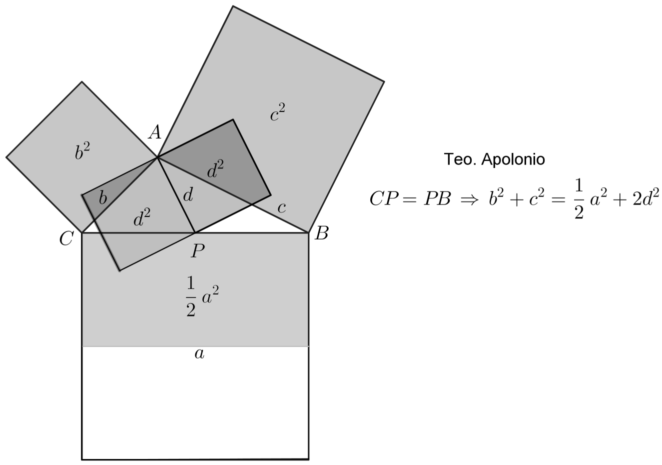



Figura 4.4: Teorema de Apolônio

**Observação:** Inicialmente notamos que o Teorema de Apolônio generaliza o Teorema de Pitágoras. De fato, usando a notação dada na figura (4.4), se $C\hat{A}B$ é reto, segue da proposição (2.1) que a corda $BC$ da circunferência circunscrita ao triangulo $ABC$,

[7]Apolônio de Perga (262 a.C. - 194 a.C.) foi um matemático e astrônomo grego da escola alexandrina (c. 261 a.C.). Foi contemporâneo e um cordial rival de Arquimedes. Da Antiguidade Clássica, notáveis matemáticos se destacaram, como Pitágoras, Euclides e Arquimedes no entanto, quem mereceu dos antigos o glorioso epíteto de "O Grande Geômetra"foi Apolônio.

é diâmetro, de comprimento $a$. Portanto, como $P$ é ponto médio de $BC$, segue que $r = CP = PB = AP$ é o raio dessa circunferência. Assim,

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2d^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2.$$

**Demonstração do Teorema de Apolônio:** Seja $\alpha = C\hat{P}A$ e $\beta = A\hat{P}B$, como indica a figura a seguir.

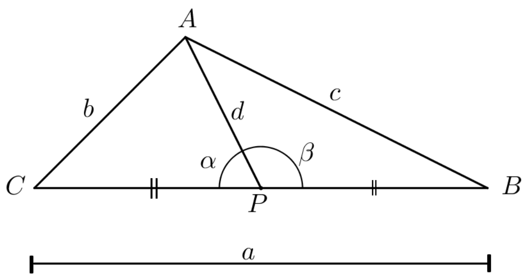



Figura 4.5: Prova do Teorema de Apolônio

Usando a lei dos cossenos nos triângulos $\triangle CPA$ e $\triangle APB$, temos respectivamente,

$$b^2 = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2d\left(\frac{a}{2}\right)\cos\alpha \tag{4.1}$$

$$c^2 = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2d\left(\frac{a}{2}\right)\cos\beta \tag{4.2}$$

Agora, como $\alpha$ e $\beta$ são suplementares, temos que $\cos\beta = -\cos\alpha$. Assim, somando as equações (4.1) e (4.2), obtemos

$$b^2 + c^2 = 2d^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}a^2.$$

## 4.3 O problema de Hipócrates

Na figura seguinte temos um triângulo retângulo de catetos medindo $b$ e $c$, e a hipotenusa de medida $a$, três semicircunferências tendo os lados do triângulo como diâmetro, mostrar que a soma das áreas das lúnulas é igual a área do triângulo.

Solução:

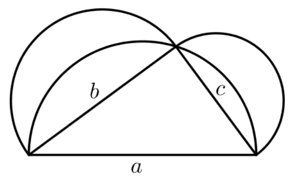



Figura 4.6: O problema de Hipócrates

Denominando de $L_1$ e $L_2$ a área de cada lúnula, $P_1$ e $P_2$ a área da outra parte de cada semicircunferência, temos que $P_1 + P_2$ é a área da semicircunferência de diâmetro $a$ menos à área do triangulo retângulo que vale $\frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{2}bc$. A área das semicircunferências de diâmetro medindo $b$ e $c$ são respectivamente $\frac{1}{8}\pi b^2$ e $\frac{1}{8}\pi c^2$, então:

$$L_1 + L_2 = \left(\frac{1}{8}\pi b^2 + \frac{1}{8}\pi c^2\right) - \left(\frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{2}bc\right) = \frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc$$

(área do triangulo retângulo).

## 4.4 A distância entre dois pontos na Geometria Analítica

Dados dois pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ do plano cartesiano, qual é a distância entre eles?

Solução:

Denominaremos a distância entre os pontos por $d(A, B)$ e sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$.

Observe que na construção da figura aparece o triângulo retângulo $ABC$, que é retângulo em $C$, pois $AC$ é horizontal e $BC$ é vertical.

Como $AC = x_2 - x_1$ e $BC = y_2 - y_1$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $d^2(A, B) = (AC)^2 + (BC)^2$, então $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

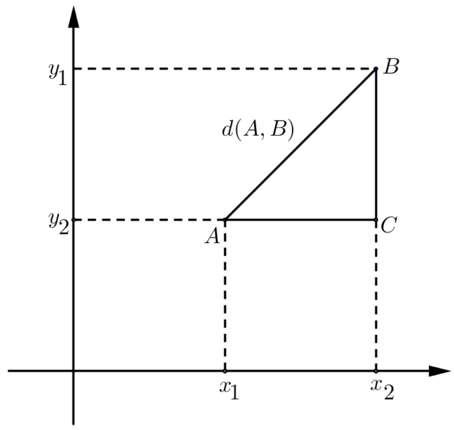



Figura 4.7: A distância entre dois pontos

## 4.5 A condição de perpendicularismo na Geometria Analítica

Sejam os pontos $O = (0, 0)$, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, se os segmentos $AO$ e $OB$ são perpendiculares, que relação existe entre os pontos $A$ e $B$?
Solução:
Como o triângulo $ABO$ formado pelo três pontos é retângulo, basta aplicar o Teorema

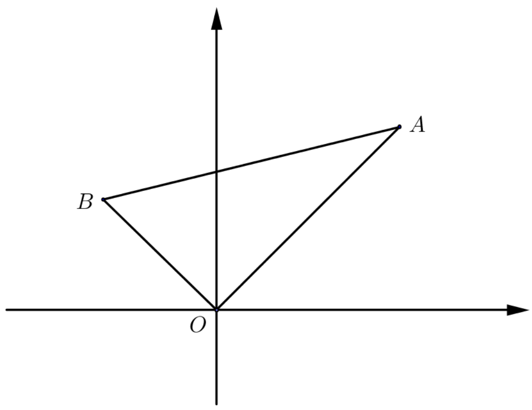



Figura 4.8: A condição de perpendicularismo na Geometria Analítica

de Pitágoras, daí $d^2(A, B) = d^2(O, A) + d^2(O, B)$, isto é,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

que simplificando concluímos que $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

## 4.6 Generalizando o Teorema de Pitágoras

Suponha que seja possível construir, sobre os lados de um triângulo retângulo, figuras semelhantes de área $A$, $B$ e $C$ construídas sobre a hipotenusa e os catetos respectivamente, como mostra a figura seguinte.

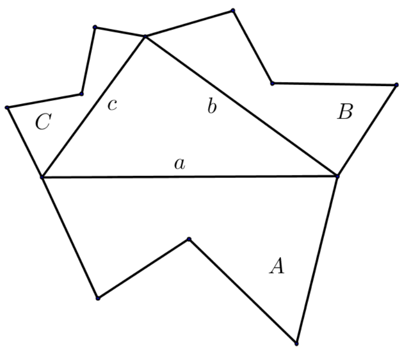



Figura 4.9: Generalizando o Teorema de Pitágoras

Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança (teorema 2.8), daí

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \qquad \frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Pela propriedade das proporções e como $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$. Isto quer dizer que áreas de figuras semelhantes construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Que é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

## 4.7 O cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo

Calcular o comprimento da diagonal de um paralelepípedo retângulo em função dos comprimentos de suas arestas.

Solução:

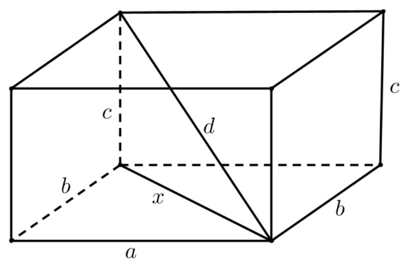



Figura 4.10: O cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo

Na figura temos um bloco retangular tendo na base um retângulo de medidas $a$ e $b$, altura $c$ e diagonal de comprimento $d$. A medida da diagonal da base é $x$, que é hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $a$ e $b$, daí $x^2 = a^2 + b^2$. No plano vertical que contém a diagonal, temos outro triângulo retângulo com hipotenusa $d$ e catetos $x$ e $c$. Logo, $d^2 = x^2 + c^2$, substituindo $x^2$ concluímos que $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ que é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

## 4.8 Uma generalização do Teorema de Pitágoras no espaço

Para a prova desse teorema vamos precisar da seguinte definição.

**Definição 4.2** *Diz-se que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a toda reta no plano.*

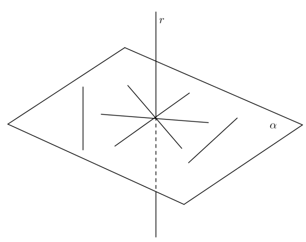


Figura 4.11: Uma reta perpendicular a um plano

**Teorema 4.2** *Num tetraedro com um triedro trirretangular, o quadrado da área da face oposta a esse triedro é igual a soma dos quadrados das áreas das outras faces.*

Na figura seguinte, temos um triedro trirretângulo de vértice $O$, cortado por um plano qualquer, formando o tetraedro $OABC$, sendo que $AO = a$, $CO = b$ e $BO = c$.

Sejam $A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h$ ($AC$ é a medida da base e $h$ a medida da altura dessa face), $A(ACO) = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot x$ ($AC$ é a medida da base e $x$ a medida da altura dessa face), $A(ABO) = \frac{1}{2} \cdot ac$ e $A(BCO) = \frac{1}{2} \cdot bc$, observe que os triângulos $BHO$ e $ACO$ são retângulos e $h^2 = x^2 + c^2$, $(AC)^2 = a^2 + b^2$ respectivamente.

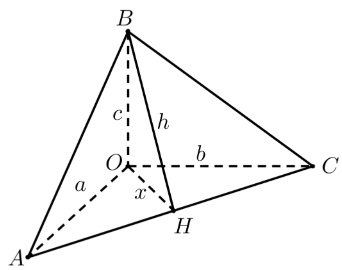



Figura 4.12: Uma generalização do Teorema de Pitágoras no espaço

Elevando ao quadrado a área da face $ABC$, teremos:

$$A^2(ABC) = \frac{1}{4}(AC)^2 \cdot h^2 = \frac{1}{4}(AC)^2(x^2 + c^2) = \frac{1}{4}(AC)^2 \cdot x^2 + \frac{1}{4}(AC)^2 \cdot c^2$$

isto é,

$$A^2(ABC) = \frac{1}{4}(AC)^2 \cdot x^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \cdot c^2 = \frac{1}{4}(AC)^2 \cdot x^2 + \frac{1}{4}a^2 \cdot c^2 + \frac{1}{4}b^2 \cdot c^2$$

daí

$$A^2(ABC) = A^2(ACO) + A^2(ABO) + A^2(BCO).$$

Que é mais uma generalização do Teorema de Pitágoras.

## 4.9 Ternos pitagóricos

**Definição 4.3** *Chama-se terno pitagórico todo terno de inteiros positivos* $(a, b, c)$ *tais que* $a^2 = b^2 + c^2$.

Assim são ternos pitagóricos $(5, 4, 3)$, $(10, 8, 6)$, $(13, 12, 5)$, $(37, 35, 12)$, pois $5^2 = 4^2 + 3^2$, $10^2 = 8^2 + 6^2$, $13^2 = 12^2 + 5^2$, $37^2 = 35^2 + 12^2$.

Se $(a, b, c)$ é um terno pitagórico, então $(ka, kb, kc)$, onde $k > 1$ é um inteiro positivo qualquer, também é um terno pitagórico, pois, temos:

$$(ka)^2 = k^2 \cdot a^2 = k^2(b^2 + c^2) = k^2 \cdot b^2 + k^2 \cdot c^2 = (kb)^2 + (kc)^2.$$

Existem fórmulas que dão ternos pitagóricos, por exemplo, o terno $a = 2k^2 + 2k + 1$, $b = 2k^2 + 2k$, $c = 2k + 1$, onde $k$ é um inteiro positivo qualquer, atribuídas a Pitágoras, e dão uma infinidade de ternos pitagóricos, pois

$$a^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2 = 4k^4 + 8k^3 + 4k^2 + 4k^2 + 4k + 1$$

daí

$$a^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2 = (4k^4 + 8k^3 + 4k^2) + (4k^2 + 4k + 1)$$

$$a^2 = (2k^2 + 2k)^2 + (2k + 1)^2 = b^2 + c^2.$$

De modo análogo as fórmulas $a = p^2 + q^2$, $b = p^2 - q^2$, $c = 2pq$, onde $p$ e $q$ $(p > q)$ são dois inteiros positivos quaisquer, atribuídas a Platão, também dão uma infinidade de ternos pitagóricos, pois:

$$a^2 = (p^2 + q^2)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4 - 4p^2q^2 + 4p^2q^2$$

daí

$$a^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = b^2 + c^2.$$

Outras fórmulas que fornecem ternos pitagóricos são $a = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$, $b = n$, $c = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$, sendo $n$ um número positivo ímpar maior do que 1. Nota-se de imediato que a todo terno pitagórico $(a, b, c)$ está associado um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é $a$ e os catetos têm medidas $b$ e $c$, denominado triângulo pitagórico.

## 4.10 Problemas

### 4.10.1 Profmat: exame nacional de acesso 2013

O semicírculo da figura está inscrito no triângulo retângulo $ABC$ de catetos $AB = 7$ e $BC = 24$. O raio do semicírculo é igual a

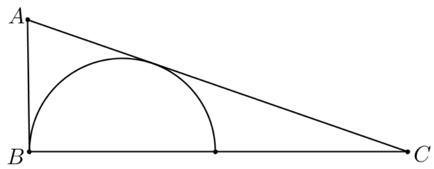
(A) $2\sqrt{5}$

(B) 5

(C) $3\sqrt{3}$

(D) $\frac{21}{4}$

(E) $\frac{16}{3}$



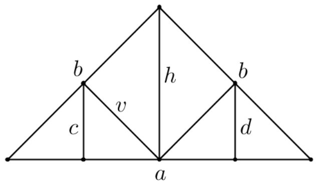

Solução:
Sejam $M$ e $N$ o ponto de tangência da semicircunferência com o segmento $AC$ e o centro da semicircunferência respectivamente. Logo seu raio é $R = MN$. Como $AB$ e $AM$ são tangentes à mesma circunferência então tem mesmo tamanho e $AC = 7 + MC$.

Pelo Teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$. Então $MC = 25 - 7 = 18$. Os triângulos retângulos $CMN$ e $CBA$ são semelhantes, pois têm um dos ângulos agudos comum (caso AA) disso temos $\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{BC}$ ou seja $\frac{R}{7} = \frac{18}{24}$ donde $R = \frac{21}{4}$.

### 4.10.2 Profmat: exame nacional de acesso 2014

A figura mostra o esquema de uma tesoura de telhado. O triângulo maior é isósceles e tem base de medida $a = 16$ e lados laterais de medida $b = 10$. Os três apoios verticais de medidas $c$, $h$ e $d$ dividem a base em quatro partes congruentes.

As medidas de $h$, $c$ e $v$ são, respectivamente:




(A) 6, 3 e 5

(B) 6, 4 e 5

(C) $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

(D) $6\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

(E) 6, $\frac{9}{2}$ e 5

Solução:
Como o triângulo é isósceles e $h$ divide o lado $a$ em duas partes congruentes, logo $h$ é mediana e altura, também é um cateto do triângulo retângulo de hipotenusa $b$. O segundo cateto é $\frac{a}{2} = \frac{16}{2} = 8$, pelo Teorema de Pitágoras

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow h = 6.$$

O apoio de medida $c$ é paralelo a $h$ e tem um extremo no ponto médio do cateto do triângulo retângulo, daí tomando $h$ como base a outra medida é a base média. Assim $c = \frac{h}{2} = 3$.

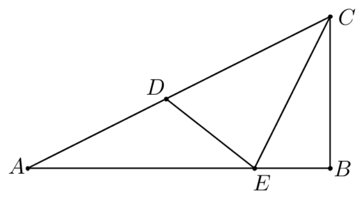
O triângulo que contém $c$ e $v$ como medida é retângulo sendo que $c$ divide sua extremidade ao meio e $v$ é a medida da hipotenusa, daí pelo Teorema de Pitágoras

$$v^2 = c^2 + 4^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow v = 5$$

E a resposta é $h = 6$, $c = 3$ e $v = 5$.

### 4.10.3 XVIII Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Na figura $ABC$ e $DEC$ são triângulos retângulos. Sabendo que $BE = \dfrac{1}{2}$, $CE = 1$ e que $AD = 1$, calcule $CD$.



Solução:
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $BCE$, $(BC)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ donde $BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando agora o Teorema de Pitágoras ao triângulo $ABC$ obtemos

$$(AB)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (1 + CD)^2$$

como $AB = AE + \dfrac{1}{2}$ temos:

$$(AE)^2 + AE + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 + 2CD + (CD)^2$$

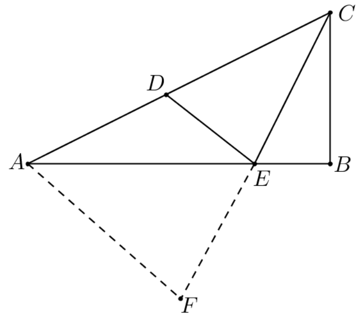
simplificando temos $AE(1 + AE) = CD(2 + CD)$, $(I)$.

Construímos na figura dada o ponto $F$ tal que o ponto $E$ pertence ao segmento $CF$ e o triângulo $ACF$ seja retângulo.

Os triângulos retângulos $AEF$ e $BCE$ são semelhantes, pois Os ângulos $A\hat{E}F$ e $B\hat{E}C$ são opostos pelo vértice e portanto congruentes, daí $\dfrac{EF}{BE} = \dfrac{AE}{CE} \Leftrightarrow \dfrac{EF}{\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{AE}{1}$ donde $AE = 2EF$.

Por outro lado, os triângulos retângulos $ACF$ e $DCE$ são semelhantes também (ângulo $D\hat{C}E$ é comum), daí

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CF}{CE} \Leftrightarrow \frac{1 + CD}{CD} = \frac{1 + EF}{1}$$




$$1 + CD = CD + CD \cdot EF \Rightarrow EF = \frac{1}{CD}.$$

Logo $AE = \dfrac{2}{CD}$. Substituindo em $(I)$ temos

$$\frac{2}{CD}\left(1 + \frac{2}{CD}\right) = CD(2 + CD)$$

$$\frac{2}{CD} + \frac{4}{CD^2} = 2CD + (CD)^2.$$

Multiplicando ambos os membros por $(CD)^2$:

$$2CD + 4 = 2(CD)^3 + (CD)^4$$

$$(CD)^4 + 2(CD)^3 - 2CD - 4 = 0$$

$$2((CD)^3 - 2) + CD((CD)^3 - 2) = 0$$

e $((CD)^3 - 2)(CD + 2) = 0$, como $CD + 2 \neq 0$ concluímos que $CD = \sqrt[3]{2}$.

# Capítulo 5

# Atividades didáticas sobre o Teorema de Pitágoras

Temos aqui algumas atividades didáticas que podem ser trabalhadas na sala de aula sobre o Teorema de Pitágoras, essas atividades tem o objetivo de melhorar a compreensão do mesmo. Os textos pesquisados para essas atividades foram [9] e [16].

**Estrutura Curricular**.

- Componente curricular: Matemática.
- Nível de ensino: 9º ano do ensino fundamental.

**Dados da aula**.

- O que os alunos poderão aprender: os alunos vivenciarão atividades experimentais sobre o Teorema de Pitágoras que ajudará a compreender argumentações que provam sua validade.
- Duração de cada atividade: 50 minutos.
- Conhecimento prévios trabalhado pelo professor: triângulos, potências, raízes quadradas, cálculo de áreas, Teorema de Pitágoras.
- Estratégias e recursos da aula: para essas atividades são necessários régua, esquadro, cartolina, tesoura, borracha e lápis. Para a construção do ângulo reto e as respectivas medidas dos catetos utilizaremos o esquadro e a régua.

## 5.1 Atividade 1

Desenhamos numa cartolina um triângulo retângulo de lados medindo $6cm$, $8cm$ e $10cm$, construímos quadrados sobre seus lados com os mesmos valores. Agora, desenhamos quadradinhos de $1cm$ de lado sobre os três quadrados, obtemos sobre a hipotenusa $10 \cdot 10 = 100$ quadradinhos de $1cm$ de lado, daí a área do quadrado é $100cm^2$, de modo análogo temos sobre os catetos quadrados com área de $64cm^2$ e $36cm^2$. Temos, então que $100cm^2 = 64cm^2 + 36cm^2$. Como na figura seguinte.

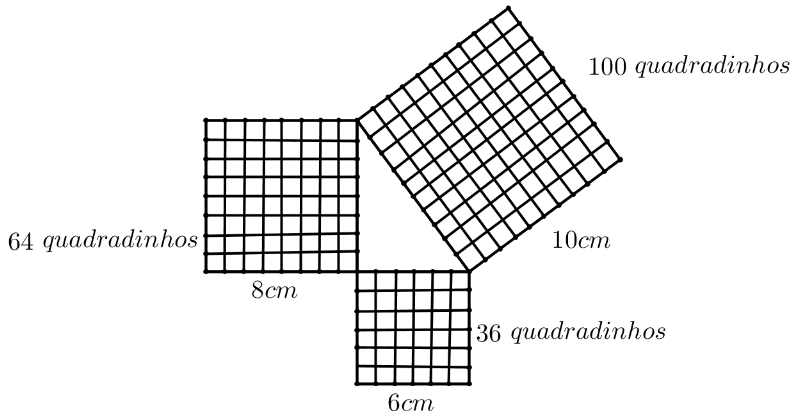



Figura 5.1: Formando a figura 1

## 5.2 Atividade 2

Utilizando uma cartolina desenhamos sobre a mesma um triângulo retângulo com lados medindo $6cm$, $8cm$ e $10cm$, sobre cada lado construímos quadrados com lados medindo os mesmos valores citados. Em seguida nomeamos os vértices como na figura seguinte.

Agora, usando régua e lápis, prolongamos o segmento $IC$ até encontrar o segmento $DE$ no ponto $L$. Depois, desenhamos o segmento $KL$ perpendicular a $CL$, prolongamos também o segmento $BH$ até encontrar o segmento $AF$ no ponto $J$. Considere a numeração formada pelos quadrados menores e utilizando a tesoura recorte essas figuras. Em seguida você deve encaixar as figuras 1, 2, 3, 4 e 5 dentro do quadrado desenhado sobre a hipotenusa, mostrando experimentalmente que o quadrado construído sobre a hipotenusa é à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

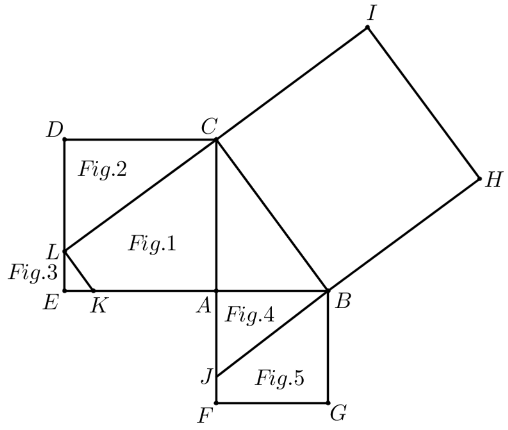



Figura 5.2: Formando o quebra-cabeça 1.1

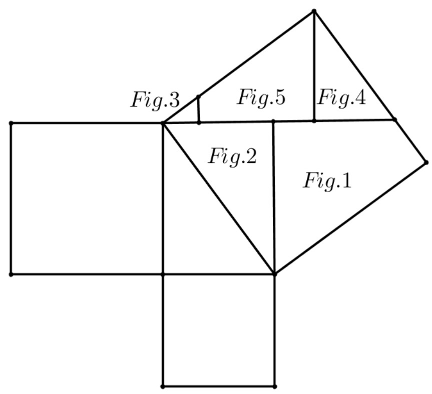



Figura 5.3: Formando o quebra-cabeça 1.2

## 5.3 Atividade 3

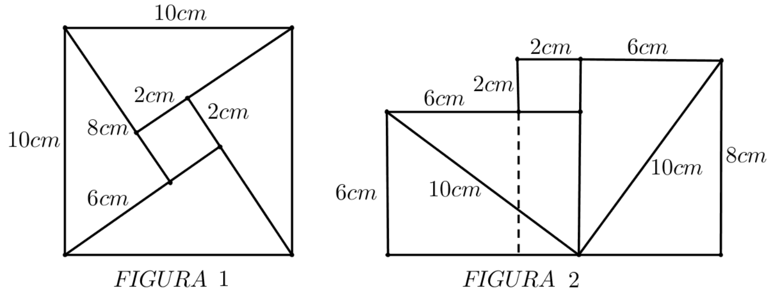



Figura 5.4: Formando a figura 2

Desenhamos numa cartolina um quadrado de $10cm$ de lado e construindo interiormente quatro triângulos retângulos com catetos medindo $6cm$ e $8cm$, sendo a hipotenusa o lado do quadrado, nota-se que se forma um outro quadrado interior cujo lado é a diferença entre as medidas dos catetos, ou seja $2cm$ (figura 1). Recortamos essas cinco figuras e montamos a figura 2, notamos que formamos dois quadrados com lados medindo $6cm$ e $8cm$, como a soma desses dois quadrados é igual ao quadrado de $10cm$ de lado, concluímos que $10^2 = 8^2 + 6^2$.

## 5.4 Atividade 4

Desenhamos numa cartolina dois quadrados com lado medindo $14cm$, construímos no primeiro quadrado um outro inscrito e com lado medindo $10cm$, obtemos então quatro triângulos retângulos de lados $6cm$, $8cm$ e $10cm$. No segundo quadrado construímos dois quadrados interiormente e com um vértice comum, quadrados com lado medindo $6cm$ e $8cm$, traçando a diagonal dos dois retângulos formados, notamos que essa diagonal mede $10cm$ e portanto são triângulos congruentes aos do primeiro quadrado, como na figura 5.5.

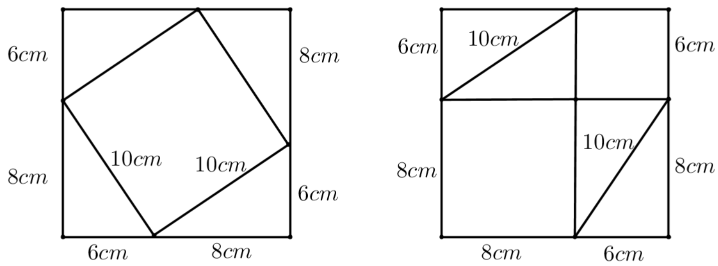



Figura 5.5: Formando a figura 3

Agora, recortamos os triângulos retângulos congruentes das duas figuras e comparando as áreas dos quadrados, concluímos dessa forma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, como na figura 5.6.

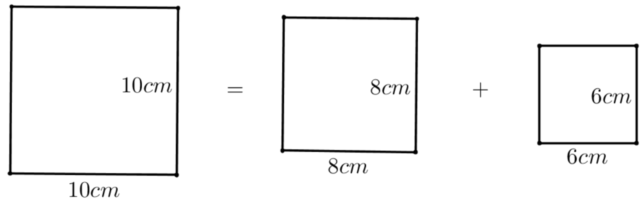



Figura 5.6: Comparando as áreas 1

## 5.5 Atividade 5

Desenhamos numa cartolina um triângulo retângulo qualquer (nessa atividade não precisa especificar os valores dos lados).

Nomearemos os vértices do triângulo de $A$, $B$ e $C$. Construímos sobre cada lado do triângulo retângulo $ABC$, de hipotenusa $BC = a$ e catetos $AC = b$ e $AB = c$, os quadrados $ACDE$, $ABGF$ e $BCNM$. Ainda, passando pelo centro $L$, do quadrilátero $ACDE$ traçamos os segmentos $HJ$ e $IK$ respectivamente paralelo e perpendicular à hipotenusa $BC$. Veja figura ilustrativa a seguir.

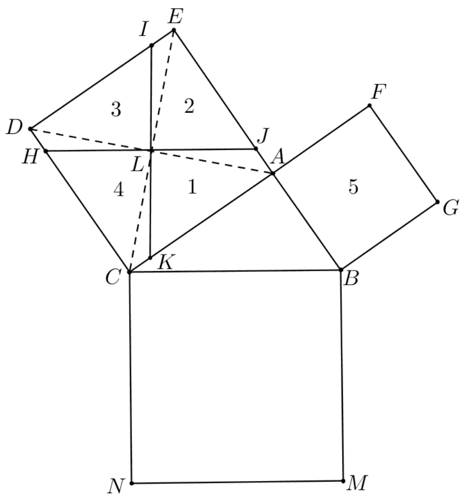



Figura 5.7: Comparando as áreas 2

Numeramos as cinco figuras formadas e depois as recortamos para em seguida construímos o quadrado $BCNM$ sobre a hipotenusa conforme à figura seguinte.

Concluindo dessa forma o Teorema de Pitágoras.

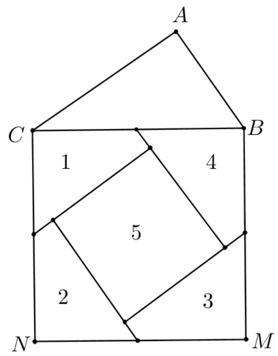



Figura 5.8: Formando a figura 4

## 5.6 Considerações finais

Após a apresentação de uma nota histórica, algumas demonstrações, algumas aplicações e atividades didáticas sobre o Teorema de Pitágoras, pode-se concluir que o Teorema de Pitágoras possui praticamente um encanto inexplicável.

Esse teorema é provavelmente o mais demonstrado de toda a Matemática, com demonstrações de vários tipos. Apesar de tudo o teorema tem um enunciado muito simples que se traduz em uma igualdade pequena e direta.

Os fatos históricos em torno do triângulo retângulo e a relação que envolvem seus lados é cheia de mistérios e lendas. Apesar de que aplicações e benefícios que esta relação trazia, já eram conhecidos, antes de Pitágoras nenhuma demonstração era conhecida.

Da mesma forma, não existe nenhum documento que comprove a demonstração por parte de Pitágoras ou da escola pitagórica, mas este crédito é dado a Pitágoras e seus discípulos desde aquele tempo.

Os assuntos preliminares têm por finalidade, facilitar a compreensão do texto, sendo que o leitor familiarizado com estes assuntos, pode começar a leitura no capítulo seguinte.

Espero contribuir com esta dissertação relacionada ao Teorema de Pitágoras uma aprendizagem mais eficiente da ideia transmitida por este teorema.

As demonstrações "algébricas", "geométricas", "vetoriais", também as demonstrações recíprocas, aqui expostas, sirvam de estímulos aos futuros leitores; alunos, professores ou aos interessados deste importante teorema da geometria.

A parte referente as demonstrações "algébricas"e "geométricas"podem ser utilizadas tanto no ensino fundamental, quanto no ensino médio, pois os conceitos matemáticos expostos são compatíveis com esses níveis de ensino. Os conceitos expostos nas demonstrações "vetoriais"estão compatíveis com um curso de graduação.

As aplicações do Teorema de Pitágoras estão num nível compreensível aos alunos do ensino básico, apesar de que algumas delas não constam nos livros didáticos do ensino médio.

As atividades didáticas dada no capítulo cinco são jogos do tipo quebra-cabeça, cuja finalidade é entender melhor o significado do Teorema de Pitágoras, todas são baseadas em demonstrações "geométricas". Estas atividades podem ser aplicadas no ensino fundamental ou médio, pois despertam a curiosidade do aluno por serem jogos atrativos de quebra-cabeça.

# Referências Bibliográficas


[1] AABOE, Asger; **Episódios da História Antiga da Matemática**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM. Rio de Janeiro, 1984.

[2] ALENCAR FILHO, Edgard de; **Teoria elementar dos números**. São Paulo, Nobel, 1989.

[3] BARBOSA, J. L. M.; **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 2012.

[4] BOYER, Carl B.; **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

[5] CARVALHO, Paulo C. P.; **Introdução à Geometria Espacial**. Coleção do Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 1999.

[6] CINTRA, C. A.; CINTRA, R. J. S. **O Teorema de Pitágoras**. Editoração Eletrônica (Latex), 2003.

[7] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção PROFMAT, 1ª edição, 2013.

[8] EVES, H.; **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp, São Paulo, 1997.

[9] IMENES, Luiz Márcio.; **descobrindo o teorema de Pitágoras**. Editora Scipione, São Paulo, 1995.

[10] KARLSON, P.; **A Magia dos Números**. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Editora Globo, 1961.

[11] LIMA, Elon L. **Medida e Forma em Geometria**. IMPA/VITAE.

[12] LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**. Washington, National Council of Teachers of Mathematics, 1940.

[13] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.; WARGNER, E.; LIMA, ELON L. **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2005.

[14] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Geometria**. Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção PROFMAT, 1ª edição, 2013.

[15] ROSA, Euclides. **Revista do professor de matemática**. São Paulo, 1983, número 2.

[16] portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1645. **Teorema de Pitágoras**.

[17] https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Apolonio **Teorema de Apolônio**.