UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ADRIANO CARLOS LEAL

APROFUNDANDO O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES NO ENSINO MÉDIO

CURITIBA

2017

ADRIANO CARLOS LEAL

APROFUNDANDO O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: André Fabiano Steklain Lisbôa

CURITIBA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

L435a Leal, Adriano Carlos
2017 Aprofundando o estudo de sequências e progressões no ensino médio / Adriano Carlos Leal.-- 2017.
74 p.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017.
Bibliografia: p. 73-74.

1. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Sequências (Matemática). 3. Séries aritméticas. 4. Séries geométricas. 5. Séries divergentes. 6. Solução de problemas. 7. Prática de ensino. 8. Matemática - Dissertações. I. Lisbôa, Andre Fabiano Steklain, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Curitiba
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Título da Dissertação No. 038

"Aprofundando o Estudo de Sequências e Progressões no Ensino Médio"

por

Adriano Carlos Leal

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 15 de fevereiro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. André Fabiano Steklain Lisbôa, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Carlos Eduardo Durán Fernández, Dr.
(UFPR)

Profa. Neusa Nogas Tocha, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

À minha mãe Darli, meu pai Suarez e meu irmão Toni, pelo amor e carinho,
à minha esposa Anna Paula, pelo amor, força e apoio,
e às minhas filhas Júlia e Lívia, pelos motivos, de tão grandes que são, fica difícil dizer.

AGRADECIMENTOS

- A minha família: esposa Anna Paula Vaz Salmoria, filhas Júlia e Lívia, pais Darli Marques Leal e Suarez Moraes, irmão Antonio, e aos demais membros, por serem, simplesmente, os motivos das minhas lutas.
- Ao Prof. André Fabiano Steklain Lisbôa, pelo tempo dedicado à minha orientação, sempre disposto a sanar minhas dúvidas, com conhecimento e paciência.
- Aos demais professores e amigos que, de alguma forma, contribuíram para a concretização desse momento.

“Arquimedes será lembrado enquanto Ésquilo foi esquecido,
porque os idiomas morrem mas as ideias matemáticas permanecem.
‘Imortalidade’ pode ser uma ideia tola, mas provavelmente
um matemático tem a melhor chance que pode existir de obtê-la.” (G. H. Hardy)

RESUMO

Este trabalho pretende aprofundar o estudo de Sequências e Progressões, no âmbito do Ensino Médio. Para isso, introduzimos alguns temas avançados, como indução, limites, convergência e divergência, e mostramos as conexões com progressões, funções e juros. Nós também apresentamos outras sequências, além de progressões aritméticas e geométricas, bem como uma discussão envolvendo séries divergentes, assunto pouco comentado inclusive nos cursos de graduação. Finalizamos o trabalho com alguns problemas interessantes que podem ser explorados em sala de aula.

Palavras-chave: Sequência. Série. Progressão. Matemática.

ABSTRACT

This work intends to deepen the study of sequences and progressions in the scope of High School. In order to do so, we introduce some advanced themes, such as induction, limits, convergence and divergence and show the connections with progressions, functions and interest rates. We also introduce other sequences, besides arithmetic and geometric progressions, and present a discussion about divergent series, subject that is little explored even in graduation courses. We finalize our work presenting some interesting problems that can be explored in the classroom.

Keywords: Sequence. Series. Progression. Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – PA: a_n, para $a_1 = -1$ e $r = 1$ 24
Figura 2 – PA: a_n, para $a_1 = 1$ e $r = -1$ 24
Figura 3 – PA: a_n, para $a_1 = 2$ e $r = 0$ 25
Figura 4 – PA: a_n, para $a_1 = 0$ e $r = 0$ 25
Figura 5 – PA: S_n, para $a_1 = -1$ e $r = 1$ 27
Figura 6 – PA: S_n, para $a_1 = 1$ e $r = -1$ 27
Figura 7 – PA: S_n, para $a_1 = 2$ e $r = 0$ 28
Figura 8 – PA: S_n, para $a_1 = 0$ e $r = 0$ 28
Figura 9 – PG: a_n, para $a_1 = 2$ e $q = 1$ 34
Figura 10 – PG: a_n, para $a_1 = 2$ e $q = -1$ 34
Figura 11 – PG: a_n, para $a_1 = 1$ e $q = 2$ 35
Figura 12 – PG: a_n, para $a_1 = -1$ e $q = 2$ 35
Figura 13 – PG: a_n, para $a_1 = 1$ e $q = -2$ 36
Figura 14 – PG: a_n, para $a_1 = -1$ e $q = -2$ 36
Figura 15 – PG: a_n, para $a_1 = 3$ e $q = \frac{1}{2}$ 37
Figura 16 – PG: a_n, para $a_1 = 3$ e $q = -\frac{1}{2}$ 37
Figura 17 – PG: S_n, para $a_1 = 2$ e $q = 1$ 39
Figura 18 – PG: S_n, para $a_1 = 2$ e $q = -1$ 39
Figura 19 – PG: S_n, para $a_1 = 1$ e $q = 2$ 39
Figura 20 – PG: S_n, para $a_1 = -1$ e $q = 2$ 40
Figura 21 – PG: S_n, para $a_1 = 1$ e $q = -2$ 40
Figura 22 – PG: S_n, para $a_1 = -1$ e $q = -2$ 40
Figura 23 – PG: S_n, para $a_1 = 3$ e $q = \frac{1}{2}$ 41
Figura 24 – PG: S_n, para $a_1 = 3$ e $q = -\frac{1}{2}$ 41
Figura 25 – Curva de Koch 64

SUMÁRIO

Introdução **17**

1 SEQUÊNCIAS E SÉRIES **19**
1.1 Sequências 19
1.2 Princípio da indução finita 20
1.3 Séries 21
1.3.1 Teoremas úteis 21

2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA **23**
2.1 Definição 23
2.2 Fórmula do termo geral 23
2.3 Soma dos termos de uma PA 25
2.4 PA e função afim 29
2.5 PA e juros simples 30

3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA **33**
3.1 Definição 33
3.2 Fórmula do termo geral 33
3.3 Soma dos termos de uma PG 37
3.4 PG e função exponencial 42
3.5 PG e juros compostos 43

4 OUTROS TIPOS DE PROGRESSÕES **45**
4.1 Progressão harmônica 45
4.1.1 Definição 45
4.1.2 Fórmula do termo geral 45
4.1.3 Série harmônica 46
4.1.4 Soma dos termos de uma PH 47
4.2 Progressão aritmético-geométrica 48
4.2.1 Definição 48
4.2.2 Fórmula do termo geral 48
4.2.3 Soma dos termos de uma PAG 49
4.3 Progressão geométrico-aritmética 51
4.3.1 Definição 51
4.3.2 Fórmula do termo geral 51
4.3.3 Soma dos termos de uma progressão geométrico-aritmética 52
4.4 Sequência de Fibonacci 53

4.4.1 Definição 53
4.4.2 Fórmula do termo geral 53
4.4.3 Soma dos termos da sequência de Fibonacci 55

5 SÉRIES DIVERGENTES 57

6 USANDO SEQUÊNCIAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 63

7 CONCLUSÕES 71

REFERÊNCIAS 73

INTRODUÇÃO

No que se refere ao ensino médio, as *progressões* são sempre abordadas de maneira bastante semelhante. Primeiramente é fornecido ao estudante o conceito de sequência. A seguir, são estudadas duas sequências específicas: as *progressões aritméticas* e as *progressões geométricas*. Em alguns casos, não são apresentados outros tipos de progressões, e os resultados que são apresentados deixam lacunas no desenvolvimento do assunto e deixam de lado aplicações que possam servir de motivação. Por meio de uma análise de três livros de Ensino Médio, de décadas diferentes, é possível ilustrar essa situação. Vamos considerar as seguintes obras, todos volume único:

- *Toda Matemática*, de Xavier e Barreto (FILHO; SILVA, 1997);
- *Matemática Fundamental: Uma Nova Abordagem*, de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Júnior (GIOVANNI; BONJORNO; JúNIOR, 2002);
- *Matemática*, de Gelson Iezzi (IEZZI et al., 2015).

O objetivo não é analisar a didática do conteúdo exposto, mas sim os conceitos apresentados. Nos três livros são abordados, conforme afirmado, os assuntos *sequências*, *progressão aritmética* e *progressão geométrica*, nessa ordem.

Sobre sequências, o livro de Xavier e Barreto, o mais antigo analisado, afirma simplesmente que, ao ordenarmos os elementos de um conjunto, formamos uma sequência ou sucessão. Em seguida, classifica as sequências em finitas e infinitas. O livro do Giovanni define que sequência é qualquer função f cujo domínio é $\mathbb{N}^*$, sendo $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. O livro do Iezzi, por sua vez, afirma que uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ é chamada *sequência numérica infinita*. Quando o domínio de f é $\{1, 2, 3, ..., n\}$, têm-se uma *sequência numérica finita*. Essa última definição é a mais razoável pois, caso o domínio fosse simplesmente o conjunto $\mathbb{N}^*$, todas as sequências seriam, obrigatoriamente, infinitas.

Os três livros trazem a definição de que uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante. O livro do Xavier define *PA finita* e *PA infinita* por meio de exemplos, porém sem uma definição formal. Nos três livros, através da generalização dos primeiros termos, é obtida a fórmula do termo geral da PA. O livro do Giovanni chega a mencionar que, a partir dos casos particulares, pode-se formular a hipótese de indução, e comprovar que a fórmula é válida. Porém, não explica o método em si, muito menos realiza tal demonstração. Os três livros mostram uma demonstração para a fórmula da soma dos n primeiros termos (soma parcial) de uma PA. Esta demonstração está na Seção 2.3. Por falta de pré-requisito, nenhum dos livros fazem pelo método da indução. Nenhum dos livros pesquisados comentam sobre o que ocorre quando são somados infinitos termos de uma progressão aritmética.

Sobre progressões geométricas, os três livros trazem a definição de que uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante. O livro do Xavier novamente cita PG finita e PG infinita por meio de exemplos, sem definição formal. Nos três livros, através da generalização dos primeiros termos, é obtida a fórmula do termo geral da PG. Com relação à soma dos n primeiros termos de uma PG, o livro do Xavier não demonstra a sua fórmula, nem comenta que o ocorre quando a razão for 1. Já os livros do Giovanni e do Iezzi, apesar de apresentar uma demonstração semelhante à que está na Seção 3.3, não utilizam o método da indução. Já para obter a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, quando a razão estiver entre -1 e 1, os três livros, partem da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG e usam uma noção intuitiva de limite. Em particular, os livros do Xavier e do Iezzi não comentam o que ocorre quando a razão não estiver entre -1 e 1. O livro do Giovanni diz que a soma dos termos uma PG infinita é chamada *série geométrica*. Diz, também, que quando a razão estiver entre –1 e 1, a série é convergente e quando for menor ou igual a –1 ou maior ou igual 1, ela é divergente. Menciona, em seguida, que somente as séries convergentes têm soma finita. E nada mais é dito sobre as séries divergentes.

O fato é que nenhum dos três livros pesquisados comenta sobre o que ocorre realmente quando são somados infinitos termos de uma PA ou uma PG, isto é, no caso de uma *série*. É omitida a discussão sobre demonstração da divergência destas séries. Mesmo na graduação as séries divergentes são pouco exploradas, sendo em geral o seu estudo limitado à demonstração de que determinada série converge ou não. Contudo, as séries divergentes são amplamente utilizadas nas teorias de renormalização, na Teoria Quântica de Campos (WEINBERG, 2005) e Teoria de Supercordas (POLCHINSKI, 2005).

O livro do Iezzi é o único dos três analisados que relaciona PA com função afim e PG com função exponencial. Nenhum dos três livros relaciona progressões com juros simples ou compostos.

Neste trabalho será discutido um possível aprofundamento dos temas *Sequências* e *Progressões*, à luz de conceitos mais avançados vistos na graduação mas sem que haja a necessidade de ferramentas muito elaboradas de Cálculo. Uma observação é que dois assuntos não vistos no ensino médio impedem o prosseguimento do assunto: *indução* e *limite*.

O Capítulo 1 trata de sequências e séries que, para um maior domínio do assunto, além de definições, têm-se a inserção de conteúdos não vistos no Ensino Médio (como indução, limite e noções de convergência e divergência). Nos capítulos 2 e 3, são apresentadas as progressões vistas no Ensino Médio (PA e PG), porém de maneira aprofundada. No capítulo 4, serão vistas outras sequências. No capítulo 5 é feita uma explanação à cerca das séries divergentes e, complementando o assunto, no capítulo 6 são vistos alguns problemas interessantes.

1 SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Nesse capítulo serão estudadas as definições de *sequências* e *séries*. Será introduzido também o conceito do *princípio da indução finita*, de *limites* e de noções de convergência e divergência, assuntos estes em geral tratados apenas no Ensino Superior.

1.1 SEQUÊNCIAS

Para se obter uma definição de *sequência* de números reais, assim como ocorreu no caso das definições usadas no Ensino Médio, foram analisados três livros: Um curso de Cálculo, de Hamilton Luiz Guidorizzi (GUIDORIZZI, 1987); Análise Real – Volume 1, de Elon Lages Lima (LIMA, 1997); Matemática Discreta, de Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho (MORGADO; CARVALHO, 2013).

Com relação à definição de sequência, os três livros afirmam, basicamente, que uma *sequência* ou *sucessão* de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais. Portanto, para se definir precisamente sequência, é necessário dizer que ela é uma função. Porém, há uma divergência com relação ao domínio dessa função. Tanto em (LIMA, 1997) como em (MORGADO; CARVALHO, 2013), o domínio é o próprio conjunto dos números naturais. Já em (GUIDORIZZI, 1987), ele é um subconjunto dos números naturais. Nesse último caso, as "sequências finitas" também são consideradas sequências. Por essa razão, considera-se aqui, a definição do Guidorizzi:

Definição 1.1. *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$.*

A inserção (ou não) do zero no conjunto $\mathbb{N}$ não prejudica o conceito de sequência. Em (GUIDORIZZI, 1987), $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, ...}. Em (LIMA, 1997), $\mathbb{N}$ = {1, 2, 3, ...}. Já em (MORGADO; CARVALHO, 2013), $\mathbb{N}$ = {1, 2, 3, ...} ou $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, ...}.

A notação a_n é usada para indicar o valor que a sequência assume no natural n. Diz-se que a_n é o *termo geral* da sequência e n é referido como *índice*. É comum usar o símbolo a_n para indicar a sequência de termo geral a_n. Nesse sentido, existem outras notações, tais como $\{a_n\}$, usada em (JR.; MENDELSON, 1994), ou (a_n), usada em (LIMA, 1997).

Não deve-se confundir a sequência a_n com o conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ dos seus termos pois em um conjunto, além de não existirem elementos repetidos, também não importa a ordem em que esses elementos estão inseridos. Por exemplo, a sequência (1, 1, ..., 1, ...) não é o mesmo que o conjunto {1}. Ou então: as sequências (0, 1, 0, 1, ...) e (0, 0, 1, 0, 0, 1, ...) são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a {0, 1}.

O conceito fundamental para uma sequência é o de limite de uma sequência, cuja definição formal, extraída de (GUIDORIZZI, 1999) é:

Definição 1.2. *Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real. Definimos:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*, existe um natural* n_0 *tal que* $n > n_0$ *quando* $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*, existe um natural* n_0 *tal que* $n > n_0 \Rightarrow a_n > \epsilon$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*, existe um natural* n_0 *tal que* $n > n_0 \Rightarrow a_n < -\epsilon$.

Isso significa dizer que, no caso (i) da definição 1.2, os termos de uma sequência a_n aproximam-se de um número fixo L quando n vai ficando grande, temos que L é o limite da sequência, e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (JR.; MENDELSON, 1994). Nesse caso diz-se que a sequência a_n *converge para L* e a sequência é dita *convergente*.

Uma sequência que não é convergente é denotada *divergente*. É isso que ocorre no caso (ii), quando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (diz-se que a sequência diverge para infinito), e no caso (iii), quando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (diz-se que a sequência diverge para menos infinito). A sequência ainda pode ser divergente, mas sem divergir nem para ∞, nem para $-\infty$. Um exemplo desse último caso é a sequência $a_n = (-1)^n$, quando percebe-se que seus termos oscilam entre -1 (para n ímpar) e 1 (para n par).

1.2 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O conceito de sequência está profundamente conectado ao do *princípio da indução finita*. Devido ao fato desse método ter uso constante nos próximos capítulos, se faz necessário seu conhecimento, do qual foi extraído de (MORGADO; CARVALHO, 2013):

Axioma 1. *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que*

(i) $P(1)$ *é válida.*

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$*, a validez de* $P(n)$ *implica na validez de* $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

O Axioma 1, como diz Elon em (LIMA, 2013), é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número. Ele está presente (pelo menos de forma empírica) sempre que, ao afirmarmos a veracidade de uma proposição referente aos números naturais, verificamos que ela é verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e dizemos "assim por diante...".

Um comentário adicional com relação ao princípio da indução finita é de que, como é dito em (HEFEZ, 2014), é importante não confundir *Indução Matemática* com *indução empírica*. Nas ciências naturais, é comum, após um certo número (sempre finito) de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Já a indução matemática serve para estabelecer verdades matemáticas válidas sobre o conjunto dos números naturais. Ou seja, não se trata de mostrar que determinada fórmula é verdadeira para um grande número de casos, mas trata-se de provar que tal fórmula é verdadeira para todo número natural.

1.3 SÉRIES

Quando soma-se infinitos termos de uma sequência, dá-se o nome *série* e denota-se por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ (LIMA, 1997).

Dada uma sequência a_n de números reais, a partir dela formamos uma nova sequência s_n, onde

$$s_1 = a_1,\, s_2 = a_1 + a_2, ..., s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\, etc.$$

Os números s_1, s_2, ..., s_n chamam-se as *reduzidas* ou *somas parciais* da série $\sum a_n$. A parcela a_n é chamada de *termo geral* da série.

Como todo limite, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 + a_2 + ... + a_n$ pode existir ou não. Caso exista, ou seja, se s convergir, a série é convergente. Caso contrário, s será divergente.

Uma observação é o fato de que, como é dito em (BOULOS; ABUD, 2000), alterando ou suprimindo um número finito de termos de uma série, não mudamos o seu caráter, quer dizer, a série e sua alterada são ambas convergentes ou ambas divergentes. No entanto, no caso de convergência, as somas das séries são, em geral, diferentes. Mas, caso seja suprimido um número infinito de termos de uma série, a série remanescente pode mudar o seu comportamento em relação à série original (ver Problema 5 do Capítulo 6).

Existem testes, chamados de *testes de convergência*, para concluir se uma série é convergente ou divergente. Alguns desses testes são apresentados em forma de teoremas na Subseção 1.3.1.

1.3.1 TEOREMAS ÚTEIS

Primeiramente, vamos enunciar um teorema que é suficiente para a discussão da maioria dos casos aqui tratados com relação à convergência ou divergência de séries. Seu enunciado é:

Teorema 1.3. *O termo geral de uma série convergente tem limite zero.*

Demonstração: O Teorema realmente é válido pois, supondo que uma série de termo geral a_n seja convergente. Então, como $a_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$, resulta que: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Como diz o Elon em (LIMA, 1997), o critério contido no Teorema 1.3 constitui a primeira coisa a verificar quando se quer saber se uma série é ou não convergente. Se o termo geral não tende a zero, a série diverge. Agora, se termo geral tender a zero, a série pode ou não convergir.

O teorema a seguir, cujo enunciado foi extraído de (JR.; MENDELSON, 1994), é chamado de *teste de comparação para divergência*. Ele se aplica a *séries positivas*, isto é, séries formadas somente por termos maiores que zero.

Teorema 1.4. *Uma série positiva s é divergente se cada termo é maior ou igual ao correspondente termo da uma série positiva divergente t.*

O próximo teorema é chamado de *teste do limite*, cujo enunciado, extraído de (GUIDORIZZI, 1999), é mostrado a seguir.

Teorema 1.5. *Sejam s e t duas séries positivas. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = L$. Então, se $L > 0$, L real, ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes.*

O último teorema visto aqui, extraído de (NETO, 2015) é o seguinte:

Teorema 1.6. *Seja s uma série. Se $\lim_{n\to\infty} s = \infty$, então $\lim_{n\to\infty} -s = -\infty$.*

Nesse capítulo, foram enunciados apenas os conceitos, axiomas e teoremas que contemplam os propósitos dos temas discutidos nesse trabalho. Para uma abrangência maior do assunto, a sugestão é recorrer a livros de Cálculo e de Análise do Ensino Superior, tais como (GUIDORIZZI, 1999) e (LIMA, 1997).

2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Um tipo de sequência estudada no Ensino Médio, chamada de *progressão aritmética*, é objeto desse capítulo. Seu estudo mais aprofundado passa a ser possível, pois o capítulo 1 trás ferramentas úteis para um maior desenvolvimento do tema, o qual é visto a seguir.

2.1 DEFINIÇÃO

Segue a definição de progressão aritmética, extraída de (MORGADO; CARVALHO, 2013):

Definição 2.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de razão da progressão.*

Uma observação é o fato de que as chamadas *progressões aritméticas finitas*, pela Definição 1.1, são também sequências.

2.2 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão aritmética de razão r. Temos:

$$r = a_2 - a_1 \rightarrow a_2 = a_1 + r$$

$$r = a_3 - a_2 \rightarrow a_3 = a_2 + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

$$r = a_4 - a_3 \rightarrow a_4 = a_3 + r \rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$

Ao avançar, termo a termo, percebe-se que o padrão se mantém: um termo qualquer da progressão sempre será igual ao primeiro termo, somado com a multiplicação da razão pelo número de termos, diminuído de uma unidade. Ou seja, temos o seguinte resultado

Proposição 2.2. *O termo geral de uma PA é dado por*

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{2.1}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 + (1-1)r = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $a_n = a_1 + (n-1)r$, então, temos $a_n + r = a_1 + (n-1)r + r$. Logo, $a_{n+1} = a_1 + nr$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Com relação à convergência ou divergência da PA, analisa-se o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[a_1 + (n-1)\cdot r]$$

Com base no limite acima, têm-se alguns resultados. Vamos apresentá-los utilizando, como auxílio visual, alguns exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de a_n.

Se $r > 0$ então, pelo item (ii) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, a sequência diverge.

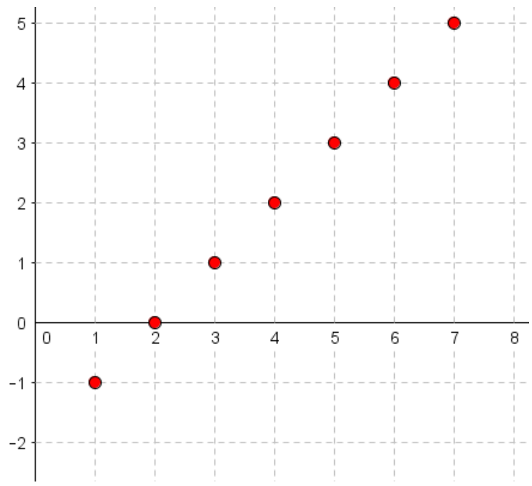

Figura 1 – PA: a_n, para $a_1 = -1$ e $r = 1$

Já se $r < 0$ então, pelo item (iii) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Logo, a sequência diverge.

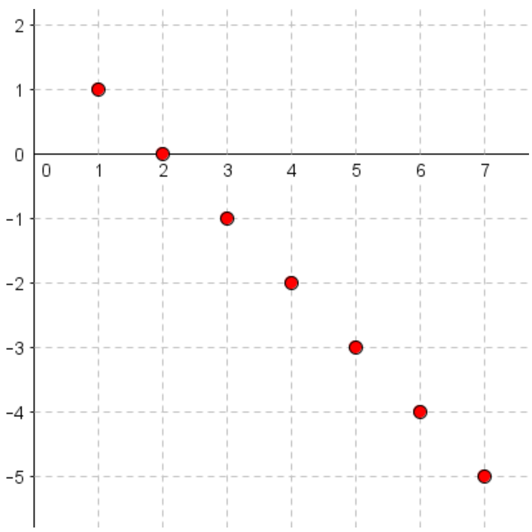

Figura 2 – PA: a_n, para $a_1 = 1$ e $r = -1$

Agora, se $r = 0$ e $a_1 \neq 0$ então, pelo item (i) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1$. Logo, a sequência converge.

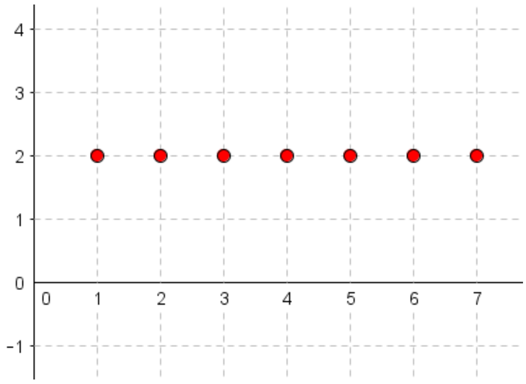

Figura 3 – PA: a_n, para $a_1 = 2$ e $r = 0$

Por fim, se $r = 0$ e $a_1 = 0$ então, pelo item (i) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Logo, a sequência converge.

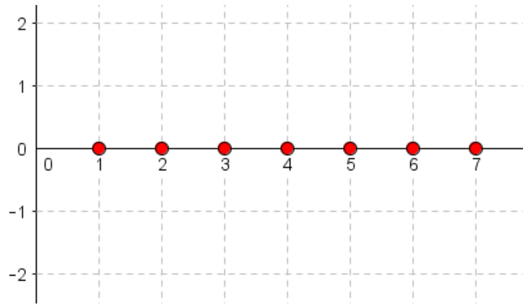

Figura 4 – PA: a_n, para $a_1 = 0$ e $r = 0$

A conclusão é de que a sequência formada pelos termos de uma progressões aritmética converge quando a sua razão for igual a zero. Nesse caso, todos os termos da PA são iguais a um mesmo número e a convergência, obviamente, é para esse número. Nos exemplos anteriores, têm-se uma convergência para o número 2 (Figura 3) e uma convergência para zero (Figura 4).

2.3 SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

Com relação à soma dos termos de uma PA, existem dois casos a considerar. O primeiro é com relação a soma dos termos de uma progressão aritmética finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. Sobre esse tema, segue uma história de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), considerado um dos maiores matemáticos que já existiu, extraída de (BOYER, 1974):

> “Um dia, para manter a classe ocupada o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções a cada um para colocar sua lousa sobre uma mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo, "Aí está"; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o mestre finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única a exibir a resposta correta, 5050, sem nenhum cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara de cabeça a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$, presumidamente por meio da fórmula $n(n + 1)/2$”.

O que está por detrás da ideia de Gauss, é a fórmula da soma dos termos de uma PA finita. Se a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma PA de razão r, podemos escrevê-la na forma $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_n - 2r, a_n - r, a_n)$. Como base nisso, vamos calcular a soma dos n primeiros termos dessa PA, que indicaremos por S_n:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + ... + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + ... + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

Então, obtemos o seguinte resultado

Proposição 2.3. *A soma dos termos de uma PA finita é obtida por*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \tag{2.2}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, ou seja, $S_1 = \dfrac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, então, temos $S_n + a_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1}$. Então, utilizando a fórmula do termo geral da PA, temos que $S_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n + 2a_{n+1}}{2} = \dfrac{(a_1 + a_1 + nr - r)n + 2a_{n+1}}{2}$. Logo, $S_{n+1} = \dfrac{a_1 n - nr + na_{n+1} + 2a_{n+1}}{2} = \dfrac{a_1 n - (a_{n+1} - a_1) + na_{n+1} + 2a_{n+1}}{2}$. Portanto, temos que $S_{n+1} = \dfrac{a_1(n+1) + a_{n+1}(n+1)}{2} = \dfrac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

O segundo caso a considerar é com relação a soma dos termos de uma progressão aritmética infinita. Pelo conceito exposto na Seção 1.3, têm-se um caso de série. E como ela é oriunda de uma PA, chamamos aqui de *série aritmética*. Pelo que foi dito na Seção 2.2 e pelo Teorema 1.3, como o termo geral não tende a zero, a série aritmética é divergente, exceto no caso da razão e do primeiro termo serem zero. Nesse caso, a série pode ser convergente. Vamos observar alguns exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de S_n.

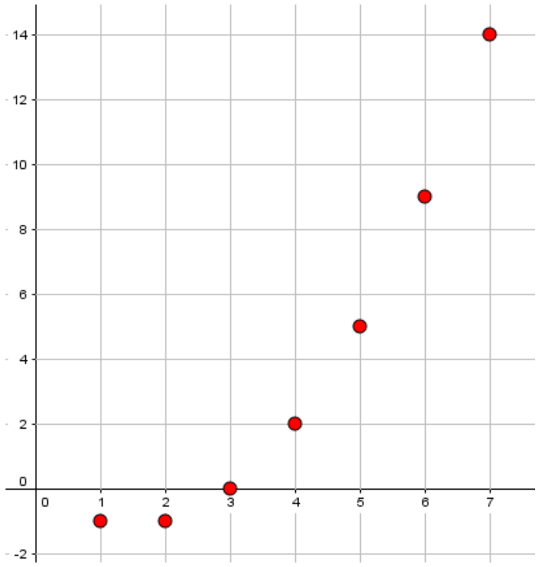

Figura 5 – PA: S_n, para $a_1 = -1$ e $r = 1$

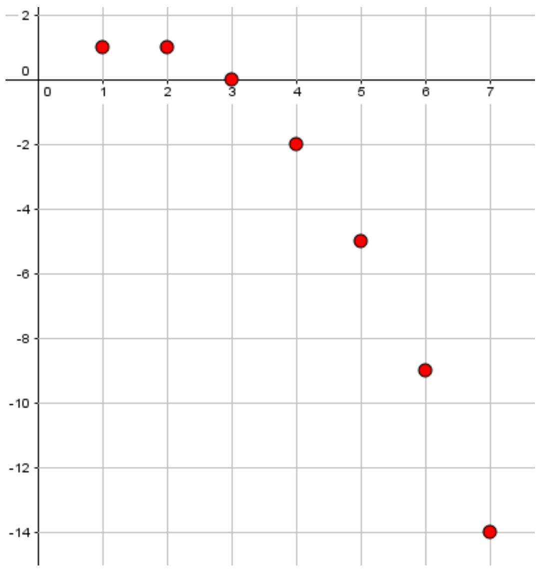

Figura 6 – PA: S_n, para $a_1 = 1$ e $r = -1$

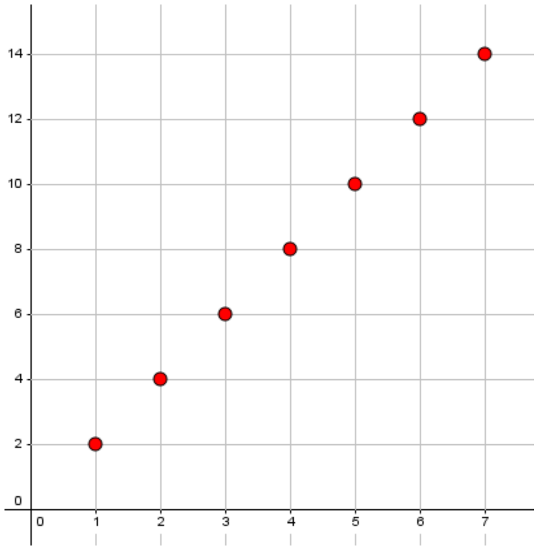

Figura 7 – PA: S_n, para $a_1 = 2$ e $r = 0$

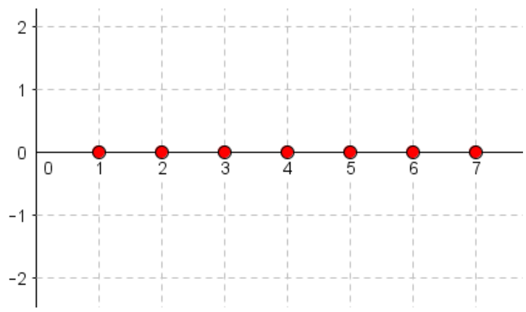

Figura 8 – PA: S_n, para $a_1 = 0$ e $r = 0$

A Figura 8 nos mostra uma convergência para zero. Se substituirmos a_n na Fórmula 2.2, usando a Fórmula 2.1, teremos $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = \dfrac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2}$. Substituindo r e a_1 por zero, temos $S_n = \dfrac{(0 + 0 + (n-1)0)n}{2} = 0$. De fato, uma série aritmética é convergente quando a razão e o primeiro termo forem zero, pois têm-se uma sequência infinita de termos, todos iguais a zero, cuja soma é, trivialmente, igual a zero.

2.4 PA E FUNÇÃO AFIM

Muitos dos diferentes ramos da Matemática possuem conexões. Quando os alunos observam que conteúdos, a princípio distintos, têm uma mesma ideia central, eles começam a visualizar um certo sentido em seus estudos.

Algumas dessas conexões são aquelas que relacionam PA e função afim, e PA e juros simples.

Definição 2.4. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (LIMA, 2013).*

A constante a é conhecida como *coeficiente angular* da função afim.

Acontece que, desenvolvendo a fórmula 2.1, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_n = a_1 + nr - r$$

$$a_n = rn + a_1 - r$$

Essa última expressão pode ser associada a função afim $f(x) = ax + b$, em que:

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & f(x) \\ r & = & a \\ n & = & x \\ a_1 - r & = & b \end{array}$$

Ou seja, uma progressão aritmética pode ser interpretada como uma função afim, porém seu domínio é o conjunto dos números naturais. A razão da progressão é o coeficiente angular da função.

Além disso, como é dito em (LIMA, 2013), uma progressão aritmética pode ser vista geometricamente como uma sequência de pontos $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ igualmente espaçados na reta, com razão $r = x_{n+1} - x_n$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim $f(x) = ax + b$ e $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, é uma progressão aritmética, então os pontos $y_n = f(x_n)$ também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética de razão $y_{n+1} - y_n = (ax_{n+1} + b) - (ax_n + b) = a(x_{n+1} - x_n) = ar$. A conclusão é o fato de que uma função afim transforma uma PA de razão r em outra PA de razão ar, sendo a o coeficiente angular da função.

2.5 PA E JUROS SIMPLES

Definição 2.5. *Chama-se juros a cobrança justificada pelo prazo obtido para o pagamento ou pelo "aluguel" do dinheiro emprestado (IEZZI et al., 2015).*

No regime de juros simples, os juros são constantes por período. Isso significa que, ao calcular os juros em cada um dos períodos em que vigorar a transação, aplica-se a taxa sempre sobre o capital (valor inicial) obtendo, desse modo, o mesmo juro por período.

Assim, um capital C aplicado em regime de juros simples, à taxa i, durante n períodos, gera, por período, um juro igual a $C \cdot i$.

Como os juros são constantes por período, ao final de n períodos, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.6. *Os juros ou rendimento no sistema de juros simples é dado por*

$$J_n = C \cdot i \cdot n \tag{2.3}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $J_1 = C \cdot i \cdot 1 = C \cdot i$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $J_n = C \cdot i \cdot n$, então, temos $J_n + C \cdot i = C \cdot i \cdot n + C \cdot i$. Logo, $J_{n+1} = C \cdot i \cdot (n + 1)$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

O montante (valor final) dessa aplicação será:

$$M = C + J$$

$$M_n = C + C \cdot i \cdot n$$

Portanto, têm-se:

Proposição 2.7. *O montante no sistema de juros simples é dado por*

$$M_n = C + n \cdot C \cdot i \tag{2.4}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $M_1 = C + C \cdot i \cdot 1 = C + C \cdot i$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $M_n = C + C \cdot i \cdot n$, então, temos $M_n + C \cdot i = C + C \cdot i \cdot n + C \cdot i$. Logo, $M_{n+1} = C + C \cdot i \cdot (n + 1)$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Mas, assim como é dito em (MORGADO; CARVALHO, 2013), muitas vezes é conveniente enumerar os termos de uma progressão aritmética a partir do zero. Dessa maneira, a Fórmula 2.1 é reescrita da seguinte maneira: $a_n = a_0 + nr$.

Essa última expressão pode ser associada a fórmula 2.4, em que:

$$
\begin{aligned}
a_n &= M_n \\
a_0 &= C \\
n &= n \\
r &= C \cdot i
\end{aligned}
$$

Logo, no sistema de juros simples, o montante cresce (ou decresce) em progressão aritmética e o valor do crescimento (ou decrescimento), a cada período, é constante e obtido multiplicando-se o capital pela taxa de juros, que nada mais é do que o valor da razão da progressão aritmética.

3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Outro tipo de sequência estudada no Ensino Médio é a *progressão geométrica*. Assim como ocorreu com as progressões aritméticas, é possível, com conceitos do capítulo 1, aprofundar o estudo desse tipo de sequência. Isso ocorrerá nesse capítulo.

3.1 DEFINIÇÃO

Segue a definição de progressão geométrica, extraída de (MORGADO; CARVALHO, 2013):

Definição 3.1. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da progressão.*

Pela Definição 3.1, temos que uma PG não possui termos nulos, nem têm razão nula. Além disso, as chamadas *progressões geométricas finitas*, pela Definição 1.1, são também sequências.

3.2 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão geométrica de razão q. Temos:

$$q = \frac{a_2}{a_1},$$

$$a_2 = a_1 \cdot q,$$

$$q = \frac{a_3}{a_2},$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2,$$

$$q = \frac{a_4}{a_3},$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3.$$

Se avançarmos, termo a termo, percebe-se que o padrão se mantém: um termo qualquer da progressão sempre será igual ao primeiro termo multiplicado pela razão elevada ao número de termos, diminuído de uma unidade. Ou seja, temos o seguinte resultado

Proposição 3.2. *O termo geral de uma PG é dado por*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{3.1}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, então, temos $a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q \to a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Com relação à convergência ou divergência da PG, assim como ocorreu em PA, analisa-se o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{q} \cdot q^n$$

Com base no limite acima, têm-se alguns resultados. Vamos apresentá-los utilizando, como auxílio visual, alguns exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de a_n.

Se $q = 1$ então, pelo item (i) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1$. Logo, a sequência converge.

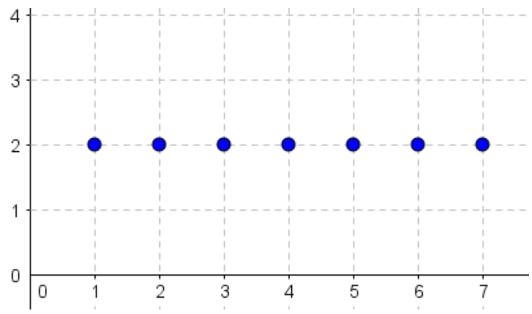

Figura 9 – PG: a_n, para $a_1 = 2$ e $q = 1$

Se $q = -1$ então, para n par têm-se o valor $-a_1$, e para n ímpar têm-se o valor a_1. No entanto, é um resultado conhecido que, se uma sequência converge para determinado limite, toda subsequência converge para o mesmo limite. Portanto, a sequência a seguir não converge.

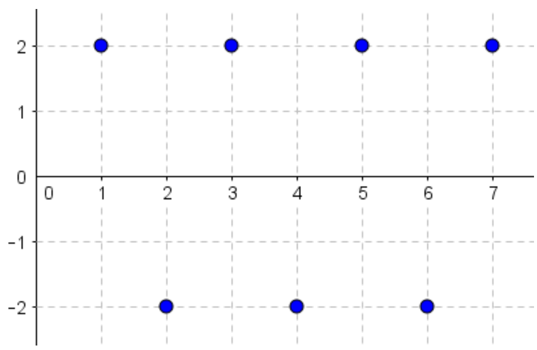

Figura 10 – PG: a_n, para $a_1 = 2$ e $q = -1$

Se $q > 1$ e $a_1 > 0$ então, pelo item (ii) da definição 1.2, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, a sequência diverge.

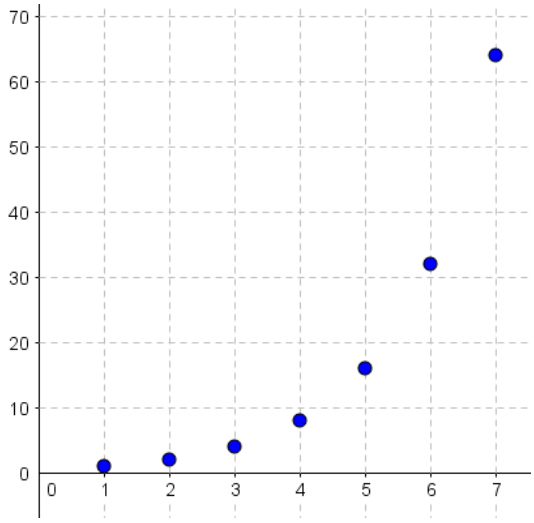

Figura 11 – PG: a_n, para $a_1 = 1$ e $q = 2$

Já se $q > 1$ e $a_1 < 0$ então, pelo item (iii) da definição 1.2, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Logo, a sequência diverge.

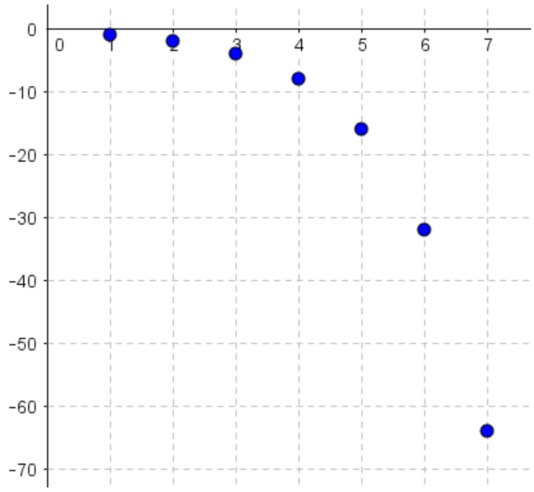

Figura 12 – PG: a_n, para $a_1 = -1$ e $q = 2$

Agora, se $q < -1$ e $a_1 > 0$ então, para n par, os termos vão ficando cada vez menores enquanto que, para n ímpar, eles vão ficando cada vez maiores. Logo, a sequência é divergente.

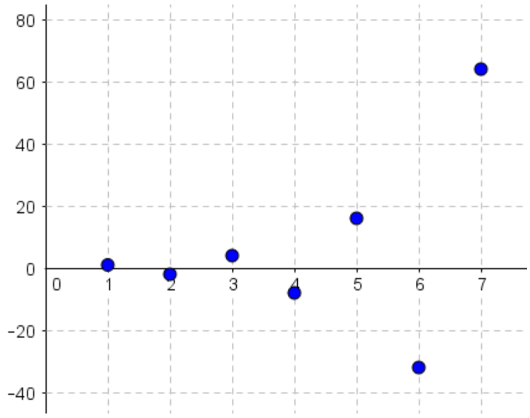

Figura 13 – PG: a_n, para $a_1 = 1$ e $q = -2$

Mas, se $q < -1$ e $a_1 < 0$ então, para n par, os termos vão ficando cada vez maiores enquanto que, para n ímpar, eles vão ficando cada vez menores. Logo, a sequência é divergente.

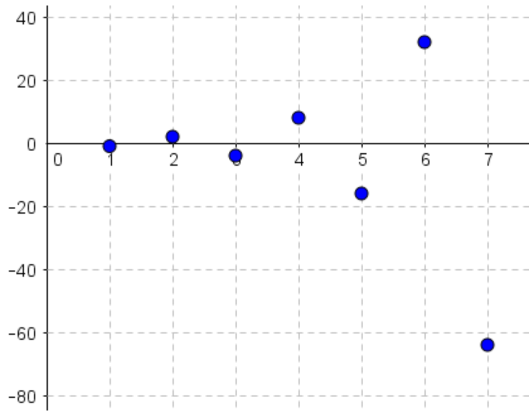

Figura 14 – PG: a_n, para $a_1 = -1$ e $q = -2$

Por fim, se $-1 < q < 1$ então, pelo item (i) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Logo, a sequência converge.

Vejamos dois exemplos gráficos:

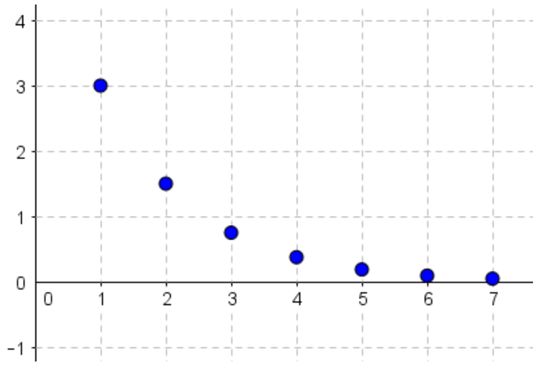

Figura 15 – PG: a_n, para $a_1 = 3$ e $q = \dfrac{1}{2}$

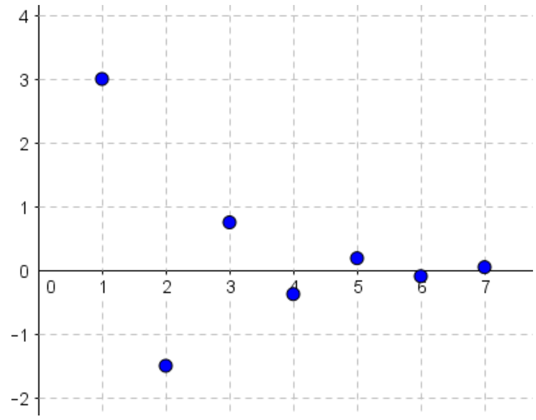

Figura 16 – PG: a_n, para $a_1 = 3$ e $q = -\dfrac{1}{2}$

A conclusão é de que a sequência formada pelos termos de uma progressões geométrica converge quando sua razão for 1 (como na Figura 9, em que a convergência é para o número 2) ou quando sua razão estiver entre -1 e 1 (em que a convergência é para zero), como nas Figuras 15 e 16.

3.3 SOMA DOS TERMOS DE UMA PG

Com relação à soma dos termos de uma PG, temos dois casos a considerar.

O primeiro é com relação à soma dos termos de uma progressão geométrica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. Nesse caso, têm-se duas fórmulas, uma para $q = 1$ e outra para $q \neq 1$, e que são obtidas da maneira mostrada a seguir.

Para q = 1, tem-se:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1$$

Então, obtemos o seguinte resultado

Proposição 3.3. *A soma dos termos de uma PG finita, para q = 1, é dada por*

$$S_n = n \cdot a_1 \tag{3.2}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $S_1 = 1 \cdot a_1 = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $S_n = n \cdot a_1$, então, temos $S_n + a_{n+1} = n \cdot a_1 + a_{n+1}$. Logo, usando a Fórmula 3.1, temos $S_{n+1} = n \cdot a_1 + a_1 \cdot q^n$. Como $q = 1$, temos $S_{n+1} = n \cdot a_1 + a_1 = (n+1) \cdot a_1$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Para $q \neq 1$, têm-se:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}$$

Multiplicando por q os dois membros da igualdade acima, temos:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^n$$

Fazendo $q \cdot S_n - S_n$, temos:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

Então, obtemos o seguinte resultado

Proposição 3.4. *A soma dos termos de uma PG finita, para $q \neq 1$, é dada por*

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \tag{3.3}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \rightarrow S_1 = \dfrac{a_1(q^1 - 1)}{q-1} = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$, então, temos $S_n + a_{n+1} = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1} + a_{n+1}$. Logo, usando a Fórmula 3.1, temos $S_{n+1} = \dfrac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1} + a_1 \cdot q^n = \dfrac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q-1}$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

O segundo caso a considerar é com relação a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Pelo conceito exposto na Seção 1.3, têm-se um caso de série. Como ela é oriunda de uma PG, chamamos aqui de *série geométrica*. Pelo que foi dito na Seção 3.2 e pelo teorema 1.3, a série geométrica é divergente, exceto no caso da razão estar entre -1 e 1. Nesse caso, ainda pelo teorema 1.3, como o termo geral tende a zero, a série pode ser convergente. Vamos observar exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de S_n.

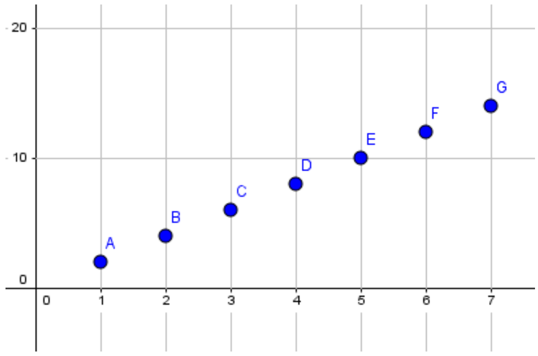

Figura 17 – PG: S_n, para $a_1 = 2$ e $q = 1$

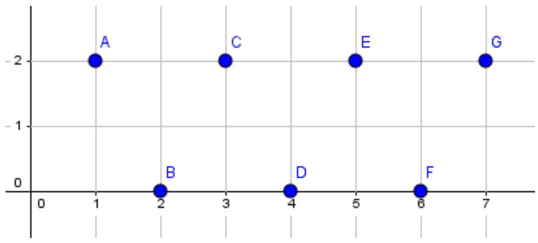

Figura 18 – PG: S_n, para $a_1 = 2$ e $q = -1$

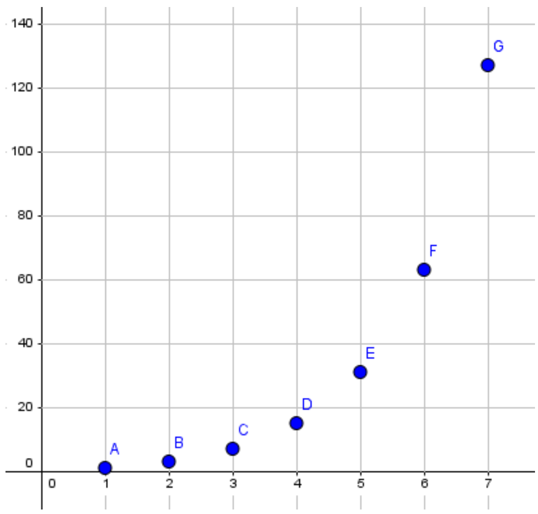

Figura 19 – PG: S_n, para $a_1 = 1$ e $q = 2$

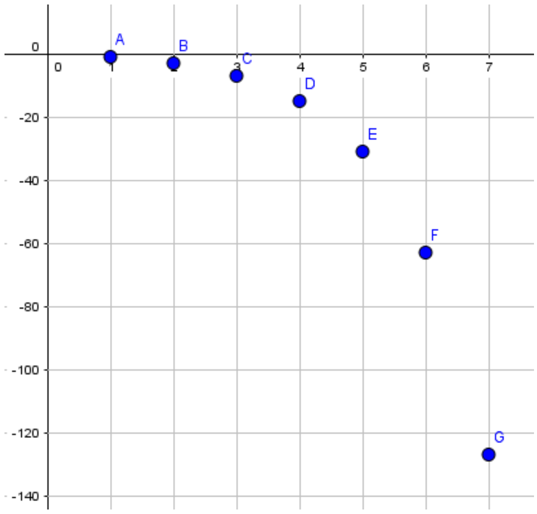

Figura 20 – PG: S_n, para $a_1 = -1$ e $q = 2$

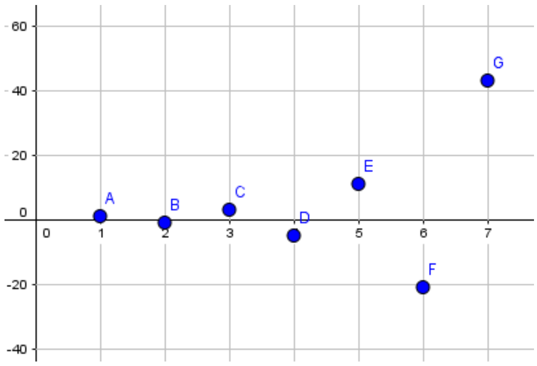

Figura 21 – PG: S_n, para $a_1 = 1$ e $q = -2$

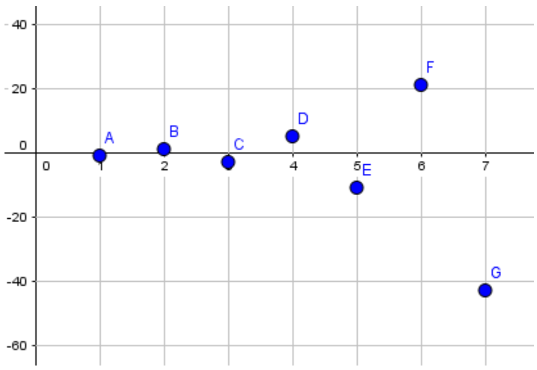

Figura 22 – PG: S_n, para $a_1 = -1$ e $q = -2$

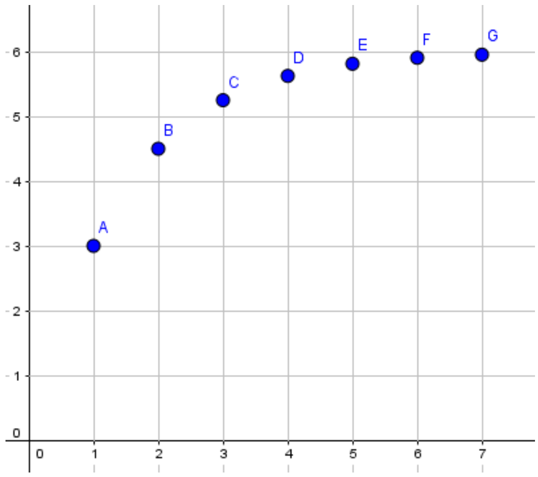

Figura 23 – PG: S_n, para $a_1 = 3$ e $q = \dfrac{1}{2}$

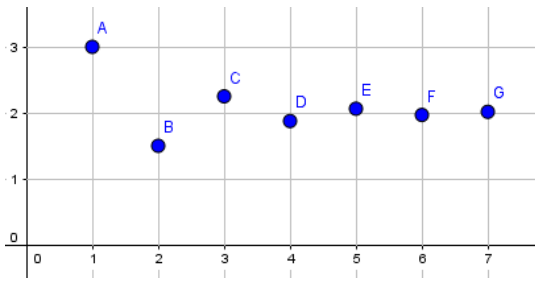

Figura 24 – PG: S_n, para $a_1 = 3$ e $q = -\dfrac{1}{2}$

A Figura 23, em que $0 < q < 1$, nos mostra uma convergência para o número 6, e a Figura 24, em que $-1 < q < 0$, nos mostra uma convergência para o número 2. De fato, a série geométrica, quando $-1 < q < 1$, é convergente pois temos que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ e, usando esse resultado na Fórmula 3.3, temos:

$$S = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \tag{3.4}$$

A expressão 3.4 é conhecida como fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, com $-1 < q < 1$.

3.4 PG E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Existem conexões que relacionam PG e função exponencial, e PG e juros compostos, vistas a seguir.

Definição 3.5. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se exponencial quando têm-se $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (LIMA, 2013).*

A constante a é conhecida como *base* da função exponencial.

Existe, também, a chamada função de tipo exponencial. Nesse caso, a lei é da forma $f(x) = b \cdot a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

Mas, como já foi visto, a fórmula do termo geral de uma PG é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Então, desenvolvendo essa fórmula, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot \frac{q^n}{q}$$

$$a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$$

Essa última expressão pode ser associada à função de tipo exponencial $y = b \cdot a^x$, em que:

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & f(x) \\ \frac{a_1}{q} & = & b \\ q & = & a \\ n & = & x \end{array}$$

Ou seja, uma progressão geométrica pode ser interpretada como uma função de tipo exponencial, porém seu domínio é o conjunto dos números naturais. A razão da progressão é a base da função.

Além disso, como é dito em (LIMA, 2013), se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ e $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, é uma progressão aritmética de razão r, isto é, $x_{n+1} = x_n + r$, então os valores $f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$, $f(x_2) = b \cdot a^{x_2}$, ..., $f(x_n) = b \cdot a^{x_n}$, ..., formam uma progressão geométrica de razão a^r, pois $f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_n + r} = b \cdot a^{x_n} \cdot a^r = f(x_n) \cdot a^r$. A conclusão é o fato de que uma função de tipo exponencial transforma uma PA de razão r em uma PG de razão ar, sendo a a base da função.

3.5 PG E JUROS COMPOSTOS

No regime de juros compostos, os juros de cada período são somados ao capital (valor inicial) para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Nesse caso, o valor da dívida é sempre corrigida e a taxa de juros incide sobre esse novo valor.

Assim, um capital C aplicado em regime de juros compostos, à taxa i, durante n períodos, produz ao final do primeiro período um montante $M_1 = C + Ci = C(1+i)$. Ao final do segundo período, $M_2 = M_1 + M_1 i = C(1+i)^2$. Ao final do terceiro período, $M_3 = M_2 + M_2 i = C(1+i)^3$. Ao final do n-ésimo período, temos o seguinte resultado

Proposição 3.6. *O montante no sistema de juros compostos é dado por*

$$M_n = C(1+i)^n \tag{3.5}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $M_1 = C(1+i)^1 = C(1+i)$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $M_n = C(1+i)^n$, então, temos $M_n + M_n \cdot i = C(1+i)^n + M_n \cdot i$. Logo, $M_{n+1} = C(1+i)^n + C(1+i)^n \cdot i = C(1+i)^n \cdot (1+i) = C(1+i)^{n+1}$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Mas, assim como é dito em (MORGADO; CARVALHO, 2013), em muitos casos é mais natural numerar os termos a partir do zero. Dessa maneira, a Fórmula 3.1 é reescrita da seguinte maneira: $a_n = a_0 q^n$.

Essa última expressão pode ser associada a Fórmula 3.5, em que:

$$\begin{aligned} a_n &= M_n \\ a_0 &= C \\ n &= n \\ q &= 1+i \end{aligned}$$

Logo, no sistema de juros compostos, o montante cresce (ou decresce) em progressão geométrica e o valor do crescimento (ou decrescimento), a cada período, é obtido multiplicando-se o montante do período anterior pela taxa de juros mais uma unidade. Logo, a razão da progressão geométrica é simplesmente o valor de $1 + i$, onde i é a taxa de juros constante de cada período para o seguinte.

4 OUTROS TIPOS DE PROGRESSÕES

As progressões vistas no Ensino Médio são, basicamente, as progressões aritméticas e as progressões geométricas.

Porém, existem outros tipos de progressões, tais como a progressão harmônica, a aritmético-geométrica, geométrico-aritmética e a sequência de Fibonacci, que serão vistas a seguir.

4.1 PROGRESSÃO HARMÔNICA

4.1.1 DEFINIÇÃO

Segue a definição de progressão harmônica, extraída de (LOPES, 1998):

Definição 4.1. *Uma progressão harmônica (PH) é uma sequência de números, diferentes de zero, tais que os seus inversos formam uma progressão aritmética (PA).*

Uma observação é o fato de que as chamadas *progressões harmônicas finitas*, pela Definição 1.1, são também sequências.

4.1.2 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão harmônica. Então, por 4.1, a sequência dada por

$$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ..., \frac{1}{a_n}, ...\right)$$

é uma progressão aritmética. Sendo r a razão da PA, temos:

$$r = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}.$$

Utilizando 2.1, segue que:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$$

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{(n-1)(a_1 - a_2) + a_2} \tag{4.1}$$

A expressão 4.1 é conhecida como fórmula do termo geral da PH.

Com relação à convergência ou divergência da PH, analisa-se o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito. Então, têm-se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 a_2}{(n-1)(a_1 - a_2) + a_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{a_1 a_2}{(a_1 - a_2) + a_2} = 0$$

A conclusão é de que a sequência formada pelos termos de uma progressão harmônica converge para zero.

4.1.3 SÉRIE HARMÔNICA

Quando soma-se os infinitos termos de uma progressão harmônica, pelo conceito exposto na Seção 1.3, têm-se um caso de série. Porém, adotaremos também aqui, o que os livros em geral costumam chamar de *série harmônica*, um caso particular da soma dos infinitos termos de uma progressão harmônica, que é aquela composta pelos inversos dos números inteiros positivos, ou seja:

$$s = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Acontece que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Logo, pelo Teorema 1.3, a série harmônica pode ou não convergir. Vamos, então, usar o Teorema 1.4, para provar o teorema a seguir.

Teorema 4.2. *A série harmônica é divergente.*

Demonstração: Vamos comparar a série harmônica

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ...$$

com a série

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ...$$

Comparando as duas séries termo a termo, temos que $s_n \geq t_n$. Além disso, temos

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = 1 + 1 + 1 + ...$$

Ou seja, a série t diverge. Como ambas possuem termos positivos, pelo Teorema 1.4 segue que série s diverge.

A divergência da série harmônica ocorre de uma maneira extremamente lenta. Segue um trecho de um artigo sobre o assunto, extraído de (GARBI, 2000):

> "Imaginemos que no momento em que o Universo foi criado, no famoso Big Bang, o mais veloz dos computadores atualmente existentes tivesse sido colocado a somar os termos da série harmônica. A que soma imagina o leitor que o computador teria chegado hoje, 12 bilhões de anos depois? Certamente a um valor bem grande, pois a soma tende a infinito, não é? Os mais rápidos computadores atuais realizam $2,048 \cdot 10^{12}$ somas por segundo. Em 12 bilhões de anos existem cerca de $3,8 \cdot 10^{17}$ segundos, de modo que teriam sido somadas $7,78 \cdot 10^{29}$ parcelas. Comparando com o número de parcelas necessárias para atingir 70, vemos que o hipotético computador disparado na origem dos tempos não teria hoje atingido esse modesto número. Apesar dessa incompreensível lentidão com que avança, a soma cresce ilimitadamente (...)".

A palavra harmônica é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda, quando esta vibra. Tem a ver, portanto, com a harmonia do som intermediário relativo aos outros dois sons.

4.1.4 SOMA DOS TERMOS DE UMA PH

Com relação à soma dos termos de uma PH, existem dois casos a considerar.

O primeiro é com relação a soma dos termos de uma progressão harmônica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. Nesse caso, têm-se como resultado um número real.

O segundo caso a considerar é com relação a soma dos termos de uma progressão harmônica infinita. Pelo que foi dito na subseção 4.1.2 e pelo Teorema 1.3, a soma dos termos de uma progressão harmônica infinita pode convergir. Vamos, então, usar o Teorema 1.5 para provar o teorema a seguir.

Teorema 4.3. *A soma dos termos de uma progressão harmônica decrescente e infinita de termos positivos é divergente.*

Demonstração:

Supondo que tenhamos duas séries, a formada pela soma dos termos de uma progressão harmônica decrescente e infinita de termos positivos e a série harmônica (que também é decrescente e formada por termos positivos), cujos termos gerais são, respectivamente, $a_n = \dfrac{a_1 a_2}{(n-1)(a_1 - a_2) + a_2}$ e $\dfrac{1}{n}$. Então, $L = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{a_1 a_2}{(n-1)(a_1 - a_2) + a_2}}$.

Logo,

$$L = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{(n-1)(a_1 - a_2)}{n \cdot a_1 \cdot a_2} + \frac{a_2}{n \cdot a_1 \cdot a_2} \right] = \frac{a_1 - a_2}{a_1 \cdot a_2}.$$

Como a PH é decrescente, $a_1 > a_2$ e, consequentemente, $L > 0$. Então, como a série harmônica diverge, pelo Teorema 1.5, a soma dos termos de uma progressão harmônica decrescente e infinita de termos positivos decrescente, diverge.

Pelos Teoremas 1.6 e 4.3, temos que a soma dos termos de uma progressão harmônia crescente e infinita de termos negativos também é divergente.

Uma progressão harmônica infinita decrescente de termos positivos têm relação com uma PA infinita e crescente de termos positivos. Mesmo que essa PA começasse com termos negativos, como a sequência é crescente, teríamos a partir de um certo momento, somente termos positivos, tanto para PA como para PH, fazendo com que essa divergisse.

Da mesma maneira, uma progressão harmônica infinita e crescente de termos negativos têm relação com uma PA infinita e decrescente de termos negativos. Mesmo que essa PA começasse com termos positivos, como a sequência é decrescente, teríamos a partir de um certo momento, somente termos negativos, tanto para PA como para PH, fazendo com que essa divergisse.

Com base no que foi dito, chegamos no seguinte teorema:

Teorema 4.4. *A soma dos termos de uma progressão harmônica infinita é divergente.*

Isso nos diz que, não interessa a qual progressão aritmética está associada, uma progressão harmônica infinita sempre diverge.

4.2 PROGRESSÃO ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA

A definição da Progressão aritmético-geométrica pode ser encontrada em diversos trabalhos, como em (MARTINS, 2013).

4.2.1 DEFINIÇÃO

Definição 4.5. *Uma progressão aritmético-geométrica (PAG) é uma sequência na qual os seus termos são obtidos quando se multiplica ordenadamente os termos de uma PA pelos termos de uma PG de primeiro termo igual a 1.*

Então, a progressão aritmético-geométrica é a sequência cujos primeiros termos são $(a_1, (a_1 + r) \cdot q, (a_1 + 2r) \cdot q^2, ...)$, em que r e q são, respectivamente, a razão aritmética e razão geométrica da progressão aritmético-geométrica.

Uma observação é o fato de que as chamadas *progressões aritmético-geométricas finitas*, pela Definição 1.1, são também sequências.

Também convém ressaltar que, pela Definição 3.1, $q \neq 0$.

4.2.2 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão aritmético-geométrica. Temos:

$$a_2 = (a_1 + r) \cdot q$$

$$a_3 = (a_1 + 2r) \cdot q^2$$

$$a_4 = (a_1 + 3r) \cdot q^3$$

Se avançarmos, termo a termo, percebe-se que o padrão se mantém. Ou seja, temos o seguinte resultado

Proposição 4.6. *O termo geral de uma PAG é dado por*

$$a_n = [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}. \tag{4.2}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $a_1 = [a_1 + (1-1)r]q^{1-1} = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $a_n = [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}$, então, temos $a_n \cdot q + r \cdot q^n = [a_1 + (n-1)r]q^n + r \cdot q^n$.

Logo, $a_{n+1} = [a_1 + (n-1)r + r]q^n = [a_1 + nr]q^n$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Com relação à convergência ou divergência da PAG, assim como ocorreram em PA e em PG, analisa-se o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}$$

Com base no limite acima, têm-se alguns resultados. Se $r < 0$ e $q > 1$ então, pelo item (iii) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Logo, a sequência diverge. Se $r < 0$ e $q < -1$ então, para n par, os termos vão ficando cada vez maiores enquanto que, para n ímpar, eles vão ficando cada vez menores. Logo, a sequência é divergente. Se $r < 0$ e $-1 < q < 1$ então, pelo item (i) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Logo, a sequência converge. Se $r < 0$ e $q = -1$ então, para n par, os termos vão ficando cada vez maiores enquanto que, para n ímpar, eles vão ficando cada vez menores. Logo, a sequência é divergente. Já se $r > 0$ e $q > 1$ então, pelo item (ii) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, a sequência diverge. Agora, se $r > 0$ e $q < -1$ então, para n ímpar, os termos vão ficando cada vez maiores enquanto que, para n par, eles vão ficando cada vez menores. Logo, a sequência é divergente. Mas, se $r > 0$ e $q = -1$ então, para n ímpar, os termos vão ficando cada vez maiores enquanto que, para n par, eles vão ficando cada vez menores. Logo, a sequência é divergente. Por fim, se $r > 0$ e $-1 < q < 1$ então, pelo item (i) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Logo, a sequência converge.

A conclusão é de que a sequência formada pelos termos de uma progressões aritmético-geométrica converge somente quando $-1 < q < 1$. Nesse caso, a medida que forem aumentando os termos da PAG, os seus valores vão se aproximando de zero.

Convém observar que, caso r = 0, é formada uma progressão geométrica, já vista no Capítulo 3 e caso q = 1, é formada uma progressão aritmética, já vista no capítulo 2.

4.2.3 SOMA DOS TERMOS DE UMA PAG

Com relação à soma dos termos de uma progressão aritmético-geométrica, temos dois casos a considerar.

O primeiro é com relação a soma dos termos de uma progressão aritmético-geométrica finita. Nesse caso, têm-se uma fórmula que é obtida da maneira mostrada a seguir.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + r)q + ... + [a_1 + (n-1)r]q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + (a_1q + ... + a_1q^{n-1}) + (rq + ... + (n-1)rq^{n-1})$$

$$qS_n = (a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^n) + (rq^2 + ... + (n-1)rq^n)$$

Usando a Fórmula 3.3, têm-se que $r(q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}) = r\left(q\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}\right)$. Então, fazendo $S_n - q.S_n$, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n + r\left(q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right) - (n-1)rq^n$$

$$(1-q)S_n = a_1(1-q^n) + rq\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1}\right)$$

$$(1-q)S_n = a_1(1-q^n) + rq\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)q^n}{1-q}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{(1-q)^2} \tag{4.3}$$

A expressão 4.3 é conhecida como fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmético-geométrica finita, com $q \neq 1$. Caso $q = 1$, como já comentado, é formada uma progressão aritmética, cuja fórmula foi vista na Seção 2.3.

O segundo caso é que com relação a soma dos termos de uma progressão aritmético-geométrica infinita. Pelo conceito exposto na Seção 1.3, têm-se um caso de série. No caso, uma série aritmético-geométrica.

Caso r = 0, como já dito, é formada uma progressão geométrica, cuja fórmula foi vista na Seção 3.3.

Caso q = 1, como já foi visto, é formada uma progressão aritmética, cuja soma infinita é discutida na Seção 2.3.

Para os demais casos, pelo que foi dito na Seção 4.2.2 e pelo teorema 1.3, a série aritmético-geométrica é divergente, exceto naqueles em que $-1 < q < 1$ pois, pelo teorema 1.3, como o termo geral tende a zero, a série pode ser convergente. E de fato é, pois temos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ e, usando esse resultado na Fórmula 4.3, temos:

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq(1-nq^{n-1}+(n-1)q^n)}{(1-q)^2}$$

$$S = \frac{a_1(1-0)}{1-q} + \frac{rq(1-n\cdot 0+(n-1)\cdot 0)}{(1-q)^2}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2} \tag{4.4}$$

A expressão 4.4 é conhecida como fórmula da soma dos termos de uma PAG infinita, com $-1 < q < 1$.

4.3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICO-ARITMÉTICA

4.3.1 DEFINIÇÃO

Definição 4.7. *Uma progressão geométrico-aritmética (PGA) é uma sequência infinita na qual os seus termos são obtidos quando se soma ordenadamente os termos de uma PG com os termos de uma PA de primeiro termo igual a 0.*

Então, a progressão geométrico-aritmética é a sequência cujos primeiros termos são $(a_1, a_1q + r, a_1q^2 + 2r, ...)$, em que r e q são, respectivamente, a razão aritmética e razão geométrica da progressão geométrico-aritmética.

Uma observação é o fato de que as chamadas *progressões geométrico-aritméticas finitas*, pela Definição 1.1, são também sequências.

4.3.2 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão geométrico-aritmética. Temos:

$$a_2 = a_1q + r$$

$$a_3 = a_1q^2 + 2r$$

$$a_4 = a_1q^3 + 3r$$

Se avançarmos, termo a termo, percebe-se que o padrão se mantém. Logo, temos o seguinte resultado

Proposição 4.8. *O termo geral de uma PGA é dado por*

$$a_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r \tag{4.5}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $a_1 = a_1q^{1-1} + (1-1)r = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $a_n = a_1q^{n-1} + (n-1)r$, então, temos $a_n \cdot q = (a_1q^{n-1} + (n-1)r) \cdot q$. Logo, $a_n \cdot q = a_1q^n + (n-1)r \cdot q$. Então, $a_n \cdot q + r \cdot (n \cdot (1-q) + q) = a_1 \cdot q^n + (n-1)r \cdot q + r \cdot (n \cdot (1-q) + q)$. Ou seja, $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n + n \cdot r \cdot q - r \cdot q + n \cdot r - n \cdot r \cdot q + r \cdot q = a_1 \cdot q^n + n \cdot r$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Com relação à convergência ou divergência da PGA, assim como ocorreu com as outras progressões, analisa-se o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[a_1q^{n-1} + (n-1)r]$$

Com base no limite acima, se $r > 0$ então, pelo item (ii) da definição 1.2, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, a sequência diverge. Já, se $r < 0$ então, pelo item (iii) da definição 1.2, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Logo, a sequência diverge. Portanto, a sequência formada pelos termos de uma progressão geométrico-aritmética é divergente.

Caso r = 0, têm-se uma progressão geométrica, cujos casos foram discutidos na Seção 3.2.

4.3.3 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICO-ARITMÉTICA

Com relação à soma dos termos de uma progressão geométrico-aritmética, temos dois casos a considerar.

O primeiro é com relação a soma dos termos de uma progressão geométrico-aritmética finita. Nesse caso, têm-se uma fórmula que é obtida da maneira mostrada a seguir.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + r + ... + a_1q^{n-1} + (n-1)r$$

$$S_n = a_1(1 + q + ... + q^{n-1}) + r(1 + 2 + ... + (n-1))$$

Mas $1 + q + ... + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ e $1 + 2 + ... + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, pois tratam-se de somas de progressão geométrica e progressão aritmética, respectivamente. Então, temos:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{nr(n-1)}{2} \tag{4.6}$$

A expressão 4.6 é conhecida como fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrico-aritmética finita, com $q \neq 1$. Caso q = 1, é formada uma progressão aritmética, cuja fórmula foi vista na Seção 2.3.

Caso r = 0, têm-se a soma dos termos uma progressão geométrica, tema já foi discutido na Seção 3.3.

O segundo caso a considerar é com relação a soma dos termos de uma progressão geométrico-aritmética infinita. Pelo conceito exposto na Seção 1.3, têm-se um caso de série. No caso, uma série geométrico-aritmética.

Caso q = 1, como já foi visto, é formada uma progressão aritmética, cuja soma infinita é discutida na Seção 2.3.

Caso r = 0, têm-se a soma dos termos uma progressão geométrica infinita, tema já discutido na Seção 3.3.

Para os demais casos, pelo que foi dito na Seção 4.3.2 e pelo teorema 1.3, a série geométrico-aritmética é divergente.

4.4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A Sequência de Fibonacci é amplamente conhecida (MRáS, 2016). Ela pode ser definida conforme abaixo.

4.4.1 DEFINIÇÃO

Definição 4.9. *A sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais na qual os dois primeiros termos são iguais a 1 e cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma dos dois termos anteriores.*

Portanto, a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) é a sequência de Fibonacci.

4.4.2 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Observando a definição, têm-se:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}(n > 2) \tag{4.7}$$

Na Fórmula 4.7, pode-se determinar, a partir do terceiro, qualquer termo da sequência de Fibonacci. Porém, haverá a necessidade de se conhecer os dois termos imediatamente anteriores.

Mas, com a Fórmula 4.8, conhecida como *fórmula de Binet*, pode-se determinar qualquer termo, independente do conhecimento de outros termos da sequência.

Proposição 4.10. *O termo geral da sequência de Fibonacci é dado por*

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \tag{4.8}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $a_1 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = 1 = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $a_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$, então, temos

$$a_n + a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + a_{n-1}.$$

Logo, $a_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$.

Portanto, $a_{n+1} = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left[\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{5}}$

Pela Definição 4.9, como $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, temos $a_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$

Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

Com relação à convergência ou divergência da sequência de Fibonacci, analisa-se o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Com base no limite que acima, têm-se que, pelo item (ii) da definição 1.2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, a sequência de Fibonacci é divergente.

A fração $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398$ é conhecida como *número de ouro* e é representada pela letra grega Φ. O fato é que, quando dividimos um termo qualquer da sequência de Fibonacci pelo termo imediatamente anterior, obtemos um número próximo ao número de ouro (POSSEBON, 2016). E esse valor torna-se cada vez mais próximo à medida que consideramos dois números da sequência cada vez maiores. Mais precisamente, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi$. Esse fato pode ser comprovado da seguinte maneira:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = L$, temos

$$L = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$$

A solução positiva dessa equação é $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi$.

A sequência de Fibonacci e o número de ouro possuem diversas aplicações e podem ser encontrados na natureza, em obras de arte, em construções, no corpo humano, etc. Para saber mais, ver (ZAHN, 2011).

4.4.3 SOMA DOS TERMOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Com relação à soma dos termos da sequência de Fibonacci, temos dois casos a considerar.

O primeiro é com relação a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci. A soma é um número real e o cálculo para essa soma pode ser obtido da maneira vista a seguir (SENA, 2013).

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Mas, como $a_3 = a_1 + a_2$, temos que $a_1 = a_3 - a_2$. Como $a_4 = a_2 + a_3$, temos que $a_2 = a_4 - a_3$. Como $a_5 = a_3 + a_4$, temos que $a_3 = a_5 - a_4$.

Se avançarmos, termo a termo, como um termo qualquer é sempre igual à soma dos dois termos anteriores, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ acarreta em $a_{n-2} = a_n - a_{n-1}$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ significa que temos $a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ e como $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ temos que $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$.

Substituindo os termos encontrados na soma original, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$S_n = a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 + ... + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n + a_{n+2} - a_{n+1}$$

Percebe-se que, após os devidos cancelamentos e sabendo-se que $a_2 = 1$, temos o seguinte resultado

Proposição 4.11. *A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por*

$$S_n = a_{n+2} - 1 \tag{4.9}$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, podemos proceder por indução, utilizando o Axioma 1. De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $S_1 = a_{1+2} - 1 = a_3 - 1 = 2 - 1 = 1 = a_1$. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $S_n = a_{n+2} - 1$, então, temos $S_n + a_{n+1} = a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{n+3} - 1$. Pelo Axioma da Indução Finita, a fórmula vale para todo n.

O segundo caso a considerar, é com relação a soma dos infinitos termos da sequência de Fibonacci. Pelo conceito exposto na Seção 1.3, têm-se um caso de série.

Pelo que foi dito na Subseção 4.8 e pelo Teorema 1.3, como o termo geral não tende a zero, a sequência de Fibonacci é divergente.

5 SÉRIES DIVERGENTES

Por meio de manipulações internas ou por métodos específicos, às vezes é possível atribuir valores numéricos à séries divergentes. Embora, à primeira vista, pareça que não existe significado prático para isso, existem aplicações desses resultados em diversas áreas, tais como análise complexa, teoria das cordas e teoria quântica de campos (WIKIPéDIA, 2017; WEINBERG, 2005).

Os métodos específicos utilizados para somar séries divergentes são chamados *métodos de soma*. Existem diversos métodos de soma, uns mais potentes que outros, ou seja, alguns métodos conseguem somar mais séries que outros.

Com o objetivo de uma discussão mais ampla do assunto, vamos em busca de um valor numérico para a soma divergente 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ..., que é a série aritmética formada pelos números naturais. Para isso, temos antes que obter valores numéricos de outras duas séries, também divergentes. A obtenção dos resultados de cada uma das três séries será de duas maneiras. A primeira, usando um "caminho heurístico", que não é o mais conveniente pois, dependendo da manipulação feita, chega-se a resultados incorretos (não é o caso aqui, em que as manipulações foram feitas de maneira a se chegar nos resultados esperados). A segunda forma é utilizando um método de soma específico.

Primeiramente, vamos em busca de um valor para a série geométrica divergente $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$, que chamaremos de S. Por um "caminho heurístico" (WIKIPéDIA, 2016) têm-se:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...)$$

$$1 - S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

$$1 - S = S$$

$$2S = 1$$

$$S = \frac{1}{2}$$

Como o objetivo é obter um resultado para a soma, pode-se chegar nesse mesmo resultado utilizando a Fórmula 3.4 (mesmo a razão não estando entre -1 e 1) como segue:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

Agora, vamos utilizar um método de soma para se chegar nesse mesmo valor. O método a ser usado chama-se *soma de Cesàro*, que consiste em calcular o limite das médias das somas parciais (HARDY, 1992). A sequência das somas parciais da série $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

é $(1, 0, 1, 0, 1, ...)$. Logo, a sequência das médias das somas parciais, ou seja, a primeira soma parcial dividido por 1, a soma das duas primeiras somas parciais divididos por 2, a soma das três primeiras somas parciais divididos por 3, e assim por diante, é $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, ...\right)$. O limite dessa última sequência é o resultado da soma de Cesàro. Nessa sequência, os termos de ordem par são todos iguais a $\frac{1}{2}$. Já os termos de ordem ímpar formam uma nova sequência cujo termo geral é $\frac{n}{2n-1}$ e, portanto, seu limite também vale $\frac{1}{2}$. Logo, a soma de Cesàro e, por consequência, a soma S, vale $\frac{1}{2}$.

Então, $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \frac{1}{2}$

Agora, vamos obter um valor para a série divergente $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ...$ que chamaremos de S_1. Por um "caminho heurístico", têm-se:

$$S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ...$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_1 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ... \\ &\qquad\quad +1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - ... \end{aligned}$$

$$2 \cdot S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

Usando o resultado obtido de S, tem-se:

$$2 \cdot S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = \frac{1}{4}$$

Vamos agora tentar utilizar o método de Cesàro para se chegar nesse mesmo valor (HARDY, 1992). A sequência das somas parciais da série $S_1 = 1-2+3-4+5-6+7-8+...$ é $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...)$. Logo, a sequência das médias das somas parciais fica determinada por $\left(1, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{7}, 0, ...\right)$. O limite dessa última sequência é o resultado da soma de Cesàro. Nessa sequência, os termos de ordem par são todos iguais a 0. Já os termos de ordem ímpar formam uma nova sequência cujo termo geral é $\frac{n}{2n-1}$ e, portanto, seu limite $\frac{1}{2}$. Logo, não podemos, nesse caso, utilizar a soma de Cesàro pois o limite das médias das somas parciais não existe.

Um método possível, nesse caso, é a chamada *soma de Abel* (HARDY, 1992) que, em linhas gerais, diz que ao associarmos cada termo de uma sequência a_n a um monômio do tipo $a_n x^n$, o limite da série formada pelos monômios, quando x tende a -1 pela esquerda, é o valor da série associada a a_n, ou seja, se $s = a_0 + a_1 + a_2 + ...$, $\lim_{x \to 1^-} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...) = s$.

Primeiramente, usando a Fórmula 3.4, pois trata-se de uma série geométrica, têm-se a igualdade

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... = \frac{1}{1+x},$$

para $-1 < x < 1$. Derivando esta expressão e trocando o sinal obtém-se

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ... = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Enfim, por um "caminho heurístico", chega-se no mesmo resultado, como é mostrado a seguir. Temos:

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... = \frac{1}{1+x} \qquad \text{(I)}$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ... = P \qquad \text{(II)}$$

Fazendo (I) + (II), têm-se

$$2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + ... = \frac{1}{1+x} + P$$

$$2 - x(3 - 4x + 5x^2 - 6x^3 + ...) = \frac{1}{1+x} + P \qquad \text{(III)}$$

Manipulando a expressão (II), têm-se

$$1 - 2x + x^2(3 - 4x + 5x^2 - 6x^3 + ...) = P$$

$$3 - 4x + 5x^2 - 6x^3 + ... = \frac{P + 2x - 1}{x^2} \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo o resultado de (IV) em (III), têm-se

$$2 - x\left(\frac{P + 2x - 1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x} + P$$

$$2 + \frac{1 - P - 2x}{x} = \frac{1}{1+x} + P$$

$$\frac{2x + 1 - P - 2x}{x} = \frac{1 + P(1+x)}{1+x}$$

$$1 - P + x - Px = x(1 + P + Px)$$

$$Px^2 + 2Px + P - 1 = 0$$

$$P = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$P = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Portanto, $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ... = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Se substituirmos x por 1 nessa última expressão, chegamos na conclusão de que $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ... = \dfrac{1}{4}$. Acontece que, por se tratar de funções, temos que respeitar a restrição $-1 < x < 1$. Então, calculamos o limite quando x tende a 1 pela esquerda. Fazendo isso, chegamos na soma de Abel, que diz que $\lim_{x\to 1^-}(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$.

Então, $S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ... = \frac{1}{4}$

Aqui, vale observar que, para se chegar no valor de S_1, usando a soma de Abel, não foi necessário usar o valor de S.

Finalmente, chegaremos a um valor numérico para a série divergente proposta inicialmente, que chamaremos de S_N. Então, $S_N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ...$ Por um "caminho heurístico", usando S_1 e seu resultado, têm-se:

$$S_N - S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ...$$

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - ...$$

$$S_N - S_1 = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 + 16 + ...$$

$$S_N - S_1 = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ...)$$

$$S_N - S_1 = 4 \cdot S_N$$

$$-3S_N = \frac{1}{4}$$

$$S_N = -\frac{1}{12}$$

Vamos agora tentar utilizar o método de Cesàro para tentar obter este mesmo valor. A sequência das somas parciais da série $S_N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ...$ é $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...)$. Logo, a sequência das médias das somas parciais fica determinada por $\left(1, 2, \frac{10}{3}, 5, 7, \frac{28}{3}, 12, 15, ...\right)$. Como essa última sequência é divergente, com limite igual a infinito, a soma de Cesàro não produziu um valor numérico.

Vamos, então, tentar utilizar a soma de Abel. Então, temos que $1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$, pois trata-se de uma série geométrica. De maneira análoga à obtenção de S_1, chega-se na igualdade $1+2x+3x^2+4x^3+... = \frac{1}{(1-x)^2}$ e, consequentemente, ao limite $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$. Como não chegamos a um número real, a soma de Abel também não produziu um valor numérico para a série S_N.

Um método possível, nesse caso, é a *função zeta de Riemann*. Essa função é definida da seguinte maneira (APOSTOL, 1976):

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

Então, partindo da função zeta de Riemann, temos:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ... \quad \text{(I)}$$

Multiplicando ambos os membros por $2 \cdot \frac{1}{2^s}$, têm-se:

$$2 \cdot \frac{1}{2^s} \cdot \zeta(s) = 2 \cdot \frac{1}{2^s} + 2 \cdot \frac{1}{4^s} + 2 \cdot \frac{1}{6^s} + 2 \cdot \frac{1}{8^s} + ... \tag{II}$$

Fazendo (I) - (II), têm-se:

$$\zeta(s) \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2^s}\right) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + ...$$

Para $s = -1$, têm-se:

$$\zeta(-1) \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2^{-1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} - \frac{1}{4^{-1}} + ...$$

$$\zeta(-1) \cdot (1 - 2 \cdot 2) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ...$$

Já vimos que $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... = \frac{1}{4}$ (valor encontrado para S_1). Então:

$$-3 \cdot \zeta(-1) = \frac{1}{4}$$

Acontece que $\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + ...$, que chamamos de S_N. Portanto:

$$-3S_N = \frac{1}{4}$$

$$S_N = -\frac{1}{12}$$

Portanto, $S_N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ... = -\frac{1}{12}$.

Uma observação é o fato de que a série harmônica, vista a Subseção 4.1.3, é um caso particular da função zeta de Riemann, quando $s = 1$.

Como já dito no início desse capítulo, existem outros métodos de soma, e quanto mais potentes forem, conseguem somar mais séries. Para um aprofundamento a cerca do assunto *séries divergentes*, pode-se estudar os trabalhos de Hardy (1992) e Brezinski e Zaglia (2002).

Além disso, existem aplicações dos valores numéricos de certas séries divergentes. No caso da série S_N, ela está presente em algumas áreas, como na Teoria Quântica de Campos (TQM), mais precisamente, no chamado *efeito Casimir* (RUGGIERO; ZIMMERMAN; VILLANI, 1977), que por sua vez consiste na atração entre duas placas paralelas neutras e perfeitamente condutoras no vácuo. Em particular, considerando-se um campo escalar em uma caixa unidimensional, para o cálculo da força de atração (força de Casimir) é necessário considerar a energia, E, do vácuo quântico entre as placas. A relação entre esta energia e o comprimento a da caixa é dada por

$$\frac{Ea}{\hbar c \pi} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ..., \tag{5.1}$$

que corresponde à série já estudada, cujo valor aplicado é, justamente, $-\frac{1}{12}$.

6 USANDO SEQUÊNCIAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesse capítulo são listados alguns problemas, com suas devidas resoluções e escolhidos de modo que contemplassem todos os temas abordados neste trabalho, complementando os assuntos vistos até então de maneira teórica, e servindo como uma motivação para estudos futuros.

Problema 1: (JR.; MENDELSON, 1994) Mostre que a sequência $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ...\right)$ converge e que, a série formada pela soma dos elementos dessa sequência, diverge.

Solução. Os numeradores das frações são formados pela sequência dos números naturais ao passo que os denominadores são formados pela sequência dos números ímpares a partir do número 3. Portanto o termo geral da sequência é $a_n = \frac{n}{2n+1}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Logo, a sequência converge para $\frac{1}{2}$. Como a sequência não converge para zero, a sua série correspondente diverge.

Problema 2: (GUIDORIZZI, 1999) Considere a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ e suponha que $a_k = b_k - b_{k+1})$, $k \geq 1$. (Uma tal série denomina-se *série telescópica*.)
a) Verifique que $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = b_1 - b_{n+1}$.
b) Conclua que se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, com b real, então a soma da série será finita e igual a $b_1 - b$.
c) Calcule a soma $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Solução. a) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + ... + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$.
b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - b$.
c) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Trata-se então de uma série telescópica. Logo, da conclusão do item (b), têm-se $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Problema 3: (LIMA, 2013) Dadas as progressões aritméticas $(a_1 + a_2, ..., a_n, ...)$ e $(b_1 + b_2, ..., b_n, ...)$, mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, ..., $f(a_n) = b_n$, ...

Solução. Seja $f(x) = \dfrac{r_b}{r_a}x + b_1 - \dfrac{r_b}{r_a}a_1$, sendo r_a e r_b as razões das progressões $(a_1 + a_2, ..., a_n, ...)$ e $(b_1 + b_2, ..., b_n, ...)$, respectivamente. A função f é afim e $f(a_n) = \dfrac{r_b}{r_a}a_n + b_1 - \dfrac{r_b}{r_a}a_1 = \dfrac{r_b}{r_a}(a_n - a_1) + b_1$. Usando a Fórmula 2.1, têm-se $\dfrac{r_b}{r_a}[(n-1)r_a] + b_1 = b_1 + (n-1)r_b = b_n$. Portanto, existe somente uma função afim para tal situação.

Problema 4: (MORGADO; CARVALHO, 2013) A curva de Koch é obtida em estágios pelo processo seguinte:

i No estágio 0, ela é um triângulo equilátero de lado 1;

ii O estágio $n+1$ é obtido a partir do estágio n, dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo, então, a parte central (ver figura abaixo).

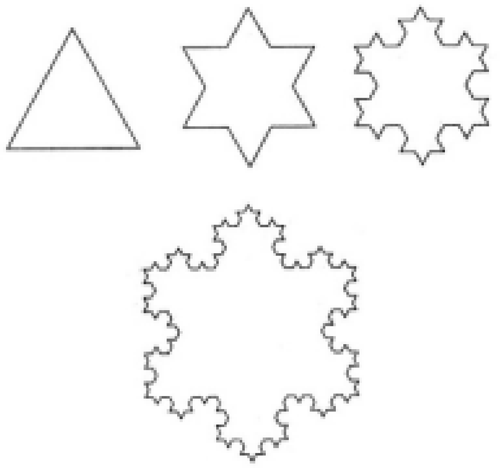

Figura 25 – Curva de Koch

Sendo P_n e A_n, respectivamente, o perímetro e a área do n-ésimo estágio da curva de Koch, determine:

a) P_n.

b) A_n.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Solução.

a) No estágio P_0, temos um triângulo equilátero de lado medindo 1, logo seu perímetro é 3. No estágio P_1, temos uma figura com 12 segmentos medindo $\dfrac{1}{3}$, com perímetro igual a 4. No estágio P_2, temos uma figura com 48 segmentos medindo $\dfrac{1}{9}$, e perímetro medindo $\dfrac{48}{9} = \dfrac{16}{3}$. Assim, os

perímetros formam a PG $\left(3, 4, \frac{16}{3}, ...\right)$ de razão $\frac{4}{3}$. Então, usando a Fórmula 3.1, no n-ésimo estágio o perímetro será $P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1-1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$.
b) A área do polígono, em cada estágio, obtém-se adicionando a área do polígono no estágio anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes quanto o número de lados do polígono anterior (cada lado da origem a um triângulo).
Pela semelhança de figuras planas sabe-se que, se o lado de um polígono reduzir em $\frac{1}{3}$, a área reduz em $\frac{1}{9}$.
Assim, no estágio zero, $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, área de um triângulo equilátero de lado medindo 1.
$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.
$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9}$.
$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$.
$A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$.
$A_n = A_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$.
Observa-se que as parcelas, a partir da segunda, formam uma PG de razão $\frac{4}{9}$, com n termos.
Assim
$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} - 1}\right)$. Realizando o desenvolvimento, obtém-se
$\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
c) $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$
d) $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Problema 5: (WATANABE, 1996) Imaginem um matemático, alérgico ao número 7, que decidisse eliminar da série harmônica todas as frações que contivessem o algarismo 7. Prove que, nesse caso, a série remanescente converge.

Solução. Vamos eliminar da série harmônica todas as frações que contenham um mesmo algarismo, por exemplo, algarismo 7. Vamos chamar de S_7 a série remanescente. Então
$S_7 = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + ...\frac{1}{26} + \frac{1}{28} + ...$
Cada um dos 8 primeiros termos, onde os denominadores possuem apenas um algarismo, é menor ou igual a 1. Então
$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 8$

Cada um dos 8.9 termos seguintes, onde os denominadores possuem dois algarismos, é menor ou igual a $\frac{1}{10}$. Então

$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}<8\cdot 9\cdot \frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}<8\cdot \frac{9}{10}$

Cada um dos 8.9.9 termos seguintes, onde os denominadores possuem três algarismos, é menor ou igual a $\frac{1}{100}$. Então

$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{998}+\frac{1}{999}<8\cdot 9\cdot 9\cdot \frac{1}{100}$

$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{998}+\frac{1}{999}<8\cdot \frac{9}{10}\cdot \frac{9}{10}$

E assim por diante. Então

$S_7<8+8\cdot \frac{9}{10}+8\cdot \frac{9}{10}\cdot \frac{9}{10}+...$

O segundo membro da desigualdade é uma série geométrica de razão $\frac{9}{10}$ e cujo primeiro termo é 8. Então, usando a fórmula 3.3, temos $S_7<\frac{8}{1-\frac{9}{10}}$. Portanto, $S_7<80$. Logo, a série remanescente, converge.

Problema 6: (CARVALHO, 2012) Em uma antiga prisão há uma passagem secreta que conduz a um porão onde há três túneis. O primeiro, túnel A, leva à liberdade em 5h, o segundo, túnel B, em 10h, e o terceiro, túnel C, leva de volta ao ponto de partida (porão) em 12h. Considere que os presos fugitivos sejam pessoas perturbadas mentalmente a ponto de talvez entrarem no terceiro túnel, retornarem ao porão 12h depois e entrarem nele novamente, podendo repetir esse procedimento indefinidamente, sem perceber que estão voltando ao mesmo local onde entraram. Determine, em média, quanto tempo os presidiários fugitivos que descobrem os túneis, levariam para escapar.

Solução. As possibilidades para os presos fugitivos saírem da prisão são:

I) Sair pelo túnel A;

II) Sair pelo túnel B;

III) Entrar no túnel C e depois sair pelo túnel A;

IV) Entrar no túnel C e depois sair pelo túnel B;

V) Entrar no túnel C duas vezes e sair pelo túnel A;

VI) Entrar no túnel C duas vezes e sair pelo túnel B;

E assim por diante.

Para o preso sair, ele demora, em cada uma das situações:

I – 5 h;

II – 10 h;

III – (12 + 5) h;

IV – (12 + 10) h;

V – (12 + 12 + 5) h;

VI – (12 + 12 + 10) h;

E assim por diante.

A probabilidade de o preso sair em cada uma dessas situações é:

I – $\frac{1}{3}$; II – $\frac{1}{3}$; III – $\frac{1}{9}$; IV – $\frac{1}{9}$; V – $\frac{1}{27}$; VI – $\frac{1}{27}$ e assim por diante.

Portanto, o tempo médio T (valor esperado) para o preso sair da prisão é calculado da seguinte maneira:

T = $\frac{1}{3}\cdot 5+\frac{1}{3}\cdot 10+\frac{1}{9}\cdot(12+5)+\frac{1}{9}\cdot(12+10)+\frac{1}{27}\cdot(12+12+5)+\frac{1}{27}\cdot(12+12+10)+...$

Podemos separar essa soma da seguinte forma:

$T=5\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...\right)+10\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...\right)+2\cdot 12\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{3}{81}+...\right)$

$T=5\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...\right)+10\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...\right)+2\cdot 12\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+...\right)$

$T=5\cdot S_1+10\cdot S_2+2\cdot 12\cdot\frac{1}{9}\cdot S_3$

As duas primeiras somas infinitas, S_1 e S_2, são somas de uma PG de razão $\frac{1}{3}$. Então, usando a Fórmula 3.4, cada uma dessas somas vale $S_1=S_2=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

A última soma infinita, S_3, é soma de uma PAG, em que $a_1=1$, $q=\frac{1}{3}$ e $r=1$. Então, usando a Fórmula 4.4, temos que $S_3=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{1\cdot\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$. Efetuando os cálculos, têm-se que $S_3=\frac{9}{4}$.

Portanto, $T=5\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 12\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{4}=13,5$ h.

Assim, o prisioneiro leva, em média, 13h30min para sair da prisão.

Problema 7: Prove o resultado de cada uma das seguintes somas:

a) $2-2+2-2+...=1$

b) $1-2+4-8+...=\frac{1}{3}$

c) $1+1+1+1+...=-\frac{1}{2}$

d) $1+2+4+8+...=-1$

Solução. a) Por um "caminho heurístico" temos:

$2-2+2-2+...=x$

$2\cdot(1-1+1-1+...)=x$

Como já vimos que $1-1+1-1+...$ é igual a $\frac{1}{2}$, temos:

$2\cdot\frac{1}{2}=x$

$x=1$

Pode-se também usar a Fórmula 3.4, trata-se da soma de uma PG infinita:
$a_n = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{2}{1-(-1)} = 1$
Usando agora um método de soma, no caso a soma de Cesàro:
A sequência das somas parciais da série $S = 2-2+2-2+2-2+...$ é $(2,0,2,0,2,...)$. Logo, a sequência das médias das somas parciais é $\left(2,1,\dfrac{4}{3},1,\dfrac{6}{5},1,...\right)$. O limite dessa última sequência é o resultado da soma de Cesàro. Nessa sequência, os termos de ordem par são todos iguais a 2. Já os termos de ordem ímpar formam uma nova sequência cujo termo geral é $\dfrac{2n}{2n-1}$ e, portanto, seu limite também vale 1. Logo, a soma $2-2+2-2+...$ vale 1.
b) Por um "caminho heurístico" temos:
$S = 1-2+4-8+...$
$2S = 1-2+4-8+...$
$\qquad +1-2+4-8+...$
$2S = 1-1+2-4+8-...$
$2S = 1-(1-2+4-8+...)$
$2S = 1-S$
$3S = 1$
$S = \dfrac{1}{3}$
Ou ainda, aplicando a Fórmula 3.4:
$\dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-(-2)} = \dfrac{1}{3}$
Usando um método de soma, no caso a soma de Abel, temos:
$1-2x+4x^2-8x^3+... = \dfrac{1}{1+2x}$ (série geométrica)
$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-2x+4x^2-8x^3+...) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+2x} = \dfrac{1}{3}$
Portanto, $1-2+4-8+... = \dfrac{1}{3}$.
c) Por um "caminho heurístico" temos:
$1+1+1+1+... = x(I)$
Já vimos que $1-1+1-1+... = \dfrac{1}{2}(II)$
Então, fazendo $(I)-(II)$ têm-se:
$2+2+2+2+... = x-\dfrac{1}{2}$
$2\cdot(1+1+1+1+...) = x-\dfrac{1}{2}$
Substituindo o resultado de (I):
$2x = x-\dfrac{1}{2}$
$x = -\dfrac{1}{2}$
Usando um método de soma, no caso a função zeta de Riemann, temos:
$\zeta(s) = 1+\dfrac{1}{2^s}+\dfrac{1}{3^s}+\dfrac{1}{4^s}+...(I)$
Multiplicando ambos os membros por $2\cdot\dfrac{1}{2^s}$, têm-se:

$2 \cdot \dfrac{1}{2^s} \cdot \zeta(s) = 2 \cdot \dfrac{1}{2^s} + 2 \cdot \dfrac{1}{4^s} + 2 \cdot \dfrac{1}{6^s} + 2 \cdot \dfrac{1}{8^s} + ...(II)$

Fazendo $(I) - (II)$, têm-se:

$\zeta(s) \cdot \left(1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2^s}\right) = 1 - \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} - \dfrac{1}{4^s} + ...$

Para $s = 0$, têm-se:

$\zeta(0) \cdot \left(1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2^0}\right) = 1 - \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{3^0} - \dfrac{1}{4^0} + ...$

$\zeta(0) \cdot (1 - 2) = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

Já vimos que $1 - 1 + 1 - 1 + ... = \dfrac{1}{2}$. Então:

$\zeta(0) \cdot (-1) = \dfrac{1}{2}$

$\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$

Acontece que $\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + 1 + ...$ Então:

$1 + 1 + 1 + 1 + ... = -\dfrac{1}{2}$

Portanto, $1 + 1 + 1 + 1 + ... = -\dfrac{1}{2}$.

d) Por um "caminho heurístico" temos:

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$

$S = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + ...)$

$S = 1 + 2 \cdot S$

$-S = 1$

$S = -1$

Ou ainda, aplicando a Fórmula 3.4:

$\dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-2} = -1$

Usando um método de soma, no caso a soma de Abel, temos:

$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + ... = \dfrac{1}{1-2x}$ (série geométrica)

$\lim\limits_{x \to 1^-} (1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + ...) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}$

Portanto, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... = -1$.

7 CONCLUSÕES

Este presente trabalho procurou aprofundar o estudo do assunto sequências e progressões no âmbito do Ensino Médio.

Para que esse objetivo fosse alcançado, foi necessário usar alguns recursos do Ensino Superior. Nas definições em que a expressão “e assim por diante” já generalizava algo e acabava não convencendo, foram utilizados o axioma da indução. Nas sequências em que surgia o questionamento “e se avançarmos um pouco mais, o que ocorre?”, foram usados o conceito de limite. E nas somas infinitas (também chamadas de séries), quando a pergunta era se “aquilo” iria realmente para o infinito ou acabaria resultando em um número real, necessitou-se o uso de critérios de convergência.

Por essa mesma perspectiva, além das progressões aritméticas e geométricas, foram analisadas sequências que não costumam estar presente no Ensino Médio, a saber, as progressões aritmético-geométricas, geométrico-aritméticas, a progressão harmônica e a sequência de Fibonacci.

Foi importante, também, ver a relação entre as progressões e as funções, bem como entre as progressões e os juros.

Um tema específico provocou uma demanda maior de tempo em sua pesquisa e requereu um estudo mais aprofundado. Trata-se das séries divergentes, pois é um tema praticamente não explorado, inclusive nos cursos de graduação e com poucas fontes de informação (em português, raríssimas). No entanto, cada vez mais vem adquirindo importância nas ciências, com suas incríveis aplicações, especialmente na Teoria Quântica de Campos e na Teoria das Cordas.

O auxílio gráfico e alguns problemas completam esse trabalho.

Acreditamos que, tudo que aqui foi visto, sirva de fonte inspiradora para que, àquelas poucas páginas do assunto “sequências e progressões” dos livros didáticos se multipliquem e se transformem em conhecimentos mais sólidos para nossos professores e estudantes.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. **Introduction to analytic number theory**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1976. Único.

BOULOS, P.; ABUD, Z. I. **Cálculo diferencial e integral**. 1. ed. São Paulo: Makron Books, 2000. v. 2.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974. Único.

BREZINSKI, C.; ZAGLIA, M. R. **Extrapolation Methods**. 2. ed. Amsterdam: Elsevier, 2002. Único.

CARVALHO, R. A. de. Valor esperado e progressão aritmético-geométrica na fuga de prisioneiros. RPM, n. 77, 2012.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. **Toda Matemática**. 7. ed. São Paulo: Ática, 1997. Único.

GARBI, G. A surpreendente série harmônica. RPM, n. 42, 2000.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JúNIOR, J. R. G. **Matemática Fundamental: Uma Nova Abordagem**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2002. Único.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1987. v. 1.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. v. 4.

HARDY, G. H. **Divergent Series**. 3. ed. Sceaux: Jacques Gabay, 1992. Único.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Único.

IEZZI, G. et al. **Matemática**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2015. Único.

JR., F. A.; MENDELSON, E. **Cálculo diferencial e integral**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. Único.

LIMA, E. L. **Análise Real**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. v. 1.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SMB, 2013. Único.

LOPES, L. **Manual de Progressões**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência Ltda, 1998. v. 1.

MARTINS, D. P. Sequências, progressões e séries: Uma abordagem para o ensino médio. v. 1, n. 1, p. 41–95, 2013.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Único.

MRáS, A. M. Sequência de fibonacci e uma fórmula para o seu termo geral. v. 1, n. 1, p. 13–56, 2016.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de cálculo**. 1. ed. Rio de Janeiro: SMB, 2015. Único.

POLCHINSKI, J. **String Theory**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. v. 1.

POSSEBON, J. E. Fibonacci e a razão áurea: uma abordagem para o ensino básico. v. 1, n. 1, p. 61–63, 2016.

RUGGIERO, J. R.; ZIMMERMAN, A. H.; VILLANI, A. Application of analytic regularization to the casimir forces. v. 7, n. 3, p. 663–687, 1977.

SENA, C. Átila Rodrigues de. Sequência de fibonacci: propriedades, aplicações e curiosidades. v. 1, n. 1, p. 19–38, 2013.

WATANABE, R. G. Alergia pelo número 7. RPM, n. 31, 1996.

WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. v. 1.

WIKIPéDIA. **Summation of Grandi's series**. 2016. [Online; acessado 30 de Janeiro de 2017]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Summation_of_Grandi\%27s_series&oldid=725827513>.

WIKIPéDIA. **1 + 2 + 3 + 4 + ...** 2017. [Online; acessado 30 de Janeiro de 2017]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=1_\%2B_2_\%2B_3_\%2B_4_\%2B_\%E2\%8B\%AF&oldid=762095093>.

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011. Único.