Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Análise da Possibilidade de Inclusão de Abordagens Alternativas para a Função Cosseno no Ensino Médio

por

André Bispo Calderaro
Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

Abril de 2013

André Bispo Calderaro

Análise da Possibilidade de Inclusão de Abordagens Alternativas para a Função Cosseno no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Fábio dos Santos

São Cristóvão - SE
2013

Calderaro, André Bispo
C146a Análise da possibilidade de inclusão de abordagens alternativas para a função cosseno no ensino médio / André Bispo Calderaro; orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2013.
54 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Trigonometria. 2. Matemática - História. 3. Funções (Matemática). 4. Livros didáticos. 5. Equações diferenciais. 6. Ensino médio. I. Santos, Fábio dos, orient. II. Título

CDU 514.116

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Análise da possibilidade de inclusão de abordagens alternativas para a função cosseno no ensino médio

por

André Bispo Calderaro

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS
Orientador

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Éder Mateus de Souza - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 12 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedicatória

Aos meus pais, irmãos, minha esposa Maria Cleide e filhos, João Paulo e Pedro.

Agradecimentos

- A Deus, simplesmente por ser o Tudo.
- Aos meus pais, por todo esforço que fizeram para que eu estudasse. Pelos bons conselhos e por acreditarem e sentirem orgulho de mim.
- Ao professor Dr. Fábio dos Santos, por sua orientação.
- A cada um que acreditou no meu trabalho.
- Aos grandes amigos profmatianos pelos momentos de muito estudo, pelas conversas tão descontraídas e importantes que tivemos.
- Aos professores, Dr. Eder Mateus de Souza e Dr. Ademakson Souza Araújo , por comporem a banca examinadora.
- Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Resumo

Neste trabalho, se estabelece como objetivo a análise do processo de elabora ção das definições das funções trigonométricas, particularmente, a definição da função cosseno. Desse modo, é dada uma diretriz no que toca a elaboração de um currículo em que os alunos não fiquem ateados ao conceito de função trigonométrica apenas com base no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico. Portanto, o maior desafio é desenvolver argumentos didáticos para tal, bem como investigar mais detalhadamente as concepções da trigonometria.

Com isso, apesar de termos como primeiro capítulo uma breve explanação sobre a história da trigonometria, o trabalho tem como foco o desenvolvimento da definição cosseno de algumas formas, sendo elas: a apresentada nos livros didáticos em que se observa que a mesma é feita com suporte da função de Euler, a definição através de séries de potências, a definição com base na função exponencial com domínio nos complexos e, por fim, a definição como solução de um problema de valor inicial, isto é, uma equação diferencial que satisfaz uma determinada condição inicial. A partir daí será feita uma análise dessas definições observando-se a viabilidade de cada uma delas ser apresentada para os alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Função cosseno, Ensino da Trigonometria, Ensino Médio.

Abstract

This work establishes itself as objective analysis of the process of elaboration of the definitions of the trigonometric functions, particularly the definition of the cosine function. Thus, it is given a guideline regarding the development of a curriculum in which students are not sparked off the concept of trigonometric function based only on the triangle and trigonometric cycle. Therefore, the biggest challenge is to develop arguments for teaching about and investigate further the concepts of trigonometry.

Thus, although we like the first chapter a brief explanation about the history of trigonometry, the work focuses on the development of the definition cosine of some forms, namely: the one presented in textbooks as it observes that it is made with support Euler function, setting via power series, the setting based on the exponential function domain in complex and, finally, setting as a solution of an initial value problem, that is, a differential equation that satisfies a given initial condition. From there will be an analysis of these definitions by observing the viability of each to be presented to high school students.

Keywords: Cosine Function, Teaching Trigonometry, High School.

Introdução

Com surgimento na antiguidade, tendo a finalidade de medir ângulos e distâncias visando localizar pontos na superfície terrestre, a Trigonometria é considerada um dos ramos mais antigos da matemática. Além de ser utilizada em situações da vida cotidiana, também é utilizada em situações que envolvem fenômenos periódicos como eletricidade, termodinâmica, óptica, etc.

É sabido que a educação é a parte mais importante no que tange o desenvolvimento do ser humano, sendo assim, ela não pode ser observada apenas como algo formal na vida do cidadão. É neste âmbito que está situada a aprendizagem matemática. A matemática é, indiscutivelmente, uma ferramenta de transformação na sociedade, ainda assim, é uma das disciplinas com maior índice de rejeição por parte dos alunos devido, muitas vezes, a maneira com são ensinados estar aquém do que é esperado pela sociedade contemporânea.

É importante fazer com que o aluno desenvolva uma visão de mundo onde a matemática seja colocada como uma de suas engrenagens. E uma das engrenagens da matemática é a trigonometria.

Assim sendo, o objetivo deste trabalho está voltado para a forma como os conceitos das funções trigonométricas podem ser trabalhados para melhor e maior compreensão dos alunos. Entretanto, são necessárias algumas delimitações uma vez que todo o processo investigatório é complexo e em alguns momentos pode tornar-se repetitivo, fato que pode nos levar a fazer um estudo apenas superficial, caso seja feita a escolha de vários conceitos matemáticos escolares como temática e objeto de pesquisa. Logo, ao invés de estudar nessa dissertação de mestrado todos os conceitos da trigonometria (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente), optamos por focar o processo de apropriação do sistema conceitual de trigonometria com recorte para a função cosseno.

A partir de todos os fatos acima dispostos, expõem-se, além de um contexto histórico do desenvolvimento da trigonometria, algumas formas de definir a função cosseno. Novos referenciais serão tomados para auxiliar essas novas formas de apresentar o conceito, sendo que primeiramente, de forma geral, há uma amostragem de como essa função é definida nos livros didáticos relacionando-a com a definição da função de Euler. A seguir vamos definir a função cosseno por meio de séries em que já é possível ter uma visão analítica e não simplesmente geométrica dessa definição; a partir daí, apresentaremos a definição por meio da exponencial no corpo dos complexos e finalmente por meio de uma equação diferencial.

Portanto, o intuito deste trabalho não é discutir, através de um ponto de vista operacional, aquilo que é enfocado pelos livros. Antes, este trabalho tem por objetivo investigar e propor formas de apresentação do conceito de cosseno que articulem diferentes contextos matemáticos, discutindo a viabilidade de apresentação destes no Ensino Médio, de modo que os conflitos potenciais que possam emergir não se constituam em obstáculos para a aprendizagem.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

História do Desenvolvimento da Trigonometria

Neste capítulo, tendo como bibliografia básica o trabalho de COSTA (1997) [19], faz-se uma breve análise de como se deu o desenvolvimento da trigonometria, o aparecimento do conceito de função trigonométrica e, em particular, o das funções cosseno e seno. O estudo histórico do surgimento de um conceito é muito importante para aqueles que ensinam matemática, pois coloca em evidência os obstáculos do processo de construção do saber matemático com o passar dos anos, nos ajudando a compreender as dificuldades que têm os alunos nos dias de hoje. Além disso, o estudo histórico também pode contribuir para um enriquecimento das aulas, por parte dos professores.

Será desenvolvida a ideia de função trigonométrica estendida até o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, porém, esse primeiro momento será dedicado a um esboço das raízes desta ciência, desde o seu desenvolvimento nos povos da antiguidade com suas tabelas de sombras (século XV a.C.) até a expansão das funções trigonométricas em séries (século XVIII). Estudar a história da trigonometria também nos permite observar o surgimento e o progresso da Análise e da Álgebra, campos da matemática nela contidos de forma embrionária. Também é importante salientar que a trigonometria, mais que qualquer ramo da matemática, se desenvolveu no mundo antigo a partir de necessidades práticas, sobretudo àquelas ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação.

O estudo histórico será apresentado a partir dos seguintes tópicos: As origens da Trigonometria; As contribuições hindus, árabes e persas; A Trigonometria na Europa a partir do século XIV e; A incorporação da Trigonometria pela Análise Matemática.

1.1 As Origens da Trigonometria

Os primeiros sinais de uma trigonometria parecem ter surgido no Egito e na Babilônia a partir de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro de Rhind, que tratava da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides. Além disso, apareceu no Egito (aproximadamente em 1500 a.C.) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógio de sol) o que pode ter encadeado, mais tarde, as funções tangente e cotangente.

Já, na Babilônia, o interesse era maior pela Astronomia por suas ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano. Foram os babilônios que escolheram o sistema sexagesimal. É possível que esta escolha estivesse relacionada com a facilidade de dividir o círculo em seis partes iguais usando o raio como corda. O uso do sistema sexagesimal por esse povo pode ser observado na escrita de frações, cujos denominadores normalmente eram expressos por potências de 60. No entanto, parece ter existido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios, por exemplo, ambos usavam as frações com o número 1 em seu numerador.

Também foi encontrada no Oriente uma trigonometria primitiva, mais especificamente na China, no reinado de Chóu-pei Suan-King, aproximadamente 1110 a.C.; os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências do conhecimento das relações trigonométricas, apesar de não se saber os nomes dados pelos chineses para essas relações.

O conceito de ângulo e a forma de medi-lo também surgiram na China. Assim como aconteceu com os demais povos antigos, em razão do interesse astronômico dos chineses, fez-se necessário medir os ângulos, no entanto, também não se sabe como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas.

Sabemos que diversos ramos da Matemática não se formaram nem evoluíram da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim gradualmente. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da Geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles Thales (625 – 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria e seu discípulo Pitágoras (570-495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: "Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos". Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria. A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando Hipsícles, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa ideia foi posteriormente generalizada por Hiparco para qualquer círculo.

Por volta do ano 200 a.C. os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da Terra. Surgiu, então, a figura de Eratóstenes de Cirene (276-196 a.C.). Deve-se a ele a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulo e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas.

Já, na segunda metade do século dois a.C., Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) foi um marco na história da trigonometria, influenciado pela matemática Babilônica. Ele acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. O matemático dividiu cada arco de 1° em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto. Sua trigonometria baseava-se em uma única "função", na qual cada arco de circunferência de raio arbitrário era associado a respectiva corda.

Pressupõe-se que Hiparco construiu a primeira tabela trigonométrica através de valores da corda em uma série de ângulos que variavam de 0° a 180°, em cuja montagem se utilizou de interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui de 180° para 0°. Resolveu, então, associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, fato que representou um grande avanço na Astronomia. Por isso, ele recebeu o título de "Pai da Trigonometria", sendo considerado uma figura de transição entre a astronomia babilônica e o grande Claudio Ptolomeu (Klaudius Ptolemaios).

Este último foi o autor da mais importante obra da trigonometria da Antiguidade, surgida no século dois desta era, em Alexandria, denominada "Syntaxis Mathemática" e composta por treze volumes sendo considerada pelos tradutores árabes, a maior obra conhecida na época em Astronomia, tanto que ficou conhecida como Almagesto, que significa em árabe "A maior" = Al magest. A obra de Ptolomeu foi indispensável para se entender o legado astronômico da Antiguidade grega, sendo um modelo de astronomia até Copérnico, no século XVI.

A matemática da Antiguidade Clássica não criou a noção geral de quantidade variável ou de função, daí a conclusão de que os métodos quantitativos de pesquisa, usados em Astronomia, que objetivavam representar, em tabelas, relações entre conjuntos discretos de quantidades dadas não demandam preocupação com generalização.

No século IV de nossa era a Europa Ocidental entrou em crise com as invasões de bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano, a partirdaí o centro da cultura começou a se deslocar para a Índia.

1.2 As Contribuições Hindus, Árabes e Persas

A contribuição Hindu é marcada por um texto épico chamado Surya Siddhanta, escrito em versos e em sânscrito, que data aproximadamente 400 d.C. Esses povos diziam que o autor do texto referido foi Surya, deus do Sol, por isso a obra contém poucas explicações e nenhuma prova tendo em vista que foi escrito por um Deus, ninguém ousaria exigir provas.

A importância do Surya para nós está ligada à abertura de novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da "função" corda na Astronomia era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de jiva.

Por volta de 500 d.C. o matemático hindu Aryabhata já calculava semi cordas e usava também o sistema decimal desenvolvido, aproximadamente em

600 d.C. Ao surgirem os numerais, quando os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de seno, foram demonstradas algumas identidades e encontraram o equivalente verbal de $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.

Já em relação à influência árabe, pode-se dizer que se iniciou no século IX com a fundação da Escola de Bagdad onde um dos maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-bem-Geber, também conhecido como Al Battani durante os anos 850 a 929 d.C. ou Albategnius nas traduções latinas, denominado de "o Ptolomeu de Bagdad".

Os estudos de Al Battani ficaram entre Almagesto e Siddhanta e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente, a partir de sua genial ideia de introduzir o círculo de raio unitário demonstrando que a razão jiva é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa. Depois de Al Battani, digno de nota entre os matemáticos árabes foi Abûl' Wêfa que, em 980, iniciou uma organização, uma sistematização de provas e teoremas de trigonometria. Destacamos também o astrônomo Nasir ed-dên al-Tûsi autor, em 1250, do primeiro trabalho no qual a trigonometria plana aparece como uma ciência por ela própria, desvinculada da Astronomia.

Com o declínio da Escola de Bagdad o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa, na Península Ibérica. A cidade de Toledo tornou-se o mais importante centro de cultura desde 1085, quando foi libertada pelos cristãos do domínio mouro. Isto ocorreu porque para ela afluíram os estudiosos ocidentais, visando adquirir o saber muçulmano. O século XII na História da Matemática foi, então, um século de tradutores dos quais citamos Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Abelardo de Bath e Robert de Chester. Com isso, a Europa teve acesso a matemática árabe e a herança grega que havia sido conservada, na medida do possível, por eles.

1.3 A Trigonometria na Europa a partir do Século XIV

Paralelamente ao desenvolvimento da trigonometria, que já vinha ocorrendo desde o século XI com a retomada do conhecimento árabe, ocorreu o desenvolvimento das funções. Neste campo surgiu Nicole Oresme (1323 – 1385) com seu “Theatise on the configuration of Qualities and Motions”, no qual introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis (no caso, velocidade por tempo). Seu trabalho influenciou Galileu (1564-1642) e Descartes (1596-1650) nos séculos XVI e XVII. Com os estudos de Oresme, começou a se desenvolver o conceito de função. No século XIV, Purbach, na Inglaterra, retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. Purbach foi o mestre de Johannes Müller von Königsberg (1436 -1476), hoje mais conhecido por Regiomontanus, um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia. Regiomontanus escreveu um “Tratado sobre triângulos”, em cinco livros, contendo uma trigonometria completa. A invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a Trigonometria de Regiomontanus não é muito diferente da que se faz hoje em dia. No “Tratado” ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a de senos de Purbach, e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que ele foi quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na Trigonometria plana e esférica.

Copérnico (1473-1543) também contribui ao completar, em 1520, alguns trabalhos de Regiomontanus, que inclui um capítulo de seu “De lateribus et Angulis Triangulorum”, publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus em 1542.

O primeiro trabalho impresso em trigonometria provavelmente foi a “Tabula Directionum” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data deste ano, em Veneza.

Rhaecticus (1514-1576) retomou, um século depois, as tábuas de Regiomontanus de 1464 com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, cossenos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante e de dez em dez segundos para o arco de 1°. Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45 e completando a tabela com o uso de igualdade $senx = cos(\pi/2 - x)$. Deve-se também a Rhaeticus a introdução das secantes na trigonometria europeia e os cálculos do $sen(n\Phi)$ em termos de $sen\ \Phi$, que foram retomados e aprimorados por Jacques Bernoulli, em 1702.

Neste relato histórico não poderíamos deixar de mencionar Viète (1540-1603), pois foi ele quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria, em 1580. Ele foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, fato que representou grande progresso no campo da Álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o sen1 com treze casas.

As figuras seguintes na trigonometria foram Pitiscus e Napier, de forma que o primeiro foi quem publicou um tratado, em 1595, no qual corrigiu as tábuas de Rhaeticus e modernizou o tratamento do assunto: a palavra trigonometria aparece pela primeira vez como título de um livro dele. Já o segundo, estabeleceu regras para triângulos esféricos que foram amplamente aceitas.

Outro grande expoente em trigonometria foi Oughtred. Em seu trabalho, de 1657, preocupou-se em desenvolvê-la do ponto de vista simbólico, mas como tal simbolismo algébrico estava pouco desenvolvido para tornar isto possível, a ideia só foi aceita quando Euler exerceu sua influência neste sentido no século XVIII.

John Newton (1622-1678) publicou em 1658 o tratado "Trigonometria Britannica" que, embora baseado nos trabalhos de Gellibrand e outros escritores, era o mais completo livro que havia surgido em seu tempo. Ambos anteciparam a tendência atual de introduzir divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas.

O próximo importante passo em trigonometria foi dado por John Wallis (1616-1703) ao expressar fórmulas usando equações, ao invés de proporções, e por trabalhar com séries infinitas.

A contribuição à trigonometria de Sir Issac Newton (1642-1727) foi grande, pois, paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido $arcsen\ x$ em séries e por reversão, deduzindo a série $sen\ x$. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para $sen(nx)$ e $cos(nx)$ tendo, com isso, aberto a perspectiva para o $sen\ x$ e o $cos\ x$ surgirem como números e não como grandezas. Foi Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Por fim, vale mencionar que Thomas-Fanten de Lagny foi o primeiro matemático a evidenciar a periodicidade das funções trigonométricas, em 1710, e ao usar a palavra "gnoniometry", em 1724, embora tenha sido mais num sentido etimológico do que mera medida de ângulo, como agora é o caso.

1.4 A Incorporação da Trigonometria pela Análise Matemática

A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo, como era feito em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Euler foi "o construtor de notações mais bem sucedido de todos os tempos" (Boyer [6], 1974, p. 326). Na obra "Comentários de Petersburgo para 1734 - 1735", o matemático introduziu a letra grega para a razão entre comprimento e diâmetro da circunferência e usou a notação f (x) para a função de x que, embora já tivesse surgido no " Palmariorum Matheseos" de William Jones, só foi difundida a partir do uso por Euler.

Uma ideia genial de Euler foi criar a função E, que será apresentada no capítulo 2, denominada função de Euler. Ela associa a cada número um ponto de um círculo C_1 unitário e centrado na origem do plano cartesiano. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e o contra domínio é C_1. $E : \mathbb{R} \to C_1$ é uma função que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa um ponto $P \in C_1$.

A noção de função como sendo fundamental à Análise e o tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas estão no livro de Euler "Introductio in Analysin Infinitorum", de 1748, considerado a obra chave da Análise Matemática. Nele, o cosseno e o seno deixaram de ser uma grandeza e adquiriram o status de números, não sendo mais necessáriamente vistos como segmentos, mas também como números obtidos por abscissa e ordenada de um ponto de um círculo unitário ou números definidos pelas séries

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

e

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Ainda, foi ele quem mostrou que

$$senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ e } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

onde i é a unidade imaginária, possibilitando definir as funções seno e cosseno a partir dessas relações, inserindo-as no campo dos números complexos.

Portanto a trigonometria, no início uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia, tornou-se primeiramente autônoma e por fim se transformou em uma parte da Análise Matemática, expressando um conjunto de relações entre números complexos.

Capítulo 2

Definição da Função Cosseno nos Livros Didáticos

Este capítulo será dedicado a apresentar, de uma forma geral, como é definida a função cosseno nos livros didáticos. No entanto, primeiramente, será definida a função de Euler usada para relacionar um número real t ao ponto de uma circunferência com centro na origem e raio igual a 1, chamada circunferência trigonométrica, e constatar a relação entre essa função e o que é apresentado para os alunos em sala de aula no ensino médio.

2.1 Função de Euler

Consideremos no sistema de coordenadas cartesianas o círculo com centro em $(0,0)$ e raio 1, também chamado círculo unitário, orientado no sentido anti-horário conforme figura 2.1. O ponto $A(1,0)$, do círculo unitário, será chamado de origem dos arcos. Com isto temos definido o chamado círculo trigonométrico e será designado por C_1.

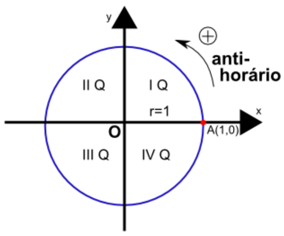


Figura 2.1: Círculo Trigonométrico

Seja a medida algébrica de arco AB de C_1 definida como o comprimento deste arco associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for o anti-horário e negativo em caso contrário. Esta medida será representada por AB conforme figura 2.2 .

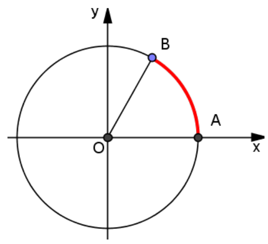


Figura 2.2: Arco AB

Observe que como C_1 tem raio unitário o módulo da medida algébrica de AB corresponde à medida do arco em radiano, ou seja, $AB = |m(AB)| = t$ rad onde $t \in \mathbb{R}$.

Vamos agora definir a função de Euler,que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E : R &\rightarrow C_1 \\ t &\rightarrow E(t) = P = (x, y) \end{aligned}$$

Tal que:

- $E(0) = (1, 0) = A$;
- Se $t > 0$ realizamos um perurso de comprimento t a partir de A, no sentido anti-horário e marcamos $P = E(t)$ como ponto final deste percurso, isto é $m(AP) = t$;
- Se $t < 0$ então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|t|$ no sentido horário e marcamos $P = E(t)$ como ponto final deste percurso, isto é $m(AP) = t$.

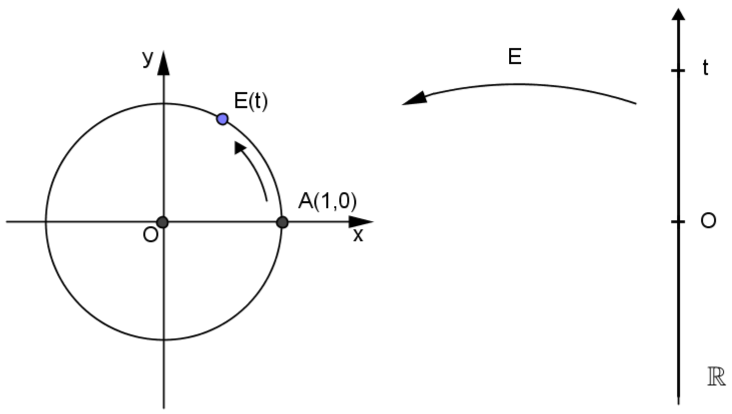


Figura 2.3: Função de Euler

Usando a correspondência da figura 2.3, entre os números reais e os pontos do círculo trigonométrico, se considerarmos o arco AP até uma volta, temos que $m(AP) = t$ e $-2\pi \leq t \leq 2\pi$. Podemos expressar uma noção de medida para arcos com mais de uma volta, sendo $|t| > 2\pi$.

Na figura 2.4, seja $P = E(t)$ com $t \in \mathbb{R}$, logo o arco AP e consequentemente o ângulo AÔP mede t radianos.

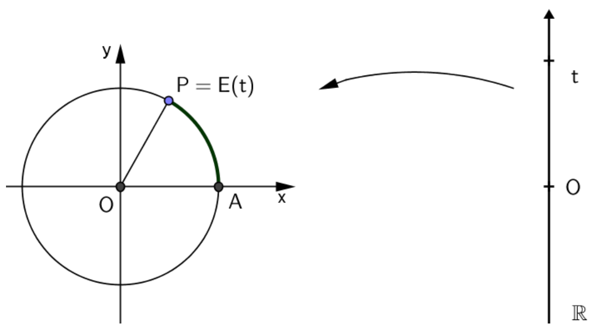


Figura 2.4: Arco AP

Observações:

- Com isso podemos perceber que teremos números reais distintos que podem ser relacionados ao mesmo ponto do círculo trigonométrico, ou seja, a *função de Euler* não é injetiva. Por exemplo $E(\frac{\pi}{2}) = E(\frac{-3\pi}{2})$.
- Esta forma de medida é orientada o que permite ao angulo ter medida negativa.
- $P = E(t)$ implica $P = E(t + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- O arco AP da circunferência tem comprimento igual a 1 se, e somente se, o ângulo AÔP, que ele subtende, mede 1 radiano.

Por fim, observando as figuras abaixo, podemos perceber que se $E(t) = (x,y)$ então $E(t+\pi) = (-x,-y)$, $E(t+\frac{\pi}{2}) = (-y,x)$,$E(-t) = (x,-y)$, $E(\frac{\pi}{2}-t) = (y,x)$ e $E(\pi - t) = (-x,y)$:

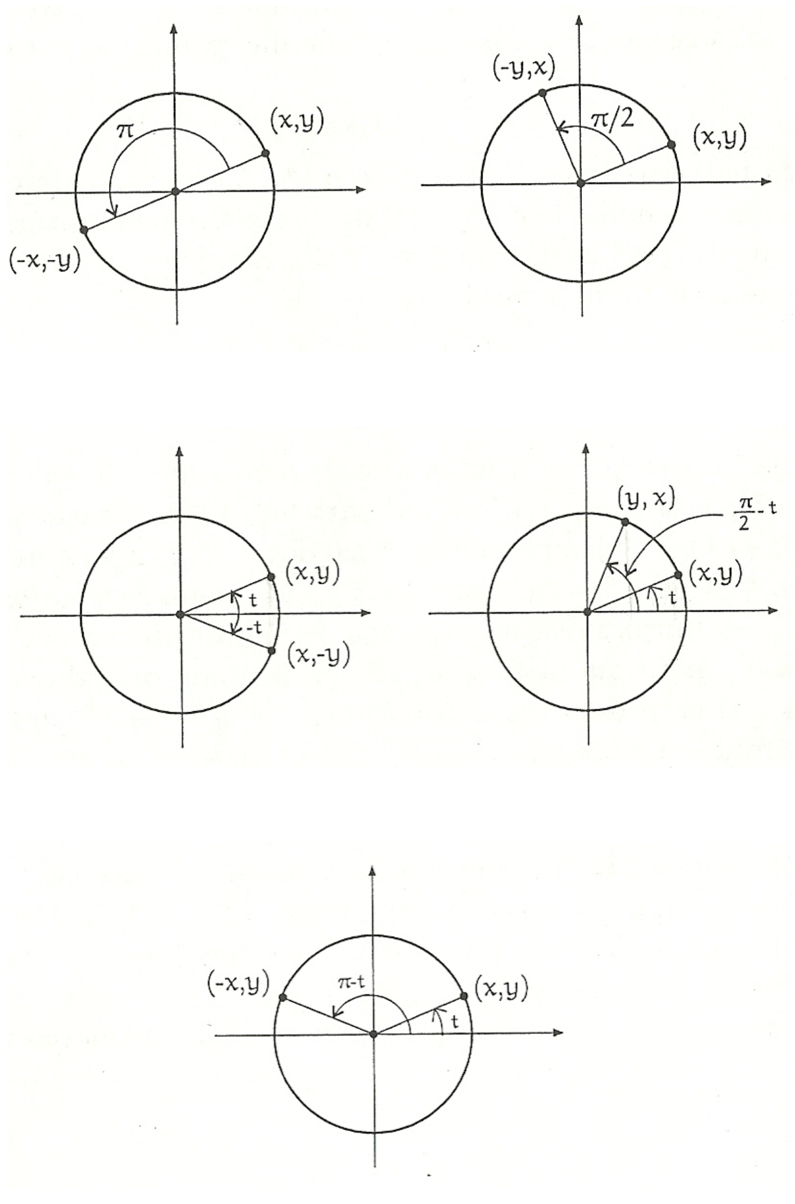


Figura 2.5: Simetrias na função de Euler

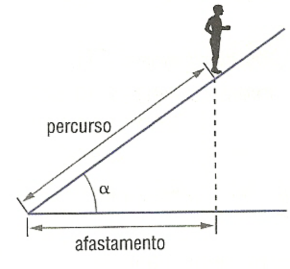
o que nos dá as diversas simetrias da *função de Euler* que pode ser demonstradas analíticamente através de semelhança de triângulos e que posteriormente se traduzem em propriedades das funções trigonométicas.

2.2 Análise da definição da função cosseno nos livros didáticos

O livro didático é considerado um importante documento para averiguar e discutir como será apresentado o saber, haja vista que é ele que inflência diretamente o que deve ser ensinado e como isso deve ser feito, ou seja, o livro didático é, na maioria das vezes, a única referência para o educador planejar suas aulas, logo este passa a ser visto como detentor de currículo.

Como o objetivo deste trabalho é fazer uma reflexão sobre o ensino da matemática, em especial o conteúdo da trigonometria enfatizando a função cosseno, cujo parâmetro se circunscreve naquilo que os livros didáticos apresentam, nesta seção faremos uma análise de como esta função está sendo definida. Foram utilizados neste estudo livros como MATEMÁTICA 2 de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno [3], MATEMÁTICA - Ciência e Aplicações de Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce[2], MATEMÁTICA - Volume único de Luis Roberto Dante [5], etc.

Em todos os livros analisados a idéia de cosseno é trabalhada inicialmente no triangulo retângulo, relacionando-o ao afastamento (cateto adjacente ao ângulo) e percurso (hipotenusa) em uma subida com um determinado ângulo de inclinação, o que pode ser observado na figura 2.6 extraída do livro de Dante [5].


Em qualquer subida podemos determinar a razão entre o afastamento e o percurso, que será um número que indicaremos por k_3 e chamaremos de cosseno do $\hat{\alpha}$.

$$\frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}} = \text{número } k_3$$

O número k_3, da mesma forma que a medida do ângulo de subida, indica-nos quanto a subida é íngreme.

Cosseno de um ângulo de subida = k_3

$\cos \alpha = k_3$

$$\cos \alpha = \frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}}$$

Figura 2.6: Imagem extraída do livro de Dante [5] página 189.

De modo análogo podemos definir a função $sen\alpha$, basta tomarmos a razão entre altura e percurso. Assim utlizando o modelo matemático da figura 2.7 e

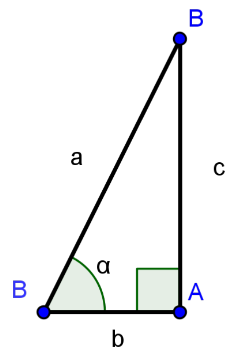


Figura 2.7: Triangulo retângulo

a relação de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$ podemos mostrar que:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

ou seja:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

que é chamada relação fundamental entre seno e cosseno de um ângulo agudo, sendo que posteriormente será mostrada a válidade para qualquer arco de medida α.

Esse desencadeamento conceitual para a noção de cosseno no triângulo retângulo e a aplicação dessa e outras razões trigonométricas na resolução de problemas que envolvem medições, distâncias inacessíveis, força, trabalho, etc., é um dos pontos dentre os que os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio [22] destacam como importantes para o desenvolvimento das capacidades e competências na trigonometria.

> *"Especialmente para o individuo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa"*
>
> (PCNEM 2000, página 44)

Contudo, seguem conceitos básicos apresentados como:

- Arco da circunferencia;
- Ângulo central;
- Unidades de medida(graus e radianos);
- Comprimento de um arco de circunferencia;
- Circunferencia trigonométrica;
- Arcos congruos;
- Primeria determinação positiva de um arco.

Depois de apresentados tais conceitos é que são definidas as funções circulares ou funções trigonométricas, sendo o cosseno apresentado considerando o ciclo trigonométrico no qual é marcado um ponto P, que é imagem no ciclo do número real α, conforme indica a figura 2.8.

Considerando também o arco AP da figura 2.8 ao qual corresponde o ângulo central α, defini-se como cosseno(do arco AP ou do ângulo α) a abiscissa do ponto P e chama-se função cosseno a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real α ao número real x_P representado pela abscissa desse mesmo ponto P, ou seja:

$$\begin{aligned} cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto x_P \end{aligned}$$

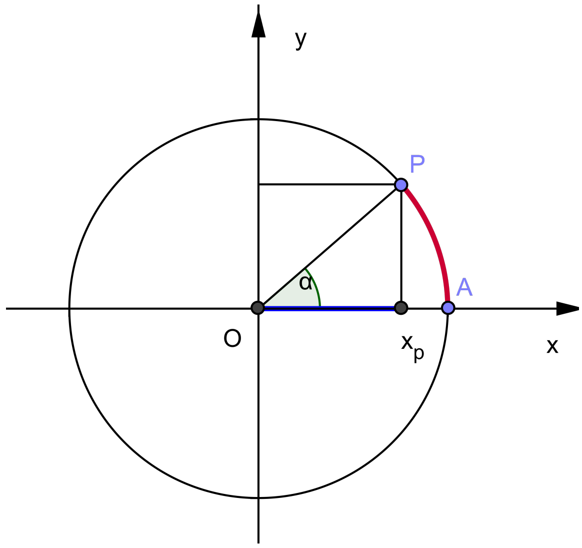


Figura 2.8: Definição função cosseno

Daí como $P \in C_1$ (2.1) podemos perceber que, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

e como $x_P \in [-1, 1]$ temos que o gráfico da função cosseno, curva chamada *cossenóide*, terá o aspecto que pode ser observado na figura 2.9 :

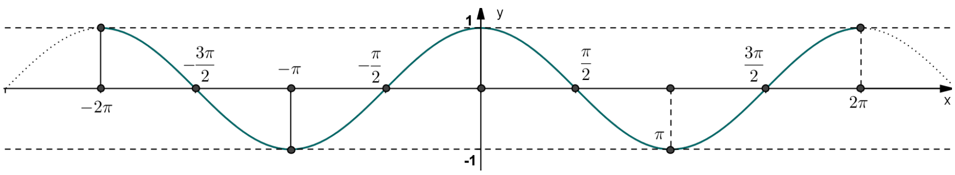


Figura 2.9: Cossenóide

A partir deste gráfico ou até mesmo do circulo trigonométrico são feitas algumas observações sobre a função cosseno:

- $D = \mathbb{R}$ e $Im = [-1, 1]$
- A função cosseno não é injetora e nem sobrejetora.
- Afunção cosseno é uma função par, ou seja, $cos(x) = cos(-x)$.
- A função cosseno é periódica de período $p = 2\pi$.

Definida a função cosseno são demonstradas, ainda, fórmulas para arcos da forma$(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$, 2α e $\dfrac{\alpha}{2}$ mas aqui iremos apresentar a demonstração da primeira, visto que as demais são consequência dela.

Sejam α e β dois arcos positivos do primeiro quadrante, cuja soma ainda pertence ao primeiro quadrante.

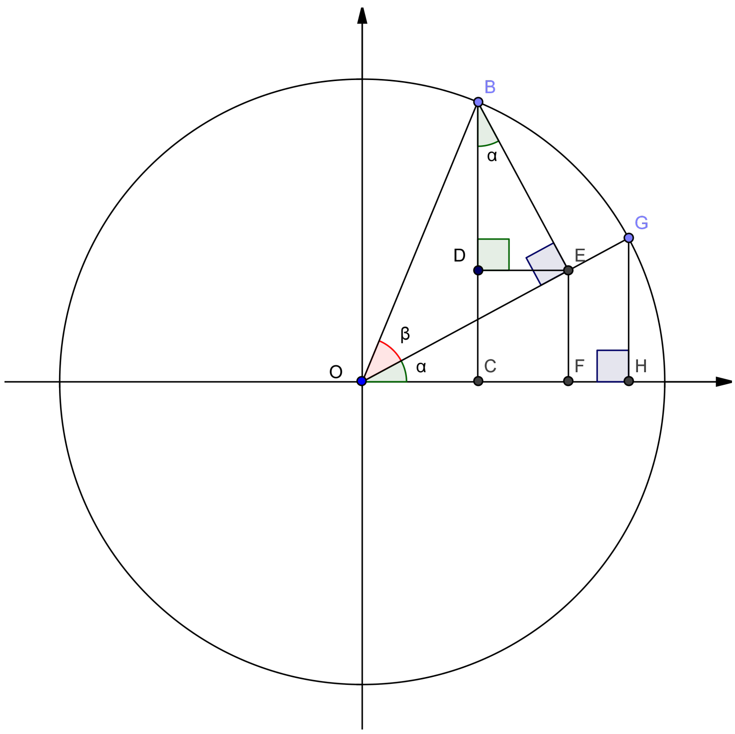


Figura 2.10: Arcos α e β

Observando a figura 2.10 , temos:

- $\widehat{EOF} = \widehat{CBE}$(ângulos agudos de lados perpendiculares).
- Os lados $\overline{CD} = \overline{EF}$ e $\overline{DE} = \overline{CF}$(lados opostos de um retângulo)

Portanto:

(1) No triângulo retângulo OCB ($\hat{C}$ é reto), temos:
$$cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OF}-\overline{DE}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{DE}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}}.\frac{\overline{OE}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BE}}{\overline{OB}}$$

(2) No triângulo retângulo OFE ($\hat{F}$ é reto), temos:
$$cos\alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}}$$

(3) No triângulo retângulo BDE ($\hat{D}$ é reto), temos:
$sen\alpha = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BE}}$

(4) No triângulo retângulo OEB ($\hat{E}$ é reto), temos:
$cos\beta = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OB}}$ e $sen\beta = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{OB}}$

Desse modo, a igualdade (1) pode ser escrita:

$$\boxed{cos(\alpha+\beta) = cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta}$$

Daí como consequência disso temos:

1. $cos(\alpha-\beta) = cos\alpha.cos\beta + sen\alpha.sen\beta$
2. $cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$
3. $cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\alpha}{2}}$

Com isso, podemos constatar que a definição da função cosseno nos livros didáticos está diretamente relacionada com a função de Euler, basta observarmos que ela representa a abscissa de $E(t) = (x,y)$ da circunferência trigonométrica, sendo a ordenada representada pela função seno, e também, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale a relação $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$(relação trigonométrica fundamental).

Além disso, nos livros didáticos, parece haver duas definições bem distintas, uma no triângulo retângulo e outra no círculo trigométrico, sendo que essas duas nos levam em propriedades que de certa forma “coincidem”. Portanto, os tais encadeamentos conceituais e lógicos são deixados de lado, já que não se estabelece uma relação de equivalência entre as definições.

Capítulo 3

Definição da Função Cosseno Através de Séries

Este capítulo será dedicado a apresentação do conceito da função cosseno por meio de séries, sendo inicialmente apresentadas algumas definições preliminares de suma importância para o entendimento de tal conceito.

3.1 Definições preliminares

Nesta seção será apresentado apenas o essencial sobre sequências e séries; o mínimo para estudar as funções definidas por séries, em particular, a função cosseno. Para aqueles interessados em demonstrações ou que desejam se aprofundar nos assuntos desta seção poderão fazer isso em [10] e [12].

3.1.1 Sequências e séries de números reais

Do ponto de vista intuitivo, podemos pensar numa sequência $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ como uma sequência de pontos da reta e no seu limite como um ponto do qual os pontos x_n tornam-se e pernanecem arbitrariamente próximos, desde que se tome o índice n suficientemente grande.

Definição 3.1.1 (sequência) *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *que associa a cada número natural* n *um número real* x_n, *chamado o* n*-ésimo termo da sequência.*

As notações classicas para uma sequência x são: $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n).

E importante ressaltar que tal definição é apresentada em livros de ensino médio como introdução ao assunto de progressões. Nesse caso, a formalidade é deixada um pouco de lado, pois tal definição é apresentada através de situações problema e da vida diária, como por exemplo: os dias da semana, os meses do ano, a seqüência dos anos, a partir de 1990, nos quais a Copa do Mundo de Futebol é realizada, etc.

Definição 3.1.2 (série) *Dada uma sequência (x_n) de números reais, uma série é uma soma*

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n + \ldots$$

Para um sentido mais amplo denotaremos:

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Um limite pode existir ou não e por esse motivo que seqüências e séries podem ser convergentes ou divergentes,respectivamente. Tal estudo não é o objetivo deste trabalho deixamos para o leitor uma análise mais aprofundada. Diferentemente das seqüências, as séries não são citadas de forma direta nos livros didáticos do ensino médio, porém, quando são trabalhadas as somas dos termos das progressões geométrica e aritmética é possível fazer uma correlação entre estes conteúdos e a definição de séries, até como forma de expandir os conhecimentos dos alunos.

3.1.2 Sequência e séries de funções

Definição 3.1.3 (sequência de funções) *Seja $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ uma sequencia de funções $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n, definida em $\mathbb{X}$ e tomando valores reais.*

Para um dada sequência f_n de funções de variável real definidas em $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, temos que:

Definição 3.1.4 (séries de funções) *Uma série infinita de funções reais de uma variável real, ou apenas série de funções é qualquer série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Seja s_n a sequência das somas parciais, calculadas para cada $n \in \mathbb{N}$ por,

$$s_n = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

Assim como nas séries de números reais se existe o limite $\lim_{n\to\infty} s_n$ a série é convergente e:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

Novamente é importante salientar que para fazer uma verificação sobre se uma série de funções é convergente ou não, há a necessidade de um aprofundamento no estudo de convergência, o que fica a cargo do leitor por não ser o objetivo deste trabalho.

3.1.3 Séries de potências

Será definida agora um tipo importante de séries de termos variáveis chamado de *séries de potências*, que podem ser consideradas como uma generalização da função polinomial. Além de serem usadas para calcular valores da função cosseno, também podem ser calculados valores de funções como e^x, $ln\ x$ e $\sqrt{x}$, os quais não podem ser calculados pelas operações da Aritmética.

Definição 3.1.5 *Toda série infinita expressa por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \tag{3.1}$$

é chamada série de potências de x centrada em c.

Um caso especial ocorre quando $c = 0$, e a série torna-se uma série de potências em x chamada série de Maclaurin que é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Ao tratarmos de séries infinitas de termos constantes, temos que observar questões de convergência ou divergência da série. Ao considerarmos séries de potências precisamos saber cada valor de x para o qual a série converge, ela representa um número que é a sua soma. Uma séire de potências de $x-a$ é sempre convergente para $x=a$. De fato, quando $x=a$, obtemos a série numérica

$$a_0+0+0+\dots ,$$

cuja soma é $a_0 \in \mathbb{R}$.

Mas será que existem outros valores de x para os quais a série (3.1) é convergente? O teorema seguinte fornece uma resposta a essa pergunta.

Teorema 3.1.6 *(Teorema de Abel) Dada a serie de potencias* $\sum_{i=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, *apenas uma das seguintes situações se verifica:*

i) a série converge apenas para $x=a$;

ii) a série converge (absolutamente) para todos os valores reais de x;

iii) existe um número real $R>0$ *(chamado raio de convergência) tal que a série converge absolutamente para todos os valores de* x *para os quais* $(x-a)<R$, *e diverge para todos os valores de* x *para os quais* $(x-a)>R$.

Nota : No teorema anterior, quando se verifica (i) tem-se $R=0$ e quando se verifica (ii) tem-se $R=+\infty$

Assim sendo, uma série de potências define uma função. A função f, com valores funcionais:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tendo como domínio todos os valores de x para os quais a série de potências converge.

Além disso como um polínômio em x é uma soma *finita* de termos da forma $a_n x^n$, não é de surpreender que f tenha propriedades análogas às das funções polinomiais. Em particular, no teorema a seguir(enunciado sem demonstração), veremos que f tem uma derivada f' cuja representação por série de potências se obtém diferenciando cada termo da série de f. Da mesma forma, obtêm-se integrais definidas de f integrando termo a termo da série $\sum a_n x^n$

Teorema 3.1.7 *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências cujo raio de convergência é* $R>0$.*Então, se* f *for a função definida por* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $f(x)$ *existirá para todo* x *no intervalo aberto* $(-R,R)$ *e teremos:*

i) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

ii) $\int_0^x f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n+1} x^{n+1}$

Demonstração: ver Leithold [15]- página 755

3.2 Definição de função cosseno por meio de séries

Será apresentada agora, com base no livro *Análise Real* de LIMA [10] , uma outra maneira de se definir precisamente a *função cosseno* com o auxilio de séries de potências, ou seja, sem apelo à intuição geométrica.

As séries abaixo têm ambas raio de convergência infinito.

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} \text{ e } s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{3.2}$$

o que define as funções $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^{∞} (as derivadas de ordem n expressas por $c^{(n)}$ e $s^{(n)}$ existem para todo $n \in \mathbb{N}$).

Temos imediatamente:

$$c(0) = 1,\ s(0) = 0,\ c(-x) = c(x) \text{ e } s(-x) = -s(x)$$

e, derivando termo a termo:

$$s'(x) = c(x) \text{ e } c'(x) = -s(x).$$

Daí resulta que

$$s(x)^2 + c(x)^2 = 1$$

para todo x. Com efeito, a função

$$f(x) = s(x)^2 + c(x)^2$$

tem derivada igual a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2s(x).s'(x) + 2c(x).c'(x) = \\ &= 2s(x).c(x) - 2c(x).s(x) = 0. \end{aligned}$$

Como $f(0) = 1$, vem $f(x) = 1$ para todo x. De maneira análoga se provam as fórmulas de adição:

$$\begin{cases} s(x+y) = s(x).c(y) + c(x).s(y) \\ c(x+y) = c(x).c(y) - s(x).s(y) \end{cases}$$

Basta considerar y fixo e definir as funções

$$f(x) = s(x+y) - s(x).c(y) - c(x).s(y) \text{ e } g(x) = c(x+y) - c(x).c(y) + s(x).s(y).$$

Tém-se $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$. Daí resulta que

$$(f(x)^2 + g(x)^2)' = 0.$$

Como $f(0) = g(0) = 0$, concluímos que

$$f(x)^2 + g(x)^2 = 0$$

para todo x. Valem portanto, as fórmulas de adição. Afirmamos agora que deve existir algum $x > 0$ tal que $c(x) = 0$. Do contrário, $c(0) = 1$, seria $c(x) > 0$ para todo $x > 0$ e como c é a derivada de s , a função $s(x)$ seria crecente para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Daí, pela figura 3.1, para qualquer $x > 1$ temos:

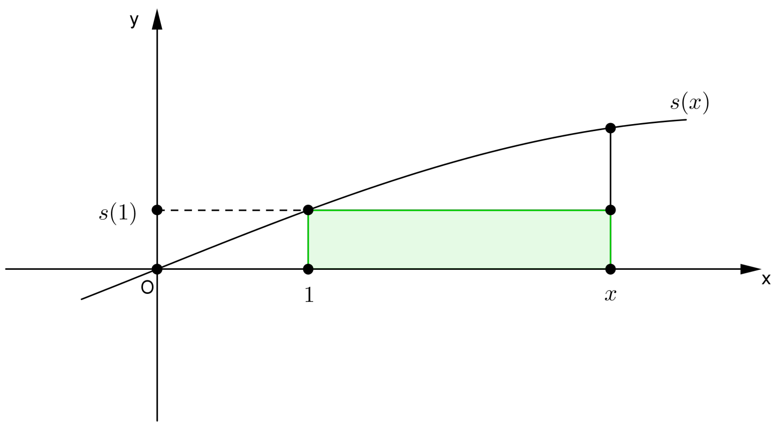


Figura 3.1: Integral

$$s(1).(x-1) \leq \int_1^x s(t)dt = c(1) - c(x) \leq 2.$$

(Como $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$, $c(x)$ varia entre -1 e $+1$, logo $c(1) - c(x) \leq 2$ para todo x.) Mas a desigualdade

$$s(1).(x-1) \leq 2,$$

válida para todo $x > 1$, é absurda(Note que $s(0) = 0$ logo $s(1) > 0$ pois s é crescente).Portanto $c(x)$ deve anular-se para algum $x > 0$. O conjunto dos números $x > 0$ tais que $c(x) = 0$ é fechado, já que c é contínua e $c(0) > 0$. Portanto, existe um menor número positivo para o qual c se anula. Chamamos tal número $\pi/2$.

A segunda fórmula de adição dá:

$$c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 = 2c(x)^2 - 1.$$

Logo $c(\pi) = -1$, $c(2\pi) = 1$ e, portanto $s(2\pi) = 0$.

As fórmulas de adição, novamente usadas, mostram que

$$c(x+2\pi) = c(x) e s(x+2\pi) = s(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, as funções s(x) e c(x) sâo periódicas, com período 2π. Com isso, nos basta introduzir a notação usual para a **função cosseno**

$$c(x) = cos(x)$$

e consequêntemente

$$s(x) = sen(x)$$

será a função seno.

Definida a função cosseno por séries já podemos constatar algumas dificuldades na sua apresentação no ensino médio, pois nesta definição foram utilizados conceitos como séries, sequências e fatorial que não são conteúdos vistos no primeiro ano do ensino médio, além de derivadas que sequer faz parte da grade curricular do ensino médio.

Capítulo 4

Definição da Função Cosseno através da Exponencial no Corpo dos Complexos

Este capítulo será dedicado a apresentar um conceito da função cosseno com domínio extendido para corpo dos complexos, tendo como base a função exponencial. Serão considerados, por parte do leitor, conhecimentos prévios sobre o corpo dos números complexos e função de uma variável complexa, além dos resultados sobre séries de potências do capítulo anterior, que serão aplicados para o corpo dos complexos.

4.1 A Função Exponencial

A função exponencial é a função $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida pela série

$$e^z = exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \cdots .$$

Escrevendo $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x \left[1 + iy - \frac{1}{2!} y^2 - i \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{4!} y^4 + i \frac{1}{5!} y^5 + \cdots \right]$$

Portanto:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots \right)$$

e

$$e^z = e^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}y^{2n} + i\sum_{=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}\right)$$

De (3.2) temos:

$$\boxed{e^z = e^x\,(cosy + iseny)}$$

No caso em que $z = iy$ temos a chamada *fórmula de Euler*: $e^{iy} = cosy + iseny$. Da definição podemos perceber que:

- $|e^z| = e^x$
- $arg(e^z) = Imz + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

Portanto a função exponencial $e^z \neq 0$ é periódica de período 2π para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja,

$$e^{z+2k\pi} = e^z.$$

A conhecida *fórmula de Moivre* $(cosy + iseny)^n = cos(ny) + isen(ny)$ nos leva a concluir que

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

para quais que $n \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{C}$. Em particular , $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Podemos observar ainda, que dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$onde $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ temos:

$$\begin{aligned}
e^{z_1 z_2} &= [e^{x_1}\,(cosy_1 + iseny_1)]\,[e^{x_2}\,(cosy_2 + iseny_2)] = \\
&= e^{x_1+x_2}\,[cosy_1 cosy_2 + icosy_1 seny_2 + iseny_1 cosy_2 - seny_1 seny_2] = \\
&= e^{x_1+x_2}\,[(cos(y_1+y_2) + isen(y_1+y_2))] = e^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{e^{z_1 z_2} = e^{z_1+z_2}}$$

para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4.2 Definição de função cosseno por meio da exponencial complexa

Na seção anterior vimos que se $y \in \mathbb{R}$ temos a *fórmula de Euler* $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ e como consequência $e^{-iy} = cosy - iseny$, somado-se membro a membro dessas igualdades temos:

$$e^{iy} + e^{-iy} = cosy + iseny + cosy - iseny$$

logo

$$cosy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \tag{4.1}$$

Decorre daí, que da mesma forma que a a função exponecial, a função cosseno pode ser estendida a uma função em $\mathbb{C}$, portanto temos que:

$$\begin{aligned} cos : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{aligned}$$

De maneira análoga a função seno pode ser definida por $sen : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Portando como a função cosseno está sendo definida através de uma exponecial complexa ela, da mesma forma, será periódica de período 2π e também temos $cosz = 0$ se, e somente se, $z = \pi/2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, os zeros da função cosseno complexa são os mesmos da real. Além disso, as propriedades que são válidas em $\mathbb{R}$ são válidas em $\mathbb{C}$, como podemos observar nos exemplos abaixo:

a) $sen^2z + cos^2z = 1$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} sen^2z + cos^2z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

∎

b) $cos(z_1 + z_2) = cosz_1cos_2 - sen_1sen_2$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
cos(z_1+z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \\
&= \frac{e^{iz_1+iz_2}+e^{-iz_1-iz_2}}{2} = \\
&= \frac{e^{iz_1}.e^{iz_2}+e^{-iz_1}.e^{-iz_2}}{2} = \\
&= \frac{[(cosz_1+isenz_1)(cosz_2+isenz_2)+(cosz_1-isenz_1)(cosz_2-isenz_2)]}{2} = \\
&= cosz_1cosz_2 - senz_1senz_2
\end{aligned}$$

∎

c) $cos(-z) = cosz$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
cos(-z) &= \frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2} = \\
&= \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \\
&= \cos z
\end{aligned}$$

∎

De maneira análoga são demonstradas as propriedades para a função *sen z*.

Definida a função cosseno através de uma exponecial podemos perceber que com certas limitações ela pode ser apresentada no ensino médio basta lembrarmos que a função exponecial no primeiro ano do ensino médio é definida como um função real da forma $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$, ou seja podemos assumir $e = a$, ampliando para os complexos, pois tal conjunto é apresentado no primeiro ano junto com os demais conjuntos numéricos.

Capítulo 5

Definição da Função Cosseno por Meio de uma Equação Diferencial

A Teoria das Equações Diferenciais é objeto de intensa atividade de pesquisa, pois apresenta aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações, além de apresentar diversas ramificações. Assim, este último capítulo será dedicado a apresentar a definição da função cosseno com base na resolução de uma equação diferencial ordinária da forma $c''(x) + c(x) = 0$, pois procurar uma solução de uma equação diferencial é procurar uma função que satisfaça a equação dada.

Mas, para um melhor entendimento, serão apresentados alguns conceitos básicos sobre equações diferenciais que serão de relevante importância na resolução da mesma.

5.1 Definições e conceitos básicos de equações diferenciais

Definição 5.1.1 *Uma equação diferencial ordinária é uma equação da forma*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0 \ ou \ f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ou suas diferenciais, sendo que x é a variável independente, y a variável dependente e o símbolo $y^{(k)}$ representa a derivada de ordem k da função $y = y(x)$.

Definição 5.1.2 *Chama-se ordem da equação diferencial a maior das ordem das derivadas que nela aparecem.*

Assim já podemos ressaltar que a expressão $c''(x)+c(x) = 0$ é uma equação diferencial de 2ª ordem e é para a resolução desse tipo de equação que voltaremos nossas atenções a partir de agora.

Definição 5.1.3 *Chama-se solução de uma equação diferencial de ordem n no intervalo $\mathbb{I}$ a função $y = y(x)$ definida nesse intervalo, juntamente com suas derivadas, até à ordem n, que satisfaz a equação diferencial, ou seja,*

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{I}$.

Definição 5.1.4 *Chama-se solução geral ou integral de uma equação diferencial ordinária a toda a solução que envolva uma ou mais constantes arbitrárias.*

Definição 5.1.5 *Chama-se solução particular ou integral particular de uma equação diferencial ordinária a toda a solução obtida atribuindo valores às constantes arbitrárias da solução geral.*

Daí já podemos observar que o conceito da função cosseno será uma solução particular da equação $c''(x) + c(x) = 0$.

Definição 5.1.6 *Chama-se condições iniciais as condições relativas à função incógnita e suas derivadas dadas para o mesmo valor da variável independente.*

Definição 5.1.7 *Chama-se condições de fronteira as condições relativas à função incógnita e suas derivadas para valores distintos da variável independente.*

Definição 5.1.8 *Uma equação diferencial ordinária linear é toda equação diferencial da forma*

$$a_n(x)\frac{d^{(n)}y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

onde todos os coeficientes a_i, $i = 1, \ldots, n$, e a entrada g são funções da variável independente x.

Casos particulares:

1. A equação é chamada equação linear homogênea quando $g(x) = 0$.

2. A equaçao é chamada equação linear de coeficientes constantes quando todos $a_i(x)$ forem funções constantes.

Dos casos 1 e 2 temos que a equação $c''(x)+c(x) = 0$, objeto de nosso estudo, é uma equação diferencial de 2ªordem linear homogênea de coeficientes constantes, devido a isso, a próxima seção será dedicada à apresentação desse tipo de equação e como ela pode ser resolvida.

5.2 Equações diferenciais lineares homogêneas de 2ª ordem e coefientes constantes

Como já foi dito, nesta seção, serão apresentados conceitos envolvendo equações diferenciais lineares de segunda ordem da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{5.1}$$

onde $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Ou seja, equações diferenciais ordinárias de segunda ordem linerares com coeficientes constantes.

Inicialmente, para (5.1), tentaremos supor soluções da forma:

$$y(x) = e^{rx}$$

Consequentemente,

$$y'(x) = re^{rx} \text{ e } y''(x) = r^2e^{rx},$$

se y for solução de (5.1) teremos que:

$$\left(r^2 + a_1 r + a_0\right)e^{rx} = 0$$

isto é, o expoente r deve ser igual às raízes da equação quadrática em r:

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

que é chamada equação característica da EDO (5.1). Analisaremos, agora, os possíveis casos das raízes da equação característica.

Sabemos que a solução dessa equação é dada por:

$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde Δ é o discriminante da equação característica. Assim temos que:

1. Se $\Delta > 0$
   Então, existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 \neq r_2$ e como $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ são linearmente independentes, a solução geral da EDO(5.1) é:

$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}.$$

2. Se $\Delta = 0$
   Então, temos $r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ e $r = -\dfrac{a_1}{2}$. Neste caso obtemos apenas $y(x) = e^{rx}$, portanto será necessário utilizar a redução de ordem, que tem sua definição encontrada facilmente em livros de equações diferenciais, para achar um segunda solução linermente independente. Com isso, a solução geral da EDO(5.1) será:

$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 x e^{r_2 x}.$$

3. Se $\Delta < 0$
   Então a equação característica tem duas raízes complexas: $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$. De maneira formal teremos uma solução geral da forma:

$$y(x) = k_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

   ou seja,

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(k_1 e^{i\beta x} + k_2 e^{-i\beta x}\right). \tag{5.2}$$

Com base nos conceitos e definições vistos acima podemos perceber que uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes sempre terá uma função solução, seja ela uma função real ou complexa. Portanto, definiremos, na próxima seção, a função cosseno como sendo solução de uma dessas diferenciais.

5.3 Definição da função cosseno por meio de uma equação diferencial

Considere o problema de valor inicial expresso por:

$$\begin{cases} c''(x) + c(x) = 0 \\ c(0) = 1, \quad c'(0) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

A equação característica de (5.3) é $r^2+1 = 0$, tendo apenas raízes complexas expressas por $r_1 = i$ e $r_2 = -i$, logo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ e tomando (5.2) a solução geral da equação será expressa por:

$$c(x) = k_1 e^{ix} + k_2 e^{-ix}$$

que, por sua vez, tem derivada expressa por:

$$c'(x) = ik_1 e^{ix} - ik_2 e^{-ix}$$

Consequentemente para $x = 0$ temos:

$$c(0) = k_1 + k_2 \longrightarrow k_1 + k_2 = 1$$
$$c'(0) = k_1 - k_2 \longrightarrow k_1 - k_2 = 0$$

resolvendo o sistema, temos que $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$, logo:

$$c(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

.

Assim, de (4.1) , podemos concluir que a função solução da equação diferencial $c''(x)+c(x) = 0$ para $c(0) = 1$ e $c'(0) = 0$ é a função cosseno. Consideremos agora a função:

$$s(x) = -c'(x) \tag{5.4}$$

daí temos que

$$s'(x) = -c''(x) \Longrightarrow \boxed{\text{s'(x)=c(x)}} \tag{5.5}$$

e de (5.4) e (5.5) temos que:

$$s(0) = 0 \;\; e \;\; s(0) = 1. \tag{5.6}$$

Além disso, ao derivarmos novamente (5.5):

$$s''(x) = c'(x) \Longrightarrow \boxed{\text{s''(x)-s(x)=0}} \tag{5.7}$$

e ao multiplicarmos membro a membro (5.3) e (5.7) temos que:

$$\begin{aligned}
s''(x).c''(x) = s(x).c(x) \quad &\Rightarrow \quad c'(x).c''(x) = s(x).s'(x) \\
&\Rightarrow \quad -c(x).c'(x) = s(x).s'(x) \\
&\Rightarrow \quad -2c(x).c'(x) = 2s(x).s'(x) \\
&\Rightarrow \quad -\int 2c(x).c'(x) = \int s(x).s'(x) \\
&\Rightarrow \quad s^2(x) = -c^2(x) + k \\
&\Rightarrow \quad s^2(x) + c^2(x) = k.
\end{aligned}$$

Como sabemos, $s(0) = 0$ e $c(0) = 1$, portanto $k = 1$, ou seja:

$$\boxed{s^2(x) + c^2(x) = 1}$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. E $s(x)$ será chamada *função seno*.

Com isso podemos cosntatar que tal definição por meio de um PVI tem sua apresentação inviável no ensino médio pelo fato do assunto derivadas não fazer parte dos conteúdos programáticos do ensino médio.

Considerações Finais

De maneira histórica, no âmbito educacional, encontramos para a matemática currículos que privilegiam apenas um conhecimento específico, e que se destacam na aprendizagem apenas pela memorização e repetição. Esses currículos também costumam subdividir a matemática em partes, estudando-a separadamente: em um momento se estuda álgebra, em outro geometria e assim por diante, indo de encontro com a própria evolução da disciplina.

Vimos neste trabalho que a função cosseno pode ser definida por, pelo menos, três maneiras diferentes daquela que é apresentada durante o ensino médio. Porém, a viabilidade da apresentação de tais definições no ensino médio é questionável, pois requerem conhecimentos prévios que não estão disponíveis no 1º ano do ensino médio (série em que é trabalhada a trigonometria no estado de Sergipe). Com base nisso, após fazermos algumas observações sobre como são estudadas as funções trigonométricas, analisaremos a viabilidade de apresentação de cada uma dessas definições.

As funções trigonométricas, diferentemente das outras funções estudadas no ensino médio, têm uma particularidade no sentido de que o seno e o cosseno tiveram que ser redefinidos pois, existiam apenas para ângulos agudos de um triângulo retângulo e passaram a existir para qualquer número real, envolvendo a notação de função. Esta ligação existente entre números reais representados na reta (domínio da função) e os pontos do ciclo trigonométrico (imagem da função) é de suma importância para a compreensão dessas funções. No entanto, um ponto P localizado no ciclo trigonométrico com coordenadas $P = (\cos x; sen\ x)$ pode gerar uma barreira para os alunos pois, eles já terão o costume, do ensino fundamental, de associar os pontos de uma função pelas suas coordenadas cartesianas. Por exemplo, na função linear $f(x) = 3x$ temos pontos do tipo$P = (x; 3x)$, ou seja, $P = (x; f(x))$, o que não acontece no ciclo, pois $sen\ x$ não é necessariamente $f(\cos x)$. Na verdade serão estudadas duas funções que terão gráficos com pontos da forma

$$P = (x; cosx) \text{ e } P = (x; senx).$$

Outros obstáculos com os quais os alunos podem se deparar se referem à definição de ângulo e as unidades de medidas de ângulos. No primeiro, o aluno que está acostumado com ângulos que têm uma região do plano entre duas semi-retas se depara com o conceito de arco e ângulo no ciclo trigonométrico; no segundo, ele que é acostumado a lidar com graus, minutos e segundos para medir ângulos, vê uma nova unidade de medida, o radiano, que é ligada ao ciclo e vem acompanhada do irracional π. Mas, de qualquer forma, passa longe de ser um desafio intelectual calcular cosseno de ângulos notáveis que podem ser obtidos a partir de polígonos regulares, como triângulos equiláteros e quadrados. Problema pode ocorrer, por exemplo, no caso de necessidade de calcular cosseno de $\sqrt{2}$ radianos, entre outros casos não notáveis. Mesmo utilizando o ciclo trigonométrico que tem raio igual a 1 fica inviável calcular este valor, daí vem a necessidade de uma definição que não seja estritamente geométrica .

No caso da definição por meio de séries, vimos que são necessários conhecimentos prévios como sequências, séries e fatorial, que são conteúdos expostos apenas no 2º e 3º anos, além do conceito de derivada que não faz parte da grade curricular, ou seja, para que esta base seja adquirida tem-se que alterar a ordem dos conteúdos, inserindo os conceitos das funções trigonométricas de uma forma analítica em momentos posteriores aos que são apresentadas hoje, na forma geométrica. Porém nada impede que esta definição seja exposta, mesmo de maneira superficial, no 2º ano e apresentada de forma integral no 3º ano do ensino médio, até mesmo como uma forma de ampliar o conhecimento dos alunos que, até então, só tiveram acesso a uma definição puramente geométrica para a função cosseno lhes dando até uma explicação de como calcular cosseno de ângulos do tipo $\sqrt{2}$ radianos, isto é, daremos ao aluno uma percepção de que existe uma definição precisa para cosseno que permite o cálculo de valores da função para qualquer número real e com a precisão desejada.

Outra definição para a função cosseno apresentada neste trabalho é feita tendo por base a função exponencial e^z , estendida para o conjunto dos números complexos. Função esta que é definida também, a exemplo da definição anterior, por meio de uma série de potências nos levando a relacionar tais definições. No entanto, no 1º ano do ensino médio a definição da função exponencial é apresentada como uma função $f : R \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$, com a real positivo, o que pode nos ajudar na definição da função cosseno. Vale lembrar também que o conjunto dos números complexos já é apresentado aos alunos nesta série, facilitando a explanação das funções trigonométricas por meio da exponencial entendida para os complexos pois, a definição vai requerer apenas do aluno o conhecimento prévio das razões trigonométricas que são visto no ensino fundamental . Deixando para um aprofundamento maior, novamente, para o terceiro ano do ensino médio no momento em que for apresentado de forma mais contundente o assunto números complexos.

Já na definição por meio de uma equação diferencial ordinária linear homogênea, pode-se perceber no resultado final que recaímos na definição por meio da exponencial. Além disso, esta definição causa um sério problema do ponto de vista didático, pois equações diferenciais não são conteúdos do ensino médio. Porém, vale a pena a explanação do resultado final para que o aluno não tenha a visão de que o cosseno depende apenas do valor do cateto adjacente de um triângulo retângulo ou apenas uma abscissa de um ponto do ciclo trigonométrico.

Com base no que foi dito até aqui, faz-se necessário ressaltar para os alunos que um estudo mais aprofundado sobre a função cosseno, de uma forma geral a trigonometria, requer uma matemática mais avançada, que é aprendida apenas em cursos superiores, pois o ensino médio no Brasil representa um nível intermediário entre o ensino fundamental e superior - momento em que todo o trabalho é voltado para o vestibular. E nós, educadores, temos que nos perguntar se é possível elaborar atividades diferenciadas que, não só nos auxiliem em nossa prática pedagógica e metodológica, mas que também trabalhe com o desenvolvimento intelectual de nossos alunos, preparando-os para as adversidades que o mundo de hoje nos oferece.

Referências Bibliográficas

[1] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. 1. ed. São Paulo:Editora Ática, 2008.

[2] IEZZI, Gelson;DOLCE, Osvaldo;DEGENSZAJN ,David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA,Nilze de. *Matemática: Ciência e Aplicações*. 6.ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

[3] BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy. *MATEMÁTICA 2*. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 1992.

[4] GENTIL, Nelson; SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GRECO, Antonio Carlos; FILHO, Antônio Bellotto;GRECO, Sérgio Emílio. *Matemática para o 2º grau - Volume 2*. 7. ed. São Paulo: Editora Ática, 1998.

[5] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 1. ed. São Paulo:Editora Ática, 1999.

[6] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. *História da Matemática* 2. ed. :Editora Edgard Blucher, 1974.

[7] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César . *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 9. ed. Rio de janeiro: SBM, 2006.

[8] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria - Números Complexos* . 3. ed. Rio de Janeiro:SBM,1992.

[9] VIVEIRO, Tânia Cristina; CORRÊA, Marlene Lima Pires. *Matemática: Teoria e Prática*. 1. ed. São Paulo: Editora Rideel, 1999.

[10] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - Volume 1 - Funções de uma variável*. 8. ed. Rio de janeiro: IMPA, 2006.

[11] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - Volume 1*. 12. ed. Rio de janeiro: IMPA, 2006.

[12] LANG, Serge. *Analysis I*. 5. ed. New York: Addison-Wesley Publishing,1976.

[13] STEWART, James. *Cálculo*. (tradução Antonio Carlos Gilli Martins e Antonio Carlos Moretti). volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

[14] COIMBRA, Maria do Carmo.*Equações Diferenciais, uma primeira abordagem*. Porto - Portugal, Faculdade de Engenharia da cidade do Porto, 2008.

[15] LEITHOLD, Louis. *Cálculo com Geometria Analítca* 3. ed., Editora: Harbra.

[16] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. *Equações diferenciais aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[17] LINS NETO, Alcides.*Funções de uma Variável Complexa*. 2. ed.Rio de Janeiro:IMPA, 2008.

[18] FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES JR., Nilson C..*Introdução às Funções de uma Variável Complexa*.2. ed. Rio de Janeiro:SBM, 2008.

[19] COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. *Funções Seno e Cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental"e do computador*. São Paulo: PUC, 1997. 174 pag. Dissertação(Mestrado) - Programa de pós-graduação da Pontíficia Universidade Católica,1997.

[20] MENDES, Iran Abreu. *A Trigonometria e o seu Ensino: Alguns Fragmentos Dessa História*.Belém: Prog. de Pós-Grad. em Ed. em Ciências e Matemáticas – PPGECM/UFPA.

[21] QUINTANEIRO, Wellerson. *Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio*. Rio de Janeiro: UFRJ, Dissertação de Mestrado. 143 pag. , Intituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2010.

[22] BRASIL.MEC.SEMT.*Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*.Brasília, 2000.