UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

CARLOS HENRIQUE SALES MARTINS

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA: ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

FORTALEZA
2016

CARLOS HENRIQUE SALES MARTINS

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA: ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S155d Sales Martins, Carlos Henrique.

Desigualdade isoperimétrica: aspectos históricos e uma abordagem para o ensino médio / Carlos Henrique Sales Martins. – 2016.

46 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.

Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1.Desigualdade de isoperimétrica. 2. Séries de Fourier. 3. Teorema de Green. 4. Fundação de Cartago. 5. Princesa Dido. I. Título.

CDD 510

CARLOS HENRIQUE SALES MARTINS

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA: ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 15/01/2016.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cícero Fagner Alves da Silva
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

FORTALEZA
2016

AGRADECIMENTOS

A Deus, sobre todas as coisas, pois é o Autor e Consumador de minha vida.

À minha amada mãe, Ana Maria Oliveira Sales, que sempre investiu em mim sonhando sempre em conquistas como essa.

À minha amada esposa, Amanda Batista Pinto Sales Martins, por suas palavras de incentivo, carinho e sempre que necessário, renunciando-se em prol dessa conquista.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcos Ferreira de Melo que foi sempre uma palavra de incentivo para esse mestrado.

À CAPES, por proporcionar a oportunidade de cursar este mestrado, mesmo estando em exercício em sala de aula.

Aos professores, coordenadores, colegas e amigos de mestrado que foram peças essenciais na minha formação.

“Se quiser buscar realmente a verdade, é preciso que, pelo menos, uma vez em sua vida você duvide, ao máximo que puder, de todas as coisas.” (René Descartes)

RESUMO

Essa dissertação tem como objetivo conhecer o processo histórico do surgimento da matemática e das desigualdades isoperimétricas, bem como apresentar abordagens de desigualdades isoperimétricas que podem ser utilizadas no ensino médio. Para concretização do objetivo dessa pesquisa adotou-se como metodologia a pesquisa bibliográfica. Apesar da longa existência do estudo do problema isoperimétrico ao longo dos tempos este ainda é alvo da atenção de muitos matemáticos. Muitas generalizações de desigualdades isoperimétricas nos mais variados contextos matemáticos são muito estudadas em diferentes áreas de investigação matemática. Sendo pertinente observar que as demonstrações podem ser feitas de várias maneiras e a abordagem dessas fórmulas é pouco citada nos livros. A organização dos conhecimentos escolares permitem introduzir um novo fazer pedagógico do professor, na qual o processo de reflexão e interpretação sobre diferentes procedimentos permitem estabelecer uma relação entre a teoria e o cotidiano. Com as propostas aqui relatadas deseja-se continuar agregando novos elementos capazes de enriquecer e tornar mais acessível o processo de construção do conhecimento matemático nessa área. Visto que todo conhecimento teórico matemático que existe passou antes pela experiência real, daí nossa preocupação de contextualizar as desigualdades isoperimétricas em seu evento inicial, bem como pontuar algumas questões do desenvolvimento da matemática, provando o quanto seu surgimento foi, é e será relevante para o desenvolvimento do homem.

Palavras-chave: Desigualdade isoperimétrica. Polígonos Regulares. Série de Fourier. Teorema de Green. PCNEM.

ABSTRACT

This dissertation aims to know the historical process of the emergence of mathematics and isoperimetric inequalities, as well as to present approaches of isoperimetric problems that can be used in high school. In order to achieve the objective of this research, bibliographical research was adopted as methodology. Despite the long existence of the study of the isoperimetric problem over time this is still the focus of many mathematicians. Many generalizations of isoperimetric inequalities in the most varied mathematical contexts are much studied in different areas of mathematical investigation. It is pertinent to note that demonstrations can be made in various ways and the approach to these formulas is scarcely mentioned in the books. The organization of school knowledge allows us to introduce a new pedagogical practice of the teacher, in which the process of reflection and interpretation about different procedures allows us to establish a relation between theory and everyday life. With the proposals here reported it is desired to continue adding new elements capable of enriching and making more accessible the process of construction of mathematical knowledge in this area. Since all mathematical theoretical knowledge that has existed before by actual experience, our preoccupation with contextualizing isoperimetric inequalities in their initial event, as well as punctuating some questions of the development of mathematics, proving how much it has arisen, is and will be relevant to the development of man.

Keywords: Isoperimetric inequality. Regular Polygons. Fourier series. Theorem of Green. PCNEM.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO** ……………………...……………………………….……..	10
2	**O RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO E SUA RELEVÂNCIA PARA A HUMANIDADE** ……….………….………………………………	13
2.1	**Um breve olhar histórico sobre o desenvolvimento dos conhecimentos Matemáticos** ………………………….……………..…………..…	13
2.2	**Ensino da Matemática hoje**……………..……..…………………………..	17
2.3	**Breve história sobre o contexto inicial das Desigualdades Isoperimétricas**……………………..………………....…....………	19
3	**OS PCN E AS DIRETRIZES CURRICULARES NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** ……….…………………………………………………	23
3.1	**Os PCN e a aprendizagem da Matemática**……….…………………….	23
3.2	**As Diretrizes curriculares, a Pedagogia de Projetos e o Ensino de Matemática**…………………………………………………………...……..	26
4	**O ENSINO DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA O ENSINO MÉDIO** ……………………..………...……………...…….	28
4.1	**Polígonos Regulares** ……………………..……………..……..………..	28
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS** ……….………………………………….	33
	REFERÊNCIAS ....…....………….………………………..	34
	ANEXO A - TEOREMA DE GREEN……………………………………….	38
	ANEXO B - SÉRIES DE FOURIER………..…………………….…….	42

1 INTRODUÇÃO

A desigualdade isoperimétrica (mesmo perímetro) tem no cotidiano muitos exemplos práticos. Uma necessidade básica para o ensino dos alunos de todos os níveis, principalmente do Ensino Médio. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) indicam alternativas que sugerem uma correlação entre a teoria e a prática através de temas transversais, sugerindo assim novos significados, outra abordagem de velhos assuntos. Mas, inovar é tratar de questões relacionadas a diversos temas e buscar diferentes formas de atingir seu objetivo maior, promover conhecimento para que o aluno consiga prosseguir os estudos, tendo habilidades de compreender a funcionalidade dos conhecimentos adquiridos no Ensino Médio para suas escolhas profissionais. (BRASIL/PCNEM, 1998).

Inovar é uma busca do professor, especialmente o de matemática, que diante das dificuldades encontradas por muitos alunos têm algumas particularidades a vencer, este deve partir de uma reflexão sobre o fazer cotidiano escolar, pois a metodologia que deve ser usada é única para cada situação, para a realidade de cada escola.

Um dos temas que podem sim ser demostrados de forma clara para que os alunos vejam sua funcionalidade é são os Problemas Isoperimétricos, que conforme pesquisas, teve a sua origem na Grécia Antiga, século IX a.C., baseada numa lenda, a Lenda de Dido. Esta lenda conta um episódio de migrações fenícias para o ocidente mediterrâneo, mas ficou especialmente conhecida devido ao romance entre Dido e Eneias, reproduzido na obra "Eneida" de Virgílio. Texto escrito no século I a.C.. Conta a saga de Eneias, um troiano que é salvo dos gregos em Troia, viaja errante pelo Mediterrâneo até chegar à península Itálica. Este é tido como o ancestral dos romanos. Nos deteremos nessa história no capítulo posterior

A organização dos conhecimentos escolares permitem introduzir um novo fazer pedagógico do professor, na qual o processo de reflexão e interpretação sobre diferentes procedimentos permitem estabelecer uma relação entre a teoria e o cotidiano. Com esse fim, utiliza-se bastante, atualmente, a Pedagogia de Projetos com o objetivo de contextualizar o estudo dos conteúdos das diversas disciplinas e gerar, através de um trabalho interdisciplinar em torno de assuntos da atualidade, pertinentes ao contexto escolar, tendo a Matemática como meio e os temas transversais como fim.

Pires (2000, p. 23) observa que a organização do currículo escolar tradicional, composto por disciplinas que “se justapõem sem, no entanto, sofrerem algum tipo de penetração mútua, é uma das razões para uma formação fragmentada, baseada na dissociação e no esfacelamento do saber”. Assim, durante muitas décadas o estudo da matemática passou por muitas reflexões para que esta não seja mais vista na escola de forma descontextualizada, fragmentada e distante do cotidiano do aluno.

O objetivo da Pedagogia de Projetos aplicada à Educação Matemática é fazer com que os alunos percebam que a Matemática está interligada a diferentes temas e inserida não apenas na vida escolar. Para isso a Matemática tem que ser tratada como meio para abordar assuntos pertinentes ao cotidiano do aluno. (BRASIL/PCNEM, 1998).

Paralelamente, busca-se na educação atual para o ensino médio mostrar ao aluno, através de cada um dos assuntos pesquisados e selecionados pelo grupo (educadores, gestores, alunos, etc.), a utilidade da Matemática na resolução de diferentes problemas, fazendo com que se perceba um forte elo entre a Matemática e os demais Componentes Curriculares, surgindo assim, com naturalidade à interdisciplinaridade, parte imprescindível para o desenvolvimento de projetos.

Diante do exposto essa dissertação tem como objetivos: conhecer o processo histórico do surgimento da matemática e das desigualdades isoperimétricas; reconhecer nos PCN e nas Diretrizes Curriculares apoios metodológicos para o ensino da matemática, bem como apresentar abordagens de problemas isoperimétricos que podem ser utilizadas no ensino médio.

Para concretização dos objetivos dessa pesquisa adotou-se como metodologia a pesquisa bibliográfica. Apresentam-se como os fundamentos teóricos norteadores desse trabalho as considerações de Fiorentini (2003), D’ambrósio (2007), Pacievitch (2009), Boyer (2010), Brito (2010), dentre outros autores que apresentam trabalhos relevantes em Educação Matemática.

No primeiro capítulo, descrevemos aspectos históricos da Educação Matemática. Esse capítulo realizar um apanhado histórico acerca do surgimento da matemática, como algo imprescindível para o desenvolvimento da humanidade, consiste em uma revisão da literatura realizada nesse capítulo, percebeu-se alguns indícios da importância de se conhecer e mostrar aos educandos a construção histórica do conhecimento matemático.

No segundo capítulo buscou-se fundamentar legalmente as bases e a importância da Matemática no contexto educacional atual, conhecendo os documentos legais acerca da legitimidade dessa inovação dentro do ambiente escolar.

O terceiro capítulo é dedicado ao ensino da Desigualdade Isoperimétrica para o Ensino Médio, com exemplificações práticas, demonstrações. Em seguida, finalizou-se esta dissertação com uma seção destinada às Considerações Finais, na qual se procurou resgatar as principais conclusões ao longo dos capítulos.

2 O RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO E SUA RELEVÂNCIA PARA A HUMANIDADE

Todo e qualquer tipo de conhecimento é uma construção resultante das ações humanas ao longo do tempo, sendo físico, social ou matemático. Dessa forma, a Matemática como conhecimento humano deve priorizar a construção do conceito através da experimentação ativa dos sujeitos que a utilizam, tendo em vista a compreensão da sua funcionalidade em nosso cotidiano. (D' AMBRÓSIO, 2007).

A modernidade exige na atualidade, diz D'Ambrósio (2007), "participação ativa de todos os interessados na tomada de decisões. Na prática docente isso se manifesta na elaboração do aprendizado". Assim, as leis vigentes no país para a Educação promovem a escola e ao educador autonomia para a quebra de paradigmas, instigam mudanças de sua realidade educacional.

Diante disso, como a educação vem sofrendo alterações, as concepções sobre o ensino da Matemática tem sofrido alterações consistentes. Portanto, torna-se imprescindível compreender as mudanças ocorridas na história da Matemática a fim de compreender a escola atual e suas finalidades.

2.1 Um breve olhar histórico sobre o desenvolvimento dos conhecimentos Matemáticos

Alguns estudiosos defendem que a matemática apareceu de necessidades práticas urgentes da humanidade, como levantamento de plantas, materiais diversos, rebanho, demarcação de áreas, acredita-se que a ideia principal foi a valoração de objetos. Outros já definiam que a matemática teria surgido do lazer de uma classe de sacerdotes ou de rituais religiosos. O fato é que a matemática é presente em nosso dia a dia de tal forma que, certamente, não podemos nos distanciar dela. (PACIEVITCH, 2009).

Ao se analisar a história evolutiva da Matemática, parece-nos improvável que tal noção tenha sido uma descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo, pois é mais provável que a percepção tenha sido gradual, surgida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos. (PACIEVITCH, 2009).

A matemática sempre será uma necessidade imediata do homem, afinal, necessitamos de conhecimentos com os quais podemos comercializar, trocar etc. Desde então, os princípios básicos foram se aperfeiçoando até chegar aos conhecimentos sistematizados.

> A origem do pensamento matemático jaz nos conceitos de número, magnitude e forma. Estudos modernos da cognição animal mostraram que tais conceitos não são unicamente humanos. Eles teriam sido parte da vida cotidiana de sociedades de "indivíduos caçadores-coletores". Além disso, que o conceito de número tenha se desenvolvido paulatinamente ao longo do tempo, isto fica evidente com o fato de que algumas línguas atuais preservam a distinção entre "um", "dois" e "muitos", mas não em relação a números maiores do que dois. (BOYER, 2010, p. 12).

Ao se analisar a história evolutiva da Matemática, parece-nos improvável que tal noção tenha sido uma descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo, pois é mais provável que a percepção tenha sido gradual, surgida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos. (PACIEVITCH, 2009).

Usando os dedos das mãos, pode-se contar grupos de até cinco elementos. Quando os dedos foram insuficientes, pedras eram usadas para representar essa correspondência. Então, o homem se valia desse procedimento como um método de correspondência, reunindo as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação da natureza (mãos e pés). Assim, a base cinco foi uma das que deixaram a mais antiga evidência escrita palpável, ainda que as línguas modernas sejam construídas, quase sem exceção, em torno da base dez. (PACIEVITCH, 2009).

> Se a história do surgimento dos números nos parece imprecisa, a aplicação deles na geometria também o é: Heródoto dizia que geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo. Já Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. (BOYER, 2010, p. 2).

De acordo com Boyer (2010, p. 3), não se pode negar as afirmações nem Heródoto, nem Aristóteles quanto ao surgimento da geometria. "O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria". Seus utensílios simétricos, potes variados, tecidos com entrançados firmes e lineares e cestas trançadas mostram exemplos de congruência e simetria e congruência, essência são partes da geometria elementar.

Boyer (2010), no entanto, indica alguns períodos e povos que foram imprescindíveis para o desenvolvimento da Matemática. Conforme suas pesquisas, a Idade da Pedra, um longo período que precede o uso de metais, foi a transição que antecede o surgimento das civilizações que fizeram o uso de metais. Povos que se situaram primeiro em vales de rios, como os do Egito, Mesopotâmia, Índia e China.

De acordo com o autor, a notação hieroglífica, escrita egípcia, foi decifrada pela descoberta de uma expedição de Napoleão, por volta de 1799. A partir de uma grande peça achada em Rosetta, antigo porto de Alexandrina, descobriu-se uma mensagem que continha três escritas: grega, demótica e hieroglífica. (BOYER, 2010).

Os egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que as inundações do Nilo eram separadas por 365 dias. Desta observação, surge, pois, o calendário solar. Nele, são estabelecidos 12 meses de 30 dias e mais cinco dias de festas. (BOYER, 2010).

No que diz respeito às operações matemáticas, pode-se afirmar que a operação aritmética fundamental no Egito era a adição. Já, nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes (Papiro de Ahmes) por duplações sucessivas. A solução de problemas algébricos de Ahmes não é a de livros modernos. (BOYER, 2010).

Há uma abundância de material relativo à matemática na Mesopotâmia. Esses registros "viabilizaram que a eficácia da computação tenha sido resultado não somente de seu sistema de numeração, mas que os matemáticos mesopotâmios também tenham sido hábeis no desenvolver processos algoritmos". (BOYER, 2010)

A atividade intelectual das civilizações no Egito e Mesopotâmia tinha perdido suas raízes bem antes da era cristã. Contudo, quando a cultura nos vales dos rios estava declinando e o bronze cedendo lugar ao ferro na fabricação de armas, vigorosas culturas novas estavam surgindo ao longo de todo o litoral do Mediterrâneo. Os estudiosos egípcios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos.

Os primeiros Jogos Olímpicos se realizaram em 776 a.C., período de mudanças, em que houve a presença de uma maravilhosa literatura grega, evidenciada pelas obras de "Homero e Hesíodo". Porém, a matemática grega da época é uma incógnita. Também Tales e Pitágoras são figuras imprecisas historicamente. Mas o que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos. (BOYER, 2010).

> Certas frases-chave lhes são atribuídas, tais como "Conhece a ti mesmo" no caso de Tales e "Tudo é número", de Pitágoras, mas nada mais específico. O que se sabe de Tales de Mileto é muito pouco. Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 a.C. provavelmente ocorreu quando estava em plena maturidade (40 anos), mas sérias dúvidas sobre a autenticidade da história do eclipse abalam nossa confiança, quanto às descobertas atribuídas a Tales. Tales era considerado um homem de rara inteligência, um "discípulo dos egípcios e caldeus", visto como o primeiro matemático verdadeiro, originador da organização dedutiva da geometria. Pitágoras de Gamos é uma figura pouco menos discutida que Tales. Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em Gamos, não longe de Mileto. Durante suas peregrinações ele evidentemente absorveu não só informação matemática e astronômica como também muitas ideias religiosas. Pitágoras, aliás, praticamente foi contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao Tse. (BOYER, 2010, p. 4).

Ao retornar ao mundo grego, Pitágoras fundou uma sociedade secreta, com bases matemáticas e filosóficas, o símbolo dessa sociedade era o pentagrama e seu lema era "Tudo é número". (BOYER, 2010).

Durante a segunda metade do quinto século antes de Cristo, circularam relatos vários matemáticos que estavam intensamente preocupados com problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores. Esse período foi denominado de "Idade Heroica da Matemática". O principal legado matemático da Idade Heroica foi ter condensado em seis problemas: quadradura do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxos do movimento e validade dos métodos infinitesimais. (BOYER, 2010)

Segundo Boyer (2010, p. 6), Platão também foi importante na História da matemática principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros. Provavelmente, foi quem realizou a distinção, na Grécia antiga, entre aritmética (no sentido de teoria dos números) e logística (a técnica de computação). Platão considerava a logística adequada para negociantes e guerreiros, "que precisam aprender as artes dos números, ou não saberão dispor suas tropas". Para ele, o filósofo, por outro lado, deve conhecer a aritmética "porque deve subir acima do mar das mudanças e captar seu verdadeiro ser".

Platão elaborou um pensamento complexo sobre o número, conforme Boyer (2010), eram muito elevados, "muitas vezes parecem se aproximar do misticismo e a evidente fantasia". Platão via na aritmética uma clara separação entre os aspectos teóricos e computacionais, na geometria "ele defendia a causa da matemática pura contra a visão materialista do artesão ou técnico".

A História das Ciências, em especial, a História da Matemática, constitui um dos capítulos muito interessantes do conhecimento. O que nos permitem conhecer além de aspectos culturais do desenvolvimento humano. Tornando-se assim um ótimo instrumento para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Permitindo inclusive estabelecer conexões com a História, a Geografia, a Filosofia e outras formas culturais. (PACIEVITCH, 2009).

Ao se conhecer a História da matemática percebe-se que as teorias que hoje aparecem acabadas e bem estruturadas foram resultados de inúmeros desafios que os matemáticos enfrentaram até se vislumbrar todo o processo de descoberta. Todo o desenvolvimento do raciocínio matemático foi criado com uma funcionalidade que de uma forma ou de outra contribuiu para o desenvolvimento humano até as épocas atuais. O desafio do ensino atual é mostrar a funcionalidade real da Matemática para os alunos de modo geral, que muitas vezes a enxerga como algo inútil, perdendo o interesse em aprendê-la e a desvalorizando no cotidiano escolar.

2. 2 Ensino da Matemática hoje

Atualmente, é notório em vários exames de larga escala, inclui-se aí o ENEM, um alto índice de notas baixas em Matemática, não se pode negar, portanto, que essa problemática têm sua origem dentro e fora do ambiente escolar. Contamos a formação deficiente dos educadores em nossas universidades ao preparar o educador para ser um construtor de saberes e não mero transmissor de conteúdos, a baixa remuneração que faz com que não tenhamos professores de Matemática suficientes para assumirem essa disciplina são exemplos disso, dentro do ambiente escolar há outros obstáculos que também ultrapassam o espaço educacional, como questões sociais etc. Daí, notamos que os obstáculos são vários e presentes em diferentes instâncias sociais. Logo, faz-se necessário que se iniciem as mudanças no âmbito da formação e do compromisso dos alunos, pais e escola, o sucesso escolar dos alunos, vislumbrando saídas para a efetiva aprendizagem de nossos alunos. (FIORENTINI, 2013).

Nem todos os professores atuantes em salas de aula tiverem uma formação universitária sólida que os preparasse para uma nova forma de conceber a construção do conhecimento, o que configura-se como um entrave para a ampliação do conhecimento de muitos.

> O professor que acredita que aluno aprende matemática através da memorização de fatos, regras e princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição exaustiva dos de exercícios, também terá uma prática diferenciada daquele que entende que o aluno aprende construindo conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e exercícios ou a partir de situações-problema e problematizações e saber matemático. (FIORENTINI, 2013, p. 34).

A observação de Fiorentini (2013) nos faz relembrar os pilares educacionais preconizados pela UNESCO, um dos principais “aprender a aprender e o aprender a conhecer”. Dentro desse contexto, percebe-se, portanto, a importância da formação continuada do professor para instigar-lhe a consciência crítica de que concepções teóricas devem estar respaldadas na prática escolar, a busca de um ensino que ultrapasse a teoria dos livros com a interdisciplinaridade, aplicabilidade prática e funcionalidade da matemática em nossas vidas tornam-se o norte inicial que levaria a mudar esse quadro atual.

> As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo ensino-aprendizagem da matemática são muitas e conhecidas. Por um lado, o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, muitas vezes é reprovado nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovado, sente dificuldades em utilizar o conhecimento "adquirido", em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância. (FIORENTINI, 2013, p.45).

É comum a redução da contextualização ao cotidiano e, embora haja uma relação entre ambos, aquela não deveria se resumir a este. Ao associar a aprendizagem com a vida cotidiana do aluno corre-se o risco de cair em generalidades e simplificações exageradas desse processo. A realidade social concreta deve ser nosso ponto de partida no ensino, porém deve ser feita a elaboração do pensamento e da abstração.

Para Fiorentini (2013, p. 34), os avanços da Educação Matemática no cenário brasileiro e internacional têm recomendado, através de congressos e revistas especializadas, transformações metodológicas e curriculares. Entre as principais propostas, em debate ou implantação nos atuais programas curriculares, merecem destaque aquelas que podem ser aprofundadas, principalmente quando se visa um ensino centrado na resolução de problemas significativos; atenção às aplicações realistas; abordagem histórica da Matemática; utilização de Jogos e Materiais concretos; uso e disseminação do Laboratório de Matemática;

exploração de atividades lúdicas e recreativas no ensino; uso do texto literário no ensino de Matemática.

Para Fiorentini (2013), o ponto de partida da atividade matemática não é o mero exercício de definição de fórmulas, mas deve ficar me torno de situações em que o aluno precise desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-lo. O aluno deve ser levado a interpretar enunciados, estruturando situações, devem ser postas para que desafiem seu raciocínio.

"A proposta atual, defendida por alguns autores, é a de que o conceito matemático se constrói, por meio de retificações e generalizações e assim utilizar-se o que aprendeu em outras situações." (FIORENTINI, 2013, p. 46).

O professor moderna precisa está aberto ao novo, ter curiosidade de aprender e inserir no seu fazer pedagógico, novos metodologias e formas de informação lançar mão de recursos da tecnologia. E assim desenvolver o raciocínio lógico que além de possibilitar ao educando uma conquista além de cognitiva, uma conquista emocional e social.

O uso da interdisciplinaridade e suas implicações é um fator primordial para que se alcance o êxito esperado no processo ensino-aprendizagem da matemática. Até por que nas Diretrizes Curriculares a interdisciplinaridade é vista principalmente como prática didático-pedagógica, ao se partir desse pressuposto, tem-se os professores podem e devem criar alternativas metodológicas para melhor desenvolver sua aprendizagem.

2.3 Breve história sobre o contexto inicial das Desigualdades Isoperimétricas

Como o fio condutor dessa pesquisa, acreditamos ser pertinente, realizar uma breve explanação sobre a primeira referência ao problema da desigualdade isoperimétrica. O Teorema da desigualdade isoperimétrica afirma que qualquer curva fechada de comprimento l cerca uma área menor ou igual a e $\frac{l^2}{4\pi}$ que este valor só é atingido se a curva for um círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$. Esta teoria é o cálculo das variações, e o problema isoperimétrico é um exemplo típico dos problemas que por ela são tratados. (SOUSA, 2006, p. 1).

Toda essa história foi marcada por grandes guerras, tempo em que para se construir cidades haviam eventos de muito custo (mão de obra, material ou, até mesmo, o tempo escasso) e para sempre diminuir essas variáveis os grandes construtores precisavam, com sabedoria, pensar em como iniciar as construções de suas fortificações. Construir cidades diminuindo os custos dos muros que os cercam e aumentando sua área era algo que todos almejavam mas nem todos tinham a "intuição" de como fazer. Esse pensamento já se estabelecia em muitas mentes com raciocínio lógico-matemático da antiguidade. Alguns conseguiram se superar, afinal muitas das principais cidades antigas ainda existentes até hoje. (ROLDÃO, 2010).

Este fato primeiro apreciado pelos antigos, dizem as lendas, foi primeiro observado pela princesa Elissa (Dido ou Elisa), princesa Fenícia que quando fugiu da cidade de Tiro e tentou comprar uma porção de terra em uma região desconhecida, este fato é considerado o motivador da ideia de "Desigualdade isoperimétrica". (ROLDÃO, 2010).

A princesa possuía traços, finos e aristocráticos, os olhos escuros, porte altivo revelavam uma mulher orgulhosa a quem a infelicidade e o exílio voluntário pareciam ter tornado ainda mais determinada. Tudo em seu semblante denotava coragem, nobreza e a certeza de quem tem um dever a cumprir. O mar estava calmo, os ventos, favoráveis, e todos viam nisso auspiciosos presságios para esquecer o drama que se havia desenrolado no Palácio de Tiro. (ROLDÃO, 2010).

Alguns meses antes, depois da morte do rei Belo, a cidade fenícia estava enlutada. Segundo as leis tradicionais, o filho do soberano, o jovem Pigmalião, irmão da princesa subira ao trono. Mas para horror e surpresa geral, tinha assassinado quase imediatamente o seu cunhado, Siqueu. Só a cobiça podia explicar o seu gesto. Nessa mesma noite, no maior segredo, rodeada de algumas companheiras, da sua irmã Ana e vários soldados e de homens que se tinham mantido fiéis ao seu defunto marido, Elissa foge da Fenícia. (ROLDÃO, 2010).

Após muitos dias no mar, a embarcação chegou às costas de África. Por fim, África. Como a expedição não tinha qualquer objetivo belicoso foi enviada uma delegação à procura de eventuais habitantes da zona. Habituados aos palácios e aos templos de pedra e de mármore, os emissários ficaram admirados, porque, ao fim de muitas horas de marcha, apenas haviam encontrado alguns homens reunidos debaixo de amplas tendas erguidas à sombra de grandes palmeiras. (ROLDÃO, 2010).

Esses homens disseram-lhes que se encontravam no Reino de Syfax, chefe de uma das tribos berberes. Hábeis negociadores, os Berberes não tardaram a aperceber-se das vantagens que poderiam obter daquele encontro. É certo que eles eram navegadores do deserto que trilhavam sem descanso as rotas terrestres, enquanto os Fenícios desbravavam os oceanos. Contudo, todos tinham veia comercial. Os recém-chegados queriam fundar ali uma colônia, algo que não aconteceu rapidamente, houve árduas e prolongadas discussões. (ROLDÃO, 2010).

> […] um velho berbere, cuja idade deixava adivinhar a sua sabedoria, aproximou-se de Syfax e murmurou-lhe umas palavras ao ouvido. Era um velho método berbere: deixar pairar a dúvida e amadurecer as coisas [...] Só no dia seguinte fez uma nova proposta: Já vos dissemos que sois bem-vindos à nossa terra de África, vós que vindes da nobre cidade de Tiro, construída sob o céu do Oriente […]. Uma vez mais, estes longos preliminares punham à prova a paciência dos Fenícios. "Aceitamos que se instalem no litoral, mas os nossos sábios decidiram o seguinte: o vosso território será aquele que a pele de um boi oferecido em sacrifício conseguir cobrir no chão." Ao ouvirem estas palavras os Fenícios deixaram escapar uma exclamação de fúria: apenas Elissa parecia calma, até com um ligeiro sorriso iluminando seu rosto. O sacrifício deveria realizar-se no dia seguinte de madrugada. Para os Berberes, pastores nômades, sacrificar um boi era um ato grave que exigia uma invulgar solenidade. (ROLDÃO, 2010, *online*).

Depois de morto, o animal foi eviscerado e começaram a cozinhá-lo. Alguns escravos desmembravam o animal, tendo o cuidado de não estragar a pele, que, naturalmente, devia ficar intata. Intrigados, os Fenícios interrogavam-se sobre a justeza deste ritual: para quê entrar no jogo dos Berberes, que, manifestamente, troçavam deles com esta história da pele de boi! Como imaginar que seria possível instalar uma colônia, uma cidade e o seu porto num espaço tão exíguo? Não, decididamente não compreendia a paciência nem a submissão da princesa. Para eles não havia dúvida: era preciso continuar a viagem e demandar outras paragens. (ROLDÃO, 2010, *online*).

Terminado o repasto, a pele foi limpa, esticada ao máximo, apesar de tudo, fazia prever algum truque, os Berberes deixaram a princesa escolher o local onde a pele iria ser estendida. Uns passos mais adiante, foi escolhido um vasto espaço arenoso. A pele foi colocada no chão; no centro daquele pequeno perímetro, cabiam no máximo cinco ou seis homens em pé e enrolados com a pele como estava. (ROLDÃO, 2010).

Conforme Moraes (2013, p. 8), "Dido mandou cortar o couro de um boi em tiras muito finas que depois de unidas formaram um longo fio com que delimitou um território bastante vasto". Os nativos, obrigados a respeitar a promessa feita, concederam-lhe a terra assim delimitada, onde Dido ergueu a cidade de Cartago.

Nesse momento, Elissa dirigiu-se a um escravo que estava perto e disse: Homem me dá tua faca! Depois de se certificar que a lâmina estava bem afiada, aproximou-se da pele, ajoelhou-se e começou a cortá-la em tiras longas e muito finas. Entre os presentes, havia muito quem se mostrasse perplexo com o meticuloso cuidado, Elissa não parava de dividir e cortar o couro e o silêncio era total, o tempo parecia suspenso, e ouvia-se apenas o som da lâmina que deslizava sobre a pele coberta de pelo. (MORAES, 2013).

Ela chamou então os escravos e ordenou-lhes que colocassem as tiras umas a seguir às outras, com a extremidade de uma a tocar a de outra. Imediatamente, todos compreenderam: os Berberes, que se tinham deixado enganar; os Fenícios, que tinham ganhado um grande território para se instalar. Foi assim, graças ao estratagema e à inteligência da bela Elissa, que foi possível edificar Byrsa (o Boi), coração da futura Cartago. Séculos mais tarde, os Romanos deram à princesa o nome pelo qual passou a ser conhecida: Dido, Dido de Tiro, fundadora da cidade que tanto lhes custou subjugar [...]". (ROLDÃO, 2010, *online*).

Apesar do sofrimento envolvidos nesse evento, é importante enfatizar a perspicácia da princesa em cortar o couro e escolher a melhor maneira de envolver a área do terreno, isso foi muito além de apenas ajudar seu Reino, muitas cidades futuras e ideias nasceram a partir desse evento. (ROLDÃO, 2010).

Uma dessas ideias foi a da Desigualdade Isoperimétrica, essa desigualdade nos fala que $L^2 \geq 4\pi A$, onde L é o perímetro do polígono e A é o valor de sua área, o que nos remete a um polígono, regular ou não, respeita uma relação muito interessante onde seu perímetro ao quadrado é menor ou igual ao produto de quatro vezes sua área multiplicado pelo irracional π, essa relação pouco usada, é extremamente útil quando precisamos relacionar o perímetro e a área de polígonos, principalmente os regulares que são os objetos desse estudo. No capítulo 4, veremos alguns desses exemplos com três polígonos regulares. (MADEIRA, 2005).

3 OS PCN E AS DIRETRIZES CURRICULARES NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Conforme os PCN sobre o ensino da Matemática é de fundamental importância ao professor:

> Identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações; conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções. (BRASIL/MEC, PCN, 1998, p. 29).

Ainda de acordo com os PCN (1998, p. 32), a educação deve priorizar a contextualização dos conteúdos, dar significado aos planos de estudo e incentivar "às discussões em torno de temas de relevância social, utilizando, para alcançar esses objetivos, as diferentes linguagens – verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias", ampliando seu leque de conhecimento.

O desafio que se lança para todo educador, é o de descobrir caminhos que permitam encontrar as formas de fazer uma educação que promova o que há de melhor em cada um dos educandos, atendendo aos anseios de cada um. A Pedagogia de Projetos atrelada à Educação Matemática é um dos caminhos que podem permitir essa e mais inovações, principalmente em nível de ampliação de conhecimentos dos educandos da educação básica.

3.1 Os PCN e a aprendizagem da Matemática

Os PCNEM sugerem alternativas que possibilitam relacionar a teoria à prática através de temas transversais, trazendo assim novos significados a abordagem de velhos assuntos. Mas, tratar de questões relacionadas às diferentes áreas e relacioná-las à realidade de cada escola e para o nível de comprometimento tanto do corpo docente, quanto do corpo discente da escola que reunidos em grupos de interesse, escolhem um tema para desenvolver uma pesquisa, devendo no decorrer da pesquisa incluir e mostrar a Matemática como necessária para a plena compreensão do assunto escolhido. (BRITO, 2010).

Conforme afirmam Fiorentini; Lorenzato (2006), a Educação Matemática não é apenas um campo profissional, mas também uma área de conhecimento relacionada ao domínio do conteúdo matemático e das ideias e processos envolvidos em sua "transmissão/assimilação", bem como à apropriação/construção do saber matemático escolar. Enquanto área de conhecimento, "a Educação Matemática apresenta natureza interdisciplinar, uma vez que emprega contribuições de outras diversas áreas, tais como a Filosofia, a Educação, a Psicologia, a Sociologia e a História". (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, *apud* BRITO, 2010, p. 24).

Com relação à viabilidade da concretização do projeto da Educação Matemática, Garnica (2008) reflete sobre a necessidade e a capacidade "da massa de composição relativamente disforme", a cujos componentes tem-se chamado "educadores matemáticos" para defender um projeto político-epistemológico com que possa intervir diretamente e de forma organizada junto aos mecanismos de poder ligados ao ensino e à aprendizagem de matemática. (GARNICA, 2008, p.173 *apud* BRITO, 2010, p. 25).

Um projeto interdisciplinar de educação matemática tenta mostrar que essa ciência é construída pela humanidade para buscar a resolução de problemas, estando profundamente relacionada com o estudo de outras temáticas. Dessa forma, busca-se vincular a Matemática às demais áreas de conhecimento, criar um ambiente favorável para reflexão sobre diferentes temas transversais, elaborar um projeto interdisciplinar que aborde assuntos do interesse dos educandos, que mude a rotina da sala de aula, trazendo motivação e contextualização para a abordagem de diferentes conteúdos matemáticos.

Também, os projetos de trabalho, permitem modificar a rotina da sala de aula, abrindo espaço para a pesquisa e para a expressão de diferentes opiniões, incentivando o diálogo, a troca de ideias e a socialização. A sala de aula passa a ser um local de crescimento pessoal, de incentivo à descoberta, de desenvolvimento da habilidade de pensar por si mesmo, da busca da autonomia, do desenvolvimento da ética, tendo o professor como modelo de integridade. (FAZENDA, 2001).

Dessa forma é possível estabelecer relações entre o estudo da Matemática e diferentes temas, permitindo com que se compreendam melhor os elos existentes entre as diferentes áreas de conhecimento.

Para Hernandéz; Ventura (1998) os projetos possibilitam uma profunda mudança na organização dos conhecimentos escolares, pois possibilitam trabalhar em sala de aula qualquer tema que se estabelece como problema.

Nos projetos a ênfase na relação entre ensino e aprendizagem é, sobretudo, de caráter procedimental e gira em torno do tratamento da informação. Os alunos passam a compartilhar com o professor a responsabilidade da organização das atividades.

O papel do educador é daquele que guia, que media, que está ao lado do educando, que é capaz de buscar permanentemente a solução de novos problemas, aquele que crê em mudanças e não teme expor o seu conhecimento.

Segundo Fazenda (2001), o professor precisa ser o condutor do processo, saber esperar, saber ver no aluno aquilo que nem o próprio aluno havia lido nele mesmo.

O trabalho com projetos cria uma rica oportunidade de gerar um debate em sala de aula sobre alguns temas de enfoque social, chamados de temas transversais, possibilitando assim com O trabalho com projetos cria uma rica oportunidade de gerar um debate em sala de aula sobre alguns temas de enfoque social, chamados de temas transversais, possibilitando assim com que a escola cumpra seu papel social, preparando o aluno para atuar na sociedade.

3.2 As Diretrizes Curriculares, a Pedagogia de Projetos e o ensino da Matemática

De acordo com Brasil (1998), as Diretrizes Curriculares pressupõe em seus incisos V, VI e VII que para o desenvolvimento da educação é necessário que:

> V - As escolas deverão explicitar em suas propostas curriculares processos de ensino voltados para as relações com sua comunidade local, regional e planetária, visando à interação entre a educação fundamental e a vida cidadã; os alunos, ao aprenderem os conhecimentos e valores da base nacional comum e da parte diversificada, estarão também constituindo sua identidade como cidadãos, capazes de serem protagonistas de ações responsáveis, solidárias e autônomas em relação a si próprios, às suas famílias e às comunidades.
>
> VI - As escolas utilizarão a parte diversificada de suas propostas curriculares para enriquecer e complementar a base nacional comum, propiciando, de maneira específica, a introdução de projetos e atividades do interesse de suas comunidades.

> VII - As escolas devem trabalhar em clima de cooperação entre a direção e as equipes docentes, para que haja condições favoráveis à adoção, execução, avaliação e aperfeiçoamento das estratégias educacionais [...]. [*online*]

Conforme as PCNEM as escolas deverão utiliza-se de uma Parte Diversificada de suas propostas curriculares, para enriquecer e complementar a Base Nacional Comum, propiciando a implementação de projetos e de atividades do interesse de suas comunidades. Propostas que integram as áreas de conhecimento, principalmente a Matemática, como o objetivo de maior de mostrar a aplicabilidade prática dos conhecimentos produzidos pela humanidade que constituem e estão hoje no cotidiano, mostrando aos educandos que as áreas de conhecimento têm sua aplicabilidade prática e sua funcionalidade. (BRASIL, 1998).

A relação dos conhecimentos matemáticos com a realidade é ressaltada como uma dos mais graves problemas da educação em no país, aparentemente há uma distância entre teoria e prática, culpa-se os processos sociais transformadores e até mesmo o excessivo academicismo em relação às transformações existentes no Brasil e no resto do mundo. Assim, para Brasil (1998, p. 34):

> [...] condenaram a Educação Fundamental, nestas últimas décadas, a um arcaísmo que deprecia a inteligência e a capacidade de alunos e professores e as características específicas de suas comunidades. Esta diretriz prevê a responsabilidade dos sistemas educacionais e das unidades escolares em relação a uma necessária atualização de conhecimentos e valores, dentro de uma perspectiva crítica, responsável e contextualizada.

Diante do exposto, observa-se que é através de possíveis projetos educacionais regionais dos sistemas de ensino, da implementação de ações inovadoras em cada unidade escolar, é que se pode conseguir a transformação que as Diretrizes expressam, ocasionando modificações em currículos específicos e fazendo surgir propostas pedagógicas engajadas com uma educação de fato modificadora da realidade educacional vigente. Principalmente, na área da Matemática, disciplina que historicamente, possui baixos índices de aprendizagens no âmbito escolar e nas provas de larga escala.

4 O ENSINO DA DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA O ENSINO MÉDIO

Um ponto muito válido dessa pesquisa é que esta temática de desigualdade isoperimétrica é muito fácil de se abordar no ensino médio, afinal tem aplicação intuitiva. A geometria envolvida é pertencente ao currículo do ensino fundamental, mas são conhecimentos que se aprimoram no ensino médio, logo, para turmas que vão prestar os vestibulares, o ENEM e outros tipos de concursos, sempre passarão por esse conteúdo, ficando o mesmo.

Em particular, em uma turma que se prepara para algum concurso de ensino médio mais elaborados em que se tem introdução ao cálculo no edital, tivemos experiências enriquecedoras de poder inclusive provar utilizando cálculo e fazer demonstração, afinal, trata-se de apenas utilizar os limites fundamentais, pode ser demonstrado de maneira muito simples, já que eles tem-se uma fusão de vários conteúdos no mesmo momento: a geometria do teorema, a trigonometria e o cálculo.

Assim, acreditamos pertinente aprofundar esses conhecimentos para o ensino médio, devido à necessidade desse conteúdo para quem deseja prosseguir nos estudos tanto prestando vestibular, Enem ou um concurso público, afinal, estatisticamente as desigualdades isoperimétricas é um dos conteúdos mais cobrados em diversas provas.

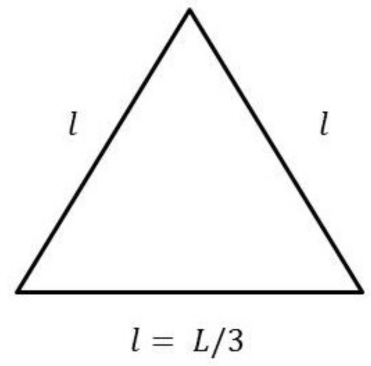
4.1 Polígonos regulares

Todos os polígonos regulares concentram a maior área em cada um de seus números de lados. Um polígono diz-se regular se tiver todos os seus lados e ângulos iguais, sejam eles internos ou externos. Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. Então vamos verificar os casos e expandir para um caso geral, mostrando sua validade para qualquer polígono regular e também para um polígono regular com um número de lados indo para o infinito. (BOYCE; DIPRIMA, 2013).

Tomaremos como primeiro caso o triângulo equilátero. Em geometria, um triângulo equilátero é todo triângulo em que os três lados são iguais. Os triângulos equiláteros também são equiangulares, isto é, todos os três ângulos internos são congruentes um com o outro e medem 60º. Em seguida o quadrado e terceiro e último caso a ser estudado é o hexágono.

• Triângulo Equilátero

o



$$L = 3 \Rightarrow L^2 = 9l^2 \qquad (2.1)$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l^2 = \frac{4A}{\sqrt{3}} \qquad (2.2)$$

Substituindo (2.1) em (2.2) temos:

$$L^2 = 9 \cdot \frac{4A}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$L^2 = \frac{36A}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

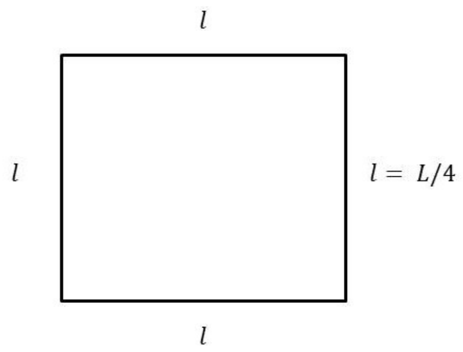
$$L^2 = 12.\ \sqrt{3}A \Rightarrow L^2 \cong 20,7846A.$$

Se observarmos $4\pi \cong 12,5663$

Assim $L^2 = 20,7846 \geq$

$L^2 \geq 4\pi A \rightarrow 20,7846A \geq 12,5663A$. (FIGUEIREDO, 2014).

• O quadrado



$$L = 4l \Rightarrow L^2 = 16l^2 \qquad (2.3)$$

$$A = l^2 \qquad (2.4)$$

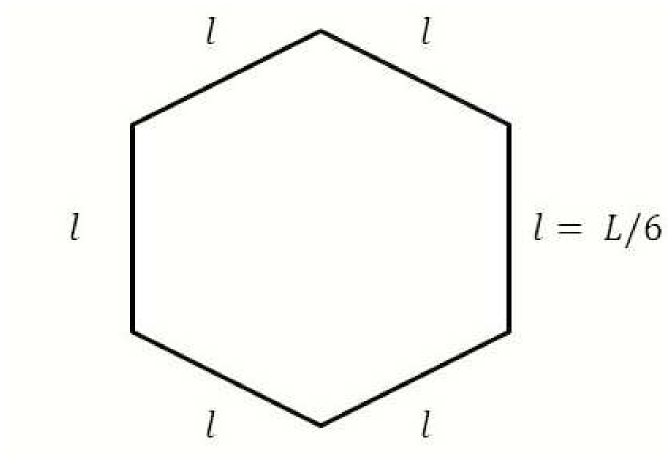
Substituindo (2.4) em (2.3), temos:

$$L^2 = 16l^2 \Rightarrow L^2 = 16A \quad (2.5)$$

Fato, pois pela desigualdade, temos:

$$L^2 \geq 4\pi A \Rightarrow 16A \geq 12,5663A$$

• O hexágono regular



$$L=6l \Rightarrow L^2=36l^2 \qquad (2.6)$$

$$A=6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l^2 = \frac{4A}{6\sqrt{3}} \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6) temos:

$$L^2 = 36l^2 \Rightarrow L^2 = 36 \cdot \frac{4A}{6\sqrt{3}} \Rightarrow L^2 = 144\text{A} \cdot \frac{4A}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 = \frac{144\sqrt{3}.A}{18} \Rightarrow L2 = 8\sqrt{3}A \Rightarrow L2 \cong 13,8564\text{A}.$$

Pela desigualdade temos:

$$\text{L}^2 \geq 4\pi \cdot \text{A} \Rightarrow 13,8564\text{A} \geq 12,5663\text{A} \qquad (2.8)$$

Um fato que podemos observar é que a medida que o polígono cresce com o número de lados a diferença diminui.

Para o triângulo:

$$L^2 - 4\pi\text{A} \cong 20,7846\text{A} - 12,5663\text{A} \cong 8,2183\text{A}.$$

Para o quadrado:

$$L^2 - 4\pi\text{A} = 16\text{A} - 12,5663\text{A} = 3,4337\text{A}.$$

Para o hexágono:

$$L^2 - 4\pi\text{A} = 13,8564\text{A} - 12,5663\text{A} = 1{,}2901\text{A}.$$

É razoável pensar que quanto maior o número de lados menor seria essa diferença. Até o momento onde a mesma seria zero e ocorreria a igualdade. (FIGUEIREDO, 2014).

Vejamos então um polígono regular com n lados, podemos separá-lo em n triângulos isósceles. Fato que para um polígono de n lados temos que sua área total seria. (FIGUEIREDO, 2014). Acontece que $\alpha = \frac{\pi}{n}$

$$\text{A}_\text{T} = \text{n} \cdot \text{A} = \text{n} \cdot \frac{l^2}{4} \text{cotg}\alpha \Rightarrow \text{A}_\text{T} = \text{n}. \frac{l^2}{4} \cdot \text{cotg}\alpha.$$

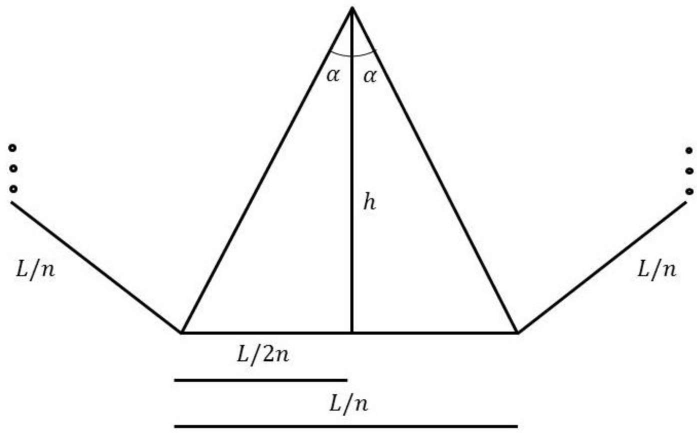
$$\text{A}_\text{T} = \frac{l^2}{4n}.\text{cotg}\alpha \Rightarrow \text{A}_\text{T} = \frac{l^2}{4n} . \frac{\pi}{\pi} \text{cotg}\alpha \Rightarrow$$

$$\text{A}_\text{T} = \frac{l^2}{4n} . \alpha. \text{Cotg}\alpha \Rightarrow 4\pi\text{A}_\text{T} = L^2. \alpha. \text{Cotg}\alpha.$$

O ângulo central seria:

$$2\alpha = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{n} \Rightarrow A = \frac{lh}{2}.$$

Podemos observar que: $\text{cotg}\alpha = \frac{h}{1/2} \Rightarrow h = \frac{1}{2}\ \text{cotg}\alpha$.



Assim, podemos observar que $A = \frac{l}{2} \cdot h = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}\ \text{cotg}\alpha \Rightarrow A = \frac{n.l^2}{4}\ \text{cotg}\alpha$.

Temos um fato importante quando ocorre a igualdade. (FIGUEIREDO, 2014).

Observação 2.3 - Vejamos $g(n) = \frac{\pi}{n}\ \textit{cotg}\ \frac{\pi}{n}$.

Quando temos o limite e n tendendo ao infinito:

$$\lim_{n\to\infty} g(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right) \text{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty} \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Logo quando o polígono regular tem um de seus lados crescendo a função g(n) vai chegando mais próximo de 1. A relação fica igual quando temos um polígono com um número de lados tendendo ao infinito que de fato é uma circunferência. (FIGUEIREDO, 2014).

$$A_T = \frac{n \cdot l^2}{4} \text{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow A_T = \frac{L^2}{4n} \text{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Para os três polígonos regulares, com 10 lados; 100 lados; e 1000 lados. Vejamos então:

Se n=10 temos:

$$A_T = \frac{L^2}{4n} \text{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow A_T = \frac{L^2}{40} \text{cotg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = L^2 \cdot 0,076 \Rightarrow$$

$A_T =$

$$0,076L^2 \Rightarrow 4\pi \, . \, A_T = 0,9668L^2 < L^2.$$

Se n = 100 temos:

$$A_T = \frac{L^2}{4 \cdot 100} \cdot \text{cotg}\left(\frac{\pi}{100}\right) \Rightarrow A_T = 0,07955L^2.$$

Tomando então:

$$4\pi \cdot A_T = 0,9996L^2 < L^2.$$

Se tomarmos n = 1000, temos:

$$A_T = \frac{L^2}{4 \cdot 1000} \cdot \text{cotg}\left(\frac{\pi}{1000}\right) \Rightarrow A_T = 0,079577L^2.$$

Assim,

$$4\pi \cdot A_T = 0,9999L^2 < L^2.$$ (FIGUEIREDO, 2014).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar da longa existência do estudo do problema isoperimétrico ao longo dos tempos este ainda é alvo da atenção de muitos matemáticos. Muitas generalizações de desigualdades isoperimétricas nos mais variados contextos matemáticos são muito estudadas em diferentes áreas de investigação matemática. Sendo pertinente observar que as demonstrações podem ser feitas de várias maneiras e a abordagem dessas fórmulas é pouco citada nos livros.

Com as propostas aqui relatadas, deseja-se continuar agregando novos elementos capazes de enriquecer e tornar mais acessível o processo de construção do conhecimento matemático nessa área. Visto que todo conhecimento teórico matemático que existe passou antes pela experiência real, daí nossa preocupação de contextualizar as desigualdades isoperimétricas em seu evento inicial, bem como pontuar algumas questões do desenvolvimento da matemática, provando o quanto seu surgimento foi, é e será relevante para o desenvolvimento do homem.

Diante das particularidades e da funcionalidade prática de muitos conteúdos matemáticos, observamos que as atividades em sala de aula precisam estar sempre sendo reavaliadas, o professor precisa buscar metodologias diferenciadas, precisa dinamizar suas aulas, para promover aos alunos do ensino médio um ensino produtivo e aprendizagens significativas.

Como sugestão para pesquisas posteriores, seria pertinente avaliar a formação matemática dos professores que atuam na Educação Básica; outra proposta pertinente seria um estudo de caso sobre o ensino da matemática fazendo uso de metodologias diferenciadas e outros meios fecundos que facilitem nosso fazer pedagógico.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

ALMEIDA, Laura Brasil de; CARNEIRO, João Flávio. Universidade Fluminense, Niterói, RJ, 2010. **Convergência das Séries de Fourier e Séries Duplas de Fourier.** Monografia de graduação em Engenharia das Telecomunicações. Disponível em: <https://metodosmatematicosuff.files.wordpress.com/2011/03/sc3a9rie-de-fourier.doc>. Acesso em: 20 set. 2015.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno**. 9ª Edição. Rio de Janeiro – RJ, LTC, 2013.

BOYER, Carl. **Conhecimento Específico 1**: A História da Matemática. Resumos Literários, 2010. Disponível em: <http://www.cursoraizes.com.br/resources/a_historia_da_matematica.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2015.

BRASIL/MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF,1997.

__________. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Resolução CNE/CEB nº 2/1998. Brasília, 1998. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/1998/pceb004_98.pdf>. Acesso: 15 set. 2015.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Coleção Textos Universitários, Editora SBM 2014 6ª edição.

CAVALCANTI, G.R. **Problemas Variacionais Geométricos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2000).

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Conteúdo nos cursos de formação de professores de matemática**. Estudo online, 2007. Disponível em <http://vello.sites.uol.com.br/conteudo.htm>. Acesso em: 30 set. 2015

______. **Histórico da Educação Brasileira**: princípios da educação no país à contemporaneidade. São Paulo: Ática, 1995. Disponível em: <http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/Clovis/contenido/contenid.htm#contenido>. Acesso em: 15 set. 2015.

______. **Da Realidade à Ação**: Reflexões sobre Educação Matemática. São Paulo: Summus, 1986.

FAZENDA, Ivani (Org.). **Didática e Interdisciplinaridade**. 6. ed. São Paulo: Papirus, 2001.

________; C. Arantes. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 7. ed. São Paulo: 2001.

FIGUEIREDO. Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro, RJ: Editora IMPA , 2014.

______. Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana. **Revista Matemática Universitária**, 9/10, 69–108 (1989).

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, Dário. **A formação de professores de matemática**. São Paulo: Cortez, 2013.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol 1. 5ª edição reimpressão. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2015.

______. **Um curso de cálculo**. Vol 3. 5ª edição. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2013.

HERNANDEZ, Fernando. **Transgressão e mudança na educação**: os projetos de trabalho. Porto Alegre, ArtMed, 1998.

JACOBINI, O. R. **A Modelagem Matemática como Instrumento de Ação Política na Sala de Aula**. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE). Unesp - Rio Claro, 2004.

LIMA, Elon et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LIMBERGER, Roberto. **Abordagens do problema isoperimétrico**. Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção de Título de Mestre em Matemática. Campinas, SP: Unicamp, 2011. Disponível em: <file:///C:/Users/user/Downloads/LimbergerRoberto_M.pdf>. Acesso em: 20 set. 2015.

MACHADO, N. J. **Educação**: Projetos e Valores. São Paulo: escrituras Editora, 2000.

MADEIRA, Telma Morais. **O Problema Isoperimétrico Clássico**. Departamento de matemática Universidade de Coimbra. Dissertação para obtenção do grau de mestre em matemática para o ensino). Coimbra, Portugal, 2005.

MALHEIROS, A. P. S. **A Produção Matemática dos Alunos em Ambiente de Modelagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 2004.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A; SALDANHA, Nicolau Corção. Desiguldades Isoperimétircas. **Revista Matemática Universitária**, Nº 15 , dezembro de 1993. Rio de Janeiro, RJ: Editora IMPA, 1993.

MOTTA, Carlos Eduardo Mathias. **O que é a matemática? O que é o matemático?** Estudos Matemáticos, 2010. [online] Disponível em: <http://www.ufrrj.br/leptrans/arquivos/matematico.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2012.

OLIVEIRA, P. R. **Currículos de Matemática**: do programa ao projeto. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Educação, USP. São Paulo, 2004.

PACIEVITCH, Thaís. **História da matemática**. Histórico, 2009. [*online*] Disponível em: <http://www.infoescola.com/matematica/historia-da-matematica/>. Acesso em: 12 jun. 2012.

PEREIRA, Ariana Patrícia Santos. **A desigualdade isoperimétrica e uma aplicação**. Monografia apresentada ao curso de Ciências Exatas pela Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/site/wp-content/uploads/2013/08/Monografia_Ariana.pdf>. Acesso em: 20 set. 2015.

ROLDÃO, Ana Paula. Histórias efémeras. Artigo [online] 2015. In: **Fabulosos Mitos e Lendas de Todo o Mundo**, Selecções Reader's Digest, 2010. Disponível em: <http://www.historiasefemeras.com/2015/12/a-fundacao-de-cartago.html>. Acesso em: 20 dez. 2015.

SILVEIRA, Jean Carlos; RIBAS, João Luiz Domingues. **Discussões sobre Modelagem Matemática e o ensino-aprendizagem**. 2004. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/> Acesso em 20 set. 2015.

SCHON, Donald. Formar professores como profissionais reflexivos**.** In: NÓVOA, A. (org.) **Os Professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992, p. 77-91.

SOUSA, Carlos Roberto Amâncio. **Duas demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica**. Universidade Federal de Minas Gerais Instituto de Ciências Exatas Departamento de Matemática. Minas Gerais: UFMG, 2006. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_CarlosRoberto.pdf>. Acesso em: 20 out. 2015.

ANEXO A – TEOREMA DE GREEN

Agora chegamos a mais um teorema da família do Teorema Fundamental do Cálculo, mas dessa vez envolvendo integral de linha de campo vetorial e integral dupla de uma certa quantidade que já apareceu em nosso estudo sobre campos conservativos. O Teorema de Green tem uma ideia essencial e alguns detalhes técnicos. (SOUSA, 2006).

Observaremos nesse anexo o teorema de Green de forma sucinta, estudado no curso de Geometria Diferencial em muitos mestrados acadêmicos, ou seja, elemento muito importante pela análise de tal evento.

Utilizaremos a seguinte fórmula para a área A, limitada por uma curva simples fechada com orientação positiva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in [a, b]$ é um parâmetro arbitrário:

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t)) - y(t)x'(t)dt. \quad (1.0)$$

Note que a segunda fórmula é obtida da primeira ao observamos que

$$\int_a^b xy'(t)dt = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \int_a^b (x(t)y'(t)) - y(t)x'(t)dt.$$

A terceira fórmula decorre imediatamente das duas primeiras. (SOUSA, 2006).

Para provar a primeira fórmula em (1.0) consideraremos inicialmente o caso ilustrado na Fig.1, onde a curva é formada de dois segmentos de reta paralelos ao eixo Oy e por dois arcos que podem ser escritos na forma $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, $f_1 > f_2$.

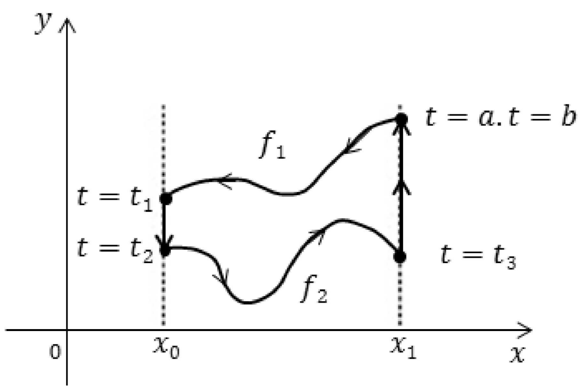


Figura 1

É claro que a área limitada pela curva é A = $\int_x^y f_1(x)dx = \int_x^y f_2(x)\, dx$. Como a curva tem orientação positiva, obtemos, com a notação da Figura 1. (SOUSA, 2006).

$$A = \int_a^b xy'(t)dt = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \int_a^b (x(t)y'(t)) - y(t)x'(t)dt\ ,$$

pois x' (t) = 0 ao longo dos segmentos paralelos ao eixo O_y. Para obtermos uma prova para o caso geral, precisaríamos mostrar que é possível dividir a região limitada pela curva em um número finito de regiões do tipo acima. E isto evidentemente é possível (Fig.2) se existe uma reta E no plano tal que a distância ρ(t) de α(t) a esta reta é uma função com um número finito de pontos críticos (um ponto crítico é um ponto em que ρ' (t) = 0). Esta última afirmação é verdadeira mas não iremos demonstrá-la. Contudo, mencionamos que 2.0 também pode ser obtida utilizando-se o teorema de Stokes (ou de Green) no plano. (PEREIRA, 2012).

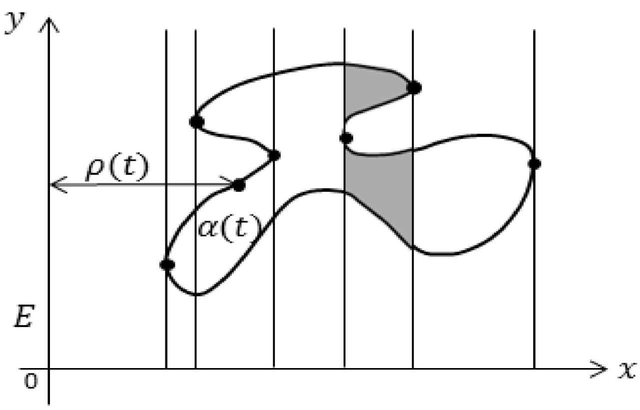


Figura 2

O teorema da Desigualdade Isoperimétrica, seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento l, e seja A a área da região limitada por C. (SOUSA, 2006).

Então $l^2 - 4\pi A \geq 0$, (2.1) e verifica-se a igualdade se e somente se C é um círculo.

Demonstração:

Sejam E e E' duas retas paralelas que não se intersectam a curva fechada C, e considere o movimento destas retas até que elas toquem C pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas, L e L', tangentes à curva C, de forma que C está totalmente contida na faixa limitada por L e L'. (SOUSA, 2006).

Considere agora um círculo S_1 que seja tangente a L e L' e não intersecta C. (PEREIRA, 2012).

Seja O o centro de S_1 e introduza o sistema de coordenadas cartesianas com a origem em O e o eixo O_x perpendicular a L e L'. Vejamos a figura 3 a seguir. (SOUSA, 2006).

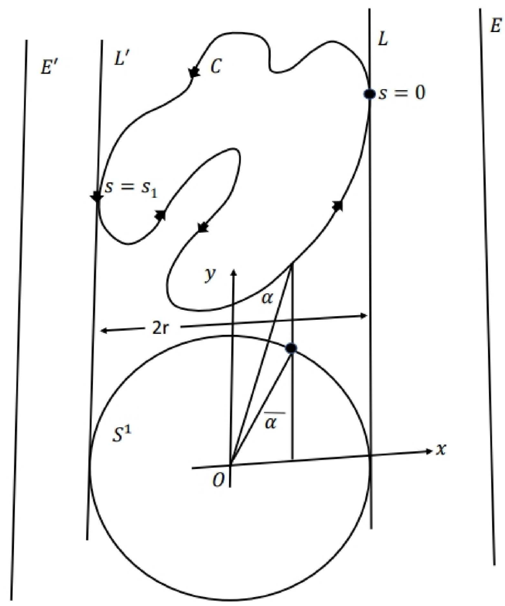


Figura 3

Parametrize C pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de modo que C tenha orientação positiva e os pontos de tangência com *L* e *L'* sejam, respectivamente, s = 0 e s = s_1. (SOUSA, 2006).

Podemos supor que a equação de S_1 é:

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = (x(s), y(s)),\ s \in [0, l].$$

Utilizando Eq.(3.1) e denotando por A a área da região limitada por S_1 , temos:

$$\int_0^l xy'(t)dt = -\int_0^l y(t)x'(t)dt \quad (3.1)$$

$$A = \int_0^l xy'\, ds,\ A = \pi R^2 = -\int_0^l yx'\, ds.$$

Seja 2r a distância entre *L* e *L'*. Assim,

$$A + \pi R^2 = \int_0^l (xy' - yx')\, ds = \int_0^l [(x', y')\cdot(-y, x)]\, ds$$

$$\leq \int_0^l |\alpha\ 0\ |\ |\alpha|\, ds = \int_0^l |\alpha| ds = lr,$$

Em que usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e a igualdade que se verifica se e somente se α 0 é um múltiplo de α, isto é, se e só se, $\alpha' = \frac{1}{r}$ (-y, x), em particular implica que $y' = \frac{1}{r}$ x. (SOUSA, 2006).

Observamos agora o fato de que a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual à média aritmética destes dois números, e vale a igualdade se e somente se os números são iguais. (SOUSA, 2006).

Daí decorre que:

$$\sqrt{A} \quad \sqrt{\pi R 2} \leq \frac{1}{r} \text{ A} + \pi R^2 \leq \frac{1}{2} \text{ lr.}$$

Logo, $4\pi AR^2 \leq \frac{1}{2} R^2$, e isto nos dá a equação (3.2). Suponha agora que vale a igualdade em (3.2).

Temos então igualdades também em (3.2) e (3.3). A partir da igualdade em (3.4) segue-se que $A = \pi R^2$.

Assim, $l = 2\pi r$ e r não depende da escolha da direção de *L*. Além disso, a igualdade em (3.3) implica que $y' = \frac{l}{r}$ x. Como r não depende da direção de *L*, podemos efetuar a mesma construção com retas perpendiculares a L.

É fácil verificar que, neste caso, obteremos que $x' = \frac{l}{r}$ y. Portanto, $l = (x')^2 + (y')^2 = \pi R^2 (x^2 + y^2)$ (3.4), e C é um círculo. (PEREIRA, 2012).

ANEXO B – SÉRIES DE FOURIER

Uma série de Fourier é uma expansão de uma função periódica *f(x)* em termos de uma soma infinita de senos e cossenos. A série de Fourier faz uso da ortogonalidade relações do seno e cosseno funções. O cálculo e estudo de série de Fourier são conhecidos como análise harmônica e é extremamente útil como forma de acabar com uma função periódica arbitrária em um conjunto de termos simples. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

Outra demonstração do teorema via séries de Fourier que é estudado em muitos Bacharelados em Matemática, nos mostra uma outra saída par esse teorema. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

Teorema da Desigualdade isoperimétrica

A área A por qualquer curva simples plana fechada retificável C, de comprimento L, satisfaz à desigualdade $A \leq L2\ 4\pi$; (4.1) além disso, a igualdade ocorre, se e só se, C for um círculo. Relembrando que as curvas, define-se o caminho como sendo uma função contínua. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

$$\gamma: [a, b] \to R^2 .$$

Um caminho γ é fechado se $\gamma(a) = \gamma(b)$; e é simples se $\gamma(t1)$ 6= $\gamma(t2)$, para $a < t1 < t^2 < b$. O conjunto C dos pontos imagens do caminho é chamado uma curva:

$C = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$. Assim, a cada caminho γ corresponde uma curva C. Entretanto uma curva pode ser determinada por caminhos diferentes, a exemplo:

$$\gamma : [0, 1] \to R^2$$

$$\gamma 1 : [0, 1] \to R^2 ,$$

$$\gamma 1(t) = \gamma(t^2),$$

$$\gamma 2 : [a, b] \to R^2,$$

$\gamma 2(t) = \gamma\ (\phi(t))$, onde $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ é uma bijeção contínua, são caminhos diferentes e determinam a mesma curva; neste caso, cada um dos caminhos que determina a curva é chamado de “parametrização” da curva. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

Convergência em média

Em um espaço de funções com produto interno expresso por ima integral a afirmação segundo a qual:

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = \lim_{k\to\infty} \left(\int_a^b [f_k(x) - f(x)]^{\frac{1}{2}} \right) = 0$$

Não é o mesmo que dizer que a seqüência { f_k } converge para função f em todo ponto de [a,b] (convergência pontual). Em Análise Matemática, essa convergência via produto interno e conhecida como convergência em média, para enfatizar que ela é calculada por integração, que em certo sentido é um processo de média generalizado. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

Ex.: A sequência de funções {x, x^2, x^3, ...} converge em média para zero em cp[-1,1] (espaço das funções contínuas no intervalo fechado [-1,1]). (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

De fato,

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - 0\| = \lim_{k\to\infty} \left(\int_{-1}^{1} x^{2k}\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{2k+1} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Entretanto, {x, x^2, x^3, ...} não converge para zero em cada ponto.

O exemplo dado mostra que a convergência em média é diferente da pontual. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

DEFINIÇÃO: Diz-se que uma série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k$ de vetores de um espaço euclidiano converge para o vetor û $\Leftrightarrow$ a seqüência associada das somas parciais converge para û no sentido que:

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{u}_k - \hat{u}\| = 0$$

Se este é o caso, escrevemos:

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k$$

E dizemos que û foi desenvolvida em série infinita.

Mais detalhadamente, $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k$ converge para û $\Leftrightarrow$ para cada número real ε > 0 existe um inteiro K tal que:

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k - u \right\| < \varepsilon$$

Toda vez que N>K. O real ε pode ser entendido como o “erro”. Na verdade, $\left\| \sum_{k=1}^{n} \hat{u}_k - \hat{u} \right\|$ é a “distância” da soma ao vetor û. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

É sabido que todo espaço euclidiano de dimensão finita tem uma base ortonormal û1, û2, û3,..., ûn e que todo vetor deste espaço pode ser escrito de modo único sob a forma:

$$\hat{u} = (\hat{u} \cdot \hat{u}_1)\hat{u}_1 + \ldots + (\hat{u} \cdot \hat{u}_N)\hat{u}_N + \ldots$$

ou

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{u} \cdot \hat{u}_k)\hat{u}_k$$

Entretanto sem informações mais detalhadas não existe, evidentemente nenhuma garantia que esta série convirja para û. É claro que se converge (e isto ocorre em inúmeras situações), justifica-se escrever:

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{u} \cdot \hat{u}_k)\hat{u}_k$$

e dizemos que a série converge em média para û. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

Os produtos internos (û.û $_k$) se denominam de coordenadas ou coeficientes de Fourier (generalizados) deu em relação a base (ou conjunto ortonormal) û1, û2, ...

É comum escrever:

$$\hat{u} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{u} \cdot \hat{u}_k)\hat{u}_k$$

Onde o símbolo ~ é para ressaltar que a série em questão pode não convergir para û. Caso convirja justifica-se usar o símbolo de igualdade. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

TEOREMA: Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k.\hat{u}_k$ qualquer série infinita que converge em média para û, isto é, $\hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.\hat{u}_k$. Então $a_k = \text{u}.\,\hat{u}_k$ para cada k. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

É claro que se a série converge em média para û vale escrever:

$$\lim_{N\to\infty} \|\hat{u} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{u}_k}_{\text{soma parcial } S_n} \|$$

Se o espaço euclidiano em tela for cp[a,b] deve-se entender û como f(x), a_k com An e Bn e Nk como sen(Nx) e cos(Nx) (a = -π, b = π) se f for periódica de período 2 π.

Derivação e Integração das Séries de Fourier

TEOREMA: Seja f uma função contínua em (-∞,∞), com período 2π, e considere que f tenha derivada primeira f' contínua por partes. Então, a série de Fourier de f' pode se obtida derivando a série de f termo a termo, e a série derivada converge pontualmente para $f'(x)$ se $f''(x)$ existe. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

Ou seja, se

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kx) + B_k \operatorname{sen}(kx))$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{A_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kx) + B_k \operatorname{sen}(kx))\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{A_0}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(A_k \cos(kx) + B_k \operatorname{sen}(kx))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k[B_k \cos(kx) - A_k \operatorname{sen}(kx)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [k\, B_k \cos(kx) - k\, A_k \operatorname{sen}(kx)]$$

TEOREMA: Seja f uma função contínua por partes em (-∞,∞) com período 2π, e seja a série de Fourier de f. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos(kx)+B_k\operatorname{sen}(kx))$$

Então,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\sum_k\ dx$$

$$=\underbrace{\frac{A_0}{2}(b-a)}_{A_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(\operatorname{sen}(kb)-\operatorname{sen}(ka))-B_k(\cos(kb)-\cos(ka))}{k}$$

Em outras palavras, a integral definida de f, de a a b, pode ser calculada integrando-se a série de Fourier de f termo a termo. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

No caso de integral indefinida fica (teorema da integração): Seja função arbitrária de cp[-π,π] com série de Fourier. (ALMEIDA; CARNEIRO, 2010).

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos(kx)+B_k\operatorname{sen}(kx))$$

Então, a função

$$\int_a^x f(t)dt,\ -\pi<x<\pi$$

Tem uma série de Fourier que converge pontualmente com relação a todo x do intervalo (-π,π), e

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k+(-1)^{k+1}A_0}{k}\operatorname{sen}(kx)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k}\cos(kx)$$