UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

CLAUDINEI MARTINS BASTOS

UM BREVE ESTUDO SOBRE FUNÇÕES E SÉRIES DE TAYLOR

SANTO ANDRÉ

2016

Bastos, Claudinei Martins

Um breve estudo sobre funções e séries de Taylor / Claudinei Martins Bastos. Santo André, SP: UFABC, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do ABC. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Santo André, 2016

Universidade Federal do ABC

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

CLAUDINEI MARTINS BASTOS

UM BREVE ESTUDO SOBRE FUNÇÕES E SÉRIES DE TAYLOR

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT no Centro de Matemática, Computação e Cognição da Universidade Federal do ABC a para obtenção do título de Mestre.

Santo André, 2016

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Claudinei Martins Bastos, realizada em 16 de dezembro de 2016:

Prof.(a) Dr.(a) **Vinicius Cifú Lopes** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Paola Andrea Gaviria Kassama** (UNIFESP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Jeferson Cassiano** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (UNIFESP) – Membro Suplente

Universidade Federal do ABC

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 21 **de** fevereiro **de 20**17**.**

Assinatura do autor: ____________________

Assinatura do orientador: ____________________

Às memórias de Lidia Martins Bastos e Priscila Martins Bastos Farinelli, que em vida muito me incentivaram.

À Marcia Helena, minha esposa, que me deu as outras duas razões da minha vida: Isabela e Beatriz.

A Deus, que é Senhor de todas as coisas e conquistas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado oportunidade, saúde e energia para trilhar esse caminho desde o início.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes, pela paciência, compromisso, seriedade, sugestões e correções durante essa parte final do curso.

Aos professores do PROFMAT pelo empenho em nos abrir novas portas do conhecimento e aos colegas de turma que muito auxiliaram com suas observações durante as aulas e nas salas de estudos.

Aos membros da banca examinadora pela atenção e contribuições dedicadas a este estudo.

À minha esposa Marcia Helena, pela compreensão e auxílio nos momentos mais difíceis nesses quase quatro anos.

Às minhas filhas, Isabela e Beatriz, pelas brincadeiras adiadas.

À Capes pelo apoio financeiro durante o curso.

“... sei que nada sei...”

(Sócrates)

RESUMO

Inicia-se o presente trabalho apresentando ao leitor a necessidade de se apropriar profundamente dos conceitos relacionados às funções lineares e quadráticas, seu crescimento e decrescimento, estudos dos sinais e construção de seus respectivos gráficos, da resolução pelo método do varal para inequações-produto e inequações-quociente, que auxiliam na construção de gráficos de funções de graus maiores que dois, das variáveis e substituição de variáveis, bem como calcular e operar com polinômios, especialmente a divisão euclidiana e o algoritmo de Briot-Ruffini, para então estudar as sequências e séries numéricas. O estudo das séries de potências, desenvolvido no capítulo 5, é de fundamental importância na expansão do polinômio de Taylor, com suas aproximações sucessivas para as funções seno, cosseno entre outras, definidas por séries de potências e para a perfeita compreensão dos resultados presentes no capítulo final.

Palavras-chave: Funções. Séries de potências. Séries de Taylor

ABSTRACT

The present work begins by presenting to the reader the need to take a firm hold of the concepts related to linear and quadratic functions, their growth and decrement, studies of their signal and construction of their respective graphs, resolution by the factor method for product inequalities and quotient inequalities, which help constructing graphs of functions of degrees greater than two, variables and variable substitution, as well as to calculate and operate with polynomials, especially the Euclidean division and the Briot-Ruffini algorithm, and then to study the sequences and series numbers. The study of power series, developed in Chapter 5, has fundamental importance for the expansion of the Taylor polynomial, with its successive approximations for the functions sine, cosine among others, defined by power series, and for the perfect understanding of the results shown in the final chapter.

Keywords: Functions. Power series. Taylor series

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Historicamente, assim como outras noções em Matemática, o conceito de função passou por evoluções. A palavra função parece ter sido introduzida por Leibniz (1694), para expressar qualquer quantidade associada a uma curva. A definição que, com pouca alteração permanece até nossos dias, é de Dirichlet (1805-1859), onde se encontra “se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por uma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x”. Eves (2004, p. 660-661). A função é grande aliada na Modelagem Matemática, no desenvolvimento de equipamentos médicos e até em uma corrida de taxi, na qual o taxímetro calcula, a partir de várias variáveis, o valor a ser pago, entre tantas outras aplicações. As equações, desde as de primeiro grau, presentes no papiro de Ahmes, para tratar de questões cotidianas e até situações para jovens estudantes da época, Boyer (1974, p. 12), passando por Bhaskara (1114 a cerca de 1185) e as equações de segundo grau, Cardano (1501-1576), Tartaglia (1499-1557) e as equações de terceiro e quarto graus. Abel (1802-1829) com sua prova da impossibilidade de se resolver uma equação de grau cinco por meio de radicais, e tantos outros , ao longo do tempo, proporcionaram condições para o desenvolvimento tecnológico, inclusive a produção de aplicativos que resolvem equações e outros que auxiliam na construção de gráficos. Dentre eles está o GeoGebra, que foi utilizado para produzir as figura presentes no texto. Para o estudo das séries numéricas, séries de potências e de Taylor, temos em Análise Real: Lima (2012), uma excelente opção, pois os conteúdos são apresentados de forma organizada, objetiva e clara. Nosso objetivo principal é explorar as séries de potências, para aproximar algumas funções por meio das séries de Taylor e operar com essas séries.

1. FUNÇÕES

Introdução

Vamos apresentar um estudo inicial sobre funções polinomiais, destacando a representação cartesiana, as raízes e crescimento, para dar o embasamento necessário às resoluções das inequações presentes no final do capítulo.

1.1 Conceitos Básicos

Para o estudo a ser desenvolvido neste trabalho, há a necessidade de que o leitor conheça os conjuntos numéricos e suas operações, o plano cartesiano e a localização de seus pares ordenados, relações binárias, ideias associadas às funções e as funções polinomiais, a Geometria Analítica Plana: Iezzi (1993, v.1, v.2, v.6, v.7, v.8), os limites e as derivadas: Lopes (2013. cap.3-6).

1.2 Formalizando o conceito de função

Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma relação de A em B é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$. Tal relação é uma função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

f é uma função de A em $B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists!\ y \in B; (x, y) \in f)$.

Há um esquema de flechas para ilustrar esta definição que será suprimido aqui, mas é de bom uso para a apresentação aos alunos do ensino médio. :Dante (2013, p.45-47).

Uma função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$, com $x \in A$ e $y \in B$, pode também ser representada por $f: A \to B$.

O gráfico de uma função $f: X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X\ x\ Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um elemento qualquer de X e $y = f(x)$.

$G(f) = \{(x, y) \in X\ x\ Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}$

Uma função definida por $y = f(x)$, trata a variável x de acordo com certa expressão dada. Para cada valor atribuído à variável x, obtemos um valor y. O conjunto que contém todos os elementos x, chama-se Domínio da função. A imagem é o conjunto que contém todos os resultados obtidos da função a partir dos valores de x.

A função pode ser representada por uma regra ou expressão Matemática que relaciona x, independente e y, dependente.

Exemplos 1.2.1

Seja $f: A \rightarrow B$, dada por:

1) $f(x) = 2x + 1$
2) $f(x) = 4x^2 + 2x - 7$

Para cada caso, atribuindo valores a x, temos sua respectiva imagem y.

1.3 Funções Lineares ou Afins

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se linear ou polinomial de 1º grau, quando existem constates $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Também é função linear, a função identidade $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$; as translações $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + b$; as proporcionais $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$: Lima (2013, p.90).

1.3.1 Gráfico

O gráfico cartesiano da função linear é uma reta não vertical.

Para $a = 0$, temos a função constante, que tem por representação gráfica uma reta paralela ao eixo das abscissas que intercepta o eixo das ordenadas em $y = b$.

Na função $f(x) = ax + b, a$ é chamado coeficiente angular ou declividade da reta, e b é chamado coeficiente linear.

A função $y = 2x + 1$ tem o coeficiente angular igual a 2 e o coeficiente linear igual a 1.

Para obter $y = 1$, basta fazer $x = 0$, o que permite observar que o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y.

1.3.2 O zero ou a raiz da função linear

O zero de uma função é todo número x cuja imagem é nula, ou seja, $f(x) = 0$.

x é zero de $y = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

$f(x) = ax + b$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Fazer $f(x) = 0$, nos remete à resolução de uma equação de 1º grau com uma incógnita.

Fazendo $x = 0$, obtemos $y = b$ e fazendo $y = 0$, obtemos $x = -\frac{b}{a}$. Os pontos $(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ são denominados interceptos. São os pontos pelos quais a reta intersecta os eixos coordenados. Com esses dois pontos, distintos em geral, podemos obter o gráfico da função linear. Para as funções $f(x) = ax$, que passam pela origem, escolhemos outra abscissa e obtemos a respectiva ordenada para termos um segundo ponto da reta. Quando se trata de uma função constante, temos o coeficiente angular igual a zero e a reta paralela ao eixo das abscissas intercepta o eixo das ordenadas no coeficiente linear. Podem ser encontrados exemplos que ilustram esse parágrafo em Dante (2011, cap.3).

1.3.3 Crescimento, decrescimento e sinal.

Para todo x_1 e x_2 $\in A \subset \mathbb{R}$, de modo que $x_1 < x_2$.

Se $f(x_1) < f(x_2)$, temos $f(x)$ estritamente crescente em A, se $f(x_1) < f(x_2)$, temos $f(x)$ crescente em A, se $f(x_1) > f(x_2)$, temos $f(x)$ estritamente decrescente em A e se $f(x_1) > f(x_2)$, temos $f(x)$ decrescente em A.

Teorema 1.3.3.1

Para a função linear se $a > 0$ f é crescente e se $a < 0$ f é decrescente.

Demonstração

$a > 0 \; e \; x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow \; ax_1 + b < ax_2 + b$

$a < \; 0 \; e \; x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow \; ax_1 + b > ax_2 + b$

Estudar o sinal da função f é verificar quais valores de x implicam $f(x) < 0, f(x) = 0$ e $f(x) > 0$, ou seja, permite fazer a verificação se o valor da função é positivo, negativo ou nulo, em cada ponto do gráfico.

Para a função linear, estudar o sinal é verificar o que ocorre com o valor da função para valores menores e maiores que a raiz.

f crescente $(a > 0)\begin{cases} f(x) < 0 \text{ para } x < \text{raiz} \\ f(x) > 0 \text{ para } x > \text{raiz} \end{cases}$

f decrescente $(a < 0)\begin{cases} f(x) < 0 \text{ para } x > \text{raiz} \\ f(x) > 0 \text{ para } x < \text{raiz} \end{cases}$

1.4 Função quadrática

Uma função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática ou função polinomial do 2º grau, quando existem constantes a, b e $c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos o valor de x obtido a partir de $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Usa-se também $\Delta = \; b^2 - 4ac$

Para $\Delta > \; 0$, temos duas raízes reais distintas;

Para $\Delta = \; 0$, temos uma única raiz real;

Para $\Delta < 0$, temos raízes complexas.

1.4.1 Gráfico

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

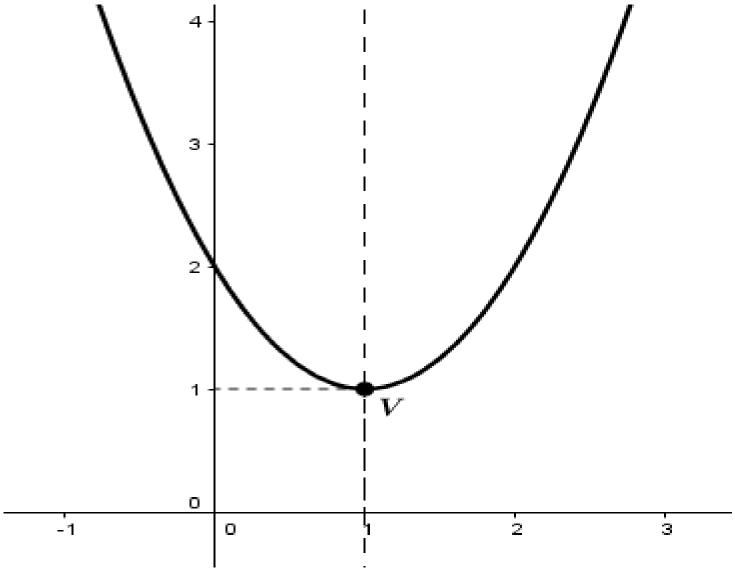

Figura 1.4.1

1.4.2 Deslocamentos.

Em Dante (2103, p.115-117), temos o detalhamento dos deslocamentos vertical e horizontal da parábola.

1.4.3 Vértice e a concavidade da parábola

O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, apresenta concavidade voltada para cima ou para baixo. Quando a concavidade é voltada para baixo, há o ponto de máximo, que é o maior valor da função e, quando a concavidade é voltada para cima, temos o ponto de mínimo.

Esse ponto, de máximo ou de mínimo, também é chamado de vértice da parábola.

Vamos provar que o vértice é o ponto de coordenadas $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, vamos escrevê-la de outra forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

As parcelas $x^2 + \frac{b}{a}x$, aparecem no desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{b}{2a}x\right)^2$. Completando o quadrado, podemos escrever:

$$a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Desse último resultado temos $a, \frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ constantes e x variável.

Assim:

- Se $a > 0$, então o valor mínimo de $f(x)$ ocorre quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, seu valor mínimo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Temos aqui que o valor mínimo de $f(x)$ é $f(x) = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$. Em se tratando de valor mínimo, temos aqui, a concavidade voltada para cima.
- Se $a < 0$, então o valor máximo de $f(x)$ ocorre quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

Nessa diferença, $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então a diferença assume seu valor mínimo quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Temos aqui que o valor máximo de $f(x)$ é $f(x) = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$. Em se tratando de valor máximo, temos aqui, a concavidade voltada para baixo.

Concluímos então que, em ambos os casos, as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Iezzi (1993, v. 1, p.147-148)

1.4.4 Zeros ou raízes

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, são valores de x reais, tais que $f(x) = 0$. São, portanto, as soluções da equação do 2º grau.

Observando a fórmula de Bháskara, fica evidente que dependemos de $\sqrt{\Delta}$ para a obtenção das raízes. Quando $\Delta < 0$, dizemos que não existem raízes reais. Nesse caso, a parábola está totalmente acima ou totalmente abaixo do eixo das abscissas.

1.4.5 Esboço do gráfico

A partir do vértice da parábola, atribuímos valores simétricos ao x do vértice e obtemos pontos da parábola, simétricos em relação ao seu eixo.

1.4.6 O Crescimento e o Sinal

Do resultado 1.4.3, uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é decrescente para $x < -\frac{b}{2a}$ e crescente para $x > -\frac{b}{2a}$, se $a > 0$, é crescente para $x < -\frac{b}{2a}$ e decrescente para $x > -\frac{b}{2a}$, com $a < 0$.

O sinal da função quadrática pode ser encontrado de forma bastante detalhada em: Iezzi (1993, v.1, p.160-163).

1.5 Inequações-produto e Inequações-quociente

Sejam as funções $f_1 \; e \; f_2$ com domínios em $\mathbb{R}$.

1) Chamamos inequação-produto na incógnita x, as sentenças:

$f_1(x).f_2(x) \geq 0$, $f_1(x).f_2(x) > 0$, $f_1(x).f_2(x) \leq 0$ ou $f_1(x).f_2(x) < 0$.

2) Chamamos inequação-quociente na incógnita x, as sentenças:

$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq 0$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq 0$ ou $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0$

Para, por exemplo, $f_1(x).f_2(x) > 0$, a solução depende dos produtos dos valores das funções.

$f_1(x).f_2(x) > 0 \Leftrightarrow f_1(x_0)$ e $f_2(x_0)$, não nulos, têm o mesmo sinal.

Assim, $f_1(x) > 0$ e $f_2(x) > 0$ ou $f_1(x) < 0$ e $f_2(x) < 0$.

Para $f_1(x) > 0$ e $f_2(x) > 0$, se S_1 e S_2 são os conjuntos de soluções dessas inequações, então $S_1 \cap S_2$ é a solução do sistema.

Para $f_1(x) < 0$ e $f_2(x) < 0$, se S_3 e S_4 são os conjuntos de soluções dessas inequações, então $S_3 \cap S_4$ é a solução do sistema.

Podemos concluir que o conjunto solução de $f_1(x).f_2(x) > 0$ é:

$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$

Analogamente pode ser feito para as demais inequações, observando a restrição para o denominador nulo.

1.5.1 Quadro de sinais (Varal)

Há um processo prático para resolver inequações-produto ou inequações quociente.

Vejamos um exemplo simples de uma inequação-produto e logo a seguir, um caso mais elaborado.

Sejam $f_1(x) = x - 4$ e $f_2(x) = x + 2$, as funções que compõem a inequação-produto $f_1(x).f_2(x) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Em primeiro lugar, estudamos os sinais das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Figura 1.5.1.a

O Varal:

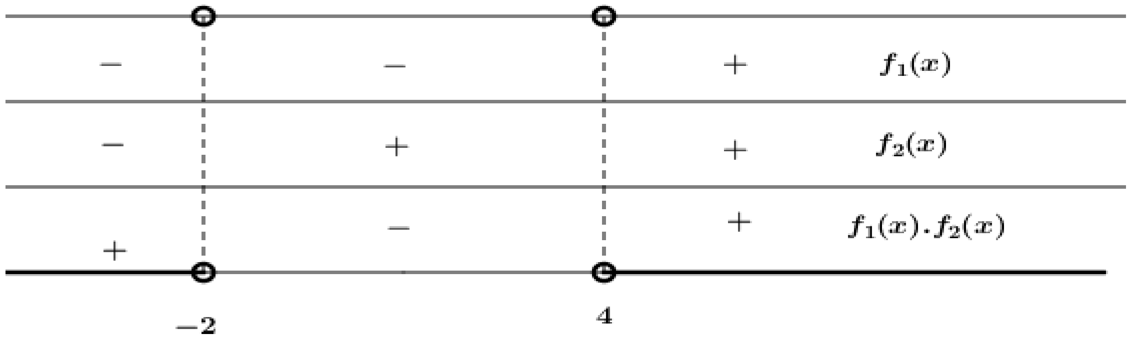

Figura 1.5.1.b

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$

$f_1(x).f_2(x) \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 8$ e, portanto, poderíamos ter obtido a solução a partir de seu gráfico. No entanto, essa técnica pode nos ajudar a esboçar o gráfico de outras funções de graus mais elevados.

Vamos analisar o seguinte exemplo:

Seja $f(x) = \frac{x(x^2+x-2)(x+2)(x+3)^2}{x+1}$.

Vamos resolver $\frac{x(x^2+x-2)(x+2)(x+3)^2}{x+1} \geq 0$.

A seguir são apresentadas individualmente cada função e suas respectivas raízes.

$f_1(x) = x, x = 0$; $f_2(x) = x^2 + x - 2, x = 1$ e $x = -2$; $f_3(x) = x + 2, x = -2$; $f_5(x) = (x+3)^2, x = -3$ e $f_6(x) = x + 1, x = -1$.

O varal:

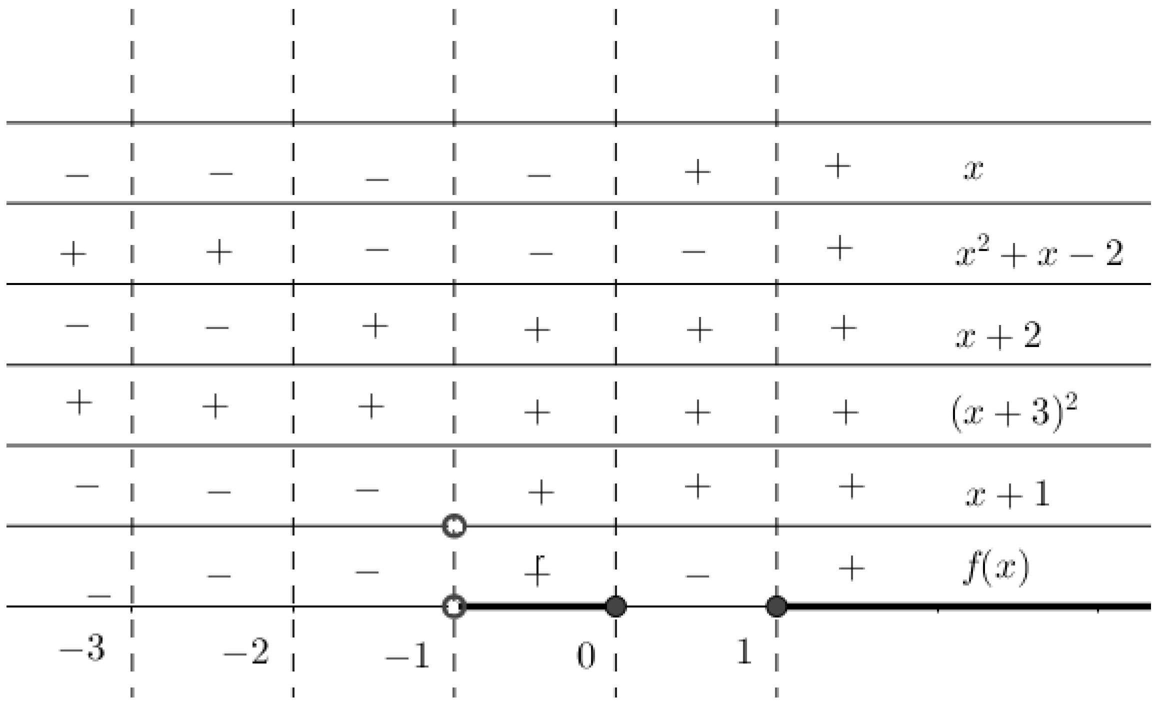

Figura 1.5.1.c

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$

O gráfico cartesiano da função resultante das operações propostas.

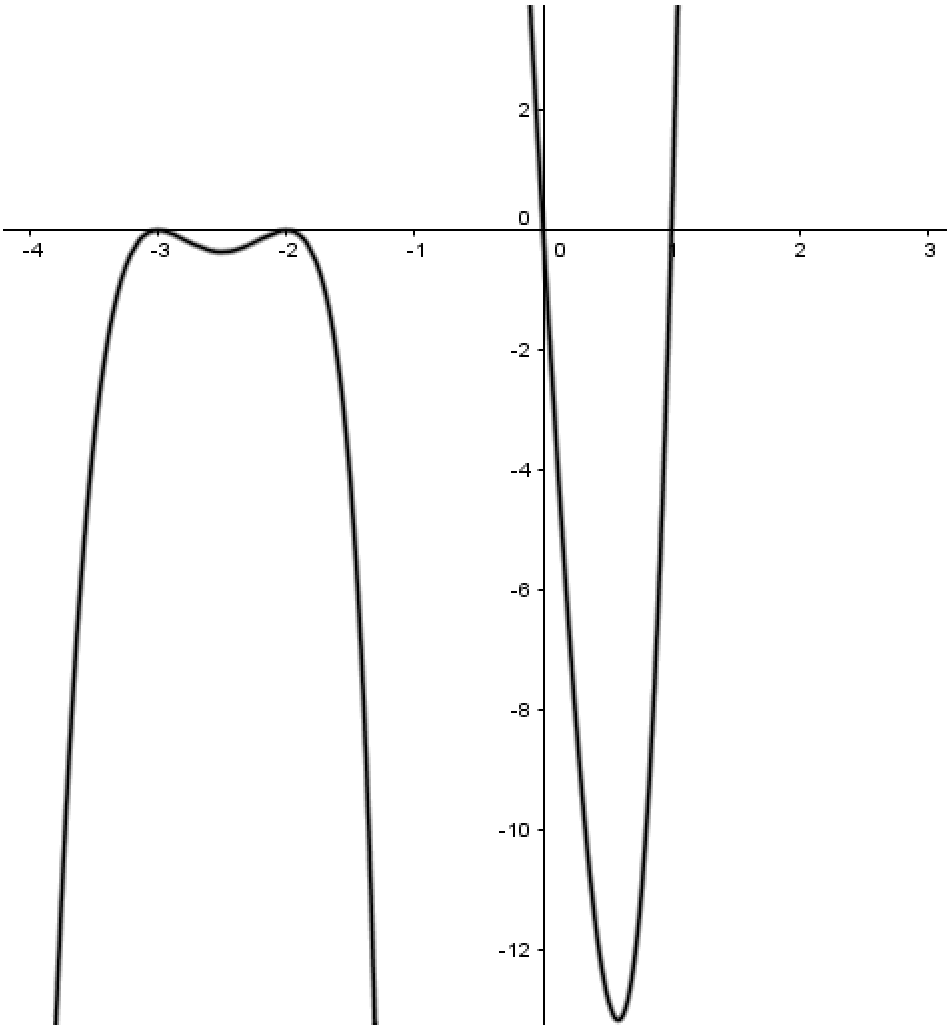

Figura 1.5.1.d

1.5.2 Exemplos

1) $(x-2)^3 > 0 \Rightarrow\ x-2 > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 2\}$

2) $(4x-3)^6 > 0 \Rightarrow\ 4x-3 \neq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{3}{4}\}$

3) $(2x+1)^5 < 0 \Rightarrow 2x+1 < 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -\frac{1}{2}\}$

4) $(3x-2)^4 < 0 \Rightarrow\ S = \emptyset$

5) $(5x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow\ S = \mathbb{R}$

6) $(5-3x)^7 \geq 0 \Rightarrow\ 5-3x \geq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq \frac{5}{3}\}$

7) $(4-2x)^4 \leq 0 \Rightarrow 4-2x = 0 \Rightarrow S = \{2\}$

Vamos resolver graficamente mais uma inequação.

Sendo $f_1(x) = (x-3)^5$, $f_2(x) = (2x+3)^6$ e $f_3(x) = (x+2)^4$, resolver a inequação $\frac{f_1(x).f_2(x)}{f_3(x)} \geq 0$ em $\mathbb{R}$.

O sinal de $(x-3)^5$ é igual ao sinal de $(x-3)$.

O sinal de $(2x+3)^6$ é positivo se $x \neq -\frac{3}{2}$ e $(2x+3)^6$ é nulo se $x = -\frac{3}{2}$.

O sinal de $(x+2)^4$ é positivo se $x \neq -2$.

A solução gráfica:

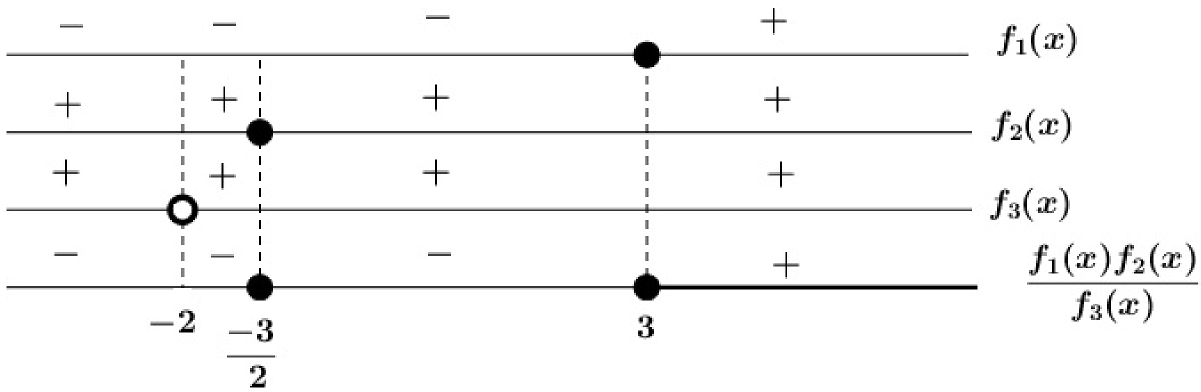

Figura 1.5.2.a

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x \geq 3\}$

O gráfico cartesiano da função resultante das operações propostas.

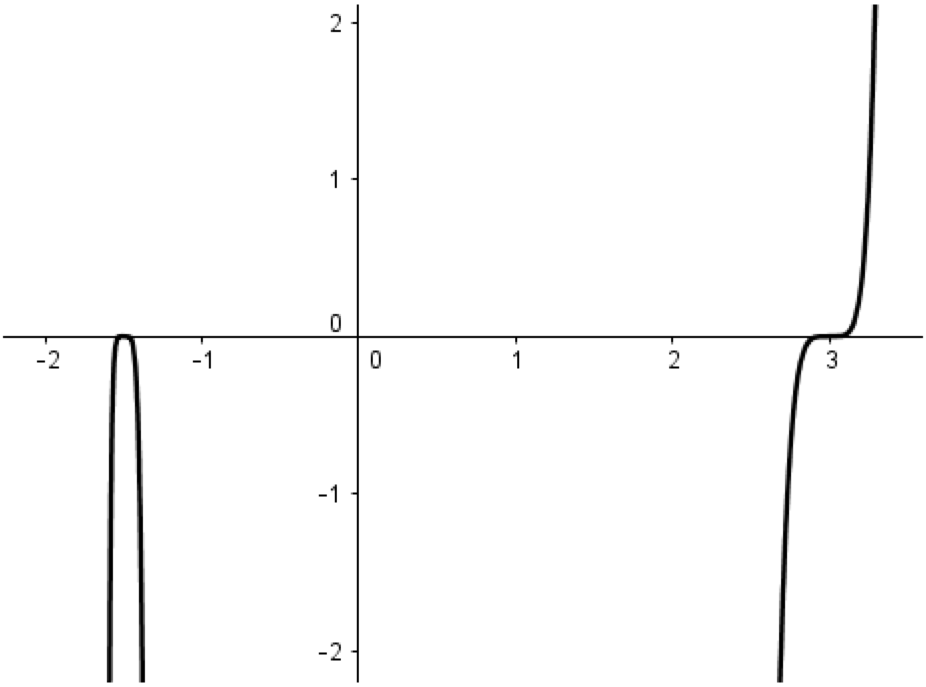

Figura 1.5.2.b

2. AS VARIÁVEIS

Introdução

Neste capítulo vamos explorar os conceitos de incógnita e variável, a partir de um excerto do artigo de Usiskin (1995) a apresentar alguns exemplos em que são necessárias a substituição ou a mudança de variáveis, para tornar possível a resolução dos mesmos.

2.1 Incógnita ou Variável?

Tanto o termo incógnita como o termo variável são apresentados aos estudantes de Matemática a partir do 7º ano do ensino fundamental e sempre geram alguma confusão.

Segundo Buarque (2011), **incógnita** significa "o que é desconhecido e falta saber para solucionar um problema ou para afirmar algo com certeza ou exatidão" e **variável** é "o termo que numa função ou numa relação, pode ser alternadamente substituído por outros".

Para Dirichlet (1805-1859), "Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números". Eves (2004, p. 661)

Do artigo de Usiskin (1995) "*Concepções sobre a álgebra na escola média",* temos:

> Vamos observar as seguintes expressões, todas elas com a mesma forma (o produto de dois números é igual a um terceiro):
>
> 1) $A = b.h$
>
> 2) $40 = 50.x$
>
> 3) $senx = cosx.tgx$
>
> 4) $1 = n.\left(\frac{1}{n}\right)$
>
> 5) $y = k.x$
>
> Cada uma delas tem um caráter diferente. Comumente chamamos 1 de fórmula, 2 de equação, 3 de identidade, 4 de propriedade e 5 de expressão de uma função que traduz uma proporcionalidade direta e não é para ser resolvida. Esses diversos nomes refletem os diferentes usos dados à ideia de

variável. Percebemos que as letras representam papéis diferentes em cada caso.

Claramente observamos certa diferença entre os itens 1, 3, 4 e 5 se fizermos uma comparação com o item 2.

O item 2, dos casos apresentados, apesar de muito semelhante aos outros quatro, é o único valor que não varia, pois para valer a igualdade, x deve assumir o valor $\frac{4}{5}$.

Concluímos que, diferentemente de uma variável, uma incógnita é um valor fixo no escopo da Matemática escolar. Por exemplo, em equações diferenciais, as incógnitas são funções.

Este estudo está focado nas equações, funções polinomiais e polinômios. Vejamos algumas considerações sobre alguns casos:

- Uma equação com apenas um valor desconhecido, apresenta uma incógnita;

- Para uma equação com dois valores desconhecidos, temos duas incógnitas;

- Uma função polinomial é uma relação de dependência entre dois valores desconhecidos e, portanto podemos associá-la a uma equação de duas variáveis;

- Um sistema possível e determinado de equações, apresenta incógnitas. Já um sistema possível e indeterminado, deixa de apresentar incógnitas e nos apresenta variáveis, pois nos dá um número infinito de possibilidades aos valores desconhecidos.

2.2 A substituição e mudança de variáveis

A substituição de uma variável, pode se dar por um valor numérico ou por outra variável conveniente.

No 7º ano do ensino fundamental, iniciam-se as substituições de valores numéricos em expressões algébricas, o que vai acompanhar o aluno por toda sua vida acadêmica. Volta e meia há a necessidade de se calcular o valor numérico de uma expressão algébrica ou um valor específico para determinada fórmula.

Antes de se introduzir a resolução de equações de 1º e 2º, é comum fazer a verificação se certo valor é ou não a raiz da equação.

Na resolução de sistemas de equações, tanto pelo método da adição como pelo método da substituição, fazemos substituição de uma variável por um valor numérico ou por uma expressão.

Para a resolução de uma equação do tipo $ax^{2k} + bx^k + c = 0$, temos uma primeira situação em que se utiliza a mudança de variável como artifício para a resolução, transformando-a em uma equação de 2º grau. Há um breve relato esclarecedor e apresenta o método de Viète para resolver equações de 2º grau em: Oliveira e Corcho (2010, p. 59-61).

Fazendo $x^k = y$, temos $x^{2k} = y^2$ e, portanto $ay^2 + by + c = 0$. Resolvendo a última equação e substituindo os valores obtidos em $x^k = y$, podemos ter depois, os valores para x.

Algumas equações exponenciais e logarítmicas também utilizam esse tipo de substituição em suas resoluções.

Exemplo 2.2.1

$5^{x+1} - 7.5^x = -2$

$5^x.5 - 7.5^x = -2$

Fazendo $5^x = y$, temos

$5y - 7y = -2$

$y = 1$

$5^x = 1$

$5^x = 5^0$

$x = 0$

No ensino médio há algumas situações em que se apresentam substituições e mudanças de variáveis, não que sejam essenciais para o desenvolvimento dos conteúdos, mas sim numa tentativa de facilitar o entendimento. Por exemplo, uma equação trigonométrica do tipo $sen\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi[$.

Fazendo $a = 2x - \frac{\pi}{4}$, passamos a ter $sen\, a = \frac{1}{2}$, o que nos leva a duas soluções: $a = \frac{\pi}{6}$ que nos conduz a $x = \frac{5\pi}{24}$ e $a = \frac{5\pi}{6}$ que nos dá $x = \frac{13\pi}{24}$.

No cálculo diferencial e integral, muitas vezes, é necessária a utilização de métodos de substituição e troca de variáveis para facilitar a obtenção do resultado de forma mais rápida, sendo em muitos casos, a única alternativa.

Nos dois itens do exemplo a seguir, usamos os conceitos de limite e derivada, que pode ser encontrados em: Guidorizzi (2008, v.1, p.55, p.136).

Exemplos 2.2.2

Cálculo do limite $\lim_{x \to \sqrt{\frac{5}{3}}} \frac{e^{3x^2-5}-1}{3x^2-5}$

Fazendo $y = 3x^2 - 5$, tem-se que se $x \to \sqrt{\frac{5}{3}}$, então $3x^2 - 5 \to 0$.

Logo o limite fica $\lim_{y \to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$, que é chamado limite notável.

a) Cálculo da derivada da função $h(x) = cos^2 x$.

Lembrando que $cos^2 x = cosx.cosx = (cosx)^2$ e usando a regra da cadeia, temos:

$f(u) = u^2 \; e \; g(x) = cosx$

Assim, $h(x) = f(g(x))$

$f'(u) = 2.u$

$g'(x) = -senx$

Note que $f'(u) = 2.u \Rightarrow f'(g(x)) = 2.g(x) \Rightarrow f'(g(x)) = 2.cosx$

Temos que:

$h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

$h'(x) = -2.cosx.senx$

Nesse último caso, utilizamos diversas vezes a substituição de variáveis.

Como vimos, as equações de 1º e 2º graus têm soluções bastante simples. Para as equações de 3º e 4º graus, matemáticos italianos do século XVI, dentre eles, Niccolo Fontana (Tartaglia) e Girolamo Cardano, desenvolveram técnicas e fórmulas com uso de radicais para a solução.

Por mais de 200 anos muitos matemáticos buscaram fórmulas para equações de graus maiores que 4. Em meados do século XVIII, Paolo Ruffini, médico e matemático italiano, apresentou alguns argumentos, mas só nos primeiros anos do século XIX, Niels Henrik Abel, jovem matemático norueguês, provou a impossibilidade da resolução geral, por meio de radicais, das equações de grau ≥ 5, resultado conhecido como teorema de Ruffini-Abel.

Iezzi (1993, v.6, p. 99-100, 147-148)

3. POLINÔMIOS

Introdução

Vamos tratar aqui dos polinômios, suas características e as operações que usualmente se faz com dois polinômios. Para a divisão, vamos utilizar o método da chave e o algoritmo Briot-Ruffini e encerrar com as relações de Girard.

3.1 Função polinomial ou polinômio

Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, seja a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ expressa por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. A função f é denominada função polinomial ou polinômio associado à sequência dada.

Os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ são os termos do polinômio.

3.2 Raízes

Suponha que x_0 é raiz de $P(x)$, ou seja, $P(x_0) = 0$. Então $P(x) = (x - x_0).Q(x)$ em que $Q(x)$ é outro polinômio.

3.2.1 Raízes múltiplas

Fatorando determinado polinômio, digamos $P(x) = (x - x_0)^n.P_1(x)$, com $P_1(x_0) \neq 0$, dizemos que x_0 é raiz de multiplicidade n de $P(x)$, com $n \geq 1$.

3.2.2 Raízes racionais

Se uma equação polinomial $P\,(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0,\ com\, a_n \neq 0$, de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_+^*$ e p e q são primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.: Iezzi (1993, p.141-142)

3.3 Igualdade

Dois polinômios $f_1\ e\ f_2$ são iguais ou idênticos quando assumem valores numéricos iguais para todo x, ou seja, são iguais como funções:

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x),\ \forall x \in \mathbb{C}$$

3.3.1 Coeficientes idênticos

3.3.1.1 Teorema

Dois polinômios f_1 e f_2 são iguais se, e somente se, os coeficientes de f_1 e f_2 forem ordenadamente iguais.

Dados:

$$f_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \text{ e}$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i.$$

Então: $f_1 = f_2 \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall\ i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Demonstração

Para todo $x \in \mathbb{C}$, temos:

$f_1 \neq f_2 \Leftrightarrow f_1 - f_2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists\ x;\ (f_1 - f_2)(x) \neq 0 \Leftrightarrow f_1 - f_2$ tem algum coeficiente não nulo $\Leftrightarrow \exists\ i;\ b_i - a_i \neq 0 \Leftrightarrow \exists\ i;\ b_i \neq a_i$.

3.4 Operações

Dados dois polinômios

$f_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ e

$f_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$, definimos as seguintes equações:

3.4.1 Adição

Chama-se soma de f_1 com f_2 o polinômio

$(f_1 + f_2)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1).x + (a_2 + b_2).x^2 + \cdots + (a_n + b_n).x^n =$
$= \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$

3.4.2 Subtração

A diferença entre f_1 e f_2 é dada por $f_1 - f_2 = f_1 + (-f_2)$, ou seja, $(f_1 - f_2).(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1).x + (a_2 - b_2).x^2 + \dots + (a_n - b_n).x^n =$
$= \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i).x^i$.

3.4.3 Multiplicação

Sejam os polinômios

$f_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$ e

$f_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$.

Chama-se produto $f_1.f_2$, o polinômio:

$(f_1.f_2)(x) = a_0.b_0 + (a_0.b_1 + a_1.b_0).x + (a_0.b_2 + a_1.b_1 + a_2.b_0).x^2 + \cdots$
$+ (a_m.b_n).x^{m+n}$.

Ou seja, o produto $f_3 = f_1.f_2$ é o polinômio:

$f_3(x) = c_0 + c_1.x + c_2.x^2 + \cdots + c_{m+n}.x^{m+n}$, em que o coeficiente c_k é obtido por $c_k = a_0.b_k + a_1.b_{k-1} + \cdots + a_k.b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i\,.\,b_{k-i}$.

O produto $f_1.f_2$ pode ser obtido multiplicando-se cada termo $a_i.x^i$ de f_1 por cada termo $b_j.x^j$ de f_2, segundo a regra $(a_i.x^i).\left(b_j.x^j\right) = a_i.b_j.x^{i+j}$ e somando-se os resultados, como veremos a seguir.

Exemplo 3.4.3.1

Multiplicar $f_1(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ por $f_2(x) = 4 + 5x + 6x^2$.

$(f_1.f_2)(x) = (x + 2x^2 + 3x^3).(4 + 5x + 6x^2) = 4x + 5x^2 + 6x^3 + 8x^2 + 10x^3 + 12x^4 +$
$+12x^3 + 15x^4 + 18x^5 = 4x + 13x^2 + 28x^3 + 27x^4 + 18x^5$

3.5 Grau

Definição 3.5.1

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, um polinômio não nulo. Chama-se grau de f e representa-se por ∂f ou grf o número natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$, para todo $i > p$.

Assim, o grau de um polinômio f é o valor do maior expoente de um termo não nulo de f.

Se o grau do polinômio f é n, então a_n é chamado coeficiente dominante ou principal de f.

Observação: No caso de o coeficiente dominante a_n ser igual a 1, f é chamado polinômio unitário ou mônico.

3.5.2 Grau da soma

Teorema 3.5.2.1

Se f, g e $f + g$ são três polinômios não nulos, então o grau de $f + g$ é menor que ou igual ao maior dos números ∂f e ∂g.

$\partial(f + g) \leq max\ \{\partial f\ , \partial g\}$

Demonstração

Se $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, \partial f = m\ e\ \partial g = n,\ com\ m \neq n,$ admitamos, por exemplo, $m > n$. Assim, sendo $c_i = a_i + b_i$, temos:

$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0$ e

$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall\ \ i > m$.

Portanto, $\partial(f + g) = m = máx\{\partial f, \partial g\}$.

Se admitirmos $m = n$, temos:

$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall\ \ i > m$

$c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo, então:

$\partial(f + g) \leq max\ \{\partial f\ , \partial g\}$

3.5.3 Grau do produto

Teorema 3.5.3.1

Se f, g são dois polinômios não nulos, então o grau de $f.g$ é igual à soma dos graus de f e de g.

$\partial(fg) = \partial f + \ \partial g$

Demonstração

Se $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i\ g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, \partial f = m\ e\ \partial g = n$, seja

$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ um coeficiente qualquer de $(f.g)(x)$.

Temos:

$c_{m+n} = a_m . b_n \neq 0$

Como $k > m + n$, qualquer que seja i, vale $i > m$ ou $k - i > n$ (de fato, se ambos $i < m$ e $k - i \leq n$, então a soma dá $k \leq m + n$).

Então, qualquer que seja i, ou $a_i = 0$ ou $b_{k-1} = 0$. Desse modo c_k é uma soma de zeros.

Portanto, $\partial(fg) = m + n = \partial f + \partial g$

3.6 Divisão

Dados dois polinômios $f, g \neq 0$, dividir f por g é determinar dois outros polinômios q e r de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

I) $f = q.g + r$
II) $\partial r < \partial g$ ou $r = 0$.

Observação: $r = 0$, indica uma divisão exata ou que f é divisível por q.

f: dividendo

g: divisor

q: quociente

r: resto

Teorema 3.6.1 A existência e a unicidade do quociente e do resto

Dados dois polinômios f e g, com $g \neq 0$, existe um único polinômio q e um único polinômio r tais que $g.q + r = f$ e $\partial r < \partial g$ ou $r = 0$. Demonstração em Iezzi (1993, p. 74-75)

Há dois casos chamados triviais:

3.6.1.1 1º caso: $\boldsymbol{f = 0}$

Os polinômios $q = 0$ e $r = 0$ satisfazem as condições da definição de divisão, pois $q.g + r = 0.g + 0 = 0 = f$ e $r = 0$.

3.6.2.1 2º caso: $\boldsymbol{\partial f} < \partial g$

Neste caso, os polinômios $q = 0$ e $r = f$ satisfazem as condições da definição de divisão, pois $q.g + r = 0.g + f = f$ e $\partial f < \partial g$

3.6.1.3 O caso geral apresenta $\boldsymbol{\partial f} > \partial g$.

Para $\partial f > \partial g$, vamos aplicar o método conhecido como o método da chave, que é semelhante ao algoritmo da divisão de números inteiros.

3.7 Método da chave

Semelhantemente à divisão euclidiana, o método da chave permite obter o quociente e o resto.

Exemplo 3.7.1

Dados $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ e $g = x^2 - 2x + 3$. Vamos dividir f por g.

1º Passo: Dividir $3x^5$ por x^2.

$\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3$. Obter o resto parcial $r_1 = f - (3x^3).g$

$r_1 = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 - (3x^5 - 6x^4 + 9x^3) =$

$= 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1,$ com grau maior que o ∂g.

2º Passo: Dividir $4x^3$ por x^2.

$\frac{4x^3}{x^2} = 4x$. Obter o resto parcial $r_2 = r_1 - (4x).g$

$r_2 = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 - (4x^3 - 8x^2 + 12x) = -x^2 - x - 1$, com grau igual ao ∂g.

3º Passo: Dividir$-x^2$ por x^2.

$\frac{-x^2}{x^2} = -1$. Obter o resto parcial $r_3 = r_2 - (-1).g$.

$r_3 = -x^2 - x - 1 - \left(-x^2 - 2x + 3\right) = -3x + 2$, com grau menor que o ∂g, finalizando o processo.

Temos assim, $q = 3x^3 + 4x - 1 \; e \; r = -3x + 2$.

Na chave temos:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrr}
3x^5 & -6x^4 & +13x^3 & -9x^2 & +11x & -1 & x^2 & -2x & +3 \\ \cline{7-9}
-3x^5 & +6x^4 & -9x^3 & & & & 3x^3 & +4x & -1 \\ \cline{1-6}
 & & 4x^3 & -9x^2 & +11x & -1 & & & \\
 & & -4x^3 & 8x^2 & -12x & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -x^2 & -x & -1 & & & \\
 & & & x^2 & -2x & +3 & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & -3x & +2 & & &
\end{array}
$$

Figura 3.7.1.a

Usando apenas os coeficientes de f e g, temos:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
3 & -6 & 13 & -9 & 11 & -1 & 1 & -2 & 3 & \\ \cline{7-10}
-3 & 6 & -9 & & & & 3 & 0 & 4 & -1 \\ \cline{1-6}
 & & 4 & -9 & 11 & -1 & & & & \\
 & & -4 & 8 & -12 & & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -1 & -1 & -1 & & & & \\
 & & & 1 & -2 & 3 & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & -3 & 2 & & & &
\end{array}
$$

Figura 3.7.1.b

3.8 Divisão por binômio do 1º grau

Como passo inicial para tratar do dispositivo prático de *Briot-Ruffini*, vamos dividir um polinômio f, com $\partial f \geq 1$ por um polinômio g, com $\partial g = 1$ e coeficiente dominante igual a 1.

Exemplo 3.8.1

Vamos dividir $f = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ por $g = x - 4$, usando o método da chave.

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
2x^3 & -7x^2 & +4x & -1 & x & -4 & \\ \cline{5-7}
-2x^3 & +8x^2 & & & 2x^2 & +x & +8 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & +4x & -1 & & & \\
 & -x^2 & +4x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 8x & -1 & & & \\
 & & -8x & +32 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 31 & & &
\end{array}
$$

Figura 3.8.1

Neste tipo de divisão r é um polinômio constante, pois:

$\partial g = 1 \Rightarrow \partial r = 0$ ou $r = 0$.

O valor numérico de r não depende do número a substituído em x, ou seja, $r(a) = r$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Notemos que,

$$f(4) = 2.4^3 - 7.4^2 + 4.4 - 1 = 128 - 112 + 16 - 1 = 31 = r$$

3.9 Algoritmo de Briot-Ruffini

Dados os polinômios $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, com $a_0 \neq 0 \; e \; g = x - a$, vamos determinar o quociente q e o resto r da divisão de f por g.

Escrevendo $q = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \cdots + q_{n-1}$, vamos multiplicá-lo por $x - a$.

$$q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \cdots + q_{n-1}$$

X $\qquad x - a$

$$q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_{n-2}x^2 + q_{n-1}x$$
$$-aq_0x^{n-1} - aq_1x^{n-2} - \cdots - aq_{n-3}x^2 - aq_{n-2} - aq_{n-1}$$

$$q_0x^n + (q_1 - aq_0)x^{n-1} + (q_2 - aq_{1)}x^{n-2} + \cdots + (q_{n-1} - aq_{n-2})x - aq_{n-1}$$

Fazendo $q.(x - a) + r = f$, temos:

$$q_0 = a_0$$

$$q_1 - aq_0 = a_1 \Rightarrow q_1 = aq_0 + a_1$$

$$q_2 - aq_1 = a_2 \Rightarrow q_2 = aq_1 + a_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$q_{n-1} - aq_{n-2} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1}$$

$$r - aq_{n-1} = a_n \Rightarrow r = aq_{n-1} + a_n$$

Exemplos 3.9.1

Vejamos duas aplicações do algoritmo de Briot-Ruffini disposto de uma forma mais simples.

1) Vamos dividir $f = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$ por $g = x - 3$

2	0	-7	3	-1	3
2	$2.3+0$	$6.3-7$	$11.3+3$	$36.3-1$	
	6	11	36	107	

Figura 3.9.1.a

Portanto: $q = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36$ e $r = 107$.

Vamos dividir $f = 9x^3 + 5x^2 + x - 11$ por $g = x + 2$

9	5	1	-11	-2
9	$9(-2)+5$	$-13(-2)+1$	$27(-2)-11$	
	-13	27	-65	

Figura 3.9.1.b

Portanto: $q = 9x^2 - 13x + 27$ e $r = -65$.

3.10 As raízes de um polinômio

Retomamos aqui a seção 3.2.

Seja dado o polinômio

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ e seja r uma raiz de $P(x)$, ou seja, $P(r) = 0$.

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.), "Todo polinômio P de grau $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa". Uma demonstração pode ser obtida em Oliveira (2014).

Pelo Teorema da decomposição: Iezzi (1993, v.6, p. 106-108), todo polinômio P de grau n, $(n \geq 1)$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, ou seja:

$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$, em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são as raízes de P.

No caso da possibilidade da existência de raízes idênticas, a decomposição de P fica determinada por:

$P = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}(x - r_3)^{m_3} \ldots \left(x - r_p\right)^{m_p}$, em que

$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots m_p = n$ e $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_p$, são dois a dois distintos e P é divisível separadamente pelos polinômios $(x - r_1)^{m_1}$, $(x - r_2)^{m_2}, \ldots, \left(x - r_p\right)^{m_p}$.

3.10.1 Multiplicidade

Dizemos que r é raiz de multiplicidade m $(m > 1)$ da equação $P(x) = 0$ se, e somente se, $P = (x - r)^m . Q$ e $Q(r) \neq 0$, isto é, r é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio P é divisível por $(x - r)^m$ e não divisível por $(x - r)^{m+1}$, a decomposição de P apresenta exatamente m fatores iguais a $x - r$.

Quando $m = 1$, dizemos que r é raiz simples; quando $m = 2$, dizemos que r é raiz dupla; quando $m = 3$, dizemos que r é raiz tripla, e assim por diante.

3.11 Relações de Girard

Nos ensino fundamental e médio, utilizamos a soma e o produto das raízes de uma equação de segundo grau para obtê-las: Dante (2014, p. 107-108). Essa estratégia, que usa os coeficientes da equação, para sua resolução, é um caso particular das relações de Girard.

3.11.1 Caso geral

Dada a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$ e $n \geq 1$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, temos a identidade:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n) = \\
&= a_n x^n - a_n(\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2} + \boldsymbol{r_3} + \cdots + \boldsymbol{r_n})x^{n-1} + \\
&+ a_n(\boldsymbol{r_1 r_2} + \boldsymbol{r_1 r_3} + \cdots + \boldsymbol{r_{n-1} r_n})x^{n-2} - \\
&- a_n(\boldsymbol{r_1 r_2 r_3} + \boldsymbol{r_1 r_2 r_4} \ldots + \boldsymbol{r_{n-2} r_{n-1} r_n})x^{n-3} + \cdots + \\
&+ (-1)^h a_n S_h x^{n-h} + \cdots + (-1)^n a_n(\boldsymbol{r_1 r_2 r_3 \ldots r_n}), \forall x
\end{aligned}
$$

Temos assim:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$S_h = \text{soma de todos } \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{h}} \text{ produtos de } h \text{ raízes da equação } = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Observação:

As n relações de Girard para uma equação polinomial de grau n não são suficientes para obter $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. Existe a necessidade de uma informação adicional sobre as raízes.

Exemplos 3.11.1.1

1) Calcular a soma e o produto das raízes da equação

$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$

Temos:

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{3}{2}$

$r_1 r_2 r_3 r_4 = (-1)^4 \frac{a_0}{a_4} = \frac{6}{2} = 3$

2) Resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é 1.

Temos:

$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{(-6)}{1} = 6$ (1)

$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{3}{1} = 3$ (2)

$r_1 r_2 r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{10}{1} = 10$ (3)

$r_1 + r_2 = 1$ (4)

Substituindo (4) em (1) $\Rightarrow 1 + r_3 = 6 \Rightarrow r_3 = 5$

$\begin{cases} r_1 r_2 = -\frac{10}{5} = -2 \\ r_1 + r_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow r_1 = -1$ e $r_2 = 2$, portanto $S = \{-1, 2, 5\}$.

3.12 Raízes Complexas

Vamos tratar, neste tópico, das raízes complexas e não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais.

3.12.1 Raízes Conjugadas

Teorema 3.12.1.1

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = \alpha + \beta i$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então essa equação também admite como raiz o número $\overline{z} = \alpha - \beta i$, conjugado de z.

Demonstração

Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes reais que admite a raiz z, isto é, $P(z) = 0$.

Provemos que $\overline{z}$ também é raiz dessa equação, isto é, $P(\overline{z}) = 0$:

$P(\overline{z}) = a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + a_{n-2} (\overline{z})^{n-2} + \cdots + a_1 (\overline{z}) + a_0 =$

$$= a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 =$$

$$= \overline{a}_n\overline{z^n} + \overline{a}_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \overline{a}_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \cdots + \overline{a}_1\overline{z} + \overline{a}_0 =$$

$$= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a}_0 =$$

$$= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0.$$

Corolário 3.12.1.2

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = \alpha + \beta i$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, com multiplicidade p, então essa equação admite a raiz $\overline{z} = \alpha - \beta i$, com multiplicidade p. : Iezzi (1993, v.6, p. 129-131), é consequência do teorema acima e da seção 3.10.

4. SÉRIES

Introdução

Vamos iniciar este capítulo explorando dois dos paradoxos de Zenão, que apresentam boas ideias de sequências numéricas com divisões infinitas, para depois tratarmos de sequências de números reais, dos limites e da convergência de sequências.

4.1 Zenão e seus paradoxos

É possível que, em civilização anterior à grega, algum estudioso tenha pensado em uma situação que o conduziria a uma série numérica que o tenha deixado em dúvida de como proceder ou desenvolver esse pensamento.

Registros históricos atribuem a Zenão de Eléia, 450 a. C, filósofo grego, a ideia da possibilidade da subdivisão de uma grandeza indefinidamente.

Zenão apresentou quatro paradoxos que, se não contrariavam a intuição comum, no mínimo despertaram o interesse de seus contemporâneos e de grande parte de seus sucessores.

Vamos enunciar apenas dois de seus paradoxos: a **dicotomia** e **Aquiles** e usá-los livremente em situações que nos conduzam a séries numéricas que nos interessam.

A **dicotomia**: antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões.

Aquiles: Aquiles, em uma corrida com uma tartaruga, jamais a alcançará.

Inicia-se a corrida tendo a tartaruga certa distância de vantagem, e por mais que Aquiles se aproxime a tartaruga sempre estará à frente, pois quando o primeiro atingir o ponto onde a segunda estivera, esta já estará à frente.

As duas situações propostas por Zenão nos apresentam subdivisões infinitas.

A primeira regressiva.

$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots - \frac{1}{2^n}$, que nos conduz a zero.

A segunda progressiva, que adaptada, limita a soma a 1.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

Sob os argumentos de Zenão, não fazia sentido somar um número infinito de números, porém a ideia intuitiva de estar "tão próximo quanto se queira" encerra o conceito de limite.

Embora fundamental esse conceito demorou mais de dois milênios para finalmente ser rigorosamente definido pelos matemáticos do século XIX, passando por nomes como: Eudoxo (Séc. IV a. C.), Arquimedes (287-212 a. C.) e muito posteriormente, Newton (1641-1727), Leibniz (1646-1716), D'Alembert (1717-1783), Gauss (1777-1855), Cauchy, Abel, Weierstrass, Riemann, entre outros.: Boyer (1974).

4.2 Sequências de números reais

Definição 4.2.1

Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Uma sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser representada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou por $(x_n)_{n \in IN}$, ou simplesmente por (x_n).

Por exemplo, a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$, pode ser descrita como sendo dada pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$x_n = \frac{1}{n}$$

À medida que n cresce, $\frac{1}{n}$ torna-se cada vez menor, e assim, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos.

Em outro exemplo $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots)$, pode ser descrita como sendo dada pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$x_n = \frac{n}{2}$$

À medida que n cresce, $\frac{n}{2}$ torna-se cada vez maior, e assim, podemos encontrar termos tão grandes quanto desejarmos.

O que diferencia esses exemplos é o fato de a segunda sequência ser ilimitada, ou seja, e a primeira se aproximar cada vez mais de zero.

Podemos afirmar que a primeira sequência é limitada e a segunda ilimitada, ou não limitada.

Definição 4.2.2

Uma sequência (x_n) é limitada, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, dizemos que ela é ilimitada.

É fácil observar no exemplo anterior, uma sequência em que seus elementos decrescem, ou seja, $x_1 > x_2 > x_3 > x_n > \cdots$

Definição 4.2.3

Uma sequência (x_n) é decrescente se $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência é não crescente, se $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 4.2.4

Uma sequência (x_n) é crescente se $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência é não decrescente, se $x_{n+1} \geq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes, não crescentes, são chamadas monótonas. Essas podem ser limitadas ou não.

Por exemplo, a sequência $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots)$ é não decrescente, pois tem a propriedade $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, mas não é crescente, pois não satisfaz à propriedade $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

A sequência $(2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots)$ é monótona crescente e não limitada.

Outra sequência monótona é dada por $(x_n) = (1 - \frac{1}{n})$, que é crescente e limitada, pois quanto maior for o valor de n, mais próximo de 1 estaremos. Pode-se verificar que $(x_n) \in [0, 1[\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Em $(x_n) = (-n)$, temos uma sequência decrescente e não limitada.

Estes exemplos mostram que não há relação entre crescimento da sequência e esta ser limitada ou não.

Definição 4.2.5

Dada uma sequência $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ e L um número real, suponha que para todo número real $\varepsilon > 0$ exista um n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, então $\lim_{n \to \infty} x_n = L$.

Dizemos que a sequência x_n converge para L, ou que é convergente se existe tal L, caso contrário, dizemos que a sequência x_n diverge, ou que é divergente.

Teorema 4.2.6

Se existir um tal número real L, então ele é único e chamado limite.

Demonstração

Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Dado $M \neq L$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I =]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ e $J =]M - \varepsilon, M + \varepsilon[$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Portanto, para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo não é $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

Teorema 4.2.7

Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração

Seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in]a - 1, a + 1[$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contido no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada.

Teorema 4.2.8

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração

1º caso: A sequência é crescente.

Seja a sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ com $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < L$, para todo n, então seja S o conjunto de todos os números x_n, isto é, $S = \{x_n\}$. Então S tem limitantes superiores, como L; o menor deles é chamado supremo de S e representado por $Sup\, S$.

Seja $X = Sup\, S$, quero mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = X$.

Seja $\varepsilon > 0$, então $X - \varepsilon < X$. Portanto $X - \varepsilon$ não é um limitante superior de S. Assim $x_{n_0} > X - \varepsilon$ para algum n_0. Como a sequência é crescente, temos $n > n_0 \Rightarrow x_n > X - \varepsilon$.

Como X é um limitante superior de S e $X + \varepsilon > X$, segue que $X + \varepsilon$ é um limitante superior de S. Portanto, para $n > n_0, X - \varepsilon < x_n < X + \varepsilon$ e, como queríamos provar, $\lim_{n\to\infty} x_n = X$.

2º Caso: A sequência é decrescente.

Há uma possibilidade de se fazer uma “prova simétrica” para esse caso, mas vamos optar por usar esse resultado obtido agora.

Seja a sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ com $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > M$, para todo n, então a sequência tem um limite inferior.

Para todo n, seja $y_n = -x_n$. Então $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ é crescente e limitada superiormente. Portanto é convergente.

Seja $\lim_{n\to\infty} y_n = Y$. Então $\lim_{n\to\infty} x_n = -Y$.

Uma situação sempre presente no ensino médio é a soma dos termos de uma PG com razão entre 0 e 1.

A sequência de termos dada por $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$, é limitada, assim como a soma dos termos de qualquer PG de razão q, com $0 < q < 1$.

Pela fórmula da soma dos termos de uma PG, temos:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a.\frac{q^n - 1}{q-1} = a.\frac{1 - q^n}{1-q}.$$

Como $0 < 1 - q^n < 1$ e $1 - q > 0$, temos $|S_n| < \left|a.\frac{1-q^n}{1-q}\right| < \frac{|a|}{1-q}$.

Logo, S_n é limitada.

4.3 Operações com limites

Para prosseguimento, são necessários alguns resultados que envolvem os limites da soma, do produto e do quociente de sequências.

Teorema 4.3.1: Lima (2012, p.28-29)

Se $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = M$, então:

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = L \pm M$.
2. $lim_{n\to\infty}(x_n \,.\, y_n) = L \,.\, M$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$.

4.4 Séries infinitas

Seja uma sequência $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$. A série é a sequência das somas parciais e é indicada por $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

Seja S_n a n-ésima soma parcial da série $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, para todo n.

Definição 4.4.1

Quando existe o $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, onde L é um número finito, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para L ou, simplesmente, é convergente. Caso contrário, dizemos que a série é divergente.

Teorema 4.4.2

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração

Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $L = lim_{n\to\infty} S_n$. Vale também $lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$. Logo, $0 = L - L = lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = lim_{n\to\infty} a_n$.

Exemplo 4.4.3

Da adaptação do paradoxo de Zenão $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, temos:

$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ldots,\ S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \ldots$

Já sabemos, do ensino médio, que essa soma é igual a 1 pela somatória da PG.

A recíproca é falsa.

Na série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a_n tende a zero, porém ela diverge.

4.5 Convergência

Já vimos que uma série converge se existe o número real L de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = L$.

Uma série $\sum x_n$ é chamada absolutamente convergente quando $\Sigma\,|x_n|$ converge.

Teorema 4.5.1

Toda série absolutamente convergente é convergente. : Lima (2012, p.41-42)

Exemplos 4.5.2

1) Para $|x| < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, é absolutamente convergente, pois $|x^n| = |x|^n$.

2) Uma série convergente $\sum x_n$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n| = +\infty$ é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Quando tomamos a soma dos valores absolutos, obtemos a série harmônica, que é divergente. Porém a convergência da série $\sum x_n$ se dá pelo teorema de Leibniz: Lima (2012, p. 41) que diz:

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots$ convergirá se as três condições que seguem forem satisfeitas.

1) $x_n > 0$, para todo n
2) $x_n \geq x_{n+1}$, para todo n
3) $x_n \to 0$

Como a série apresentada atende às condições, a série converge.

4.6 Testes de Convergência

Teorema 4.6.1

Seja $\sum y_n$ uma série absolutamente convergente, com $y_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência $\frac{x_n}{y_n}$ for convergente, então a série $\sum x_n$ será absolutamente convergente.

Demonstração

Se, para algum $c > 0$, tivermos $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $|x_n| \leq c|y_n|$. Pelo critério da comparação: Lima (2012, p. 39), a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

4.6.2 Teste de D'Alembert: Lima (2012, p. 42).

Seja $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma constante L tal que $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < L < 1$ para todo n suficientemente grande, em particular se $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, então a série $\sum x_n$ será absolutamente convergente.

5. SÉRIES DE POTÊNCIAS

Introdução

Neste breve capítulo vamos apresentar as ideias de sequências de funções, séries funcionais e as séries de potências, que serão muito utilizadas nos capítulos 6 e 7.

5.1 Sequências de Funções

Uma sequência de funções é uma sequência $(f_n)_{\, n \in \mathbb{N}}$, onde cada f_n é uma função, sendo nesse caso, apenas consideradas sequências de funções de uma variável real.

Seja f_n uma sequência de funções definidas em $A \subset \mathbb{R}$. Para cada $x \in A$, podemos considerar a sequência numérica de termo geral $f_n(x)$. Seja B o conjunto de todos os $x, x \in A$, para os quais a sequência $f_n\,(x)$ converge. Podemos, então, considerar a função $f: B \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n\,(x).$$

Diremos, então, que f_n converge a f em B.

Exemplo 5.1.1: Guidorizzi (2008, v.4, p. 99)

Determine o domínio da função f dada por $\lim_{n\to\infty} n.sen\frac{x}{n}$.

O domínio de f é o conjunto de todos x para os quais a sequência $nsen\frac{x}{n}, n \geq 1$, converge. Temos, para todo $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} nsen\frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{sen\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} x = x.$$

Se $x = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} nsen\frac{0}{n} = 0 = f(0).$$

Segue que, para todo x real,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} nsen\frac{x}{n} = x.$$

Logo, o domínio de f é $\mathbb{R}$ e, para todo $x, f(x) = x$.

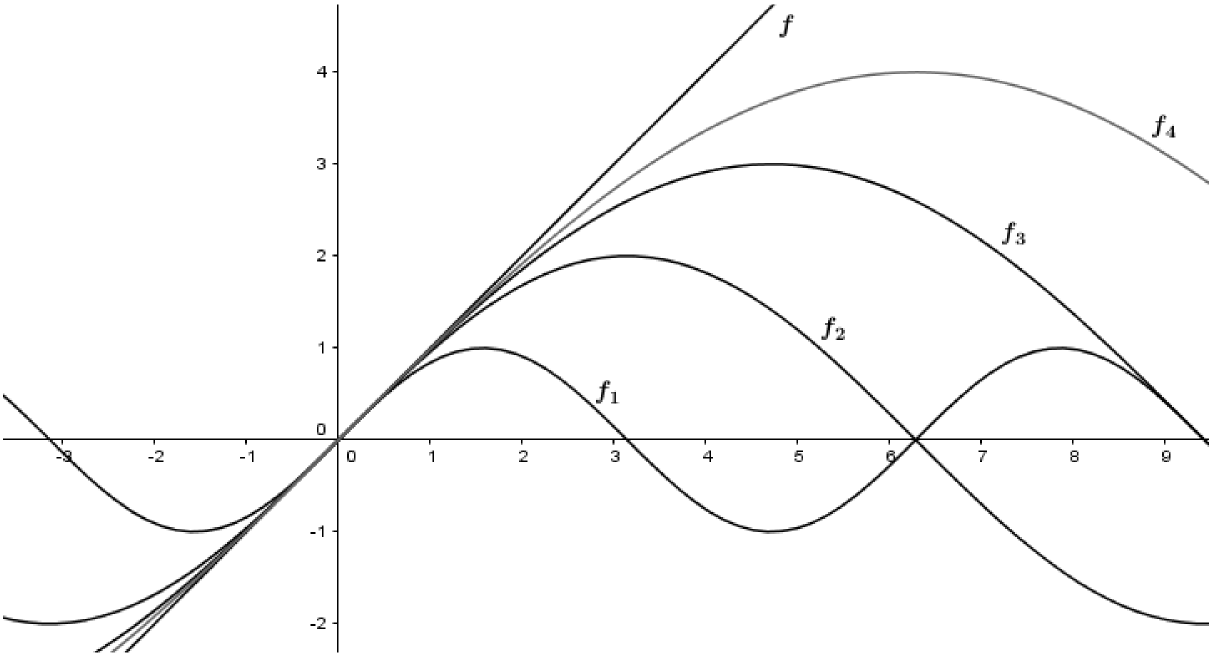

Figura 5.1.1

Do exemplo, resulta que a sequência de funções f_n, $n \geq 1$, onde f_n é dada por $f_n(x) = nsen\frac{x}{n}$, converge a f em $\mathbb{R}$. Observe que, à medida que n cresce, os gráficos das f_n vão se aproximando cada vez mais do gráfico de f.

5.2 Séries de Funções

Uma série de funções é uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, onde cada f_n é uma função. Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge, em B, à função $S: B \to \mathbb{R}$ se, para cada $x \in B$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

O que significa que, para cada $x \in B$,

$$S(x) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n(x).$$

O domínio de S é o conjunto de todos os x para os quais a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

5.3 Convergência Simples e Convergência Uniforme para Séries Funcionais

Mais à frente teremos a possibilidade de observar aproximações de funções polinomiais $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ para funções como seno e cosseno.

Uma sequência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$, com $n = 1, 2, \ldots$ converge simplesmente para a função $f: X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a sequência de números $f_1\ (x), f_2\ (x), \ldots, f_n\ (x), \ldots$, converge para $f(x)$.

Assim, $f_n \to f$ simplesmente em X quando dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, dependente de ε e de x tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)\ | < \varepsilon$.

Graficamente, temos uma sequência de pontos $\big(x, f_1(x)\big), \big(x, f_2(x)\big), \ldots, \big(\ x, f_n(x)\big), \ldots$ obtidos pelas intersecções dos gráficos de $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ com a reta vertical em um ponto de $x \in X$.

Um tipo mais restrito de convergência é a chamada convergência uniforme.

Uma sequência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f: X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, dependente apenas de ε, tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)\ | < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Graficamente, dado $\varepsilon > 0$, a faixa de raio ε em torno do gráfico de f é o conjunto $F(f;\ \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}$.

Afirmar que $f_n \to f$ uniformemente em X significa dizer que, para todo ε, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n, para todo $n > n_{0,}$ está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

5.4 As Séries de Potências

Uma série de potências é por definição:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

Esta expressão pode ser entendida também como um polinômio de grau infinito.

De forma simplificada, vamos fazer $x_0 = 0$ e tratar das séries de potências do tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

Seja a função $\frac{1}{1+x}$. Adaptamos o método da chave para a divisão, buscando eliminar os termos de menor grau.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+x \\ \cline{2-2}
\underline{-1-x} & 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\
\quad -x & \\
\quad \underline{x + x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{-x^2 - x^3} & \\
\qquad\quad -x^3 & \\
\qquad\quad \underline{x^3 + x^4} & \\
\qquad\qquad x^4 \dots &
\end{array}
$$

Figura 5.4.1

Pela disposição dos termos do quociente, podemos verificar que:

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

Anteriormente tratamos da convergência de uma sequência e para séries de funções. Vamos, a partir de agora, trabalhar o raio e o intervalo de convergência para as séries de potência.

5.5 O raio e o Intervalo de Convergência para Séries de Potências

Uma série de potência $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe r, com $0 < r \leq +\infty$, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $]-r, r[$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Nos extremos $-r$ e r, a série pode convergir ou divergir. O número r chama-se raio de convergência da série.

Teorema 5.5.1

Seja a_n uma sequência cujos termos são diferentes de zero. Se $lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ então $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, fixemos os números positivos K, M tais que $L - \varepsilon < K < L < M < L + \varepsilon$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Rightarrow K < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < M$. Multiplicando membro a membro as $n - p$ desigualdades

$K < \left|\frac{a_{p+i}}{a_{p+i-1}}\right| < M, i = 1, \ldots, n-p,$ obtemos $K^{n-p} < \left|\frac{a_n}{a_p}\right| < M^{n-p}$ para todo $n > p$. Ponhamos $\alpha = \frac{|a_p|}{K^p}$ e $\beta = \frac{|a_p|}{M^p}$. Então $K^n \alpha < |a_n| < M^n \beta$. Extraindo raízes, vem $K\sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{|a_n|} < M\sqrt[n]{\beta}$ para todo $n > p$. Levando em conta que $L - \varepsilon < K, M < L + \varepsilon, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta} = 1$, concluímos que existe $n_0 > p$ tal que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < K\sqrt[n]{\alpha}$ e $M\sqrt[n]{\beta} < L + \varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon$, o que prova o teorema quando $L > 0$. Se $L = 0$, basta considerar M em vez de K e M.: Lima (2012, p. 43-44)

Teorema 5.5.2

Se existir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ então $r = \frac{1}{L}$.

Demonstração

Para iniciar $r = +\infty$ se $L = 0$.

Com efeito, para todo $\rho > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$. Fazendo $n \to \infty$ obtemos $L \leq \frac{1}{\rho}$, de onde $\rho \leq \frac{1}{L}$. Segue-se que $r = supR \leq \frac{1}{L}$. Supondo, por absurdo, que fosse $r \leq \frac{1}{L}$, tomaríamos c tal que $r < c < \frac{1}{L}$, de onde $L < \frac{1}{c}$. Pela definição de limite, teríamos $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{c}$ para todo n suficientemente grande e daí $c \leq r$, uma contradição. Logo $r = \frac{1}{L}$.

Além disso, tem-se $0 < \rho < r \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$, para todo $n \in IN$ suficientemente grande.

Considerando esses resultados, se $lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, então o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é $r = \frac{1}{L}$.

Teorema 5.5.3

Uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-\rho, \rho]$, onde $0 < \rho < r$.

Demonstração

A série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente e, para todo $x \in [-\rho, \rho]$, tem-se $|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n$. Pelo teste de Weierstrass: Lima (2012, p. 163), segue-se que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[-\rho, \rho]$.

Corolário 5.5.3.1

Se $r > 0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, a função $f:]-r, r[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$ é contínua.

5.6 Teorema de Multiplicação de séries de potências

Sejam as séries $A_n = \sum a_n x^n$ e $B_n = \sum b_n x^n$ convergentes absolutamente para $|x| < r$, e seja $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Comparando com o produto das séries dadas, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

Assim, para $|x| < r$, concluímos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

5.7 Teorema (Integração termo a termo)

Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset]-r, r[$ então $\int_\alpha^\beta (\sum a_n x^n) \mathrm{d}x = \sum \frac{a_n}{n+1} . (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$.

5.8 Teorema (Derivação termo a termo)

Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f:]-r, r[\to \mathbb{R}$, definida por $\sum a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n. a_n x^{n-1}$ e a série de potências de $f'(x)$ ainda tem raio de convergência r.

As demonstrações dos dois últimos teoremas podem ser encontradas em Lima, (2012, p.166-167).

6. SÉRIES DE TAYLOR

Introdução

Neste capítulo vamos apresentar a fórmula de Taylor, aproximar uma função por polinômios de ordem um e ordem dois e fazer as aproximações para as funções seno, cosseno e outras.

6.1 A Fórmula de Taylor

A $n-\text{ésima}$ derivada de uma função f no ponto a é indicada por $f^{(n)}(a)$. Para $n = 1, 2, \ldots$, escreve-se $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$, respectivamente. Temos, por definição, $f'(a) = (f)'(a)$, $f''(a) = (f')'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = \left[f^{(n-1)}\right]'(a)$.

Definição 6.1.1

Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo a, então a derivada de f em a, expressa por $f'(a)$, é por definição:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, dizemos que a função $f: I \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo I. Quando f é $n-1$ vezes derivável numa vizinhança de a e existe $f^{(n)}(a)$ dizemos que $f: I \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável no ponto $a \in I$.

Dizemos que $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^n e escrevemos $f \in C^n$, quando f é n vezes derivável e a função $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ é contínua. Quando $f \in C^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que é de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty$.

Os polinômios, as funções racionais, as funções trigonométricas, a exponencial e o logaritmo são funções de classe C^∞.

O polinômio de Taylor de ordem n da função $f: I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$ é por definição:

$$P(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2!}.h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.h^n$$

O polinômio de Taylor de grau $\leq n$ de f no ponto x_0 pode ser expresso por $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}.(x - x_0)^i$.

Exemplo 6.1.2 O polinômio de ordem 1 de f em torno de x_0.

Este exemplo e o próximo são baseados em Monteiro (2013).

Seja f derivável em x_0 e T a reta tangente a f no ponto $P(x_0, y_0)$.

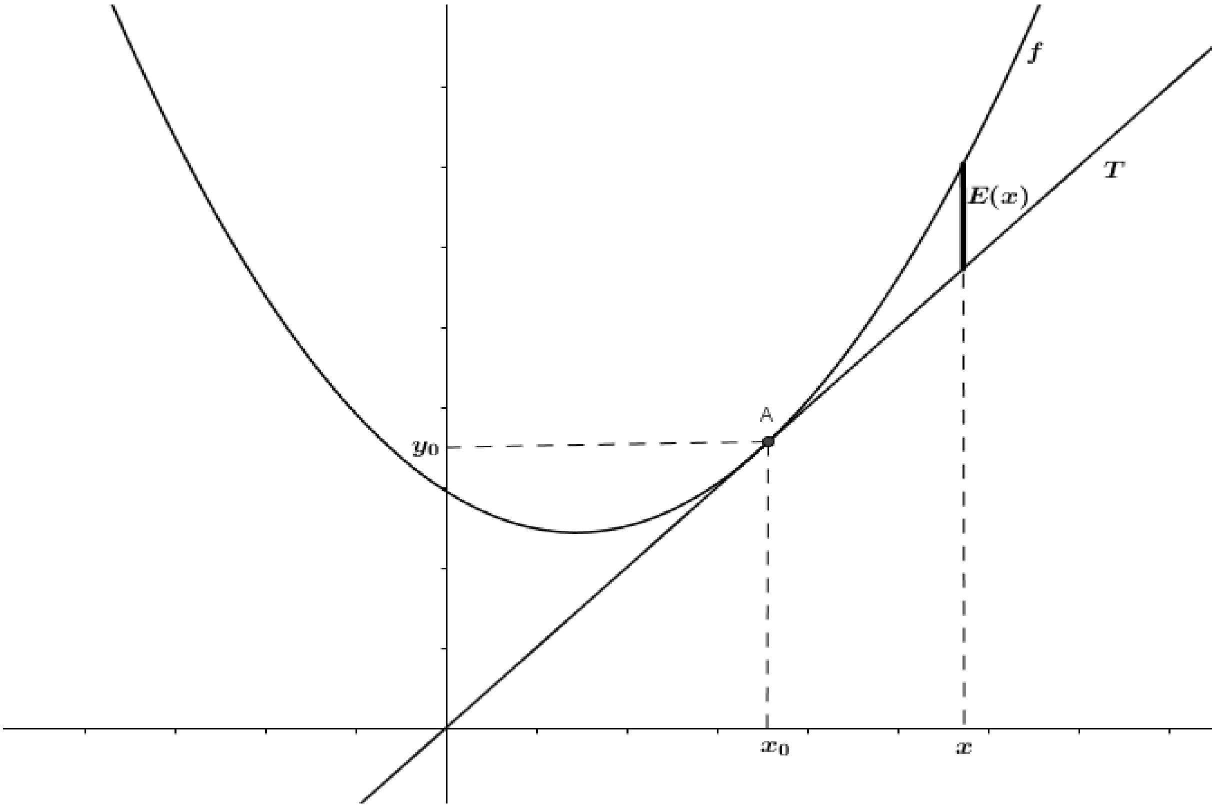

Figura 6.1.2

$T: y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$

$T(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$

$T(x_0) = f(x_0)$

$E(x) = f(x) - T(x)$

$E(x)$ é o erro que se tem aproximando uma função f por uma f^n.

Claramente $\lim_{x \to x_0} E(x) = 0$.

Por outro lado, $\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0$.

Demonstração:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T(x)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0).(x - x_0)}{x - x_0} \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Verificamos que $\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0$.

Como $x - x_0 \to 0$ e $\frac{E(x)}{x - x_0} \to 0$, temos que $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $x - x_0$, o que implica $|E(x)| < |x - x_0|$.

Temos então o polinômio de Taylor de grau ≤ 1 representado por $T(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$, em torno de x_0.

Exemplo 6.1.3 O polinômio de ordem 2 de f em torno de x_0.

Seja f derivável até 2ª ordem, em x_0, T a reta tangente a f no ponto $A(x_0, y_0)$ e P a parábola que passa pelo ponto A e é tangente a T ou f, que aproxima melhor o gráfico de f.

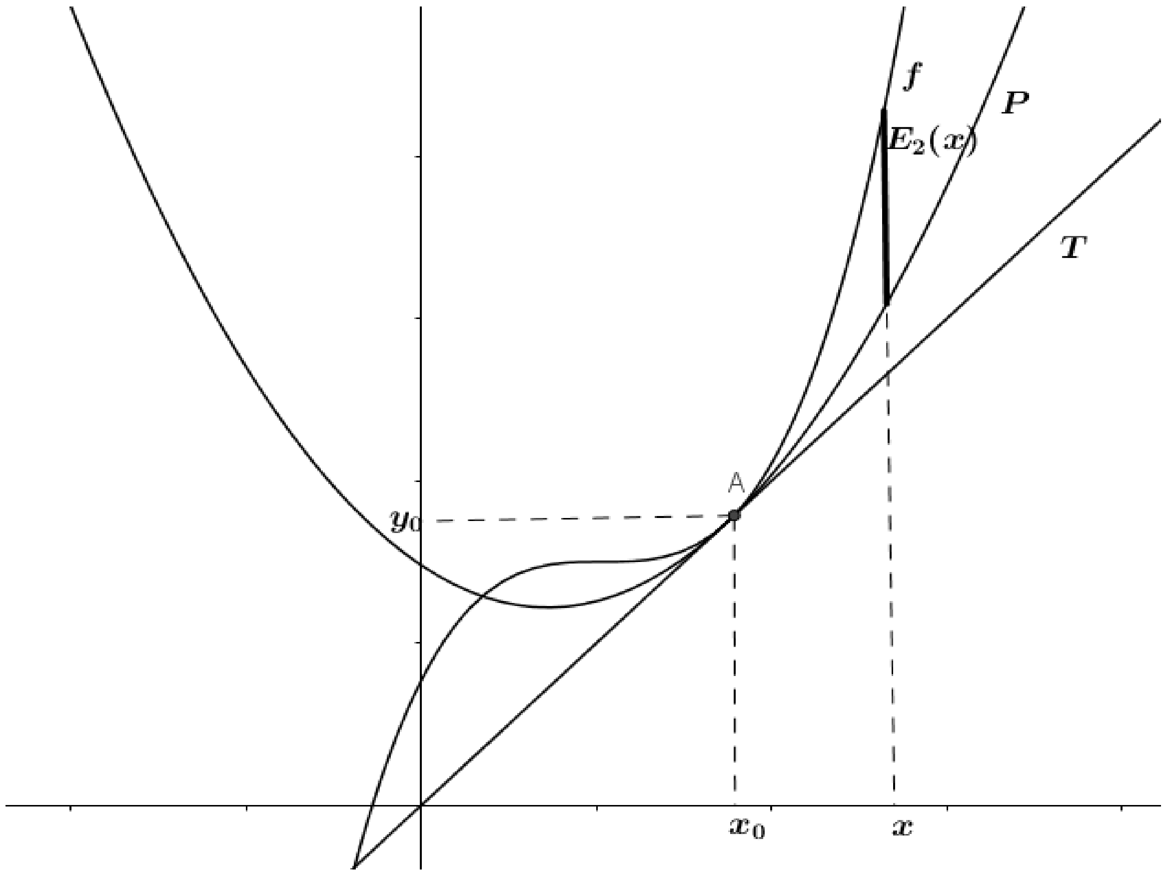

Figura 6.1.3

Mostrar qual é o polinômio de grau 2 que melhor aproxima f:

$P(x) = a + b.(x - x_0) + c.(x - x_0)^2$

$E_2(x) = f(x) - P(x)$

1) $E_2(x) = 0 \Rightarrow f(x_0) = P(x_0) \Rightarrow \text{a} = f(x_0)$

2) $\lim_{x \to x_0} \frac{E_2(x)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow \lim_{x - x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - b - c(x - x_0) \right) = 0 \Rightarrow b = f'(x_0)$

Aqui usamos o valor de a obtido em (1)

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - c \right) = 0$

$$\Rightarrow c = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - 0 - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

por *L'HOSPITAL*

Assim, o polinômio que aproxima a função f em torno do ponto $A(x_0, y_0)$, é o polinômio $P(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}.(x - x_0)^2$.

O fato de $c = \frac{f''(x_0)}{2}$ é consequência dos erros serem nulos. Em consequência disso, temos a concavidade de $f(x)$ e de $P(x)$ é a mesma no ponto $A(x_0, y_0)$.

O erro na aproximação é dado por $E_2(x) = f(x) - P(x)$.

Vamos mostrar que, para o polinômio de Taylor de ordem 2, $\lim_{x \to x_0} \frac{E_2(x)}{x - x_0} = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_2(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}.(x - x_0)^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0).(x - x_0)}{x - x_0} - \frac{f''(x_0).(x - x_0)^2}{2.(x - x_0)} \right]$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) - \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x_0).(x - x_0)}{2}$$

$$= 0 - 0 - \frac{f''(x_0).0}{2} = 0$$

O resto $E_2(x)$ é zero, independente da constante $f''(x_0)$.

Vamos verificar

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E_2(x)}{(x-x_0)^2}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E_2(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}.(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x-x_0)}{(x-x_0)^2} - \frac{f''(x_0)}{2.(x-x_0)^2}.(x-x_0)^2\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x-x_0)}{(x-x_0)^2}\right] - \frac{f''(x_0)}{2}$$

Como a f é derivável até 2ª ordem e, portanto contínua em x_0, podemos aplicar o teorema de *L'HOSPITAL*.

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f'(x) - f'(x_0)}{2.(x-x_0)}\right] - \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$= \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{2} = 0$$

Assim, $\lim_{x\to x_0} \frac{E_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$.

Como $(x-x_0)^2$ tende a zero e o quociente $\frac{E_2(x)}{(x-x_0)^2} \to 0,$ temos que $E_2(x)$ tende a zero mais rapidamente, o que implica $|E_2(x)| < (x-x_0)^2$

Temos então o polinômio de Taylor de grau ≤ 2 representado por $P(x) = a + b.(x-x_0) + c.\ (x-x_0)^{\ 2}$, em torno de x_0.

6.2 O polinômio de Taylor de ordem n de f

Seja f: $[a,b] \to \mathbb{R}$, n vezes derivável no intervalo aberto $[a,b]$. Existe $c \in]a,b[$ tal que:

$$f(b) = f(a) + f'(a).(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.(b-a)^n$$

A expressão $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.(b-a)^n$ é chamada Resto de Lagrange.: Lima (2012, p.107)

6.3 Séries de Taylor

Uma série de potências $\sum a_n.\ (x-x_0)^{\ n}$ com raio de convergência $r > 0$, é chamada série de Taylor, em torno do ponto x_0 da função $f{:}\,]\,x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n.(x-x_0)^n$.

Para uma função f como $f(x) = sen\, x$, podemos formar a série de Taylor associada $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \,.\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e perguntar (1) para quais valores de x a série converge, isto é, $S(x)$ fica definido como um número e (2) para quais valores de x obtemos $S(x) = f(x)$. Para responder (1), utilizamos o cálculo do raio de convergência como discutimos antes. Para responder (2), verificamos, para x fixado, se o resto $E_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$. Em geral, nenhuma das duas respostas é automática, como veremos para $ln(1+x)$: essa função está definida em todo $x > -1$, mas sua série converge somente para $-1 < x \leq 1$. Adaptado de: Lopes (2013, p.178-180).

6.4 Aproximações para algumas funções

1) Funções seno e cosseno em torno do ponto $x = 0$

Vamos obter, pela fórmula de Taylor, as séries do seno e do cosseno.

Seja $f(x) = senx$. Suas derivadas são:

$f^{(0)}(x) = senx$

$f^{(\prime)}(x) = cosx$

$f^{(\prime\prime)}(x) = -senx$

$f^{(3)}(x) = -cosx$

$\vdots$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n senx$

$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n cosx$

Para $x = 0,$ os senos são iguais a 0, e os cossenos são 1. Temos, portanto, $f^{(2n)}(0) = 0$ e $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

A série de Taylor para $f(x) = senx$ em $x = 0$ é:

$$f(0) + f^{(\prime)}(0).x + \frac{f^{(\prime\prime)}(0)}{2!}.x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \cdots$$

$$= 0 + x - 0.x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0.x^4 + \cdots + (-1)^n \,.\, \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \,.\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$P_{(2n+1)}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \,.\, \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

O polinômio é $P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \,.\, x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Aplicação 6.4.1

$f(x) = senx$

$P_1(x) = x$

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

$\vdots$

Gráficos de polinômios de Taylor para a função seno em torno de $x_0 = 0$.

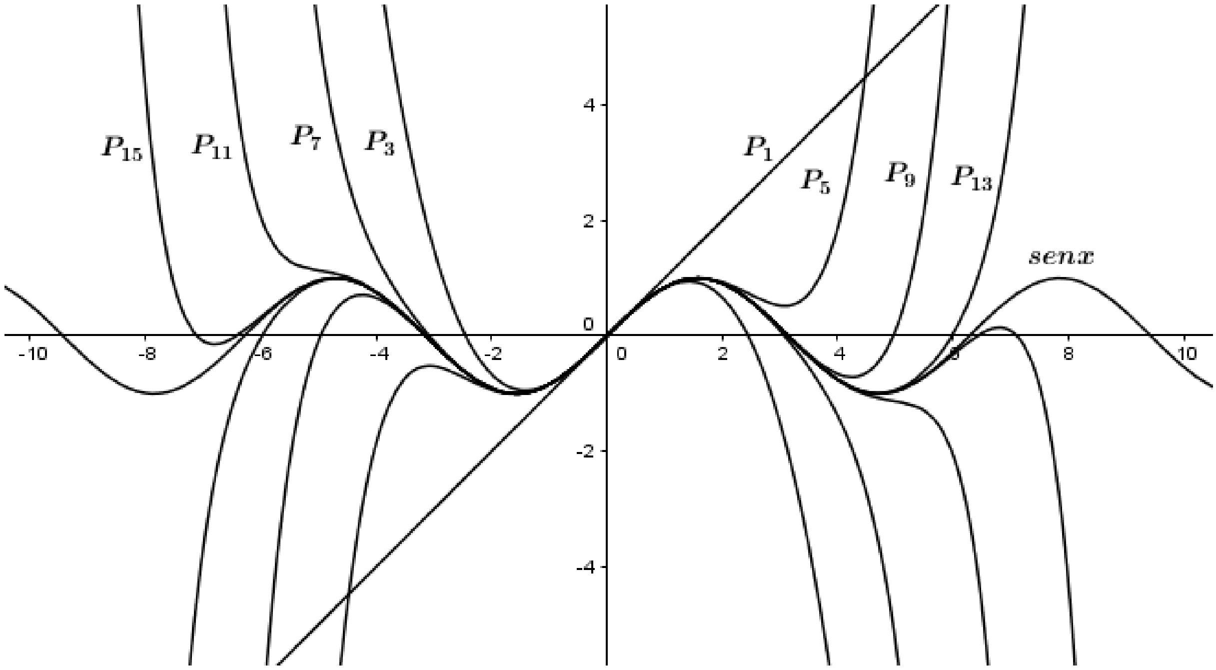

Figura 6.4.1

Aplicação 6.4.2

Seja $f(x) = \ cosx$. Suas derivadas são:

$f^{(0)}(x) = cosx$

$f^{(\prime)}(x) = -senx$

$f^{(\prime\prime)}(x) = -cosx$

$f^{(3)}(x) = senx$

$f^{(4)}(x) = cosx$

$\vdots$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n . cosx$

$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}.senx$

Para $x = 0,$ os cossenos são 1 e os senos são 0. Temos, portanto, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ e $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

A série de Taylor para $f(x) = cosx$ em $x = 0$ é:

$f(0) + f^{(')}(0).x + \frac{f^{('')}(0)}{2!}.x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \cdots$

$= 1 + 0.x - \frac{x^2}{2!} + 0.x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.\ x^{2n}}{(2n)!}$

$P_{(2n)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

O polinômio é $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k.\ x^{2k}}{(2k)!}$.

$f(x) = cosx$

$P_0(x) = 1$

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

⋮

Gráficos de polinômios de Taylor para a função cosseno em torno de $x_0 = 0$.

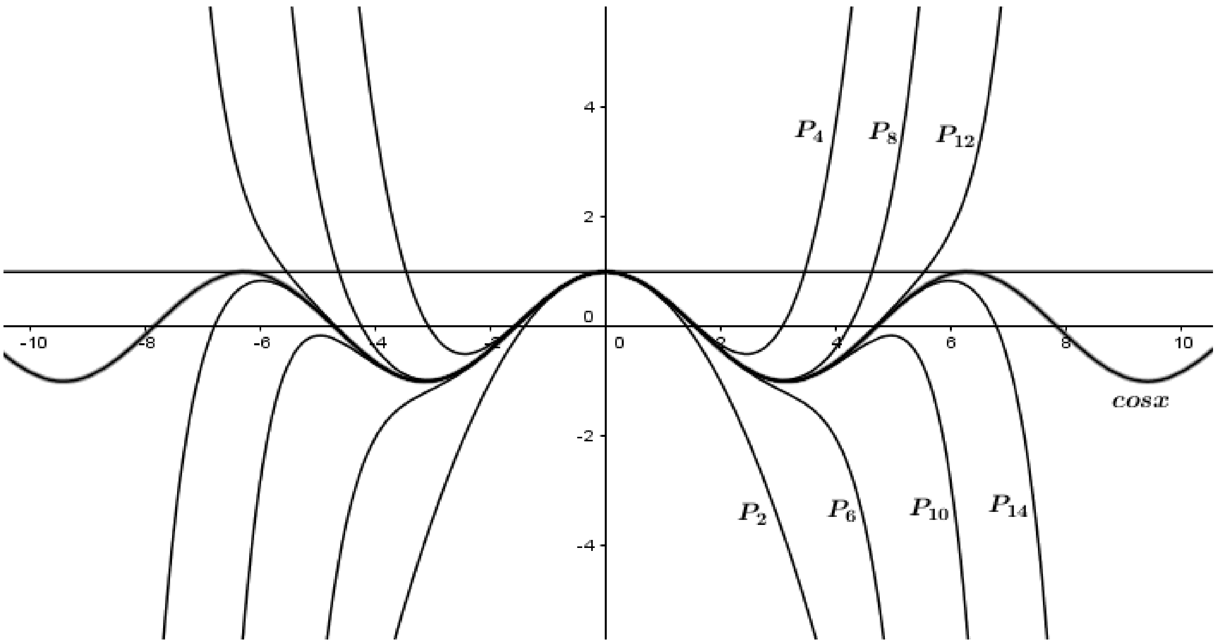

Figura 6.4.2

2) Três funções racionais

$\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}$ e $\frac{1}{1+x^2}$

Do método da chave, temos:

a) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$, quando $|x| < 1$ converge e é a série de Taylor da função $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^4 + \cdots$ é a série de Taylor da função $f\colon]1,1[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{1+x}$. A série converge para $|x| < 1$.

c) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$ é a série de Taylor da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. A série converge para $|x| < 1$, apesar de a função ser definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em seus desenvolvimentos finitos, temos:

a) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$.

b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}.x^{n+1}}{1+x}, x \neq -1$.

c) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}.x^{2n+2}}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

Nas expressões acima, a última parcela é o resto da fórmula de Taylor. Sendo r, s *e* t, respectivamente, essas últimas parcelas, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(x)}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(x)}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{t(x)}{x^{2n}} = 0.$$

As páginas seguintes mostram gráficos de polinômios de Taylor para as três funções racionais em torno de $x_0 = 0$.

a) $\frac{1}{x-1}$

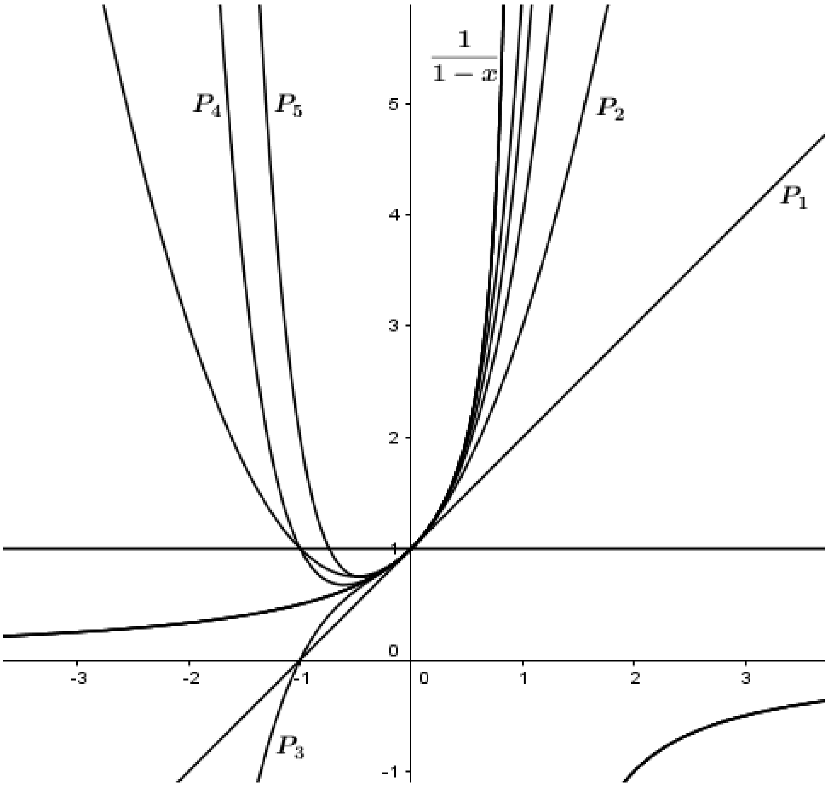

Figura 6.4.3

b) $\frac{1}{x+1}$

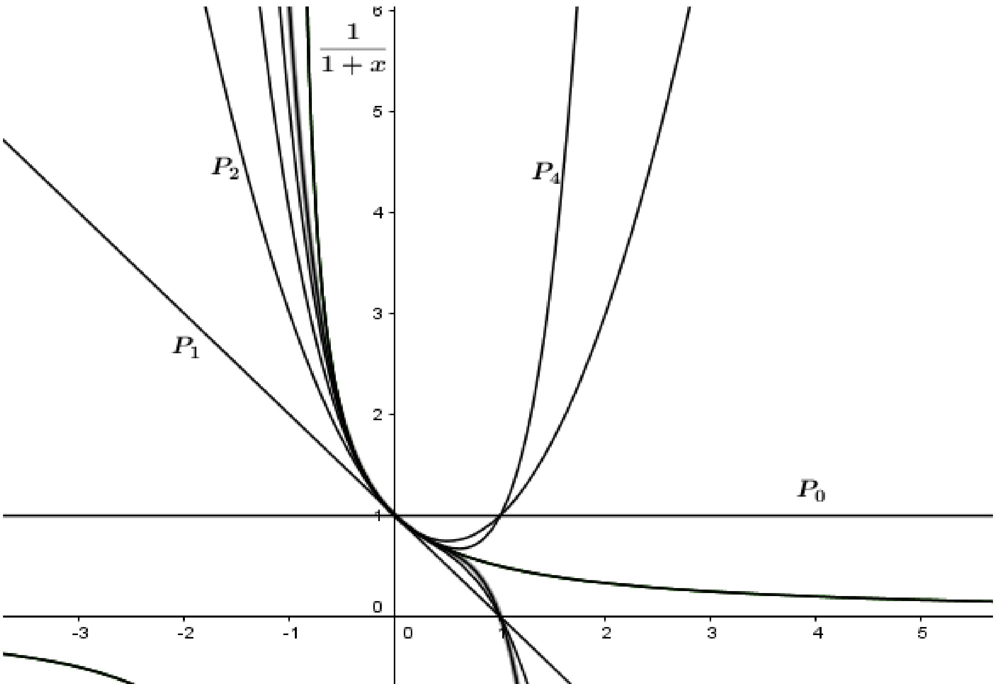

Figura 6.4.4

c) $\frac{1}{1+x^2}$

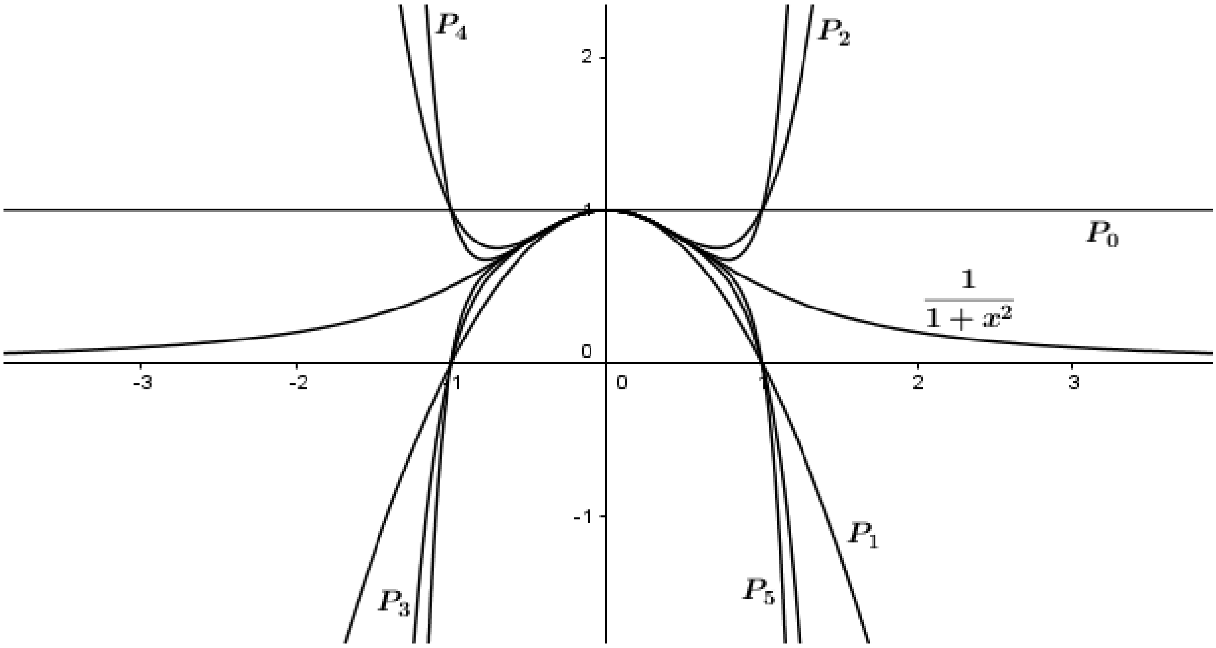

Figura 6.4.5

3) A função exponencial

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, é de classe C^{∞}. Derivando termo a termo temos $f'(x) = f(x)$. Como $f(0) = 1$, segue que $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ é a série de Taylor da função exponencial em torno do ponto $x_0 = 0$.

Gráficos de polinômios de Taylor para a função exponencial em torno de $x_0 = 0$:

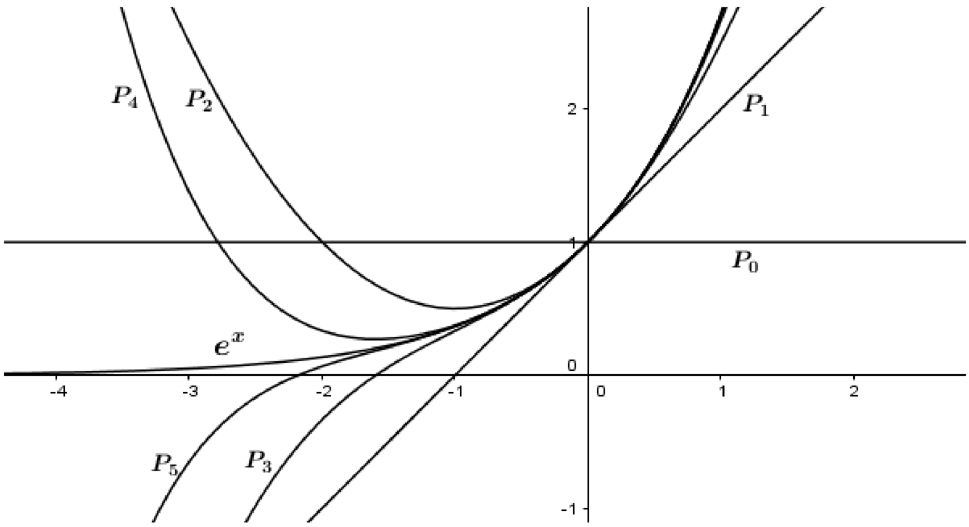

Figura 6.4.6

4) A função logaritmo

Como não existe $\ln x$ para $x = 0,$ vamos tratar da função $\ln(x+1)$, definida para todo $x > -1$. Sabemos que $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$. Integrando termo a termo a série de Taylor de $\frac{1}{1+x}$, obtemos:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{x^n}{n}$, convergente no intervalo $]-1, 1[$, pois 1 é seu raio de convergência. Pelo teorema de Leibniz, esta série converge para $x = 1$ e diverge para $x = -1$. Assim sendo, a série converge no intervalo $]-1, 1]$.

Esse resultado nos permite escrever o $\ln 2$ como soma de uma série alternada e apresentá-la aos alunos do 1º ano do ensino médio.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

Gráficos de polinômios de Taylor para a função logaritmo em torno de $x_0 = 0$:

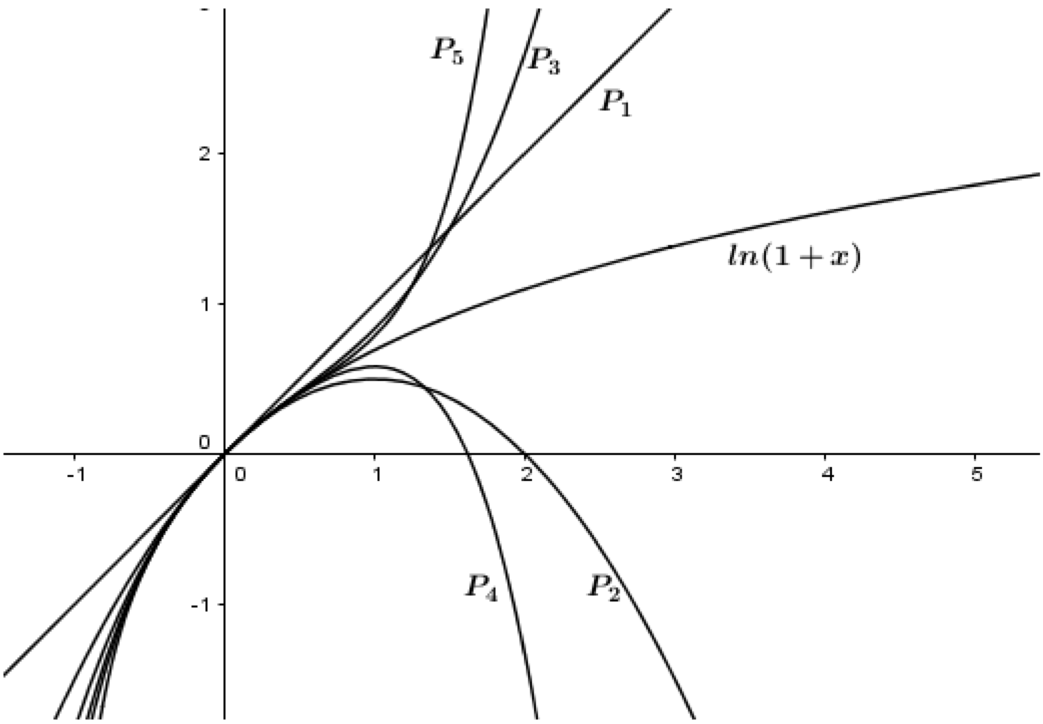

Figura 6.4.7

Observação

As séries de potências podem ser utilizadas para estimar valores de integrais definidas para funções que não possuem primitivas, integrando termo a termo um polinômio de Taylor. Pode ser obtida em: Larson, R., Hostetler, R. P. e Edwards, B. H (2006, v.2, p. 92).

7. RESULTADOS

Introdução

Vamos investigar neste capítulo, se a realização de operações entre séries de potências como se fossem polinômios, permite a obtenção de seus respectivos termos gerais. O exemplo final será uma demonstração por extenso para a identidade $e^x.e^y = e^{x+y}$.

7.1 Operações com Séries de Potências

Se duas séries forem convergentes, então também serão a soma e a diferença entre elas. : Stewart (2006, v. 2, p. 717)

Vamos apresentar situações em que séries serão multiplicadas ou divididas como polinômios, usando o Teorema 5.6. Para não tornar cansativo, as operações serão efetuadas apenas com os primeiros termos de cada série.

7.1.1 $\boldsymbol{sen^2x}$

Já sabemos que $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ Temos então:

$$sen^2x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right).\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{3!3!} - \frac{x^8}{3!5!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{3!5!} + \frac{x^{10}}{5!5!} - \cdots$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \cdots$$

Avançando no desenvolvimento podemos verificar que $sen^2x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \frac{2^7x^8}{8!} + \cdots$

Já neste primeiro exemplo, a dedução de um termo geral não nos parece tão evidente.

Observação

Usando a identidade $sen^2x = \frac{1-cos2x}{2}$, pode-se obter o seguinte resultado:

$sen^2x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \frac{2^7x^8}{8!} + \cdots$: Larson, R., Hostetler, R. P. e Edwards (2006, v.2, p. 92).

Para a construção gráfica:

$f(x) = sen^2x$

$P_1 = x^2$

$P_2 = x^2 - \frac{x^4}{3}$

$P_2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}$

$\vdots$

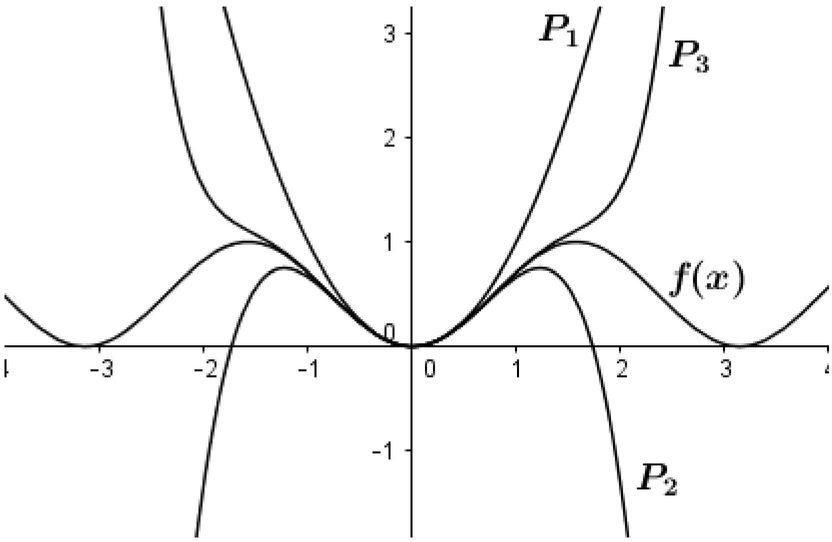

Figura 7.1.1

7.1.2 $e^x senx$

Temos $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ e $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$, então:

$$e^x . senx = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) . \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{2!3!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{3!3!} + \frac{x^8}{3!5!} - \cdots$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \cdots$$

Para a construção gráfica:

$f(x) = e^x . senx$

$P_1 = x$

$P_2 = x + x^2$

$P_3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$

$\vdots$

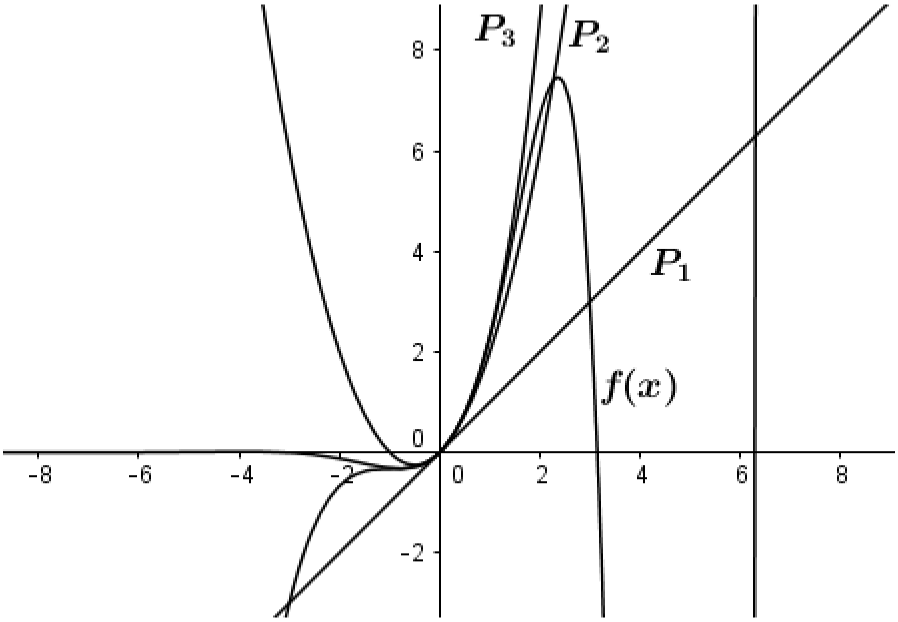

Figura 7.1.2

7.1.3 $tgx = \frac{senx}{cosx}$

Dados $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ e $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$, podemos ter

$$tgx = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

$$\begin{array}{l|l}
\boldsymbol{x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots} & \boldsymbol{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cdots} \\ \cline{2-2}
\underline{\boldsymbol{-x + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^5}{24} - \cdots}} & \boldsymbol{x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \cdots} \\
\qquad \boldsymbol{\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} + \cdots} & \\
\qquad \underline{\boldsymbol{-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{6} - \dfrac{x^7}{72} + \cdots}} & \\
\qquad\qquad \boldsymbol{\dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{x^7}{72} + \cdots} & \\
\qquad\qquad \underline{\boldsymbol{-\dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{2x^7}{30} - \cdots}} & \\
\qquad\qquad\qquad \vdots &
\end{array}$$

Figura 7.1.3.a

Temos assim, $tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$

Para a construção gráfica:

$f(x) = tgx$

$P_1 = x$

$P_2 = x + \frac{x^3}{3}$

$P_3 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

$\vdots$

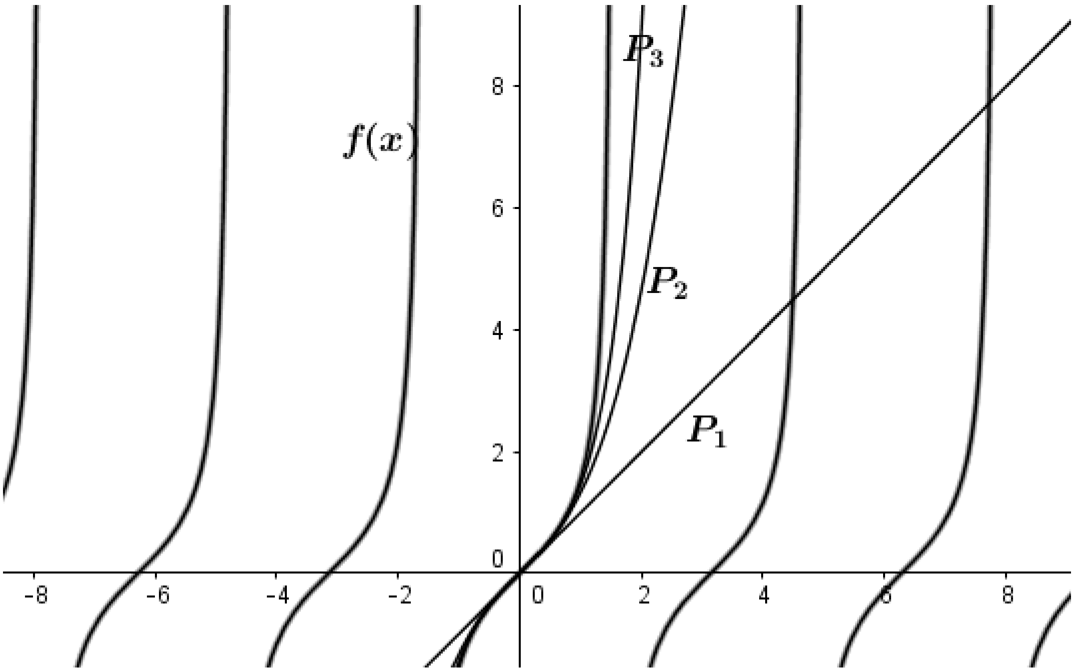

Figura 7.1.3.b

7.1.4 $f(x) = e^{2x}$

Sendo dado $e^x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$, temos:

$$e^x . e^x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) . \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^5}{2!3!} + \cdots +$$

$$+ \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{2!3!} + \frac{x^6}{3!3!} + \cdots$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \cdots$$

Esse resultado pode ser expresso por $1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots$, idêntico ao desenvolvimento de $\boldsymbol{e^{2x}}$.

Para a construção gráfica:

$f(x) = e^{2x}$

$P_1 = 1$

$P_2 = 1 + 2x$

$P_3 = 1 + 2x + 2x^2$

$\vdots$

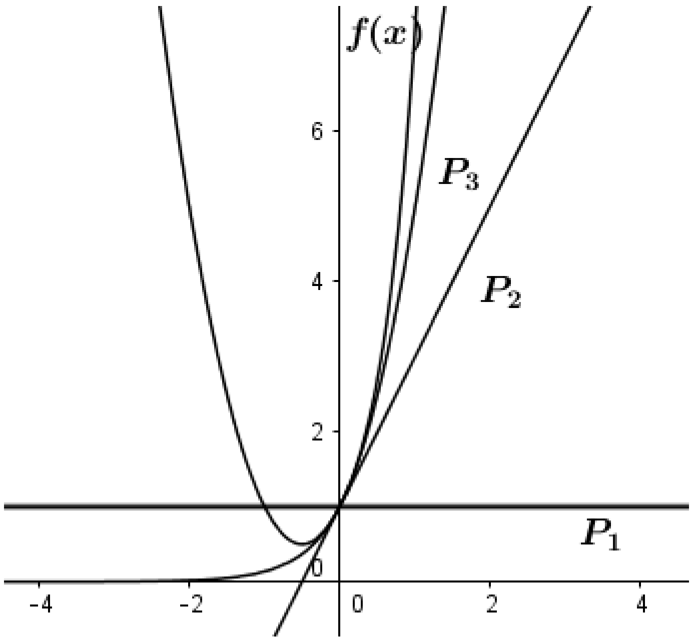

Figura 7.1.4

7.1.5 $sen^2x + cos^2x = 1$

Do resultado 7.1.1 sabemos que $sen^2x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \cdots$, podemos então, obter $cos^2x = 1 - sen^2x$.

Temos assim:

$$cos^2x = 1 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \cdots\right) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + \cdots$$

Fazendo $cos^2x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right).\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$, temos:

$$cos^2x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2!2!} - \frac{x^6}{2!4!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{2!4!} + \frac{x^8}{4!4!} - \cdots$$

$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + \cdots$

Exatamente como esperávamos.

O resultado também pode ser obtido por $cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \cdots$

Para a construção gráfica:

$f(x) = cos^2 x$

$P_1 = 1$

$P_2 = 1 - x^2$

$P_3 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3}$

$P_4 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45}$

$\vdots$

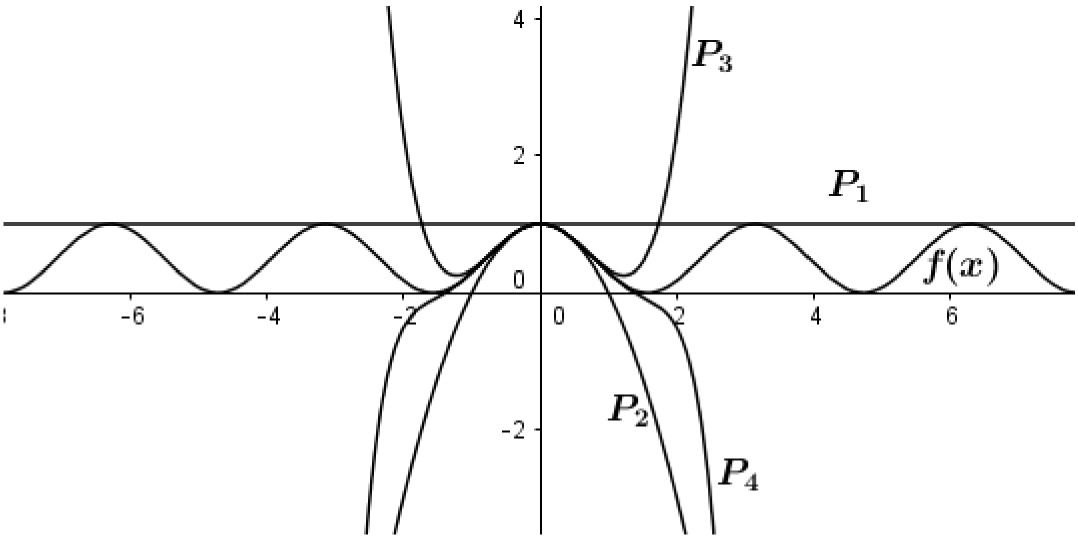

Figura 7.1.5

Claramente operar com séries de potências de forma descritiva, pode ser muito útil para auxiliar na construção de seus gráficos, porém, se o intento for a obtenção de termos gerais, essa estratégia pode se tornar excessivamente trabalhosa.

7.2 Duas identidades

Nesta última seção, vamos explorar dois exemplos, ainda operando com os termos das séries, sendo no último, apresentado com a notação mais apropriada e de maneira formal.

7.2.1 $\boldsymbol{sen(x+y) = senx.cosy + seny.cosx}$

Temos $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ e $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

Sabemos que $sen(x+y) = senx.cosy + seny.cosx$. Vamos desenvolver inicialmente $sen(x+y)$ e posteriormente $senx.cosy + seny.cosx$.

$$sen(x+y) = x + y - \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^5}{5!} - \cdots$$

$$= x + y - \frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{3!} + \frac{x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4y^5}{5!} - \cdots$$

$$= x + y - \frac{xy^2}{2!} - \frac{x^2y}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^4y}{4!} + \frac{x^3y^2}{2!\,3!} + \frac{x^2y^3}{2!\,3!} + \frac{xy^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots$$

$$senx.cosy = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right).\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= x - \frac{xy^2}{2!} + \frac{xy^4}{4!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3y^2}{2!3!} - \frac{x^3y^4}{3!4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5y^2}{2!5!} + \frac{x^5y^4}{4!5!} - \cdots$$

$$\boldsymbol{s}eny.cosx = \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right).\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= y - \frac{x^2y}{2!} + \frac{x^4y}{4!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{x^2y^3}{2!3!} - \frac{x^4y^3}{3!4!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{x^2y^5}{2!5!} + \frac{x^4y^5}{4!5!} - \cdots$$

Assim, $senx.cosy + seny.cosx =$

$$= x - \frac{xy^2}{2!} + \frac{xy^4}{4!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3y^2}{2!3!} - \frac{x^3y^4}{3!4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5y^2}{2!5!} + \frac{x^5y^4}{4!5!} - \cdots + y - \frac{x^2y}{2!} + \frac{x^4y}{4!} - \frac{y^3}{3!} + + \frac{x^2y^3}{2!3!} - \frac{x^4y^3}{3!4!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{x^2y^5}{2!5!} + \frac{x^4y^5}{4!5!} - \cdots$$

$$= x + y - \frac{xy^2}{2!} - \frac{x^2y}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^4y}{4!} + \frac{x^3y^2}{2!\,3!} + \frac{x^2y^3}{2!\,3!} + \frac{xy^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots$$

Verificamos então que $sen(x+y) = senx.cosy + seny.cosx$.

7.2.2 $\boldsymbol{e^x.e^y = e^{x+y}}$

Sejam dadas as funções $f = e^x$ e $g = e^y$. Vamos analisar $f.g = e^x.e^y$ para verificar a validade de $e^x.e^y = e^{x+y}$.

$$e^x.e^y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right).\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + x + xy + \frac{xy^2}{2!} + \frac{xy^3}{3!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{x^2y^2}{2!\,2!} + \frac{x^2y^3}{2!\,3!} + \cdots$$

$$+ \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3y}{3!} + \frac{x^3y^2}{3!\,2!} + \frac{x^3y^3}{3!\,3!} + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + xy + \frac{xy^2}{2!} + \frac{xy^3}{3!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{x^2y^2}{2!\,2!} + \frac{x^2y^3}{2!\,3!} +$$
$$+ \frac{x^3y}{3!} + \frac{x^3y^2}{3!\,2!} + \frac{x^3y^3}{3!\,3!} + \cdots$$

Agora vejamos o desenvolvimento de e^{x+y}.

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + x + y + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + xy + \frac{xy^2}{2!} + \frac{xy^3}{3!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{x^2y^2}{2!\,2!} + \frac{x^3y}{3!} + \cdots$$

É possível observar que os dois desenvolvimentos coincidem e os elementos seguintes vão aparecendo na medida em se avança para os termos subsequentes.

Para finalizar esse estudo, faremos uma apresentação formal desse último resultado.

Distribuímos

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m!\ n!}.$$

Agrupamos os termos com mesmo grau

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m!\ n!}$$

Multiplicamos “em cima” e “em baixo” por $k!$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} \binom{m+n}{m} \frac{x^m y^n}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m}.$$

Aplicamos o binômio de Newton:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = e^{x+y}.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluímos esse estudo sugerindo aos leitores e principalmente aos professores de ensino médio, um aprofundamento nos conteúdos apresentados nos quatro primeiros capítulos, para proporcionar aos alunos desse nível, uma formação mais sólida, preparando-os para o nível superior. Para esse aprofundamento, temos à disposição a coleção "*Fundamentos da Matemática Elementar"* da editora Atual, que em seus 11 volumes apresenta todo o conteúdo do ensino médio, de forma didática e com o rigor necessário; a coleção *"A Matemática do Ensino Médio"* e a coleção *PROFMAT*, da SBM, sendo esta última, de maior importância para uma formação acadêmica desejável para todos os interessados em conhecer a Matemática com mais propriedade.

REFERÊNCIAS

- DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações.* 5. ed. v.1. São Paulo: Ática, 2011.

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

- EVES, H*. Introdução à História da Matemática*. Unicamp, 2004

- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo.* 5. ed. v.1, v.2, v.4. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

- HOLANDA, A. B. *Mini Dicionário da Língua Portuguesa.* 8. ed. São Paulo: Positivo, 2011.

- IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar*. 9. ed. v.1, v.2, v.6, v.7, v.8. São Paulo: Atual, 2013.

- LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. *Cálculo.* 8. ed. v.1, v.2. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. 10. ed. v.1, v.2. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

- LIMA, E. L. *Análise Real.* 11. ed. v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

- LIMA, E. L*. Números e Funções Reais*. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

- LOPES, V. C. *Guia de Cálculo.* (Versão Preliminar de 2013, distribuição pessoal).

- NETO, A. C. M. *Fundamentos do Cálculo*. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

- OLIVEIRA, K.; CORCHO, A. J. *Iniciação à Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 2010.

- STEWART, J. *Cálculo.* 5. ed. v.1, v.2. São Paulo: Thomson, 2006.

- THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R*. Cálculo*. 11. ed. v.1, v.2. São Paulo: Pearson education, 2008.

- USISKIN, Z. *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis: a*s ideias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

- OLIVEIRA, O.R.B. *O teorema fundamental da álgebra via as quatro operações básicas e indução.* 2014. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/tfa-4operacoes-inducao.pdf> Acesso em: 07 novembro 2016.

- MONTEIRO, M. S. Polinômios de Taylor, funções de uma variável real. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=4elA1yVc5oo&t=17s> Acesso em: 06 agosto 2016.