Universidade Federal do ABC

PROFMAT

LUIZ GUILHERME FRANCO PIRES DE CAMPOS

OTIMIZAÇÃO LINEAR

Santo André, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

LUIZ GUILHERME FRANCO PIRES DE CAMPOS

OTIMIZAÇÃO LINEAR

Orientador: Prof. Dr. Jerônimo Cordoni Pellegrini

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO LUIZ GUILHERME FRANCO PIRES DE CAMPOS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JERÔNIMO CORDONI PELLEGRINI.

SANTO ANDRÉ, 2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Campos, Luiz Guilherme Franco Pires de
Otimização Linear / Luiz Guilherme Franco Pires de Campos. — 2016.

138 fls. : il.

Orientador: Jerônimo Cordoni Pellegrini

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2016.

1. Otimização Linear. 2. Método Simplex. 3. Programação Inteira. I. Pellegrini, Jerônimo Cordoni. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2016. III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Luiz Guilherme Franco Pires de Campos, realizada em 5 de dezembro de 2016:

Prof.(a) Dr.(a) **Jerônimo Cordoni Pellegrini** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Maurício Firmino Silva Lima** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Paola Andrea Gaviria Kassama** (UNIFESP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (UNIFESP) – Membro Suplente

Universidade Federal do ABC

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 07 **de** Fevereiro **de 20**17.

Assinatura do autor: ______________________

Assinatura do orientador: ______________________

Dedico este trabalho a minha esposa Patrícia Hitomi Shibuya Pires de Campos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais Benedito Luiz Pires de Campos, Sofia Helena Franco Pires de Campos e ao meu irmão Luiz Gustavo Franco Pires de Campos, pelo constante incentivo.

Ao Prof. Dr. Jerônimo Cordoni Pellegrini, por suas aulas e também pela sua excelência na função de orientador.

Aos membros da banca examinadora, agradeço pela participação neste momento tão importante em minha formação.

Ao Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi coordenador do Curso PROFMAT - UFABC, por suas aulas e pela dedicação e qualidade que traz ao curso.

Aos Professores Dra. Ana Carolina Boero, Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca, Dr. Daniel Miranda Machado, Dr. Jeferson Cassiano, Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos e Dr. Maurício Firmino Silva Lima, por todas ótimas aulas dadas durante o curso.

A todos os meus colegas do PROFMAT, agradeço por todos os bons momentos vividos durante o nosso curso.

"Forty-two, said Deep Thought, with infinite majesty and calm."

(Douglas Adams, *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns métodos para a resolução de problemas de programação linear. Iremos definir este tipo de problema e mostrar alguns casos onde pode-se obter uma solução ótima com a ajuda de gráficos.
Outra preocupação é mostrar que existem várias aplicações para otimização linear, por esse motivo alguns problemas clássicos serão discutidos e modelados.
Para uma melhor compreensão sobre restrições lineares e soluções viáveis, iremos definir conjunto convexo, poliedro e politopo.
Algumas situações especiais que podem surgir em otimização serão discutidas, especificamente os casos de problemas inviáveis, ilimitados e degenerados.
O Método Simplex, que percorre os vértices do poliedro determinado pelas restrições lineares, será apresentado juntamente com o método das duas fases e alguns exemplos.
Para resolver problemas de programação linear inteira, que são aqueles onde restringimos as variáveis de decisão a valores inteiros, o método Branch-and-Bound e Planos de Corte serão apresentados. O caso de matriz totalmente unimodular também será discutido.
Finalizando, uma sequência de problemas de programação linear será sugerida, onde professor e aluno do ensino médio terão a oportunidade de discutir, modelar e encontrar a solução ótima destes problemas contando com auxílio de recursos computacionais se necessário.

Palavras-chave: Otimização Linear, Método Simplex, Programação Inteira

ABSTRACT

The aim of this work is to present some methods for solving linear programming problems. We will define this kind of problem and show some cases where you can obtain an optimal solution with the help of graphics.
Another concern is to show that there are several applications for linear optimization, therefore some classic problems will be discussed and modeled.
For a better understanding about linear constraints and feasible solutions, we will define convex set, polyhedron and polytope.
Some special situations that may arise in optimization will be discussed, specifically the cases of unfeasible, unlimited and degenerate problems.
The Simplex method, which runs through the vertices of the polyhedron determined by linear constraints, will be presented along with the method of the two phases and some examples.
To solve integer programming problems, which are those that restrict the decision variables to integer values, the Branch-and-Bound and Cutting-Plane method will be presented. The case of totally unimodular matrix will also be discussed.
Finally, a sequence of linear programming problems is suggested, where teacher and high school student will have the opportunity to discuss, model and find the optimal solution of these problems with help of computer resources if necessary.

Keywords: Linear Optimization, Simplex Method, Integer Programming

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CONTEÚDO

1

INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO LINEAR

Um problema de programação linear consiste em uma função linear, chamada de função objetivo, e um conjunto de restrições também lineares que podem se apresentar tanto como igualdades ou desigualdades. Uma vez definidas a função objetivo a ser maximizada ou minimizada e as restrições do problema, procuramos os valores para as variáveis que otimizem a função objetivo.
Neste capítulo, exemplificaremos e definiremos o que é um problema de programação linear (o qual chamaremos de PPL) e estudaremos alguns casos com duas variáveis, o que permite a visualização de sua resolução.

PRIMEIROS EXEMPLOS

Nestes exemplos estudaremos a estrutura de um PPL através da modelagem de um problema e também pela identificação de função objetivo, restrições do problema e restrições de não negatividade.

Exemplo 1.1. Suponha que uma empresa fabrique dois produtos P_1 e P_2, utilizando duas linhas de montagem L_1 e L_2.
Cada unidade de P_1 é vendida por R$ 18,00 e cada unidade de P_2 é vendida por R$ 30,00.
Durante um turno diário a linha de montagem um (L_1) tem capacidade de 11 horas de funcionamento e a linha de montagem dois (L_2) tem 10 horas de capacidade de funcionamento.
Sabe-se ainda que cada unidade de P_1 exige 6 minutos de processamento em cada uma das linhas de montagem, enquanto as exigências de P_2 são de 11 minutos em L_1 e 5 minutos em L_2

Por fim, existe uma exigência de que sejam fabricados pelo menos 80 produtos por turno.

O primeiro passo na formulação de um problema de programação linear é a definição das variáveis de decisão, neste exemplo, podemos tomar x_1 como a quantidade de unidades de P_1 a serem produzidas e x_2 como a quantidade de unidades de P_2 a serem produzidas.

Agora que temos as variáveis de decisão definidas, montaremos a função objetivo visando uma receita[1] máxima. Uma vez que o preço de venda de P_1 é de R$ 18,00 e a quantidade de unidades de P_1 está definida como x_1, a receita obtida pelo produto P_1 é dada por $18x_1$, analogamente a receita obtida pelo produto P_2 é dada por $30x_2$. Levando em consideração que a receita total é dada pela soma das receitas, obtemos a função objetivo para a receita:

$$\max \quad z = 18x_1 + 30x_2$$

As restrições do problema são de dois tipos, restrições de capacidade e restrições de demanda.

As restrições do primeiro tipo nos dizem que a capacidade utilizada não pode ultrapassar a capacidade disponível, enquanto as do segundo tipo estabelecem uma demanda mínima a ser obtida.

Considere a linha de montagem um, com $11 \cdot 60 = 660$ minutos de capacidade disponível. Cada unidade de P_1 e P_2 utilizam, respectivamente 6 e 11 minutos de sua capacidade, ou seja, o tempo de processamento por unidade de P_1 em L_1 é $6x_1$ enquanto o tempo de processamento por unidade de P_2 em L_1 é dado por $11x_2$. A restrição de capacidade da linha de montagem um é dada por:

$$6x_1 + 11x_2 \leqslant 660$$

Da mesma forma podemos obter a restrição de capacidade da linha de montagem dois, que terá a seguinte forma:

$$6x_1 + 5x_2 \leqslant 600$$

A restrição de demanda do problema está na exigência de que pelo menos 80 produtos sejam produzidos por turno, nesse caso ela é representada por:

$$x_1 + x_2 \geqslant 80$$

1 Receita = Preço × Quantidade

O problema modelado terá então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 18x_1 + 30x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 6x_1 + 11x_2 \leqslant 660 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leqslant 600 \\ & x_1 + x_2 \geqslant 80 \\ & x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Observe que a última linha restringe os valores das variáveis a números não negativos, essas restrições são significativas na maioria das aplicações de programação linear e são chamadas de restrições de não negatividade.

Exemplo 1.2. Considere o seguinte PPL, cujas variáveis de decisão são x_1 e x_2.

$$\max \quad z = 3x_1 + 6x_2 \tag{1.1}$$

$$\text{sujeito a} \quad x_1 + x_2 \leqslant 5 \tag{1.2}$$

$$x_1 \leqslant 4 \tag{1.3}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Podemos identificar por (1.1) que se trata de um problema de maximização, com função objetivo definida por $z = 3x_1 + 6x_2$.
As restrições do problema estão representadas pelas desigualdades (1.2) e (1.3), já as restrições de não negatividade são representadas por (1.4).

Exemplo 1.3. Neste PPL temos duas variáveis de decisão também definidas como x_1 e x_2.

$$\min \quad z = 12x_1 + 5x_2 \tag{1.5}$$

$$\text{sujeito a} \quad 7x_1 + x_2 \geqslant 28 \tag{1.6}$$

$$2x_1 + x_2 \geqslant 18 \tag{1.7}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{1.8}$$

Por (1.5) identificamos que se trata de um problema de minimização cuja função objetivo é dada por $z = 12x_1 + 5x_2$.
Temos ainda as restrições do problema em (1.6) e (1.7) e as restrições de não negatividade em (1.8).

PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Definição 1.1. Um problema de programação linear é um problema de otimização com função objetivo linear e cuja solução pertence a um conjunto de soluções de um sistema de equações e inequações lineares.

Forma canônica

Um PPL está na sua forma canônica se suas variáveis forem todas não negativas e, se for um problema de minimização as restrições devem ser todas do tipo $\geqslant$. Já no caso do problema ser de maximização as restrições devem ser todas do tipo $\leqslant$.
Para estudar os componentes de um PPL iremos representar um problema de minimização na forma canônica.

$$\begin{aligned}
& & \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& & \vdots \\
& & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& & x_1, x_2 \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Neste PPL $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ representa a *unção objetivo* a ser minimizada, onde $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são os chamados *coeficientes de custo* e $x_1, x_2, \cdots, x_n$ as *variáveis de decisão*.
A inequação $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$ representa a i-ésima restrição, onde os coeficientes a_{ij} são chamados de coeficientes tecnológicos e os termos $b_i, \quad i = \{1, 2, \cdots, m\}$ representam as necessidades mínimas a serem satisfeitas. Por fim temos as restrições de não negatividade representadas por $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$.
Uma *solução viável* é um vetor $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz todas as restrições e o conjunto de todos estes vetores determinam uma região viável.
Eventualmente, uma forma mais conveniente de representar um PPL é na notação matricial, como vemos a seguir:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

E o PPL de minimização pode ser representado por:

$$\begin{aligned} & \min c^t x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Observação. *Se u e v são vetores, então $u \geqslant v$ significará que cada componente de u é maior do que ou igual ao correspondente componente de v.*

Um problema de maximização na forma canônica é representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ & x_1, x_2 \cdots, x_n \geqslant 0 \end{aligned}$$

E a representação matricial:

$$\begin{aligned} & \max c^t x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Nem sempre um PPL está na forma canônica. Pode ocorrer que em um mesmo problema haja restrições do tipo $\leqslant$, do tipo $\geqslant$ e igualdades.

Exemplo 1.4. Vejamos o seguinte PPL:

$$
\begin{aligned}
& \max z = x_1 + x_2 + x_3 & \\
\text{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 10 & (1.9)\\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 20 & (1.10)\\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 & (1.11)\\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 &
\end{aligned}
$$

Iremos transformar este PPL em um problema de minimização na forma canônica, para isso devemos manipular a função objetivo e as restrições (1.9) (1.10) e (1.11) para que todas sejam da forma $\geqslant$.

- Função objetivo
  $\max z = x_1 + x_2 + x_3$ equivale à $\min -z = -x_1 - x_2 - x_3$
- Restrição (1.9)
  Podemos transformar $2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 10$ em $-2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant -10$
- Restrição (1.10)
  A restrição (1.10) não necessita de alterações, visto que ja é uma restrição da forma $\geqslant$
- Restrição (1.11)
  A restrição $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$, por ser uma igualdade, pode ser transformada em duas desigualdades:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 60 \tag{1.12}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 60 \tag{1.13}$$

  Manipulando as restrições (1.12) e (1.13), temos:

- Restrição (1.12)
  A restrição (1.12) não necessita de alterações, visto que ja é uma restrição da forma $\geqslant$
- Restrição (1.13)
  Podemos transformar $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 60$ em $-2x_1 - x_2 - 3x_3 \geqslant -60$

Com esta mudanças podemos reescrever o PPL como um problema de minimização na forma canônica:

$$
\begin{aligned}
& \min -z = -x_1 - x_2 - x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & -x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 10 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 20 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 60 \\
& -2x_1 - x_2 - 3x_3 \geqslant -60 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Conforme vimos no exemplo 1.4 para transformar um PPL qualquer para a forma canônica utilizamos os seguintes artifícios:

$$
\begin{aligned}
\max z = c^t x \quad & \Leftrightarrow \quad \min -z = -c^t x \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad & \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leqslant -b_i \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \\ \text{e} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \end{cases}
\end{aligned}
$$

Forma padrão

Conforme veremos no capítulo 4, para utilizarmos o método *Simplex* o PPL deve estar em sua forma padrão, que em notação matricial é representado assim:

Problema de Minimização	Problema de Maximização
$\min c^t x$ sujeito a $\quad Ax = b$ $x \geqslant 0$	$\max c^t x$ sujeito a $\quad Ax = b$ $x \geqslant 0$

Tabela 1: Forma padrão

Um PPL está na forma padrão se suas variáveis forem todas não negativas e suas restrições forem igualdades.

Exemplo 1.5. Vejamos um PPL e como manipulá-lo para transformá-lo em sua forma padrão.

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeito a} \qquad -x_1 + 2x_2 &\leqslant 4 \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 6 \\
x_1 + 3x_2 &\leqslant 9 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Para cada restrição do tipo $\leqslant$ adicionaremos uma variável $x_i \geqslant 0$, chamada de variável de folga, a cada uma destas restrições de tal forma que as inequações são tranformadas em equações.
Ficamos, então com o seguinte PPL:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeito a} \qquad -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 6 \\
x_1 + 3x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Se fosse o caso de termos restrições do tipo $\geqslant$, subtrairíamos uma variável $x_i \geqslant 0$ a qual chamamos de variável de excesso, conforme veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.6. Seja o seguinte PPL:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 10x_1 + 12x_2 \\
\text{sujeito a} \qquad x_1 + 2x_2 &\leqslant 20 \\
x_1 + x_2 &\geqslant 10 \\
5x_1 + 6x_2 &\geqslant 54 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Transformando o PPL para a sua forma padrão temos:

$$
\begin{aligned}
\min z = 10x_1 + 12x_2 & \\
\text{sujeito a} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 20 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 10 \\
5x_1 + 6x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 54 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Onde x_3 é uma variável de folga e x_4 e x_5 são variáveis de excesso.

Conforme vimos nos exemplos 1.5 e 1.6, para transformar um PPL em sua forma padrão, podemos utilizar os seguintes artifícios:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \\
&\text{com } x_{n+i} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO GEOMÉTRICA

A solução geométrica, apesar de suas limitações, ajuda a compreender melhor a resolução de um PPL.
Nesta seção, traremos alguns exemplo de PPL com duas variáveis de decisão, e veremos que as restrições do problema podem ser representadas em um plano cartesiano, além disso, a função objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ cujo gradiente é o vetor $c = (c_1, c_2)$ normal à função objetivo, permitirá achar, quando houver, o valor ótimo da função pois $z = c_1x_1 + c_2x_2$ aumenta ao ser deslocada no sentido de c, o que permite resolver problemas de maximização e diminui quando é deslocada no sentido contrário, ou seja, para resolver problemas de minimização deslocamos $z = c_1x_1 + c_2x_2$ no sentido de $-c$.
Com relação ao tipo de PPL, veremos quatro casos possíveis:

- Solução ótima única
- Múltiplas soluções ótimas
- Solução ilimitada
- Região viável vazia

Solução ótima única

Quando a solução ótima é única ela ocorre em um vértice da região viável. Voltemos ao exemplo 1.2:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ & x_1 \leqslant 4 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

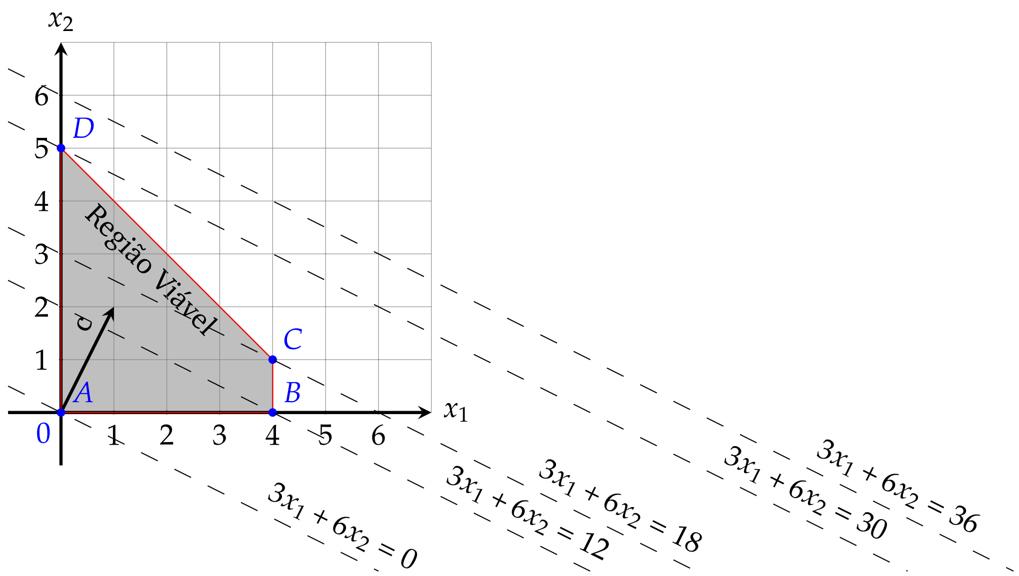

Figura 1: Maximização com solução única

Neste exemplo a região viável é representada pelo polígono convexo ABCD, onde cada um dos vértices é obtido pela intersecção das retas que determinam os semiplanos:

$$\text{A}=\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{B}=\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 4 \end{cases} \qquad \text{C}=\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \qquad \text{D}=\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Tabela 2: Vértices obtidos pelas intersecções das retas determinadas pelas restrições do PPL.

Os segmentos de reta referem-se às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} x_2 \geqslant 0 &\Rightarrow AB \\ x_1 \leqslant 4 &\Rightarrow BC \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 &\Rightarrow CD \\ x_1 \geqslant 0 &\Rightarrow DA \end{aligned}$$

Por ser um PPL de maximização o valor de z aumenta conforme procuramos pontos da região viável no sentido do vetor $c = (1,2)$ normal à função objetivo.
Observe no gráfico que a função objetivo $z = 3x_1 + 6x_2$, representada pelas linhas pontilhadas perpendiculares ao vetor $c = (1,2)$ normal à função objetivo, intercepta os vértices A, B, C e D aumentando nessa ordem.
Obtemos uma série de valores crescentes da função objetivo $z = 3x_1 + 6x_2$.

$$\begin{aligned} z_A(0,0) &= 3.0 + 6.0 = 0 \\ z_B(4,0) &= 3.4 + 6.0 = 12 \\ z_C(4,1) &= 3.4 + 6.1 = 18 \\ z_D(0,5) &= 3.0 + 6.5 = 30 \end{aligned}$$

Concluímos que o valor máximo da função objetivo é $z_D = 30$, pois se deslocarmos mais a função objetivo no sentido do vetor c sua intersecção com a região viável é o conjunto vazio.

Agora, vejamos o exemplo 1.3:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & z = 12x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 7x_1 + x_2 \geqslant 28 \\ & 2x_1 + x_2 \geqslant 18 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Neste exemplo, por ser um PPL de minimização, temos que o valor de z diminui conforme buscamos pontos da região no sentido contrário ao vetor c normal à função objetivo.
Na figura 2, as linhas pontilhadas que representam a função objetivo interceptam os vértices A, C e B, decrescendo nessa ordem e obtendo os seguintes valores:

$$\begin{aligned} z_A(0,28) &= 12.0 + 5.28 = 140 \\ z_C(9,0) &= 12.9 + 5.0 = 108 \\ z_B(2,14) &= 12.2 + 5.14 = 94 \end{aligned}$$

O valor mínimo é obtido quando a função objetivo intersecta o vértice B, temos portanto, $z_B = 94$ é o valor mínimo da função objetivo.

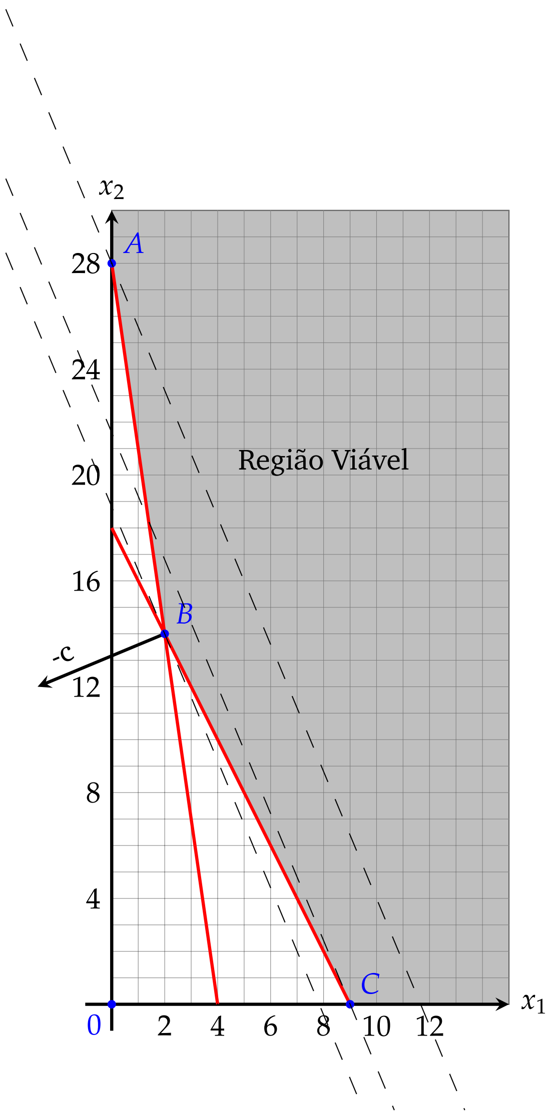

Figura 2: Minimização com solução única

Múltiplas soluções ótimas

Em alguns casos o PPL pode ter mais do que uma solução, conforme veremos no exemplo a seguir:

Exemplo 1.7. Este é um caso de um PPL com múltiplas soluções ótimas.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 7x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & 3x_1 + 5x_2 \leqslant 90 \\
& 9x_1 + 2x_2 \leqslant 108 \\
& 7x_1 + 5x_2 \leqslant 105 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Conforme podemos observar na figura 3, os dois vértices C e D do polígono que determina a região viável são soluções ótimas do PPL, assim como qualquer ponto do segmento CD.

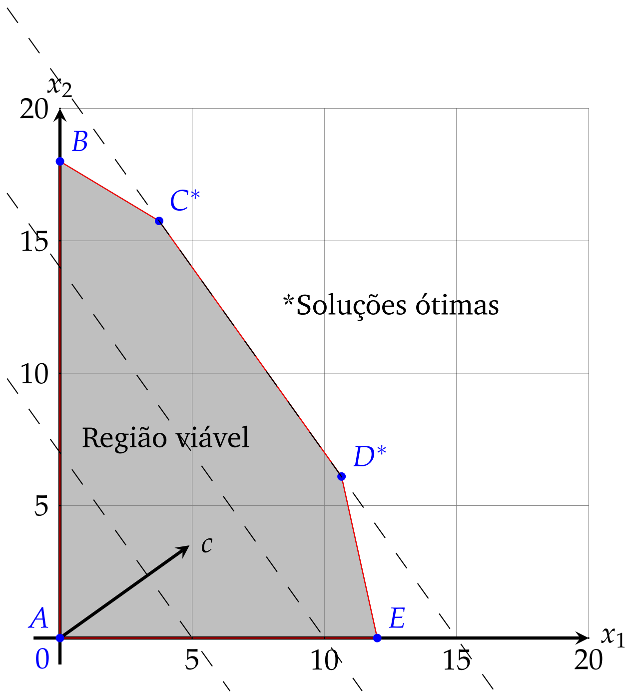

Figura 3: Múltiplas soluções ótimas

Solução ilimitada

Vamos retomar o exemplo 1.3, mantendo as restrições e alterando a função objetivo para que tenhamos um PPL de maximização.

Ficamos com:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 12x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 7x_1 + x_2 \geqslant 28 \\ & 2x_1 + x_2 \geqslant 18 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Analisando a figura 4, podemos observar que a função objetivo pode se deslocar no sentido do vetor c indefinidamente, neste caso não existe um valor ótimo para a função objetivo.

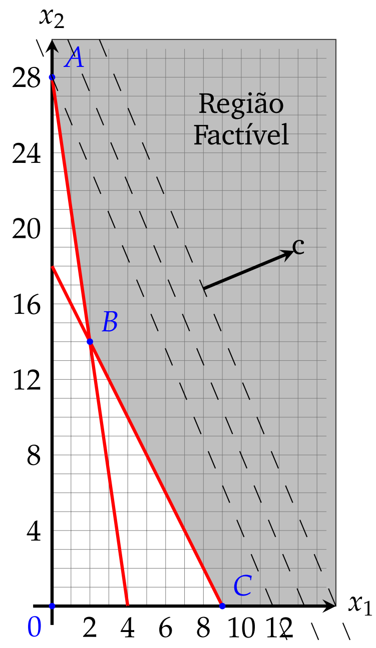

Figura 4: Solução ilimitada

Região viável vazia

Uma vez que o conjunto de restrições pode determinar uma região viável vazia, podemos nos deparar com um PPL sem solução, neste caso, o PPL é considerado inviável ou impossível.

Exemplo 1.8. Neste PPL, conforme podemos observar na figura 5, a região viável é vazia, logo é impossível encontrar uma solução.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & -x_1 + 4x_2 \geqslant 24 \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

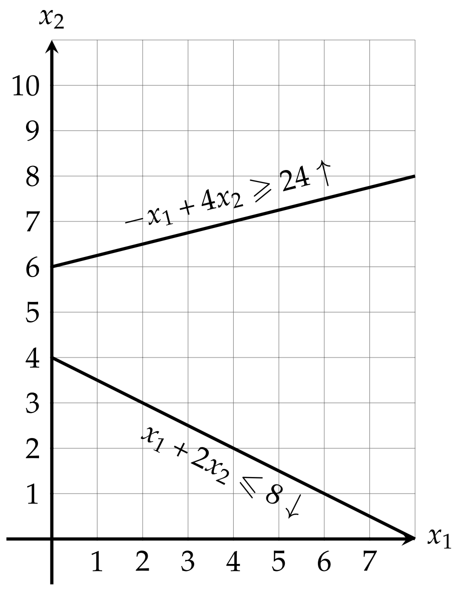

Figura 5: Região viável vazia

2

MODELAGEM DE PROBLEMAS

Diversas são as áreas que apresentam situações passíveis de modelagem na forma de um PPL, podemos citar alguns exemplos tais como agricultura, finanças, logística, telecomunicações, marketing entre outras mais.
O objetivo deste capítulo é apresentar algumas aplicações práticas modeladas como PPL.

MISTURA

A combinação de materiais com determinadas características para obter uma mistura, que pode ser um novo material ou produto com determinadas especificações, pode ser modelada através de um PPL para que se obtenha o custo mínimo.
Para modelarmos um problema de mistura devemos conhecer quais são os componentes da mistura e os ingredientes que possuem tais componentes, bem como seus custos em uma unidade de medida padronizada e as proporções dos componentes em cada ingrediente.
O problema consiste em determinar as quantidades de cada ingrediente na mistura que satisfaça algumas restrições técnicas e minimize o custo.
Seja m a quantidade de componentes que devem fazer parte da mistura e seja n a quantidade de ingredientes que possuem pelo menos 1 dentre os m componentes da mistura.
A quantidade de cada um dos ingredientes na mistura é dada por x_j, com $j = 1, 2, \cdots n$, é claro que $x_j \geqslant 0$ pois não há sentido em considerar que haja quantidades negativas de algum ingrediente.

O custo de uma unidade do ingrediente j é dado por c_j com $j = 1, 2, \cdots n$, sendo assim, o custo de uma unidade da mistura é dado pela soma dos custos de cada ingrediente, ou seja, $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$.
A fração do componente i no ingrediente j é denotada por a_{ij} com $i = 1, 2, \cdots, m$ e $j = 1, 2, \cdots, n$, deste modo temos que $a_{ij}x_j$ é a quantidade do componente i em x_j quantidades do ingrediente j, portanto, a quantidade total do componente i na mistura é dada por $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$.
As restrições dos componentes da mistura podem se apresentar nas seguintes formas:

- $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$
- $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$

Onde, de acordo com as restrições técnicas, b_i representa a quantidade máxima ou mínima do componente i na mistura. Uma última restrição a ser considerada é $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, pois o custo que buscamos minimizar é o de uma unidade da mistura.
A modelagem do problema da mistura terá a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
& \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \\
\text{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1. Uma fábrica de produtos alimentícios quer produzir um hambúrguer utilizando uma mistura de carnes bovina, de aves e suína cujos custos por quilograma são de R$ 22,00, R$ 6,00 e R$ 15,00 respectivamente.
A porcentagem de gordura de tal mistura não deve exceder 8% e a proteína deve ser de no mínimo 20%, além disso pelo menos 30% da mistura deve ser de carne bovina.
A quantidade de proteína e gordura das carnes está representada na tabela 3.

•	Proteina	Gordura
Bovina	21	7
De Aves	19,6	6,8
Suína	20	9,1

Tabela 3: Valores Percentuais

Queremos determinar as quantidades de cada tipo de carne que permita produzir o hambúrguer com o menor custo possível respeitando as restrições nutricionais.
Sejam x_1 = carne bovina, x_2 = carne de aves e x_3 = carne suína as variáveis de decisão, utilizando as informações dadas temos o seguinte PPL:

$$\begin{aligned}
\min z &= 22x_1 + 6x_2 + 15x_3 && (2.1)\\
\text{sujeito a} \quad 7x_1 + 6,8x_2 + 9,1x_3 &\leqslant 8 && (2.2)\\
21x_1 + 19,6x_2 + 20x_3 &\geqslant 20 && (2.3)\\
x_1 \qquad\qquad\qquad &\geqslant 0,3 && (2.4)\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 && (2.5)\\
x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0 && (2.6)
\end{aligned}$$

Onde (2.1) é a função objetivo, que nos dá o custo do quilograma da mistura, (2.2) é a restrição da porcentagem de gordura, (2.3) da porcentagem proteína, (2.4) da quantidade mínima de carne bovina, (2.5) a soma dos ingredientes deve ser igual a um quilo e (2.6) as restrições de não negatividade, visto que as carnes podem ser utilizadas ou não.

PRODUÇÃO

Uma situação que pode ser modelada através de um PPL é, determinar a quantidade de cada item a ser produzido dentre uma gama de produtos fabricados por determinada empresa, atendendo demandas e otimizando o lucro obtido dentre um determinado período de tempo.
Para modelarmos um problema de produção como um PPL, devemos conhecer o lucro obtido por cada unidade dos diferentes produtos, os recursos utilizados com suas respectivas restrições e, quando houver, a demanda mínima e a demanda máxima de

cada um dos produtos.

O problema consiste em determinar a quantidade de cada produto a ser produzida de forma a maximizar o lucro, respeitando as restrições dos recursos disponíveis e considerando as demandas.

Definindo x_j como sendo a quantidade do produto j com $j = 1, 2, \cdots, n$ a ser produzida em um determinado período de tempo e considerando que cada um destes produtos contribui com um lucro unitário definido por l_j com $j = 1, 2, \cdots, n$, podemos determinar a função lucro a ser otimizada por:

$$\max \quad z = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n$$

Quanto aos recursos utilizados, vamos definir R_i como sendo a capacidade do recurso i (com $i = 1, 2, \cdots, m$) disponível no período determinado e a_{ij} a quantidade do recurso i utilizada para se fabricar uma unidade do produto j, o que nos dará restrições do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leqslant R_i$$

Em relação as demandas, definimos d_j como demanda mínima e D_j como demanda máxima do produto j, assim obtemos restrições do tipo:

$$d_j \leqslant x_j \leqslant D_j$$

Finalmente podemos escrever o PPL de produção da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n \\
\text{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \leqslant R_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \leqslant R_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \leqslant R_m \\
& d_1 \leqslant x_1 \leqslant D_1 \\
& d_2 \leqslant x_2 \leqslant D_2 \\
& \vdots \\
& d_n \leqslant x_n \leqslant D_n \\
& x_1, x_2, \cdots x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Uma empresa com um orçamento diário de R$ 3000,00 e um limite de 800 horas de trabalho quer determinar qual a quantidade a ser fabricada dentre os produtos A, B e C de forma a maximizar o seu lucro..

O consumo de recursos é dado na tabela 4.
A demanda máxima dos produtos A, B e C são respectivamente 200, 300 e 150 e os

•	Custo Unitário (em R$)	Horas de trabalho (unidade)
A	8	3
B	12	2
C	6	2

Tabela 4: Consumo de Recursos

preços de venda são A=R$18, B=R$24 e C=R$15.
O lucro unitário é dado por (preço de venda) − (custo), logo o lucro de A é dado por $18 - 8 = 10$, de B por $24 - 12 = 12$ e de C por $15 - 6 = 9$.
Definindo x_A, x_B e x_C como sendo as variáveis de decisão, a modelagem do PPL fica sendo a seguinte:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 10x_A + 12x_B + 9x_C \\
\text{sujeito a} \quad 8x_A + 12x_B + 6x_C &\leqslant 3000 \\
3x_A + 2x_B + 2x_C &\leqslant 800 \\
x_A \qquad\qquad &\leqslant 200 \\
x_B \qquad &\leqslant 300 \\
x_C &\leqslant 150 \\
x_A, x_B, x_C &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

DIETA

Um problema que pode ser modelado através de um PPL é o de criar uma dieta baseada numa tabela de alimentos com seus respectivos conteúdos nutricionais, visando conseguir uma configuração que atenda alguns requisitos e minimizando o custo.
Seja x_j (com $j = 1, 2, \cdots, n$) a quantidade do alimento j, seja também c_j o seu custo em uma unidade padronizada, a função custo a ser minimizada é dada por:

$$\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Os requisitos nutricionais podem ser limitados tanto superiormente quanto inferior-

mente, deste modo, definiremos b_i como o limite inferior e B_i como limite superior do nutriente i(com $i = 1, 2, \cdots m$), e assim teremos a_{ij} como sendo a quantidade do nutriente i no alimento j.
Definidos os elementos, podemos escrever o PPL da dieta na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \\ \text{sujeito a} \quad & b_1 \leqslant a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant B_1 \\ & b_2 \leqslant a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant B_2 \\ & \vdots \\ & b_m \leqslant a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant B_m \\ & x_1, x_2, \cdots x_n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Um nutricionista quer determinar a quantidade de cada alimento que constituirá o prato de um restaurante de modo que esta refeição contemple alguns requisitos nutricionais.

Ele deve garantir uma refeição com os seguintes requisitos

- Calorias $\Rightarrow$ entre 1000kcal e 1500kcal
- Proteína $\Rightarrow$ pelo menos 30g
- Colesterol $\Rightarrow$ no máximo 120mg
- Carboidrato $\Rightarrow$ pelo menos 40g
- Fibra Alimentar $\Rightarrow$ entre 15g e 25g
- Cálcio $\Rightarrow$ pelo menos 400mg
- Sódio $\Rightarrow$ no máximo 100mg

Os alimentos com seus respectivos valores nutricionais e preços são dados na tabela 5

Alimentos 100g	Calorias kcal	Proteina g	Colesterol mg	Carboidrato g	Fibra g	Cálcio mg	Sódio g	Preço 100g
Arroz	128	2,5	•	28	1,6	4	1	0,50
Feijão	76	4,8	•	13,6	8,5	27	2	0,50
Batata	80	0,9	•	18,9	1,8	12	2	0,40
Cenoura	30	0,8	•	6,7	2,6	26	8	0,35
Alface	9	0,6	•	1,7	1	14	7	1,10
Tomate	21	0,8	•	5,1	2,3	7	5	0,80
Ovo Cozido	146	13,3	397	0,6	•	49	146	1,20
Frango(filé)	159	32	89	•	•	5	50	1,00
Peixe Frito	223	27,4	165	•	•	378	107	3,00
Contra-filé	194	36	102	•	•	5	58	5,00

Tabela 5: Valores Nutricionais

As variáveis de decisão serão assim determinadas:

$$\begin{array}{cc}
\text{Arroz} \Rightarrow x_1 & \text{Feijão} \Rightarrow x_2 \\
\text{Batata} \Rightarrow x_3 & \text{Cenoura} \Rightarrow x_4 \\
\text{Alface} \Rightarrow x_5 & \text{Tomate} \Rightarrow x_6 \\
\text{Ovo Cozido} \Rightarrow x_7 & \text{Frango Grelhado} \Rightarrow x_8 \\
\text{Peixe Frito} \Rightarrow x_9 & \text{Contra-filé} \Rightarrow x_{10}
\end{array}$$

O PPL da dieta modelado será:

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,4x_3 + 0,35x_4 + 1,1x_5 + 0,8x_6 + 1,2x_7 + x_8 + 3x_9 + 5x_{10} \\
\text{sujeito a } & 128x_1 + 76x_2 + 80x_3 + 30x_4 + 9x_5 + 21x_6 + 146x_7 + 159x_8 + 223x_9 + 194x_{10} \geqslant 1000 \\
& 128x_1 + 76x_2 + 80x_3 + 30x_4 + 9x_5 + 21x_6 + 146x_7 + 159x_8 + 223x_9 + 194x_{10} \leqslant 1500 \\
& 2,5x_1 + 4,8x_2 + 0,9x_3 + 0,8x_4 + 0,6x_5 + 0,8x_6 + 13,3x_7 + 32x_8 + 27,4x_9 + 36x_{10} \geqslant 30 \\
& 397x_7 + 89x_8 + 165x_9 + 102x_{10} \leqslant 120 \\
& 28x_1 + 13,6x_2 + 18,9x_3 + 6,7x_4 + 1,7x_5 + 5,1x_6 + 0,6x_7 \geqslant 40 \\
& 1,6x_1 + 8,5x_2 + 1,8x_3 + 2,6x_4 + x_5 + 2,3x_6 \geqslant 15 \\
& 1,6x_1 + 8,5x_2 + 1,8x_3 + 2,6x_4 + x_5 + 2,3x_6 \leqslant 25 \\
& 4x_1 + 27x_2 + 12x_3 + 26x_4 + 14x_5 + 7x_6 + 49x_7 + 5x_8 + 378x_9 + 5x_{10} \geqslant 400 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 146x_7 + 50x_8 + 107x_9 + 58x_{10} \leqslant 100 \\
& x_1, x_2, \cdots, x_{10} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

TRANSPORTE

O problema do transporte consiste em suprir centros consumidores com a quantidade demandada de algum produto vindo de um ou mais centros de produção, trata-se de um problema de otimização pois queremos que o custo seja o menor possível.
Definindo x_{ij} como o número de unidades transportadas e c_{ij} o custo por unidade transportada da origem i ao destino j com $i = 1, 2, \cdots m$ e $j = 1, 2, \cdots, n$, temos que a função custo a ser minimizada terá a seguinte forma:

$$\min \quad z = c_{11}x_{11} + \cdots c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

Definimos também O_i como sendo a quantidade de produtos em estoque no centro de distribuição, ou origem i e D_j a quantidade demandada no centro consumidor, ou destino j.
Para modelarmos o PPL, devemos levar em consideração que o total de produtos transportados da origem i não deve ultrapassar a quantidade em estoque (O_i) e também é necessário suprir a demanda (D_j) de cada um dos j centros consumidores.

A modelagem do PPL de transporte terá a seguinte forma:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\min & z = c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \\
\text{sujeito a} & x_{11} & + & x_{12} & + & \cdots & + & x_{1n} & \leqslant O_1 \\
& x_{21} & + & x_{22} & + & \cdots & + & x_{2n} & \leqslant O_2 \\
& & & & & & & & \vdots \\
& x_{m1} & + & x_{m2} & + & \cdots & + & x_{mn} & \leqslant O_m \\
& x_{11} & + & x_{21} & + & \cdots & + & x_{m1} & = D_1 \\
& x_{12} & + & x_{22} & + & \cdots & + & x_{m2} & = D_2 \\
& & & & & & & & \vdots \\
& x_{1n} & + & x_{2n} & + & \cdots & + & x_{mn} & = D_n \\
& \multicolumn{8}{r}{x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, \cdots x_{mn} \geqslant 0}
\end{array}
$$

Exemplo 2.4. Suponha que uma empresa com dois centros de distribuição O_1 e O_2 deva suprir a quantidade demandada de três centros consumidores D_1, D_2 e D_3 conforme nos mostra a figura 6.

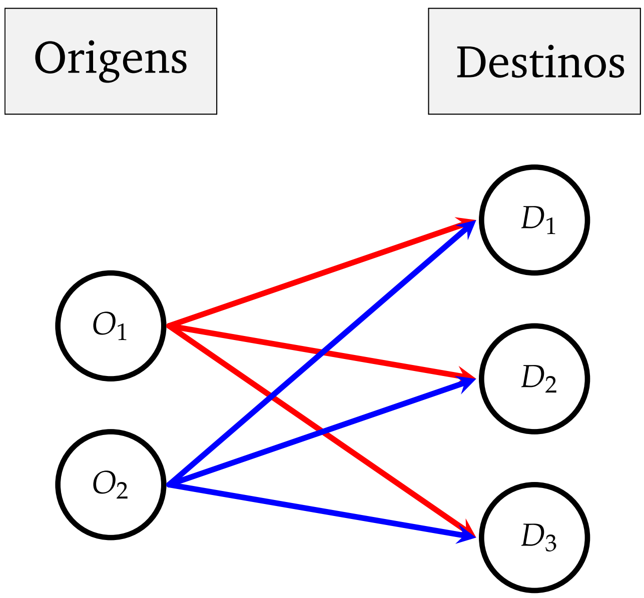

Figura 6: Origens e destinos

As ofertas e as demandas do produto são dadas por:

Origens	Oferta	Destinos	Demanda
O_1	1500	D_1	850
O_2	1000	D_2	900
•	•	D_3	750

Tabela 6: Problema de transporte

O custo de transporte por unidade c_{ij} onde $i = 1,2$ indica a origem e $j = 1,2,3$ indica o destino é dado por:

$$
\begin{array}{rrr}
c_{11} = 1,2 & c_{12} = 1,5 & c_{13} = 0,9 \\
c_{21} = 1 & c_{22} = 1,1 & c_{23} = 1,6
\end{array}
$$

As variáveis de decisão são dadas por x_{ij}, assim como o custo $i = 1,2$ indica a origem e $j = 1,2,3$ indica o destino.
O PPL de transporte modelado fica sendo o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\min 1,2x_{11} + 1,5x_{12} + 0,9x_{13} + x_{21} + 1,1x_{22} + 1,6x_{23} && (2.7)\\
&\text{sujeito a} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 1500 && (2.8)\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 1000 && (2.9)\\
&x_{11} + x_{21} = 850 && (2.10)\\
&x_{12} + x_{22} = 900 && (2.11)\\
&x_{13} + x_{23} = 750 && (2.12)\\
&x_{ij} \geqslant 0, i = 1,2, j = 1,2,3 && (2.13)
\end{aligned}
$$

A função objetivo a ser minimizada é indicada por (2.6), onde temos a soma dos respectivos custos multiplicados pela quantidade de produtos a serem transportados da origem i ao destino j.
As restrições (2.7) e (2.8) nos informam, respectivamente. o limite do estoque de produtos nas origens O_1 e O_2.
As restrições (2.9), (2.10) e (2.11) servem para garantir que as demandas dos respectivos destinos D_1, D_2 e D_3 serão supridas.

A restrição de não negatividade (2.12) nos diz que um produto pode ou não ser transportado da origem i ao destino j.

MARKETING

O problema do Marketing, consiste em elaborar uma campanha, com inserções de propagandas em diversas mídias com a intenção de atingir a maior quantidade de pessoas, respeitando a limitação da verba definida pelo departamento de marketing de uma empresa para tal campanha.
Para sua modelagem em um PPL definiremos como x_i, (com $i = 1, 2, \cdots n$) o número de anúncios da mídia i e a_i o alcance em número de pessoas por anúncio da mídia i.
O custo por anúncio da mídia i será dado por c_i, definamos por B o orçamento máximo da campanha e b_i como sendo o número máximo de anúncios da mídia i.
A modelagem do PPL de Marketing será a seguinte:

$$
\begin{array}{rrr}
\max & z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n & \\
\text{sujeito a} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n & \leqslant B \\
& x_1 \qquad\qquad & \leqslant b_1 \\
& x_2 \qquad\quad & \leqslant b_2 \\
& & \vdots \\
& x_n & \leqslant b_n \\
& x_1, x_2, \cdots x_n & \geqslant 0
\end{array}
$$

Exemplo 2.5. A verba de uma empresa para desenvolver a campanha de um novo produto a ser lançado no mercado é de R$ 200.000,00.
A intenção é conseguir a maior exposição possível, sem ultrapassar a verba, tomando como base para a estratégia da campanha a tabela 7

Mídia	Custo em R$ por anúncio	Exposição (pessoas/anúncio)
Outdoor	10.000,00	30.000
Rádio	8.000,00	25.000
Jornal	4.000	10.000
Televisão	20.000,00	50.000,00
Internet	0,80	1

Tabela 7: Custo e exposição

Existe também uma limitação por tipo de anúncio, a saber:

- Outdoor: no máximo 2;
- Rádio: no máximo 15 inserções;
- Jornal: no máximo 10 anúncios;
- Televisão: no máximo 5 comerciais;
- Internet: no máximo 30.000 anúncios.

As variáveis de decisão serão assim definidas, x_o para a quantidade de outdoors, x_r para o número de inserções no rádio, x_j para a quantidade de anúncios em jornal, x_t para a quantidade de comerciais na televisão e x_i para o número de anúncios na internet.

A intenção é maximizar a exposição do produto, logo teremos como função objetivo $\max z = 30000x_0 + 25000x_r + 10000x_j + 50000x_t + x_i$.

A restrição referente a verba é dada por $10000x_0 + 8000x_r + 4000x_j + 20000x_t + 0.8x_i \leqslant 200000$.

As restrições quanto aos tipos de anúncio são:

- Outdoor: $x_o \leqslant 2$;
- Rádio: $x_r \leqslant 15$;
- Jornal: $x_j \leqslant 10$;
- Televisão: $x_t \leqslant 5$;
- Internet: $x_i \leqslant 30000$.

Sendo assim, a modelagem completa do PPL de marketing fica sendo:

$$
\begin{aligned}
\max z = 30000x_0 + 25000x_r + 10000x_j + 50000x_t + x_i \\
\text{sujeito a} \quad 10000x_0 + 8000x_r + 4000x_j + 20000x_t + 0.8x_i \leqslant 200000 \\
x_o \leqslant 2 \\
x_r \leqslant 15 \\
x_j \leqslant 10 \\
x_t \leqslant 5 \\
x_i \leqslant 30000 \\
x_o, x_r, x_j, x_t, x_i \geqslant 0
\end{aligned}
$$

3

SOLUÇÕES DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

O objetivo deste capítulo é definir conjuntos convexos juntamente com algumas de suas propriedades e discorrer sobre soluções viáveis de um PPL.

CONJUNTOS CONVEXOS E POLIEDROS

Definição 3.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se, dados dois pontos $x_1, x_2 \in X$, o segmento $x_1x_2 \subset X$, ou seja, para qualquer par de pontos $x_1, x_2 \in X$ e para todo $t \in [0, 1]$ temos $tx_1 + (1 - t)x_2 \in X$.

Um ponto com a forma $tx_1 + (1 - t)x_2$ com $t \in [0, 1]$, é denominado combinação convexa de x_1 e x_2. Dessa forma, podemos dizer que um conjunto X é convexo, se, para qualquer $x_1, x_2 \in X$ a combinação convexa de x_1 e x_2 pertence a X.

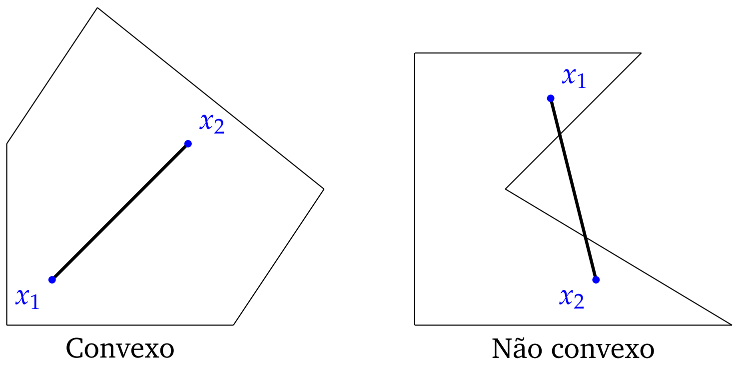

Figura 7: Conjunto convexo e conjunto não convexo

Proposição 3.2. *A intersecção de conjutos convexos é um conjunto convexo.*

Demonstração. Sejam $X_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I$, conjuntos convexos, onde I é um conjunto qualquer, mostremos que a intersecção $X = \cap_{i \in I} X_i$ também é um conjunto convexo. Tomemos, $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$, logo, $x_1 \in X_i$ e $x_2 \in X_i$ para todo i. Como, por hipótese, os conjuntos $X_i, i \in I$ são convexos, $tx_1 + (1-t)x_2 \in X_i$ para qualquer $t \in [0,1]$ e todo $i \in I$. Pela definição de intersecção, temos que $tx_1 + (1-t)x_2 \in X$, e portanto, X é convexo. □

Definição 3.3. Um ponto x em um conjunto convexo X é definido como um ponto extremo de X, se não existem dois pontos distintos $x_1, x_2 \in X$, tais que $x = tx_1 + (1-t)x_2$, com $0 < t < 1$.

Definição 3.4. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, a envoltória convexa de X é a intersecção de todos os conjuntos convexos X_i tal que $X \subset X_i$, consequentemente é o menor subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ contendo X. Denotaremos a envoltória convexa de X por $[X]$

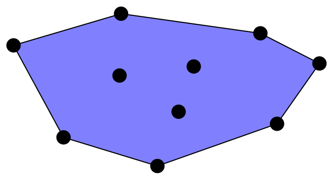

Figura 8: Envoltória convexa de um conjunto de pontos

Definição 3.5. Um hiperplano H em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as soluções de uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b$$

Com pelo menos um $a_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots n$.

Podemos estabelecer as seguintes relações:

Espaço	Hiperplano
$\mathbb{R}$	Ponto
$\mathbb{R}^2$	Reta
$\mathbb{R}^3$	Plano

Tabela 8: Hiperplanos

Proposição 3.6. *Um hiperplano é um conjunto convexo.*

Demonstração. Sejam $x^1, x^2 \in H$, neste caso teremos:

$$a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \cdots a_nx_n^1 = b$$
$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots a_nx_n^2 = b$$

Fazendo $t \in [0,1]$, mostraremos que a combinação convexa $tx^1 + (1-t)x^2$ é um ponto de H.
De fato,

$$t(a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + \cdots a_nx_n^1) + (1-t)(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots a_nx_n^2) = tb + (1-t)b = b$$

Logo, pela definição 3.1, concluímos que um hiperplano é um conjunto convexo. □

Definição 3.7. Um semiespaço é uma região limitada por um hiperplano, desse modo, um hiperplano divide $\mathbb{R}^n$ em dois semiespaços.

Tomemos o hiperplano $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, os semiespaços por ele limitados são:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant b$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$$

Conforme podemos observar na figura 9, temos um hiperplano em $\mathbb{R}^3$ limitando dois semiespaços.

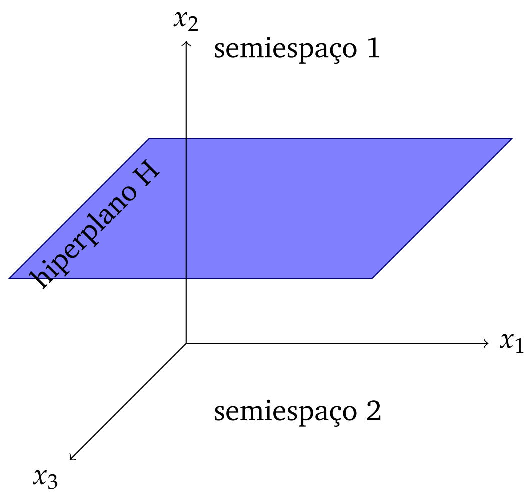

Figura 9: Hiperplano e semiespaços

Definição 3.8. Um poliedro $P \in \mathbb{R}^n$ é a intersecção de uma quantidade finita de semiespaços.

Consequentemente, um poliedro pode ser representado através de um sistema de inequações lineares como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &\leqslant b_m \end{aligned}$$

Exemplo 3.1. O poliedro definido pelas inequações abaixo está representado na figura 10.

$$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 &\leqslant 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geqslant 12 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

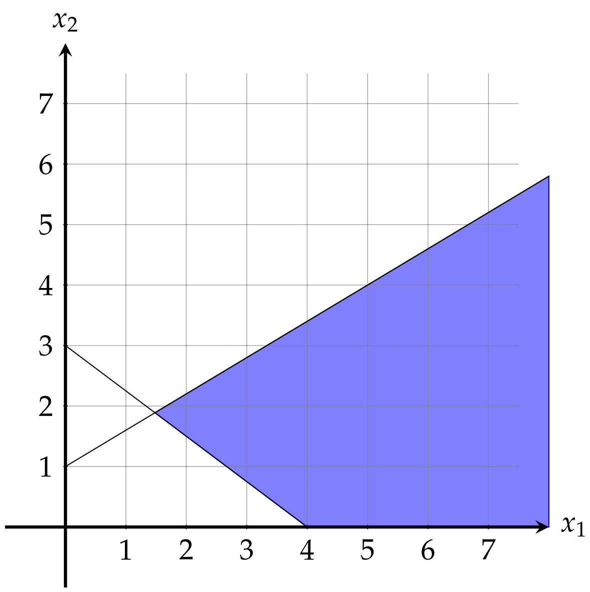

Figura 10: Poliedro não limitado

Definição 3.9. Um poliedro limitado é chamado de politopo.

Exemplo 3.2. Se acrescentarmos a inequação $-2x_1 + x_2 \geqslant -8$ ao poliedro do exemplo 3.1, teremos um politopo, conforme está representado na figura 11.

$$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 &\leqslant 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geqslant 12 \\ -2x_1 + x_2 &\geqslant -8 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

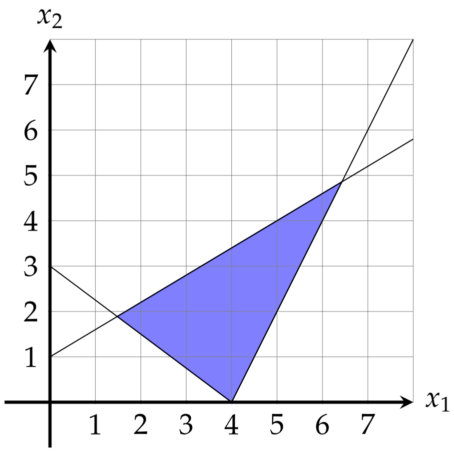

Figura 11: Politopo

SOLUÇÃO VIÁVEL BÁSICA

Definição 3.10. Seja o sistema de equações:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sejam x um n-vetor e b um m-vetor. Assuma que o posto de $A_{m\times n}$ é igual a m.
Das n colunas de A selecionemos m colunas linearmente independentes e façamos

$A = [B, N]$, onde B é uma matriz não singular $m \times m$ formada por essas m colunas e N é uma matriz $m \times (n-m)$.

A solução básica de $Ax = b$ é o vetor $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ onde:

$$x_B = B^{-1}b$$

e

$$x_N = 0$$

- Se $x_B \geqslant 0$, denominaremos x de *solução viável básica*, neste caso B é a *matriz básica* e N é a *matriz não básica*. Os componentes de x_B são chamados de *variáveis básicas* e os de x_N de *variáveis não básicas*.
- Se $x_B > 0$, teremos que x é uma *solução viável básica não degenerada*.
- Se pelo menos um dos componentes de x_B for igual a zero, x será denominado de *solução viável básica degenerada.*

Exemplo 3.3. Voltemos ao problema do exemplo 1.2:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ & x_1 \leqslant 4 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Pela introdução das variáveis de folga, colocamos o problema na forma padrão.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Podemos escrever a matriz das restrições da seguinte forma:

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos as soluções viáveis básicas determinaremos as possíveis bases $B_{(2\times 2)}$ de forma que os componentes de $x_B = B^{-1}b$ sejam todos não negativos.

Caso 1: $B = [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso 2: $B = [a_1, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso 3: $B = [a_1, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Caso 4: $B = [a_2, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Caso 5: $B = [a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nos casos 1, 2 ,4 e 5 obtemos soluções viáveis básicas para o problema no caso 3 temos um componente de $x_B < 0$ que viola a restrição de não negatividade.
Uma vez que foram introduzidas duas variáveis de folga, as soluções pertencem ao $\mathbb{R}^4$.

Se projetarmos esses soluçãoes viáveis no $\mathbb{R}^2$ teremos os seguintes pontos:

$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Que conforme podemos observar na figura 12 são os vértices da região viável

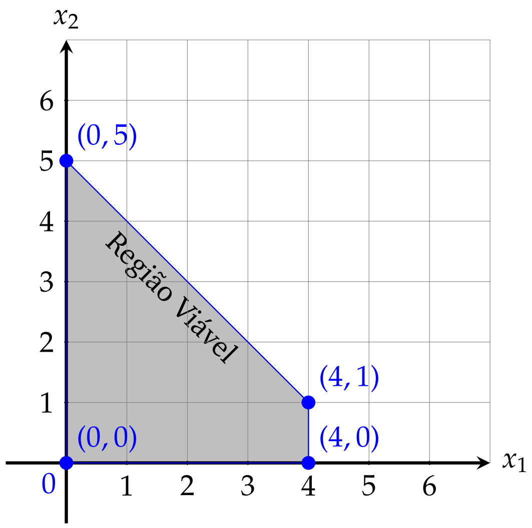

Figura 12: Soluções viáveis básicas

Teorema 3.11. *Dado um PPL na forma padrão:*

$$\begin{aligned} & \max c^t x \\ \textit{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m.

I Se existe uma solução viável, então existe uma solução viável básica.

II Se existe uma solução viável ótima, então existe uma solução viável básica ótima.

Demonstração. (I) Sejam $a_1, a_2, \cdots a_n$ colunas de A e suponha que $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ seja uma solução viável, logo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{3.2}$$

Suponha que $x_1, x_2, \cdots x_k > 0$ e $x_{k+1}, \cdots, x_n = 0$ daí:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = b \tag{3.3}$$

Temos duas possibilidades, o conjunto $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ é linearmente independente (LI) ou linearmente dependente (LD).

- Caso 1: Suponha que $a_1, a_2, \cdots, a_k$ sejam LI, temos que $k \leqslant m$. Se $k = m$ a solução é básica e não há nada mais a demonstrar. Se $k < m$, como posto de A é igual a m, podemos encontrar $m - k$ vetores dentre os $n - k$ restantes tal que o conjunto resultante com m vetores é LI. Atribuindo zero para as $m - k$ variáveis obtemos uma solução viável básica (degenerada).

- Caso 2: Suponha que $a_1, a_2, \cdots, a_k$ sejam LD, neste caso, existe uma combinação linear desses vetores igual a zero. Seja $y_1, y_2, \cdots, y_k$ com pelo menos um $y_i > 0, i = 1, 2, \cdots, k$, tal que:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ky_k = 0 \tag{3.4}$$

Multiplicando a equação (3.4) por ε e subtraindo este resultado da equação (3.3), obtemos:

$$a_1(x_1 - \varepsilon y_1) + a_2(x_2 - \varepsilon y_2) + \cdots + a_k(x_k - \varepsilon y_k) = b \tag{3.5}$$

Denotando $y = (y_1, y_2, \cdots y_k, 0, 0, \cdots, 0)$, temos que para todo ε

$$x - \varepsilon y \tag{3.6}$$

é uma solução para as igualdades. Se $\varepsilon = 0$ voltamos à solução viável inicial (3.3). Como temos pelo menos um $y_i > 0$ aumentando o valor de ε, diminuimos pelo menos um dos componentes, sendo assim, aumentamos ε até o ponto onde pelo menos um dos componentes se anula, tal ponto é assim determinado:

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x_i}{y_i}, y_i > 0\right\}$$

para este valor de ε , temos que (3.6) é uma solução viável com pelo menos $k - 1$ variáveis positivas, se necessário, podemos repetir esse processo até chegarmos em uma solução viável que tenha suas respectivas colunas LI.

□

Demonstração. (II) Seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ uma solução ótima viável, e suponha também, que há exatamanente k variáveis positivas $x_1, x_2, \cdots, x_k$, novamente devemos estudar as duas possibilidades para o conjunto $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ que pode ser (LI) ou (LD).

- Caso 1: O conjunto $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ é LI, procedemos como a demonstração (I)

- Caso 2: O conjunto $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ é LD, neste caso, devemos mostrar que a solução (3.6) é ótima. Note que o valor da solução $x - \varepsilon y$ é dada por:

$$c^t x + \varepsilon c^t y \tag{3.7}$$

  Para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, $x - \varepsilon y$ é uma solução viável, logo, podemos concluir que $c^t y = 0$.
  De fato, se $c^t y \neq 0$ poderiamos determinar $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno de modo que (3.7) seja viável e maior que $c^t x$, o que contradiz a hipótese de que x é uma solução ótima.

□

Teorema 3.12. *Sejam A uma matriz $m \times n$ com posto m e b um m-vetor. Seja, também, K um politopo formado por todos n-vetores de x que satisfaçam:*

$$Ax = b, \quad \text{com } x \geqslant 0 \tag{3.8}$$

Um vetor x é um ponto extremo de K se, e somente se x é uma solução viável básica de (3.8).

Demonstração. Suponha que $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots, 0)$ seja uma solução viável básica para (3.8), temos, então:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b,$$

com $a_1, a_2, \cdots, a_m$, primeiras m colunas de A, linearmente independentes. Suponha que x possa ser expresso como uma combinação convexa de outros dois pontos de K, ou seja, $x = ty + (1 - t)z$ tal que $0 < t < 1$ e $y \neq z$. Como todos os componentes de x, y e z são não negativos, os últmos $n - m$ componentes de y e z são nulos, temos então:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_my_m = b$$
$$a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_mz_m = b$$

Uma vez que $a_1, a_2, \cdots, a_m$ são LI, segue que $x = y = z$ e portanto x é um ponto extremo de K.
Reciprocamente, suponha que x é um ponto extremo de K, suponha também que os primeiros k componentes de x sejam não negativos. Temos, então:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = b$$

com $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots k$. Para confirmar que x é uma solução viável básica devemos mostar que os vetores $a_1, a_2, \cdots a_k$ são LI.
Suponha que $a_1, a_2, \cdots a_k$ sejam LD, neste caso, existe uma combinação linear desses vetores igual a zero:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_k y_k = 0$$

Definindo o n-vetor $y = (y_1, y_2, \cdots, y_k, 0, 0, \cdots, 0)$. Podemos escolher um ε tal que:

$$x + \varepsilon y \geqslant 0$$
$$x - \varepsilon y \geqslant 0$$

Temos então, que $x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y)$ é uma combinação convexa de dois vetores distintos de K, o que é uma contradição, pois x é um ponto extremo de K.
Portanto, os vetores $a_1, a_2, \cdots a_k$ são LI e x é uma solução viável básica. $\square$

4

MÉTODO SIMPLEX

Neste capítulo mostraremos que para resolver um PPL na forma padrão podemos utilizar o método Simplex, tal método através dos chamados *tableaus Simplex* verifica em uma sequência de soluções viáveis básicas qual é a solução ótima, quando esta existe.

EXEMPLO PRELIMINAR

Vamos introduzir o método Simplex através de um exemplo.
Seja o seguinte PPL

$$\begin{array}{rr} & \max x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 30 \\ & -x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 \qquad \leqslant 8 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array}$$

Para utilizarmos o método Simplex, reescreveremos o PPL em sua forma padrão introduzindo as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5.

$$\begin{array}{rr} \max & x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = 30 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 & = 6 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 & = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{array}$$

A partir das equações obtidas no PPL iremos montar um *tableau Simplex*, que consiste em escrever as variáveis básicas e a função objetivo em função das não básicas.
Veremos neste exemplo que o método Simplex irá gerar uma sequência de *tableaus*, onde cada um deles determina uma solução viável básica associada à uma base B.
Considerando as variáveis x_3, x_4 e x_5 como variáveis básicas e denominando a função objetivo de z temos:

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & = & 30 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\ x_4 & = & 6 & + & x_1 & - & 2x_2 \\ x_5 & = & 8 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & & & x_1 & + & 5x_2 \end{array}$$

As variáveis básicas são isoladas no lado esquerdo das equações e considerando as variáveis não básicas $x_1 = x_2 = 0$, basta recorrer ao *tableau* para obter $x_3 = 30$, $x_4 = 6$ e $x_5 = 8$, o que nos dá a primeira solução viável básica $x = (0, 0, 30, 6, 8)$ associada à base $B = [a_3, a_4, a_5]$ e valor da função objetivo $z = 0$.
Como estamos trabalhando em um PPL de maximização devemos questionar se é possível aumentar o valor da função objetivo e de que forma isso pode ser feito.
Aumentando o valor das variáveis não básicas x_1 ou de x_2 a função objetivo irá aumentar, mas devemos lembrar que as outras variáveis x_3, x_4 e x_5 devem se manter com valores não negativos. Escolheremos arbitrariamente a variável x_1 para ser aumentada, e nesse caso a variável x_2 se mantém nula.
Analisando cada uma das equações do *tableau*, temos pela primeira equação

$$x_3 = 30 - 3x_1 - 2x_2$$

o valor mais alto que x_1 pode assumir sem tornar x_3 negativo é $x_1 = 10$, pela equação

$$x_4 = 6 + x_1 - 2x_2$$

a variável x_1 pode aumentar indefinidamente sem tornar x_4 negativa, já na equação

$$x_5 = 8 - x_1$$

o valor mais alto que x_1 pode assumir sem tornar x_5 negativa é $x_1 = 8$, uma vez que esta é a restrição mais rigorosa iremos tornar x_1 uma variável básica e x_5 uma variável não básica.
Para que x_1 entre na base e x_5 saia, vamos reescrever a terceira equação do primeiro *tableau* com x_1 do lado esquerdo:

$$x_1 = 8 - x_5$$

Substituindo essa equação nas demais equações do primeiro *tableau*, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 8 & & & - & x_5 \\ x_3 & = & 6 & - & 2x_2 & + & 3x_5 \\ x_4 & = & 14 & - & 2x_2 & - & x_5 \\ \hline z & = & 8 & + & 5x_2 & - & x_5 \end{array}$$

Podemos observar no segundo *tableau* que a nossa base é agora $B = [a_1, a_3, a_4]$ e, nesse caso, a solução viável básica passa a ser $x = (8, 0, 6, 14, 0)$, o que nos dá $z = 8$ como valor da função objetivo.

Analisando a função objetivo $z = 8 + x_2 - x_5$, podemos perceber que um aumento da variável não básica x_2 gera um acréscimo no seu valor, enquanto um aumento na variável não básica x_5 gera um decréscimo, logo x_2 entrará na base.

Usando as informações do segundo *tableau*, temos que equação

$$x_1 = 8 - x_5$$

não é alterada por x_2, já a equação

$$x_3 = 6 - 2x_2 + 3x_5$$

restringe a variável x_2 ao valor máximo $x_2 = 3$, e a equação

$$x_4 = 14 - 2x_2 - x_5$$

restringe a variável x_2 ao valor máximo $x_2 = 7$. A restrição mais rigorosa é $x_2 = 3$, consequentemente para que x_2 entre na base devemos tornar x_3 uma variável não básica.

Isolando x_2 no lado esquerdo, teremos o terceiro *tableau*:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 8 & & & - & x_5 \\ x_2 & = & 3 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_5 \\ x_4 & = & 8 & + & x_3 & - & 4x_5 \\ \hline z & = & 23 & - & \frac{5}{2}x_3 & + & \frac{13}{2}x_5 \end{array}$$

Pelo terceiro *tableau*, notamos que o valor da função objetivo é $z = 23$, para uma base $B = [a_1, a_2, a_4]$ e solução viável básica $x = (8, 3, 0, 8, 0)$. Ainda não encontramos a solução ótima, pois a função objetivo pode ser aumentada se aumentarmos o valor da variável não básica x_5.

Utilizando o mesmo procedimento, temos que pela equação

$$x_1 = 8 - x_5$$

nos dá um valor máximo para $x_5 = 8$, enquanto a equação

$$x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_5$$

não restringe o valor de x_5, e finalmente, a equação

$$x_4 = 8 + x_3 - 4x_5$$

restringe a variável x_5 a um valor máximo $x_5 = 2$, que é a restrição mais rigorosa.
O passo a ser tomado agora é tornar x_5 uma variável básica e x_4 uma variável não básica, para isso iremos isolar x_5 no lado direito da equação $x_4 = 8 + x_3 - 4x_5$, e reescrever o *tableau* fazendo as devidas substituições, o que nos dará:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & 6 & - & \frac{1}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}x_4 \\
x_2 & = & 6 & - & \frac{1}{8}x_3 & - & \frac{3}{8}x_4 \\
x_5 & = & 2 & + & \frac{1}{4}x_3 & - & \frac{1}{4}x_4 \\
\hline
z & = & 36 & - & \frac{7}{8}x_3 & - & \frac{13}{8}x_4
\end{array}$$

Neste quarto *tableau* temos $B = [a_1, a_2, a_5]$, solução viável básica $x = (6, 6, 0, 0, 2)$ e o valor da função objetivo é $z = 36$, esta é a solução ótima pois qualquer acréscimo nas variáveis não básicas acarreta um decréscimo na função objetivo.
Podemos representar esse processo graficamente:

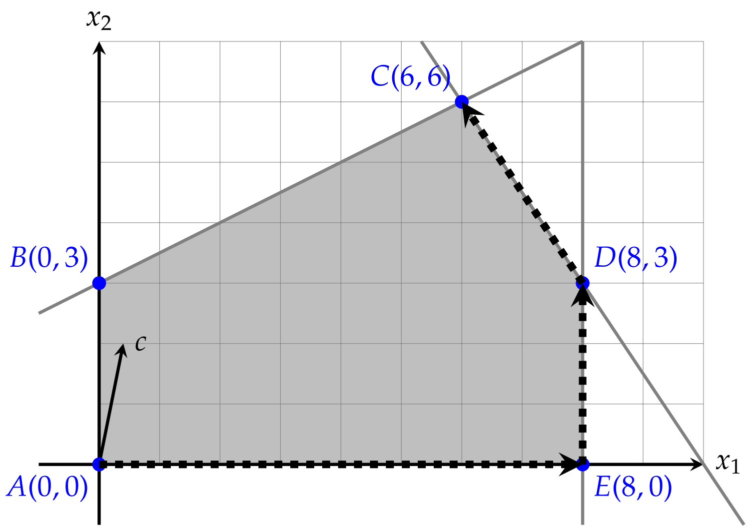

Figura 13: Representação gráfica do PPL original

Conforme podemos observar no gráfico acima, o método Simplex, parte de uma solução básica inicial representada pelo ponto $A(0,0)$ e percorre o caminho indicado pelas setas pontilhadas ($A \to E \to D \to C$), sempre aumentando o valor da função objetivo, até chegar ao ponto $C(6,6)$ que é a solução ótima do PPL. Também é possível observar que existe um caminho mais curto ($A \to B \to C$) para se chegar à solução ótima, o método Simplex teria percorrido esse caminho se a opção escolhida no primeiro passo fosse aumentar a variável não básica x_2.

CASOS ESPECIAIS

Alguns casos especiais podem ocorrer em um problema de programação linear, iremos estudar estes casos elencados a seguir:

- PPL inviável
- PPL ilimitado
- PPL degenerado

PPL inviável

Se a intersecção dos hiperplanos determinados pelas restrições de um PPL for um conjunto vazio, então não existe solução viável.

Exemplo 4.1. Seja o seguinte conjunto de restrições de um PPL:

$$x_1 \qquad \leqslant 2 \tag{4.1}$$

$$x_2 \leqslant 3 \tag{4.2}$$

$$6x_1 + 5x_2 \geqslant 30 \tag{4.3}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

A restrição (4.1) nos dá que $6x_1 \leqslant 12$, enquanto a restrição (4.2) nos dá que $5x_2 \leqslant 15$, consequentemente, temos $6x_1 + 5x_2 \leqslant 27$ o que é incompatível com a restrição (4.3) $6x_1 + 5x_2 \geqslant 30$, podemos vizualizar este conjunto de restrições na figura 14.

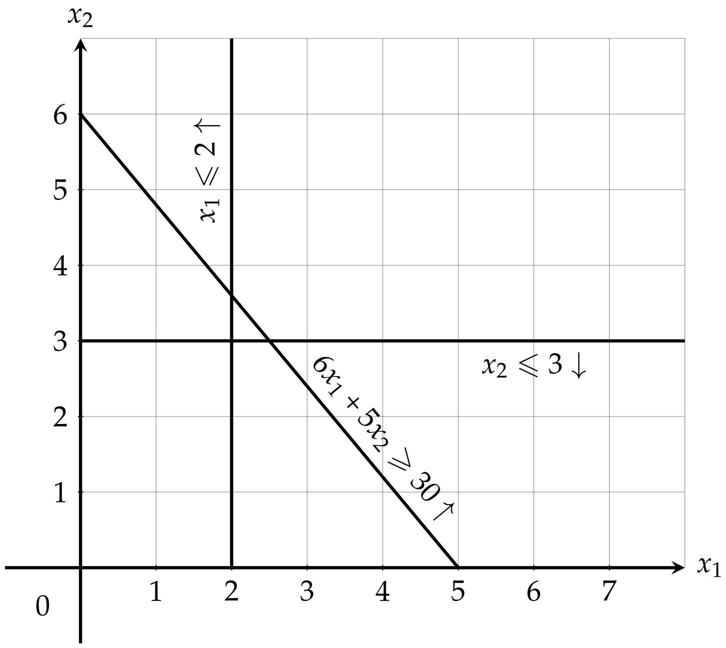

Figura 14: PPL inviável

PPL ilimitado

Quando o conjunto de restrições, determinam um poliedro não limitado temos um PPL ilimitado, nesse caso podem ocorrer algumas situações interessantes como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.2. Seja o seguinte PPL, representado pela figura 15:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ & x_1 - 4x_2 \leqslant 1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

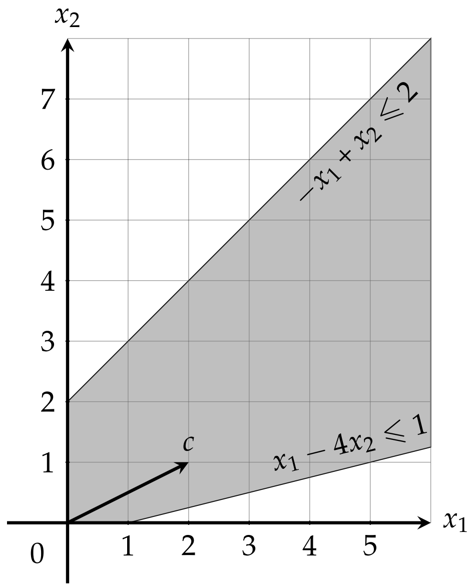

Figura 15: PPL ilimitado

Colocando o PPL em sua forma padrão, através da introdução de variáveis de folga, temos:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2 \\ & -x_1 - 4x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

A partir do PPL em sua forma padrão, montamos o seguinte *tableau Simplex* tomando x_3 e x_4 como variáveis básicas.

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 1 & - & x_1 & + & 4x_2 \\ \hline \text{z} & = & & & 2x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Podemos arbitrariamente fazer x_2 entrar na base. Nesse caso, pela equação

$$x_3 = 2 + x_1 - x_2$$

o valor máximo que x_2 pode assumir sem tornar a variável x_3 negativa é $x_2 = 2$, pela equação

$$x_4 = 1 - x_1 + 4x_2$$

a variável x_2 pode aumentar indefinidamente. Para que a variável x_2 entre na base a variável x_3 deverá se tornar uma variável não básica gerando o seguinte *tableau*.

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & = & 2 & + & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 9 & + & 3x_1 & - & 4x_3 \\ \hline \text{z} & = & 2 & + & 3x_1 & - & x_3 \end{array}$$

Podemos ver pelo *tableau* acima que um aumento na variável x_1 aumentará a função objetivo, analisando as equações $x_2 = 2 + x_1 - x_3$ e $x_4 = 9 + 3x_1 - x_3$ é fácil ver que a variável x_1 pode aumentar indefinidamente. Como um aumento da variável x_1 acarreta em um aumento na função objetivo z o PPL é ilimitado, sendo impossível determinar uma solução ótima.

Exemplo 4.3. Seja o seguinte PPL:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + -4x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ & x_1 - 4x_2 \leqslant 1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

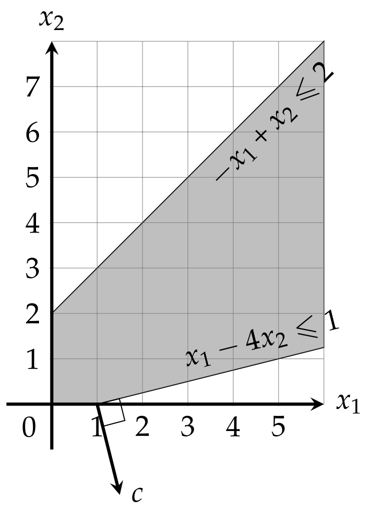

Figura 16: PPL ilimitado com múltiplas soluções ótimas

Conforme podemos observar na figura 16, o vetor c, gradiente da função objetivo, é perpendicular à reta $x_1 - 4x_2 = 1$, neste caso, qualquer que seja $M \geqslant 0$ temos que

$\bar{x} = (1 + 4M, M)$ é uma solução ótima. Calculando o valor da função objetivo obtemos $z = 1 + 4M - 4M = 1$, ou seja, apesar do PPL ser ilimitado é possível encontrar uma solução ótima.

PPL degenerado

Um PPL é degenerado, se uma de suas soluções viáveis básicas é degenerada.

Exemplo 4.4. Seja o seguinte PPL:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ & x_1 + 3x_2 \leqslant 9 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Observando a representação do PPL na figura 17 podemos perceber que a restrição $2x_1 + 3x_2 \leqslant 12$ é redundante, tocando o politopo apenas no ponto $(3, 2)$, ou seja, esta restrição é combinação linear das duas primeiras.

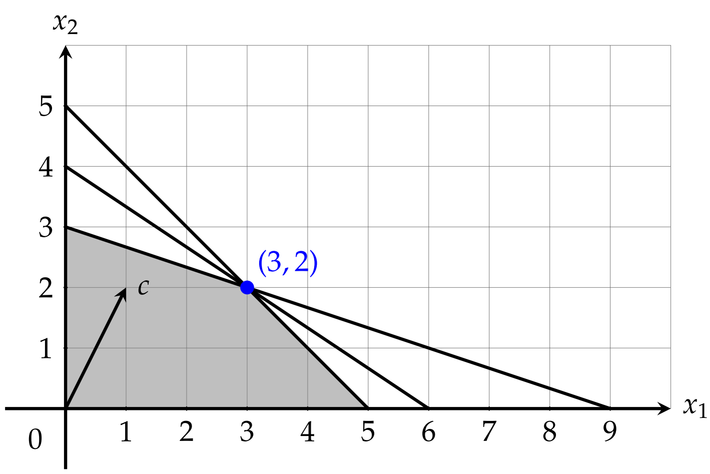

Figura 17: PPL degenerado

Introduzindo variáveis de folga para reescrever o PPL em sua forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Tomando como base o PPL em sua forma padrão iremos montar o seguinte *tableau*:

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & = & 5 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 9 & - & x_1 & - & 3x_2 \\ x_5 & = & 12 & - & 2x_1 & - & 3x_2 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & 2x_2 \end{array}$$

Temos inicialmente a base $B = [a_3, a_4, a_5]$, tomando as variáveis não básicas $x_1 = x_2 = 0$ a solução viável básica é $x = (0, 0, 5, 9, 12)$ com valor da função objetivo $z = 0$.
Fazendo x_1 entrar na base, respeitando as restrições de não negatividade, a variável que sai da base é x_3, gerando o seguinte *tableau*:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 5 & - & x_2 & - & x_3 \\ x_4 & = & 4 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & 2 & - & x_2 & + & 2x_3 \\ \hline z & = & 5 & + & x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Neste novo *tableau*, a base é $B = [a_1, a_4, a_5]$, com solução viável básica $x = (5, 0, 0, 4, 2)$ e valor de função objetivo $z = 5$.
A variável que entrará na base é x_2, analisando as equações do *tableau* temos que

$$x_1 = 5 - x_2 - x_3$$

restringe a variável x_2 com o valor máximo $x_2 = 5$, enquanto que as equações

$$x_4 = 4 - 2x_2 + x_3$$

e

$$x_5 = 2 - x_2 + 2x_3$$

ambas restringem a variável x_2 a um valor máximo $x_2 = 2$, dessa forma podemos escolher tanto x_4 quanto x_5 como a variável que sairá da base.
Escolhendo x_4 como variável que sairá da base, obteremos o seguinte *tableau*:

$$
\begin{array}{rcccccc}
x_1 & = & 3 & - & \frac{3}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\
x_2 & = & 2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 0 & + & \frac{3}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\
\hline
z & = & 7 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4
\end{array}
$$

Chegamos em uma solução degenerada, pois temos uma variável básica x_5 com valor igual a zero, observando o *tableau* percebemos que não é possível aumentar o valor da função objetivo, nesse caso temos uma solução ótima degenerada $x = (3, 2, 0, 0, 0)$ associada à base $B = [a_1, a_2, a_5]$ com valor da função objetivo $z = 7$.

GENERALIZANDO O TABLEAU SIMPLEX

Considere um PPL de maximização apresentado na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^t x \\
\text{sujeito a} \quad & Ax = b \\
& x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Onde A é uma matriz $m \times n$, x e c vetores coluna com n elementos e b um vetor com m elementos. Para melhor compreensão façamos a matriz $A = (B, N)$ e dividiremos os vetores c e x em duas partes, sendo uma referente às variáveis básicas (índice $_B$) e outra referente às variáveis não básicas (índice $_N$). Temos então:

$$
\begin{aligned}
A &= (B, N) \\
c = (c_B, c_N) \Rightarrow c^t &= (c_B^t, c_N^t) \\
x &= (x_B, x_N)
\end{aligned}
$$

Onde $B = [a_1, a_2, \cdots, a_m]$ e $N = [a_{m+1}, a_{m+2} \cdots a_n]$

Definição 4.1. Um *tableau Simplex* $\tau(B)$ determinado por uma base B é um sistema com $m + 1$ equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e z cuja solução é a mesma dos sistema $Ax = b$, $z = c^t x$ representado da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_B & = & p & + & Qx_N \\
\hline
z & = & z_0 & + & r^t x_N
\end{array}
$$

onde $p \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{R}^{n-m}$, Q é uma matriz $m \times (n-m)$ e $z_0 \in \mathbb{R}$.

A solução viável básica associada a este *tableau* é obtida fazendo $x_N = 0$, consequentemente $x_B = p$ e o valor da função objetivo z para esta base é $z_0 + r^t 0 = z_0$

Observação. *Desenvolvendo as equações $Ax = b$ e $z = c^t x$ podemos expressar os valores de p, Q, r e z_0 em função da matriz A e dos vetores x e c.*

- Achando o valor de p e Q:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Bx_B + Nx_N &= b \\ Bx_B &= b - Nx_N \\ B^{-1}Bx_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

Como no *tableau Simplex* temos $x_B = p + Qx_N$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} p &= B^{-1}b \\ Q &= -B^{-1}N \end{aligned}$$

- Achando o valor de z_0 e r:

$$\begin{aligned} z &= c^t x \\ z &= c_B^t x_B + c_N^t x_N \\ z &= c_B^t(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^t x_N \\ z &= c_B^t B^{-1}b - c_B^t B^{-1}Nx_N + c_N^t x_N \\ z &= c_B^t B^{-1}b + (c_N^t - c_B^t B^{-1}N)x_N \end{aligned}$$

Pelo *tableau Simplex* temos que $z = z_0 + r^t x_N$, logo:

$$\begin{aligned} z_0 &= c_B^t B^{-1}b \\ r^t &= c_N^t - c_B^t B^{-1}N \\ r &= c_N - (c_B^t B^{-1}N)^t \end{aligned}$$

O MÉTODO SIMPLEX

Nesta seção aprofundaremos o estudo do método Simplex em problemas de maximização.

Otimalidade. Se na última linha de um *tableau Simplex* os coeficientes das variáveis não básicas são negativos ou nulos ($r \leqslant 0$), então a solução viável básica correspondente é ótima.

Pivoteamento. Conforme vimos nos exemplos anteriores, a cada passo o método Simplex vai de uma base B e consequentemente de um *tableau* $\tau(B)$ para uma nova base B' e um novo *tableau* $\tau(B')$, para isso uma variável não básica x_v entra na base e uma variável básica x_u sai da base e, portanto, $B' = (B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$.
Como queremos um aumento no valor da função objetivo, a seguinte regra deve ser observada:

- Uma variável não básica pode entrar na base se, e somente se o seu coeficiente na última linha do *tableau Simplex* é positivo.

Após a escolha da variável x_v que entra na base, devemos escolher a variável x_u que sai da base respeitando a regra a seguir:

- A variável x_u que sai da base deve ser escolhida de acordo com a restrição de não negatividade em conjunto com sua equação no *tableau Simplex*, limitando a variável que entra na base x_v mais estritamente.

Para formalizar esse processo, façamos $B = [a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_m}], k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ e $N = [a_{l_1}, a_{l_2}, \cdots, a_{l_{n-m}}], l_1 < l_2 < \cdots < l_{n-m}$, de maneira que a i-ésima linha do *tableau Simplex* terá a seguinte forma:

$$x_{k_i} = p_i + \sum_{j=1}^{n-m} q_{ij} x_{l_j}$$

Escrevemos o índice v da variável que entra na base como $v = l_\beta$ com $\beta \in \{1, 2, \cdots, n - m\}$ e o índice u da variável que sai da base como $u = k_\alpha$ com $\alpha \in \{1, 2, \cdots, m\}$.
Como as variáveis não básicas $x_{l_j}, j \neq \beta$ se mantém nulas e pela condição de não negatividade $x_{k_i} \geqslant 0$, os possíveis valores da variável que entra na base x_{l_β} são limitados pela inequação $-q_{i_\beta} x_{l_\beta} \leqslant p_i$, dessa forma, se tivermos $q_{i_\beta} \geqslant 0$ esta inequação não restringe o aumento de x_{l_β}, por outro lado, se $q_{i_\beta} < 0$, o valor da variável que entra na base será

restrito a $x_{l_\beta} \leqslant -\frac{p_i}{q_{i_\beta}}$.
A variável que sai da base x_{k_α} será tal que:

$$q_{\alpha\beta} < 0 \quad e \quad -\frac{p_\alpha}{q_{\alpha\beta}} = \min\left\{-\frac{p_i}{q_{i\beta}} : q_{i\beta} < 0, i = 1, 2, \cdots, m\right\} \tag{4.4}$$

No *tableau Simplex* consideraremos apenas as linhas nas quais o coeficiente de x_v é negativo. Nestas linhas dividimos o componente do vetor p pelo coeficiente do vetor x_v, mudamos o sinal e buscamos o valor mínimo dentre estes quocientes. Se não houver linhas onde o coeficiente de x_v seja negativo o PPL é ilimitado.

Lema 4.2. *Se B é uma base viável associada ao* tableau $\tau(B)$ *e se as variáveis x_v e x_u, entrando e saindo da base respectivamente, são escolhidas de acordo com os critérios já descritos, então $B' = (B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ é também uma base viável.*
Se não há x_u que satisfaça o critério para deixar a base o PPL é ilimitado, nesse caso obtemos uma solução viável substituindo x_v por $t \geqslant 0$ e as outras variáveis não básicas por 0, fazendo $t \to \infty$ o valor da função objetivo tende a infinito.

Demonstração. Se B' é uma base viável, a matriz B' é não singular, este fato será demonstrado provando a existência da matriz $(B')^{-1}$.
Temos que $(B)^{-1} \cdot B = I$, como a matriz B' difere de B em apenas uma coluna, podemos obter o produto $(B)^{-1} \cdot (B') = E$, onde:

$$\text{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & q_{1\alpha} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & q_{2\alpha} & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & & q_{\alpha\beta} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{m\alpha} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Com $q_{\alpha\beta} \neq 0$ pertencente à diagonal principal. Consequentemente, existe a matriz

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{-q_{1\alpha}}{q_{\alpha\beta}} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \frac{-q_{2\alpha}}{q_{\alpha\beta}} & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & & \frac{1}{q_{\alpha\beta}} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-q_{m\alpha}}{q_{\alpha\beta}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

tal que $E^{-1} \cdot E = I$, o que implica que $E^{-1} \cdot (B)^{-1} \cdot (B') = I$, e portanto, $(B')^{-1} = E^{-1} \cdot (B)^{-1}$.
Se não há x_u que satisfaça o critério para deixar a base (4.4) não se aplica e consequentemente não há limitante superior para $x_v = t$, logo para todo $t \geqslant 0$ teremos uma solução viável, como a funcão objetivo aumenta com o aumento de t, se $t \to \infty$ o mesmo acontece com a função objetivo. □

Vértices e pivoteamento. O conjunto de restrições de um PPL determina um poliedro onde cada uma das soluções viáveis básicas é um de seus vértices. O processo de pivoteamento no método Simplex corresponde a buscar um vértice adjacente que aumente o valor da função objetivo, podemos observar esse processo na figura 13 na seção 4.1.
Em geral cada vértice de um poliedro $n - dimensional$ é determinado pela intersecção de n hiperplanos, caso haja um vértice determinado por mais que n hiperplanos (exemplo 4.4) pode ocorrer um pivoteamento degenerado, que consiste em encontrar uma nova solução viável básica sem mudar o vértice, neste caso não há mudança no valor da função objetivo.

Tableau Simplex. A cada iteração em que uma variável entra na base e uma variável sai da base um novo *tableau* é gerado a partir do antigo.
Sejam $\tau(n)$ e $\tau(n+1)$ respectivamente o antigo e o novo *tableau*.
O objetivo do *tableau simplex* é escrever as variáveis básicas em função das não básicas, desse modo, sendo x_v a variável que entra na base e x_u a variável que sai da base, o procedimento para se criar um novo *tableau* é o seguinte.
Buscamos a linha de $\tau(n)$ que tem x_u no lado esquerdo e a reescrevemos, desta vez, com x_v isolada no lado esquerdo. Temos agora uma equação com x_v escrita em função das variáveis não básicas.
O próximo passo é buscar nas outras linhas do *tableau* onde a variável x_v apareça e substituí-la pelo lado esquerdo da equação recém obtida. Desse modo geramos o novo *tableau* $\tau(n+1)$.

O MÉTODO DAS DUAS FASES

Nos problemas de programação linear onde as restrições são todas do tipo $\leqslant$, uma base viável inicial pode ser obtida facilmente, pois as colunas das variáveis de folga geram uma matriz identidade, como nem sempre isso é possível, podemos utilizar variáveis artificiais para obter uma solução viável básica inicial.

No método das duas fases a primeira consiste em adicionar variáveis artificiais ao conjunto de restrições do problema original e depois utilizar o método Simplex para minimizar a soma das variáveis artificiais.

Suponha que ao problema $Ax = b, \quad x \geqslant 0$ adicionemos um vetor artificial y, o que nos dará

$$Ax + y = b$$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

este problema modificado possui uma solução viável básica inicial, pois tomando como base as colunas das variáveis de folga juntamente com as colunas das variáveis artificiais geramos também uma matriz identidade.

Para voltarmos ao problema original devemos fazer com que as variáveis artificiais se anulem, pois $Ax = b$ se, e somente se $Ax + y = b$ com $y = 0$.

Podemos perceber que variáveis artificiais servem como um recurso para se iniciar o método Simplex, no entanto só teremos uma solução para o problema original se tornarmos todas as variáveis artificiais iguais a zero.

Na segunda fase deste método se as variáveis artificiais forem zeradas retornamos ao problema original, pois teremos uma solução viável básica com as variáveis originais do problema, caso contrário o problema original é inviável.

Para uma melhor compreensão, vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 4.5. Seja o PPL:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 24 && (4.5) \\
& 4x_1 - x_2 \geqslant 8 && (4.6) \\
& x_1 - 2x_2 = 0 && (4.7) \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Como a restrição (4.6) torna a origem inviável iremos criar um novo problema auxiliar, que satisfaça:

1. Uma solução viável básica inicial fácil de encontrar
2. A solução ótima (se houver) traz uma solução viável básica para o problema original.

O problema auxiliar será então:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \min \quad w = y_1 + y_2 & & \\
\text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 24 \\
 & 4x_1 - x_2 \qquad - x_4 + y_1 & = & 8 \\
 & x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + y_2 & = & 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geqslant & 0 \\
 & y_1, y_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Neste PPL auxiliar adicionamos y_1 e y_2 como variáveis artificiais, e a função objetivo artificial consiste em minimizar o somatório das variáveis artificiais.
Perceba que do PPL original apenas as restrições do tipo $\geqslant$ e $=$ (respectivamente (4.6) e (4.7)) recebem variáveis artificiais uma vez que utilizaremos como base inicial as colunas das variáveis de folga e as das variáveis artificiais.
O objetivo da primeira fase do método das duas fases é reduzir os valores de todas as variáveis artificiais a zero, tirando-as todas da base. Pela restrição de não negatividade, temos que $y_1, y_2 \geqslant 0$, logo $y_1 + y_2 = 0$ somente se $y_1 = y_2 = 0$, portanto podemos afirmar que enquanto tivermos $y_1 > 0$ ou $y_2 > 0$ a solução não é viável.
Para montarmos o primeiro *tableau Simplex* do problema auxiliar iremos tomar as variáveis artificiais e as de folga como básicas e as variáveis não básicas serão as variáveis de decisão e as de excesso. Ao escrevermos as variáveis artificiais em função das não básicas, teremos $\begin{cases} y_1 = 8 - 4x_1 + x_2 + x_4 \\ y_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$, logo a função objetivo artificial $w = y_1 + y_2$ terá a seguinte forma $w = 8 - 5x_1 + 3x_2 + x_4$, conforme podemos ver no *tableau*.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_3 & = & 24 & - & 3x_1 & - & 2x_2 & & \\
y_1 & = & 8 & - & 4x_1 & + & x_2 & + & x_4 \\
y_2 & = & & - & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\hline
w & = & 8 & - & 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_4
\end{array}
$$

Como o nosso problema auxiliar é de minimização buscamos na função objetivo artificial uma variável com coeficiente negativo para entrar na base. Esta variável só pode ser x_1, pelas regras já estabelecidas para pivoteamento a variável artificial y_2 sai da base e pode ser descartada pois se igualou a zero ao se tornar não básica, gerando o seguinte *tableau*.

$$\begin{array}{rclcl}
x_3 & = & 24 & - & 8x_2 \\
y_1 & = & 8 & - & 7x_2 & + & x_4 \\
x_1 & = & & & 2x_2 \\
\hline
w & = & 8 & - & 7x_2 & + & x_4
\end{array}$$

A variável que entra na base agora é x_2 e a que sai da base é y_1, sendo que esta variável artificial agora não básica também pode ser descartada, gerando o seguinte *tableau* .

$$\begin{array}{rclcl}
x_3 & = & \frac{104}{7} & - & \frac{8}{7}x_4 \\
x_2 & = & \frac{8}{7} & + & \frac{1}{7}x_4 \\
x_1 & = & \frac{16}{7} & + & \frac{2}{7}x_4 \\
\hline
w & = & 0
\end{array}$$

Chegamos ao objetivo da primeira fase, que é zerar a função objetivo artificial. Na segunda fase voltaremos ao nosso problema original, que consiste em maximizar a função objetivo $z = 3x_1 + x_2$, uma vez que $x_1 = \frac{16}{7} + \frac{2}{7}x_4$ e $x_2 = \frac{8}{7} + \frac{1}{7}x_4$, a função objetivo a ser maximizada será $z = 3\left(\frac{16}{7} + \frac{2}{7}x_4\right) + \frac{8}{7} + \frac{1}{7}x_4 = 8 + x_4$ e o *tableau Simplex* que inicia a segunda fase é:

$$\begin{array}{rclcl}
x_3 & = & \frac{104}{7} & - & \frac{8}{7}x_4 \\
x_2 & = & \frac{8}{7} & + & \frac{1}{7}x_4 \\
x_1 & = & \frac{16}{7} & + & \frac{2}{7}x_4 \\
\hline
z & = & 8 & + & x_4
\end{array}$$

A variável que entra na base é x_4 e a que sai é x_3 gerando o seguinte *tableau*:

$$\begin{array}{rclcl}
x_4 & = & 13 & - & \frac{7}{8}x_3 \\
x_2 & = & 3 & - & \frac{1}{8}x_3 \\
x_1 & = & 6 & - & \frac{1}{4}x_3 \\
\hline
z & = & 21 & - & \frac{7}{8}x_3
\end{array}$$

Este último *tableau* nos dá a solução ótima com $x = (6, 3, 0, 13)$ associada à base $B = [a_1, a_2, a_4]$ e o valor que maximiza a função objetivo é $z = 21$.

Lema 4.3. ***(PPL Inviável)***. *Se na fase I do método Simplex, chegarmos a uma solução ótima para o problema auxiliar e ainda tivermos uma variável artificial $y_i > 0$, o PPL original não possui solução viável.*

Demonstração. Suponha que se verifique tal situação na fase I, uma solução ótima para o problema auxiliar e uma variável artificial $y_i > 0$, analisemos os dois casos:
Caso I: Considere que no PPL original haja uma restrição do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \tag{4.8}$$

No problema auxiliar, com a adição da variável artificial y_i, teremos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i$. Caso $y_i > 0$ teríamos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n < b_i$, o que contradiz (4.8).
Caso II: Considere que no PPL original haja uma restrição do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i \tag{4.9}$$

No problema auxiliar, subtraindo uma variável de excesso x_{ie} e adicionando a variável artificial y_i, teremos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{ie} + y_i = b_i$. As variáveis x_{ie} e y_i não podem ser básicas simultaneamente, como por hipótese $y_i > 0$, temos que y_i é básica e x_{ie} é não básica, consequentemente $x_{ie} = 0$, e novamente teríamos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n < b_i$, o que contradiz (4.9). □

Exemplo 4.6. Vamos ilustrar este caso com o seguinte PPL.

$$\begin{array}{lrcl}
\max & z = 3x_1 + 4x_2 & & \\
\text{sujeito a} & 2x_1 - 3x_2 & \geqslant & 20 \\
 & x_1 + x_2 & = & 6 \\
 & x_2 & \leqslant & 4 \\
 & x_1, x_2 & \geqslant & 0
\end{array}$$

A partir deste PPL iremos criar um problema auxiliar:

$$\begin{array}{lrcl}
 & \min \quad w = y_1 + y_2 & & \\
\text{sujeito a} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad + y_1 \qquad & = & 20 \\
 & x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + y_2 & = & 6 \\
 & x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad\quad & = & 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geqslant & 0 \\
 & y_1, y_2 & \geqslant & 0
\end{array}$$

Isolando as variáveis auxiliares obtemos $y_1 = 20 - 2x_1 + 3x_2 + x_3$ e $y_2 = 6 - x_1 - x_2$, a função objetivo auxiliar ficará sendo $w = 26 - 3x_1 + 2x_2 + x_3$ gerando o seguinte *tableau*:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_1 & = & 20 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 \\
y_2 & = & 6 & - & x_1 & - & x_2 & & \\
x_4 & = & 4 & & & - & x_2 & & \\
\hline
w & = & 26 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3
\end{array}
$$

Na função objetivo auxiliar w a única variável com coeficiente negativo é x_1, como o problema auxiliar é de minimização x_1 entrará na base e pelas regras de pivoteamento a variável que sairá da base é y_2, que por ser uma variável artificial pode ser descartada, logo o *tableau* seguinte será:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
y_1 & = & 8 & + & 5x_2 & + & x_3 \\
x_1 & = & 6 & - & x_2 & & \\
x_4 & = & 4 & - & x_2 & & \\
\hline
w & = & 8 & + & 5x_2 & + & x_3
\end{array}
$$

Neste último *tableau* os coeficientes das variáveis não básicas são todos positivos, esta situação determina o critério de otimalidade para um problema de minimização, uma vez que ainda temos uma variável artificial $y_1 > 0$, podemos concluir que o problema original é inviável.

5

DUALIDADE

Em programação linear podemos associar a todo problema de maximização (minimização) um problema de minimização (maximização), sendo o primeiro chamado de primal e o segundo de dual.

LIMITES SUPERIORES

Seja o seguinte PPL, o qual chamaremos de primal:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + 4x_2 \leqslant 1 && (5.1)\\
& 3x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 3 && (5.2)\\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Se multiplicarmos a restrição (5.1) por dois e somarmos com o triplo da restrição (5.2), obtemos:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 2x_1 & + & 8x_2 & & & \leqslant & 2 \\
+ & 9x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \leqslant & 9 \\
\hline
 & 11x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & \leqslant & 11
\end{array}
$$

Devido a restrição de não negatividade das variáveis x_1, x_2 e x_3, podemos comparar a soma obtida com a função objetivo:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 11$$

Logo, $4x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 11$, ou seja, a função objetivo é limitada superiormente por 11. Este processo pode ser melhorado se, ao invés de usarmos números específicos, utilizarmos variáveis para encontrarmos um limite superior. Sejam $y_1, y_2 \geqslant 0$ tais variáveis que, por serem não negativas, manterão o sentido da desigualdade.

$$\begin{array}{rccc} & y_1(x_1 + 4x_2) & \leqslant & y_1 \\ + & y_2(3x_1 - x_2 + x_3) & \leqslant & 3y_2 \\ \hline & x_1(y_1 + 3y_2) + x_2(4y_1 - y_2) + x_3(y_2) & \leqslant & y_1 + 3y_2 \end{array}$$

Garantindo que

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\geqslant 4 \\ 4y_1 - y_2 &\geqslant 1 \\ y_2 &\geqslant 3 \end{aligned}$$

Estabelecemos a seguinte relação:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant x_1(y_1 + 3y_2) + x_2(4y_1 - y_2) + x_3(y_2) \leqslant y_1 + 3y_2$$

Para obtermos o melhor limite superior para a função objetivo, devemos minimizar $y_1 + 3y_2$, o que nos leva ao seguinte PPL:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = y_1 + 3y_2 \\ \text{sujeito a} \quad & y_1 + 3y_2 \geqslant 4 \\ & 4y_1 - y_2 \geqslant 1 \\ & y_2 \geqslant 3 \\ & y_1, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Este PPL é denominado de problema dual associado ao problema primal.

O PROBLEMA DUAL

Definição 5.1. Dado um PPL em sua forma canônica:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^t x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Este PPL é denominado de primal, sendo o seu dual o seguinte PPL:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = b^t y \\ \text{sujeito a} \quad & A^t y \geqslant c \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Exemplo 5.1. Determinar o dual do seguinte problema:

$$\begin{aligned} max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 2 \\ & 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leqslant 6 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

O problema dual, será então:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 2y_1 + 6y_2 + 7y_3 \\ \text{sujeito a} \quad & y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geqslant 4 \\ & 2y_1 - y_2 + 2y_3 \geqslant 3 \\ & 3y_1 + 5y_2 + y_3 \geqslant 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Proposição 5.2. *O dual de um problema dual é o seu problema primal.*

Demonstração. Tomemos o problema dual da definição 5.1:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = b^t y \\ \text{sujeito a} \quad & A^t y \geqslant c \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Com as devidas mudanças pode ser reescrito como um problema de maximização.

$$\begin{aligned} \max \quad & -w = (-b^t) y \\ \text{sujeito a} \quad & (-A^t) y \leqslant -c \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

O dual desse problema será:

$$\begin{aligned} \min \quad & -z' = -c^t x' \\ \text{sujeito a} \quad & (-A)x' \geqslant -b \\ & x' \geqslant 0 \end{aligned}$$

Que reescrito como um problema de maximização terá o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = c^t x' \\ \text{sujeito a} \quad & Ax' \leqslant b \\ & x' \geqslant 0 \end{aligned}$$

Este formato é equivalente ao problema primal da definição 5.1. □

TEOREMAS SOBRE DUALIDADE

Teorema 5.3 (Dualidade fraca). *Se x e y são, respectivamente, soluções viáveis para o primal e o dual de um PPL, então:*

$$c^t x \leqslant b^t y$$

Demonstração. Lembrando que $x, y, b \geqslant 0$, temos a seguinte sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned} c &\leqslant A^t y \\ c^t &\leqslant y^t A \\ c^t x &\leqslant y^t A x \\ c^t x &\leqslant y^t b \\ &= b^t y \end{aligned}$$

□

Teorema 5.4 (Dualidade forte). *Se o problema primal tem uma solução ótima x^*, então o problema dual também possui uma solução ótima y^* tal que:*

$$c^t x^* = b^t y^* \tag{5.3}$$

Demonstração. Devemos mostrar que a solução viável y^* do problema dual satisfaz (5.3). Por hipótese admitimos a existência de uma solução ótima x^* para o problema primal, uma vez que essa solução existe o método Simplex a encontrará, gerando uma última linha no *tableau* final conforme segue:

$$z = z^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} d_i^* w_i$$

Onde adotamos a seguinte notação: z^* é o valor ótimo da função objetivo e c_j^* representando os coeficientes das variáveis originais e d_i^* os coeficientes das variáveis de folga, com o devido cuidado de tornar nulos tais coeficientes se suas variáveis associadas forem básicas.

Como z^* é o valor ótimo da função objetivo temos também:

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \tag{5.4}$$

Façamos

$$y_i^* = -d_i^* \tag{5.5}$$

Mostraremos que $y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$ é uma solução viável para o problema dual satisfazendo (5.3).

Partindo da função objetivo, podemos escrever as seguinte igualdades:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} d_i^* w_i \\
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} (-y_i^*) \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \\
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \right) x_j \\
\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z^* + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \right) x_j
\end{aligned}$$

Consequentemente temos:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = z^* \tag{5.6}$$

$$c_j = c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \tag{5.7}$$

Por (5.4) e (5.6), podemos escrever que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \text{ que equivale a (5.3).}$$

Pela fato da última linha do *tableau* $z = z^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} d_i^* w_i$ trazer a solução ótima, segue que $c_j^* \leqslant 0$ e também $d_i^* \leqslant 0$, o que resulta por (5.7) e (5.5) em:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} &\geqslant c_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \\ y_i^* &\geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

Garantindo a viabilidade do problema dual.

$\square$

6

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

Neste capítulo estudaremos problemas de otimização onde algumas ou todas as variáveis de decisão são restritas a valores inteiros.

PROGRAMAÇÃO INTEIRA, MISTA E BINÁRIA

Programação inteira

Um problema cujas variáveis só assumem valores inteiros é chamado de programação inteira (PI) e possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max c^t x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Onde $x \in \mathbb{Z}^n$ significa que admitimos somente soluções cujas coordenadas sejam todas inteiras.

Exemplo 6.1. Seja o seguinte PI:

$$\begin{aligned} & \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 6x_1 + 11x_2 \leqslant 33 \\ & x_2 \leqslant 2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \\ & (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

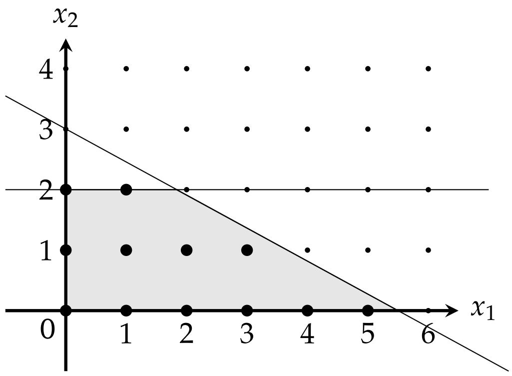

Figura 18: Programação inteira

Pela figura 18 podemos observar que as soluções viáveis do PI formam o seguinte conjunto:

$$S = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(4,0),(5,0)\}$$

Programação inteira mista

Um problema em que algumas variáveis, não necessariamente todas, devem ser inteiras é chamado de programação inteira mista (PIM) e possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max c^t x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \end{aligned}$$

Exemplo 6.2. Seja o seguinte PIM:

$$\begin{aligned} & \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 6x_1 + 11x_2 \leqslant 33 \\ & x_2 \leqslant 2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \\ & x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

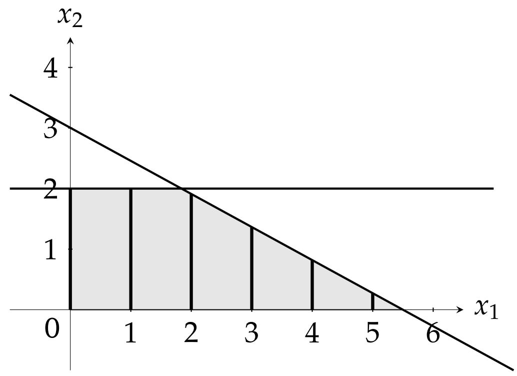

Figura 19: Programação inteira mista

As soluções viáveis são representadas pelos segmentos de reta:

$$\begin{array}{lcl}
(0,0) & - & (0,2) \\
(1,0) & - & (1,2) \\
(2,0) & - & (2,1.91) \\
(3,0) & - & (3,1.36) \\
(4,0) & - & (4,0.82) \\
(5,0) & - & (5,0.27)
\end{array}$$

Programação binária

Se as variáveis de um problema de programação inteira forem restritas ao conjunto $\mathbb{B} = \{0,1\}$, temos um problema de programação $0-1$ ou programação binária (PB).

$$\begin{aligned}
& \max c^t x \\
\text{sujeito a} \quad & Ax \leqslant b \\
& x \geqslant 0 \\
& x \in \mathbb{B}^n
\end{aligned}$$

Exemplo 6.3. Seja o seguinte PB:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 7x_2 \\
\text{sujeito a} \quad 7x_1 + 5x_2 &\leqslant 9 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0 \\
(x_1, x_2) &\in \mathbb{B}^2
\end{aligned}
$$

O conjunto de soluções viáveis desse PB é dado por:

$$S = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

Calculando-se o valor de cada solução temos que a solução ótima é dada por $x = (0,1)$, com valor $z = 7$.

BRANCH-AND-BOUND

O algoritmo Branch-and-Bound é em sua essência um método de bifurcação, pois a cada iteração geramos dois subproblemas a serem analisados. A idéia é particionar a região viável em subdivisões e repetir esse processo até chegarmos a uma solução ótima de acordo com as restrições do problema. Em geral utilizamos este método para problemas de programação inteira (PI), onde cada solução é um limite (*Bound*) que servirá como parâmetro para criar subdivisões da região viável (*Branch*).

Definição 6.1 (Relaxação linear)**.** Se descartarmos a restrição $x \in \mathbb{Z}^n$ em um problema de programação inteira (PI), obtemos um novo problema que é chamado de relaxação linear do PI.

Quando utilizamos o algoritmo Branch-and-Bound em um PI procedemos da seguinte maneira. Resolvemos a relaxação linear do PI, se a solução ótima desse problema relaxado tiver todas as suas coordenadas inteiras o PI está resolvido, caso tenhamos uma solução $\widehat{x}$ com um componente $\widehat{x}_i$ não inteiro, dividimos o problema relaxado em dois subproblemas onde adicionaremos as restrições $x_i \leqslant \lfloor \widehat{x}_i \rfloor$ e $x_i \geqslant \lfloor \widehat{x}_i \rfloor + 1$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. Esses subproblemas deverão ser também divididos em outros, enquanto uma dessas situações não ocorra:

- Subproblema inviável;

- Solução de componentes inteiras;
- Existe uma solução de componentes inteiras maior do que ou igual a solução obtida (maximização).

Exemplo 6.4. Seja o seguinte problema de programação inteira:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 19x_1 + 14x_2 \\
\text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0 \\
(x_1, x_2) &\in \mathbb{Z}^2
\end{aligned}
$$

Após a relaxação linear do PI obtemos o problema abaixo, denotado por P_0:

$$
\begin{aligned}
\max z_0 &= 19x_1 + 14x_2 \\
\text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

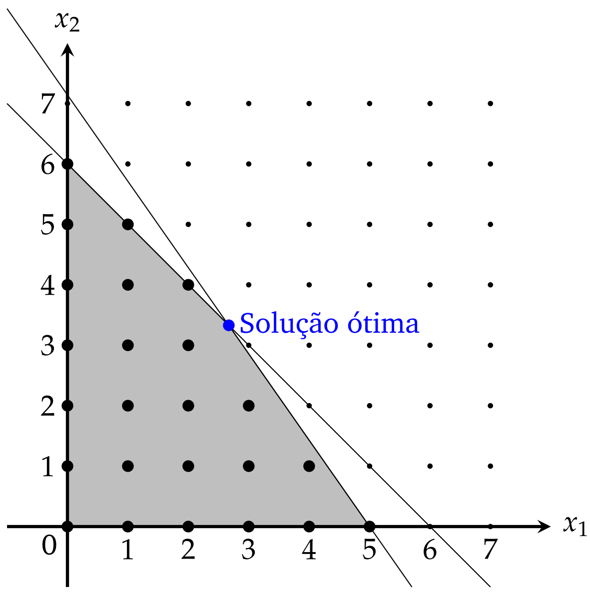

Figura 20: Problema relaxado P_0

A solução ótima do problema relaxado é $x = (2,67; 3,33)$ com valor da função objetivo $z_0 = 97,33$. Se fossemos arredondar a solução para os valores inteiros mais próximos, teríamos $x = (3,3)$ que não é uma solução viável, a solução inteira mais próxima da solução ótima é $x = (2,3)$ mas, conforme veremos no desenvolvimento desse problema, esta não é a solução ótima do PI.

Na solução ótima do PI a variável x_1 deverá assumir um valor inteiro, como na solução ótima do problema relaxado $x_1 = 2,67$ iremos admitir duas possibilidades, $x_1 \leqslant 2$ ou $x_1 \geqslant 3$.

Vamos analisar esses dois casos separadamente. Seja P_1 o problema obtido adicionando a restrição $x_1 \leqslant 2$ ao problema relaxado e P_2 o problema obtido adicionando a restrição $x_1 \geqslant 3$ a P_0.

As regiões viáveis de P_1 e P_2 podem ser observadas na figura 21.

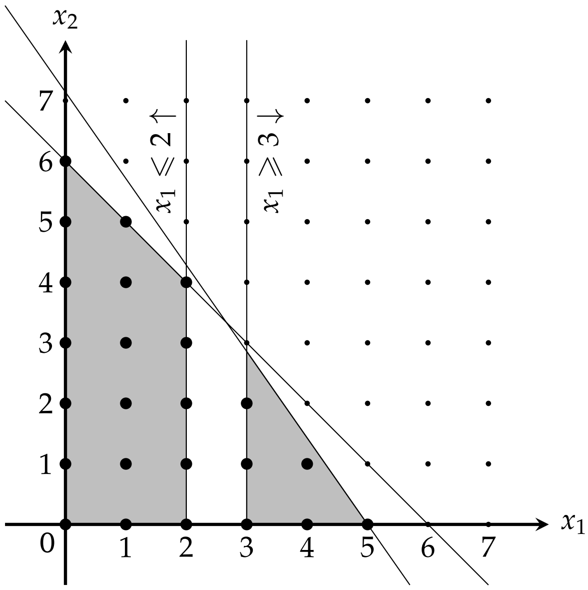

Figura 21: Subproblemas P_1 e P_2

O problema P_1 terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z_1 &= 19x_1 + 14x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 \qquad &\leqslant 2 \\ x_1, x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

A solução ótima de P_1 é obtida no ponto $x = (2, 4)$ com valor da função objetivo $z_1 = 94$, esta é uma solução viável inteira, mas não podemos garantir que ela é ótima antes de analisar P_2.

O problema P_2 terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z_2 &= 19x_1 + 14x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 \qquad &\geqslant 3 \\ x_1, x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

A solução ótima de P_2 é obtida no ponto $x = (3; 2, 86)$ com valor da função objetivo $z_2 = 97$, esta solução é maior que a solução obtida em P_1, logo continuaremos procurando uma solução ótima.

A solução ótima de P_2 contém uma componente não inteira $x_2 = 2, 86$, por esse motivo, iremos dividir P_2 em dois subproblemas adicionando a restrição $x_2 \leqslant 2$ no problema P_3 e $x_2 \geqslant 3$ no problema P_4, representados na figura 22.

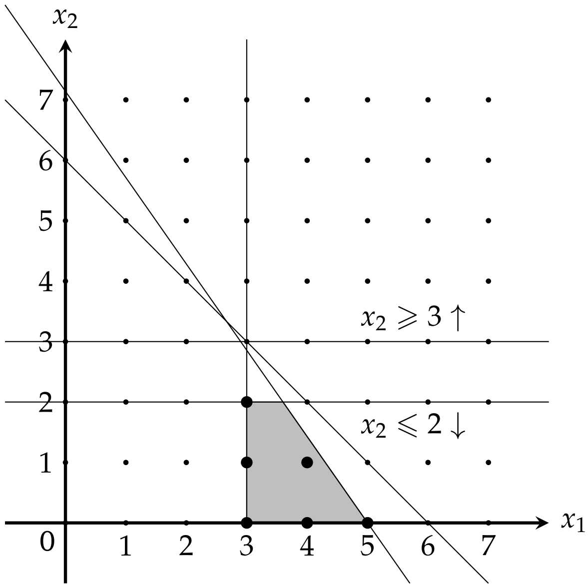

Figura 22: Subproblemas P_3 e P_4

O problema P_3 terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z_3 &= 19x_1 + 14x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 \qquad &\geqslant 3 \\ x_2 &\leqslant 2 \\ x_1, x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

A solução ótima de P_3 é obtida no ponto $x = (3,6;2)$ com valor da função objetivo $z_3 = 96,4$

O problema P_4 terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z_4 &= 19x_1 + 14x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \qquad (6.1) \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 \qquad (6.2) \\ x_1 \qquad &\geqslant 3 \qquad (6.3) \\ x_2 &\geqslant 3 \qquad (6.4) \\ x_1, x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Este problema é inviável, pois por (6.2), (6.3) e (6.4) devemos ter $(x_1, x_2) = (3, 3)$, o que é incompatível com a restrição (6.1).
Dividimos o problema P_3 em dois subproblemas P_5 e P_6 adicionando, respectivamente, as seguintes restrições, $x_1 \leqslant 3$ e $x_1 \geqslant 4$, conforme podemos observar na figura 23.

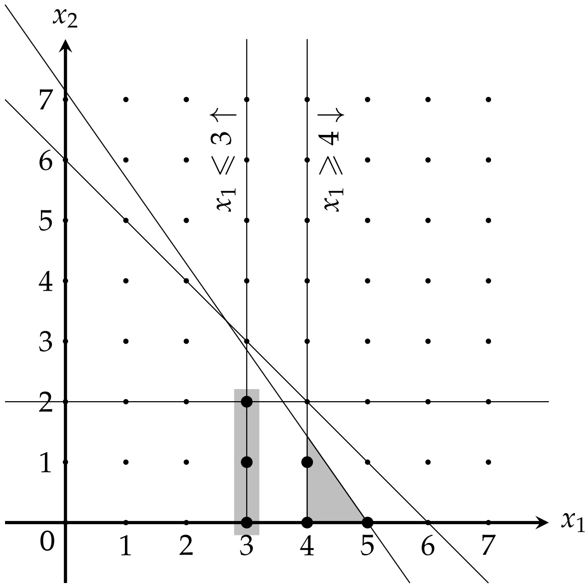

Figura 23: Subproblemas P_5 e P_6

O problema P_5 terá a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\max z_5 &= 19x_1 + 14x_2 \\
\text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
x_1 \qquad &= 3 \\
x_2 &\leqslant 2 \\
x_1, x_2 &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

A solução ótima de P_5 é obtida no ponto $x = (3; 2)$ com valor da função objetivo $z_5 = 85$, que apesar de ser inteira não é a solução ótima do PI, pois é menor que a solução inteira obtida no subproblema P_1.

O problema P_6 terá a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\max z_6 &= 19x_1 + 14x_2 \\
\text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
x_1 \qquad &\geqslant 4 \\
x_2 &\leqslant 2 \\
x_1, x_2 &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

A solução ótima de P_6 é obtida no ponto $x = (4; 1,43)$ com valor da função objetivo $z_6 = 96$.

O problema P_6 será dividido em dois subproblemas P_7 e P_8, adicionando as seguintes restrições, respectivamente, $x_2 \leqslant 1$ e $x_2 \geqslant 2$, conforme podemos ver na figura 24.

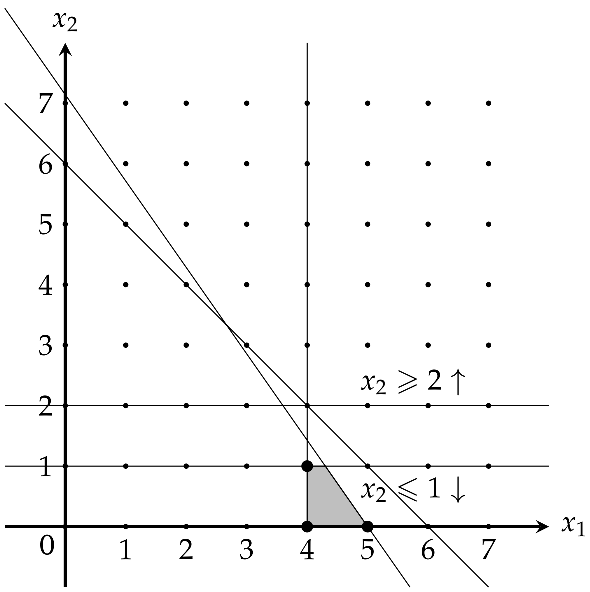

Figura 24: Subproblemas P_7 e P_8

O problema P_7 terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z_7 &= 19x_1 + 14x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 \qquad &\geqslant 4 \\ x_2 &\leqslant 1 \\ x_1, x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

A solução ótima de P_7 é obtida no ponto $x = (4,3;1)$ com valor da função objetivo $z_7 = 95.7$.
O problema P_8 terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z_8 &= 19x_1 + 14x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 && (6.5) \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 && (6.6) \\ x_1 \qquad &\geqslant 4 && (6.7) \\ x_2 &= 2 && (6.8) \\ x_1, x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Este problema é inviável, pois por (6.6), (6.7) e (6.8) devemos ter $(x_1, x_2) = (4, 2)$, o que é incompatível com a restrição (6.5).
Dividimos o problema P_7 em dois subproblemas P_9 e P_{10} adicionando as seguintes restrições, respectivamente, $x_1 \leqslant 4$ e $x_1 \geqslant 5$, conforme podemos ver na figura 25.

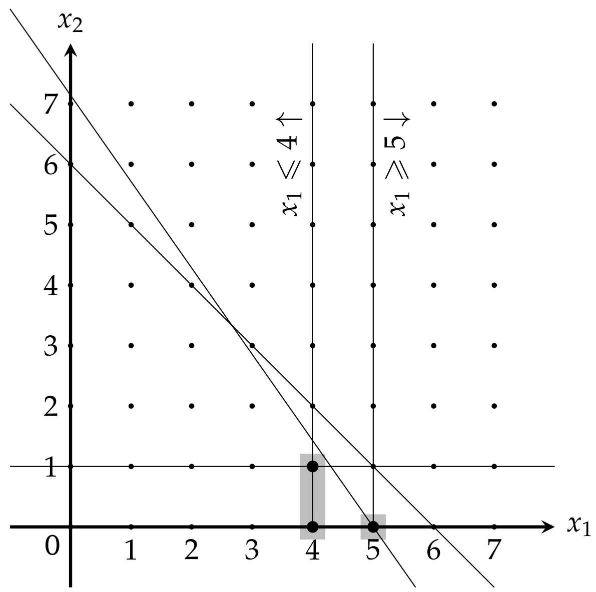

Figura 25: Subproblemas P_9 e P_{10}

O problema P_9 terá a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\max z_9 &= 19x_1 + 14x_2 \\
\text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
x_1 \qquad &= 4 \\
x_2 &\leqslant 1 \\
x_1, x_2 &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

A solução ótima de P_9 é obtida no ponto $x = (4; 1)$ com valor da função objetivo $z_9 = 90$, que apesar de ser inteira não é a solução ótima do PI, pois é menor que a solução inteira

obtida no subproblema P_1.
O problema P_{10} terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max z_{10} &= 19x_1 + 14x_2 \\ \text{sujeito a} \quad 10x_1 + 7x_2 &\leqslant 50 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 \qquad &\geqslant 5 \\ x_2 &\leqslant 1 \\ x_1, x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

A solução ótima de P_{10} é obtida no ponto $x = (5,0)$ com valor da função objetivo $z_{10} = 95$, que é a maior solução inteira obtida dentre todos os subproblemas.
Podemos visualizar o processo Branch-and-Bound através de uma árvore, conforme mostrar a figura 26.

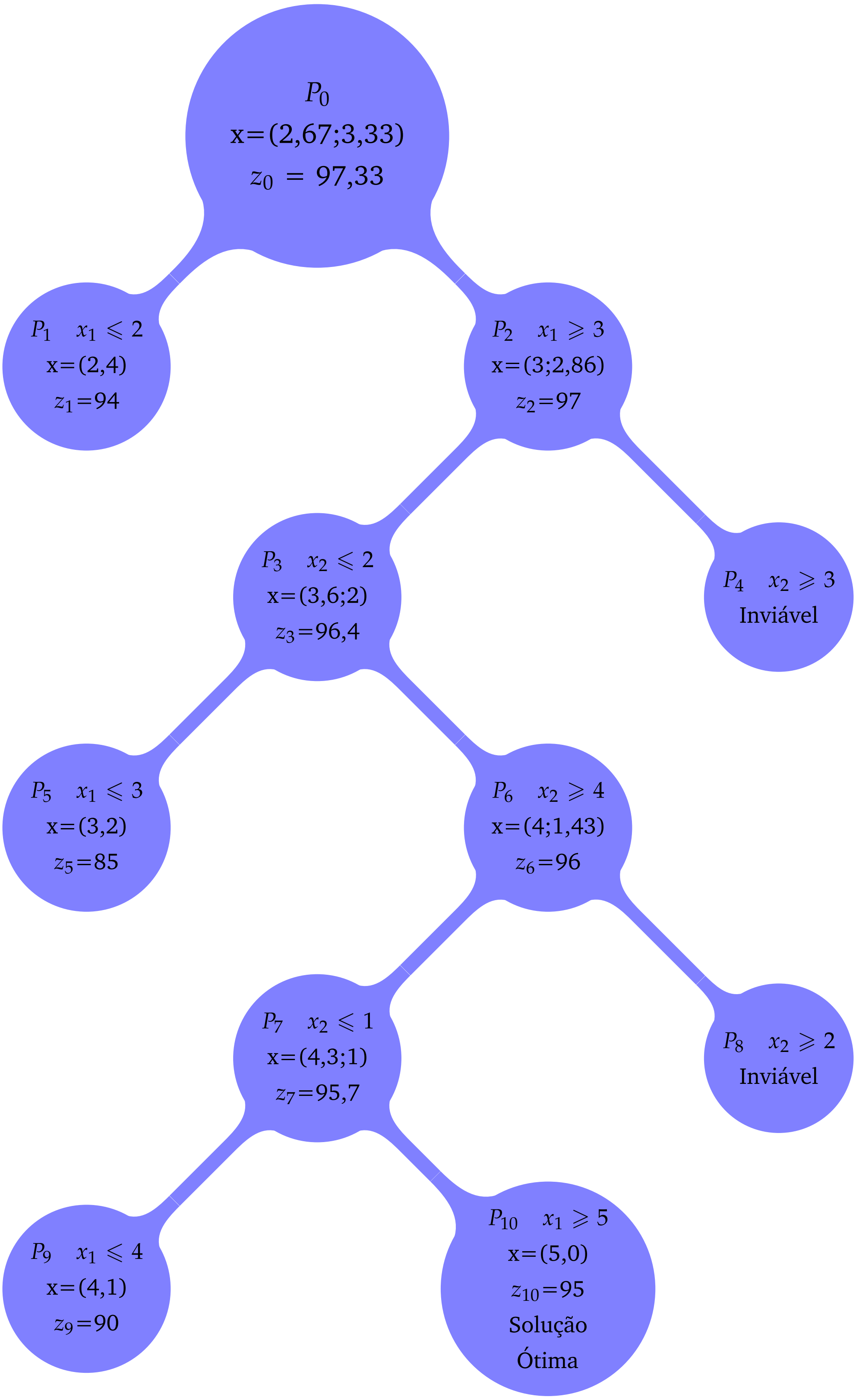

Figura 26: Árvore Branch-and-Bound

PLANOS DE CORTE

O método dos planos de corte consiste em adicionar restrições a um problema até que se chegue a uma solução ótima de componentes inteiras, cada uma destas restrições é chamada de *corte* e satisfaz os seguintes critérios:

- Todas soluções inteiras viáveis são viáveis após o *corte*;
- A solução ótima não inteira é inviável após o *corte*.

Seja o seguinte problema de programação inteira e sua relaxação linear:

max $\quad z = c^t x$	max $\quad z = c^t x$
s.a $Ax \leqslant b$	s.a $Ax \leqslant b$
$x \geqslant 0$	$x \geqslant 0$
$x \in \mathbb{Z}^n$	

Resolvendo o problema relaxado utilizando o *tableau Simplex*, podemos chegar a uma solução ótima com todas as variáveis inteiras, que é também uma solução ótima do PI. Caso contrário, lembrando que num *tableau Simplex* as variáveis básicas ($x_i \in B$) podem ser escritas em função das não básicas ($x_j \in N$) e de b, vamos considerar que b_i é não inteira, temos então a equação:

$$x_i + \sum a_{ij} x_j = b_i \tag{6.9}$$

Sejam $F_a = a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor$ e $F_b = b_i - \lfloor b_i \rfloor$, com $0 \leqslant F_a < 1$ e $0 \leqslant F_b < 1$.
Podemos reescrever (6.9) da seguinte maneira:

$$x_i + \sum (\lfloor a_{ij} \rfloor + F_a) x_j = \lfloor b_i \rfloor + F_b$$

Consequentemente, temos:

$$x_i + \sum \lfloor a_{ij} \rfloor x_j - \lfloor b_i \rfloor = F_b - \sum F_a x_j \tag{6.10}$$

Dessa maneira, o lado esquerdo, e consequentemente o direito, da equação (6.10) serão inteiros para qualquer solução viável inteira. Como $F_b < 1, F_a \geqslant 0$ e $x_j \geqslant 0$ lado direito de (6.10) $F_b - \sum F_a x_j$ é não positivo, o que nos dá:

$$b_i - \lfloor b_i \rfloor - \sum (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \leqslant 0$$

Que pode ser reescrito como:

$$\sum (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \geqslant b_i - \lfloor b_i \rfloor \tag{6.11}$$

A desigualdade (6.11) é chamada de *Corte de Gomory*.
Multiplicando (6.11) por (-1) e adicionando uma variável de folga s, temos uma nova restrição $-\sum(a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor)x_j + s = -b_i + \lfloor b_i \rfloor$, que adicionada ao *tableau* ótimo previamente obtido nos dará um novo problema que preserva as soluções viáveis inteiras e descarta a primeira solução ótima, daí podemos resolver o dual desse novo problema e obter uma nova solução ótima, prosseguindo assim até encontrar uma solução ótima inteira.

Exemplo 6.5. Seja o seguinte problema de programação inteira:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 - x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & 7x_1 - 2x_2 \leqslant 21 \\
& x_2 \leqslant 3 \\
& 2x_1 - 2x_2 \leqslant 5 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0 \\
& (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2
\end{aligned}$$

O conjunto de soluções inteiras viáveis e o poliedro gerado pelas restrições do PI podem ser visualizado na figura 27.
Adicionando variáveis de folga ao problema relaxado, temos:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 - x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 21 && (6.12) \\
& x_2 + x_4 = 3 && (6.13) \\
& 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 5 && (6.14) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Resolvendo esse problema pelo método Simplex, chegaremos a uma solução ótima de acordo com o *tableau I* abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_2 & = & 3 & & & - & x_4 \\
x_5 & = & \frac{23}{7} & + & \frac{2}{7}x_3 & - & \frac{10}{7}x_4 \\
x_1 & = & \frac{27}{7} & - & \frac{1}{7}x_3 & - & \frac{2}{7}x_4 \\
\hline
z & = & \frac{87}{7} & - & \frac{4}{7}x_3 & - & \frac{1}{7}x_4
\end{array}$$

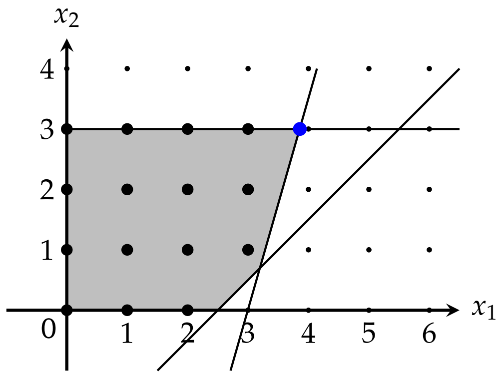

Figura 27: O ponto $(\frac{27}{7}, 3)$ representa a solução ótima obtida no *tableau I*

Pela terceira linha do *tableau I*, vemos que a variável $x_1 = \frac{27}{7}$ é não inteira, o que nos dará o seguinte corte de Gomory:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{7} - \lfloor\frac{1}{7}\rfloor\right) x_3 + \left(\frac{2}{7} - \lfloor\frac{2}{7}\rfloor\right) x_4 &\geqslant \frac{27}{7} - \lfloor\frac{27}{7}\rfloor \\ \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 &\geqslant \frac{6}{7} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Por (6.12) $x_3 = 21 - 7x_1 + 2x_2$ e por (6.13) $x_4 = 3 - x_2$, substituindo em (6.15), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}(21 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) &\geqslant \frac{6}{7} \\ 3 - x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{6}{7} - \frac{2}{7}x_2 &\geqslant \frac{6}{7} \\ x_1 &\leqslant 3 \end{aligned}$$

O corte de Gomory (6.15) é equivalente a $x_1 \leqslant 3$ e pode ser visualizado na figura 28.

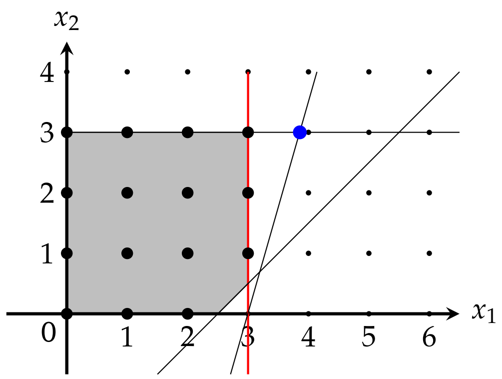

Figura 28: O corte de Gomory $x_1 \leqslant 3$ exclui a solução ótima $(\frac{27}{7}, 3)$ obtida no *tableau I*.

Multiplicando (6.15) por (-1) e adicionando a variável de folga $s_1 \geqslant 0$ temos:

$$-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4 + s_1 = \frac{6}{7} \tag{6.16}$$

Adicionando (6.16) ao *tableau I*, excluímos a solução ótima previamente obtida e o problema fica viável para o dual. Podemos agora aplicar o método Dual-Simplex para chegarmos a uma nova solução ótima representada pelo *tableau II* a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_2 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_5 & - & s_1 \\
x_3 & = & 1 & + & x_5 & + & 5s_1 \\
x_1 & = & 3 & & & - & s_1 \\
x_4 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{2}x_5 & + & s_1 \\
\hline
z & = & \frac{23}{2} & - & \frac{1}{2}x_5 & - & 3s_1
\end{array}$$

Pela primeira linha do *tableau II*, vemos que a variável $x_2 = \frac{1}{2}$ é não inteira, e portanto, gerará o seguinte corte de Gomory:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2} - \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor\right) x_5 &\geqslant \frac{1}{2} - \lfloor \frac{1}{2} \rfloor \\
\frac{1}{2}x_5 &\geqslant \frac{1}{2} \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

Por (6.14) $x_5 = 5 - 2x_1 + 2x_2$, substituindo em (6.17), teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(5 - 2x_1 + 2x_2) &\geqslant \frac{1}{2} \\
\frac{5}{2} - x_1 + x_2 &\geqslant \frac{1}{2} \\
x_1 - x_2 &\leqslant 2
\end{aligned}$$

O corte de Gomory (6.17) é equivalente a $x_1 - x_2 \leqslant 2$ pode ser observado na figura29.

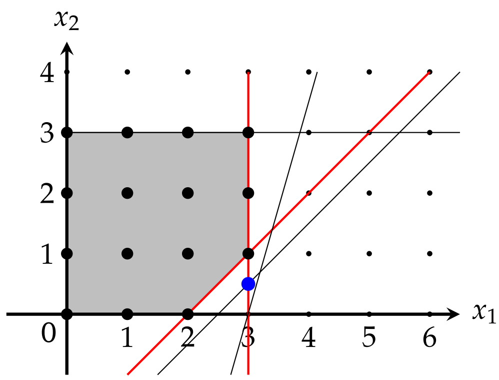

Figura 29: O corte de Gomory $x_1 - x_2 \leqslant 2$ exclui a solução ótima $(3, \frac{1}{2})$ obtida no *tableau II*.

Multiplicando (6.17) por (-1) e adicionando a variável de folga $s_2 \geqslant 0$ temos:

$$-\frac{1}{2}x_5 + s_2 = -\frac{1}{2} \tag{6.18}$$

Adicionando (6.18) ao *tableau II* e aplicando novamente o método Dual-Simplex chegaremos a uma nova solução ótima representada pelo *tableau III* a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_2 & = & 1 & - & s_1 & + & s_2 \\
x_3 & = & 2 & + & 5s_1 & + & 2s_2 \\
x_1 & = & 3 & - & s_1 & & \\
x_4 & = & 2 & + & s_1 & - & s_2 \\
x_5 & = & 1 & & & + & 2s_2 \\
\hline
z & = & 11 & - & 3s_1 & - & s_2
\end{array}$$

A solução ótima do PI é $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$ com valor da função objetivo $z = 11$, conforme está representado na figura30.

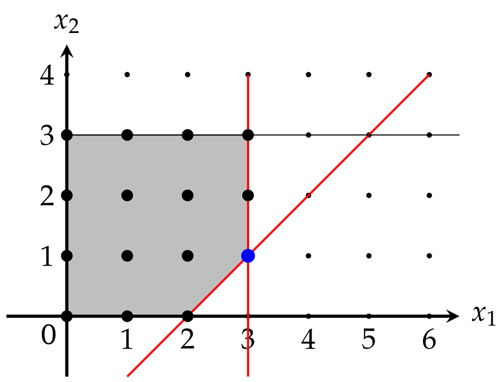

Figura 30: Após os dois cortes temos um poliedro com vértices de coordenadas inteiras.

MATRIZES TOTALMENTE UNIMODULARES

Veremos agora que alguns problemas de programação linear sempre terão soluções inteiras, podendo ser resolvidos diretamente pelo Método Simplex, tornando desnecessário utilizar os métodos Branch-and-Bound ou Planos de Corte.
Esta seção se justifica por existir alguns tipos de problemas que geram matrizes totalmente unimodulares, citamos o caso de problemas de transporte, que pode ser visto no exemplo 2.4 e também em [1] e [18].

Definição 6.2. Um poliedro $P \in \mathbb{R}^n$ é chamado de integral se todos os seus vértices pertencem a $\mathbb{Z}^n$.

Definição 6.3 (Matriz totalmente unimodular)**.** Uma matriz A é totalmente unimodular, se cada submatriz quadrada de A tem determinante igual a $0, 1$ ou -1.

Uma consequência imediata da definição é que cada elemento de uma matriz totalmente unimodular deve necessariamente ser igual a $0, 1$ ou -1 visto que cada um deles gera uma submatriz quadrada de ordem 1.

Exemplo 6.6. A matriz A_1 é totalmente unimodular, enquanto a matriz A_2 não é, uma vez que $\det(A_2) = 2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriedade. Se A é uma matriz totalmente unimodular, também serão:

- A matriz transposta de A.
- As matrizes obtidas multiplicando-se uma linha ou coluna por -1.
- As matrizes obtidas duplicando-se uma linha ou coluna de A.
- As matrizes obtidas suprimindo-se uma linha ou coluna de A.
- As matrizes obtidas por reordenação de linhas ou colunas de A.
- As matrizes obtidas adicionando-se em A uma linha ou coluna com no máximo um elemento não nulo.
- As matrizes obtidas por pivoteamento em A.
- A matriz $(A \quad I)$.

Lema 6.4. *Sejam A uma matriz de com todos os seus elementos inteiros e b um vetor de componentes inteiras. Se* $\det(A) = \pm 1$*, então $Ax = b$ tem solução integral.*

Demonstração. Utilizando a regra de Cramer:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Leftrightarrow x_i = \frac{\det(A^i)}{\det(A)}$$

Onde A^i é a matriz obtida trocando-se a *i-ésima* coluna de A por b.
Por hipótese $\det(A) = \pm 1$, logo $x_i = \pm(\det(A^i))$, pela integralidade de A e de b os

elementos de A^i serão também todos inteiros, o que acarreta $\det(A^i) \in \mathbb{Z}$ e portanto todos os x_i serão inteiros. □

Teorema 6.5. *Sejam A uma matriz $m \times n$ totalmente unimodular e $b \in \mathbb{Z}^m$, então qualquer vértice do poliedro $P = \{x : Ax \leqslant b\}$ é um vetor de coordenadas todas inteiras.*

Demonstração. Os vértices do poliedro são obtidos por $A^*x = b^*$, onde $A^*_{n\times n}$ é uma submatriz (não singular) de A e b^* a parte de b correspondente a A^*. O fato de A ser totalmente unimodular implica que A^* também é, consequentemente $\det(A^*) = \pm 1$, daí $A^*x = b^*$ tem solução inteira. Pelo lema 6.4 podemos concluir que x é um vetor de coordenadas inteiras. □

Corolário 6.6. *Sejam A uma matriz $m \times n$ totalmente unimodular e $b \in \mathbb{Z}^m$, então o poliedro $P = \{x : Ax \leqslant b\}$ é um poliedro integral.*

Corolário 6.7. *Sejam A uma matriz $m \times n$ totalmente unimodular, $b \in \mathbb{Z}^m$ e $c \in \mathbb{Z}^n$, então o PPL*

$$\begin{aligned} \max \quad z &= c^t x \\ Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

E o seu dual

$$\begin{aligned} \min \quad w &= b^t y \\ A^t y &\geqslant c \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Possuem solução ótima inteira, quando o valor ótimo for finito.

No exemplo a seguir, veremos um problema de maximização onde a matriz dos coeficientes (A), é totalmente unimodular.

Exemplo 6.7. Seja o seguinte PPL:

$$\begin{array}{rl} \max & z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 \qquad\quad + x_3 \leqslant 4 \\ & x_1 + x_2 \qquad\quad \leqslant 9 \\ & \qquad\ \ x_2 \qquad\quad \leqslant 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{array}$$

Inicialmente verificaremos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é totalmente unimodular.
A é uma matriz quadrada de ordem 3, com $\det(A) = 1$.
A matriz A gera as seguinte submatrizes quadradas de ordem 2:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes dessas submatrizes, temos:

$$\det(A_a) = 1 \qquad \det(A_b) = -1 \qquad \det(A_c) = 1 \qquad \det(A_d) = 0$$

Como todos os elementos de A são ou 0 ou 1, todas as submatrizes quadradas de ordem 1 terão determinantes 0 ou 1.
Concluímos que A é totalmente unimodular.

Prosseguindo com a resolução do problema, introduzimos as variáveis de folga para obtermos o PPL em sua forma padrão

$$\begin{array}{rl} \max & z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 \qquad + x_3 + x_4 \qquad\qquad = 4 \\ & x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad = 9 \\ & x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{array}$$

O que nos dá o seguinte *tableau Simplex*:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_4 & = & 4 & - & x_1 & & & - & x_3 \\ x_5 & = & 9 & - & x_1 & - & x_2 & & \\ x_6 & = & 7 & & & - & x_2 & & \\ \hline z & = & & & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 \end{array}$$

A primeira escolha é fazer x_2 entrar na base e, consequentemente a variável x_6 deverá sair, o que nos dá o seguinte *tableau*:

$$
\begin{array}{rclclclcl}
x_4 & = & 4 & - & x_1 & - & x_3 & & \\
x_5 & = & 2 & - & x_1 & & & + & x_6 \\
x_2 & = & 7 & & & & & - & x_6 \\
\hline
z & = & 49 & + & 5x_1 & + & 3x_3 & - & 7x_6
\end{array}
$$

Agora, escolhendo x_3 para entrar na base, a variável x_4 deverá sair, e teremos o seguinte *tableau*:

$$
\begin{array}{rclclclcl}
x_3 & = & 4 & - & x_1 & - & x_4 & & \\
x_5 & = & 2 & - & x_1 & & & + & x_6 \\
x_2 & = & 7 & & & & & - & x_6 \\
\hline
z & = & 61 & + & 2x_1 & - & 3x_4 & - & 7x_6
\end{array}
$$

Fazendo x_1 entrar na base, x_5 sairá e teremos o *tableau*:

$$
\begin{array}{rclclclcl}
x_3 & = & 2 & - & x_4 & + & x_5 & - & x_6 \\
x_1 & = & 2 & & & - & x_5 & + & x_6 \\
x_2 & = & 7 & & & & & - & x_6 \\
\hline
z & = & 65 & - & 3x_4 & - & 2x_5 & - & 5x_6
\end{array}
$$

Conforme era esperado, obtemos uma solução ótima integral $x = (2, 7, 2, 0, 0, 0)$ com valor da função objetivo $z = 65$.

7

SALA DE AULA

Neste capítulo apresentaremos alguns problemas de programação linear com duas ou três variáveis a serem resolvidos por alunos de ensino médio. O objetivo é trazer uma sequência didática estruturada que compreenda a modelagem do problema, a visualização gráfica das restrições e a obtenção da solução ótima do problema.
Essa sequencia de problemas é sugerida como um tema suplementar ao aluno do terceiro ano do ensino médio que já domine alguns conceitos de Geometria Analítica, tais como reta, intersecção de retas, semiplanos, etc...
A principal motivação é mostrar ao aluno que com o uso de ferramentas matemáticas por ele já dominadas é possível resolver problemas práticos envolvendo otimização.
Um outro aspecto relevante é apresentar, já no ensino médio, uma pequena amostra de uma disciplina ministrada em cursos de graduação tais como Engenharia de Produção, Logística, Matemática e outros mais.

PROBLEMAS COM DUAS VARIÁVEIS DE DECISÃO

Nesta seção traremos dois exemplos de problemas de programação linear, sendo um de maximização e outro de minimização, o roteiro sugerido para se resolver esses problemas é dado a seguir:
Roteiro de Resolução

Passo 1: Montar uma tabela com as informações do problema, de modo que as variáveis de decisão estejam na primeira coluna.

Passo 2: Obter com o auxílio da tabela a função objetivo.

Passo 3: Obter com o auxílio da tabela as restrições do problema.

Passo 4: Representar as restrições graficamente, determinando a região viável juntamente com os seus vértices.

Passo 5: Representar a função objetivo graficamente, associando valores para encontrar a solução ótima.

Passo 6: Concluir o problema, determinando o ponto ótimo e o valor ótimo da função objetivo.

Problema de maximização

Problema 1. *Adaptado de* [18]. Uma empresa fabrica dois produtos que são processados em duas linhas de montagem. A linha de montagem 1 possui 100 horas disponíveis e a linha de montagem 2 possui 42 horas disponíveis. Cada produto exige 10 horas de processamento na linha 1, enquanto na linha 2 o produto 1 necessita de 7 horas e o produto 2 precisa de 3 horas. O lucro obtido no produto 1 é de R$ 6,00 por unidade, e o lucro do produto 2 é de R$ 4,00 por unidade.

- Formule um modelo de programação linear para esse problema de modo a maximizar o lucro.
- Resolva este problema graficamente.

Resolução:
Para facilitar a visualização do problema montaremos a tabela 9 com as informações do enunciado, que servirá de auxílio para a obtenção da função objetivo e as restrições do problema. As variáveis de decisão (x, y) devem ser discriminadas na primeira coluna:

Produto	Linha de montagem 1	Linha de montagem 2	Lucro unitário
Produto 1 (x)	10	7	R$6,00
Produto 2 (y)	10	3	R$4,00
Disponibilidade	100 horas	42 horas	•

Tabela 9: Dados do problema 1

O nosso objetivo é maximizar o lucro, com o auxílio da tabela 9 percebemos que o lucro do produto $1(x)$ é de R$6,00 por unidade, logo a contribuição deste no lucro é dada por $6x$, já do produto 2 (y) é de R$4,00 por unidade, e portanto a contribuição deste no lucro é dada por $4y$, de forma que a função objetivo é dada por:

$$\max \quad z = 6x + 4y$$

A linha de montagem 1 possui 100 horas disponíveis, ou seja, é limitada por 100, como cada produto nessa linha exige 10 horas de processamento, temos a restrição

$$10x + 10y \leqslant 100$$

Já na linha de montagem 2 o produto 1 (x) exige 7 horas de processamento, ou seja, cada x unidades gasta $7x$ horas, e o produto 2 (y) exige 3 horas de processamento, cada y unidades gasta $3y$ horas, como a linha de montagem 2 é limitada em 42 horas, temos a restrição

$$7x + 3y \leqslant 42.$$

Há também uma restrição chamada de restrição de não negatividade, como é impossível termos uma quantidade negativa de produtos, temos que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
O problema modelado terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x + 4y \\ \text{sujeito a} \quad & 10x + 10y \leqslant 100 \\ & 7x + 3y \leqslant 42 \\ & x \geqslant 0 \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Para uma melhor visualização do problema, iremos utilizar como recurso computacional o software Geogebra[1].
No campo ENTRADA: digitaremos as restrições do problema, primeiro as desigualdades

$10x + 10y < 100$	$7x + 3y < 42$	$x > 0$	$y > 0$

Depois as retas

$10x + 10y = 100$	$7x + 3y = 42$	$x = 0$	$y = 0$

1 Disponível em `https://www.geogebra.org/`

Em seguida,com a ferramenta INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS, determinaremos os pontos de intersecção das retas. Conforme podemos observar na figura31.

$$
\begin{aligned}
A &= (x = 0) &\cap\quad& (y = 0)\\
B &= (x = 0) &\cap\quad& (10x + 10y = 100)\\
C &= (10x + 10y = 100) &\cap\quad& (7x + 3y = 42)\\
D &= (7x + 3y = 42) &\cap\quad& (y = 0)
\end{aligned}
$$

Os pontos A, B, C e D são os vértices da região viável.

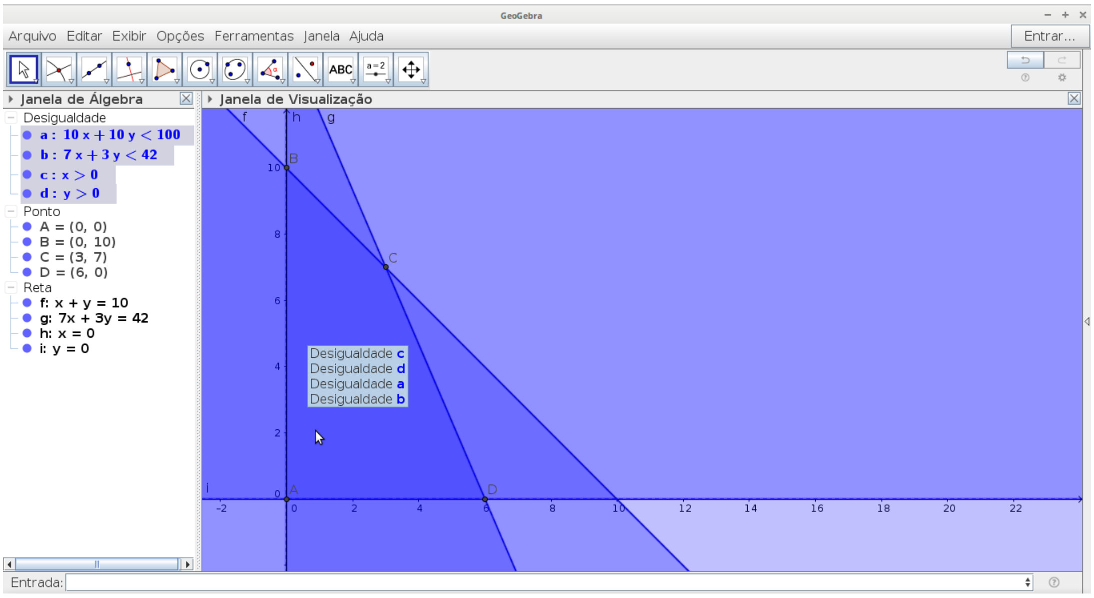

Figura 31: A região de tonalidade azul mais escura é a região viável do problema.

O próximo passo é introduzir a função objetivo no gráfico, como o valor desta função é variável utilizaremos a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE com um intervalo definido entre 0 e 50 para criar uma variável associada ao valor da função objetivo e no campo ENTRADA: digitaremos a equação $6x + 4y = e$, onde e é a letra da variável do CONTROLE DESLIZANTE.

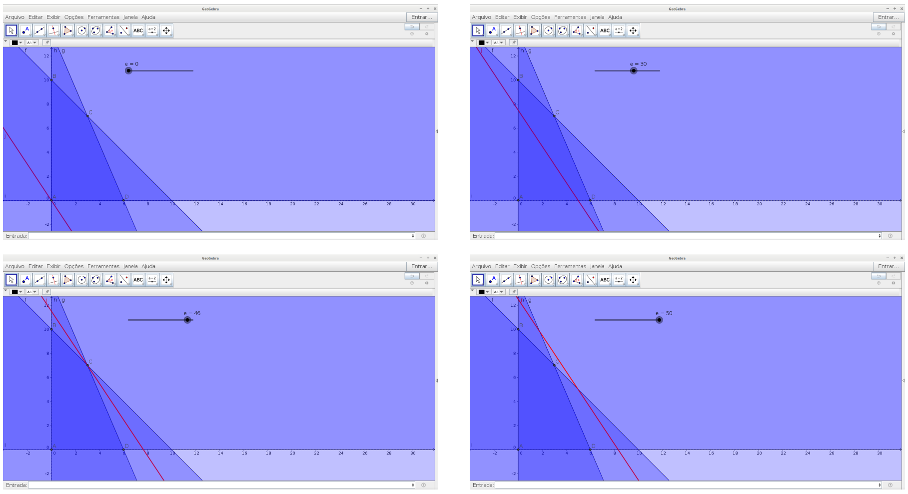

Figura 32: Variando o valor do CONTROLE DESLIZANTE é possível visualizar o comportamento da função objetivo.

Conforme podemos observar na figura33 para $e\!=\!46$ a função objetivo alcança o seu valor viável máximo no ponto $C = (3, 7)$ que é um dos vértices da região viável.
Podemos concluir então que a solução ótima do problema é dada por (x,y)= (3,7) e o valor ótimo da função objetivo é dado por $z = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 7 = 18 + 28 = 46$, ou seja, o lucro máximo de R$46,00 é obtido fabricando-se 3 unidades do produto 1 e 7 unidades do produto 2.
O protocolo de construção no software Geogebra do problema 1 está descrito na figura 34.

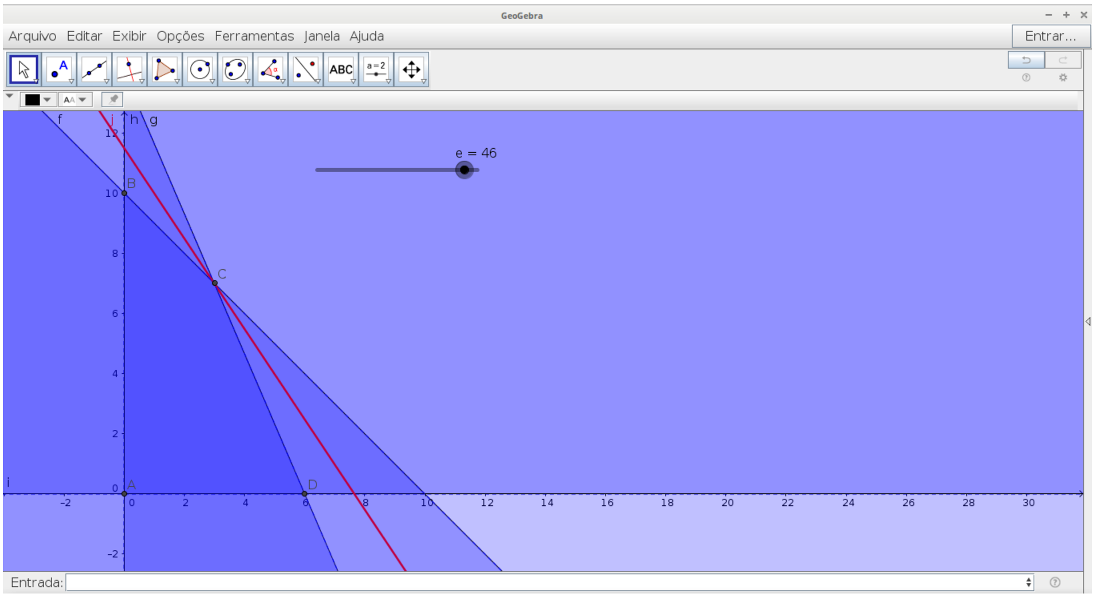

Figura 33: A função objetivo encontra seu valor viável máximo no ponto C=(3,7), vértice da região viável

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Descrição	Definição	Valor
1	Desigualdade a				a: 10x + 10y < 100
2	Reta f				f: x + y = 10
3	Desigualdade b				b: 7x + 3y < 42
4	Reta g				g: 7x + 3y = 42
5	Desigualdade c				c: x > 0
6	Reta h				h: x = 0
7	Desigualdade d				d: y > 0
8	Reta i				i: y = 0
9	Ponto A		Ponto de interseção de h, i	Interseção[h, i]	A = (0, 0)
10	Ponto B		Ponto de interseção de f, h	Interseção[f, h]	B = (0, 10)
11	Ponto C		Ponto de interseção de f, g	Interseção[f, g]	C = (3, 7)
12	Ponto D		Ponto de interseção de g, i	Interseção[g, i]	D = (6, 0)
13	Número e	a = 2			e = 46
14	Reta j		6x + 4y = e	6x + 4y = e	j: 3x + 2y = 23

Figura 34: Protocolo de construção do problema 1 no Geogebra.

Problema de minimização

Problema 2. *Adaptado de* [18] A Companhia "Tigre com Fome" faz um cereal com vários ingredientes. Dois destes ingredientes, aveia e arroz, fornecem vitaminas A e B. A empresa quer saber quantas onças de aveia e arroz deve incluir em cada caixa de cereal para atender aos requisitos mínimos de 48 miligramas de vitamina A e 12 miligramas de vitamina B, minimizando o custo. Uma onça de aveia contribui com 8 miligramas de vitamina A e 1 miligrama de vitamina B, enquanto uma onça de arroz contribui com 6 miligramas de vitamina A e 2 miligramas de vitamina B. Uma onça de aveia custa R$0,50, e uma onça de arroz custa R$ 0,30.

- Formular um modelo de programação linear para este problema.
- Resolver este problema graficamente.

Resolução:
Inicialmente montaremos uma tabela com os dados do problema, com as variáveis de decisão aveia (x) e arroz (y), discriminadas na primeira coluna.

Ingrediente onças	Vitamina A miligramas	Vitamina B miligramas	Custo por onça
Aveia (x)	8	1	0,50
Arroz (y)	6	2	0,30
Necessidade	48	12	•

Tabela 10: Dados do problema 2.

O nosso objetivo é minimizar o custo, pelos dados do problema o custo da aveia é de R$ 0,50 por onça, ou seja, sua contribuição no custo é de $0,50x$, enquanto que o custo do arroz é de R$ 0,30, o que nos dá uma contribuição no custo de $0,30y$ por onça. A função objetivo fica assim determinada:

$$\min \quad z = 0,50x + 0,30y$$

O requisito mínimo de vitamina A é de 48 miligramas, como cada onça de aveia contribui com 8 miligramas e cada onça de arroz contribui com 6 miligramas, temos a restrição:

$$8x + 6y \geqslant 48$$

O requisito mínimo de vitamina B é de 12 miligramas, como cada onça de aveia contribui com 1 miligrama e cada onça de arroz contribui com 2 miligramas, temos a restrição:

$$x + 2y \geqslant 12$$

Adicionando as restrições da não negatividade, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ o problema modelado terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad z &= 0,50x + 0,30y \\ \text{sujeito a} \quad 8x + 6y &\geqslant 48 \\ x + 2y &\geqslant 12 \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

O próximo passo é determinar as restrições no software Geogebra e obter o conjunto viável: No campo ENTRADA: digitaremos as restrições do problema, primeiro as desigualdades

$8x + 6y > 48$	$x + 2y > 12$	$x > 0$	$y > 0$

Depois as retas

$8x + 6y = 48$	$x + 2y = 12$	$x = 0$	$y = 0$

Em seguida,com a ferramenta INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS, determinaremos os pontos de intersecção das retas. Conforme podemos observar na figura35.

$$\begin{aligned} A = (x = 0) \quad &\cap \quad (8x + 6y = 48) \\ B = (8x + 6y = 48) \quad &\cap \quad (x + 2y = 12) \\ C = (x + 2y = 12) \quad &\cap \quad (y = 0) \end{aligned}$$

Os pontos A, B e C são os vértices da região viável, que nesse caso é ilimitada.

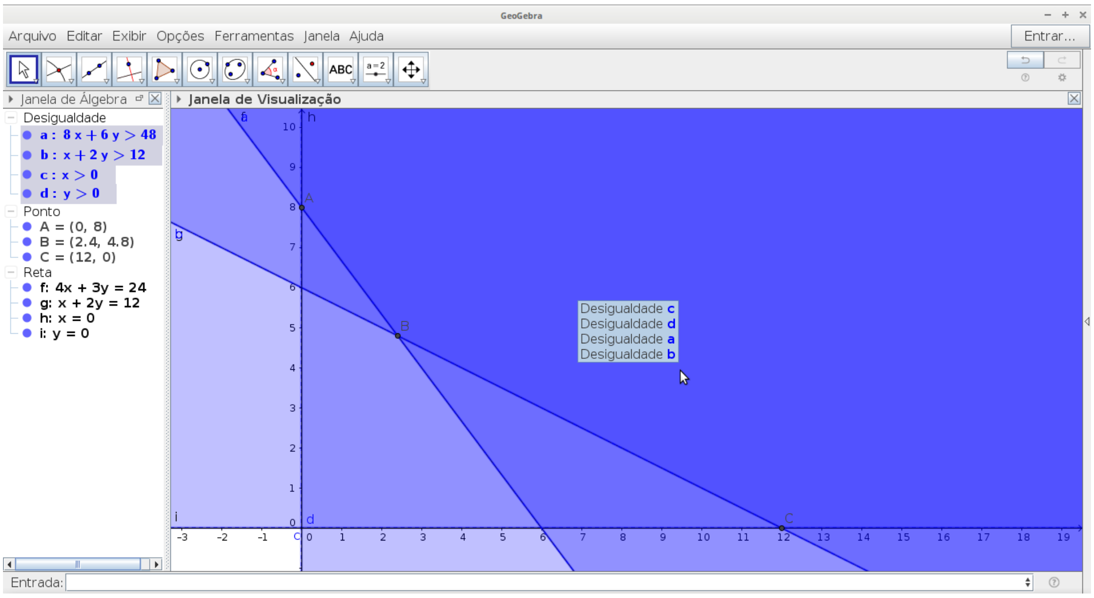

Figura 35: A região de tonalidade azul mais escura é a região viável do problema.

Finalmente podemos introduzir a função objetivo no gráfico, utilizando a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE criamos uma variável, no intervalo de 0 a 10, para associar ao valor desta função, e digitamos no campo ENTRADA: $0,5x + 0,3y = e$, sendo e a variável do CONTROLE DESLIZANTE.

Pela figura36 podemos perceber que a solução ótima do problema é o ponto A = (0,8) e o valor ótimo da função objetivo é dado por $z = 0,5 \cdot 0 + 0,3 \cdot 8 = 2,4$.

Concluímos portanto que o custo mínimo é obtido utilizando 8 onças de arroz a um custo de R$ 2,40 por caixa de cereal.

O protocolo de construção no software Geogebra do problema 2 está descrito na figura 37.

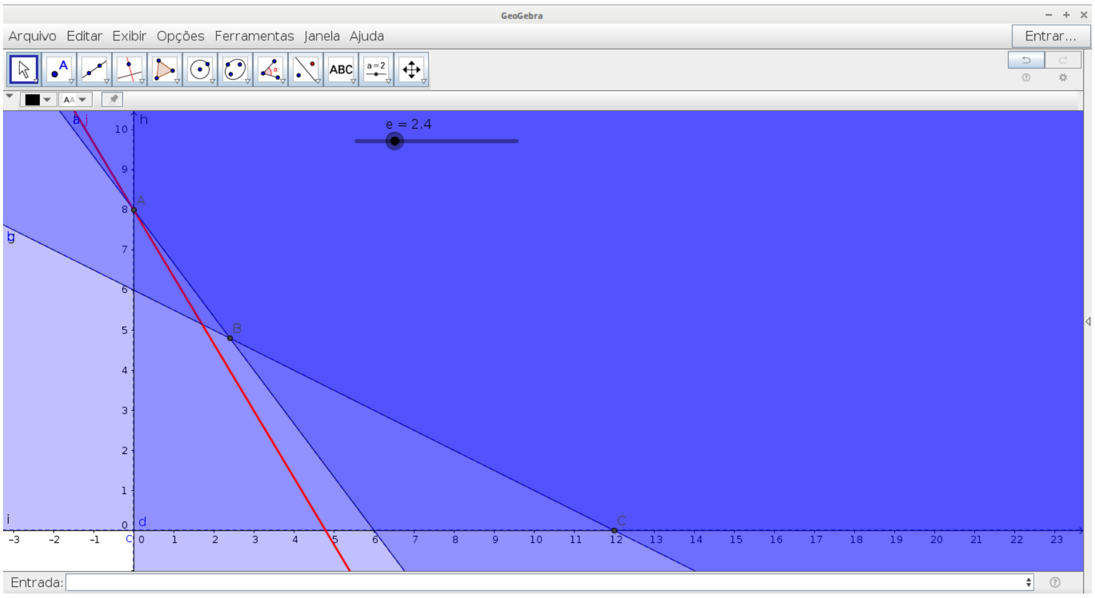

Figura 36: A função objetivo encontra seu valor viável mínimo no ponto A=(0,8), vértice da região viável

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Descrição	Definição	Valor
1	Desigualdade a				a: 8x + 6y > 48
2	Reta f				f: 4x + 3y = 24
3	Desigualdade b				b: x + 2y > 12
4	Reta g				g: x + 2y = 12
5	Desigualdade c				c: x > 0
6	Reta h				h: x = 0
7	Desigualdade d				d: y > 0
8	Reta i				i: y = 0
9	Ponto A		Ponto de interseção de f, h	Interseção[f, h]	A = (0, 8)
10	Ponto B		Ponto de interseção de f, g	Interseção[f, g]	B = (2.4, 4.8)
11	Ponto C		Ponto de interseção de g, i	Interseção[g, i]	C = (12, 0)
12	Número e	a = 2			e = 2.4
13	Reta j		0.5x + 0.3y = e	0.5x + 0.3y = e	j: 0.5x + 0.3y = 2.4

Figura 37: Protocolo de construção do problema 2 no Geogebra.

PROBLEMAS COM TRÊS VARIÁVEIS DE DECISÃO

Apesar da possibilidade de um PPL ser inviável ou ter infinitas soluções, para o aluno do ensino médio, trabalharemos apenas com problemas de solução única, neste caso, vale enfatizar a característica da solução ótima ser um vértice da região viável, conforme pudemos observar nos problemas 1 e 2.
O problema de maximização que iremos apresentar será dividido em duas etapas, inicialmente faremos a modelagem do problema e a seguir, buscaremos a sua solução ótima, iniciando na origem e percorrendo os vértices do poliedro que representa a região viável.

Problema 3. Uma confeitaria vende três tipos de bolo, nos sabores baunilha, mesclado e chocolate e os vende, respectivamente por R$ 20,00, R$ 30,00 e R$40,00. A demanda diária máxima é de 8 bolos de baunilha, 6 bolos mesclados e 4 Bolos de chocolate. Um dia o confeiteiro verificou que no seu estoque havia apenas 16kg de farinha de trigo.
Sabendo-se que cada bolo consome 1kg de farinha de trigo, formule um modelo de programação linear para esse problema de modo a maximizar a receita.

Resolução:
Com os dados do problema podemos montar uma tabela, que servirá de referência para a obtenção da função objetivo e das restrições.

Sabor	Farinha (kg)	Demanda máxima	Preço de venda (R$)
Baunilha (x)	1	8	20
Mesclado (y)	1	6	30
Chocolate (z)	1	4	40
Disponibilidade	16	•	•

Tabela 11: Dados do problema 3

O objetivo é maximizar a receita, pela tabela 11 vemos que cada bolo de baunilha é vendido por R$20,00, ou seja, sua contribuição na receita é dada por $20x$, analogamente o bolo mesclado contribui com $30y$ e o bolo de chocolate com $40z$, o que nos dá a função objetivo a ser maximizada.

$$\max \quad w = 20x + 30y + 40z$$

A disponibilidade de farinha de trigo é de 16kg, como cada bolo consome 1kg de farinha, teremos a seguinte restrição:

$$x + y + z \leqslant 16$$

As demandas diárias de cada sabor serão discriminadas em três restrições distintas.

- Baunilha $\Rightarrow x \leqslant 8$
- Mesclado $\Rightarrow y \leqslant 6$
- Chocolate $\Rightarrow z \leqslant 4$

Adicionando a restrição de não negatividade, temos o seguinte problema modelado:

$$\begin{aligned} \max \quad & w = 20x + 30y + 40z \\ \text{sujeito a} \quad & x + y + z \leqslant 16 \\ & x \leqslant 8 \\ & y \leqslant 6 \\ & z \leqslant 4 \\ & x, y, z \geqslant 0 \end{aligned}$$

No próximo problema, iremos utilizar os dados obtidos na resolução do problema 3 e a ideia do método Simplex, que é partir de um vértice do conjunto viável e ir percorrendo vértices adjacentes até encontrar uma solução ótima.
Pode-se orientar os alunos a seguir o seguinte conjunto de instruções para encontrar o valor máximo da função objetivo:
Instruções para o problema 4.

1. Parta da origem e busque um vértice adjacente em que haja um aumento na função objetivo.
2. Continue buscando um vértice adjacente que traga um aumento na função objetivo até chegar em um vértice no qual isso não seja mais possível.
3. Quando não for possível aumentar a função objetivo o vértice é ótimo, e a solução do problema foi obtida.

Problema 4. O conjunto de restrições do problema 3 tem sua representação gráfica na figura 38. Siga as instruções dadas e encontre a solução ótima.

(A) Partindo do vértice A e buscando os próximos vértices em ordem lexicográfica (ordem alfabética).

(B) Partindo do vértice A e buscando os próximos vértices pelo critério de maior ganho na função objetivo.

Observação. *É possível obter a solução ótima calculando-se para todos os vértices do poliedro o valor de $w = 20x + 30y + 40z$, porém a intenção é fazer com que o aluno parta do vértice A e chegue na solução ótima por um caminho de vértices adjacentes.*

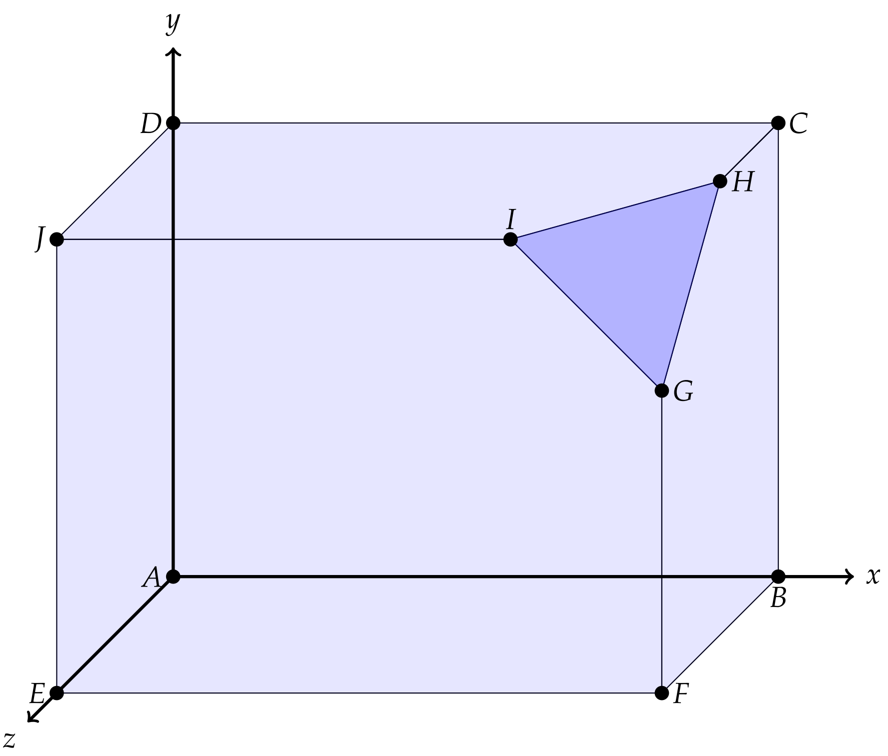

Figura 38: O conjunto de restrições do problema 3 é representado pelo Poliedro.

Os vértices do poliedro são dados na tabela 12 a seguir:

A=(0,0,0)	B=(8,0,0)
C=(8,6,0)	D=(0,6,0)
E=(0,0,4)	F=(8,0,4)
G=(8,4,4)	H=(8,6,2)
I=(6,6,4)	J=(0,6,4)

Tabela 12: Coordenadas dos Vértices

Resolução (A) - Ordem lexicográfica:

1. O valor da função objetivo para $A = (0, 0, 0)$ é:

$$w_A = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 0$$

Partindo de A, existem três possibilidades de escolha de vértices adjacentes B, D e E. Escolhendo, pela ordem lexicográfica, o vértice $B = (8, 0, 0)$, teremos:

$$w_B = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 160$$

Obviamente houve um aumento no valor da função objetivo, que passou de 0 para 160.

2. Os vértices adjacentes a B são A, C e F, não faz sentido voltar para o vértice A, logo as possibilidades de escolha são duas C e F. Escolhendo, pela ordem lexicográfica, o vértice $C = (8, 6, 0)$, teremos:

$$w_C = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 0 = 160 + 180 = 340$$

Novamente há um aumento no valor da função objetivo, que dessa vez passou de 160 para 340.

3. Os vértices adjacentes a C, são B, D e H, não faz sentido voltarmos para B, logo as possibilidades de escolhas são duas D e H. Pela ordem, escolhemos o vértice $D(0, 6, 0)$, o que nos dá:

$$w_D = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 0 = 180$$

Nesse caso não há aumento na função objetivo, logo devemos verificar a outra possibilidade, que é o vértice $H = (8, 6, 2)$, onde teremos:

$$w_H = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 2 = 160 + 180 + 80 = 420$$

Esse vértice traz um aumento na função objetivo que passa de 340 para 420.

4. Os vértices adjacentes a H são C, G e I, não faz sentido voltar para o vértice C, o que nos deixa com duas possibilidades G e I. Pela ordem, escolhemos o vértice $G = (8, 4, 4)$, e teremos:

$$w_G = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 4 + 40 \cdot 4 = 160 + 120 + 160 = 440$$

Que traz um aumento na função objetivo, passando de 420 para 440.

5. Os vértices adjacentes a G são F, H e I, não faz sentido voltar para o vértice H, sobrando F e I como possibilidades. Escolhendo, pela ordem, $F = (8, 0, 4)$ teremos:

$$w_F = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 4 = 160 + 160 = 320$$

   Que não traz ganho para a função objetivo. No vértice $I = (6, 6, 4)$ temos:

$$w_I = 20 \cdot 6 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 4 = 120 + 180 + 160 = 460$$

   Nesse caso há um aumento na função objetivo que passa de 440 para 460.

6. Os vértices adjacentes a I são G, H e J como já passamos pelos vértices G e H, só nos resta testar o vértice $J = (0, 6, 4)$, o que nos daria:

$$w_J = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 4 = 180 + 160 = 340$$

   Que não traz ganho na função objetivo.

Concluimos, então que o valor ótimo da função objetivo é 460, obtido no vértice $I = (6, 6, 4)$. O caminho percorrido pode ser visto na figura 39.

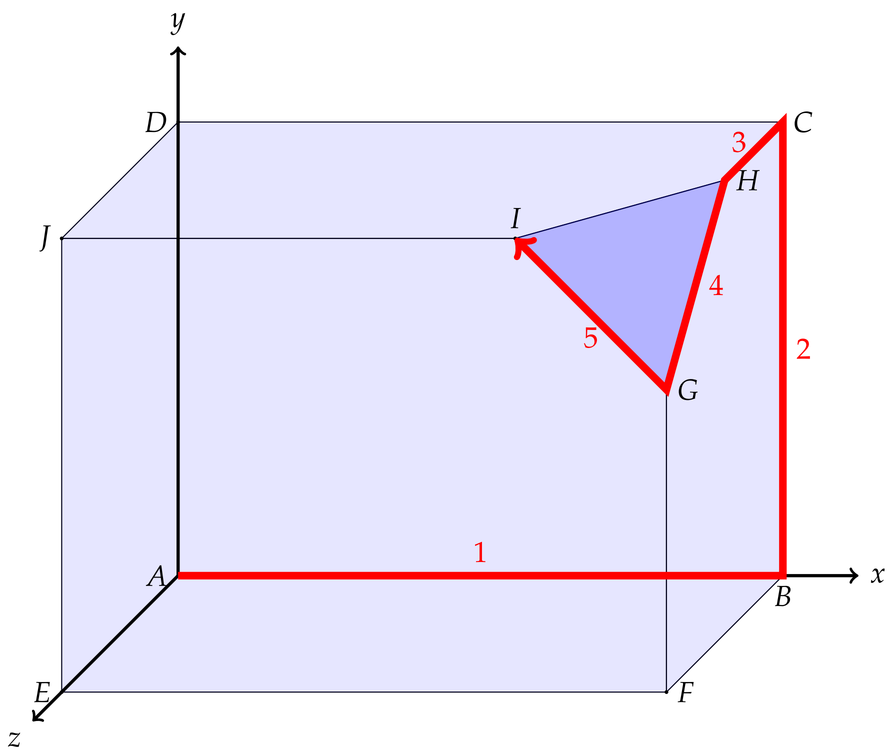

Figura 39: Caminho de vértices $ABCHGI$ percorridos na busca da solução ótima.

Resolução (B) - Maior ganho

1. O valor da função objetivo para $A = (0, 0, 0)$ é

$$w_A = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 0$$

   a partir de A, existem três possibilidades de escolha de vértices adjacentes B, D e E.

$$B = (8, 0, 0) \Rightarrow w_B = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 160$$
$$D = (0, 6, 0) \Rightarrow w_D = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 0 = 180$$
$$E = (0, 0, 4) \Rightarrow w_E = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 4 = 160$$

   O maior ganho é a escolha do vértice D que traz um aumento na função objetivo de 0 para 180.

2. Os vértices adjacentes a D são A, C e J, não faz sentido voltar para o vértice A, logo as possibilidades a serem analisadas são C e J.

$$C = (8, 6, 0) \Rightarrow w_C = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 0 = 160 + 180 = 340$$
$$J = (0, 6, 4) \Rightarrow w_J = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 4 = 180 + 160 = 340$$

   Nesse caso há um empate e, arbitrariamente, escolheremos o vértice J, que traz um aumento na função objetivo de 180 para 340. (Sugestão: escolha o vértice C)

3. Os vértices adjacentes a J, são D, E e I, já vimos que no vértice D e E não teremos aumento na função objetivo, logo a única possibilidade a ser analisada é o vértice I.

$$I = (6, 6, 4) \Rightarrow w_I = 20 \cdot 6 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 4 = 120 + 180 + 160 = 460$$

   Há um ganho na escolha do vértice I, a função objetivo passa de 340 para 460.

4. Os vértices adjacentes a I são G, H e J não faz sentido voltar ao vértice J e portanto as possibilidades a serem analisadas são os vértices G e H.

$$G = (8, 4, 4) \Rightarrow w_G = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 4 + 40 \cdot 4 = 160 + 120 + 160 = 440$$
$$H = (8, 6, 2) \Rightarrow w_H = 20 \cdot 8 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 2 = 160 + 180 + 80 = 420$$

   Não há ganho nos vértices G e H em relação ao vértice I.

Concluimos, também por essa estratégia, que o valor ótimo da função objetivo é 460, obtido no vértice $I = (6, 6, 4)$. O caminho percorrido pode ser visto na figura 40.

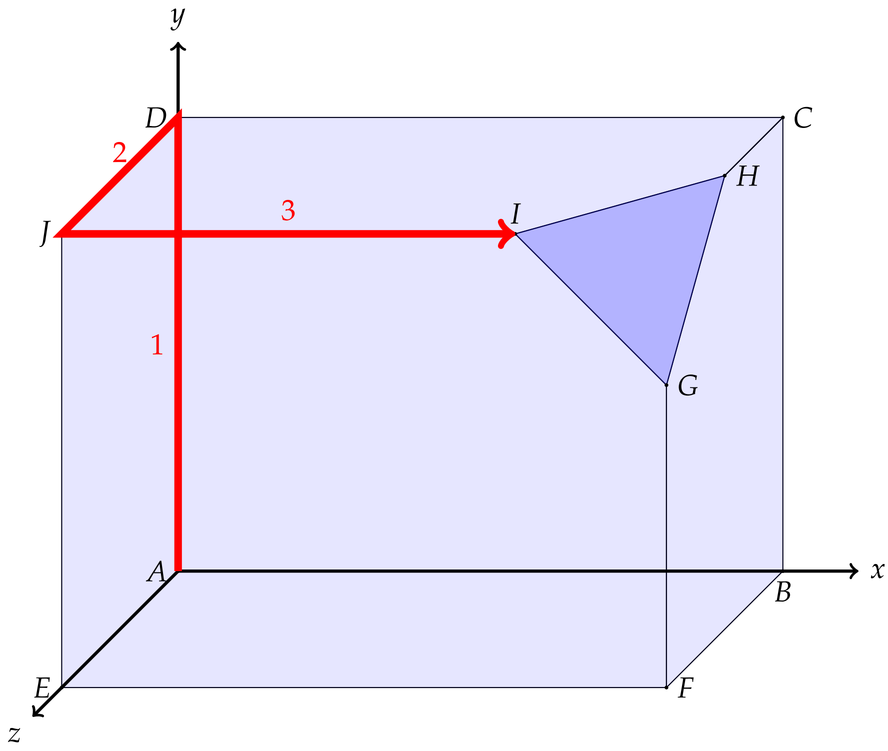

Figura 40: Caminho de vértices $ADJI$ percorridos na busca da solução ótima.

Comparativo entre as estratégias.
Após a resolução do problema 4 pelas duas estratégias podemos fazer o seguinte comparativo.
Na estratégia de ordem lexicográfica, a solução ótima é obtida pelo caminho $ABCHGI$, sendo necessárias cinco mudanças de vértice para se chegar ao ponto ótimo. Observando a figura 41 podemos perceber também que para irmos do vértice H para I passamos pelo vértice G, o que era desnecessário, visto que I é adjacente ao vértice H.
Na estratégia de maior ganho, a solução ótima foi obtida por um caminho mais curto $ADJI$, ou seja, foram necessárias apenas três mudanças de vértice para se chegar ao ponto ótimo.

Vale também ressaltar que apesar da estratégia de maior ganho ter chegado mais rápido no ponto ótimo, isto não é uma regra. No problema dado, na estratégia de maior ganho, poderiamos ter seguido o caminho $ADCHI$, com 4 mudanças de vértice, e na estratégia da ordem lexicográfica, com uma escolha diferente da nomenclatura de cada vértice, seria possível chegar ao ponto ótimo com 3 mudanças de vértice, ou seja, não existe uma estratégia conhecida para o método Simplex percorrer o menor caminho possível.

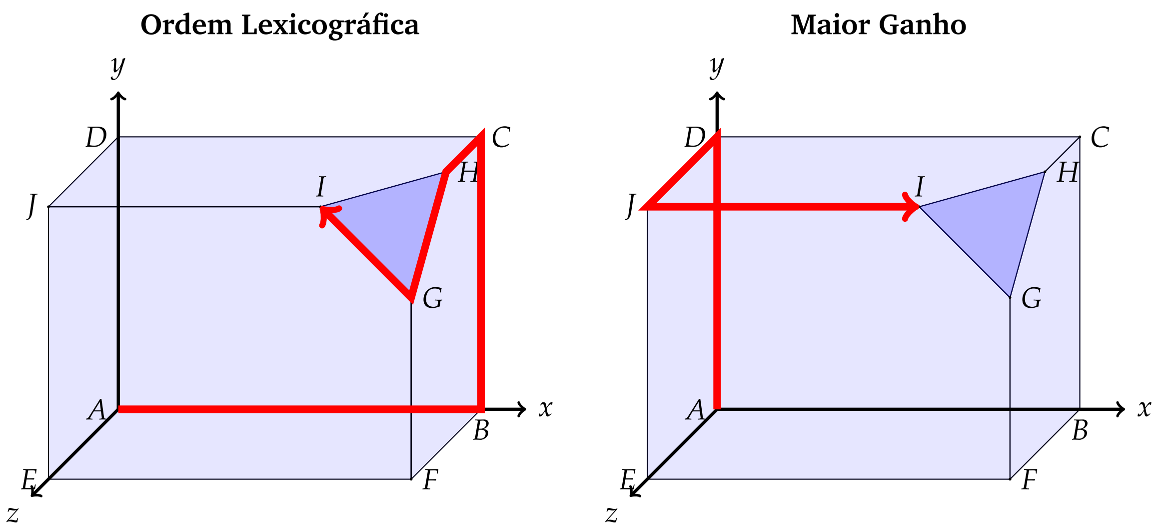

Figura 41: Comparativo entre estratégias

PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Em muitos problemas de programação linear, por motivos práticos ou lógicos, estaremos interessados apenas nas soluções de componentes inteiras, nesta seção apresentaremos um problema onde esta situação ocorre.

Problema 5. Um marceneiro com 20 horas de trabalho disponíveis por semana fabrica dois tipos de produto, bancos e mesas. Para se fazer um banco, que é vendido por R$ 500,00, gasta-se 3 horas de trabalho e 2 chapas de madeira. Para se fazer uma mesa, que é vendida por R$ 400,00 gasta-se 2 horas de trabalho e 5 chapas de madeira. Dado que o suprimento semanal de madeira é de 35 chapas, pergunta-se. Qual deve ser a quantidade de bancos e mesas fabricados semanalmente de modo a se obter a maior receita possível?

- Formular um modelo de programação linear para este problema.
- Resolver este problema graficamente.

Resolução:
Inicialmente montaremos uma tabela com os dados do problema:

Produto	Horas de trabalho	Chapas de madeira	Preço de venda
Banco (x)	3	2	500
Mesa (y)	2	5	400
Disponibilidade	20	35	•

Tabela 13: Dados do problema 5

Para maximizar a receita, devemos determinar a contribuição de cada banco (x) e cada mesa (y) na receita, pelo preço de venda informado temos que a função objetivo é dada por:

$$\max \quad z = 500x + 400y$$

A disponibilidade de 20 horas nos dará a seguinte restrição:

$$3x + 2y \leqslant 20$$

O suprimento semanal de chapas de madeira gera a restrição a seguir:

$$2x + 5y \leqslant 35$$

Além da restrição de não negatividade $x, y \geqslant 0$, vamos introduzir uma nova restrição, como mesas e cadeiras não podem ser vendidas em quantidades fracionadas, a solução ótima deverá ser formada por coordenadas inteiras, ou seja, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. O problema modelado será o seguinte:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 500x + 400y \\ \text{sujeito a} \quad & 3x + 2y \leqslant 20 \\ & 2x + 5y \leqslant 35 \\ & x, y \geqslant 0 \\ & (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

O próximo passo é determinar as restrições no software Geogebra e obter o conjunto viável: No campo ENTRADA: digitaremos as restrições do problema, primeiro as desigualdades

$3x + 2y < 20$	$2x + 5y < 35$	$x > 0$	$y > 0$

Depois as retas

$3x + 2y = 20$	$2x + 5y = 35$	$x = 0$	$y = 0$

Em seguida,com a ferramenta INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS, determinaremos os pontos de intersecção das retas.

$$
\begin{aligned}
A &= (x = 0) & \cap \quad & (y = 0) \\
B &= (x = 0) & \cap \quad & (2x + 5y = 35) \\
C &= (2x + 5y = 35) & \cap \quad & (3x + 2y = 20) \\
D &= (3x + 2y = 20) & \cap \quad & (y = 0)
\end{aligned}
$$

Os pontos A, B, C eD são os vértices da região viável. Para introduzir a função objetivo no gráfico utilizamos a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e criamos uma variável, no intervalo de 0 a 4000, que associaremos ao valor da função objetivo digitando no campo ENTRADA: $500x + 400y = e$, sendo e a variável do CONTROLE DESLIZANTE. Pela figura42 podemos perceber que a solução ótima do problema é o ponto C = (2,73;5,91) e o valor ótimo da função objetivo é dado por $z = 500 \cdot 2,73 + 400 \cdot 5,91 = 3729$.

Esta solução não é válida para o problema, visto que o ponto $C = (2,73; 5,91)$ não é um ponto de coordenadas inteiras.

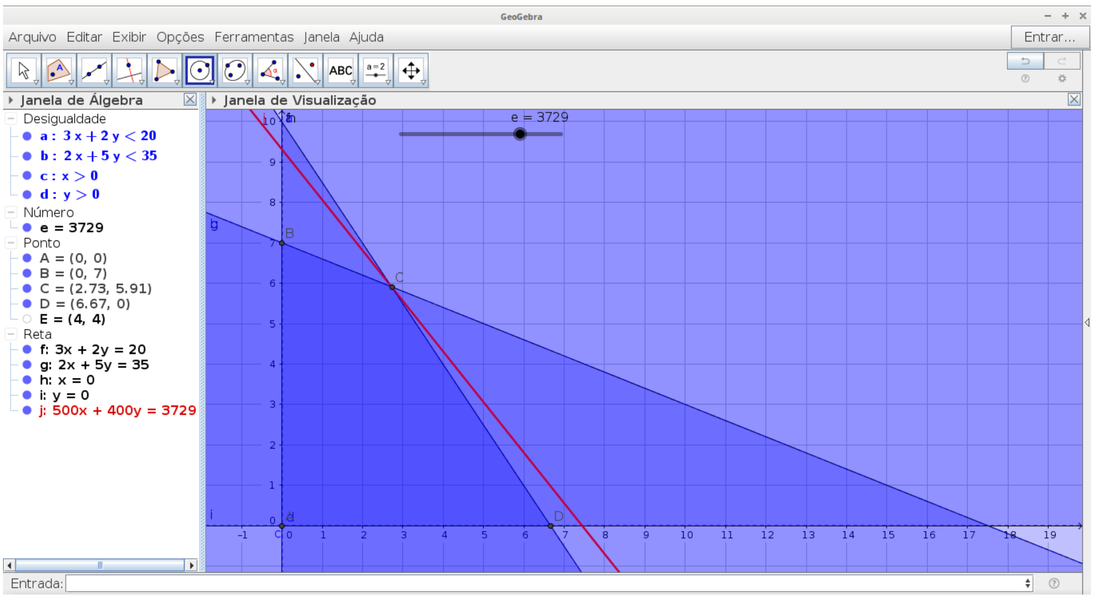

Figura 42: O vértice ótimo não possui coordenadas inteiras.

Uma ideia que poderia ocorrer ao aluno seria procurar um ponto de coordenadas inteiras próximo ao ponto C, três candidatos para serem testados inicialmente são:

$$E = (2,5) \Rightarrow z = 500 \cdot 2 + 400 \cdot 5 = 1000 + 2000 = 3000$$
$$F = (2,6) \Rightarrow z = 500 \cdot 2 + 400 \cdot 6 = 1000 + 2400 = 3400$$
$$G = (3,5) \Rightarrow z = 500 \cdot 3 + 400 \cdot 5 = 1500 + 2000 = 3500$$

Mas utilizando o CONTROLE DESLIZANTE, pode-se encontrar uma solução inteira melhor que as anteriores no ponto $H = (4,4)$, e conforme podemos observar na figura 43 esta é a solução inteira ótima, com valor da função objetivo $z = 500 \cdot 4 + 400 \cdot 4 = 2000 + 1600 = 3600$, ou seja, a melhor opção para o marceneiro é fabricar 4 mesas e 4 cadeiras.

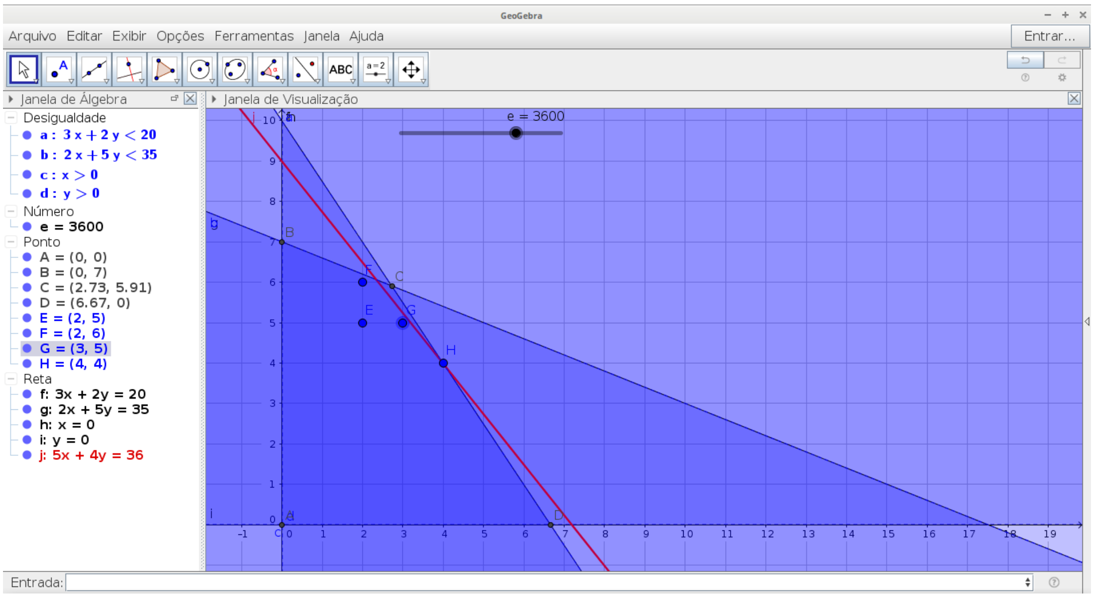

Figura 43: Solução inteira ótima

BIBLIOGRAFIA

[1] ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H.; *Pesquisa Operacional,* Elsevier, 2007. ISBN 978-85-352-1453-3

[2] BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J.; SHERALI, H.D.; *Linear Programming and Network Flows,* Wiley, 2010. ISBN 978-0-470-46272

[3] DENARDO, E. V.; *Linear Programming and Generalizations,* Springer, 2011. ISBN 978-1-4419-6490-8

[4] EISELT, H. A.; SANDBLOM, C, -L.; *Linear Programming and its Applications,* Springer, 2007. ISBN 978-3-540-73670-7

[5] GOLDBARG, M. C.; *Otimização Combinatória e Programação Linear : Modelos e Algoritmos,* Elsevier, 2005. ISBN 978-85-352-1520-5

[6] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M.; *Otimização - Volume 1,* Impa, 2009. ISBN 978-85-244-0238-8

[7] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M.; *Otimização - Volume 2,* Impa, 2007. ISBN 978-85-244-0268-5

[8] LACHTERMACHER, G.; *Pesquisa Operacional na tomada de decisões,* Pearson, 2009. ISBN 978-85-7605-093-3

[9] LIMA, E. L.; *Geometria Analítica e Álgebra Linear,* IMPA, 2006. ISBN 85-244-0185-0

[10] LIPSCHUTZ, S.; *Matemática Finita,* McGraw-Hill, 1972.

[11] LUENBERGER, D. G.; YE, Y.; *Linear and Nonlinear Programming,* Springer, 2008. ISBN 978-0-387-74502-2

[12] MACULAN, N. F.; FAMPA, M. H. C.; *Otimização Linear,* Editora Universidade de Brasília, 2006. ISBN 979-85-230-0927-3

[13] MATOUSEK, J.; GARTNER B.; *Understanding and Using Linear Programming,* Springer, 2006. ISBN 978-3-540-30697-9

[14] PELLEGRINI, J. P.; *Programação Linear, com rudimentos de programação não linear - Notas de aula,* 2016. Disponível em `http://aleph0.info/cursos/pm/notas/`. Acessado em 28/01/2016

[15] SCHRIJVER, A.; *A Course in Combinatorial Optimization,* 2013. Disponível em `http://homepages.cwi.nl/~lex/files/dict.pdf`. Acessado em 01/10/2016.

[16] SHINE, C. Y.; *21 Aulas de Matemática Olímpica,* SBM, 2009. ISBN 978-85-85818-39-5

[17] STRANG, G.; *Álgebra Linear e suas Aplicações,* Cengage, 2010. ISBN 978-85-221-0744-5

[18] TAYLOR, B. W.; *Introduction to management science,* Pearson, 2013. ISBN 978-0-132-75191-9

[19] VANDERBEI, R. J. ; *Linear Programming,* Springer, 2008. ISBN-13: 978-0-387-74387-5