Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Daniel Francelino da Silva

O ENSINO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA ESTADUAL PAULISTA

Santo André, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

DANIEL FRANCELINO DA SILVA

O ENSINO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA ESTADUAL PAULISTA

Orientador: Prof. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca
Coorientador: Prof. Dr. Antonio Candido Faleiros

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO DANIEL FRANCELINO DA SILVA
ORIENTADA PELO PROF. DR. ANDRÉ RICARDO OLIVEIRA DA FONSECA

SANTO ANDRÉ, 2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Daniel Francelino da
O ensino de equações algébricas na educação básica estadual paulista / Daniel Francelino da Silva. — 2016.

138 fls. : il.

Orientador: André Ricardo Oliveira da Fonseca
Coorientador: Antonio Candido Faleiros

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2016.

1. Equações algébricas. 2. Resolução de equações. 3. Equações no ensino médio. I. Fonseca, André Ricardo Oliveira da. II. Faleiros, Antonio Candido. III. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2016. IV. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e anuência de seu orientador.

Santo André, 28 de fevereiro de 2017.

Assinatura do autor: Daniel F. da Silva

Assinatura do orientador: ______________________________

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Daniel Francelino da Silva, realizada em 9 de dezembro de 2016:

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Jerônimo Cordoni Pellegrini** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Paulo Henrique Trentin** (FEI) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Birajara Soares Machado** (HIAE) – Membro Suplente

Universidade Federal do ABC

Dedico esse trabalho a minha mãe, pelo apoio, força e motivação fornecidos diariamente, e ao meu pai, que, embora não esteja presente em corpo para assistir à conclusão desse trabalho, certamente está em espírito, feliz e orgulhoso pelo seu filho, por mais esse desafio vencido.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar saúde, força e por me abençoar diariamente.

À CAPES por acreditar em uma Educação de qualidade e fornecer subsídios para que possamos sempre nos aperfeiçoar como profissionais.

À UFABC por abrir suas portas e acreditar no PROFMAT.

À SBM por criar condições para nós, professores de Matemática, realizarmos um Mestrado gratuito e de qualidade em instituições conceituadas, com professores excepcionais e parceiros, que contribuem de forma direta em nosso crescimento acadêmico e profissional.

Aos meus orientadores, Professor André e Professor Faleiros, por aceitarem me orientar, pelas disciplinas ministradas e por todas as valiosas contribuições e esse trabalho.

Aos meus amigos de curso, por todo companheirismo e horas de estudo coletivo, em especial à Andressa e Wildener que, além da ajuda nos estudos por todo o período de curso, compartilharam comigo almoços, caronas, angústias e risadas.

A todos meus amigos de longa data, que sempre entenderam minha ausência e estiveram ao meu lado em todos os momentos, torcendo pelo meu sucesso e dando o ombro para os meus desabafos, em especial ao amigo Demian Fernando, que me acompanhou durante onze sábados de avaliações no primeiro ano de curso e no dia da tão temida prova de qualificação, sempre com alegria e otimismo.

Aos amigos do trabalho, que sempre me deram força nos momentos mais críticos do curso, em especial à minha diretora, Dona Isabel, que sempre torceu por mim e me incentivou.

A todos os amigos que passaram pelo grupo de apoio pedagógico de Matemática de Barueri: Aninha, Heliel, Marisa, Monica, Rose e Solange pelo apoio constante e contribuições fornecidas.

Aos meus gestores e amigos do Estado, em especial a Elza, Helena, Eliana, Carol, Tony e Ana, que sempre foram solícitos no que fosse preciso para a aplicação das atividades em sala de aula, ajudando diretamente em grande parte do trabalho, sempre com palavras de motivação e força.

À minha grande amiga irmã Juliana que, após passarmos juntos toda nossa graduação, nos encontramos novamente no mesmo curso de Mestrado e, mesmo que em cidades diferentes, sua presença foi essencial para que eu chegasse até aqui.

Aos meus irmãos Leandro e Veronica e ao amigo Patrick, que sempre torceram por mim e acreditaram no meu potencial.

À minha amiga Mariza, pelo auxílio no Abstract.

Às amigas e professoras Emilene e Aline, pela revisão ortográfica de todo o trabalho.

Por fim, a toda minha família, presentes enviados por Deus, que me acompanharam diariamente nesse sonho e desafio de realizar o Mestrado, me incentivando, motivando e dando-me forças para não desanimar e ao meu saudoso pai, que pôde acompanhar-me até o final do segundo ano de curso, sendo a pessoa que mais torceu e vibrou com cada nota que saia e a cada aprovação obtida nas disciplinas, sempre acreditando que eu podia sempre mais do que eu achava.

A todos, meu carinho e meu muito obrigado. Sem vocês não chegaria até aqui.

“De tudo resta um pouco; transformemos esse pouco em muito! ”

(Autor desconhecido)

RESUMO

Esse trabalho aborda o ensino e aprendizagem das Equações Algébricas na educação básica estadual paulista, tema que compõe o currículo oficial do Estado de São Paulo, mais especificamente, o segundo bimestre do terceiro ano do ensino médio. Discorre sobre os aspectos históricos das equações algébricas, as deduções de fórmulas resolutivas das equações até o quarto grau e a impossibilidade de haver fórmulas resolutivas para as equações de grau superior a quatro. Discute-se ainda alternativas para encontrar soluções de equações de grau superior a dois, sem a utilização de fórmulas resolutivas, a partir da pesquisa das possíveis raízes racionais, se existirem, e da diminuição do grau da equação, quando se conhece algumas de suas raízes. Disserta também sobre como o estudo das equações é tratado no material disponibilizado aos alunos do ensino público paulista. Traz, finalmente, algumas sugestões de atividades sobre o tema proposto, além de um estudo de caso realizado com alunos do terceiro ano do ensino médio, em que se faz uma análise dos conhecimentos trazidos por eles de estudos realizados em anos anteriores e uma avaliação formativa durante e após a aplicação das atividades.

Palavras-chave: equações algébricas, resolução de equações, equações no ensino médio.

ABSTRACT

This work addresses the teaching and learning of Algebraic Equations in São Paulo state basic education, a subject that makes up the official curriculum of the State of São Paulo, more specifically, the second quarter of the third year of high school. It discusses the historical aspects of algebraic equations, deductions from resolving formulas equations to the fourth degree and the impossibility of resolving formulas for equations of degree higher than four. It is also discussed alternatives to find equations of degree solutions higher than two, without the use of resolving formulas, from the research of the possible rational roots, if any, and the decrease in the degree of the equation when you know some of its roots . It also talks about how the study of equations is treated in the material available to students of the São Paulo public education. It brings finally some suggestions of activities on the theme, as well as a case study in the third year of high school students, in which an analysis of the knowledge brought by them studies in previous years and formative assessment during and after the implementation of activities.

Keywords: algebraic equations, equations resolution, high school equations.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Por que a grande maioria dos alunos do ensino público estadual, embora tenham contato com as equações desde o sétimo ano do ensino fundamental e, desde então, ano a ano, seus conhecimentos sobre este tema são cada vez mais ampliados, chegam ao terceiro ano do ensino médio sem conseguir ao menos formular a definição de equação? Por que não conseguem resolvê-las, mesmo tendo estudadas por vários anos? Quais as lacunas de aprendizagens e onde elas ocorrem? Quem está errando: o sistema de ensino, o professor ou os alunos? Como resolver equações de grau superior a dois?

Há quatorze anos leciono como professor na educação básica estadual e ano após ano percebo, cada vez mais, o aumento das dificuldades dos alunos em Matemática. Essas lacunas na aprendizagem dificultam o entendimento dessa área de conhecimento, contribuindo diretamente para o fracasso da aprendizagem da disciplina. Tais questionamentos me levaram a escolher esse tema para estudar com mais profundidade e poder pensar em formas alternativas de discuti-lo com os alunos, visando a diminuição das defasagens existentes.

O objetivo desse trabalho é estudar sobre as equações algébricas, discutindo com os alunos sobre as formas de resolvê-las, uma vez que na terceira série do ensino médio, no currículo oficial do Estado de São Paulo, elas aparecem nos conteúdos abordados no 2º Bimestre. O intuito é analisar o que os alunos do terceiro ano do ensino médio trazem de bagagem sobre este tema e, a partir daí, elaborar atividades que os apoiem e forneçam subsídios a fim de auxiliá-los a minimizar suas dificuldades referentes a este tema, assunto de extrema importância no estudo da Álgebra.

Sabemos que a passagem do pensamento concreto para o abstrato é extremamente difícil e começa no sétimo ano do ensino fundamental, quando, na vida escolar do discente, lhe é apresentada a Álgebra na forma das "temidas" equações. A partir daí se inicia uma série de falhas, seja pelo lado do aluno, do professor ou do sistema de ensino, que culminam com o aluno saindo do ensino médio sem o conhecimento mínimo da Matemática e de suas áreas, contribuindo para os péssimos resultados mostrados em diversas avaliações externas realizadas para diagnosticar o grau de conhecimento dos alunos em Matemática. Obviamente não iremos conseguir sanar todas as dificuldades acumuladas ao longo dos anos de estudos dos alunos em um único bimestre, mas espera-se que suas dificuldades sejam amenizadas e a aversão que a maioria possui pela área de Exatas seja diminuída proporcionalmente ao aumento daqueles que começam a entender o quão grandiosa é essa área e o quão prazeroso pode ser o seu estudo.

O primeiro capítulo desse trabalho apresenta um breve histórico das equações ao longo dos anos.

O segundo capítulo relata a resolução das equações algébricas que podem ser resolvidas por meio de fórmulas resolutivas, nas quais se encontram as equações do primeiro ao quarto grau, com atenção especial à disputa de Cardano e Tartaglia pelo mérito da descoberta da fórmula que resolvia equações de terceiro grau e ao método de Ferrari, responsável pela fórmula resolutiva de equações do quarto grau.

O terceiro capítulo discute ferramentas para a solução de equações de grau superior a quatro, ressaltando a impossibilidade de haver fórmulas resolutivas para equações desse tipo, abordando alguns teoremas e resultados que nos auxiliem na pesquisa, investigação e descoberta de raízes para essas equações.

O quarto capítulo compreende a aplicação do estudo das equações em sala de aula, aborda como o tema é tratado no currículo do ensino estadual paulista e traz sugestões de aplicações com os alunos no terceiro ano do ensino médio, para que o tema seja melhor compreendido e as defasagens possam ser amenizadas. Nesse capítulo há também a análise do trabalho realizado com os alunos, com a discussão dos resultados obtidos.

Por fim, há as considerações finais do trabalho realizado, seguido dos referenciais teóricos que subsidiaram toda a pesquisa.

1

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Equações são igualdades matemáticas que possuem incógnitas (valores desconhecidos). Equações algébricas são aquelas que aparecem submetidas apenas às chamadas operações algébricas: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. [4]

São exemplos de equações algébricas:

Equações	Nomenclaturas recebidas
$3x-8=\frac{x}{2}$	Equação polinomial do 1º grau
$x^2-5x+6=0$	Equação polinomial do 2º grau
$x^4-13x^2+36=0$	Equação biquadrada (caso particular da equação polinomial do 4º grau)
$\sqrt{x+8}=x^2$	Equação irracional
$x^{-2}+x^{-3}=10$	Equação fracionária

Qualquer outro tipo de equação não é classificado como algébrica. Por exemplo, $arc\ sen\ x=\frac{\pi}{2}$, $\log_5(2x+4)=\log_5(3x+1)$ e $sen^2 x+\cos^2 x=1$ não são equações algébricas.

Dizemos que a equação algébrica está em sua ***Forma Canônica*** quando a colocamos sob a forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \text{ (n inteiro positivo)}$$

As equações algébricas, na forma canônica, são também chamadas de Equações Polinomiais.

O ***grau*** de uma equação algébrica é dado pelo maior expoente da variável, quando colocada em sua forma canônica.

Chamam-se de ***coeficientes numéricos***, os números $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$, os quais acompanham as incógnitas.

Exemplo 1 : A equação $2x^6 + 5x^4 - x^3 - 2x + 4 = 0$ é do *6º grau* e os coeficientes são:

$$a_6 = 2,\ a_5 = 0,\ a_4 = 5,\ a_3 = -1,\ a_2 = 0,\ a_1 = -2 \text{ e } a_0 = 4.$$

Observação: Seja o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e a equação $p(x) = 0$. O coeficiente a_n é chamado de ***coeficiente líder ou principal*** e quando, no polinômio $p(x)$ em $p(x) = 0$, esse coeficiente for igual a 1 $(a_n = 1)$, $p(x)$ é chamado de ***polinômio mônico.***

1.1 AS EQUAÇÕES AO LONGO DOS ANOS[1]

A utilização das equações para resolver problemas vem de longa data. Os registros mais antigos datam 2000 a.C., vindos das regiões do Egito e Mesopotâmia. Partindo sempre de necessidades práticas, inicialmente ligadas a problemas de mensuração, antigos povos já mostravam conhecer e utilizar conceitos de equações, atribuídos à problemática de se encontrar valores desconhecidos. Durante esse período, utilizavam símbolos para representar quantidades e o restante dos cálculos era expresso em palavras, muito longe da formalização algébrica que encontramos nos dias atuais. Um dos primeiros registros numéricos foram encontrados em tabletes de barro sumérios, datando cerca do quarto milênio antes de Cristo. Operações numéricas apareceram mais tarde, cerca de 2200 a.C., também com os sumérios. Os babilônios, em torno de 2000 a.C., já mostravam conhecer o que viria ser chamado de Teorema de Pitágoras e resolviam numericamente equações do primeiro e segundo graus. Um dos mais famosos e antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje foi o *Papiro de Ahmes* (ou de Rhind), papiro egípcio, datado cerca de 1650 a.C., contendo soluções de 85 problemas de aritmética e geometria. Tal documento encontra-se hoje no museu britânico, em Londres.

[1] Todos os fatos históricos apresentados nessa seção foram retirados de [4].

Figura 1: Fragmento do Papiro de Ahmes

Fonte: Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ahmes.html>. Acesso em: jan.2017.

Um dos problemas do Papiro, que faz referência às equações, dizia: ***"Uma quantidade, somada a seus*** $\frac{2}{3}$***, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é esta quantidade?"***

Colocado em linguagem moderna, cairemos na resolução de uma equação do 1º grau $\left(x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=33\right)$. Não haviam indícios de método algébrico de resolução, mas encontravam respostas a problemas algébricos desse tipo, por tentativas, técnica que ficou conhecida por "regra da falsa posição". Chutavam um valor considerado conveniente e analisavam testando o valor e caso não desse certo, por meio de proporcionalidade, encontravam o valor correto.

Um grande salto para a Matemática foi dado na Grécia, em meados do século VII a.C. Interessados pela matemática deixada pelos egípcios e mesopotâmios, os gregos foram mais além, sendo os precursores da demonstração matemática, iniciada por Tales de Mileto[2] ("as verdades matemáticas precisam ser demonstradas"), criando assim a matemática dedutiva.

[2](624 - 548 a. C.) Matemático e astrônomo grego nascido em Mileto, na Jônia, Ásia Menor, considerado o primeiro filósofo grego e o primeiro dos sete sábios da Grécia, pai da filosofia e o fundador da ciência física. Morreu em Mileto e foi o mais antigo dos filósofos pré-socráticos, sendo considerado também o primeiro geômetra grego.

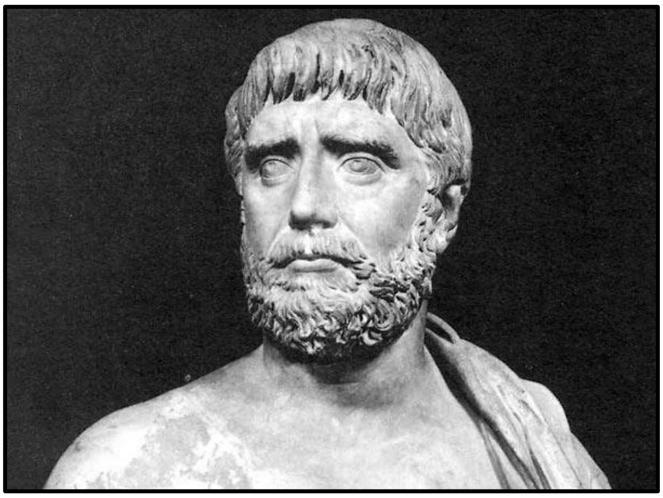


Figura 2: Tales de Mileto – o precursor das demonstrações matemáticas

Fonte: Disponível em: < https://startupi.com.br/wp-content/uploads/2015/03/Tales-de-Mileto.jpg>. Acesso em: jan.2017.

Décadas depois, Pitágoras, nascido na ilha de Samos, a 50 km de Mileto, provavelmente tendo estudado com Tales ou seus discípulos, demonstrou o famoso teorema que leva seu nome: "em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos. Com a demonstração da validade da relação $a^2 = b^2 + c^2$, uma equação do 2º grau fora produzida, com um atraso de mais de 1000 anos em relação ao que já havia conhecido na Babilônia.

Nomes de peso fizeram parte dessa época grega gloriosa, dentre eles, Platão (427 a.C. – 347 a.C.) e Euclides (cerca de 300 a.C.), autor dos *Elementos*, obra-chave para a Geometria que conhecemos, usado até hoje como referência na área. Nessa época também fora fundada a Universidade de Alexandria, formada por uma extensa biblioteca e por um museu, com o intuito de abrigar todas as obras científicas e filosóficas produzidas pelos gregos. Não há registros da origem de Euclides. Considera-se provável que tenha estudado algum tempo em Atenas e sabe-se que na Universidade de Alexandria escreveu seu maior trabalho.

Com descobertas de peso em Geometria, os gregos deixaram um pouco a desejar em outras áreas da matemática. Mesmo assim, Euclides conseguiu demonstrar alguns importantes teoremas da teoria dos números e introduziu conceitos primordiais para a resolução de equações, noções que levariam mais tarde às conjecturas dos princípios das igualdades, princípios estes utilizados na resolução de uma equação do 1º grau. Com essas descobertas, a regra da falsa posição fora ultrapassada e finalmente encontrou-se um método geral de resolução das equações de 1º grau. Os gregos também resolviam algumas equações do 2º grau com a utilização de régua e compasso, seus conhecimentos eram adquiridos pelo forte estudo da Geometria, porém, não envolvia nenhum cálculo algébrico.

Em 31 a.C, Roma conquistou o Egito, afetando bastante o desenvolvimento da Universidade de Alexandria. Alguns séculos depois surgiram outros nomes importantes na história da matemática, como Herão, Menelau, Ptolomeu e Diofanto. Este último merece uma maior atenção pelo foco desse trabalho, pois foi considerado o maior algebrista grego de Alexandria, principalmente pela sua inovação com as notações, pioneiro em usar símbolos na resolução de problemas algébricos, embora suas descobertas não tenham muito a ver com a Álgebra moderna que conhecemos, sendo melhor incluídas no campo da teoria dos números.

Pouco se sabe da vida desse matemático, sua origem, nascimento e morte são desconhecidas, sendo conservadas somente algumas de suas obras, transmitidas pelos árabes. Acredita-se ter vivido entre 250 – 350 e conhece-se sua principal obra, chamada *Arithmetica*, considerada um clássico sobre teoria dos números. Essa obra foi publicada originalmente em 13 livros, dos quais somente 6 chegaram a atualidade, os demais desapareceram. Responsável pelo estudo das chamadas equações diofantinas, criou um método para a determinação de soluções de determinados tipos de equações. Tais métodos chamaram a atenção dos árabes e uma delas, $x^n + y^n = z^n$, ficou muito famosa. Diofanto mostrou que para $n = 2$, há infinitas soluções (apresentados aos alunos hoje como ternas pitagóricas). Mas os casos para $n > 2$, nada fora registrado por ele. Somente no século XVII, o matemático Pierre de Fermat[3], conjecturou o que ficou conhecido por "último teorema de Fermat", segundo o qual afirmava que não havia solução para a equação para x, y e z inteiros e n natural, maior do que 2. Tal problema só conseguiu ser demonstrado em 1993, em pleno século XX, com a publicação oficial em 1995, pelo matemático britânico Andrew Wiles, mostrando que a conjectura de Fermat era verdadeira.

[3] (1601 - 1665) Matemático francês, nascido em Beaumont-de-Lomagne, sudoeste da França, Fermat também era advogado e político. Ficou conhecido como o príncipe dos matemáticos amadores, é considerado o fundador da teoria dos números moderna e foi pioneiro do cálculo das probabilidades.

Figura 3: Imagem ilustrativa de Diofanto

Fonte: Disponível em: <https://espectivas.wordpress.com/2015/07/05/diofanto-o-impulsionador-da-lgebra/>. Acesso em: jan.2017.

Aparentemente tendo nascido e falecido em Alexandria, na lápide do túmulo de Diofanto, havia um enigma que, ao ser resolvido, supostamente mostrava sua idade quando falecera. Eis uma de suas traduções (Adaptado de [12]):

"Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofanto. E os números podem revelar quão longa foi sua vida. Deus lhe concedeu a graça de ser um menino pela sexta parte de sua vida. Transcorrera mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu queixo se cobriu de barba. A sétima parte seguinte de sua existência transcorreu num casamento estéril. Passado um novo quinquênio, fê-lo feliz o nascimento de seu precioso primogênito. Ah! criança tardia e má, depois de viver metade da vida de seu pai o destino frio o levou. Após consultar sua mágoa em ciência dos números, por quatro anos, Diofante terminou sua vida."

Transpassando esse enigma em linguagem matemática, sendo x a idade de Diofanto, teremos a equação $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, cuja solução nos revelaria que Diofanto teria vivido por 84 anos.

Em 476 d.C., Roma foi tomada pelos bárbaros e a Europa entrou na chamada Idade das Trevas, passando por séculos sem grandes descobertas na matemática, período em que se destacaram dois outros povos: os árabes e os hindus. Nesse ponto, houve um enorme avanço na matemática, pois fora criado o sistema de numeração que utilizamos até hoje: o sistema indo-arábico, sistema posicional, constituído de 10 algarismos, que facilitavam muito as operações numéricas, bem diferente do sistema romano de numeração. Nesse período surge o famoso matemático e cientista, Abu-Abdullah Muham-med ibn-Musa al-Khwarizmi (783 – 850 d. C.), responsável por herdarmos os termos *algarismo* e *algoritmo* de seu nome, e o termo *álgebra,* pela escrita do livro *"al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah"*, sobre equações. Os hindus apresentaram o sistema de numeração aos califas árabes que aprovaram de imediato pela fácil manipulação e Al-Khwarizmi foi responsável por difundí-lo pelo mundo árabe.

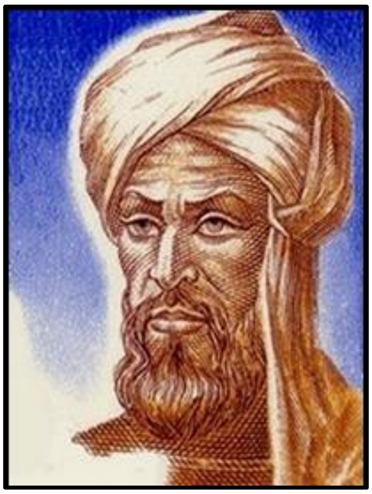


Figura 4: Imagem representativa de Al-Khwarizmi

Fonte: Disponível em: < https://www.futurelearn.com/courses/maths-linear-quadratic-relations/0/steps/12118>. Acesso em: jan.2017.

É também dessa época, o indiano Bhaskara (1144 – 1185), conhecido pelos alunos pela difusão de seu nome à fórmula resolutiva das equações do 2º grau, embora não tenha sido ele quem a deduziu, porém seu nome é ligado a ela até hoje em muitos livros didáticos. A fórmula deduzida resolvia grande parte das equações algébricas do 2º grau, pois uma parte delas recaia em raízes quadradas de números negativos. Quando isso acontecia, diziam que a equação não tinha solução.

Figura 5: Imagem representativa de Bhaskara

Fonte: Disponível em: <http://123matematic.blogspot.com.br/>. Acesso em: jan.2017.

Solucionada parcialmente as equações do 2º grau, começou o interesse e a curiosidade pelas equações do 3º grau. Os árabes conseguiram avançar um pouco nesse tipo de equação, conseguindo a solução em alguns poucos casos particulares, encontrando formas geométricas que fornecessem valores aproximados para as soluções, porém nenhuma forma algébrica de resolvê-las foi descoberta nesse período, permanecendo ainda, por um bom tempo, sem solução.

Interessados nas descobertas árabes surgem os europeus para darem sua contribuição à matemática. A Inglaterra entrou em contato com a matemática grega e com o sistema de numeração dos árabes e iniciaram seus estudos, fazendo dos séculos XII e XIII, épocas de acontecimentos importantes na Europa. Foi nesse período que surgiu um importante matemático italiano, Leonardo de Pisa (1175 – 1250), também conhecido como Leonardo Fibonacci, responsável pela introdução do sistema indo-arábico à Europa, pela publicação da obra *Liber Abaci*, na qual descreve o novo sistema numérico. Este matemático tratou profundamente questões aritméticas e foi o primeiro cristão a escrever sobre álgebra.

Há um pequeno refinamento quanto à simbologia, mas ainda há muitas palavras ou abreviações indicando operações. Em 1225, Leonardo era extremamente conhecido pelos seus trabalhos e fora desafiado pelo Imperador Frederico II a encontrar, por métodos de Euclides um segmento x que fosse solução da equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Leonardo demonstrou que tal problema não poderia ser resolvido por métodos euclidianos (utilizando apenas régua e compasso), mas apresentou uma solução numérica aproximada, muito próxima de uma das soluções. Mais uma vez o desafio da resolução das equações do 3º grau pairava no ar desafiando os brilhantes cérebros dos matemáticos.

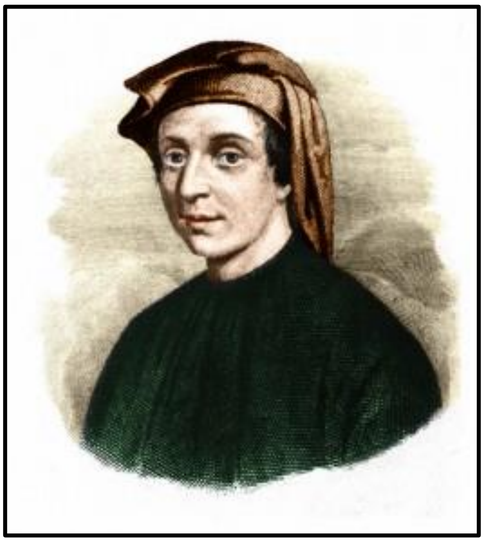


Figura 6: Imagem representativa de Fibonacci

Fonte: Disponível em: <http://artifacts.com/2014/01/page/2/>. Acesso em: jan.2017.

As obras de Leonardo foram inspiradoras a outros matemáticos, principalmente aos italianos. O matemático de maior destaque após Leonardo foi o frei Luca Pacioli (1455 – 1514), tendo estudado profundamente aritmética, é considerado o pai da contabilidade moderna. O que ajudou muito a popularidade de Pacioli foi que na mesma época em que viveu, o alemão Gutenberg inventava a imprensa (1456), o que permitiu a divulgação de trabalhos e livros muito mais rapidamente. Apesar de grandes avanços na Matemática, Pacioli cometeu graves erros, dentre eles, afirmando que a resolução de equações do 3º grau era impossível, o que foi desmentido, poucos anos depois, também pelos matemáticos italianos Cardano e Tartaglia. A resolução dessas equações e a disputa entre esses dois matemáticos será melhor abordada no próximo capítulo.

Figura 7: Imagem representativa de Luca Pacioli

Fonte: Disponível em: < http://projeto.unisinos.br/open/evolucao%20historica%20da%20contabilidade/index.html>. Acesso em: jan.2017.

Pouco tempo depois das fórmulas resolutivas das resoluções das equações do 3º grau serem encontradas, Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano encontrou o método geral para a solução das equações do 4º grau. Faltava, nesse ponto, abordar os “números estranhos”, raízes quadradas de números negativos, que apareceram pioneiramente nos estudos das equações do 3º grau de Cardano e Tartaglia. Nesse quesito, destaca-se Rafael Bombelli (1526 – 1572), matemático nascido na Bolonha, Itália, o primeiro a efetuar operações com esses números estranhos. Estava dado o primeiro passo ao estudo da teoria dos números complexos.

Figura 8: Imagem representativa de Rafael Bombelli

Fonte: Disponível em: < http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Bombelli>. Acesso em: jan.2017.

Também no século XVI, surge um importante matemático francês, Francois Viète (1540 – 1603), importante algebrista com vastos conhecimentos em trigonometria. Estudou sobre as equações algébricas, encontrando uma solução trigonométrica para equações do 3º grau.

Na metade do século XVII, dois matemáticos franceses, Pierre de Fermat (1601 – 1665) e René Descartes criaram, de forma independente e quase que simultaneamente, o que conhecemos hoje por Geometria Analítica, que concilia estudos da Geometria com enfoque algébrico, ou seja, o estudo da Geometria por meio de equações.

Descartes refinou a simbologia algébrica, parte dela utilizada até nossos dias atuais, como por exemplo, a utilização das últimas letras do alfabeto para indicar incógnitas e as primeiras letras para indicar parâmetros. Foi o primeiro a popularizar a utilização de polinômios igualados a zero como equações algébricas e graças a ele levamos a expressão “números complexos” e a chamar o elemento $\sqrt{-1}$ de número imaginário.

No final do século XVII, nasce em Woolsthorpe, Inglaterra, aquele que é considerado um dos maiores, senão o maior gênio da Matemática e da Física de todos os tempos, Isaac Newton (1642 – 1727) que, junto ao matemático alemão Leibniz (1646 – 1716), é considerado o inventor do Cálculo Diferencial e Integral. Em contribuição ao estudo das equações algébricas, ele criou métodos algébricos aproximados que forneciam o encontro das raízes reais, um método aproximado não algébrico, utilizando elementos de Cálculo Diferencial e Integral e um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa de raízes, que encontrava intervalos numéricos nos quais as raízes devessem ser procuradas.

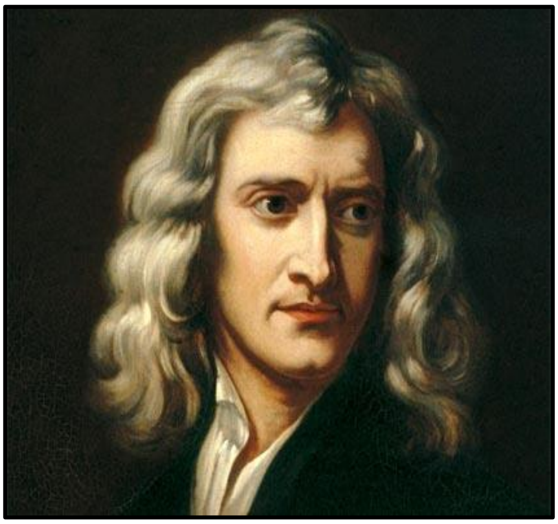


Figura 9: Imagem representativa de Isaac Newton

Fonte: Disponível em: < http://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/fotos/newton_joven.jpg>. Acesso em: jan.2017.

No período em que se expandiam as descobertas sobre o Cálculo, nasce em Basileia, na Suíça, Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático muito talentoso, responsável por mais de 800 diferentes obras. Discípulo de Jean Bernoulli, suas obras têm contribuição na Teoria dos Números, Cálculo, Álgebra, Mecânica, Óptica, Topologia, Números Complexos, entre outras. Tendo vários problemas de visão durante sua vida, aos 28 anos já perdera sua vista esquerda e aos 58, ficou totalmente cego. Após essa idade, ainda continuou a produzir, por mais 18 anos, ditando suas descobertas a um secretário. Devemos a Euler muito da simbologia moderna que é utilizada até hoje. Foi dele a criação da notação do símbolo de somatória ($\sum$), a notação de $f(x)$ para as funções , a representação $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ para as combinações, a utilização de i para indicar $\sqrt{-1}$ e a consagração da utilização da letra grega π para a conhecida constante da circunferência e da letra e para representar a base dos logaritmos naturais. Também descobriu e demonstrou que qualquer número complexo não nulo tem exatamente n raízes enésimas, com n inteiro. Finalmente avançava-se na teoria dos números complexos, mostrando-se como extrair raízes de números complexos, assunto que intrigou por séculos matemáticos que se deparavam nos casos em que $\Delta < 0$, na fórmula de Cardano.

Figura 10: Imagem representativa de Leonhard Euler

Fonte: Disponível em: < https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_by_Darbes.jpg>. Acesso em: jan.2017.

Em 1777, nascia na Alemanha, Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), considerado por muitos, um dos maiores matemáticos que já existiu. Fora sempre um menino prodígio, quando, aos 3 anos já corrigia erros em contas realizadas por seu pai. Aos 5 anos, já sabia a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, processando-a, puramente por raciocínio, quando seu professor indagou qual seria a soma dos números naturais de 1 até 100, e prontamente respondeu 5050. Aos 12 anos, já discutia axiomas dos Elementos de Euclides, e aos 13 ficou intrigado com o postulado das paralelas e dois anos depois percebeu que tal postulado poderia ser formulado de forma diferente da que escreveu Euclides, abrindo caminho para o estudo das Geometrias não-Euclidianas. Também aos 15 provou alguns teoremas sugeridos por outros matemáticos , inclusive um deles de Newton, que ainda não possuíam uma demonstração. Obteve doutorado na Universidade de Helmstädt com uma tese sobre raízes de polinômios, com o trabalho *Disquisitiones arithmeticae* (1798), onde demonstrou pela primeira vez o teorema fundamental da álgebra moderna: toda equação polinomial tem uma solução complexa. Com isso, demonstrou que todas as equações algébricas de grau n possuem n raízes. Escreveu sobre os números complexos (1799), e contribuiu com resultados importantes em teoria dos números, equações diferenciais, séries infinitas, seções cônicas, integração numérica, funções hipergeométricas, geometria diferencial, geometria não-Euclidiana, álgebra linear, teoria potencial e probabilidade, pela descoberta da distribuição normal.

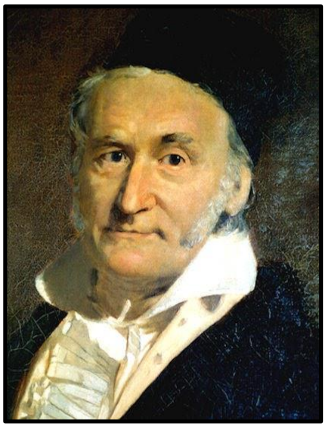


Figura 11: Imagem representativa de Gauss

Fonte: Disponível em: <http://navegolandia.com/matematicos-importantes/>. Acesso em: jan.2017.

Antes de Gauss, outros matemáticos tentaram demonstrar que as equações de grau n possuíam n raízes, mas sem sucesso. Jean le Round d´Alembert (1717 – 1783), matemático francês, em 1746 publicou uma prova do referido teorema, considerada posteriormente insatisfatória por Gauss.

D´Alembert foi cientista e principal matemático francês da sua época, nascido em Paris, e juntamente com Voltaire, Jean-Jacques Rousseau e Denis Diderot, elaborou a edição da notável Encyclopédie (a partir de 1751), uma publicação revolucionária para o século XVIII. Tornou-se amplamente instruído em direito, medicina, ciências e matemática. Nestas últimas áreas, fez contribuições aos campos do cálculo infinitesimal, da mecânica de fluidos, da astronomia e da óptica. Mantinha uma contínua e frequente correspondência com Euler, a quem chamava de mestre. Criador do operador de d'Alembert, importante operador da física matemática, na qual definiu a equação diferencial da continuidade e o paradoxo da resistência zero nos movimentos estáveis não uniformes.

Figura 12: Imagem representativa de D´Alembert

Fonte: Disponível em: < http://www.tipografos.net/historia/alembert.html>. Acesso em: jan.2017.

Vários resultados importantes para o estudo das equações algébricas se originaram desse valioso teorema. As relações de Girard[4], o fato de um número complexo ser raiz de uma equação implicar que o seu conjugado também o é, o resultado de que toda equação algébrica de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real e o estudo do número de raízes em um determinado intervalo ser par ou ímpar são exemplos de resultados decorrentes do Teorema Fundamental da Álgebra. Este último teorema leva o nome de seu criador: Teorema de Bolzano.

Figura 13: Imagem representativa de Bernhard Bolzano

Fonte: Disponível em: < http://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/bolzano.htm>. Acesso em: jan.2017.

Bernhard Bolzano (1781 – 1848) foi padre, teólogo, filósofo e matemático tcheco que nasceu e morreu em Praga, sendo o precursor da teoria dos conjuntos de Cantor e considerado um dos maiores lógicos do século XIX. Desde muito cedo dedicou-se à matemática, e obteve alguns resultados originais decorrentes de seus estudos, porém suas descobertas neste campo não foram devidamente reconhecidas em sua época e muitas delas foram redescobertas mais tarde. Elaborou trabalhos sobre aritmetização do cálculo e deu definições sobre limite, derivada, continuidade e trabalhos pioneiros sobre convergência de séries, além de importantes estudos sobre as funções contínuas não deriváveis. Enunciou também várias propriedades sobre conjuntos infinitos. Sua contribuição no estudo das equações algébricas, foi provar o teorema que leva seu nome: *" Dados uma equação algébrica em sua forma canônica* $p(x)=0$ *e dois números reais* a *e* b $(a<b)$*, se* $p(a)$ *e* $p(b)$ *tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo* (a,b) *será par; se* $p(a)$ *e* $p(b)$ *tiverem sinais opostos, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro*

[4] Maiores detalhes sobre esse Matemático no capítulo 3.5 – Relação entre coeficientes e raízes.

do intervalo (a,b) *será ímpar"*. [4]. Esse e outros teoremas importantes para o estudo das equações algébricas serão demonstrados no capítulo 3. Embora fosse um importante teorema para o estudo das equações, apresentava-se incompleto, pois não permitia saber-se, com exatidão, o número exato de raízes reais contidas no intervalo. Em 1829, o matemático suíço Charles Sturm (1803 – 1855)[5] apresentou um método para , dados uma equação e um intervalo (a,b), saber-se quantas raízes reais existiam nele, complementando assim, o teorema de Bolzano.

Finalizando esse breve passeio histórico pelo estudo das equações, falemos de mais dois matemáticos, com contribuições importantes para este tema: Abel e Galois.

Niels Henrik Abel (1802 – 1829), norueguês, teve uma vida conturbada. Nascido em uma família pobre, passou muito tempo tentando reconhecimento e ajudando seus familiares. Também fez parte dos matemáticos prodígios e, aos 16 anos, já havia lido obras como as de Euler, Gauss, Newton, Lagrange, D´Alembert, entre outras. No campo das equações, chegou a achar que encontrara uma fórmula resolutiva para as equações do 5º grau, porém ele próprio encontrou uma inconsistência em suas descobertas. Em 1823 demonstrou que, exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolver as equações de grau superior a 4 utilizando-se somente as operações algébricas. Outros matemáticos haviam conjecturado isso, porém sem nenhuma demonstração formal.

Figura 14: Imagem representativa de Abel

Fonte: Disponível em: <http://www.thefamouspeople.com/profiles/niels-henrik-abel-6047.php>. Acesso em: jan.2017.

Abel é considerado um dos fundadores da matemática moderna e da teoria dos conjuntos. Também possui trabalhos em Cálculo com funções integrais. Por causa de sua

[5] O primeiro a dar uma solução completa a este teorema foi Cauchy, porém com um método pesado e pouco prático. Sturm apresentou uma demonstração muito mais simples.

nacionalidade e pouca idade, não conseguiu o reconhecimento necessário em vida, pelos grandes matemáticos da época. Faleceu de tuberculose, com apenas 27 anos de idade. Após sua morte, foi nomeado professor da Universidade de Berlim, e ganhou um prêmio do Instituto Francês (1841), por seus trabalhos com funções elípticas, publicados pela Academia Francesa de Ciências.

Junto a Abel, outro matemático que demonstrou que as equações algébricas de grau superior a 4 não poderiam ser resolvidas algebricamente foi Évariste Galois (1811 – 1832), matemático francês, nascido em uma cidade situada a 10 km de Paris. Escreveu um artigo intitulado "Nota sobre Abel" , esclarecendo que suas teorias eram independentes do matemático norueguês, pois enquanto a demonstração de Abel utilizava ao máximo recursos da Álgebra clássica, a de Galois envolvia uma teoria inventada por ele na qual aquele fato era apenas um caso particular, marcando assim, o início da Álgebra moderna: a teoria dos grupos.

Figura 15: Imagem representativa de Évariste Galois

Fonte: Disponível em: <http://navegolandia.com/matematicos-importantes/>. Acesso em: jan.2017.

Como viveu em um período de conturbação social e política, envolveu-se em várias situações e devido a seu alto senso crítico e ímpeto revolucionário, conseguiu muitos desafetos. Por apaixonar-se por uma mulher que também despertava amores de outro rapaz, fora desafiado a um duelo, o qual não pode negar-se a participar por questões morais, o que gerou sua morte, com apenas 20 anos. Sua genialidade certamente geraria ainda maiores avanços na Matemática, caso seu falecimento não fosse tão precoce.

Nesse capítulo, passamos brevemente pela história das equações algébricas ao longo dos anos, ressaltando seus aspectos mais importantes. Nos capítulos seguintes, aprofundaremos um pouco mais os processos de descoberta dos métodos resolutivos das equações do 1º ao 4º grau e discutiremos a impossibilidade de haver fórmulas resolutivas para equações de grau superior a 4.

2

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Nesse capítulo, discutiremos as formas de resolver uma equação algébrica do 1º ao 4º grau. No ensino básico, geralmente as equações do 1º e 2º graus são estudadas durante o ensino fundamental e no ensino médio estudam-se as equações de grau superior a 2, apresentando a fórmula resolutiva das equações de grau 3. O método Ferrari para as equações do 4º grau não é contemplado no currículo estadual paulista.

Resolver uma equação significa encontrar o valor numérico da incógnita, ou seja, encontrar o valor que, colocado no lugar da incógnita, torna a igualdade verdadeira. Vejamos a dedução das fórmulas resolutivas para alguns tipos de equações algébricas.

2.1 EQUAÇÕES DO 1º GRAU

As equações do 1º grau são da forma $ax+b=0$, com $a \neq 0$. Sua solução é imediata, aplicando-se o princípio das igualdades (subtraindo-se b de ambos os lados e posteriormente dividindo ambos os membros por a). Segue que $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemplo 2: A soma do quádruplo de um número e cinco é igual à diferença entre o dobro desse mesmo número e sete. Qual é esse número?

Resolução: Equacionando o problema, recaímos na equação de 1º grau:

$$4x+5=2x-7$$

Subtraindo-se 5 de ambos os lados assim como o $2x$:

$$4x-2x+5-5=2x-2x-7-5 \rightarrow 2x=-12$$

Dividindo ambos os lados por 2, segue a solução:

$$\frac{2x}{2}=\frac{-12}{2} \rightarrow x=-6 \rightarrow S=\{-6\}$$

2.2 EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Embora muitas vezes seja atribuída pelos professores a Bhaskara o nome dado à fórmula resolutiva das equações do 2º grau, não foi ele o primeiro a deduzi-la. O próprio Bhaskara relata em manuscritos do século XII que tal fórmula tenha sido descoberta por um matemático hindu um século antes, porém tais registros foram supostamente publicados em uma obra que não chegou até nós. [4]

Segue a dedução da fórmula resolutiva das equações do 2º grau, esta, de fácil entendimento e que pode ser realizada junto aos alunos dos nonos anos do ensino fundamental, momento em que as equações do 2º grau aparecem pela primeira vez no currículo oficial do estado de São Paulo. É importante essa dedução com os alunos pois, muitas vezes, ela é dada sem uma demonstração, dificultando o entendimento deles. É interessante que, sempre que possível, algumas demonstrações e deduções sejam realizadas para que eles possam vir a ter um entendimento mais completo da disciplina e não simplesmente decorar uma fórmula e aplicá-la. Em pouco mais de uma década lecionando no ensino médio, poucos alunos admitiram ter visto a dedução da fórmula, não tendo nem ideia de que, com um pouco de cálculo algébrico, é possível deduzi-la. O "x" da questão na elaboração da fórmula, era transformá-la em uma equação do primeiro grau, eliminando o termo quadrático.

Seja a equação de 2º grau na forma canônica $ax^2+bx+c=0$, com $a \neq 0$.

Subtraindo-se c de ambos os lados, teremos:

$$ax^2+bx=-c$$

Para transformar o primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito, multiplicamos ambos os lados por $4a$ e somamos b^2 a ambos os membros:

$$4a(ax^2+bx)+b^2=b^2-4ac \rightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

Fatoramos o trinômio do primeiro membro:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

Extraímos a raiz de ambos os lados:

$$\sqrt{(2ax+b)^2}=\sqrt{b^2-4ac} \rightarrow |2ax+b|=\sqrt{b^2-4ac} \rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

Por fim, isolamos a incógnita, subtraindo-se b de ambos os lados e dividindo ambos os membros por $2a$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

obtendo a fórmula resolutiva para equações do 2º grau.

Segue que $S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$

O radicando é comumente chamado *discriminante* da equação e é representado pela letra grega delta (Δ). Assim, podemos também representar a solução na forma

$$S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

Essa denominação foi instituída para facilitar o estudo das soluções de uma equação quadrática pois, por meio de seu discriminante, é possível determinar o número de soluções que ela possui:

$\Delta > 0 \rightarrow$ a equação possui duas soluções reais distintas;

$\Delta = 0 \rightarrow$ a equação possui duas soluções reais idênticas (raiz de multiplicidade 2);

$\Delta < 0 \rightarrow$ a equação não possui soluções reais, possuindo duas raízes complexas, distintas e conjugadas.

Exemplo 3: Determine a solução das equações:

a) $x^2 - 4x - 41 = 0$

b) $x^2 + 8x + 16 = 0$

c) $x^2 - 4x + 13 = 0$

Resolução: Por meio da fórmula resolutiva, obtemos:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.(-41) = 16 + 164 = 180 \quad (\Delta > 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{180}}{2.1} = \frac{4 \pm 6\sqrt{5}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{5} \rightarrow S = \{2 + 3\sqrt{5},\ 2 - 3\sqrt{5}\}$$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4.1.16 = 64 - 64 = 0 \ (\Delta = 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{-8}{2} = -4 \rightarrow S = \{-4\}$$

c) $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.13 = 16 - 52 = -36 \quad (\Delta < 0) \rightarrow \Delta = 36.(-1) = 36i^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36i^2}}{2.1} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \rightarrow S = \{2 + 3i,\ 2 - 3i\}$$

Observação: Claramente podemos resolvê-las com métodos mais rápidos e simples (soma e produto, por meio de fatoração), porém o intuito foi exemplificar a utilização da fórmula resolutiva deduzida anteriormente.

2.3 EQUAÇÕES DO 3º GRAU

Por muito tempo, acreditou-se não haver uma fórmula para resolver equações do 3º grau. Em meados do século XV, o matemático italiano Luca Pacioli chegou a declarar que a solução das equações do 3º grau era tão impossível quanto a quadratura do círculo, o que fora desmentido pouco tempo depois, na mesma Itália, pelos matemáticos Girolamo Cardano e Nicolò Tartaglia.

2.3.1 CARDANO E TARTAGLIA

Girolamo Cardano (1501 – 1576), nasceu em Pavia, cidade italiana. Foi um excepcional cientista e dedicou-se também à Astrologia. Em uma de suas obras introduziu as ideias de probabilidade usadas até hoje, ensinando também maneiras de trapacear em jogos. Dono de uma personalidade forte e altamente duvidosa, constituiu uma família problemática. Seu filho mais velho foi preso pelo assassinato da própria esposa e seu filho mais novo teve as duas orelhas arrancadas por ele em um ataque de raiva. [4]

Figura 16: Imagem representativa de Cardano

Fonte: Disponível em: <http://www.profcardy.com/cardicas/cardano.php>. Acesso em: jan.2017.

Nicolò Fontana (1499 – 1557) nasceu na mesma Itália que Cardano, na cidade de Bréscia. Quando tinha 11 anos, sua cidade foi tomada por tropas francesas. Parte da população refugiou-se na igreja. As tropas invadiram-na e assassinaram quem encontraram pela frente, fosse criança, homem ou mulher, sem distinção. Nesse embate, o frágil menino fora gravemente ferido e ficou jogado entre os cadáveres e segundo relatos, sua mãe lhe salvou lambendo suas feridas, por ser extremamente pobre e não ter condições de comprar qualquer medicamento. Esse episódio lhe forneceu uma enorme cicatriz na boca causando-lhe dificuldades em sua fala pelo resto de sua vida. Por esse motivo é conhecido como Tartaglia (do verbo tartagliare, que, em italiano significa gaguejar). Sendo extremamente pobre, conta-se que estudava de madrugada nos cemitérios, escrevendo sobre as lápides com carvão. E assim foi fazendo sua vida e aos 35 anos já ganhava seu sustento como professor de Ciência. Publicou várias obras durante sua vida, porém o que mais chamou atenção foram suas disputas com Cardano relativas às soluções das equações do 3º grau.

Figura 17: Imagem representativa de Tartaglia

Fonte: Disponível em: < https://www.infopedia.pt/$niccolo-fontana >. Acesso em: jan.2017.

Segundo relatos, por volta de 1510, Scipione del Ferro, um professor universitário em Bolonha, descobriu uma forma geral de resolver as equações algébricas do terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$. Tendo falecido antes de publicar algo sobre o assunto, a resolução desse tipo de equação não é atrelada a seu nome. Porém, antes de falecer, tinha revelado seu método a seu aluno, Antonio Maria Fior que rapidamente propôs um desafio a Tartaglia e este aceitou prontamente. Esses desafios eram muito comuns entre os matemáticos da época nos quais vários problemas eram propostos uns aos outros, no intuito de disputar quem detinha maior sabedoria e claro que Fior usaria as equações do 3º grau contra seu oponente. Tartaglia veio a saber que Fior aprendera com Scipione a resolver um certo tipo de equação cúbica e dedicou-se totalmente a estudá-las. Dotado de muito talento, não só descobriu como resolver as equações do tipo

$x^3 + px + q = 0$ como também solucionara equações cúbicas do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Claro que Tartaglia vencera o desafio, pois, Fior não conseguira resolver as equações do segundo tipo, por nunca ter estudado sobre elas, saindo totalmente humilhado do embate.

Cardano soube que Tartaglia resolvera as equações cúbicas e rapidamente procurou o colega italiano implorando para que lhe contasse o método descoberto. Tartaglia não concordou, pois dissera que ele próprio publicaria as soluções em documento futuro. Cardano o acusou de mesquinho e egoísta, pois estava querendo todo o saber só pra ele e implorou mais uma vez para lhe contar seu método, jurando pelo Evangelho que nada publicaria, só queria saber por prazer à Matemática. Tartaglia acreditou naqueles juramentos e lhe ensinou como resolvê-las. O que Tartaglia não sabia é que aquele homem era um dos seres mais egoístas e mesquinhos já existentes e que odiava religião, sendo que juramentos nada significavam a ele.

Em 1545, Cardano publica ***Ars Magna***, contendo a fórmula ensinada por Tartaglia, sendo o primeiro a publicá-la e levar todas as honrarias em seu nome. Tartaglia ficou enfurecido e também publicou suas descobertas, porém não foram muito levadas em conta porque seu inimigo já havia publicado algo a respeito. Houve trocas de ofensas e pedidos de desafios por Tartaglia, aceitos por Cardano, porém, quem apareceu para o desafio foi Ludovido Ferrari, discípulo de Cardano e descobridor da fórmula resolutiva referente às equações do 4º grau. O desafio não passou de ofensas e bate bocas e assim, como Bhaskara tem seu nome atrelado à fórmula resolutiva às equações do 2º grau, mesmo sem ter sido o primeiro a deduzi-la, Cardano leva seu nome às do 3º grau. Por conta de todo esse embate, costuma-se atualmente atrelar aos dois essa descoberta e muitos livros trazem o nome Cardano – Tartaglia quando se referem às equações do 3º grau.

2.3.2 FÓRMULA RESOLUTIVA

Consideremos a equação de 3º grau em sua forma canônica: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Sem perda de generalidade, consideremos o polinômio do primeiro membro da equação um polinômio mônico. Sendo assim, teremos a equação $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Mostremos inicialmente que toda equação completa do terceiro grau, por meio de uma substituição, pode ser expressa por outra que não possui o termo quadrático, transformando-a em $y^3 + py + q = 0$, equação resolvida por Tartaglia.

Efetuamos a substituição: $x = y + d$ e obtemos:

$$(y+d)^3 + a_2(y+d)^2 + a_1(y+d) + a_0 = 0$$

$$y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3 + a_2(y^2 + 2dy + d^2) + a_1 y + a_1 d + a_0 = 0$$

$$y^3 + 3dy^2 + 3d^2y + d^3 + a_2y^2 + 2a_2dy + a_2d^2 + a_1y + a_1d + a_0 = 0$$

Juntando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos:

$$y^3 + (3d + a_2)y^2 + (3d^2 + 2a_2d + a_1)y + (d^3 + a_2d^2 + a_1d + a_0) = 0 \text{ (I)}$$

Como queremos excluir o termo quadrático, consideramos:

$$3d + a_2 = 0, \text{ e assim, } d = -\frac{a_2}{3} \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), teremos:

$$y^3 + \left[3\left(-\frac{a_2}{3}\right) + a_2\right]y^2 + \left[3\left(-\frac{a_2}{3}\right)^2 + 2a_2\left(-\frac{a_2}{3}\right) + a_1\right]y +$$

$$+\left[\left(-\frac{a_2}{3}\right)^3 + a_2\left(-\frac{a_2}{3}\right)^2 + a_1\left(-\frac{a_2}{3}\right) + a_0\right] = 0$$

$$y^3 + \left[-a_2 + a_2\right]y^2 + \left[\frac{a_2{}^2}{3} - \frac{2a_2{}^2}{3} + a_1\right]y + \left[\frac{-a_2{}^3}{27} + \frac{a_2{}^3}{9} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right] = 0$$

$$y^3 + \underbrace{\left(-\frac{a_2{}^2}{3} + a_1\right)}_{p}y + \underbrace{\left(\frac{2a_2{}^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right)}_{q} = 0$$

Portanto, encontrar as soluções de $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ equivale a encontrar as soluções de $y^3 + py + q = 0$, onde: $p = a_1 - \frac{a_2{}^2}{3}$, $q = \frac{2a_2{}^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0$ e subtrair delas $\frac{a_2}{3}$.

Observação:

De modo geral, na equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, a substituição de x por $y - \frac{a_{n-1}}{n}$ conduz sempre à eliminação do termo x^{n-1}.

Vamos agora, mostrar o caminho percorrido por Tartaglia, para resolver as equações cúbicas do tipo $y^3 + py + q = 0$. A grande "sacada" de Tartaglia foi supor que a solução procurada era formada por duas parcelas.

Consideremos A e B a essas duas parcelas. Teremos então:

$$x = A + B \text{ (I)}$$

Sendo iguais os dois membros da equação, seus cubos também o serão. Obtemos assim:

$$x^3 = (A+B)^3$$

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II):

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx \text{ (III)}$$

Colocando a equação (III) na forma $y^3 + py + q = 0$, teremos:

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Obtendo assim:

$$p = -3AB \text{ e } q = -(A^3 + B^3) \text{ ou } A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \text{ e } A^3 + B^3 = -q$$

Temos assim dois termos, A^3 e B^3, cujas somas e produtos são conhecidos. Podemos montar a equação do 2º grau:

$$z^2 - Sz + P = 0 \rightarrow z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolvendo essa equação por meio da fórmula resolutiva das equações do 2º grau, teremos:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4.1.\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2.1} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Portanto, sem perda de generalidade, teremos:

$$A^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } B^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

E voltando à equação (I):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

obtendo assim, a fórmula atribuída a Cardano referente à resolução das equações do 3º grau.

Exemplo 4: Resolver a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Resolução: Como a equação não apresenta o termo quadrático, podemos aplicar a fórmula de Cardano diretamente, observando que $p = -6$ e $q = -9$:

Temos que

$$-\frac{q}{2} = -\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} \quad \text{e} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{81}{4} - 8 = \frac{81-32}{4} = \frac{49}{4}$$

Então:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

Facilmente verificamos que 3 é uma raiz da equação dada, mostrando que a fórmula realmente "funcionou". Porém, hoje sabemos que toda equação de terceiro grau possui três soluções e a fórmula de Cardano, fornece aparentemente apenas uma. Ressurge daí a necessidade de criar de um novo conjunto numérico, o conjunto dos números complexos. Com as descobertas de Bombelli, Descartes, Euler e Gauss referente ao conjunto dos números complexos, mostrou-se que a fórmula de Cardano expressava as três raízes da equação em forma de soma de dois radicais e com Euler tendo desvendado o mistério das raízes enésimas de um número complexo, podemos completar a fórmula de Cardano:

Temos que $A^3 = z_1 \to A = \sqrt[3]{z_1}$ de onde segue que as soluções de $A^3 = z_1$ são $\sqrt[3]{z_1}$, $w\sqrt[3]{z_1}$ e $w^2\sqrt[3]{z_1}$, em que $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes cúbicas da unidade.

Temos também que $B^3 = z_2 \to B = \sqrt[3]{z_2}$.

Como $A^3B^3 = -\dfrac{p^3}{27} \to (z_1 . z_2) = -\dfrac{p^3}{27} \to \sqrt[3]{z_1} . \sqrt[3]{z_2} = -\dfrac{p}{3}$, teremos as seguintes soluções:

$$A_1 = \sqrt[3]{z_1} \qquad A_2 = w\sqrt[3]{z_1} \qquad A_3 = w^2\sqrt[3]{z_1}$$

$$B_1 = \sqrt[3]{z_2} \qquad B_2 = w^2\sqrt[3]{z_2} \qquad B_3 = w\sqrt[3]{z_2}$$

Portanto, as equações do terceiro grau da forma $y^3 + py + q = 0$, possui as seguintes soluções, chamadas de fórmulas de Cardano:

$$y_1 = A_1 + B_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$y_2 = A_2 + B_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \text{ e}$$

$$y_3 = A_3 + B_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Utilizando as fórmulas de Cardano para a resolução do exemplo 4, obtemos:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1} = 2+1 = 3$$

$$x_2 = 2w + 1w^2 = 2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-4+4i\sqrt{3}+1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = 2w^2 + 1w = 2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-2i\sqrt{3}-3-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $S = \left\{3, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

Exemplo 5: Resolver a equação $x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0$.

Resolução: Inicialmente fazemos a substituição

$$x = y - \frac{a_2}{3} \rightarrow x = y - \left(-\frac{9}{3}\right) \rightarrow x = y + 3$$

Obtendo a equação

$$(y+3)^3 - 9(y+3)^2 - 9(y+3) - 15 = 0$$

Desenvolvendo-a obtemos a equação na forma $y^3 + py + q = 0$, sem o termo quadrático:

$$y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 54y - 81 - 9y - 27 - 15 = 0 \rightarrow y^3 - 36y - 96 = 0$$

com $p = -36$ e $q = -96$

Pelas fórmulas de Cardano, obtemos:

$$-\frac{q}{2} = \left(-\frac{-96}{2}\right) = 48 \quad \text{e} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-96)^2}{4} + \frac{(-36)^3}{3} = \frac{9216}{4} - \frac{46656}{3} = 2304 - 1728 = 576$$

Então:

$$y_1 = \sqrt[3]{48+\sqrt{576}} + \sqrt[3]{48-\sqrt{576}} = \sqrt[3]{48+24} + \sqrt[3]{48-24} = \sqrt[3]{72} + \sqrt[3]{24} \rightarrow y_1 = 2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3}$$

$y_2 = 2w\sqrt[3]{9} + 2w^2\sqrt[3]{3}$

$y_3 = 2w^2\sqrt[3]{9} + 2w\sqrt[3]{3}$

E por fim, como $x = y + 3$, obtemos:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 3,\quad x_2 = 2w\sqrt[3]{9} + 2w^2\sqrt[3]{3} + 3 \quad \text{e} \quad x_3 = 2w^2\sqrt[3]{9} + 2w\sqrt[3]{3} + 3$$

Observação: Em geral, as soluções podem ser deixadas em função de w, lembrando que $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2.4 EQUAÇÕES DO 4º GRAU

O método para resolver equações do 4º grau foi descoberto pelo matemático italiano Ludovico Ferrari (1522 – 1565), discípulo de Cardano. Nascido em Bolonha, chegou à casa de seu mestre aos 14 anos, para trabalhar como empregado. Cardano logo percebera que aquele garoto possuía uma excepcional capacidade de leitura e escrita e logo lhe nomeou seu secretário, ensinando-lhe também Matemática. Quando Cardano lhe apresentou a solução das equações cúbicas, fornecida por Tartaglia, Ferrari elaborou um método para resolver as equações do 4º grau (em 1540). Ambos viajaram a Bolonha e encontraram um amigo, Hannibal della Nave, neto de Scipione del Ferro, que ao saber da descoberta das soluções das equações de graus 3 e 4, mostrou-lhes um manuscrito de seu avô que continha a solução de equações cúbicas, com data anterior à descoberta de Cardano, o que levou à publicação de *Ars Magna* (1545), creditando a Scipione a descoberta, o que gerou a ira de Tartaglia, pela quebra das promessas feitas anteriormente sob juramento. Ferrari ganhou vários prêmios e por um tempo foi assessor do governador de Milão. Após ganhar muito dinheiro, retornou a Bolonha em 1565, sendo convidado a ensinar matemática em uma importante universidade local, o que nunca aconteceu, pois morreu repentinamente no mesmo ano. Suspeita-se que tenha sido envenenado pela própria irmã.

Figura 18: Imagem representativa de Ludovico Ferrari

Fonte: Disponível em: <http:// http://www.fuenterrebollo.com/Matematicos/siglo16.html>. Acesso em: jan.2017.

2.4.1 FÓRMULA RESOLUTIVA: MÉTODO FERRARI

O grande feito de Ferrari foi escrever uma equação do 4º grau como uma igualdade entre dois quadrados perfeitos. Vejamos o método descoberto por ele:

Seja a equação:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ (I)}$$

Isolando os termos de 3º e 4º graus, obtemos:

$$x^4 + a_3x^3 = -a_2x^2 - a_1x - a_0$$

Ajustamos o primeiro membro de modo a torná-lo um quadrado perfeito:

$$\left(x^2\right)^2 + \underbrace{a_3x^3}_{2.x^2.\frac{1}{2}.a_3.x} + \left(\frac{1}{2}a_3x\right)^2 = -a_2x^2 - a_1x - a_0 + \left(\frac{1}{2}a_3x\right)^2$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right)^2 = -a_2x^2 - a_1x - a_0 + \frac{1}{4}a_3{}^2x^2 \rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a_3{}^2 - a_2\right)x^2 - a_1x - a_0 \text{ (2)}$$

Para transformarmos o segundo membro em um quadrado perfeito, sem destruirmos o quadrado perfeito do primeiro membro, somamos a ambos os membros $y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right)$

$$y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x \right) + \left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x \right)^2 = y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x \right) + \left(\frac{1}{4}a_3{}^2 - a_2 \right)x^2 - a_1x - a_0$$

$$\left[y + \left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x \right) \right]^2 = \left(2y + \frac{1}{4}a_3{}^2 - a_2 \right)x^2 + (ya_3 - a_1)x + \left(y^2 - a_0 \right) \text{ (III)}$$

Para que o segundo membro seja um trinômio quadrado perfeito, o valor do discriminante da equação (Δ) deve ser igual a zero. Portanto:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow (ya_3 - a_1)^2 - 4\left(2y + \frac{1}{4}a_3{}^2 - a_2 \right)\left(y^2 - a_0 \right) = 0$$

$$a_3{}^2y^2 - 2a_1a_3y + a_1{}^2 - 8y^3 + 8a_0y - a_3{}^2y^2 + a_0a_3{}^2 + 4a_2y^2 - 4a_0a_2 = 0$$

$$-8y^3 + 4a_2y^2 + (8a_0 - 2a_1a_3)y + \left(a_1{}^2 + a_0a_3{}^2 - 4a_0a_2 \right) = 0$$

$$8y^3 - 4a_2y^2 + (-8a_0 + 2a_1a_3)y + \left(-a_1{}^2 - a_0a_3{}^2 + 4a_0a_2 \right) = 0 \text{ (IV)}$$

Sendo assim, considerando y uma raiz da equação (IV), podemos reescrever a equação (III):

$$\left[y + \left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x \right) \right]^2 = (\alpha x + \beta)^2 \text{ (V)}$$

encontrando α e β convenientes, decorrentes da substituição da raiz encontrada na equação (IV) com a equação inicial. Elevando ambos os membros da equação (V) a $\frac{1}{2}$, a resolução dessa equação se resume à resolução de duas equações do 2º grau:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x \right) + y = \alpha x + \beta \quad \text{e} \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x \right) + y = -\alpha x - \beta$$

Observando que a equação (V) é equivalente à equação (I), resolvemos uma equação do 4º grau, encontrando uma solução para uma equação do 3º grau e resolvendo duas equações do 2º grau.

Exemplo 6: Resolver a equação $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$

Resolução: Seguindo os passos executados por Ferrari, obtemos:

$$x^4 - 2x^3 = -4x^2 + 2x - 3$$

Transformando o 1º membro em um quadrado perfeito:

$$\left(x^2\right)^2 \underbrace{-2x^3}_{-2.x^2.x} + x^2 = -4x^2 + 2x - 3 + x^2$$

$$\left(x^2 - x\right)^2 = -3x^2 + 2x - 3$$

Transformamos o segundo membro em um quadrado perfeito, sem eliminarmos o quadrado perfeito do primeiro membro, somando a ambos os membros $y^2 + 2y\left(x^2 - x\right)$:

$$y^2 + 2y\left(x^2 - x\right) + \left(x^2 - x\right)^2 = y^2 + 2y\left(x^2 - x\right) - 3x^2 + 2x - 3$$

$$\left[y + \left(x^2 - x\right)\right]^2 = \left(2y - 3\right)x^2 + \left(2 - 2y\right)x + (y^2 - 3) \text{ (I)}$$

Para que o segundo membro seja um trinômio quadrado perfeito, o valor do discriminante da equação (Δ) deve ser igual a zero. Portanto:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow \left(2 - 2y\right)^2 - 4\left(2y - 3\right)\left(y^2 - 3\right) = 0$$

$$4 - 8y + 4y^2 - 8y^3 + 24y + 12y^2 - 36 = 0 \rightarrow -8y^3 + 16y^2 + 16y - 32 = 0$$

Dividindo ambos os membros por (– 8), obtemos:

$$y^3 - 2y^2 - 2y + 4 = 0 \text{ (II)}$$

Por inspeção, encontramos como uma das soluções da equação (II), $y = 2$, pois, $2^3 - 2.2^2 - 2.2 + 4 = 0$. Substituindo esse valor em (I), obtemos:

$$\left[y + \left(x^2 - x\right)\right]^2 = \left(2y - 3\right)x^2 + \left(2 - 2y\right)x + (y^2 - 3)$$

$$\left[\left(x^2 - x\right) + 2\right]^2 = \left(2.2 - 3\right)x^2 + \left(2 - 2.2\right)x + (2^2 - 3)$$

$$\left[\left(x^2 - x\right) + 2\right]^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\left[\left(x^2 - x\right) + 2\right]^2 = \left(x - 1\right)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, nos limitamos a resolver duas equações quadráticas:

$$x^2 - x + 2 = x - 1 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ (III) e } x^2 - x + 2 = -x + 1 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ (IV)}$$

Resolvendo as equações (III) e (IV), obteremos:

(III) $x^2 - 2x + 3 = 0$

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

(IV) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = \pm\sqrt{-1} \rightarrow x = \pm i$

Portanto, as raízes de (III) e (IV) correspondem às raízes da equação inicial.

Sendo assim, $S = \left\{ -i, i, 1+\sqrt{2}\,i, 1-\sqrt{2}\,i \right\}$.

O estudo da resolução das equações algébricas, no currículo estadual paulista, é iniciado no sétimo ano do Ensino Fundamental, com o ensino das equações algébricas do 1º grau. No nono ano do mesmo segmento são introduzidas as equações do 2º grau. Equações de grau superior a 2 são retomadas na terceira série do Ensino Médio, onde sugere-se apresentar a resolução das equações do 3º grau por meio das fórmulas de Cardano e Tartaglia e discute-se a pesquisa de raízes reais de equações de grau superior a 3, sem fazer alusão ao método Ferrari para a resolução de equações de grau 4. Poder-se-ia comentar a resolução de Ferrari aos alunos que estão nessa série, por tratar de um método totalmente algébrico, podendo com isso aumentar o conhecimento dos alunos sobre esse tema e, que muitas vezes, vão para o Ensino Superior com total desconhecimento desse método.

Por muito tempo, grandes matemáticos tentaram encontrar uma fórmula resolutiva para equações de grau superior a 4, todas tentativas sem sucesso. Posteriormente foi provado por Abel e Galois a impossibilidade de haver fórmulas resolutivas para esse tipo de equação, restando apenas alguns métodos alternativos para a pesquisa de raízes para essas equações, o que será apresentado de forma mais detalhada nos próximos capítulos.

3

EQUAÇÕES DE GRAU MAIOR QUE 4

Em 1823 Abel demonstrou, utilizando somente as operações algébricas, recursos da Álgebra clássica que, exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolver as equações de grau superior a 4. Na mesma época, Galois também demonstrou esse fato e conforme citado anteriormente, de forma independente a de Abel, utilizando a teoria dos grupos, inventado por ele próprio, marcando o início da Álgebra moderna. D´Alembert tentou demonstrá-lo em 1746, porém, com a matemática desenvolvida até sua época, ficou incompleta, sendo melhorada e simplificada por Argand em 1806 e 1814. As partes mais sutis dessas demonstrações consistiam na propriedade de que *toda função contínua numa região fechada e limitada do plano possui um mínimo absoluto*, cuja existência foi demonstrada pelo matemático alemão Karl Weierstrass[6] (1815 - 1897) em 1874, após a construção dos números reais realizada por Richard Dedekind [7](1831 – 1916) em 1870. A demonstração desse teorema não é simples e há várias formas de demonstrá-lo, utilizando álgebra, teoria dos grupos ou elementos de Análise. A que está contemplada nesse trabalho foi extraída de [5], atribuídas a D´Alembert e Argand.

Teorema 1: ***(Teorema Fundamental da Álgebra):*** Todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa.

Observação: O Teorema Fundamental da Álgebra pode ser reescrito, de forma equivalente e aplicado às equações algébricas em: "*Toda equação algébrica* $p(x)=0$ *de grau* $n(n \geq 1)$ *possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não)".*

6 Matemático e professor alemão da Universidade de Berlim nascido em próximo a Munique, cujo trabalho foi de grande importância para o desenvolvimento da análise, sendo considerado o pai da análise matemática moderna.

7 Julius Wilhelm Richard Dedekind foi um matemático alemão que fez importantes contribuições para a álgebra abstrata (em particular a teoria dos anéis) e realizou a construção formal dos números reais .

A demonstração se apoia em dois lemas e o lema 2 necessita da Proposição 1:

Proposição 1: $|z+w| = |z| - |w|$ se, e somente se $w = \lambda z$, com $-1 \leq \lambda \leq 0$.

Demonstração:

$|z+w| = |z+\lambda z| = |z(1+\lambda)|$. Como $-1 \leq \lambda \leq 0$, $(1+\lambda) \geq 0$. Então $|z+w| = |z|.(1+\lambda)$. (I)

Por outro lado, $|z| - |w| = |z| - |\lambda z| = |z| - |\lambda|.|z|$. Como $-1 \leq \lambda \leq 0$, $-|\lambda| = \lambda$. Então, $|z| - |w| = |z| + \lambda|z| = |z|.(1+\lambda)$. (II). Como (I) = (II), a proposição está demonstrada.

Lema 1: Dado um polinômio $p(x)$ com coeficientes em *C*, existe $z_0 \in C$ tal que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$, $\forall z \in C$.

Demontração: Sem perda de generalidade, podemos demonstrar considerando $p(x)$ um polinômio mônico. Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Pelas desigualdades triangulares, temos que, para todo $z \in C$,

$$|p(z)| = |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right),$$

o que mostra que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$$

Logo, existe $R > 0$, tal que $|p(z)| > |p(0)|$ para todo z com $|z| > R$. Consideremos o conjunto $D = \{z \in C; |z| \leq R\}$, pelo Teorema de Weierstrass[8], existe $z_0 \in D$, tal que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$, para todos $z \in D$. Como $|p(z_0)| \leq |p(0)|$, temos que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in C$.

Lema 2: Seja $p(x)$ com coeficientes em *C*. Se $z_0 \in C$ é tal que $p(z_0) \neq 0$, então existe $z_1 \in C$ tal que $|p(z_1)| < |p(z_0)|$.

[8] O Teorema de Weierstrass diz que toda função contínua $f : [a,b] \rightarrow R$, admite um mínimo e um máximo global.

Demonstração: Também consideraremos aqui $p(x)$ um polinômio mônico. Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e seja z_0 e h números complexos tais que $p(z_0) \neq 0$ e h a ser determinando de forma que $\left| p(z_0) + h \right| < \left| p(z_0) \right|$. Com o auxílio do Binômio de Newton, podemos escrever

$$p(z_0 + h) = (z_0 + h)^n + a_{n-1}(z_0 + h)^{n-1} + \cdots + a_0 = p(z_0) + q(h),$$

onde $q(x)$ é um polinômio não nulo, pois $p(x)$ é um polinômio não constante, de grau n e sem termo constante. Seja bx^m o termo de menor grau em $q(x)$. Podemos assim escrever $q(x) = bx^m + x^{m+1}r(x)$, onde $r(x)$ é um outro polinômio. Podemos também escolher o argumento de h de modo que $\lambda = \dfrac{bh^m}{p(z_0)}$ tenha argumento igual a π, o que é possível, pois tomamos $p(z_0) \neq 0$. Logo, λ é um número real negativo. Podemos garantir que a desigualdade $-1 \leq \lambda \leq 0$ se mantém para $|h|$ suficientemente pequeno para que $\left| h^{m+1}r(h) \right| < \left| bh^m \right|$. Pela desigualdade triangular e pela proposição 1, para todo $h \in C$, nas condições citadas, temos que

$$\left| p(z_0 + h) \right| = \left| p(z_0) + bh^m + h^{m+1}r(h) \right| \leq \left| p(z_0) + bh^m \right| + \left| h^{m+1}r(h) \right| =$$

$$\left| p(z_0) \right| - \left| bh^m \right| + \left| h^{m+1}r(h) \right| < \left| p(z_0) \right|$$

Portanto, existe $z_1 = z_0 + h$, com h como acima descrito, tal que $\left| p(z_1) \right| < \left| p(z_0) \right|$.

Demonstração: (**Teorema Fundamental da Álgebra**)

Seja $p(x)$ com coeficientes em *C*. Pelo Lema 1, temos a existência de $z_0 \in C$ tal que $\left| p(z_0) \right| \leq \left| p(z) \right|$ para todo $z \in C$. Basta mostrarmos que $p(z_0) = 0$, que faz com que z_0 seja uma raiz de $p(x)$, o que sai do Lema 2, pois, se $p(z_0) \neq 0$, existiria $z_1 \in C$ tal que $\left| p(z_1) \right| < \left| p(z_0) \right|$, o que é um absurdo.

Embora não existam fórmulas resolutivas às equações de grau superior a 4, há algumas técnicas que nos auxiliam a procurar as raízes destas equações. Podemos tentar encontrar soluções racionais por meio do Teorema das raízes racionais, se estas existirem. Caso uma ou mais sejam encontradas, podemos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini[9] para diminuir o grau da equação até obtermos uma de grau que saibamos resolver. É exatamente essa, a principal técnica que utilizaremos para resolver as equações com os alunos do terceiro ano do ensino médio.

3.1 DECOMPOSIÇÃO EM FATORES DO 1º GRAU

Utilizando o Teorema Fundamental da Álgebra, é possível demonstrar o seguinte corolário:

Corolário 1: Todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto em um produto de n fatores de 1º grau na forma $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2).\cdots.(x - x_n)$, onde a_n é o coeficiente líder de p e $x_1, x_2, \cdots. x_n$ são as raízes de p, o que resulta naturalmente que $p(x) = 0 \rightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2).\cdots.(x - x_n) = 0$, ou seja, toda equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes complexas (reais ou não).

Para demonstrarmos esse corolário, utilizaremos um resultado auxiliar, descrito na proposição a seguir:

Proposição 2: Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes complexos e variável $x \in C$. Se $x_0 \in C$ for uma raiz de p, existirá um polinômio h tal que $p(x) = (x - x_0)h(x)$ para todo $x \in C$.

Demonstração: Por hipótese, sendo x_0 uma raiz de p, temos que

$$p(x_0) = a_n {x_0}^n + a_{n-1}{x_0}^{n-1} + a_{n-2}{x_0}^{n-2} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

Portanto,

$$p(x) = p(x) - p(x_0) = a_n\left(x^n - {x_0}^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - {x_0}^{n-1}\right) + \cdots + a_2\left(x^2 - {x_0}^2\right) + a_1\left(x - x_0\right) \text{ (I)}$$

Temos que

$$x^k - {x_0}^k = (x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \ldots + x{x_0}^{k-2} + {x_0}^{k-1} \text{ para todo } k \geq 1 \text{ (II)}$$

[9] Ver seção 3.2.

Substituindo (II) em (I) e colocando $(x - x_0)$ em evidência, temos que:

$$p(x) = (x - x_0)\,h(x),$$

onde h é o polinômio

$$h(x) = a_1 + a_2\,(x + x_0) + \ldots a_n\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x{x_0}^{n-2} + {x_0}^{n-1}\right)$$

Voltemos agora à demonstração do Corolário 1:

Demonstração (Corolário 1): Faremos a prova por indução sobre n. Se $n = 1$, então $p(x) = a_n(x - x_0)$, onde $a_n = a_1$ e $x_0 = -\dfrac{a_0}{a_1}$. Suponhamos $n \geq 2$ e o resultado válido para polinômios de grau $n-1$ (hipótese de indução). Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe $x_n \in C$ tal que $p(x_n) = 0$. Pela Proposição 2, existe um polinômio h tal que $p(x) = h(x)(x - x_n)$. Como h tem grau $n-1$, pela hipótese de indução, podemos escrevê-lo na forma $h(x) = a_n\,(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$ e com isso,

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2).\cdots.(x - x_n),$$

o que finaliza a demonstração.

3.2 DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI[10]

Existe uma maneira prática de efetuarmos a divisão de $p(x)$ por um polinômio do 1º grau da forma $x - a$, com $a \in \Re$[11].

Observe como esse dispositivo foi elaborado:

Considere um polinômio p(x) com coeficientes reais

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

e sejam

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} \ldots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \quad \text{e} \quad r(x) = r_0$$

[10] (1765 – 1822) Médico e matemático italiano nascido em Valentano, Estados Papais (agora Itália), que estudou, pioneiramente (1799-1815) e demonstrou a impossibilidade da solução algébrica para equações quíntuplas ou superiores – Teorema Abel-Ruffini e, também, deu contribuições para soluções práticas para o estudo dos polinômios.

[11] O dispositivo é válido também para um polinômio p(z), com coeficientes em C.

o quociente e o resto da divisão euclidiana de p(x) por $x-a$, $a \in \Re$, onde q(x) tem coeficientes reais. Desse modo, de acordo com o algoritmo da divisão, teremos:

$$p(x) = q(x)\,(x-a) + r_0$$

Resolvendo o produto do segundo membro, obtemos:

$$q(x)\,(x-a) = \left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} \ldots + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right)(x-a) =$$

$$= b_{n-1}x^n - ab_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-1} - ab_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-2} - ab_{n-3}x^{n-3} + \cdots$$
$$+ b^3x^4 - ab_3x^3 + b_2x^3 - ab_2x^2 + b_1x^2 - ab_1x + b_0x - ab_0$$

Então:

$$q(x)\,(x-a) + r_0 = b_{n-1}x^n + \left(b_{n-2} - ab_{n-1}\right)x^{n-1} + \left(b_{n-3} - ab_{n-2}\right)x^{n-2}$$
$$+ \cdots + \left(b_0 - ab_1\right)x + \left(r_0 - ab_0\right)$$

Como $p(x) = q(x)\,(x-a) + r_0$, igualando os coeficientes, teremos:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1} \rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$$

$$b_{n-3} - ab_{n-2} = a_{n-2} \rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_0 - ab_1 = a_1 \rightarrow b_0 = a_1 + ab_1$$

$$r_0 - ab_0 = a_0 \rightarrow r_0 = a_0 + ab_0$$

Todo esse procedimento pode ser disposto na seguinte forma prática, conhecida por dispositivo de Briot – Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & r_0 \end{array}$$

Para a utilização deste dispositivo, o polinômio $p(x)$ deve estar ordenado segundo as potências decrescentes de x, mesmo aqueles que possuem coeficiente nulo.

Veja um exemplo de como ele funciona:

Exemplo 7: Faça a divisão de $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 12$ por $x - 1$

Resolução:

1. Montamos o dispositivo colocando primeiramente a raiz do divisor e, em seguida, os coeficientes de $p(x)$:

$$
\begin{array}{c|cccc}
a & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 4 & 0 & 12 \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

2. Repetimos o coeficiente líder (a_3) na linha inferior:

$$
\begin{array}{c|cccc}
a & a_2 & a_1 & a_0 & a_0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 4 & 0 & 12 \\
\hline
 & 2 & & &
\end{array}
$$

3. Multiplicamos a raiz do divisor por esse número e, em seguida, somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de $p(x)$, colocando o resultado abaixo desse coeficiente. Multiplicamos a raiz do divisor pelo resultado que acabamos de resolver, somamos o produto com o próximo coeficiente de $p(x)$ colocando esse novo resultado abaixo desse coeficiente, e assim sucessivamente.

$$
\begin{array}{c|cccc}
a & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 4 & 0 & 12 \\
\hline
 & 2 & 6 & 6 & 18
\end{array}
$$

4. O último resultado é o resto da divisão e os demais são os coeficientes do quociente, expressos em ordem decrescente das potências de x.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
a & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 4 & 0 & 12 \\
\hline
 & 2 & 6 & 6 & 18 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & a_2 & a_1 & a_0 & \text{resto}
\end{array}
$$

Portanto, $q(x) = 2x^2 + 6x + 6$ e $r(x) = 18$.

Exemplo 8: Determine k, de modo que 2 seja uma das raízes da equação $x^3 + kx^2 + 20x - 12 = 0$

Resolução: Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos:

2	1	k	20	– l2	
	1	2 + k	2k + 24	4k + 36	0

Como 2 e raiz da equação, temos que

$$4k + 36 = 0 \rightarrow k = -\frac{36}{4} \rightarrow k = -9$$

3.3 TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

Existe um método para se encontrar as raízes racionais de uma equação algébrica, com coeficientes em Z, se estas existirem, por meio de tentativas. Encontram-se as prováveis soluções e testam-lhes na equação para verificar se alguma delas é uma raiz. Encontrando uma ou algumas raízes, podemos diminuir o grau da equação até chegarmos a um grau na qual sabemos resolvê-la por meio de fórmulas resolutivas ou outro meio conhecido. Observe a seguir o enunciado, a demonstração e aplicações desse teorema:

Teorema 2: ***(Teorema das raízes racionais)*** Se o número racional $\frac{p}{q}$, p e q, primos entre si, for raiz da equação algébrica de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_0 \neq 0$, então $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

Demonstração: Seja o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e primos entre si, raiz da equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$. Então:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por q^n, obtemos:

$$a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right)q^n + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right)q^n + \ldots + a_2\left(\frac{p^2}{q^2}\right)q^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)q^n + a_0q^n = 0$$

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \quad \text{(I)}$$

i) Mostraremos inicialmente que $p \mid a_0$

Adicionando $\left(-a_0q^n\right)$ aos dois membros da equação (I), temos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} = -a_0q^n$$

Colocando p em evidência no primeiro membro, resulta em:

$$p\,(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n$$

Temos que o primeiro membro da igualdade é um número inteiro, pois p , q, a_n , a_{n-1},..., a_1 são números inteiros por hipótese. Portanto, a_0q^n é também um número inteiro e múltiplo de p , pois $a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1} = -\dfrac{a_0q^n}{p}$. Como, também por hipótese, p e q são primos entre si, p e q^n também o são. Logo, p é divisor de a_0 .

$\therefore\ p \mid a_0$.

ii) Demonstramos agora que $q \mid a_n$. Observe:

Adicionando $\left(-a_np^n\right)$ aos dois membros da equação (I), temos:

$$a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = -a_np^n$$

Colocando q em evidência no primeiro membro, resulta em:

$$q\,(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q \ldots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n$$

Analogamente, temos que $a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1} = -\dfrac{a_np^n}{q}$ e por p e q serem primos entre si, p e q^n também o são. Logo, q é divisor de a_n .

$\therefore\ q \mid a_n$.

Observações:

1. O teorema das raízes racionais não garante a existência de raízes racionais, mas, se existirem, mostra como encontrá-las.

2. Este teorema possibilita encontrar possíveis soluções racionais de uma equação obtidas dos divisores de a_n e a_0. Se nenhum desses números for raiz da equação, então esta não terá raízes racionais.
3. Se $a_n = \pm 1$ e os demais coeficientes forem inteiros, a equação não possuirá raízes fracionárias, podendo, contudo, admitir raízes inteiras, divisores de a_0.
4. Toda equação algébrica na qual a soma de todos os coeficientes for igual a zero terá o número 1 como uma de suas raízes.

Observe alguns exemplos no qual o teorema das raízes racionais e o dispositivo de Briot-Ruffini nos auxiliam na resolução de algumas equações algébricas.

Exemplo 9: Resolver a equação $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$.

Resolução: Pela observação 3, como $a_n = a_3 = 1$, se a equação possuir raízes racionais, elas serão inteiras, todas divisores de 24 (a_0). Portanto, as possíveis raízes racionais da equação, se existirem, pertencerão ao conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$. Basta verificar se alguma delas é raiz da equação:

- Para $x = 1 \rightarrow 1^3 + 1^2 - 14.1 - 24 = 1 + 1 - 14 - 24 = -36 \neq 0$
- Para $x = -1 \rightarrow (-1)^3 + (-1)^2 - 14.(-1) - 24 = -1 + 1 + 14 - 24 = -10 \neq 0$
- Para $x = 2 \rightarrow 2^3 + 2^2 - 14.2 - 24 = 8 + 4 - 28 - 24 = -40 \neq 0$
- Para $x = -2 \rightarrow (-2)^3 + (-2)^2 - 14.(-2) - 24 = -8 + 4 + 28 - 24 = 0 \surd$
- Para $x = 3 \rightarrow 3^3 + 3^2 - 14.3 - 24 = 27 + 9 - 42 - 24 = -30 \neq 0$
- Para $x = -3 \rightarrow (-3)^3 + (-3)^2 - 14.(-3) - 24 = -27 + 9 + 42 - 24 = 0 \surd$
- Para $x = 4 \rightarrow 4^3 + 4^2 - 14.4 - 24 = 64 + 16 - 56 - 24 = 0 \surd$

Como uma equação algébrica do terceiro grau, tem no máximo, três raízes distintas, então, a solução dessa equação é $S = \{-2, -3, 4\}$.

Observação: Outra alternativa para a resolução desta equação é encontrar uma raiz e, com o dispositivo de Briot-Ruffini, expressá-la por meio do produto $(x-x_1).(ax^2+bx+c)=0$ e, resolvendo a equação do 2º grau, obtemos $(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)=0$, onde $S=\{x_1, x_2, x_3\}$.

Sendo $x_1=-2$, uma das soluções, podemos expressar a equação $x^3+x^2-14x-24=0$ na forma $(x+2).q(x)=0.$ Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 1 & -14 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

Portanto, $q(x)=x^2-x-12.$ Escrevendo $q(x)=0$, teremos $q(x)=x^2-x-12=0.$ A partir da fórmula resolutiva, obtemos: $x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.1.(-12)}}{2.1}=\dfrac{1\pm 7}{2}$. Temos assim, $x_2=4$ e $x_3=-3$. Por fim, podemos expressar a equação inicial na forma fatorada $(x+2).(x-4).(x+3)=0$, obtendo novamente a solução $S=\{-2,-3,4\}$.

Exemplo 10: Sabendo que 2 é raiz da equação $x^3+2x^2-5x+c=0$, calcule o valor de c e o conjunto solução da equação. (Exercício extraído de [3], pág. 189).

Resolução: Como 2 é raiz da equação, temos que:

$$(2)^3+2(2)^2-5(2)+c=0 \rightarrow 8+8-10+c=0 \rightarrow c=-6$$

Utilizando agora o dispositivo de Briot-Ruffini, vamos realizar a divisão de x^3+2x^2-5x-6 por $x-2$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

Reescrevendo a equação na forma fatorada, obtemos:

$$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x^2+4x+3)=0$$

Resolvendo a equação do 2º grau por meio da fórmula resolutiva, temos:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1.3}}{2.1}=\frac{-4\pm 2}{2}$$. Portanto, $x_1=-1$ e $x_2=-3$

Logo, $c=-6$ e $S=\{-3,-1,2\}$.

Observação: Se um polinômio $p(x)$ é divisível por $x-a$, sabemos que a é raiz desse polinômio e solução da equação algébrica $p(x)=0$. Um Teorema interessante, conhecido como

Teorema D'Alembert diz que o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-a$ é $p(a)$. Ele auxilia a encontrar o resto de uma divisão de um polinômio pelo binômio $x-a$ sem a necessidade de efetuar a divisão. A demonstração é bem simples e realizada a seguir:

Teorema 3: O resto da divisão de $p(x)$ por $x-a$ é $p(a)$.

Demonstração: Sejam $q(x)$ e r, o quociente e o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-a$. Então, $p(x)=(x-a).q(x)+r$. Segue que $p(a)=(\underbrace{a-a}_{0}).q(x)+r \rightarrow p(a)=r$.

Exemplo 11: Determine a e b na equação $x^4+x^2+ax+b=0$, sabendo que 2 é raiz dessa equação e que a divisão do primeiro membro da equação por $x+2$ deixa resto igual a 4.

Resolução: Como 2 é raiz da equação, temos que

$$2^4+2^2+a.2+b=0 \rightarrow 20+2a+b=0 \rightarrow 2a+b=-20\ (I)$$

Chamemos o primeiro membro da equação de $p(x)$. Então, $p(x)=x^4+x^2+ax+b$. Como, por hipótese, a divisão de $p(x)$ por $x+2$ é igual a 4, pelo Teorema d´Alembert, obtemos:

$$p(-2)=4 \rightarrow (-2)^4+(-2)^2+a(-2)+b=4$$

$$\rightarrow 20+a(-2)+b=4 \rightarrow -2a+b=-16\ (II)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), teremos:

$$\begin{cases} 2a+b=-20 \\ -2a+b=-16 \end{cases}$$

$$2b=-36 \rightarrow b=-18$$

$$(I)\ 2a+b=-20 \rightarrow 2a-18=-20 \rightarrow 2a=-2 \rightarrow a=-1$$

Portanto, $a=-1$ e $b=-18$.

3.4 MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Quando realizamos a decomposição de um polinômio $p(x)$ de grau $n>0$ em um produto de n fatores do 1º grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos. Portanto, em uma equação algébrica de grau n, obtemos n raízes, das quais algumas podem ser idênticas. O número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a *multiplicidade* da raiz.

Em linguagem mais formal, esse fato pode ser observado diretamente do Corolário 1 (p. 37), pois podem haver repetições nas raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de p. Ao agruparmos as raízes repetidas, podemos escrever p na forma fatorada:

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} . \cdots . (x - x_r)^{m_r},$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ são as raízes distintas de p e $m_1, m_2, \ldots, m_r$ são números naturais não nulos com $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$. O número m_j é a *multiplicidade* da raiz x_j, para $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Exemplo 12: Qual a multiplicidade da raiz -1 na equação polinomial

$$x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3 = 0\,?$$

Resolução: Basta utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini repetidas vezes para encontrar a multiplicidade da raiz em questão.

–1	1	5	6	–2	–7	–3
–1	1	4	2	–4	–3	0
–1	1	3	–1	–3	0	
–1	1	2	–3	0		
	1	1	–4			

Podemos reescrever a equação $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3 = 0$ na forma fatorada $(x+1)^3 (x^2 + 2x - 3) = 0$, observando que a raiz a – 1 tem multiplicidade 3.

3.5 RELAÇÃO ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES

A procura por fórmulas resolutivas de equações algébricas permitiu o surgimento de importantes teoremas que auxiliassem na resolução deste tipo de equação. O Teorema das raízes racionais foi um desses resultados. Outra importante descoberta foi feita pelo matemático francês Albert Girard[12] e ficou conhecido como **"Relações de Girard"**. Neste Teorema, Girard

[12] (1595 – 1633) Matemático francês nascido em St. Mihiel, escreveu Invention nouvelle en l'algèbre (1629), demonstrando que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias. Nesse trabalho estão contidas as

mostra uma relação existente entre os coeficientes de uma equação algébrica e somas, somas de produtos e produtos de suas raízes. Todas as demonstrações são feitas considerando os coeficientes e raízes complexas. Como o foco principal desse trabalho é focado nas raízes reais, tomaremos os coeficientes e raízes em $\Re$.

Iniciaremos a dedução das relações para equações polinomiais do 2º grau, seguidas das de grau 3. Depois faremos a generalização para equações algébricas de grau n.

Seja $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, uma equação polinomial do 2º grau, cujas raízes são r_1 e r_2. Podemos representá-la na forma fatorada $a(x-r_1)(x-r_2)=0$. Então, temos:

$$ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)=0, \forall x \in \Re$$

Dividindo ambos os lados por a, obtemos:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-r_1)(x-r_2)$$

Aplicando a distributiva no 2º membro, segue:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-r_2x-r_1x+r_1r_2$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-\underbrace{(r_1+r_2)}_{S}x+\underbrace{r_1r_2}_{P} \rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-Sx+P=0,$$

onde $\begin{cases} S=r_1+r_2 \\ P=r_1r_2 \end{cases}$.

Observamos que o coeficiente do 1º grau é a soma das raízes e o coeficiente de grau zero é o produto das raízes da equação.

Portanto:

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a} \text{ e } r_1r_2=\frac{c}{a}$$

Seja $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \neq 0$, uma equação polinomial do 3º grau, cujas raízes são r_1, r_2 e r_3. Podemos representá-la na forma fatorada $a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=0$. Então, temos:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=0, \forall x \in \Re$$

demonstrações das relações entre os coeficientes e raízes de uma equação, que ficaram conhecidas como "Relações de Girard". Trabalhou em álgebra, trigonometria e aritmética. Em álgebra desenvolveu esboços do Teorema Fundamental da Álgebra e foi o primeiro a formular o que seria conhecido mais tarde como sucessão de Fibonacci.

Dividindo ambos os lados por a, obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$$

Aplicando a distributiva no 2º membro, segue:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - r_3x^2 - r_2x^2 + r_2r_3x - r_1x^2 + r_1r_3x + r_1r_2x - r_1r_2r_3$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3)}_{S_1}x^2 + \underbrace{(r_1r_2x + r_1r_3 + r_2r_3)}_{S_2}x - \underbrace{r_1r_2r_3}_{P}$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - S_1x^2 + S_2x - P = 0$$

onde $\begin{cases} S_1 = r_1 + r_2 + r_3 \\ S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 \\ P = r_1r_2r_3 \end{cases}$.

Observamos que o coeficiente do 2º grau é a soma das raízes, o coeficiente do 1º grau é a soma dos produtos das raízes, tomadas duas a duas e o coeficiente de grau zero é o produto das raízes da equação.

Portanto:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}, \; r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \text{ e } r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$$

Observando as deduções das relações entre os coeficientes e raízes das equações polinomiais de grau dois e três, podemos generalizar as relações de Girard para uma equação polinomial de grau $n \geq 1$.

Seja a equação polinomial de grau n

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \; a_n \neq 0$$

cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$. Representando essa equação em sua forma fatorada obtemos:

$$a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n) = 0$$

Generalizando as relações observadas nas equações polinomiais do 2º e 3º grau, obtemos:

$$a_nx^n - a_n\underbrace{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)}_{S_1}x^{n-1} + a_n\underbrace{(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n)}_{S_2}x^{n-2}$$
$$-a_n\underbrace{(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n)}_{S_3}x^{n-3} + \cdots + (-1)^n a_n\underbrace{(r_1r_2\cdots r_n)}_{P} = 0$$

na qual as somas S_i possuem i variando de 1 a $n-1$.

Portanto, teremos que:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$P = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

são as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica de grau n.

Observe alguns exemplos de aplicação das relações de Girard:

Exemplo 13: Formar uma equação cujas raízes sejam 1, 2, 2 e 3.

A equação solicitada é do 4º grau e pode ser expressa por: $x^4 - S_1 x^3 + S_2 x^2 - S_3 x + P = 0$, onde, pelas relações de Girard, encontramos:

$S_1 = 1 + 2 + 2 + 3 = 8$

$S_2 = 1.2 + 1.2 + 1.3 + 2.2 + 2.3 + 2.3 = 23$

$S_3 = 1.2.2 + 1.2.3 + 1.2.3 + 2.2.3 = 28$

$P = 1.2.2.3 = 12$

Portanto, a equação procurada é: $x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0$.

Exemplo 14: Calcule o valor de $\log\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$ sabendo que a, b, c são as raízes da equação $2x^3 - 30x^2 + 15x - 3 = 0$.

Resolução: Pelas relações de Girard, temos que

$$a + b + c = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{(-30)}{2} = 15 \quad \text{e} \quad abc = (-1)^3 \frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

Basta agora notar que

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c+a+b}{acb}$$

Portanto,

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c+a+b}{acb}=\frac{15}{\frac{3}{2}}=15.\frac{2}{3}=\frac{30}{3}=10$$

Assim, $\log\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=\log 10=1$.

3.6 INVESTIGAÇÃO DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA: ALGUNS RESULTADOS

Há alguns resultados que ajudam a pesquisar e encontrar as raízes de uma equação polinomial. É o caso, por exemplo, do Teorema dar raízes complexas, o Teorema das raízes irracionais, o Teorema de Bolzano e o Teorema de Sturm. Vejamos um pouco mais sobre eles.

Teorema 4: (Teorema das raízes complexas): Se um número complexo $z=a+bi$, com $a,b\in R$ e $b\neq 0$, for raiz da equação polinomial $p(x)=0$, de coeficientes reais, o seu conjugado $\bar{z}=a-bi$ será também raiz da mesma equação.

Demonstração: Seja $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ com $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in R$

.

Seja z raiz da equação polinomial $p(x)=0$. Então, $p(z)=0$. Mostremos também que $p(\bar{z})=0$. Para demonstrar esse teorema, lembremos a seguinte propriedade dos números complexos:

$$a_j\bar{z}^j=\overline{a_jz}^j=\overline{a_j}\,\overline{z^j}=\overline{a_jz^j}\text{, parta cada } j=0,1,\cdots,n \text{ e } z\in C.$$

Então,

$$\begin{aligned}p(\bar{z})&=a_n\bar{z}^n=a_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\cdots+a_1\bar{z}+a_0\\&=\overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1z}+\overline{a_0}\\&=\overline{a_nz^n=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}\\&=\overline{p(z)}.\end{aligned}$$

Como $0 = \bar{0}$ e $\overline{\overline{p(z)}} = p(z)$, concluímos que $p(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{p(z)} = 0 \Leftrightarrow p(\bar{z}) = 0$.

Observação 1: Como as raízes complexas aparecem sempre aos pares, então toda equação de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

Observação 2: Adaptando esse teorema, podemos dizer o mesmo das raízes irracionais: “dada uma equação polinomial, com coeficientes racionais, $p(x) = 0$, se $a + b\sqrt{c}$, $c \neq 0$, é raiz dessa equação, sua conjugada, $a - b\sqrt{c}$ também será com a mesma multiplicidade”. Esse fato já aparece na fórmula resolutiva das equações do 2º grau, mais visível quando o discriminante não é um quadrado perfeito.

Exemplo 15: Determine a solução da equação $x^5 - 7x^4 + 20x^3 - 36x^2 + 27x - 5 = 0$, sabendo que $2 - \sqrt{3}$ e $1 + 2i$ são duas de suas raízes.
Resolução: Utilizando o teorema 4 e sua adaptação às raízes irracionais, sabemos que suas conjugadas também são soluções. Como a soma dos coeficientes da equação é igual a zero $(1 - 7 + 20 - 36 + 27 - 5 = 0)$, temos também que 1 é uma de suas raízes. Portanto, $S = \{1, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1 + 2i, 1 - 2i\}$.

Teorema 5: (Teorema de Bolzano): Dados uma equação algébrica em sua forma canônica $p(x) = 0$ e dois números reais a e b $(a < b)$, se $p(a)$ e $p(b)$ tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será par; se $p(a)$ e $p(b)$ tiverem sinais opostos, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será ímpar.

A figura 19 contempla dois gráficos para compreendermos o que o Teorema de Bolzano nos forneceu.

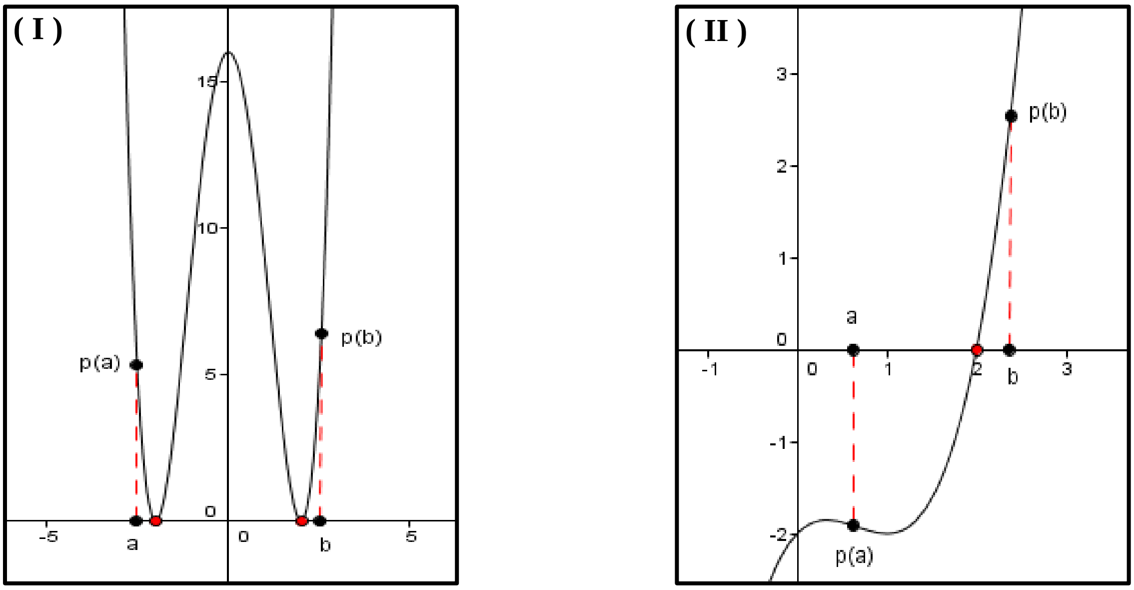


Figura 19: Gráficos das funções $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ **(I) e** $g(x) = x^3 - 2x + x - 2$ **(II)**

Observe que $p(a)$ e $p(b)$ possuem o mesmo sinal na parte I da figura, o que mostra que há um número par de raízes reais no intervalo (a, b) e na parte II, $p(a)$ e $p(b)$ possuem sinais opostos no intervalo (a, b), o que mostra que há um número ímpar de raízes nesse intervalo.

Demonstração: Seja a equação $p(x) = 0$, $r_1, r_2, \cdots, r_r$, suas raízes reais e $c_1, c_2, \cdots, c_c$, suas raízes complexas. Portanto,

$$p(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_r)(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_c) \text{ (I)}$$

Já sabemos que as raízes complexas de uma equação aparecem em pares, onde uma é conjugada da outra e que produtos entre binômios do tipo $(x - [A + Bi])(x - [A - Bi]) = [x - A]^2 + B^2$ que, por serem uma soma de quadrados de números reais serão sempre positivos, para quaisquer valores de x. Chamemos então $(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_c)$ de $M(x)$ e podemos reescrever a equação (I) na forma

$$p(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_r)\, M(x), \text{ lembrando que } M(x) > 0$$

Se $p(a)$ e $p(b)$ tem o mesmo sinal, então $p(a)p(b) > 0$; se possuem sinais opostos, $p(a)p(b) < 0$.

Então temos que

$$p(a)p(b) = a_0^{\ 2}\,(a-r_1)(a-r_2)\cdots(a-r_r)(b-r_1)(b-r_2)\cdots(b-r_r)M(a)M(b)$$

Podemos ajustar para

$$p(a)p(b) = [(a-r_1)(b-r_1)][(a-r_2)(b-r_2)]\cdots[(a-r_r)(b-r_r)]\,\underbrace{a_0^{\ 2}M(a)M(b)}_{(II)}$$

Como (II) > 0, podemos analisar somente o sinal dos produtos $[(a-r_i)(b-r_i)],\ i = 1, 2, \ldots, r.$

Temos que analisar dois casos: $\begin{cases} r_i \in (a,b) \\ r_i \notin (a,b) \end{cases}$

Se $r_i \in (a,b)$, então $a < r_i < b$, ou seja, $a - r_i < 0$ e $b - r_i > 0$, de modo que $(a-r_i)(b-r_i)$ terá sinal negativo.

Se $r_i \notin (a,b)$, então $r_i < a < b$ ou $a < b < r_i$. Em ambos os casos, $(a-r_i)(b-r_i)$ terá sinal positivo.

Voltando a $p(a)p(b) = [(a-r_1)(b-r_1)][(a-r_2)(b-r_2)]\cdots[(a-r_r)(b-r_r)]\,a_0^{\ 2}M(a)M(b)$

Se $p(a)p(b) > 0$, significa que há um número par de fatores $[(a-r_i)(b-r_i)]$ com $r_i \in (a,b)$; se $p(a)p(b) < 0$, significa que o número daqueles fatores é ímpar.

O Teorema de Bolzano mostra se o número de raízes de uma equação em um intervalo é par ou ímpar, lembrando que, no caso de ser par, pode não haver raízes (no caso, zero raízes) no intervalo considerado. Já o matemático alemão Charles Sturm publicou em 1829 um método para saber com exatidão o número de raízes de uma equação dentro de um intervalo. Por utilizar elementos de Cálculo diferencial não trataremos desse teorema nesse trabalho. Vejamos uma aplicação do Teorema de Bolzano no exemplo 16.

Exemplo 16: Utilize o Teorema de Bolzano para verificar se o número de raízes reais da equação $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3 = 0$ no intervalo $(-2, 2)$ é par ou ímpar.

Resolução:

$$p(-2) = (-2)^5 + 5(-2)^4 + 6(-2)^3 - 2(-2)^2 - 7(-2) - 3 = -32 + 80 - 48 - 8 + 14 - 3 = 3$$

$$p(2) = (2)^5 + 5(2)^4 + 6(2)^3 - 2(2)^2 - 7(2) - 3 = 32 + 80 + 48 + 8 + 14 + 3 = 185$$

Como $p(a)p(b) > 0$ (possuem o mesmo sinal), então há um número par de raízes reais nesse intervalo.

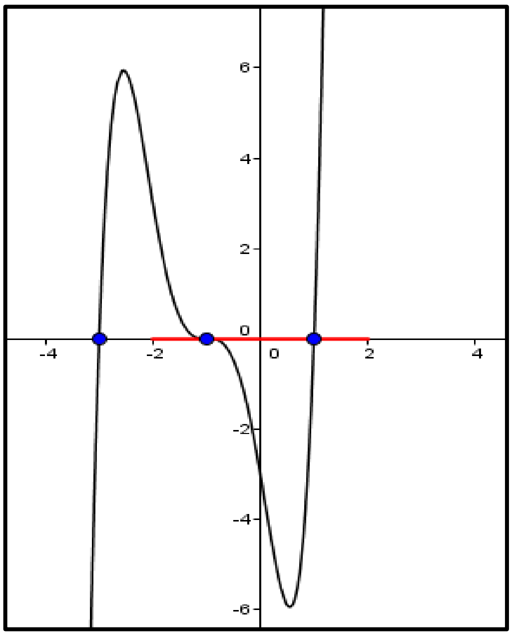


Figura 20: gráfico da função $f(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3$

Observe, que aparentemente há duas raízes no intervalo $(-2, 2)$. Como a equação utilizada foi a mesma do exemplo 12 (pág. 46), sabemos que a raiz -1 possui multiplicidade 3, encontrando-se, ainda assim, um número par de raízes no referido intervalo.

Observação: Se o intervalo considerado fosse $(-4, 2)$, teríamos

$$p(-4) = (-4)^5 + 5(-4)^4 + 6(-4)^3 - 2(-4)^2 - 7(-4) - 3 = -135$$

e portanto, $p(a)p(b) < 0$, o que caracterizaria um número ímpar de raízes no intervalo, mostrando a funcionalidade do Teorema de Bolzano.

Nesse capítulo discutimos a impossibilidade de existir fórmulas resolutivas de equações de grau superior a 4, bem como alguns meios de pesquisa de raízes dessas equações. O ensino das equações na educação básica estadual paulista acontece durante os anos finais do Ensino Fundamental e nas três séries do Ensino Médio, segundo mostrará a análise do currículo proposto no capítulo 4.

4

APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Nesse capítulo abordaremos como o ensino das equações algébricas é tratado no currículo oficial da educação básica estadual paulista.

O tema Equações Algébricas, na Educação Básica Paulista, é abordado no Ensino Médio, no 2º Bimestre da terceira série. Os conteúdos e habilidades trabalhados podem ser encontrados no Currículo oficial do Estado de São Paulo [6], do qual o fragmento abaixo foi extraído.

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
2º Bimestre	**Números** Equações algébricas e números complexos • Equações polinomiais • Números complexos: operações e representação geométrica • Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial • Relações de Girard	• Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas • Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica • Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz • Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss • Compreender o significado geométrico das operações com números complexos, associando-as a transformações no plano

Tabela 1: Conteúdos e habilidades de Matemática – 2º Bimestre – 3ª série – E.M.

Fonte: Disponível em: <http:// http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf>. Acesso em: jan. 2017.

Participaram dessa pesquisa 120 alunos das terceiras séries do ensino médio noturno (3ª D, E e F) da E.E. Julia Lopes de Almeida, escola estadual localizada no Jardim Rochdalle, Osasco, SP, na qual leciono como professor efetivo de Matemática há três anos.

Antes de adentrarmos à pesquisa realizada, conheçamos um pouco mais sobre a escola em que foi realizada a pesquisa e o currículo oficial do Estado de São Paulo, analisando em quais anos/séries as equações e o ensino da álgebra são abordados e de que forma isso acontece.

4.1 A ESCOLA

Criada em 11 de novembro de 1956 com o nome de Grupo Escolar de Rochdalle, passou a ser denominada Grupo Escolar Júlia Lopes de Almeida, em janeiro de 1963, em homenagem a renomada escritora e jornalista carioca, Julia Valentim da Silveira Lopes de Almeida, em comemoração ao centenário de seu nascimento (24/09/1962). A partir de 02 de setembro de 1998, passou a ter a denominação atual: "E.E. Júlia Lopes de Almeida".[13] Dentre os objetivos gerais desta escola, destaca-se *"desenvolver práticas pedagógicas que garantam qualidade no processo educativo, a fim de que seus alunos, ao longo do percurso escolar, se apropriem do conhecimento e dos requisitos necessários para atuarem na sociedade e no mundo do trabalho."* [14]

Parte expressiva dos alunos habitam a "área livre" do Jardim Rochdalle, constituídas por famílias de migrantes nordestinos que vieram trabalhar como pedreiros, diaristas, auxiliares de manutenção e outras profissões com baixa remuneração. Muitos são beneficiários dos programas sociais do governo federal, estadual e/ou municipal. Pela baixa escolarização de muitos pais, não há um acompanhamento efetivo da vida escolar dos alunos, aparecendo muitas vezes somente para as reuniões bimestrais ou quando convocados. Às vezes, nem a essas reuniões se fazem presentes, enviando um outro parente ou vizinho, alegando que não têm tempo.

A escola atualmente conta com três períodos de funcionamento, sendo 17 salas nos períodos da manhã e tarde e 15 no período noturno totalizando 1815 alunos, com 29 turmas do Ensino Fundamental e 20 do Ensino Médio. Cada sala do ensino fundamental é formada com no máximo 35 alunos e do ensino médio com 40. A equipe de gestão é formada por uma diretora, duas vice-diretoras, três professores coordenadores (dois responsáveis pelo ensino

[13] Conforme Resolução SE 100, de 01.09.1998, publicada em D.O.E. de 02.09.1998

fundamental e um pelo ensino médio) e dois professores mediadores, responsáveis principalmente pela mediação de conflitos e abordagens junto aos familiares dos alunos.

O Idesp[14] da escola, em 2015, mostrou que em matemática, no terceiro ano do ensino médio, 55% dos alunos estavam no nível abaixo do básico, 41% no nível básico, 4% no nível adequado e nenhum aluno no nível avançado. O desempenho dos alunos em matemática na escola não difere muito do desempenho de outros alunos das escolas estaduais paulistas, indicando ser necessário repensar no ensino atual da matemática.

4.2 O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA E O CADERNO DO ALUNO

Após a unificação do currículo público estadual paulista ocorrido em 2007, todos os alunos do ensino público estadual paulista recebem anualmente, um material de apoio, denominado *Caderno do Aluno* (recebidos a partir de 2009), de todas as disciplinas, antes divididos em quatro volumes (bimestralmente) e a partir de 2014, divididos em dois volumes: I (1º semestre) e II (2º semestre). Os professores também recebem um material, denominado *Caderno do professor*, contendo os conteúdos a serem ministrados e orientações didáticas da aplicação do material. Servem como orientação e material de apoio referente aos conteúdos que devem ser trabalhados em cada bimestre e ano de todas as disciplinas.

Figura 21: Capas dos Cadernos do professor e do aluno

[14] O IDESP (Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo) é um indicador de qualidade das séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Na avaliação de qualidade das escolas feita pelo IDESP consideram-se dois critérios complementares: o desempenho dos alunos nos exames do SARESP e o fluxo escolar. O IDESP tem o papel de dialogar com a escola, fornecendo um diagnóstico de sua qualidade, apontando os pontos em que precisa melhorar e sinalizando sua evolução ano a ano.

Constatadas grandes defasagens de aprendizados dos alunos que saem do ensino médio, por meio de avaliações como o SAEB[15] e o ENEM[16], a secretaria de Educação de São Paulo, lançou em 2007, o programa “São Paulo Faz Escola” que tem como foco unificar o currículo escolar para todas as mais de cinco mil escolas estaduais.

O programa é responsável pela implantação do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, formatado em documentos que constituem orientações para o trabalho do professor em sala de aula e visa garantir uma base comum de conhecimento e competências para todos os professores e alunos (http://www.educacao.sp.gov.br/sao-paulo-faz-escola).

O intuito maior é suprir as defasagens detectadas, melhorando o índice de qualidade do ensino público estadual paulista e, quanto ao ensino médio, fase de ensino no qual se encontram as maiores defasafens, fazer-se cumprir o artigo 35º da LDB 9.934/96:

> *“I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;*
> *II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;*
> *III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;*
> *IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina”. (BRASIL, 1996)*

A unificação do currículo, os cadernos do aluno e do professor, o incentivo à formação continuada do professor por meio de plataformas de ensino a distância e as avaliações pontuais

[15] As avaliações do Saeb produzem informações a respeito da realidade educacional brasileira e, especificamente, por regiões, redes de ensino pública e privada nos estados e no Distrito Federal, por meio de exame bienal de proficiência, em Matemática e em Língua Portuguesa (leitura), aplicado em amostra de alunos de 4ª e 8ª séries do ensino fundamental e da 3ª série do ensino médio (portal.inep.gov.br).

[16] Criado em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. Podem participar do exame alunos que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores (portal.mec.gov.br).

de verificação de aprendizagens fazem parte de iniciativas do governo com o intuito de melhorar o ensino público estadual paulista.

4.2.1 O ENSINO DAS EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

A introdução ao estudo da Álgebra e das equações, na educação básica estadual paulista, inicia no 7º ano do ensino fundamental e acontece gradativamente até o terceiro ano do ensino médio. A tabela 2 mostra como o assunto é dividido durante o ensino fundamental, no Caderno do aluno:

	5ª série/6º ano	6ª série/7º ano	7ª série/8º ano	8ª série/9º ano
Volume 1	**NÚMEROS NATURAIS** – Múltiplos e divisores. – Números primos. – Operações básicas. – Introdução às potências. **FRAÇÕES** – Representação. – Comparação e ordenação. – Operações. **NÚMEROS DECIMAIS** – Representação. – Transformação em fração decimal. – Operações. **SISTEMAS DE MEDIDA** – Comprimento, massa e capacidade. – Sistema métrico decimal.	**NÚMEROS NATURAIS** – Sistemas de numeração na Antiguidade. – O sistema posicional decimal. **NÚMEROS INTEIROS** – Representação. – Operações. **NÚMEROS RACIONAIS** – Representação fracionária e decimal. – Operações com decimais e frações. **GEOMETRIA/MEDIDAS** – Ângulos. – Polígonos. – Circunferência. – Simetrias. – Construções geométricas. – Poliedros.	**NÚMEROS RACIONAIS** – Transformação de decimais finitos em fração. – Dízimas periódicas e fração geratriz. **POTENCIAÇÃO** – Propriedades para expoentes inteiros. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – A linguagem das potências. **ÁLGEBRA** – Equivalências e transformações de expressões algébricas. – Produtos notáveis. – Fatoração algébrica.	**NÚMEROS REAIS** – Conjuntos numéricos. – Números irracionais. – Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. – Notação científica. **ÁLGEBRA** – Equações de 2º grau: resolução e problemas. – Noções básicas sobre função; a ideia de interdependência. – Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
Volume 2	**GEOMETRIA/MEDIDAS** – Formas planas e espaciais. – Noção de perímetro e área de figuras planas. – Cálculo de área por composição e decomposição. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – Leitura e construção de gráficos e tabelas. – Média aritmética. – Problemas de contagem.	**NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE** – Proporcionalidade direta e inversa. – Razões, proporções, porcentagem. – Razões constantes na Geometria: π. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – Gráficos de setores. – Noções de probabilidade. **ÁLGEBRA** – Uso de letras para representar um valor desconhecido. – Conceito de equação. – Resolução de equações. – Equações e problemas.	**ÁLGEBRA/EQUAÇÕES** – Equações de 1º grau. – Sistemas de equações e resolução de problemas. – Inequações de 1º grau. – Sistemas de coordenadas (plano cartesiano). **GEOMETRIA/MEDIDAS** – Teorema de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. – Área de polígonos. – Volume do prisma.	**GEOMETRIA/MEDIDAS** – Proporcionalidade, noção de semelhança. – Relações métricas entre triângulos retângulos. – Razões trigonométricas. – O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. – Volume e área do cilindro. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – Contagem indireta e probabilidade.

Tabela 2: Conteúdos trabalhados no ensino fundamental

Fonte: Disponível em: <http:// http://www.cadernodoaluno2016.com.br>. Acesso em: jan. 2017.

A introdução ao estudo da Álgebra acontece no último bimestre do 7º ano, e é dividida em oito unidades, conforme mostra a figura 22.

Unidade 9 – O uso de letras na Matemática – identificação de padrões e generalização.
Unidade 10 – O uso de letras na Matemática – letras para representar números ou grandezas.
Unidade 11 – Fórmulas e equações.
Unidade 12 – Incógnitas e variáveis.
Unidade 13 – Resolução de equações.
Unidade 14 – Resolução de equações.
Unidade 15 – Proporcionalidade e equações.
Unidade 16 – Regra de três.

Figura 22: Álgebra trabalhada no 4º bimestre do 7º ano do ensino fundamental

Segundo as orientações do manual do professor (São Paulo, 2013), o material do aluno é dividido em unidades, as quais são sugeridas que o professor trabalhe por meio de situações de aprendizagem (neste caso, situações de aprendizagem 5 a 8, abordando oito unidades).

A situação de aprendizagem 5 foi pensada no intuito de que o aluno se aproprie da habilidade de realizar generalizações utilizando a linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras, por meio da generalização de regularidades observadas em sequências, sejam numéricas ou constituídas de figuras. Espera-se que o aluno entenda a utilização de letras como meio facilitador de expressar regularidades, apresentadas em atividades com o objetivo de motivação para a busca de expressões algébricas.

A situação de aprendizagem 6 introduz o estudo de equações e fórmulas, com o principal objetivo de que os alunos entendam que as letras servem para representar um valor numérico qualquer. Recorrendo a várias fórmulas já conhecidas pelos alunos, como por exemplo, fórmulas de áreas de figuras planas, fórmulas de médias, e outras ainda não estudadas, como as fórmulas usadas na economia (por exemplo como calcular o imposto de renda), cálculo do I.M.C. (índice de massa corpórea) e fórmulas conhecidas na física (distância percorrida por um objetivo em queda livre), as atividades trabalham com valores numéricos, atribuindo valores às variáveis e estudando o que acontece em cada caso.

A situação de aprendizagem 7 introduz as equações do 1º grau, trabalha sua definição e características e analisa situações utilizando-se balanças, introduzindo ainda o princípio das igualdades.

Por fim, a situação de aprendizagem 8 estuda as equações por meio das proporcionalidades direta e inversa.

Essas quatros situações de aprendizagem estão muito bem interligadas e, trabalhadas com empenho pelos professores, dão uma noção muito importante sobre as equações, iniciando o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos que, até então, estavam acostumados a trabalhar a matemática de forma concreta. Esse momento de início da abstração é de extrema importância e um divisor de águas para que o aluno entenda os assuntos que serão estudados em anos posteriores.

No 8º ano, o estudo da Álgebra é intensificado, sendo assunto a ser trabalhado durante dois bimestres.

No 2º bimestre, engloba da nona a décima sexta unidade, abrangendo oito unidades, conforme mostra a figura 23:

Unidade 9 – Expressões algébricas: equivalência e transformações.

Unidade 10 – Expressões algébricas: operações.

Unidade 11 – Produtos notáveis e fatoração: abordagem geométrica.

Unidade 12 – Produtos notáveis e fatoração: abordagem algébrica.

Unidade 13 – Produtos notáveis e fatoração: abordagem algébrica.

Unidade 14 – Fatoração e simplificação de frações algébricas.

Unidade 15 – Fatoração e simplificação de frações algébricas.

Unidade 16 – Expressão algébrica de algumas ideias fundamentais da Aritmética e da Álgebra.

Figura 23: Álgebra trabalhada no 2º bimestre do 8º ano do ensino fundamental

Essas unidades estão divididas em quatro situações de aprendizagem (situações de aprendizagem 5 a 8).

A situação de aprendizagem 5 retoma o que fora estudado no ano anterior, utilizando sequências e padronizações para serem indicadas algebricamente. Amplia o estudo para equações equivalentes, levando os alunos a trabalharem as operações iniciais com polinômios, sem uma maior formalização, focando em cálculos e manipulações algébricas.

A situação de aprendizagem 6 aborda os produtos notáveis, sob uma abordagem geométrica. Deixa claro que o objetivo das atividades é que o aluno compreenda o que significam visualmente tais produtos, evitando apenas uma memorização sem compreensão.

A situação de aprendizagem 7 aprofunda o estudo de situações expressas por polinômios, iniciando novamente com o cálculo de áreas e perímetros de figuras planas. A partir dessa revisão, conceitua polinômios idênticos e as atividades auxiliam no entendimento da fatoração dos polinômios. São feitos vários jogos de adivinhações de números, mostrando-se algebricamente como podemos acertar um resultado realizando simples operações algébricas e por fim tratam de resolução de equações, do primeiro grau, com a utilização do princípio das igualdades e do 2º grau, somente as que podem ser resolvidas por meio da fatoração. Nesse estudo encontram-se as equações cujo primeiro membro são trinômios quadrados perfeitos, diferença de quadrados ou da forma $ax^2 + bx$.

A situação de aprendizagem 8, que fecha o 2º bimestre, retoma o estudo de fórmulas importantes na Matemática, mesclando a resolução algébrica com a visualização geométrica. As atividades conduzem a encontrar expressões que representem a soma dos n primeiros números naturais, a soma dos n naturais pares ou ímpares e o número de diagonais de um polígono convexo, aprofundando a importância da utilização de letras na generalização de fórmulas, facilitando nossa procura por respostas e evitando muitos cálculos trabalhosos e desnecessários.

No 3º bimestre, engloba da primeira a oitava unidade, exceto as unidades três e quatro, abrangendo seis unidades, conforme mostra a figura 24:

Unidade 1 – Equações de 1º grau (problemas).
Unidade 2 – Equações e inequações de 1º grau (problemas).
Unidade 3 – Sistema de coordenadas cartesianas.
Unidade 4 – Transformações geométricas no plano.
Unidade 5 – Sistemas de equações lineares (método da adição).
Unidade 6 – Sistemas de equações lineares (método da substituição).
Unidade 7 – Sistemas de equações lineares (interpretação gráfica).
Unidade 8 – Equações com soluções inteiras.

Figura 24: Álgebra trabalhada no 3º bimestre do 8º ano do ensino fundamental

O estudo das equações nesse bimestre engloba 3 situações de aprendizagens (situações de aprendizagens 1, 3 e 4).

A situação de aprendizagem 1 retoma o equacionamento de situações-problema envolvendo equações mais sofisticadas (por exemplo, envolvendo frações), orienta a realizar um equacionamento das situações-problema em forma de tabelas no intuito de facilitar encontrar soluções, introduz situações que são necessárias a utilização de mais de uma letra para representar diferentes valores e também inicia o estudo das desigualdades também na forma de situações contextualizadas. É importante destacar um exercício nessa unidade (exercício 10), que traz várias equações para os alunos tentarem encontrar soluções, mesmo sem conhecer os algoritmos que as resolvam. Encontram-se nesse exercício equações exponenciais, irracionais, polinomiais de graus variados e equações sem solução, convidando os alunos a resolverem puramente por raciocínio. Seguem algumas equações listadas nesse exercício:

a) $3^x + 1 = 82$	**f)** $x^2 = -16$	**k)** $x(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = 0$
l) $x + 1 = x + 2$	**r)** $\sqrt{x+3} = 25$	**t)** $1 = \dfrac{29}{2^x - 3}$

Figura 25: Parte do exercício 10 – Situação de aprendizagem 1 – Caderno do Aluno – 8º ano – Vol.2

A ideia é que o aluno encontre métodos para resolvê-las utilizando somente o raciocínio lógico. Na equação “a”, basta observar que o 3^x deve ser um número que, somado a 1, resulte em 82 (81) e pensar qual o expoente da base 3 que leva a esse resultado. Na equação “f”, o intuito é lembrar que não há nenhum número real que, elevado ao quadrado, resulte em um número negativo, sendo, portanto, uma equação sem solução no conjunto dos números reais. A equação “k” convida o aluno a lembrar que se há um produto resultando em zero, um dos fatores tem que ser zero, obtendo quatro soluções distintas. O intuito da equação “l” é levar o aluno a deduzir que não há solução, pois nenhum sucessor de um número é igual ao seu sucessor. O objetivo da equação “r” é encontrar um número cuja raiz quadrada resulta em 25 (625), encontrando o valor da incógnita, subtraindo-se 3 do valor encontrado. Por fim, a equação “t” leva o aluno a lembrar que todo número dividido por ele mesmo é igual a 1, concluindo assim, que o denominador deve ser igual a 29, o que leva 2^x ser igual a 32, encontrando, por fim, o valor de x. Trata-se de uma atividade muito interessante para ser resolvida em pequenos grupos, incentivando os alunos a trabalharem o raciocínio lógico e conseguir resolver equações sem a utilização de fórmulas ou algoritmos.

A situação de aprendizagem 3 aborda os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, analisa situações que envolvam duas variáveis e trabalha os métodos da adição e substituição para a resolução de problemas e também resolve sistemas por meio da interpretação geométrica (interseção das duas retas).

A situação de aprendizagem 4 engloba o estudo das equações diofantinas, discutindo meios de resolução, abordando quando são possíveis de resolver e como encontrar os pares que as solucionam. Como o conhecimento algébrico da maioria dos alunos nessa etapa escolar ainda é inicial, muitos apresentam dificuldades referentes a resolução de equações, indicando assim a necessidade de se realizar um trabalho que envolva situações didáticas visando às aprendizagens dos alunos.

Mais uma vez, o caderno do aluno traz atividades diversificadas e interessantes, de modo a ampliar os conhecimentos algébricos dos alunos. As defasagens apresentadas de anos anteriores dificultam um pouco o ensino, mas enfatizar o desenvolvimento do pensamento algébrico e abstrato nessa fase é primordial para o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

O último ano dedicado ao ensino fundamental aborda no 2º bimestre, as equações do 2º grau, divididas em cinco unidades e duas situações de aprendizagem (situações de aprendizagem 5 e 6).

Unidade 9 – Alguns métodos para resolver equações de 2º grau.

Unidade 10 – Completando trinômios quadrados perfeitos: a busca de uma fórmula para encontrar as raízes de uma equação de 2º grau.

Unidade 11 – Fórmula para encontrar as raízes de uma equação de 2º grau.

Unidade 12 – Equação de 2º grau: relação entre coeficientes e raízes.

Unidade 13 – Equação de 2º grau: demonstração e aplicação da fórmula de Bhaskara – equações de 2º grau na resolução de problemas.

Figura 26: O estudo das equações trabalhado no 2º bimestre do 9º ano do ensino fundamental

A situação de aprendizagem 5 estuda problemas que recaem em equações do 2º grau. Inicia a discussão sobre os processos de resoluções de equações do 2º grau incompletas e as que são possíveis resolver por métodos de fatoração. Discute também a relação existente entre coeficientes e raízes (soma e produto das raízes) e trabalha com completamentos de quadrados. Termina deduzindo a fórmula resolutiva mas incentiva a resolução, sempre que possível, por outros métodos, sem ficar dependente da fórmula encontrada.

A situação de aprendizagem 6 trabalha situações-problemas que envolvam equações do 2º grau, contextualizando e apresentando situações que são resolvidas por meio de equações quadráticas.

O estudo das equações do 2º grau marca o término do ensino das equações no ensino fundamental da educação básica estadual paulista. Trabalhando situações contextualizadas e desafiadoras, instiga o aluno a adentrar no fascinante mundo da álgebra e das equações, fornecendo uma excelente base de início em seus estudos.

Os alunos chegam a ao ensino médio com uma defasagem preocupante. É necessário, nesse novo ciclo, que o professor faça uma avaliação diagnóstica, identificando as principais dificuldades no intuito de diminuí-las ou saná-las, paralelo ao trabalho de novos conteúdos e dando continuidade ao desenvolvimento do pensamento matemático.

4.2.2 O ENSINO DAS EQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

No ensino médio, o estudo das equações é retomado e aparece em todos os três anos de estudo, conforme mostra a tabela dos conteúdos estudados, apresentada a seguir.

	1ª série	2ª série	3ª série
Volume 1	**NÚMEROS E SEQUÊNCIAS** – Conjuntos numéricos. – Regularidades numéricas: sequências. – Progressões aritméticas, progressões geométricas; ocorrências em diferentes contextos; noções de Matemática financeira. **FUNÇÕES** – Relação entre duas grandezas. – Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. – Função de 1º grau, função de 2º grau; significado e ocorrência em diferentes contextos.	**TRIGONOMETRIA** – Arcos e ângulos; graus e radianos. – Circunferência trigonométrica: seno, cosseno, tangente. – Funções trigonométricas e fenômenos periódicos. – Equações e inequações trigonométricas. – Adição de arcos. **MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES** – Matrizes: significado como tabelas, características e operações. – A noção de determinante de uma matriz quadrada. – Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	**GEOMETRIA ANALÍTICA** – Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. – Reta: equação e estudo dos coeficientes, retas paralelas e perpendiculares, distância de ponto a reta; problemas lineares. – Circunferências e cônicas: propriedades, equações, aplicações em diferentes contextos. **EQUAÇÕES ALGÉBRICAS, POLINÔMIOS, COMPLEXOS** – Equações polinomiais: história, das fórmulas à análise qualitativa. – Relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial. – Polinômios: identidade, divisão por x – k e redução no grau de uma equação. – Números complexos: significado geométrico das operações.
Volume 2	**FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA** – Crescimento exponencial. – Função exponencial: equações e inequações. – Logaritmos: definição, propriedades, significado em diferentes contextos. – Função logarítmica: equações e inequações simples. **GEOMETRIA-TRIGONOMETRIA** – Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. – Polígonos regulares: inscrição, circunscrição; pavimentação de superfícies. – Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos cossenos.	**ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE** – Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. – Probabilidade simples. – Arranjos, combinações e permutações. – Probabilidades; probabilidade condicional. – Triângulo de Pascal e Binômio de Newton. **GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL** – Organização do conhecimento geométrico: conceitos primitivos, definições, postulados, teoremas. – Prismas e cilindros: propriedades, relações métricas. – Pirâmides e cones: propriedades, relações métricas. – A esfera e suas partes; relações métricas; a esfera terrestre.	**ESTUDO DAS FUNÇÕES** – Panorama das funções já estudadas: principais propriedades. – Gráficos: funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e polinomiais. – Gráficos: análise de sinal, crescimento, decrescimento, taxas de variação. – Composição: translações, reflexões, inversões. **ESTATÍSTICA** – Cálculo e interpretação de índices estatísticos. – Medidas de tendência central: média, mediana e moda. – Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. – Elementos de amostragem.

Tabela 3: Conteúdos trabalhados no ensino médio

Fonte: Disponível em: <http:// http://www.cadernodoaluno2016.com.br>. Acesso em: jan. 2017.

Na primeira série do ensino médio, as equações são novamente abordadas no terceiro bimestre, juntamente com as inequações, inseridas nos conteúdos referentes às funções exponenciais e logarítmicas, contemplando a unidade 7, com a situação de aprendizagem 4. São tratadas dentro de situações-problemas e aplicações práticas. O caderno do professor orienta o docente a trabalhar outros tipos de exercícios, como os de fixação, caso haja necessidade. É importante o professor ofereça aos alunos situações-problema para promover o aprendizado de técnicas de resolução dessas equações, uma vez que o caderno de atividades não contempla esse tipo exercício. Cabe ao professor trazer exercícios diferentes a seus alunos, dependendo das dificuldades surgidas, lembrando que o caderno do aluno é um material de apoio e não o único referencial que deve ser trabalhado. É importante ressaltar que esse é o único momento em que as equações e inequações exponenciais e logarítmicas são estudadas no ensino médio e deve-se, portanto, dar atenção especial a esse assunto, que é geralmente pouco entendido pelos alunos e pouco trabalhado pelos professores.

Unidade 7 – Problemas envolvendo expoentes e logaritmos em diferentes contextos: equações e inequações.

Figura 27: O estudo das equações trabalhado no 3º bimestre da 1ª série do ensino médio

Na segunda série do ensino médio, outro tipo de equação é estudado, as trigonométricas, inseridas no primeiro bimestre, dentro do conteúdo Trigonometria. As inequações trigonométricas também são estudadas nesse momento e nesse momento estão divididas em três unidades (4, 6 e 7), cujo estudo é realizado por meio da situação de aprendizagem 4.

Unidade 4 – Equações e inequações do tipo senx = m ou cosx = k.

Unidade 6 – Equações e inequações do tipo C + AsenBx = m ou C + AcosBx = k.

Unidade 7 – Funções trigonométricas: tangente e cotangente na circunferência. Gráficos de y = tgx e de y = cotgx. Equações do tipo tgx = m ou cotgx = k.

Figura 28: O estudo das equações trabalhado no 1º bimestre da 2ª série do ensino médio

Novamente, as equações e inequações trigonométricas são apresentadas contidas em situações de aplicações práticas, decorrentes de fórmulas resultantes de modelagens matemáticas. A Situação de Aprendizagem fornece aos alunos o texto descritivo de cada fenômeno estudado, requer a leitura, interpretação e, finalmente, solicita a eles que resolvam alguns questionamentos. Segundo [6], o ensino “moderno” da Matemática pauta-se em contextos e aplicações práticas, deixando um pouco de lado as técnicas de cálculo, o que justifica certa defasagem relacionadas a técnicas resolutivas. Entretanto, trabalhar unicamente dessa forma não garante o aprendizado dos conteúdos propostos, sendo necessário mesclar exercícios de aplicação com exercícios de fixação, necessários para um entendimento mais aprofundado dos assuntos estudados. Não adianta o aluno saber ler, interpretar, modelar um problema e, tendo a equação pronta em mãos, não saber resolver. Do mesmo modo, não adianta saber resolver uma equação e não saber interpretar e modelar um problema. Essas duas partes são essenciais que devem ser sempre trabalhadas em conjunto. Brasil (2002, pag. 113)[17] defende o ensino da matemática por meio de situações-problema, mas lembra que os exercícios ditos de "fixação" não devem ser esquecidos.

> Isso não significa que os exercícios do tipo "calcule...", "resolva..." devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho.

Na última série do ensino médio, são estudadas as equações algébricas, tema central desse trabalho, durante o segundo bimestre, juntamente com os números complexos.

O primeiro bimestre é dedicado ao estudo da Geometria Analítica e as equações são retomadas ao serem utilizadas para descrever as cônicas (retas, circunferências, elipses, hipérboles e parábolas). No segundo bimestre, são estudados de forma concomitantes, as equações algébricas, os polinômios e os números complexos, temas ricos e de extrema importância para o ensino da Matemática e sendo aqui abordados pelos docentes, de forma superficial, devido ao pouco tempo disponível para estudar três extensos conteúdos, principalmente no período noturno.[18] O professor deve pensar como abordar tais temas driblando o pouco tempo e oferecendo aos alunos uma boa base do conteúdo sugerido, verificando os pontos centrais mais importantes para que os alunos tenham uma boa noção de cada tema e que possam completar seus estudos de forma individualizada, posteriormente, caso desejem.

---

[17] (MEC, 2002) PCN$_+$ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.

[18] Nas escolas estaduais paulistas, no ensino diurno são dedicadas, geralmente, cinco aulas semanais de cinquenta minutos cada para a disciplina de Matemática. No período noturno, quatro aulas de quarenta e cinco minutos.

A figura 29 apresenta o conteúdo a ser ministrado durante o primeiro semestre da terceira série do ensino médio.

Unidade 1 – O plano cartesiano; distância entre dois pontos; ponto médio de um segmento; condição de alinhamento de três pontos.

Unidade 2 – A equação da reta; significado dos coeficientes; retas paralelas.

Unidade 3 – Retas perpendiculares; regiões do plano.

Unidade 4 – Problemas lineares.

Unidade 5 – A equação da circunferência.

Unidade 6 – Distância de ponto à reta; posições relativas entre reta e circunferência.

Unidade 7 – Cônicas; apresentação e propriedades da elipse, da hipérbole e da parábola.

Unidade 8 – Equações da elipse, da hipérbole e da parábola.

Unidade 9 – Equações algébricas de graus 1, 2, 3, 4, 5, ...; história, fórmulas.

Unidade 10 – A raiz quadrada de um número negativo e o conjunto dos complexos.

Unidade 11 – Das fórmulas à abordagem qualitativa: relações entre coeficientes e raízes.

Unidade 12 – Equações e polinômios; operações com polinômios; divisão de um polinômio por x – k.

Unidade 13 – Síntese de resultados sobre a resolução de equações algébricas de qualquer grau.

Unidade 14 – Números complexos; representação no plano; relações com Geometria Analítica.

Unidade 15 – Significado das operações com números complexos; translações, rotações, ampliações.

Unidade 16 – Transformações no plano complexo; exercícios simples.

Figura 29: O estudo das equações trabalhado no 1º semestre da 3ª série do ensino médio

Essas dezesseis unidades estão divididas em 8 situações de aprendizagem. As quatro primeiras são dedicadas ao estudo da Geometria Analítica, retomando sistema de coordenadas, e aprofundando seu estudo com o cálculo da distância entre dois pontos no plano, determinação das coordenadas do pronto médio de um segmento e colinearidade de pontos no plano. Depois realiza um estudo das cônicas, estuda suas equações e aplicações.

A quinta unidade de aprendizagem introduz o estudo às equações do 3º grau e os números complexos, que apareceram inicialmente na resolução de uma equação polinomial de grau 3. Embora muitos professores introduzam o ensino de números complexos com a equação $x^2+1=0$, é importante mostrar a equação que gerou as primeiras indagações referentes a uma raiz quadrada de um número negativo. Eles aparecem naturalmente ao tentar resolver a equação $x^3-15x-4=0$, fazendo muito mais sentido aos alunos, pois conhecendo-se o conjunto dos números complexos, consegue-se encontrar uma raiz real dessa equação.

A primeira atividade dessa situação de aprendizagem é muito interessante, pois usa os procedimentos de Cardano e Tartaglia para a dedução da fórmula resolutiva das equações do 2º grau.

Acompanhe outra forma de deduzi-la, na qual foram adaptados os procedimentos dos italianos às equações cúbicas:

i) Considere uma equação quadrática na sua forma geral.

$$ax^2+bx+c=0$$

ii) Divida todos os membros da equação por a :

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

iii) Substitua $\frac{b}{a}$ por B e $\frac{c}{a}$ por C e reescreva a equação:

$$x^2+Bx+C=0$$

iv) Substitua x por $y-\frac{B}{2}$ (2 é o grau da equação) e reescreva a nova equação, isolando o y no 1º membro:

$$\left(y-\frac{B}{2}\right)^2+B\left(y-\frac{B}{2}\right)+C=0 \quad \rightarrow \quad y^2-2.y.\frac{B}{2}+\left(\frac{B}{2}\right)^2+By-\frac{B^2}{2}+C=0$$

$$\rightarrow \quad y^2-By+\frac{B^2}{4}+By-\frac{B^2}{2}+C=0 \quad \rightarrow \quad y^2-\frac{B^2}{4}+C=0 \quad \rightarrow \quad y^2=\frac{B^2}{4}-C$$

$$\rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{B^2}{4}-C} \quad \rightarrow \quad y=\pm\sqrt{\frac{B^2-4C}{4}} \quad \rightarrow \quad y=\pm\frac{\sqrt{B^2-4C}}{2}$$

v) Substitua os valores de y, de B e de C em $x=y-\frac{B}{2}$:

$$x=\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)}}{2}-\frac{b}{a}.\frac{1}{2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}.\frac{1}{2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{a^2}}.\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

obtendo assim, a fórmula resolutiva das equações do 2º grau.

Após a dedução, o caderno do aluno traz como exercício resolver a equação $3x^2+15x+18=0$ pelo novo método apresentado. Acompanhe a resolução:

i) A equação já está em sua forma geral.

ii) Dividindo a equação por 3, obtemos: $x^2 + 5x + 6 = 0$

iii) B = 5 e C = 6.

iv) Substituindo x por $y - \frac{B}{2}$, obtemos: $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(y - \frac{5}{2}\right) + 6 = 0$

$$y^2 - 5y + \frac{25}{4} + 5y - \frac{25}{2} + 6 = 0 \rightarrow y^2 - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

v) Como $x = y - \frac{B}{2}$, temos então: $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ e $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

Logo: $S = \{-2, -3\}$

Esse exercício é interessante pois, além de mostrar um outro modo de resolver uma equação quadrática, ainda prepara terreno para introduzir a dedução da forma resolutiva das equações do 3º grau.

Após esse exercício, seguem outros, indicando um caminho para a dedução da fórmula de Cardano e Tartaglia e finalmente volta-se a discutir a solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Resolvendo a equação por meio da fórmula resolutiva, chegamos a $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, o que leva o aluno a imaginar que a equação não possui soluções, uma vez que até aqui o aluno não conhece como calcular raízes quadradas de números negativos. Por outro lado, pelo Teorema das raízes racionais, é fácil constatar que 4 é uma raiz da equação, pois, $4^3 - 15.4 - 4 = 0$. É aí que o caderno de apoio convida os alunos a conhecerem um novo conjunto numérico, o conjunto dos números complexos. Após a introdução a esse novo conjunto, podemos escrever $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$, recaindo agora em um novo problema, o cálculo da raiz cúbica de um número complexo. Nesse momento, o caderno do aluno traz duas soluções, pedindo somente que o aluno as verifiquem. Nos lembra de que se $\sqrt[3]{z} = w$, então $w^3 = z$. Pede então para mostrarem que $2 + i$ é uma raiz cúbica de $2 + 11i$ e que $2 - i$ é uma raiz cúbica de $2 - 11i$, o que é facilmente verificado:

$$(2+i)^3 = (2+i).(2+i).(2+i) = (4 + 4i + i^2).(2+i) = (3+4i).(2+i) = 6 + 11i + 4i^2 = 2 + 11i$$

$$(2-i)^3 = (2-i).(2-i).(2-i) = (4 - 4i + i^2).(2-i) = (3-4i).(2-i) = 6 - 11i + 4i^2 = 2 - 11i$$

Com esses cálculos, mostra-se como chegamos na raiz 4:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2+i) + (2-i) = 2 + 2 + i - i = 4$$

Essa sequência didática é muito interessante, porém traz uma série de dificuldades com as quais o professor vai se deparar. Há pouco tempo disponível e toda essa sequência necessita facilmente de umas quatro aulas para ser bem desenvolvida, levando em conta o tempo dos alunos e as dificuldades relacionadas às técnicas operacionais que eles irão apresentar. Também precisará de um tempo para que os alunos aprendam a operar com números complexos, o que demandará bem mais do que quatro aulas. No geral, o conteúdo de matemática é muito extenso em relação ao tempo disponibilizado ao seu ensino, cabendo ao professor planejar o que será dado em cada aula, maximizando o tempo no intuito de conseguir contemplar a contento o conteúdo sugerido, esperando-se que haja aprendizagem por parte dos alunos. Não é uma tarefa fácil e a didática e planejamento devem ser repensados diariamente e são essenciais para atingir os objetivos traçados.

A unidade de aprendizagem 6 trata sobre a relação entre os coeficientes e raízes de uma equação, revisando soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau e ampliando as deduções para equações do 3º e 4º graus. Aborda algumas equações polinomiais e atenta para a resolução, observando somas e produtos de raízes.

A unidade de aprendizagem 7 inicia abordando o estudo dos polinômios, trazendo sua definição, igualdade entre polinômios, raízes e operações básicas entre eles. Atenta para observar que as raízes de um polinômio $p(x)$ são soluções da equação algébrica $p(x)=0$. Traz exercícios de valor numérico de polinômios e para verificação de raízes das equações por meio de simples substituição. A unidade termina abordando o dispositivo de Briot-Ruffini e discute a ideia de que, conhecendo uma das raízes de uma equação algébrica, podemos reduzir a sua solução à de uma equação de grau inferior, por meio de uma divisão do polinômio inicial por um binômio do tipo $(x-r)$, onde r é uma raiz conhecida.

Por fim, a unidade de aprendizagem 8 amplia os conhecimentos referente aos números complexos, apresentando-os como pontos do plano, aprofundam-se as operações com números complexos e introduz seu significado geométrico. Termina mostrando aplicações das operações com os números complexos na interpretação de movimentos e transformações no plano (rotações, translações e ampliações).

Esse material didático mostra um bom caminho para ensinar matemática, sempre recorrendo às atividades práticas, porém, no tocante às técnicas operacionais será preciso que o professor realize intervenções na sequência didática, inserindo exercícios com técnicas de cálculo e de aplicação, a fim de suprir possíveis defasagens dos alunos.

4.3 PLANO DE ATUAÇÃO

Para iniciar a aplicação em sala de aula, organizei o seguinte roteiro com os conteúdos, temas e atividades de avaliação para um bimestre:

- ✓ Atividade diagnóstica
- ✓ Relações de Girard
- ✓ Dispositivo de Briott - Ruffini
- ✓ Teorema das raízes racionais
- ✓ Redução à equação de menor grau, conhecendo-se uma de suas raízes
- ✓ Caderno do aluno
- ✓ Geogebra (raízes racionais e ponto de interseção do gráfico com o eixo das abscissas)
- ✓ Cardano, Tartaglia (3º grau) e introdução ao conjunto dos números complexos
- ✓ Atividade de verificação dos conteúdos trabalhados

O segundo bimestre iniciou-se em vinte e dois de abril com término em primeiro de julho, totalizando quarenta aulas de quarenta e cinco minutos cada. Retirando-se as aulas disponíveis para avaliações, conselhos e reuniões, restaram, aproximadamente, trinta aulas para se trabalhar todo o conteúdo do bimestre. O período de aplicação das atividades desse trabalho ocorreu durante todo o segundo bimestre, terminando no início do terceiro bimestre, nas duas primeiras semanas de agosto, nas quais foi terminando o trabalho com a aplicação de uma avaliação de verificação da aprendizagem dos conteúdos.

O segundo bimestre do terceiro ano do ensino médio, na educação básica estadual paulista, é dedicado ao estudo dos polinômios, equações algébricas e números complexos. Em abril e início de maio, foi terminado o estudo das cônicas, conteúdo pertencente ainda ao primeiro bimestre. Depois, iniciei o estudo dos polinômios e por fim, entrei no conteúdo referente às equações algébricas, assunto central desse trabalho. A pesquisa foi realizada durante o mês de junho, desde a aplicação da atividade diagnóstica até a realização da atividade final de verificação da aprendizagem, contando, no total, com dezesseis aulas. Como o tempo de aplicação era totalmente escasso, optei por trabalhar com os alunos, somente as soluções reais das equações algébricas, deixando o estudo dos números complexos para o início do terceiro bimestre. Geralmente resolvemos em consenso o que será trabalhado no bimestre para que todos os alunos de todas as salas da mesma série trabalhem os mesmos conteúdos, independente do professor que leciona em cada sala e, como quase nunca conseguimos trabalhar todos os conteúdos sugeridos no plano de ensino, geralmente deixamos para trabalhar os números complexos no início do bimestre seguinte.

4.4 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A pesquisa iniciou-se com a aplicação de uma atividade diagnóstica no intuito de analisar o que os alunos conheciam sobre o tema, o que traziam de pré-requisitos e quais eram suas maiores dificuldades referentes ao assunto em questão. Após a análise dos resultados dessa atividade, foi seguido o plano de atuação com revisões diárias com base nas maiores dificuldades que foram surgindo no caminho, a maioria delas conceituais ou referentes às técnicas operatórias. As atividades foram pensadas antes da aplicação da atividade diagnóstica e sofreram adaptações de acordo com as dificuldades observadas.

4.4.1 A ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

Inicialmente foi aplicada uma Atividade diagnóstica no intuito de observar o que os alunos sabiam sobre o tema (ANEXO I).

As habilidades investigadas foram as seguintes:

Exercício 1: Definir equação corretamente.

Exercício 2: Relatar diferentes tipos de equações.

Exercício 3: Compreender o que é resolver uma equação.

Exercício 4: Compreender que as interseções de um gráfico de uma função polinomial p(x) com o eixo das abscissas representam as soluções reais da equação p(x) = 0.

Exercício 6 (a): Resolver corretamente uma equação algébrica do 1º grau.

Exercício 6 (b, c, d): Resolver corretamente uma equação algébrica do 2º grau.

Exercício 6 (e, f, g, h, i, j): Reconhecer métodos de resolução de equações polinomiais de grau superior a 2.

Logo na primeira questão, pôde-se constatar que os alunos chegam à última série do Ensino Médio com grandes defasagens no aprendizado, uma vez que 99% dos alunos não souberam definir o que é uma equação.

Realizaram a atividade diagnóstica 90 alunos (em média 30 alunos por sala), lembrando que a pesquisa fora realizada com alunos de três turmas do terceiro ano do ensino médio. Há, principalmente no período noturno, um número excessivo de ausências diárias dos alunos, o que compromete grandemente o processo de ensino-aprendizagem. Como o tempo é curto para tratar uma enorme quantidade de importantes conteúdos, essas faltas pesam muito na avaliação de todo o processo educacional, pois, muitas vezes o professor tem que voltar parte do conteúdo já trabalhado para que os alunos ausentes em aulas anteriores possam acompanhar as discussões em sala de aula. Essa revisão de conteúdos já é uma prática diária na vida de muitos docentes, mas acabam comprometendo o cumprimento do currículo.

Observe a tabela 4 com a tabulação das respostas dadas à primeira questão:

Exercício 1	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	1	1%
Sabe que é uma igualdade mas não cita que possui incógnitas	4	4%
Sabe que é uma sentença que possui incógnitas mas não cita que é uma igualdade	15	17%
Resposta incorreta	54	60%
Questão em branco	16	18%

Tabela 4: Tabulação das respostas dadas à questão 1

A análise das respostas, dadas a essa primeira questão, mostra uma realidade preocupante, uma vez que se tratam de alunos a ponto de terminarem o ensino médio e, embora tenham estudado equações ao longo dos anos, não conseguem defini-la. Acredito que saber o conceito é tão importante quanto resolver uma equação ou interpretar uma situação de aplicação em que recai em uma equação, pertencente a uma “tríade”: conceito – resolução – aplicação e, se há falha em alguma delas, a aprendizagem não é plenamente estabelecida.

Seguem algumas respostas dadas por alguns alunos sobre a questão 1 – “O que são equações? ”

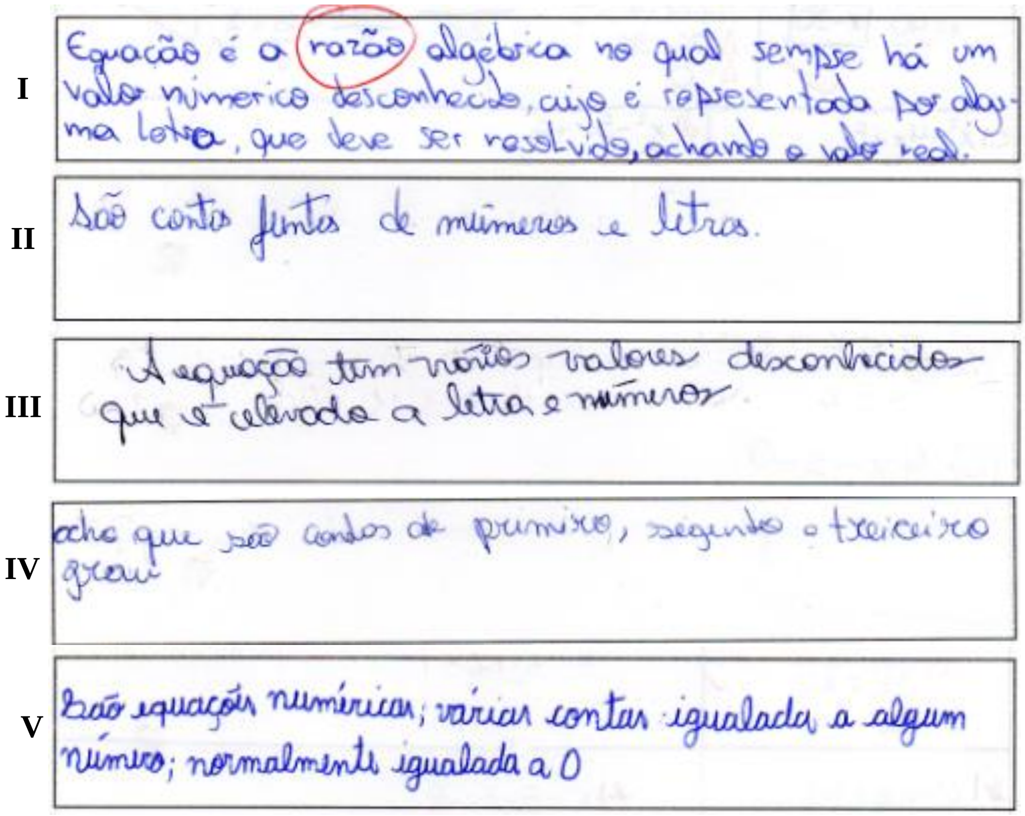


Figura 30: Respostas dadas à questão 1 da avaliação diagnóstica

Na resposta I, o aluno sabe que há um valor desconhecido na equação, mas a define como razão algébrica mostrando que não compreende o significado de razão. Na reposta II, o aluno utiliza a expressão “contas” que misturam números e letras, mostrando que tem noção sobre o que é equação, porém não utiliza o termo “igualdade”. Na resposta III, o aluno utiliza o termo ”elevado”, remetendo ao grau das equações polinomiais. A reposta IV também remete às equações polinomiais de graus variados. A reposta V mostra que o aluno sabe o que é uma equação, utiliza o termo igualdade, porém não cita a presença de incógnitas.

A segunda questão indaga quais tipos de equações os alunos conheciam. A tabela 5 mostra a tabulação das respostas dadas:

Exercício 2	Número de alunos	Porcentagem
Cita somente equações polinomiais	54	60%
Cita Bhaskara / delta	3	3%
Cita outros tipos de equações diferentes das polinomiais	15	17%
Resposta incorreta	3	3%
Questão em branco	15	17%

Tabela 5: Tabulação das respostas dadas à questão 2

Embora 99% dos alunos não souberam definir equação, 60% citaram as equações polinomiais como as conhecidas por eles. Três alunos citaram como equações conhecidas B*haskara* ou *delta*, referenciando partes do método resolutivo das equações do 2º grau, mostrando uma pequena confusão entre tipos de equações e formas de resolução.

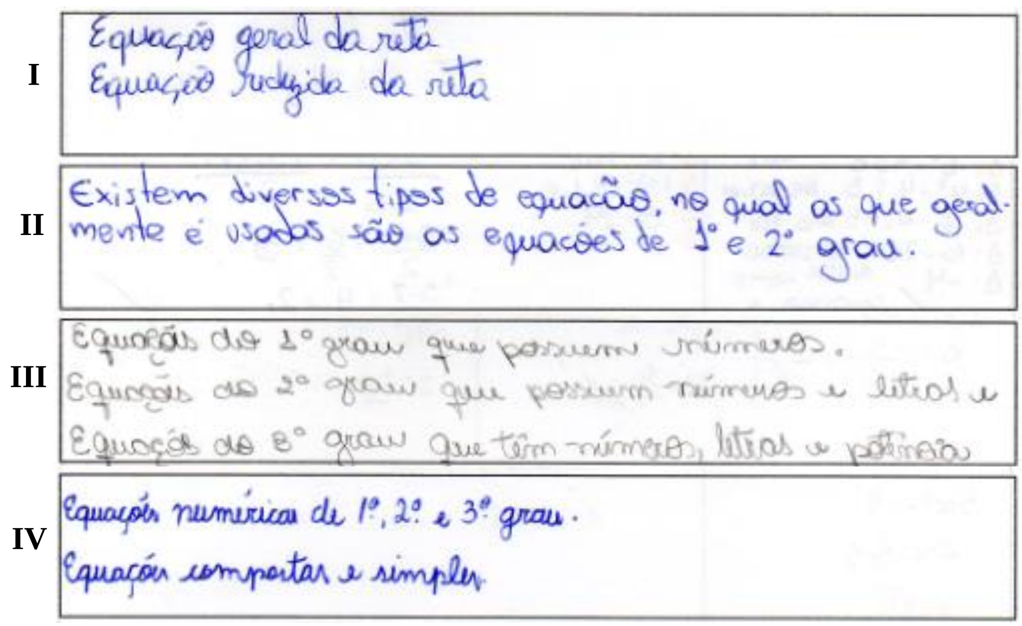


Figura 31: Respostas dadas à questão 2 da avaliação diagnóstica

A resposta I foi dada, possivelmente pelo fato de ter sido um dos últimos conteúdos estudados (equações das retas). Embora lembre-se de ter estudado sobre equações da reta, não percebe que trata-se de uma equação polinomial do 1º grau. As respostas II, III e IV, embora não citem o termo “polinomial”, conhecem equações do 1º, 2º e 3º graus. A resposta III mostra um equívoco do aluno que associa o grau da equação ao número de componentes (números – 1º grau; números e letras – 2º grau; números, letras e potências – 3º grau). A resposta IV cita equações compostas e simples, querendo diferenciar equações mais simples das mais elaboradas.

A terceira questão investigou se o aluno sabe o que significa resolver uma equação, cujas respostas estão tabuladas na tabela 6.

Exercício 3	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	9	10%
Resposta parcialmente correta	5	6%
Resposta incorreta	49	54%
Questão em branco	27	30%

Tabela 6: Tabulação das respostas dadas à questão 3

Apenas 10% dos alunos souberam expressar o que significava resolver uma equação, 6% dos alunos tinham noção do que significava encontrar a solução de uma equação, porém com alguns equívocos e 84% não responderam ou responderam de forma incorreta.

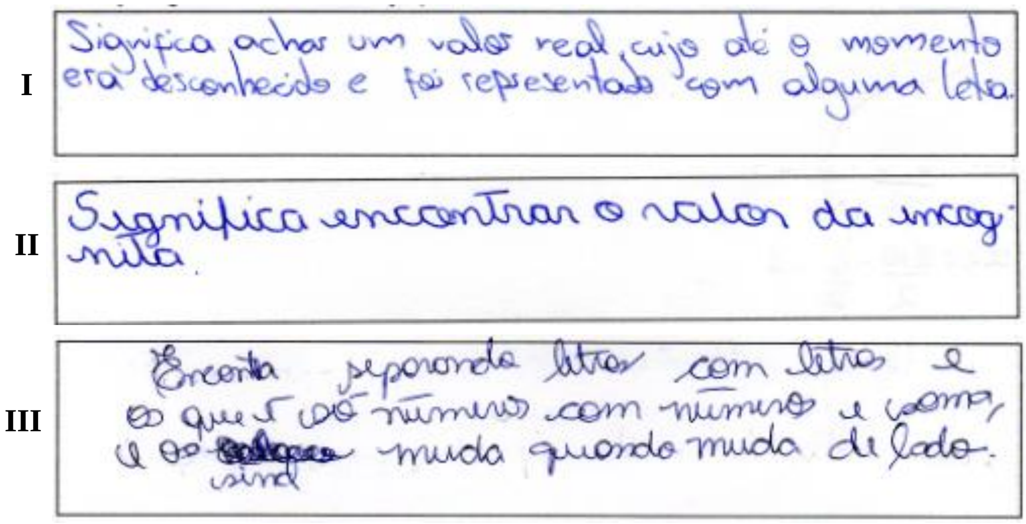


Figura 32: Respostas dadas à questão 3 da avaliação diagnóstica

As respostas I e II mostram que os alunos entendem o significado de resolver uma equação e a resposta III descreve aproximadamente o método para se resolverem equações polinomiais do 1º grau, resultante de “memorização” do método claramente verificado em “*o* *sinal muda quando muda de lado*”, mostrando mais uma vez falta de conhecimento sobre os princípios das igualdades.

O objetivo da quarta questão era verificar se os alunos sabiam estabelecer uma relação entre o gráfico de uma função polinomial $p(x)$ e as raízes reais da equação $p(x)=0$. Embora tenham estudado funções polinomiais durante o primeiro ano do ensino médio, incluindo as raízes de uma função, 97% dos alunos não responderam ou responderam à questão de forma incorreta. Apenas um aluno respondeu de forma correta e dois de forma parcialmente correta, conforme mostra a tabela 7, mostrando a necessidade de uma maior intervenção referente a essa habilidade.

Exercício 4	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	1	1%
Resposta parcialmente correta	2	2%
Resposta incorreta	18	20%
Questão em branco	69	77%

Tabela 7: Tabulação das respostas dadas à questão 4

Observe, duas respostas interessantes dadas por dois alunos:

I

II

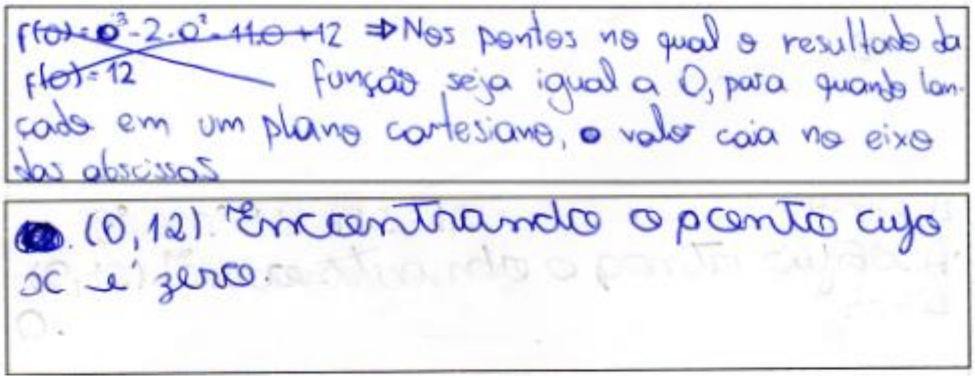


Figura 33: Respostas dadas à questão 4 da avaliação diagnóstica

A resposta I está correta, o aluno interpreta que são os pontos no qual a ordenada é zero e sabe que se localiza no eixo das abscissas. Só não cita que são as raízes da equação $p(x)=0$. A resposta II mostra que o aluno se equivocou trocando os eixos das abscissas e ordenadas. O ponto encontrado localiza-se no eixo y e não no x, como solicitava a questão.

O exercício seis foi dividido em três partes. A primeira parte (item a) tinha o intuito de verificar se o aluno sabia resolver uma equação do 1º grau. A segunda parte (itens b, c, d) referia-se à resolução de equações do 2º grau e a terceira parte (itens e, f, g, h, i, j) incluía a resolução de equações de grau superior a 2. Essa última parte ainda não havia sido estudada em nenhuma série anterior. O objetivo era verificar se algum aluno, sabendo do objetivo de resolver uma equação iria encontrar o valor da incógnita que tornasse a igualdade verdadeira, pudesse, por meio de tentativas, achar alguma solução. Ou ainda, por meio da fatoração ou utilizando somas e produtos das raízes, pudesse encontrar alguma raiz. Nenhum aluno fez essa terceira parte, tema central desse trabalho, conforme pode ser verificado na tabela a seguir. As partes 1 e 2 serviam apenas para verificar se os conteúdos estudados anteriormente foram aprendidos pelos alunos.

Exercício 6 (a)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	29	32%
Resposta incorreta	9	10%
Questão em branco	52	58%

Exercício 6 (b - d)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	5	6%
Resposta incompleta: só encontrou o valor do Δ	2	2%
Resposta incorreta	18	20%
Questão em branco	65	72%

Exercício 6 (e - j)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	0	0%
Resposta incorreta	14	16%
Questão em branco	76	84%

Tabela 8: Tabulação das respostas dadas à questão 6

Podemos observar, que somente 32% dos alunos resolveram corretamente a equação do 1º grau e 6%, as equações do 2º grau, o que mostra a necessidade de uma intensificação na revisão de equações já estudadas para posterior ampliação às equações de graus maiores que 2.

Segue uma amostragem de respostas dadas por alguns alunos que serviram de reflexão e de indicador das dificuldades apresentadas.

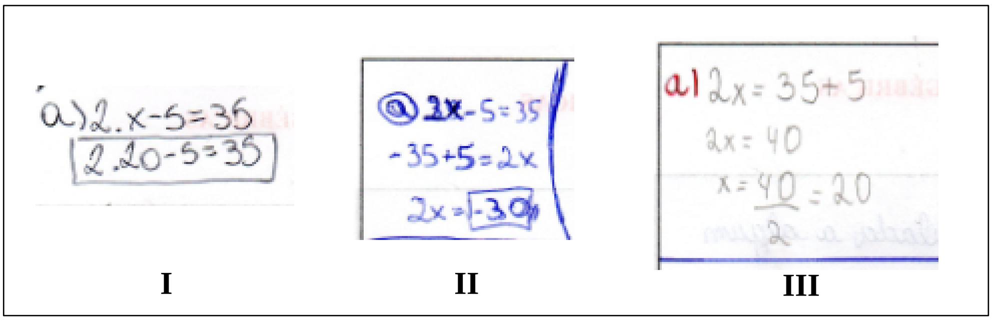


Figura 34: Respostas dadas à questão 6 (item a) da avaliação diagnóstica

A resposta I foi realizada por meio de cálculo mental. O aluno pensou qual o número cujo dobro menos cinco era igual a trinta e cinco e chegou à resposta correta. A resposta II está incorreta e mostra que o aluno tem dificuldades relacionadas aos princípios das igualdades e técnicas operatórias. A resposta III está correta e o aluno utilizou o processo resumido para a resolução de equações do 1º grau.

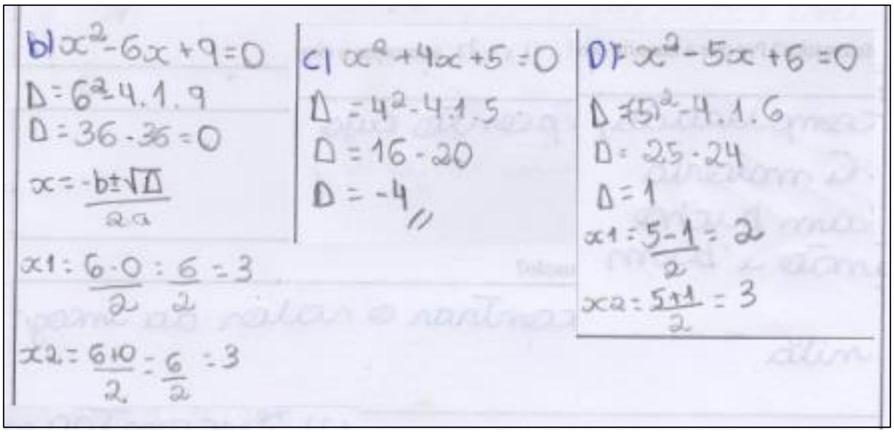


Figura 35: Respostas dadas à questão 6 (itens b, c e d) da avaliação diagnóstica

Esse aluno mostra que conhece a fórmula resolutiva das equações do 2º grau, mostrando também domínio com as operações e técnicas operatórias. No item c, não continuou a resolução, pois ainda não havia estudado o conjunto dos números complexos e só faltou citar que a solução era vazia no conjunto dos números reais.

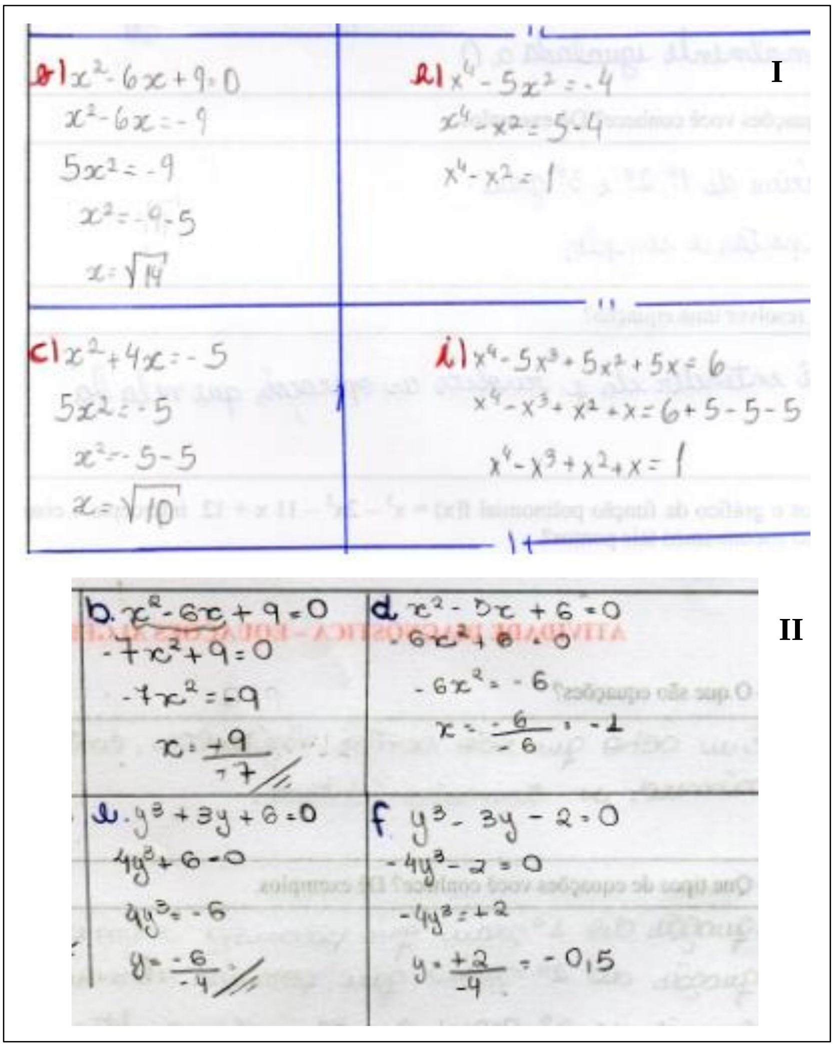


Figura 36: Respostas dadas à questão 6 (segunda e terceiras partes) da avaliação diagnóstica

Nas respostas dadas pelos dois alunos, há uma confusão geral na resolução de equações de grau superior a 1. Não aplicaram a fórmula resolutiva nas equações do 2º grau nem utilizaram outro método para tentar resolver as equações com graus superiores a 2. Tentaram solucionar essas equações com os mesmos procedimentos com os quais resolvemos equações do primeiro grau. Confundiram os termos não semelhantes, operando-os como se fossem semelhantes e ainda cometeram erros nas operações numéricas mais básicas.

Muitos alunos tentaram resolver essas equações dessa forma, mostrando mais uma vez que uma revisão sobre as equações já anteriormente estudadas se faz extremamente necessária.

A atividade diagnóstica mostrou uma defasagem muito grande no aprendizado. Os resultados ficaram bem abaixo do esperado, necessitando de intervenção na parte conceitual bem como uma revisão sobre as equações já estudadas, para que possamos aprofundar o estudo das equações para graus superiores a 2. O exercício cinco propôs a reflexão sobre os motivos dos alunos acharem a matemática uma das ciências mais difíceis de ser aprendida e as possíveis razões que ocasionavam possíveis dificuldades.

Por que os alunos não aprendem matemática?	Porcentagem
Dificuldade de memorização das regras e fórmulas, dificuldade no entendimento.	10%
Os alunos não prestam atenção nas aulas, há falta de interesse, não querem aprender.	50%
Dificuldade de raciocínio, de interpretar o que se pede nos exercícios.	24%
Os alunos faltam muito às aulas, conversam durante as explicações e não estudam em casa.	15%
Os professores não sabem ensinar e não têm paciência com os alunos.	1%

Tabela 9: Tabulação das respostas dadas à questão 5

Metade dos alunos entrevistados atribuem a dificuldade de aprendizado a eles próprios, pois acreditam que não aprendem por não prestarem atenção nas aulas e por falta de interesse. O segundo motivo mais citado remete à dificuldade referente ao raciocínio lógico e na memorização das regras e fórmulas. O terceiro motivo relaciona-se ao excesso de ausências dos alunos às aulas e a falta de estudo em caso. Além disso, quando frequentam as aulas não prestam atenção nas explicações oferecidas pelos professores, pois geralmente estão conversando uns com os outros. Apenas um aluno atribuiu sua dificuldade de aprendizagem com a Matemática ao professor, alegando que este não tem paciência para ensinar e nem didática para conduzir o processo de aprendizagem.

Trazer o aluno para a aula, diversificar a metodologia de ensino e apresentar aulas interessantes é dever do bom professor, mas não garantem sucesso no aprendizado. A motivação é individual a cada indivíduo e diversificar as aulas não garante o alcance global. Segundo Bergamini (1997):

> Se, no início do século, o desafio era descobrir aquilo que se deveria fazer para motivar as pessoas, mais recentemente tal preocupação muda de sentido. Passa-se a perceber que cada um já traz, de alguma forma, dentro de si, suas próprias motivações. Aquilo que mais interessa, então, é encontrar e adotar recursos organizacionais capazes de não sufocar as forças motivacionais inerentes às próprias pessoas...

Mesmo sendo inerente a cada indivíduo, há aspectos externos que estimulam à motivação e cabe ao professor procurar meios que atinjam a maior parte dos seus alunos em prol do aprendizado. Porém, se o aluno não quiser, realmente ele não irá aprender. Essa relação entre professor e aluno é indispensável para o sucesso do processo educacional, pois os dois lados devem estar empenhados e motivados para que o ensinar e o aprender estejam intimamente interligados e que essa dedicação de ambas as partes aja em prol da melhoria do ensino.

4.4.2. PRIMEIRAS INTERVENÇÕES

A análise da primeira questão da atividade diagnóstica já mostrou que dever-se-ia revisar o estudo das equações algébricas pela apropriação da definição de equação. Não adianta resolver equações, das mais simples às mais sofisticadas, se não souber defini-las. O aluno deve entender o que está fazendo e todas as etapas devem ser compreendidas. Definir, saber o que é resolver, encontrar a solução e interpretar situações práticas que envolvem equações compreendem etapas que devem ser entendidas e a falta de compreensão de uma delas gera uma lacuna de aprendizagem que infelizmente, muitas vezes, é detectada muito tarde, levando o aluno a ter que suprir essas lacunas por conta própria para continuar seus estudos no ensino superior.

Como primeira intervenção, foram feitas algumas placas com expressões matemáticas e, em grupos, os alunos tiveram que, num primeiro momento, separar as expressões que representavam equações daquelas que não representavam. Após essa separação, deveriam classificar as equações em algébricas e não algébricas.

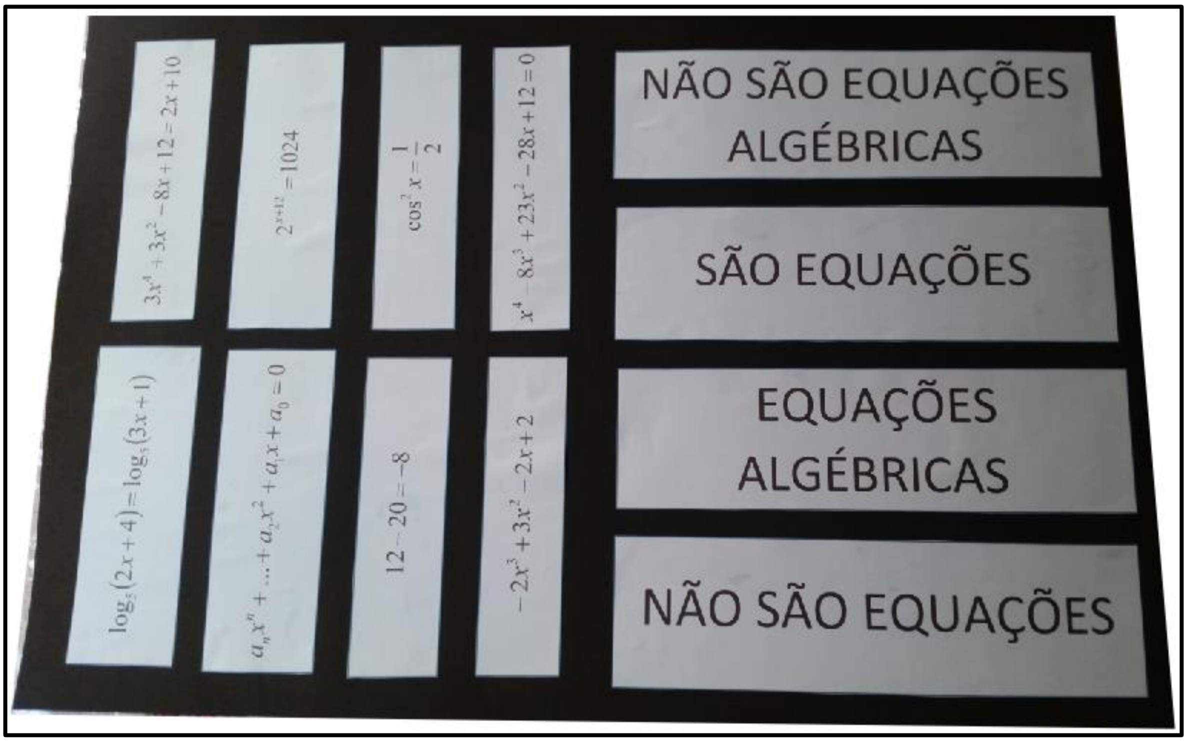


Figura 37: Fichas para a intervenção inicial

No primeiro momento os alunos deveriam separar as expressões em equações e não equações:

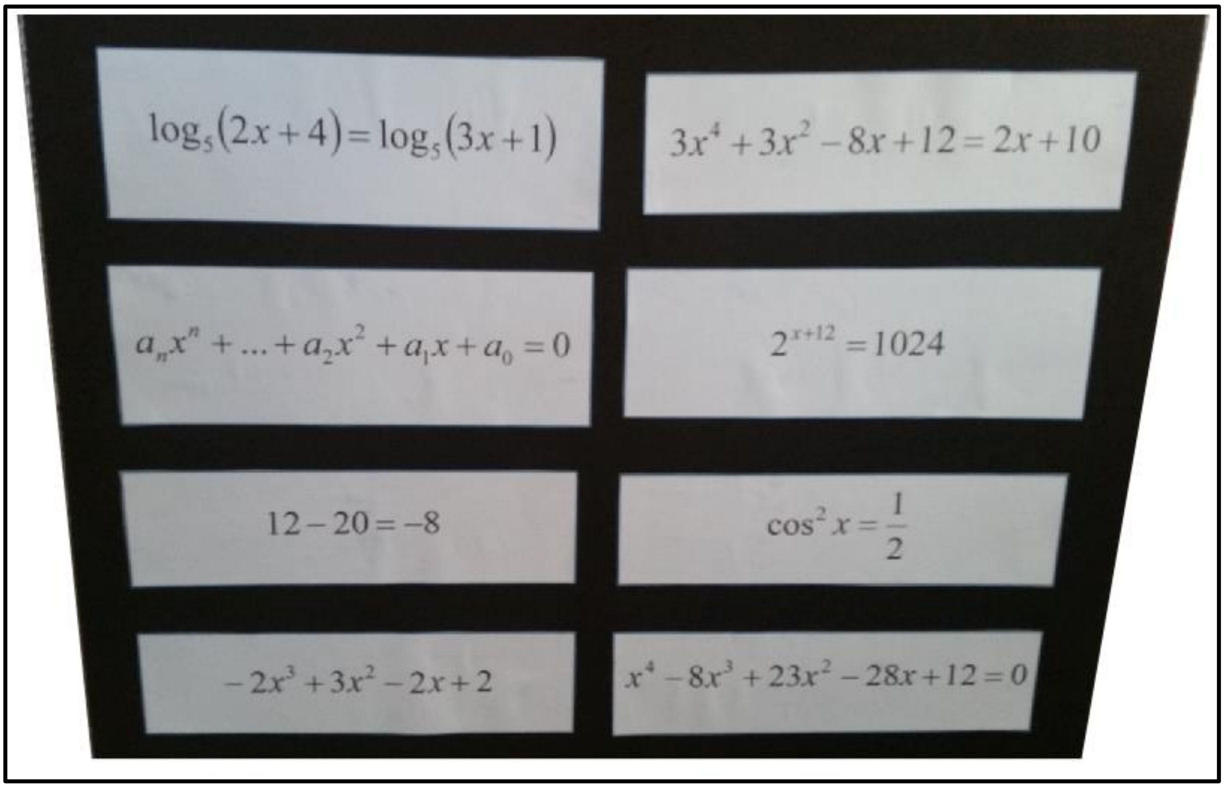


Figura 38: Fichas para o entendimento da definição de equação

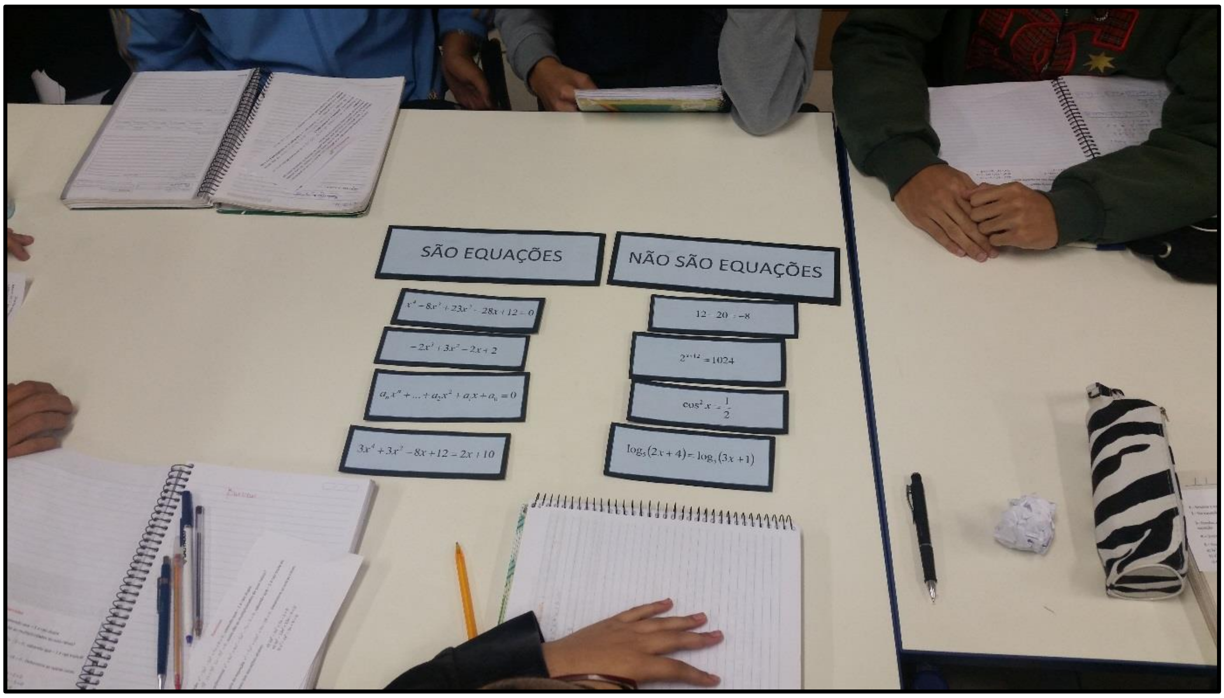


Figura 39: Alunos classificando as expressões em equações e não equações

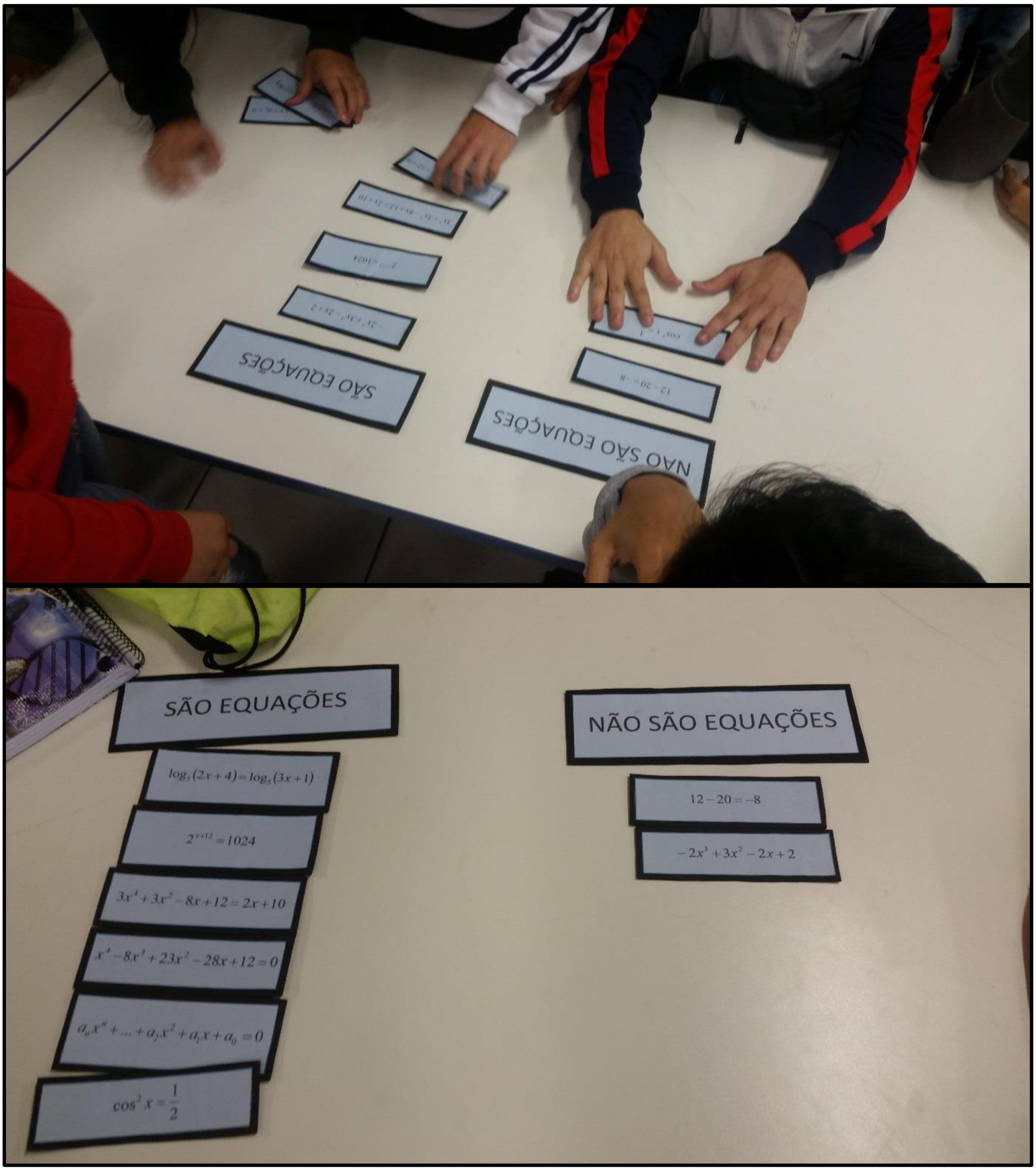


Figura 40: Alunos discutindo sobre o significado de equações

A atividade foi bem interessante, pois os alunos analisaram os elementos pertencentes a uma equação: igualdade, letras e números. Alguns grupos colocaram as equações exponencial, logarítmica e trigonométrica nas expressões que não representavam equações, deixando somente as polinomiais no grupo das equações. Foi necessária uma pequena intervenção para analisarem que, por serem igualdades com incógnitas, também pertenciam ao grupo das equações. Somente duas expressões, uma por não ser uma igualdade e a outra por não conter incógnita, não representavam equações.

Os alunos presentes mostraram-se bastante interessados. Os grupos contaram com a participação de todos e a discussão entre eles foi bem produtiva. Nesse ponto, o professor atuou somente como um mediador, indagando quando uma expressão estava colocada em grupo errado ou pedindo explicações do porquê terem colocado em tal grupo.

Num segundo momento, reconhecendo-se as equações, foi solicitado que as separassem em dois grupos: as algébricas e não algébricas.

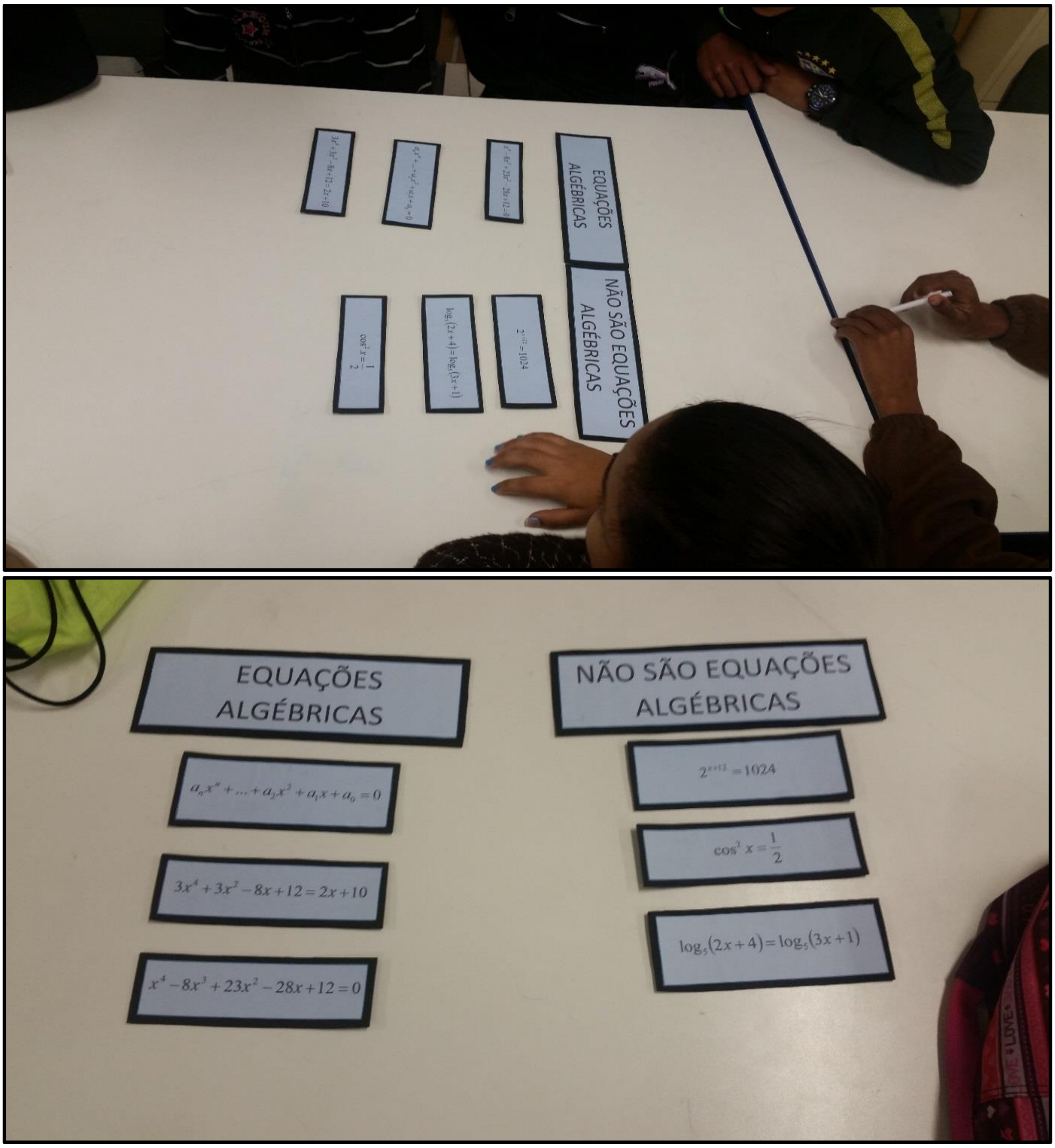


Figura 41: Alunos separando equações algébricas das não algébricas

O intuito, nesse momento era definir equações algébricas como as equações submetidas somente às chamadas operações algébricas e apresentar algumas equações que não se classificam como algébricas (exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas, por exemplo). Discutiu-se também a forma geral das equações algébricas, denominada *forma canônica*.

Terminada essa primeira intervenção, fora solicitada uma pesquisa sobre equações do 1º e 2º grau para socialização em sala de aula. Trabalhamos com as equações trazidas pelos próprios alunos e revisamos métodos de resolução de ambas as equações.

4.4.3. RELEMBRANDO EQUAÇÕES E POLINÔMIOS: MONTAGEM DE EQUAÇÕES POR MEIO DE PRODUTOS ENTRE POLINÔMIOS E DAS RELAÇÕES DE GIRARD

Após o entendimento da definição de equação e de conhecer as equações algébricas, foi feita uma recapitulação de polinômios e relembrou-se as operações básicas entre eles. Foram realizados exercícios de valor numérico de polinômios e encontro das raízes. Observou-se que a raiz de um polinômio $p(x)$ é a solução da equação algébrica $p(x)=0$, e, por esse motivo, as equações algébricas eram chamadas também de polinomiais. Terminada a revisão sobre polinômios, no qual esbarrou-se em dificuldades de cálculos operatórios por grande parte dos alunos, testamos a a implicação $p(x)=0 \rightarrow a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).\cdots.(x-x_n)=0$, sendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soluções da equação $p(x)=0$. Conhecidas as soluções de uma equação polinomial, os alunos montaram as equações, primeiramente por meio do produto $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).\cdots.(x-x_n)=0$. Consideramos nesses caso, $a_n=1$. Mais uma vez, os alunos apresentaram dificuldades para realizar os cálculos. Esses exercícios foram realizados sempre em grupos, no intuito de que os próprios alunos tirassem as dúvidas uns dos outros. Embora nem todos tenham realizado os exercícios propostos, os grupos que os fizeram, obtiveram bom desempenho, pois os alunos com um conhecimento maior da disciplina acabavam ajudando aqueles que apresentam algum tipo de dificuldade.

O objetivo desse momento foi mostrar o quanto pode ser trabalhoso montar uma equação por meio do produto entre os binômios. Se uma equação possuir, por exemplo, quatro raízes distintas, as operações para se chegar a equação que possui essas raízes podem ser um pouco extensas, no qual erros de cálculo podem ocorrer mais facilmente. Após a realização desses exercícios, professor e alunos deduziram juntos as relações de Girard para equações de graus 3, 4 e 5.

Figura 42: Resumo e exemplos sobre as relações de Girard

Alguns alunos acharam muito mais fácil encontrar a equação por meio das somas e produtos de raízes, mas a grande maioria achou mais “complicado”, preferindo resolver os exercícios por meio do produto entre os binômios.

4.4.4. UM MÉTODO PRÁTICO PARA RESOLVER ALGUMAS DIVISÕES DE POLINÔMIOS: O DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

Com a revisão sobre os polinômios, foi inicialmente trabalhada a divisão de polinômios pelo método da chave. Os alunos acharam trabalhoso o processo da divisão, no qual muitos deles, aprendiam pela primeira vez. A maioria disse nunca ter estudado divisão de polinômios, o que, de início gerou maior dificuldade. O objetivo de se trabalhar com esse algoritmo, era mostrar a facilidade de se utilizar o dispositivo Briot-Ruffini, comparado os dois métodos. Muitos alunos indagaram o porquê de não ter ensinado direto o dispositivo prático, uma vez que acharam extremamente mais simples. Foi discutido que o dispositivo só servia para uma divisão especial, na qual o divisor era um binômio específico e por isso, era necessário conhecer-se outro método de divisão para divisores diferentes. Nesse momento, fora entregue um resumo sobre o dispositivo e o professor leu junto com os alunos, completando as lacunas existentes. Esse resumo e exercícios se encontram no Anexo II.

O estudo do dispositivo prático de Briot-Ruffini faz parte dos conteúdos a serem estudados no terceiro ano do ensino médio, conforme visto anteriormente na grade curricular oficial do estado de São Paulo. O principal objetivo de seu estudo é posteriormente reduzir-se o grau de uma equação algébrica, conhecendo-se uma de suas raízes, o que facilita encontrar as demais raízes da equação, pois conseguimos, muitas vezes, recair em equações cuja resolução são conhecidas. As atividades foram, em sua maioria, resolvidas sempre em grupos, no intuito de promover a cooperação mútua, para que os próprios alunos se auxiliassem, resolvendo possíveis dúvidas surgidas no decorrer do processo de aprendizagem.

Figura 43: Alunos resolvendo em grupos os exercícios do dispositivo prático de Briot-Ruffini

4.4.5. PESQUISANDO AS RAÍZES REAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA: O TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

Após os exercícios de divisões de polinômios aplicando o dispositivo prático, chegamos ao ponto central do trabalho: encontrar as raízes de uma equação algébrica de grau superior a 2. Novamente foram distribuídos aos alunos um resumo e exercícios referente ao teorema das raízes racionais, com lacunas a serem preenchidas durante a explicação do professor, o qual pode ser conferido no Anexo III. Entendido o teorema, em grupo, testaram as possíveis raízes racionais, encontrando dificuldades na conferência, devido aos erros cometidos no desenvolvimento dos cálculos operatórios, principalmente em relação ao teste das raízes não inteiras, o qual precisou de intervenção do professor. Acharam extremamente trabalhoso, devido a quantidade das possíveis raízes contidas no exemplo analisado e ainda ficaram perplexos ao imaginar caso as soluções fossem todas não racionais, pois testariam todas as possíveis soluções racionais, não encontrando nenhuma raiz da equação.

Após estudarem o teorema das raízes racionais, foi discutido o fato de, conhecendo-se uma das raízes da equação, pode-se diminuir o grau da equação, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini. Trata-se de um recurso importante e interessante, pois podemos recair em equações cuja resolução é conhecida e evitaria o teste com todas as possíveis soluções racionais encontrados. Foi discutido também o caso da multiplicidade das raízes, cujo resumo, exemplos e exercícios entregues aos alunos podem ser conferidos no Anexo IV.

4.4.6. A AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO (A.A.P.)

As avaliações de aprendizagem em processo foram implantadas, fazendo parte de um projeto piloto, em agosto de 2011, tendo como foco o 6º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do ensino médio. Faziam parte de um pacote de melhora da Educação básica estadual paulista, lançado no mesmo ano: “Programa Educação – Compromisso de São Paulo”. A versão em 2012, abrangeu mais duas séries/anos, o 7º ano do ensino fundamental e a 2ª série do ensino médio. Em 2013, todas as turmas, a partir do 2º ano do ensino fundamental, participaram das avaliações, aplicadas, inicialmente, em dois momentos: fevereiro e agosto. A partir de 2015, as avaliações tornaram-se bimestrais, aplicadas ao final dos três primeiros bimestres, contemplando todas as séries/anos da educação básica (exceto para os anos iniciais do ensino fundamental, o ciclo de alfabetização, cuja aplicação é única e realizada no início do ano letivo, de caráter exclusivamente diagnóstico). Trata-se de uma ação, fundamentada no currículo oficial da Secretaria de Educação, que propõe o acompanhamento dos alunos, coletivamente e individualmente, no intuito de subsidiar e apoiar os professores de Língua Portuguesa e

Matemática, servindo como mais um indicativo das aprendizagens dos alunos, uma vez que suas maiores defasagens.

A avaliação da aprendizagem em processo dialoga com as habilidades contidas no SARESP, Saeb e Prova Brasil, meios de avaliações externas que fornecem indícios de como está a aprendizagem e defasagens dos alunos. É também uma forma da Secretaria acompanhar o trabalho do professor, uma vez que as avaliações contemplam os conteúdos do currículo oficial paulista e muitas vezes traz exercícios do próprio caderno do aluno, indicando que o professor deva utilizar o material de apoio como uma de suas fontes de trabalho. Os resultados dessa avaliação junto com outras atividades avaliativas dadas pelo próprio professor devem subsidiar o planejamento das ações de intervenção que o professor precisa tomar para que as defasagens detectadas sejam diminuídas ou sanadas.

Um dos grandes problemas dessa avaliação é que geralmente são aplicadas antes do término do bimestre, no momento em que ainda muitos dos conteúdos não foram trabalhados. O ideal seria aplicá-la após o final do bimestre ou no início do seguinte. Ainda que não houvesse tempo hábil para trabalhar todos os conteúdos, apenas uma pequena parcela ficaria de fora, principalmente levando em conta que cada sala é diferente uma da outra e o tempo de aprendizagem também difere. Assim o professor teria um tempo maior para contemplar os conteúdos exigidos e preparar melhor seus alunos, além disso o rendimento seria certamente bem melhor, já que o professor teria cumprido o planejamento proposto para cada bimestre em tempo hábil.

A aplicação da A.A.P. nessa escola, no qual o trabalho foi desenvolvido, referente ao segundo bimestre, ocorreu na semana de 20 a 24 de junho, em todas as séries. Composta de 15 questões objetivas, as provas da 3ª série do ensino médio, comtemplaram os conteúdos descritos na tabela 10:

Conteúdo	Questões	Porcentagem do conteúdo na avaliação
Equações algébricas	1, 2, 3, 4, 6, 14	40%
Polinômios e operações	5, 7, 8, 9, 10	33%
Números complexos	11, 12	13%
Funções	13	7%
Localização dos números na reta real	15	7%

Tabela 10: Conteúdos contemplados na A.A.P. realizada no 2º bimestre da 3ª série do ensino médio

Pode-se observar que o conteúdo de maior abrangência nessa avaliação foi justamente o tema desse trabalho. O interessante é que os resultados dessa avaliação podem nos fornecer uma análise parcial da aprendizagem sobre equações algébricas. A tabela 11 mostra a porcentagem de acertos em cada questão que contemplou o estudo das equações algébricas.

Questões	Porcentagem de acertos
1	55%
2	37%
3	45%
4	50%
6	55%
14	35%

Tabela 11: Quantidade de acertos nas questões envolvendo equações algébricas

Podemos observar uma melhora significativa, sendo que três, das seis questões que envolviam equações, foram resolvidas corretamente por mais da metade do número de alunos, o que ao meu ver, na atual conjuntura dos resultados analisados, mostram avanços consideráveis na aprendizagem.

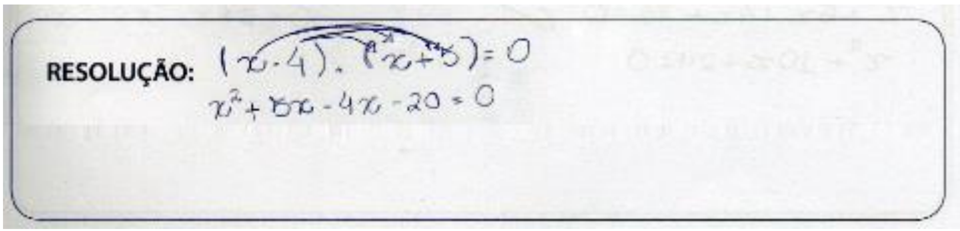
Analisemos mais profundamente essas seis questões:

Dada a equação $x^2 + Bx + C = 0$ e sabendo que 4 e -5 são as raízes dessa equação, então, temos que:

A $B = 1$ e $C = -9$ B $B = 1$ e $C = -20$ C $B = 9$ e $C = 20$ D $B = 20$ e $C = -20$

Figura 44: Questão 1 da A.A.P.

A habilidade requerida pela primeira questão era identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles. Conhecendo as relações de Girard e lembrando que a equação do 2º grau pode ser expressa da forma $x^2 - Sx + P = 0$, somando e multiplicando-se as raízes obteríamos $x^2 + x - 20 = 0$, tendo o item B como alternativa correta. Entretanto, nenhum aluno que acertou essa questão procedeu dessa forma, chegando ao resultado correto por meio do produto $(x-4).(x+5) = 0$, lembrando-se que, se r_1 e r_2, são raízes de uma equação do 2º grau, então essa equação pode ser expressa, na forma fatorada, por $(x - r_1).(x - r_2) = 0$.



RESOLUÇÃO: $(x-4).(x+5)=0$

$x^2+5x-4x-20=0$

Figura 45: Resolução da questão 1 da A.A.P. feita por um aluno

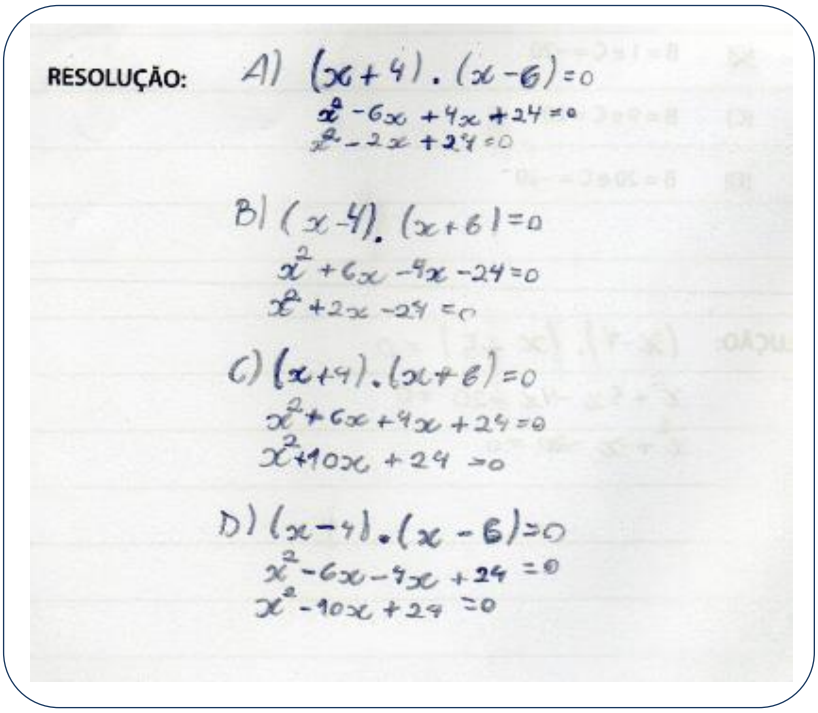
A segunda questão também analisava a mesma habilidade e se o aluno lembrasse das relações de Girard, saber-se-ia que que a soma das raízes era 10 e o produto entre elas, 24, obtendo as raízes 6 e 4 e por fim, expressaria sob a forma fatorada $(x-4).(x-6)=0$

A forma fatorada da equação $x^2 - 10x + 24 = 0$ é:

A $(x + 4) \cdot (x - 6) = 0$ B $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$ C $(x + 4) \cdot (x + 6) = 0$ D $(x - 4) \cdot (x - 6) = 0$

Figura 46: Questão 2 da A.A.P.

Mesmo abrangendo a mesma habilidade que a questão anterior, o percentual de alunos que acertaram essa questão foi menor. Isso porque, na questão 1, as raízes já aparecem explícitas e na questão 2, as raízes teriam que ser encontradas. Provavelmente, por possuir esse passo a mais, muitos alunos a responderam de forma incorreta. A maioria dos que acertaram essa questão, testaram as alternativas até encontrarem a correta, conforme podemos ver na figura 47.



RESOLUÇÃO: A) $(x+4).(x-6)=0$

$x^2-6x+4x+24=0$

$x^2-2x+24=0$

B) $(x-4).(x+6)=0$

$x^2+6x-4x-24=0$

$x^2+2x-24=0$

C) $(x+4).(x+6)=0$

$x^2+6x+4x+24=0$

$x^2+10x+24=0$

D) $(x-4).(x-6)=0$

$x^2-6x-4x+24=0$

$x^2-10x+24=0$

Figura 47: Resolução da questão 2 da A.A.P. feita por um aluno

O objetivo da terceira questão era encontrar uma equação algébrica de 3º grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.

Uma equação de 3º grau pode ser escrita: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, (com $a \neq 0$).
A equação polinomial cujas raízes são -1, 1 e 2 deve ser escrita como:

A $x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ **B** $2x^2 + x + 2 = 0$ **C** $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ **D** $2x^2 - x - 2 = 0$

Figura 48: Questão 3 da A.A.P.

Mais uma vez, os alunos não utilizaram as equações de Girard, resolvendo-a por meio do produto entre três binômios $(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3) = 0 \rightarrow (x + 1).(x - 1).(x - 2) = 0$.

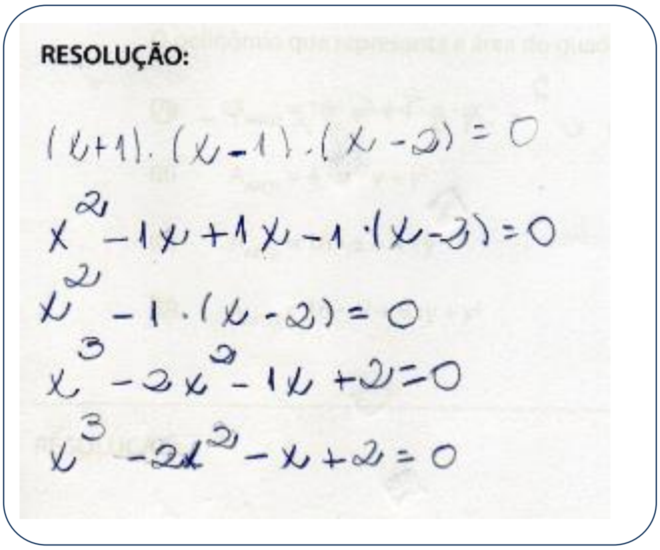


Figura 49: Resolução da questão 3 da A.A.P. feita por um aluno

Quase metade dos alunos que realizaram a avaliação, acertaram essa questão resolvendo-a da mesma forma. Os que erraram, o fizeram por meio de erros nas operações ou por elaborar errado o produto, invertendo alguns sinais.

A quarta questão também abrangia a relação entre os coeficientes e raízes de uma equação do 3º grau. Muitos dos alunos que acertaram essa questão, simplesmente assinalaram a alternativa correta, sem justificar.

A soma das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ é:

(A) 5.   (B) 6.   (C) 7.   (D) 12.

Figura 50: Questão 4 da A.A.P.

Como nesse momento, ainda não houvesse tido tempo hábil para ter trabalhado a resolução das equações de grau superior a 2 (após a avaliação, foi estudado o teorema das raízes racionais e a redução do grau de uma equação pelo dispositivo de Briot-Ruffini, para então serem estudadas formas de resolução), nenhum aluno encontrou as raízes para realizar sua soma, porém as relações de Girard já haviam sido trabalhadas. Como a maioria marcou a alternativa correta, sem maiores justificativas, não se sabe se os alunos lembraram que o coeficiente do termo do segundo grau em uma equação do terceiro grau representava a soma das raízes da equação ou se simplesmente "chutaram" a resposta.

A soma das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ é:

(A) 5.

(B) 6.

(C) 7.

~~(D)~~ 12.

RESOLUÇÃO: $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

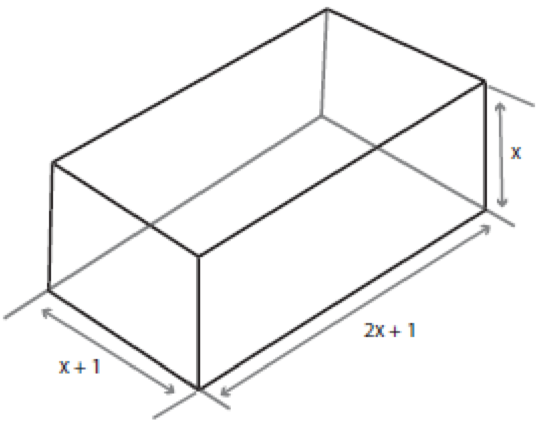
$\rightarrow x^3 - S_1x^2 + S_2x - P = 0$

Figura 51: Resolução da questão 4 da A.A.P. feita por um aluno

Podemos observar na figura 51 que o aluno conhece as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação do 3º grau, porém confundiu-se no coeficiente que representava a soma das raízes da equação, conforme solicitava o enunciado, marcando a alternativa que continha o coeficiente que representava a soma dos produtos das raízes da equação, tomadas duas a duas.

A sexta questão envolvia conhecimentos sobre equações e polinômios. Embora solicitasse a equação que determinasse o volume de um certo recipiente, a habilidade principal envolvida era realizar operações entre polinômios, uma vez que lembrados do cálculo do volume de um objeto na forma de paralelepípedo retângulo, era só realizar o produto entre as três dimensões trazidas pelo exercício. A habilidade requerida aqui referente às equações era simplesmente lembrar-se da definição de uma equação, tentando-se, portanto, encontrar a igualdade que contemplasse o que fora pedido no exercício.

Um engenheiro foi contratado para construir um tanque de concreto para mistura de argila e água em uma indústria de cerâmica. Para isso, ele definiu as medidas internas do tanque como x, (x + 1) e (2x +1), conforme a figura. Dessa forma, poderia atender a diversas demandas de volume e de espaço físico para construção.



Nessas condições, a equação que fornece o valor de x para um volume de 30 m³ é:

A $2x^2 + x + 2x + 1 = 30$

C $x^3 + 2x^2 + x - 30 = 0$

B $2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0$

D $x^3 + x^2 + x = 30$

Figura 52: Questão 6 da A.A.P.

Todos os alunos que acertaram o exercício o resolveram da mesma forma. Os que erraram, mais uma vez tiveram problemas referente aos cálculos e operações.

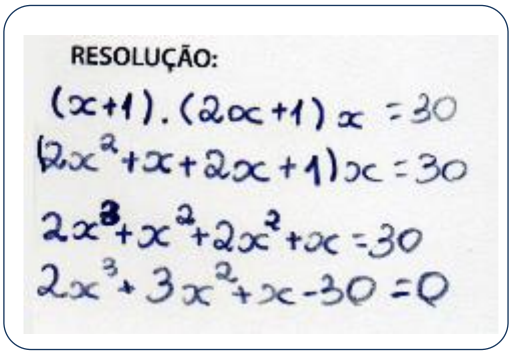


Figura 53: Resolução da questão 6 da A.A.P. feita por um aluno

A última questão da avaliação que comtemplava as equações algébricas, a décima quarta, trouxe um exercício retirado do SARESP – 2012, cuja habilidade era resolver problemas que envolvessem equações do 2º grau.

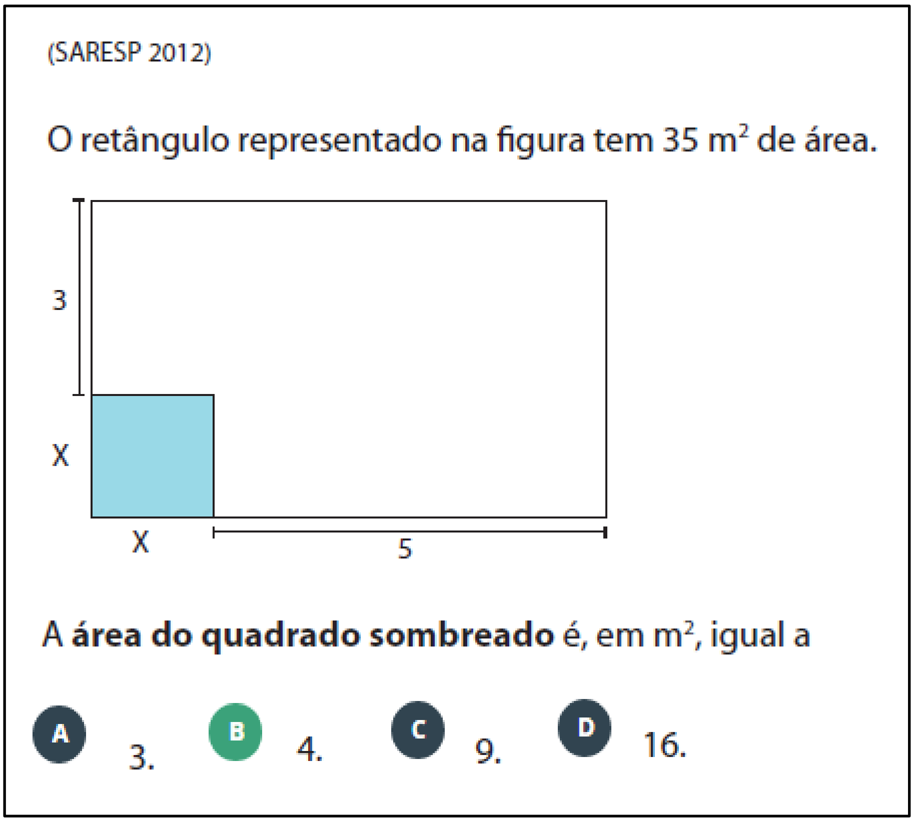


Figura 54: Questão 14 da A.A.P.

Essa questão, dentre as que envolviam equações, foi a que apresentou pior resultado (somente 35% dos alunos responderam corretamente). Como tratava-se de interpretar uma situação-problema, modelando-a em uma equação, os alunos apresentaram dificuldades, mostrando a defasagem em interpretação de problemas, muito já citada e discutida. Uma das formas mais simples de se resolver seria montar a equação $(x+3).(x+5)=35$, recaindo em $x^2+8x-20=0$, encontrando as soluções $x_1 = 2$ e $x_2 = -10$, obtendo portanto, a área do quadrado sombreado $(2^2 = 4)$.

Todos os alunos que acertaram essa questão resolveram por meio de cálculo mental e raciocínio lógico, pensando em dois números cujo produto era 35, chegando às dimensões 7 e 5, encontrando assim o valor $x = 2$ e por conseguinte, a área de $4m^2$.

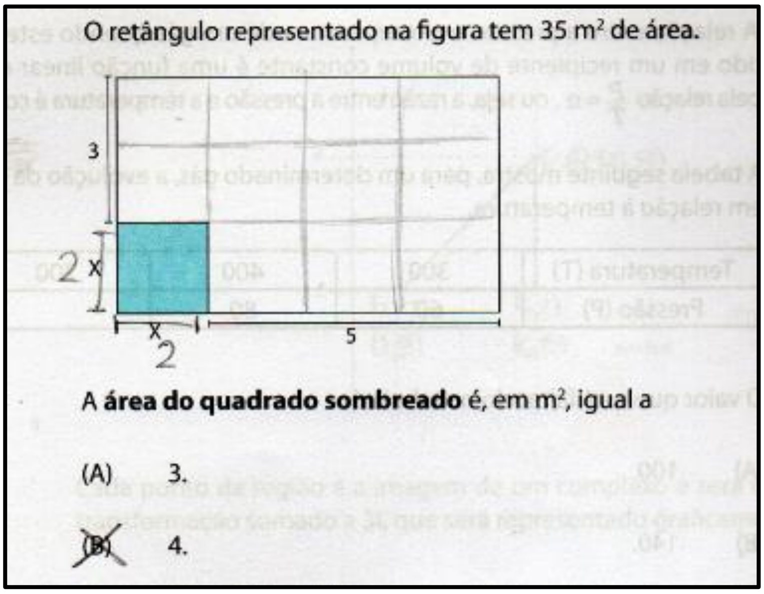


Figura 55: Resolução da questão 14 da A.A.P. feita por um aluno

Na figura, o aluno tentou, inicialmente, dividir o retângulo em quadrados, não obtendo muito sucesso. Depois deve ter percebido que as dimensões seriam 7 e 5, obtendo o lado 2 do quadrado (completando o 5 e o 3), assinalando a alternativa correta.

Como o intuito da Secretaria de Educação, com a aplicação da avaliação da aprendizagem em processo, é fornecer subsídios para diagnóstico da aprendizagem dos alunos, esta cumpre perfeitamente esse propósito. Serve como indicativo de onde se encontram as maiores dificuldades dos alunos, permitindo ao professor que reflita sobre os resultados e pense em um plano de atuação no intuito de resolver as defasagens detectadas. Ela mostrou mais uma vez que grande parte das dificuldades dos alunos dividem-se em dois momentos: cálculos operatórios e interpretação de problemas.

Passada a aplicação da A.A.P, retomou-se o trabalho com as equações algébricas e o teorema das raízes racionais, juntamente com a discussão da multiplicidade das raízes de uma equação. Revisamos os exercícios do Anexo IV e para que os alunos conferissem se as raízes reais encontradas por eles condiziam com as raízes reais dos polinômios correspondentes, foi realizado um trabalho com o *software* Geogebra[19], penúltima parte do plano de atuação elaborado. A última parte, sobre a equação de Cardano e Tartaglia e o estudo das raízes complexas de uma equação algébrica não está contemplado nessa análise, que teve como foco principal a análise das raízes reais de uma equação algébrica.

4.4.7. A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

A utilização de recursos computacionais sempre foi incentivada para tornarem as aulas de matemáticas mais atrativas e prazerosas, aproveitando a utilização das tecnologias em prol da aprendizagem. Embora muitas escolas ainda não possuam um laboratório de informática adequado à utilização de uma quantidade numerosa de alunos por sala, os computadores hoje, integram muitas experiências educacionais, com diversos softwares diferentes, e muitos deles gratuitos, que auxiliam no processo de aprendizagem. Ainda segundo os *softwares*, BRASIL (1997) já apontava:

> Quanto aos softwares educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento.

Defendida a utilização dos computadores para fins didáticos, o mesmo documento educacional norteava as suas formas de utilização:

[19] O Geogebra é um software de matemática dinâmica gratuito indicados para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única plataforma.

> O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as.

Há quase vinte anos, já previa-se a evolução tecnológica que ocorreria e estudos já apontavam a necessidade da adequação às metodologias de ensino, acompanhando os avanços tecnológicos evitando que a forma de se ensinar se tornasse obsoleta.

Com o passar dos anos e com os avanços tecnológicos, defende-se hoje a utilização de softwares que agucem a investigação dos alunos, sem fornecer o passo a passo, uma vez que essa geração tem facilidade com as tecnologias. Investigar, pesquisar, criar hipóteses, testar as hipóteses, realizar conjecturas são ações que podem ser realizadas com a utilização de determinados softwares.

Nessa pesquisa, a utilização do *software* foi exclusivamente caracterizada por verificação visual, para que o aluno conseguisse identificar as raízes reais da equação $p(x)=0$, observando o pronto de interseção do gráfico da função polinomial $p(x)$ com o eixo das abscissas (zeros da função polinomial). Foi discutida a relação existente entre o gráfico da função polinomial e a equação algébrica determinada pelo polinômio em análise.

Na escola, num primeiro momento, pensei em levar os alunos à sala de informática, mas diversos fatores me levaram a abandonar essa ideia. Destaco, entre eles, o número reduzido de computadores, o grande número de alunos por sala, a ausência de um monitor de informática no período noturno, a impossibilidade de levar todos os alunos de uma mesma sala ao mesmo tempo e a considerável ausência de professores, impossibilitou o auxílio dos professores eventuais, que são responsáveis em substituir tais ausências.

A alternativa foi utilizar o laboratório de ciências e com o auxílio de um retroprojetor, traçamos o gráfico de algumas funções polinomiais e verificamos as raízes reais das equações algébricas correspondentes.

Foi criada uma atividade utilizando-se controles deslizantes, nos quais os alunos puderam analisar diversos gráficos de funções polinomiais $p(x)$, visualizando as raízes reais das equações $p(x)=0$. O Geogebra possibilita a criação de uma página na internet a partir da atividade criada, onde os alunos puderam acessar do próprio celular e interagir com o professor.

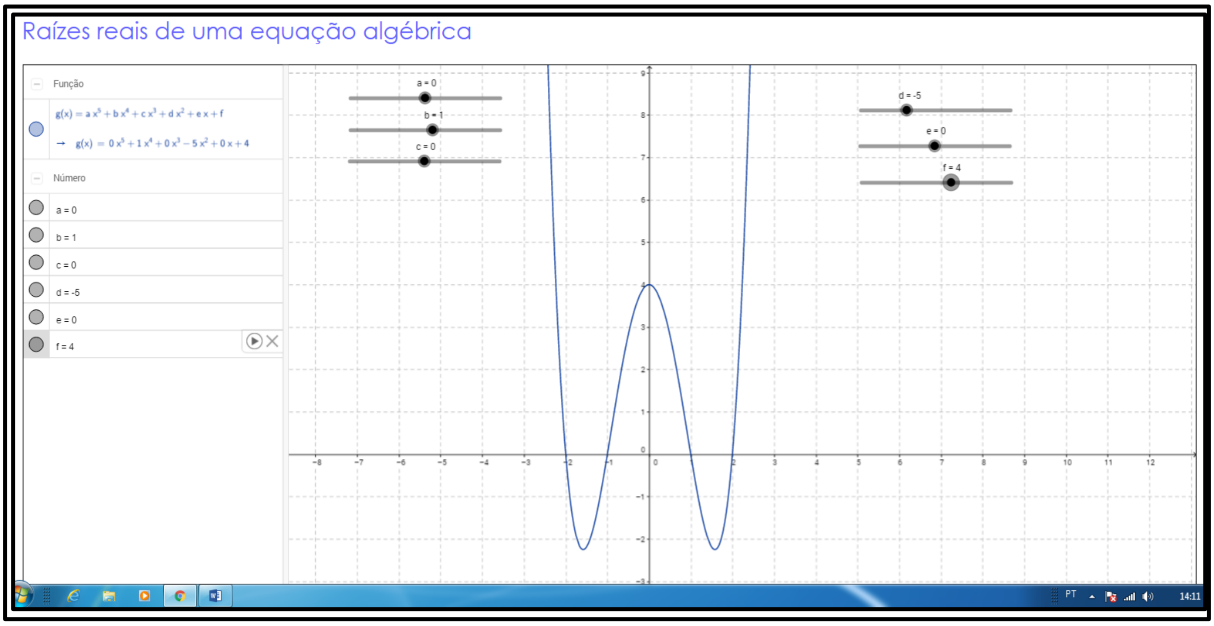


Figura 56: Atividade sobre equações no Geogebra criada pelo professor
Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/uNCTTp9B>. Acesso em: set.2016.

As dificuldades enfrentadas nesse ponto foram o sinal da internet (fraco, no laboratório), tela pequena (do celular), e o "peso" da página, pois era bem carregada de informações, tornando algumas vezes o acesso lento, porém os que conseguiram conexão interagiram com os que não conseguiram, e todos puderam ter ideia do funcionamento. A página da web foi disponibilizada para os alunos a fim de que pudessem fazer a autocorreção dos exercícios em suas próprias casas. A página encontra-se disponível no endereço: http://www.geogebra.org/m/uNCTTp9B.

Foi criada a função $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, na qual os alunos poderiam variar os parâmetros a, b, c, d, e, f e observar os gráficos obtidos. Ao observar os pontos de interseções dos gráficos gerados com o eixo das abscissas, encontravam-se ali as soluções reais da equação $p(x) = 0$. Na figura 57, podemos conferir, por exemplo, como ficariam os coeficientes da função polinomial $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.

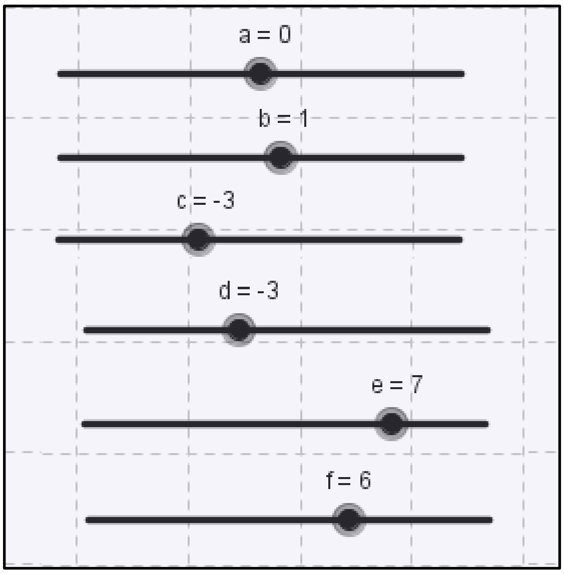


Figura 57: Parâmetros da função polinomial p(x) = $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Os alunos gostaram bastante do software, principalmente por poderem conferir se as raízes encontradas nos seus exercícios estavam corretas, pois podiam comparar com as raízes observadas do gráfico da função polinomial presente no primeiro membro da equação. O acesso feito pelo celular também chamou a atenção, e alguns alunos que não prestavam tanto atenção às aulas de matemática ou não tinham muito interesse pela disciplina participaram da atividade por acharem-na interessante.

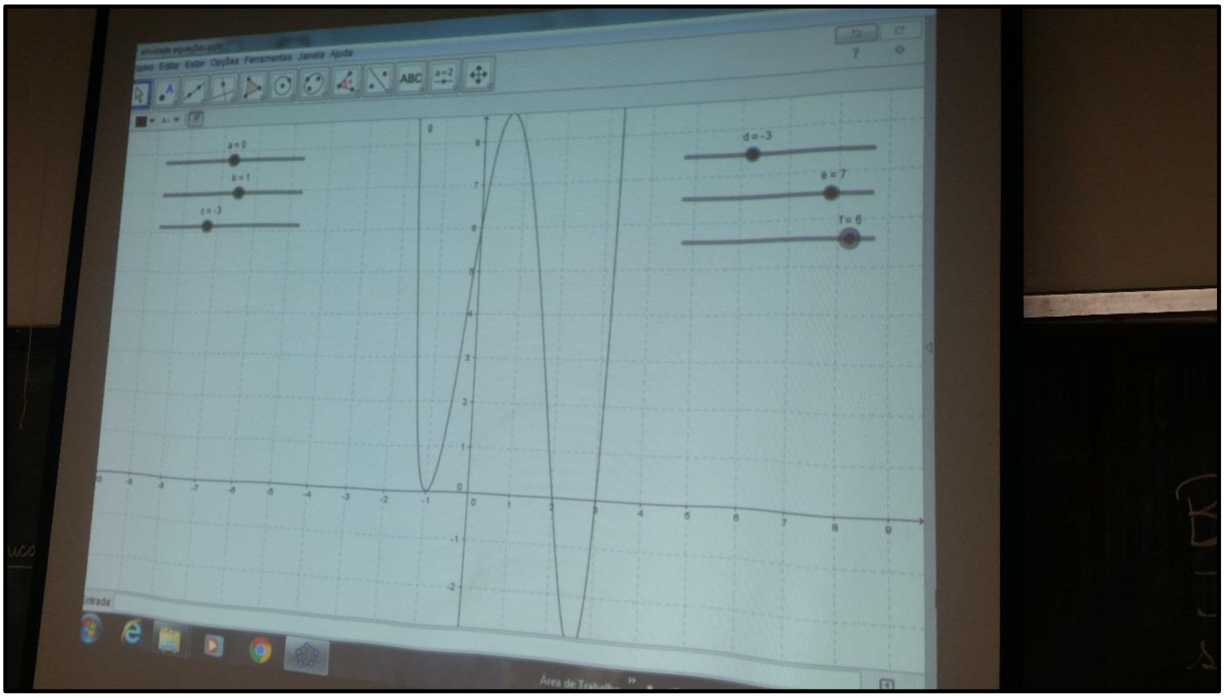


Figura 58: Análise das raízes reais da equação algébrica $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$

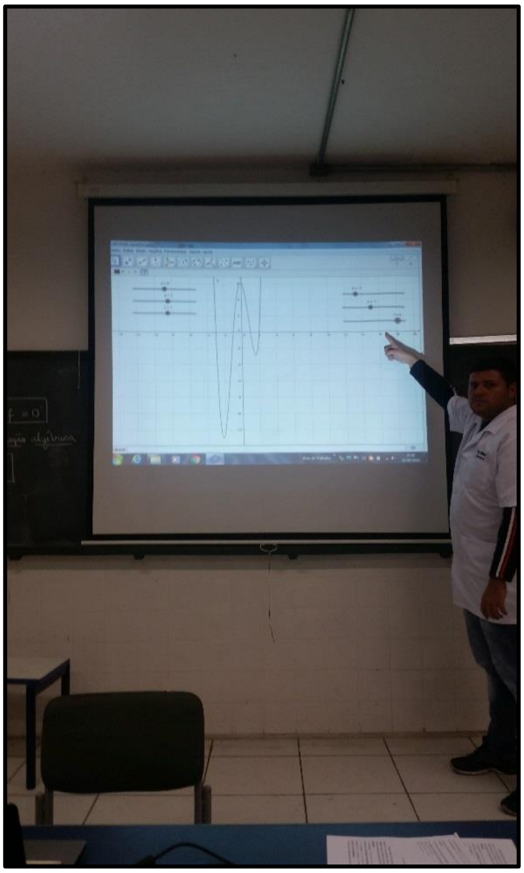


Figura 59: Professor mostrando onde mudar os parâmetros no site disponibilizado aos alunos

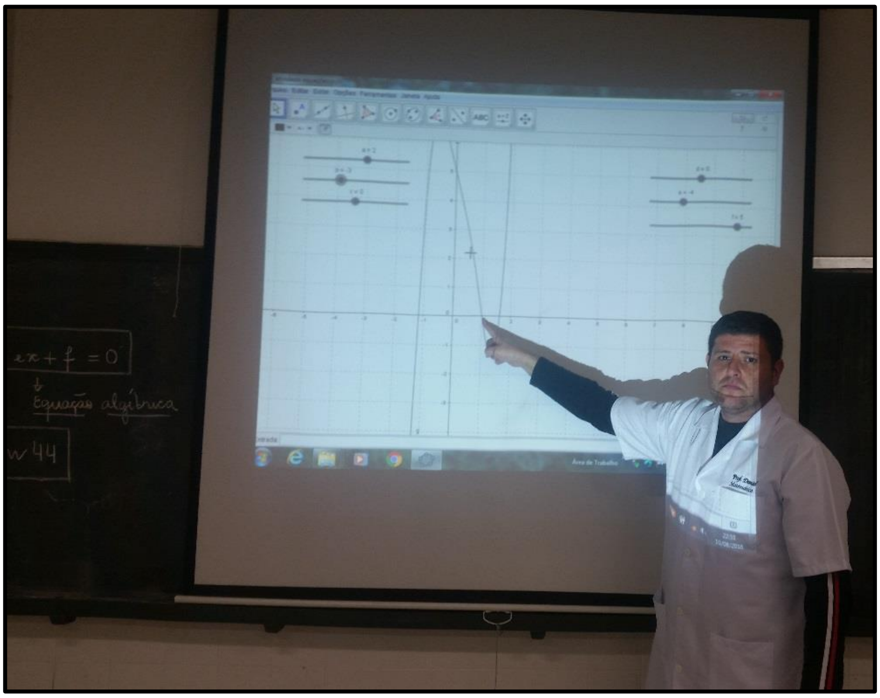


Figura 60: Professor mostrando as raízes reais da equação $2x^5 - 3x^4 - 4x + 5 = 0$

Claro que, em exercícios cujas raízes eram irracionais, ficaria difícil decidir se as raízes encontradas estavam corretas, mas oferecia uma noção para o aluno verificar se está “no caminho certo”.

Por exemplo, o exercício “5 – f” da atividade do anexo IV solicitava pesquisar as soluções reais da equação $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$. Pelo teorema das raízes racionais, as possíveis soluções eram: $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, de onde é fácil verificar que 2 é uma das raízes, pois, $2^3 - 2.2^2 - 3.2 + 6 = 8 - 8 - 6 + 6 = 0$. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos $(x-2).(x^2-3) = 0$ e, por fim, a solução final $S = \{2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, atentando para o fato de duas das raízes não aparecerem nas prováveis soluções por não serem números racionais.

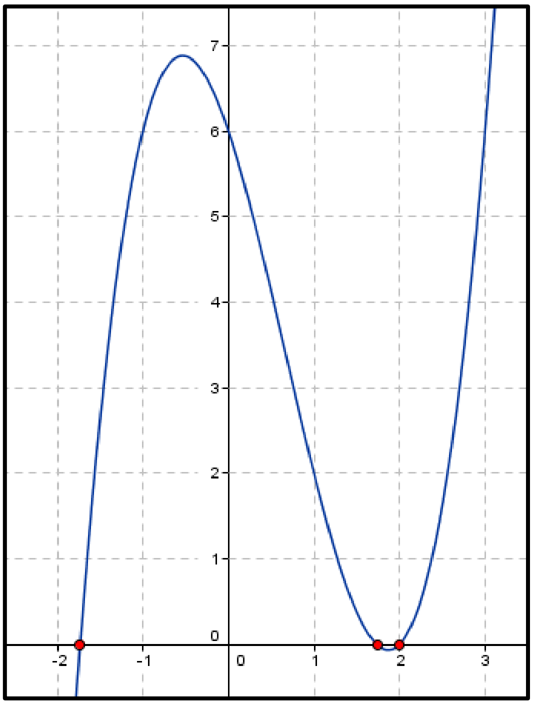


Figura 61: Análise das raízes reais da equação algébrica $x^3 – 2x^2 – 3x + 6 = 0$

Podemos ver claramente o 2 como raiz da equação, porém, os outros números são incertos. Vemos que são dois números, um compreendido no intervalo [1, 2] e outro no intervalo [– 2, – 1]. Se o aluno for atento e olhar na janela das expressões localizada no canto superior esquerdo, verá que os pontos correspondem a – 1,73 e 1,73 que são valores aproximados de $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ respectivamente.

Essa atividade fechou a contento a análise das raízes reais de uma equação algébrica e o site ficou disponibilizado aos alunos para acessarem de suas casas e conferirem as soluções com as que encontraram nos exercícios solicitados no Anexo IV.

4.4.8. ATIVIDADE DE VERIFICAÇÃO DOS CONTEÚDOS TRABALHADOS

Após a aplicação do plano de atuação, realizamos uma última atividade para verificação da aprendizagem dos conteúdos trabalhados. Não consta nessa atividade exercícios que solicitem a fórmula resolutiva das equações do 3º grau, pois o tempo foi escasso e demandaria mais algumas aulas para poder trabalhar a fórmula de Cardano e Tartaglia de forma detalhada, necessitando de um maior aprofundamento também no conjunto dos números complexos. Por esse motivo, optei em verificar a resolução por meio do teorema das raízes racionais e diminuição do grau da equação utilizando o dispositivo de Briot-Rufini. Solicitei também a definição de equações, bem como o significado de se resolvê-las, uma vez que quase a totalidade de alunos não sabiam esses conceitos antes de iniciar o estudo das equações algébricas. Alguns exercícios sobre multiplicidade de raízes e relação entre o gráfico de uma função polinomial e a equação algébrica correspondente também foram contemplados. Essa atividade encontra-se disponível no Anexo V. Participaram dessa avaliação 82 alunos.

As habilidades investigadas, nessa última atividade foram as seguintes:

Exercício 1: Definir equação corretamente.

Exercício 2: Compreender o que é resolver uma equação.

Exercício 3:

a) Compreender que as interseções de um gráfico de uma função polinomial $p(x)$ com o eixo das abscisas representam as soluções reais da equação $p(x) = 0$.

b) Entender o conceito e calcula a multiplicidade de uma raiz.

Exercício 4: Resolver corretamente uma equação algébrica do 5º grau, conhecendo-se uma raiz de multiplicidade três.

Exercício 5:

a) Compreender que as interseções de um gráfico de uma função polinomial p(x) com o eixo das abscissas representam as soluções reais da equação $p(x) = 0$.

b) Expressar uma equação na forma fatorada, conhecendo-se suas raízes.

c) Expressar uma equação na forma canônica, conhecendo-se suas raízes.

Exercício 6: Reconhecer métodos de resolução de equações polinomiais de graus variados.

a) Resolver corretamente uma equação algébrica do 1º grau.

b) Resolver corretamente uma equação algébrica do 2º grau.

c) Resolver corretamente uma equação algébrica do 3º grau, na qual todas as raízes são racionais inteiras.

d) Resolver corretamente uma equação algébrica do 3º grau, na qual uma raiz é racional e duas irracionais.

e) Resolver corretamente uma equação algébrica do 3º grau, na qual uma raiz é racional e duas irracionais.

f) Resolver corretamente uma equação algébrica do 4º grau, na qual apenas duas raízes são reais.

A primeira questão referia-se à definição de equação, uma vez que 78% dos alunos responderam de forma incorreta ou deixaram a questão sem resposta na atividade diagnóstica.

Exercício 1	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	59	72%
Sabe que é uma igualdade mas não cita que possui incógnitas	8	10%
Sabe que é uma sentença que possui incógnitas mas não cita que é uma igualdade	7	9%
Resposta incorreta	4	5%
Questão em branco	4	5%

Tabela 12: Tabulação das respostas dadas à questão 1

Somente 10% dos alunos responderam incorretamente ou deixaram em branco essa primeira questão. A maioria definiu corretamente, como podemos constatar na resposta I da figura 62.

I

II

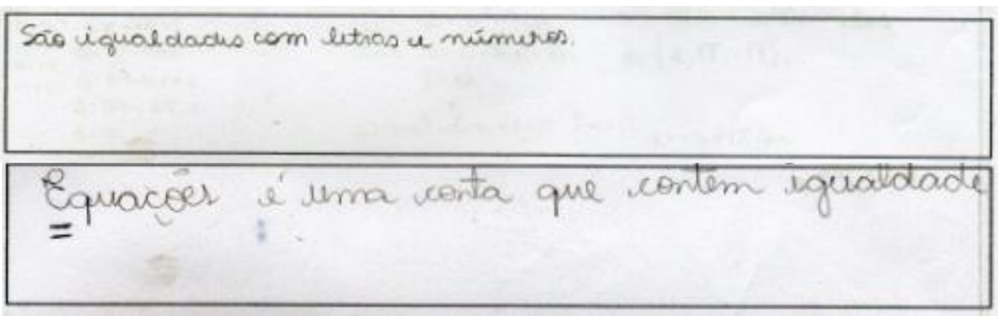


Figura 62: Respostas dadas à questão 1 da avaliação final

Embora grande parte dos alunos responderam à questão de forma correta, alguns alunos ainda utilizaram o termo “contas” para definir equações, como mostra a resposta II.

A segunda questão indagava o que era resolver uma equação (as duas primeiras questões já constaram na avaliação diagnóstica e foram repetidas aqui por considerar essencial conhecer suas respostas para o estudo das equações algébricas). Definir e saber resolver uma equação é o mínimo que se espera em um estudo sobre os métodos de resolução das equações algébricas.

Exercício 2	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	64	78%
Resposta parcialmente correta	4	5%
Resposta incorreta	11	13%
Questão em branco	3	4%

Tabela 13: Tabulação das respostas dadas à questão 2

I

II

III

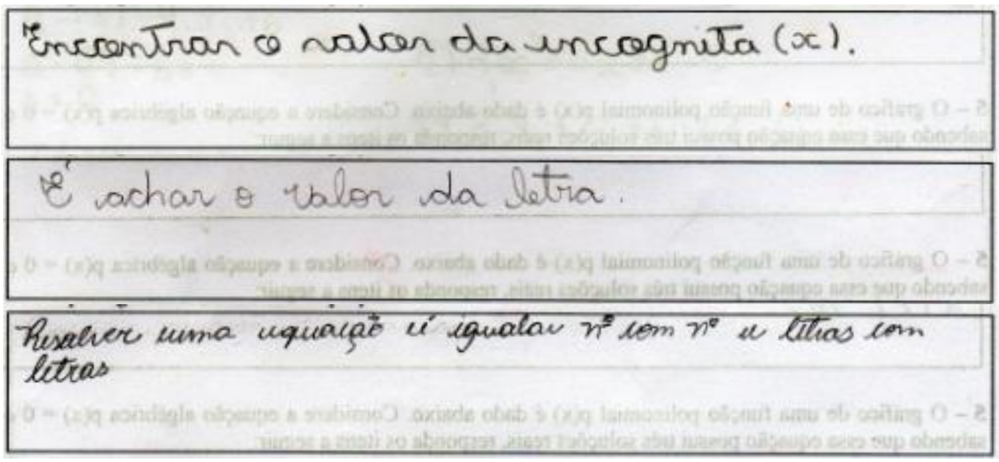


Figura 63: Respostas dadas à questão 2 da avaliação final

As respostas I e II mostram que os alunos sabem o significado de resolver uma equação. Já a resposta III mostra que o aluno ainda não sabe realmente o que é resolver uma equação. Ele descreve aproximadamente o método de se resolver equações do 1º grau (muitos professores, ao ensinar esse tipo de equação, sempre utilizam a frase: “número com letras de um lado do sinal de igual e números sem letras do outro...”, o que provavelmente tenha gerado essa confusão no aluno.

A terceira questão contemplava duas habilidades diferentes em dois itens, com o primeiro com o intuito de verificar se o aluno compreende que as interseções de um gráfico de uma função polinomial $p(x)$ com o eixo das abscissas, representando as soluções reais da equação $p(x) = 0$. O segundo item propiciava a verificação da multiplicidade de uma raiz. A análise desse exercício encontra-se na tabela 14.

Exercício 3 (a)	**Número de alunos**	**Porcentagem**
Resposta correta	55	67%
Resposta incorreta	2	2%
Questão em branco	25	31%
Exercício 3 (b)	**Número de alunos**	**Porcentagem**
Resposta correta	25	30%
Resposta incorreta	27	33%
Questão em branco	30	37%

Tabela 14: Tabulação das respostas dadas à questão 3

A primeira parte foi bem compreendia pelos alunos, uma vez que quase 70% dos alunos responderam da forma correta. Apenas dois alunos responderam de forma incorreta e o restante deixou a questão sem resposta.

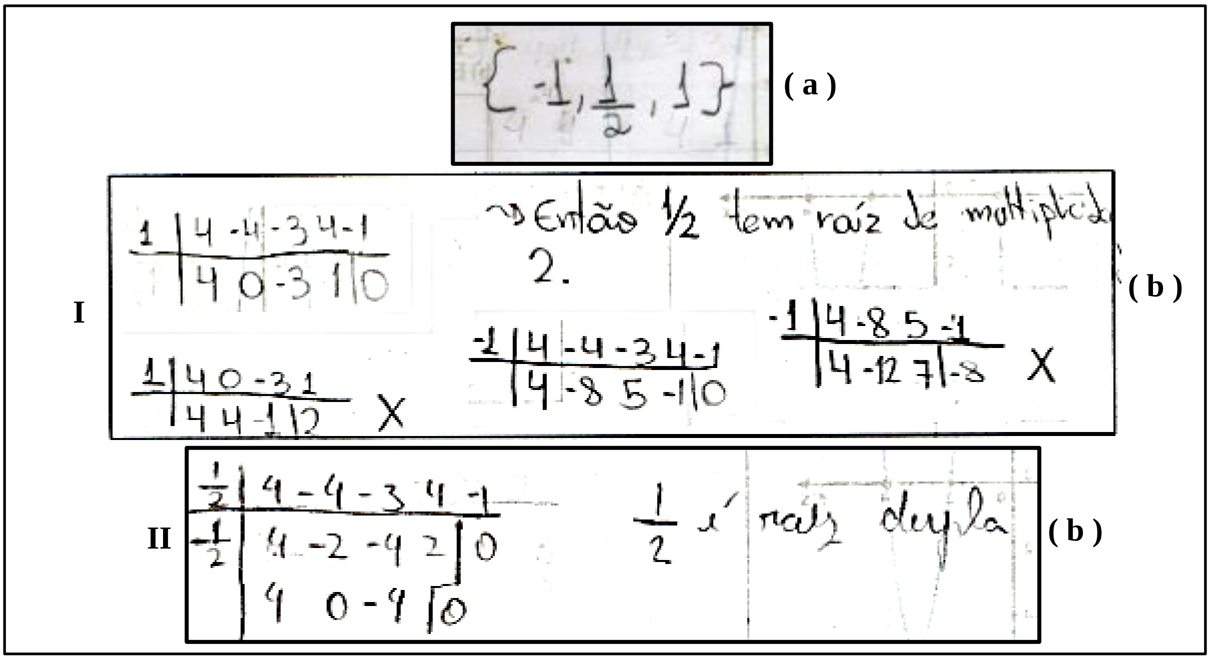


Figura 64: Respostas dadas à questão 3 da avaliação final

Na segunda parte da questão, os alunos tiveram maior dificuldade e apenas 30% dos alunos responderam corretamente. Muitos dos que erraram, colocaram simplesmente 1 ou -1 como resposta, sem maiores justificativas. Os que acertaram, resolveram de duas formas, como mostra a figura acima. Na respostas analisadas, os alunos compreendem que se o resto da divisão de $p(x)$ por $x-a$ é zero, então a é raiz da equação $p(x)=0$. Na resposta I, o aluno mostra que 1 e a – 1 são raízes simples (pois a segunda divisão não foi exata) e na resposta II, o aluno mostra que as duas divisões por $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ são exatas, ambos mostrando que $\frac{1}{2}$ é raiz dupla da equação. Essa segunda parte da questão exigia conhecimentos sobre a análise da multiplicidade das raízes de uma equação, mostrando que a maioria dos alunos não compreendeu o conteúdo, uma vez que 70% respondeu de forma incorreta ou deixou a questão sem resposta. Essa análise já fornece indícios para os resultados dos próximos exercícios, já que a maioria deles vai exigir que tal assunto seja conhecido, pois é necessário para a resolução de algumas equações de grau superior a 2.

A quarta questão solicitava a solução de uma equação do 5º grau, conhecida uma de suas raízes de multiplicidade 3. Os alunos teriam que utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini três vezes, recaindo em uma equação quadrática $(x-2).(x-2).(x-2).(x^2+3x-4)=0$ e resolvendo-a encontravam a solução $S=\{-4, 1, 2\}$.

Exercício 4	**Número de alunos**	**Porcentagem**
Resposta correta	19	23%
Resposta parcialmente correta: não encontrou todas as raízes	14	17%
Resposta incorreta	18	22%
Questão em branco	31	38%

Tabela 15: Tabulação das respostas dadas à questão 4

Poucos alunos responderam essa questão corretamente e quase o mesmo número respondeu a questão de forma parcial, não encontrando todas as raízes. Mesmo o resultado sendo baixo, podemos analisar que 40% dos alunos ou acertaram ou forneceram parcialmente a resposta, o que está bem acima dos resultados apresentados na avaliação diagnóstica, uma vez que nenhum aluno resolveu as equações de grau superior a 2. Os que responderam de forma incorreta, erraram em cálculos no dispositivo de Briot-Ruffini e quase a mesma porcentagem de alunos que deixou essa questão sem resposta também deixou em branco a segunda parte da questão anterior, pois ambas utilizavam conhecimentos sobre a multiplicidade de raízes.

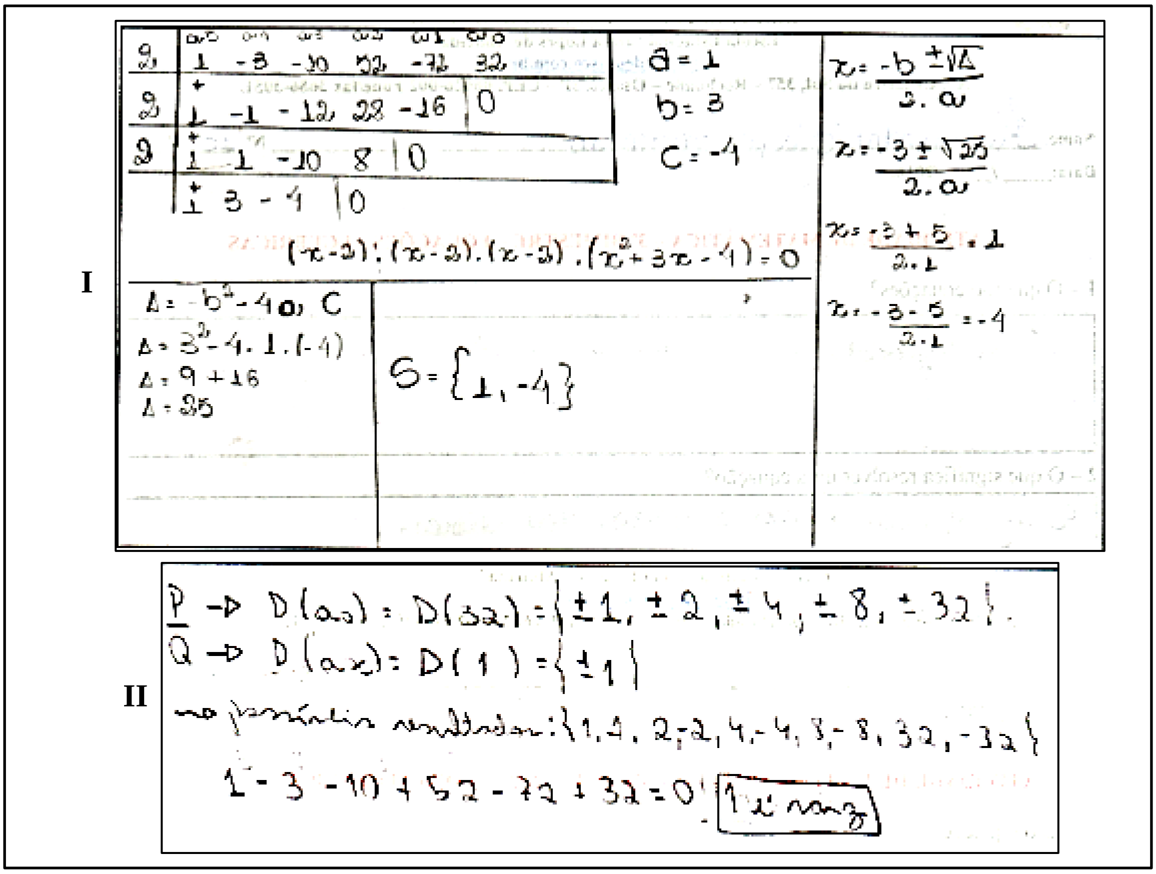


Figura 65: Respostas dadas à questão 4 da avaliação final

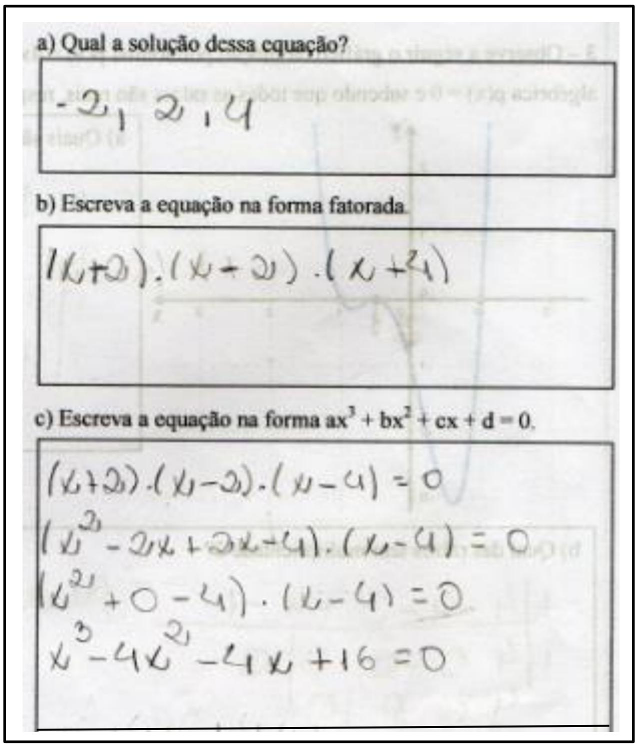
Podemos analisar duas repostas dadas ao exercício 4 na figura acima. O aluno da resposta I utiliza corretamente o dispositivo de Briot-Ruffini, diminuindo o grau da equação, demonstrando que também sabe como expressar essa equação na forma fatorada e resolve a equação quadrática corretamente, pois encontra as outras duas raízes da equação. Porém, no conjunto solução, esquece-se de citar o 2 como raiz. Já a resposta II mostra que o aluno utilizou o teorema das raízes racionais corretamente e mesmo se esquecendo que ± 16 também são divisores de 32, encontra o 1 como raiz. Se tivesse realizado os demais testes, verificaria que o – 4 também seria raiz da equação em análise.

O quinto exercício foi dividido em três partes. A primeira parte continha a mesma habilidade solicitada no primeiro item da terceira questão (verificar se o aluno compreende que as interseções de um gráfico de uma função polinomial $p(x)$ com o eixo das abscissas representam as soluções reais da equação $p(x)=0$). A segunda parte solicitava expressar a equação na forma fatorada e a última parte requer do aluno expressar a equação na forma canônica. A tabela 16 mostra como foi o desempenho dos alunos nessa questão:

Exercício 5 (a)	**Número de alunos**	**Porcentagem**
Resposta correta	41	50%
Resposta incorreta	2	2%
Questão em branco	39	48%
Exercício 5 (b)	**Número de alunos**	**Porcentagem**
Resposta correta	12	15%
Resposta parcialmente correta	8	10%
Resposta incorreta	6	7%
Questão em branco	56	68%
Exercício 5 (c)	**Número de alunos**	**Porcentagem**
Resposta correta	8	10%
Resposta parcialmente correta	2	2%
Resposta incorreta	14	17%
Questão em branco	58	71%

Tabela 16: Tabulação das respostas dadas à questão 5

Embora o item "a" tivesse a mesma habilidade que a primeira parte da questão 3, houve um menor número de respostas corretas nessa questão (diferença de 17%), aumentando, quase proporcionalmente, o número dos alunos que deixaram essa questão sem resposta. Talvez por falta de atenção ou de leitura, alguns não perceberam que se tratava exatamente da mesma habilidade. Para responder o segundo item, era necessário conhecer a resposta do item anterior, já que, para escrever a equação na forma fatorada era preciso conhecer-se suas raízes. Dos 50% que acertaram o primeiro item, somente 15% acertaram a segunda parte do exercício e 10% acertaram de forma parcial, esquecendo-se apenas de igualar o primeiro membro a zero, conforme podemos ver na figura 66. O terceiro item requer conhecimento sobre as relações de Girard ou de multiplicação de polinômios, além de ter resolvido a primeira parte do exercício corretamente. Todos os alunos que acertaram essa terceira parte, o fizeram por meio do produto entre os três binômios, sendo que alguns deles erraram os sinais de alguns coeficientes por erros nos cálculos. Como um item estava ligado ao outro, era esperado uma queda nas respostas corretas, porém o número de alunos que a resolveu corretamente foi bem abaixo do esperado, visto que esse conteúdo fora amplamente trabalhado em sala de aula em diversos momentos. A articulação entre os conteúdos por parte dos alunos é algo que deve ser mais trabalhado, pois muitos deles não percebem essa articulação, necessitando de uma intervenção maior dos docentes nesse quesito.


a) Qual a solução dessa equação?

$-2, 2, 4$

b) Escreva a equação na forma fatorada.

$(x+2).(x+2).(x+4)$

c) Escreva a equação na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

$(x+2).(x-2).(x-4) = 0$

$(x^2 - 2x + 2x - 4).(x-4) = 0$

$(x^2 + 0 - 4).(x-4) = 0$

$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

Figura 66: Respostas dadas à questão 5 da avaliação final

O sexto e último exercício analisava as técnicas de resolução das equações algébricas de graus variados, trazendo seis equações para os alunos resolverem. Esse mesmo exercício foi contemplado na avaliação diagnóstica (com equações diferentes) e faremos uma comparação direta entre os resultados de ambas as atividades. A tabela 17 trata de apresentar os resultados desse último exercício.

Exercício 6 (a)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	30	37%
Resposta parcialmente correta	0	0%
Resposta incorreta	6	7%
Questão em branco	46	56%

Exercício 6 (b)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	27	33%
Resposta parcialmente correta	5	6%
Resposta incorreta	6	7%
Questão em branco	44	54%

Tabela 17: Tabulação das respostas dadas à questão 6 (a – b)

O primeiro item trazia uma equação do 1º grau e o segundo, do 2º grau. Ainda que as resoluções dessas equações tivessem sido retomadas e revisadas logo após a aplicação da avaliação diagnóstica inicial, poucos alunos as resolveram corretamente, embora houvesse um aumento na porcentagem de alunos que acertou esses dois primeiros itens (5% na equação do 1º grau e 27% na equação do 2º). Ainda que constatado um progresso na aprendizagem, tal avanço é extremamente pequeno, considerando que se trata de um assunto estudado desde o ensino fundamental.

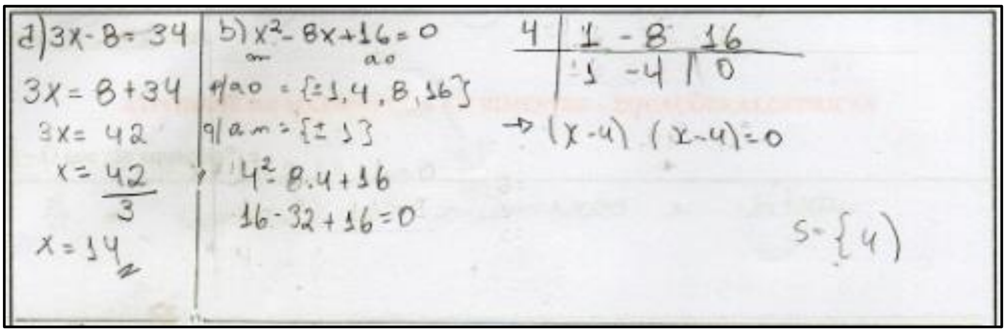


Figura 67: Respostas dadas à questão 6 (a – b) da avaliação final

A figura 67 mostra a resolução de um aluno para as duas primeiras equações. A equação do 1º grau fora resolvida corretamente e a resolução da equação do 2º grau foi feita de forma interessante: o aluno utilizou o teorema das raízes racionais e encontrou as possíveis soluções racionais da equação (mesmo tendo esquecendo os números 2 e – 2 como os divisores de 16). Testando as possíveis soluções, encontrou o 4 como uma das raízes e utilizou o dispositivo de Briot-Ruffini para reduzir para uma equação do primeiro grau ($x-4=0$), encontrando a mesma raiz. Como o 4 possuía multiplicidade 2, escreveu ainda a equação na forma fatorada $(x-4).(x-4)=0$ dando, por fim a solução da equação $S=\{4\}$. Os demais alunos que responderam corretamente, o fizeram por meio da fórmula resolutiva das equações do 2º grau.

O terceiro item trazia uma equação algébrica do 3º grau, que tinha como solução a raiz simples 2 e a raiz a – 1 de multiplicidade 2, todas raízes racionais inteiras. Apenas 10% dos alunos responderam corretamente essa questão e 6% encontrou apenas uma raiz, resolvendo-a parcialmente. Na avaliação diagnóstica, nenhum aluno resolveu equações de grau superior a 2, uma vez que equações desse tipo não haviam sido estudadas em anos anteriores. Porém, esperava-se que, sabendo o que era resolver uma equação, naquele momento, testassem alguns valores para ver se encontravam alguma raiz, o que não ocorreu. O número de alunos que acertou esse item foi o mesmo dos que erraram, no qual cometeram erros nos cálculos operatórios. Em 74% dos alunos foi constatado ausência de resposta, conforme podemos verificar na tabela 18.

Exercício 6 (c)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	8	10%
Resposta parcialmente correta	5	6%
Resposta incorreta	8	10%
Questão em branco	61	74%

Tabela 18: Tabulação das respostas dadas à questão 6 (c)

Os alunos que acertaram parcialmente a questão, encontraram possíveis soluções racionais para a equação em análise e após testar algumas delas, acharam apenas uma de suas raízes, conforme mostra a resposta I. A resposta II mostra a solução correta, pois o aluno reduziu o grau da equação ao encontrar uma de suas raízes, detectou uma equação quadrática e iniciou sua solução com a utilização da fórmula resolutiva, resultando no discriminante igual a zero, parando por aí sua resolução, provavelmente lembrando que quando o discriminante de uma equação do 2º grau é zero, a equação possui duas raízes idênticas, e chegou a solução correta ($S=\{2,-1\}$).

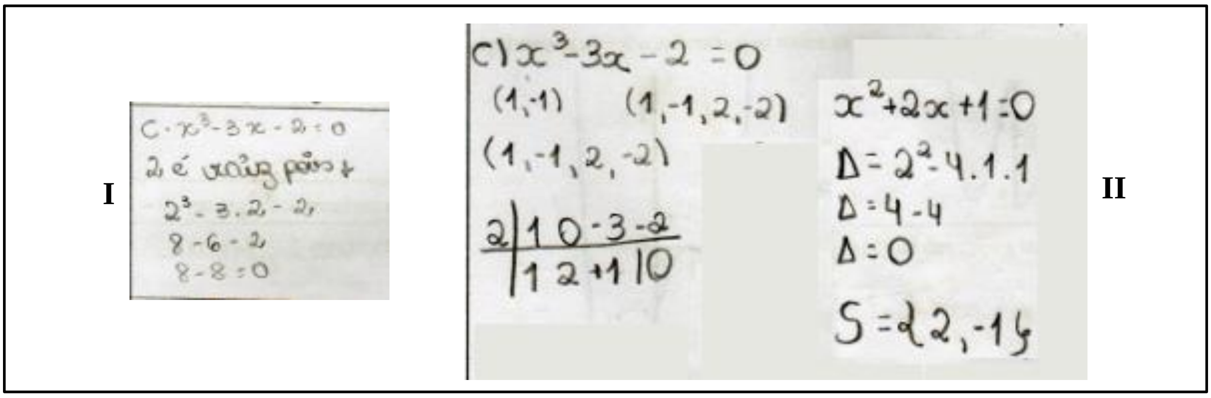


Figura 68: Respostas dadas à questão 6 (c) da avaliação final

O quarto item também contemplava uma equação cúbica, com três raízes reais, porém somente uma delas racional. Apenas três alunos resolveram corretamente e cinco resolveram de forma parcial, pois pararam sua resolução ao chegar em um discriminante que não era um quadrado perfeito (não possuía raiz quadrada inteira). Os que responderam de forma incorreta, erraram nos cálculos operatórios. Era de se esperar que menos alunos acertassem esse item comparado ao anterior, uma vez que nem todas as raízes eram racionais, porém é preocupante que 82% dos alunos tenham deixado esse item em branco, com ausência total de resposta, principalmente por essa equação constar como exercício do Anexo IV, discutido e corrigido em sala.

Exercício 6 (d)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	3	4%
Resposta parcialmente correta	5	6%
Resposta incorreta	7	8%
Questão em branco	67	82%

Tabela 19: Tabulação das respostas dadas à questão 6 (d)

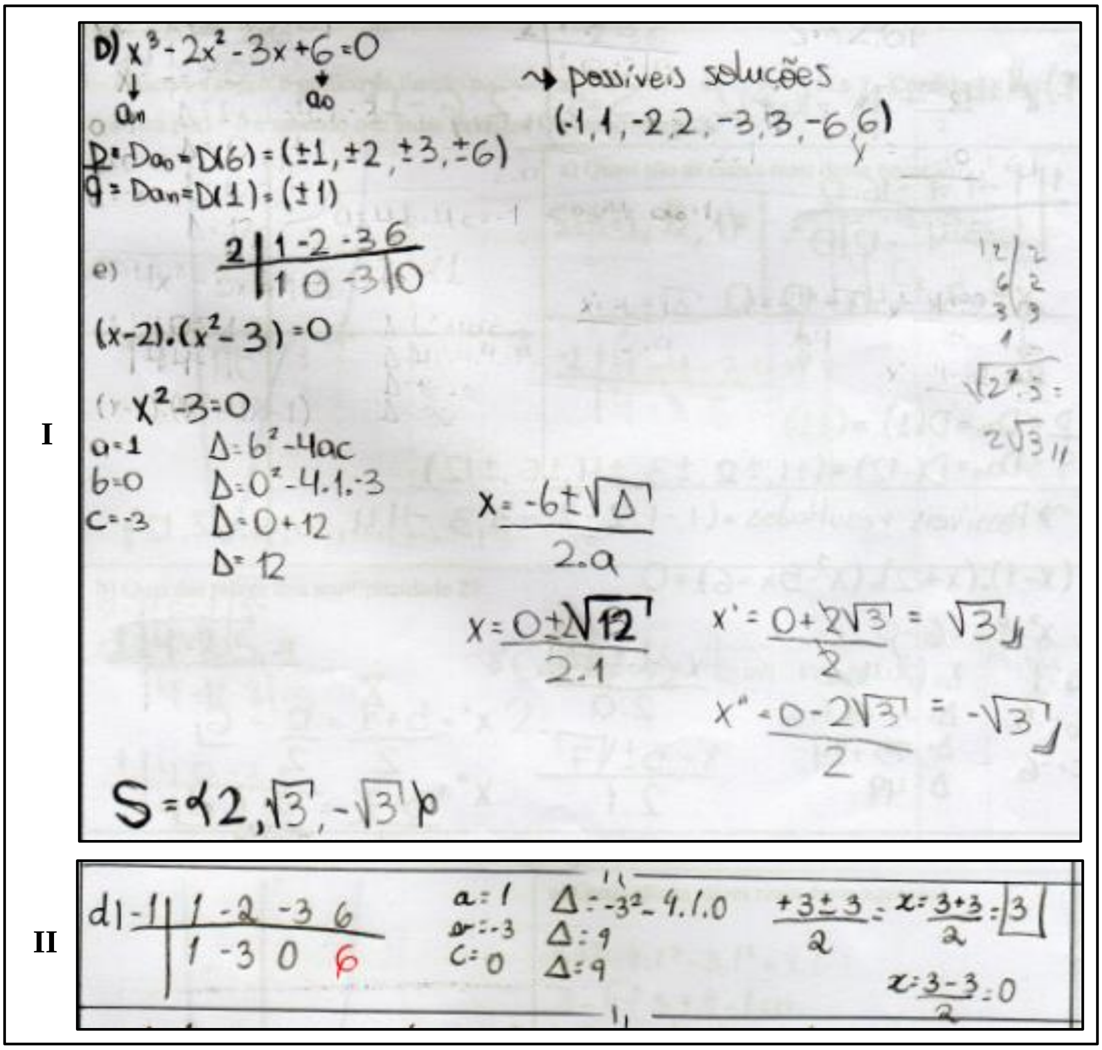


Figura 69: Respostas dadas à questão 6 (d) da avaliação final

Na resposta I, o aluno percorre todas as etapas para resolver a equação corretamente: utiliza o teorema das raízes racionais, encontrando as possíveis soluções racionais da equação, diminui o grau da equação, recaindo em uma equação quadrática e resolve a equação do 2º grau por meio da fórmula resolutiva. Mesmo encontrando um discrimintante cuja raiz não é exata, continua a resolução, simplificando o radical e chegando à solução final, encontrando mais duas raízes irracionais. A resposta II mostra que o aluno se confundiu ao utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini, encontrando, incorretamente a raiz – 1 e, com isso, mais duas raízes que não fazem parte do conjunto solução da equação em análise.

O quinto item trazia também uma equação do 3º grau, com três raízes reais, uma racional e duas irracionais e embora a resolução seja semelhante à equação anterior, apenas um aluno a resolveu de forma correta. A dificuldade mais uma vez recaiu no fato do discriminante dar um número que não possuía uma raiz quadrada exata. Os alunos que não resolveram a equação anterior também a deixaram sem resposta, como indicado na tabela 20.

Exercício 6 (e)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	1	1%
Resposta parcialmente correta	5	6%
Resposta incorreta	8	10%
Questão em branco	68	83%

Tabela 20: Tabulação das respostas dadas à questão 6 (e)

Analisemos a figura 70, que nos traz três respostas dadas a essa equação.

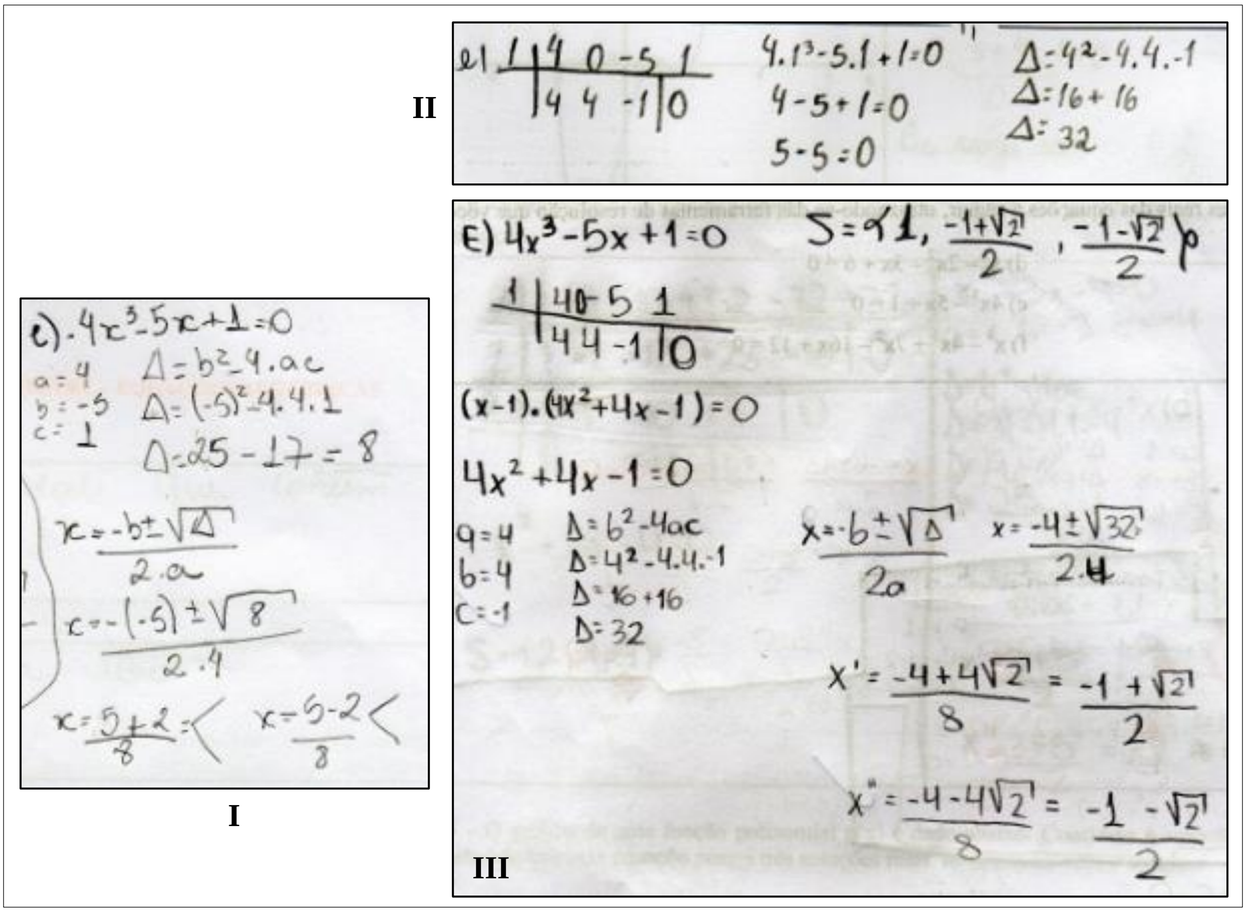


Figura 70: Respostas dadas à questão 6 (e) da avaliação final

A resposta I mostra que o aluno tentou utilizar a fórmula resolutiva das equações do 2º grau para resolver uma equação cúbica. Talvez, por desatenção tenha se confundido quanto ao grau da equação. A resposta II mostra que o aluno encontrou uma raiz racional da equação e, ao reduzir o grau da equação cúbica para uma quadrática, começou a resolvê-la e parou ao encontrar o discriminante 32 possivelmente por não saber continuar, uma vez que esse número não possuía raiz exata. A resposta III mostra que o aluno sabe como prosseguir quando recai em discriminantes que não são quadrados perfeitos e indica as outras duas raízes irracionais encontradas por ele, pertencentes ao conjunto solução da equação em questão.

O último item trazia uma equação do 4º grau, na qual duas raízes eram reais e duas complexas. Como a análise das raízes complexas ainda não havia sido discutida, esperava-se que ao menos encontrassem as duas raízes reais contidas na solução dessa equação. Com a utilização do teorema das raízes racionais encontrariam as possíveis raízes e testando-as, encontrariam as duas soluções reais. Nenhum aluno acertou esse item na íntegra e apenas 11% tentou respondê-la, alguns encontrando somente uma raiz real e por meio de erros operatórios não encontraram a segunda raiz.

Exercício 6 (f)	Número de alunos	Porcentagem
Resposta correta	0	0%
Resposta parcialmente correta	5	6%
Resposta incorreta	4	5%
Questão em branco	73	89%

Tabela 21: Tabulação das respostas dadas à Questão 6 (f)

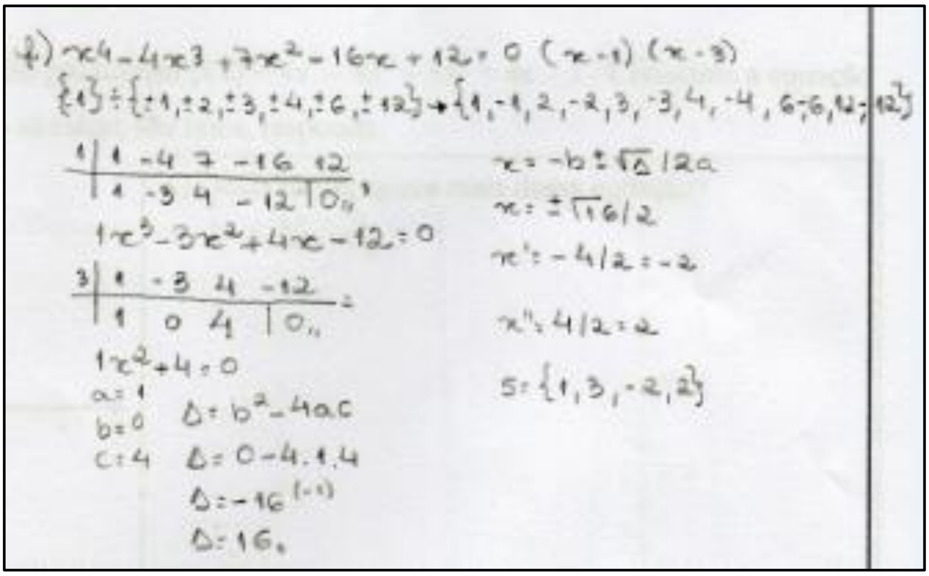


Figura 71: Respostas dadas à questão 6 (f) da avaliação final

A figura 71 mostra a resposta de um aluno dada a essa questão. Com o teorema das raízes racionais, encontra corretamente as possíveis soluções racionais da equação. Testando as possíveis soluções, encontra as duas raízes reais, 1 e 3 e, com isso, reduz a equação para uma quadrática, cometendo um erro ao encontrar o discriminante negativo. Ele simplesmente multiplica o discriminante por -1 e segue a resolução normalmente, encontrando, de forma incorreta, mais duas raízes reais.

A resolução das equações de grau superior a 2 deixou a desejar, já que menos de 20% dos alunos tentaram resolvê-las. Comparado o resultado dessa avaliação com a diagnóstica, percebe-se um avanço na aprendizagem, principalmente na parte conceitual, pois a maioria dos alunos sabem agora o que são e o que é resolver uma equação. Porém, as formas de resolução das equações, embora resolvida por mais alunos, não foram abstraídas com o sucesso esperado.

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentou um breve histórico das equações ao longo dos anos, assim como discutiu formas de se resolver equações de graus variados, passando pelas descobertas das fórmulas resolutivas de equações até o 4º grau, além de discutir meios de se resolver equações de grau superior a 4.

Realizei uma análise dos conhecimentos adquiridos pelos alunos da terceira série do ensino médio noturno, na escola em que leciono, referente às equações, por meio de uma atividade diagnóstica, o que me levou a um estudo de caso. Analisando os resultados obtidos nessa primeira avaliação, elaborei uma sequência didática, no intuito de diminuir as defasagens detectadas e dar continuidade ao estudo das equações, de acordo com o que se sugere no currículo oficial do ensino estadual paulista.

Analisei, também, os materiais didáticos disponibilizados em relação a abordagem do tema equações ao longo do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e do Ensino Médio (1ª a 3ª série). Observei que estes materiais se apoiam em situações de aprendizagens e sobre elas se desenvolvem os conteúdos, sempre focados em situações práticas e de aplicações cotidianas. Porém, algumas situações se encontram em um nível de dificuldade do qual a maioria dos alunos não consegue acompanhar, pois muitos apresentam enorme defasagem oriundas dos anos anteriores, não conseguindo, assim, resolver as situações propostas pelos materiais didáticos.

Logo no primeiro momento da aplicação do trabalho em sala de aula, constatei uma lacuna de aprendizado na parte conceitual do assunto, pois conforme verificado na atividade diagnóstica, apenas 1% dos alunos definiram equação de forma correta e outros 21% deram respostas parcialmente corretas. Como 78% dos alunos erraram a questão, precisei retomar o conceito de equação para que houvesse a compreensão por parte dos alunos e assim ampliarmos os estudos.

Quanto ao entendimento do que era resolver uma equação, apenas 10% dos alunos responderam corretamente assim como, aproximadamente, 30% soube resolver uma equação do 1º grau e menos de 10% dos alunos lembraram como se resolvia uma equação do 2º grau.

Embora tenham estudado equações desde o sétimo ano do ensino fundamental, essa atividade mostrou que os alunos não se apropriaram dos conteúdos trabalhados em anos anteriores.

Após toda a aplicação da sequência didática proposta, realizei uma última avaliação de verificação dos conteúdos desenvolvidos e o resultado não fora o esperado. Mesmo constatando um visível avanço em todos os quesitos, principalmente no entendimento conceitual e teórico das equações, as formas de resolução das equações ainda deixaram a desejar.

Alguns alunos demonstraram total entendimento do assunto, percorrendo todos os caminhos para resolver uma equação, porém a grande maioria não conseguiu se apropriar do conhecimento e com isso não conseguiram aplicá-los nas atividades.

No que se refere aos estudos realizados com o auxílio software Geogebra houve grande interesse por parte dos alunos, pois não estão acostumados com a utilização de recursos tecnológicos nas aulas.

Inovar e diversificar nossas aulas auxilia na motivação dos alunos e aliar a tecnologia à educação é necessário para melhorar a participação do aluno atual que domina essa área do conhecimento. É notório que as tecnologias ajudam a tornar as aulas mais dinâmicas e podem servir de motivação aos alunos, mas a utilização desse recurso sozinho não é garantia real de aprendizado. Para se apropriar do conhecimento é necessário “colocar a mão na massa”, pois só se aprende matemática fazendo matemática, ou seja, entender conceitos teóricos, praticar com muitos exercícios para assim, dominar as técnicas de cálculos e operações para enfim poder resolver situações-problema.

Estimulados a levantar hipóteses sobre as dificuldades em se aprender Matemática, mais da metade dos alunos entrevistados disseram que não se empenham no estudo da disciplina, possuem dificuldades nas questões que envolvem raciocínio e interpretação e que o excesso de ausência às aulas os prejudicam, pois acabam não acompanhando o conteúdo trabalhado e por fim, embora levantado por apenas um aluno, atribuiu-se as dificuldades em se aprender Matemática à falta de didática e paciência em ensinar de alguns professores.

É importante salientar que os alunos do ensino médio são bastante autocríticos e analisam bem os problemas condizentes ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, porém não se mostram empenhados em mudar a atual situação. A maioria apresenta muita dificuldade de entendimento da disciplina, mas não procuram subsídios que lhes ajudem a suprir suas defasagens. Hoje há disponíveis na internet materiais excelentes de estudo, inclusive vídeos ensinando qualquer conteúdo do qual se tenha interesse. No entanto, a falta de interesse e de estudo resultam fortemente no fracasso do ensino da Matemática em âmbito nacional, sendo ao meu ver, o principal motivo da aversão que a maioria dos alunos possuem à disciplina. Se houvesse maior empenho e interesse em aprender, o quadro certamente seria outro.

O papel do professor de Matemática como mediador do conhecimento é primordial para a melhora da aprendizagem, bem como sua qualificação profissional. Sabemos que muitos professores apresentam lacunas em sua formação e infelizmente, por falta de tempo e necessidade de, muitas vezes, trabalharem em dois ou mais turnos acabam deixando para segundo plano seu aperfeiçoamento profissional, o que acredito ser essencial para um bom desempenho. Nesse aspecto, o PROFMAT é um excelente aliado, pois oferece a nós professores, um curso de Mestrado de qualidade, com profissionais altamente qualificados em universidades conceituadas, fornecendo subsídios que melhorem nossa formação como profissional, preenchendo muitas lacunas deixadas pela graduação.

Certamente, a formação continuada do professor de Matemática não é suficiente para se garantir sucesso na aprendizagem dos alunos, mas de certo é necessária. Professores qualificados, pesquisadores e pensadores atuantes que buscam incessantemente por diversificar e melhorar diariamente suas aulas são peças chave na melhoria do ensino.

Por outro lado, o sistema educacional estadual paulista também deixa muito a desejar, pois muitas vezes faltam condições mínimas para um ensino de qualidade, com total falta de recursos e salas com um número excessivo de alunos, o que dificulta o trabalho do professor que não consegue dar um feedback adequado e individualizado, como é o ideal. A progressão continuada, utilizada muitas vezes como promoção automática também contribui para que um aluno avance para uma série posterior sem possuir as habilidades e competências necessárias para prosseguir com seus estudos.

Para que haja uma real melhora no ensino, deve haver empenho de todas as partes: do governo em oferecer condições para uma educação de qualidade, dos gestores referente ao apoio aos professores para que possam desenvolver seu trabalho da melhor forma possível, dos professores que devem sempre estar atentos às pesquisas educacionais e aos fatos atuais, procurando meios de tornar suas aulas mais dinâmicas e atrativas, dos alunos, que devem dedicar-se mais a seus estudos, procurando por si mesmos meios de diminuírem suas defasagens e dos responsáveis pelos alunos, que devem ser parceiros da escola em que os filhos estudam, acompanhando seus rendimentos e motivando-os constantemente para que entendam a real importância dos seus estudos.

Reitero, novamente, o papel do professor, peça fundamental do ensino, ficando aqui registrado o meu apreço e idolatria por aqueles que, embora em situações adversas e extremamente difíceis, encontram ânimo e forças para diariamente dividir seus conhecimentos com seus alunos e a esperança de que nunca percam esse dom, pois sempre irão existir “olhinhos admirados” e ouvidos atentos a seus “mestres” nos quais e se espelham muitas vezes. Quando os professores demonstram amor ao lecionar, marcam a vida de muitos alunos, sendo referências para o futuro de cada educando. O caminho para uma melhoria na educação é longo e cheio de obstáculos, porém cada avanço, mesmo que pequeno deve ser comemorado.

Utilizando parte da citação presente no início desse trabalho, devemos transformar o pouco em muito, dando um passo de cada vez e de certo, todos empenhados num propósito comum, poderemos mudar a realidade da Educação Pública e quem sabe um dia possa realmente ser ofertada com qualidade.

REFERÊNCIAS

[1] BERGAMINI, Cecília Whitaker. **Motivação nas organizações** – 6ª Edição – 2013. Editora Atlas.

[2] CASAROTO, Patricia. **Um estudo sobre equações polinomiais dedicado ao ensino básico** – Dissertação (Mestrado) – UNESP – Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=&titulo=&aluno=patricia+casaroto>. Acesso em: jun. 2016.

[3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações** – 2ª edição – São Paulo. Editora Ática. 2013.

[4] GARBI, Gilberto G**. O romance das equações algébricas** – 4ª Edição. Editora Livraria da Física, 2010.

[5] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e equações algébricas** – Coleção PROFMAT – SBM – Rio de Janeiro, 2012.

[6] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias** / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo, SE, 2012.

[7] PERUZZO, Jucimar. **Evolução dos métodos de resolução de equações algébricas** – 1ª Edição – Irani (SC): 2013.

[8] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Documento orientador SEE/CGEB: Planejamento 2016**; Coordenação: Ghisleine Trigo Silveira.

[9] PCN+ Ensino Médio – **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemátca e suas tecnologias.** MEC, 2002.

[10] MOURA, Anna Regina Lanner de; SOUSA, Maria do Carmo de. 2005. **O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes.** Zetetike, v. 13, n. 24, p. 11 – 45.

[11] LAUAND, Luiz Jean – A álgebra como ciência árabe. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/reo/article/view/90644>. Acesso em jul. 2016.

[12] FREITAS, Carlos Wagner Almeida – **Equações Diofantinas** – Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará – Fortaleza, 2015. Disponível em: < http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/12990/1/2015_dis_cwafreitas.pdf>. Acesso em: jul. 2016.

[13] RODRIGUES, Leandro Albino Mosca – **Resolução de equações algébricas** – Dissertação (Mestrado) – UFABC – Santo André, 2014. Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=&titulo=&aluno=leandro+albino+mosca>. Acesso em: jul. 2016.

[14] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação de Osasco. **Plano de Gestão (2015 – 2018)** – E.E. "Júlia Lopes de Almeida"

[15] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/curriculo>. Acesso em: ago. 2016.

[16] FERNANDES, Carlos. **Só Biografias**. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/>. Acesso em: maio. 2016.

[17] Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: < https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm> Acesso em: jun. 2016.

[18] Programa de qualidade da escola. **O que é Idesp?** Disponível em: <http://idesp.edunet.sp.gov.br/o_que_e.asp> . Acesso em jul. 2016.

ANEXOS

ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DO ESTADO DE EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO REGIÃO OSASCO
Escola Estadual "Julia Lopes de Almeida"
julia@deosasco.com.br
Av. Cruzeiro do Sul, 357 – Rochdalle – Osasco/SP – CEP. 06026-002 Fone/fax 3686-3051.
Matemática – Prof. Daniel – 3ª séries D, E e F

ANEXO I

Nome: ____ Nº ______ 3ª _______

Data: _____/06/2016.

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA – EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

1 – O que são equações?

2 – Que tipos de equações você conhece? Dê exemplos.

3 – O que significa resolver uma equação?

4 – Em quais pontos o gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ intercepta o eixo das abscissas? Como encontramos tais pontos?

5 – Em sua opinião, quais as maiores dificuldades para aprender Matemática? Por que a maioria dos alunos não aprende?

6 – Encontre a solução das equações a seguir, utilizando-se das ferramentas de resolução que você conhece.

a) $2x - 5 = 35$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 + 4x + 5 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $y^3 + 3y + 6 = 0$

f) $y^3 - 3y - 2 = 0$

g) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

h) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

i) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

j) $3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 = 0$

ANEXO II

Dispositivo de Briot – Ruffini

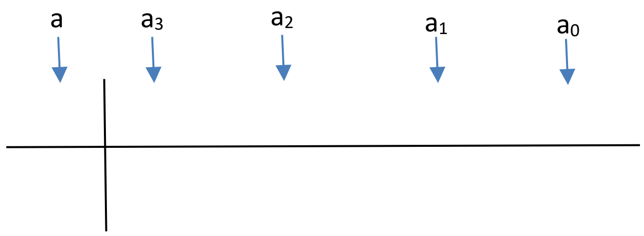
Existe uma maneira prática de efetuarmos a divisão de $p(x)$ por um polinômio do 1º grau da forma $x - a$, com $a \in \Re$.

A fim de montar o dispositivo, o polinômio $p(x)$ deve estar ordenado segundo as potências decrescentes de x e expresso com todos os seus termos, inclusive aqueles que têm coeficiente nulo.

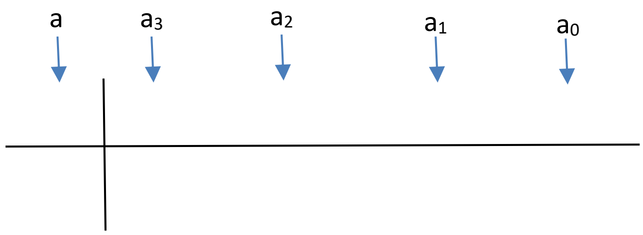
Veja um exemplo de como ele funciona:

Faça a divisão de $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 3$ por $d(x) = x - 3$

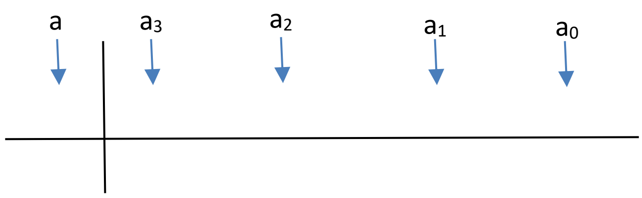
1 – Montamos o dispositivo colocando primeiramente a raiz do divisor e em seguida os coeficientes de $p(x)$:



2 – Repetimos o a_3 na linha inferior:



3 – Multiplicamos a raiz do divisor por esse número e, em seguida, somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de $p(x)$, colocando o resultado abaixo desse coeficiente. Multiplicamos a raiz do divisor pelo resultado que acabamos de resolver, somamos o produto com o próximo coeficiente de $p(x)$ colocando esse novo resultado abaixo desse coeficiente, e assim sucessivamente.



4 – O último resultado é o resto da divisão e os demais são os coeficientes do quociente, dispostos em ordem decrescente das potências de x.

a	a_3	a_2	a_1	a_0
3	2	– 4	1	– 3
	2	2	7	18
	a_2	a_1	a_0	resto

Portanto: $p(x):d(x)=q(x)=2x^2+2x+7$ e $r(x)=18$.

Verifiquem que $r(x)=p(a)$

Encontrem $p(3)$ e comparem com o resto da divisão!

Exercícios

1 – Faça as divisões abaixo utilizando o dispositivo de Briot – Ruffini, encontrando q(x) e r(x).

a) $p(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+6$ e $d(x)=x-2$

b) $p(x)=2x^4+4x^3-7x^2+12$ e $d(x)=x-1$

c) $p(x)=2x^5-x^3-4x+6$ e $d(x)=x+2$

d) $p(x)=2x^4-3x^3+x^2-2x+1$ e $d(x)=x-3$

f) $p(x)=5x^5-x+1$ e $d(x)=x+1$

2 – Verifiquem, nos itens a a f do exercício anterior, que $r(x)=p(a)$.

ANEXO III

TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

O Teorema das Raízes Racionais é indicado para identificar todas as raízes de uma equação polinomial, desde que elas existam.

Considere a equação polinomial a seguir em que todos os coeficientes a_n são inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

O Teorema das Raízes Racionais garante que, se essa equação admite o número racional $\frac{p}{q}$ como raiz (com p $\in \mathbb{Z}$, q $\in \mathbb{Z}^*$ e mdc(p, q) = 1), então a_0 é divisível por p e a_n é divisível por q.

Observações:

1) O teorema das raízes racionais não garante que a equação polinomial tenha raízes racionais, mas caso elas existam, o teorema permite identificar todas as raízes racionais da equação.

2) Se $a_n = 1$ e os outros coeficientes são todos inteiros, a equação possui apenas raízes inteiras.

3) Se $q = 1$ e há raízes racionais, estas são inteiras e divisoras de a_0.

APLICAÇÃO DO TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

Vamos utilizar o teorema para encontrar todas as raízes da equação polinomial

$$\underbrace{2}_{a_n}x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + \underbrace{12}_{a_0} = 0.$$

Primeiramente, vamos identificar as possíveis raízes racionais dessa equação, isto é, as raízes da forma $\frac{p}{q}$.

De acordo com o teorema, a_0 é divisível por p; dessa forma, como a_0 = ____, então os possíveis valores de p são { ____, _____, _____, _____, _____, _____ }.

Analogamente, temos que a_n é divisível por q e $a_n =$ ____, então q pode ter os seguintes valores: { _____, _____ }. Sendo assim, dividindo os valores de p por q, obtemos os possíveis valores $\frac{p}{q}$ raízes da equação: { _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____ }.

Para confirmar se os valores que encontramos são realmente raízes da equação polinomial, vamos substituir cada valor no lugar do x da equação. Por meio do cálculo algébrico, se o polinômio resultar em zero, então o número substituído é, realmente, a raiz da equação.

VERIFIQUEM!

Portanto, as raízes da equação polinomial $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$ são { – 3, – 2, ½, 2}. Através do <u>teorema da decomposição de um polinômio</u>, poderíamos escrever essa equação como (x + 3).(x + 2).(x – ½).(x – 2) = 0.

ANEXO IV

Multiplicidade da raiz

Quando realizamos a decomposição de um polinômio $p(x)$ de grau $n > 0$ em um produto de n fatores do 1º grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos. Portanto, em uma equação algébrica de grau n, obtemos n raízes, das quais algumas podem ser idênticas. O número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a MULTIPLICIDADE da raiz.

Exemplos:

1 – Na equação $x^2 - 8x + 16 = 0 \leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \leftrightarrow (x-4).(x-4) = 0$, há dois fatores idênticos a $(x-4)$. Dizemos que 4 é **raiz dupla** ou de **multiplicidade 2**.

2 – Na equação $x^3 - 3x - 2 = 0 \leftrightarrow (x+1).(x+1).(x-2) = 0 \leftrightarrow (x+1)^2.(x-2) = 0$, há dois fatores idênticos a $(x+1)$ e um fator $(x-2)$. Dizemos que -1 é **raiz dupla** ou de **multiplicidade 2** e 2 é **raiz simples** ou de **multiplicidade 1**.

Exemplo: Qual a multiplicidade da raiz 2 na equação $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$?

Exercícios

1 – Resolva a equação $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$, sabendo que – 1 é raiz dupla.

2 – Na equação $(x-5)^2 . (x+3)^2 . (x-2)^5 = 0$, quais são as multiplicidades de suas raízes?

3– Resolva a equação polinomial $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3 = 0$, sabendo que – 1 é raiz tripla da equação.

4 – O número 3 é raiz dupla da equação $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$. Determine as outras raízes.

5 – Pesquise as soluções reais das equações abaixo:

a) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

c) $4x^3 - 5x + 1 = 0$

d) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

e) $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$

f) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DO ESTADO DE EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO REGIÃO OSASCO
Escola Estadual "Julia Lopes de Almeida"
julia@deosasco.com.br
Av. Cruzeiro do Sul, 357 – Rochdalle – Osasco/SP – CEP. 06026-002 Fone/fax 3686-3051.
Matemática – Prof. Daniel – 3ª séries D, E e F

ANEXO V

Nome:____ Nº______ 3ª _____

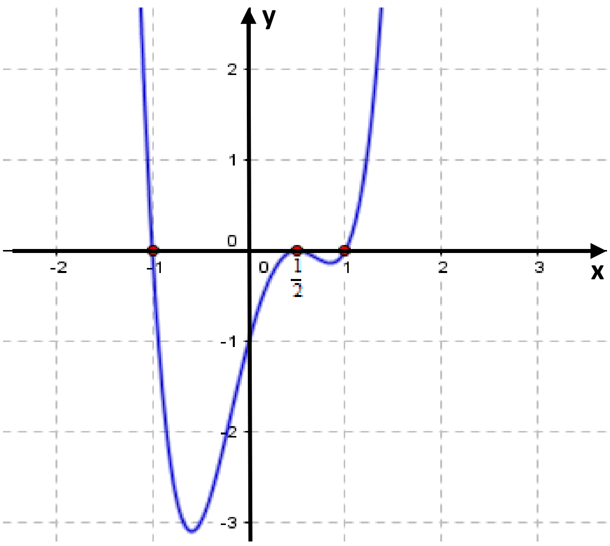
Data:_____ /_____ /2016.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA – 3º BIMESTRE – EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

1 – O que são equações?

2 – O que significa resolver uma equação?

3 – Observe a seguir o gráfico da função polinomial $p(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Considere a equação algébrica $p(x) = 0$ e sabendo que todas as raízes dessa equação são reais, responda:

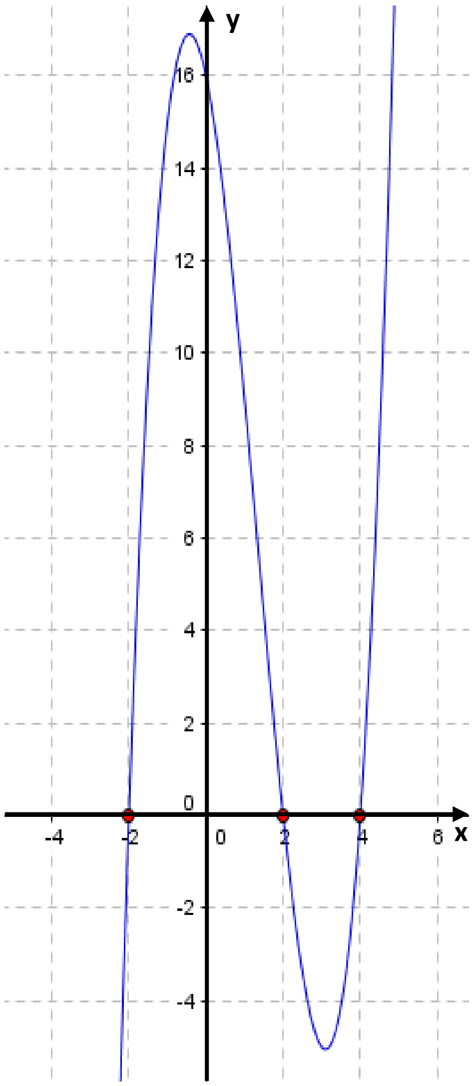


a) Quais são as raízes reais dessa equação?

b) Qual das raízes tem multiplicidade 2?

4 – Determine a solução da equação $x^5 - 3x^4 - 10x^3 + 52x^2 - 72x + 32 = 0$, sabendo que 2 é raiz tripla da equação.

5 – O gráfico de uma função polinomial p(x) é dado abaixo. Considere a equação algébrica $p(x) = 0$ e sabendo que essa equação possui três soluções reais, responda os itens a seguir:



a) Qual a solução dessa equação?

b) Escreva a equação na forma fatorada.

c) Escreva a equação na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

6 – Encontre as soluções reais das equações a seguir, utilizando-se das ferramentas de resolução que você conhece.

a) $3x - 8 = 34$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $x^3 - 3x - 2 = 0$

d) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$

e) $4x^3 - 5x + 1 = 0$

f) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0$