

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DIFERENTE DO CONCEITO DE
LIMITE

WARLISSON INÁCIO DE MIRANDA

Uberaba - Minas Gerais

JANEIRO DE 2017

UMA PROPOSTA DE ENSINO DIFERENTE DO CONCEITO DE LIMITE

WARLISSON INÁCIO DE MIRANDA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Molina da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoni

Uberaba - Minas Gerais

Janeiro de 2017

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

M646p Miranda, Warlisson Inácio de
Uma proposta de ensino diferente do conceito de Limite / Warlisson Inácio de Miranda. -- 2017.
94 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2017
Orientador: Prof. Dr. Flavio Molina da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni

1. Matemática ó Estudo e ensino. 2. Matemática ó Métodos gráficos. 3. Funções (Matemática). 4. Cálculo. I. Silva, Flavio Molina da. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51(07)

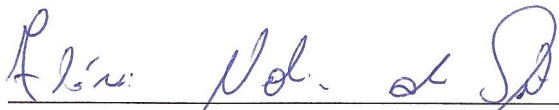
WARLISSON INÁCIO DE MIRANDA

Uma proposta de ensino diferente do conceito de limite

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

13 de Janeiro de 2017

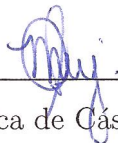
Banca avaliadora



Prof. Dr. Flávio Molina da Silva

Orientador

Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Profa. Ma. Daniele Lozano

Universidade Federal de São Carlos

*À minha mãe que sempre esteve ao meu lado
com muito amor, força e incentivo para
a realização e conclusão deste Mestrado.
A ela meus eternos agradecimentos.*

Agradecimentos

A Deus que, com a sua infinita misericórdia e amor, sempre esteve ao meu lado me ensinando o caminho que deveria seguir.

À minha esposa que sempre esteve do meu lado nos momentos mais difíceis desta trajetória que se findou no sucesso deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Flávio Molina da Silva, orientador desta dissertação, pela compreensão, sugestões e, acima de tudo, pela exigência a qual fez com que este trabalho fosse concluído com muito sucesso. Meus muitos e sinceros agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni, coorientador dessa dissertação, por todas as sugestões, exigências e orientações que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

A Capes, pelo apoio financeiro, por meio de bolsa de estudos.

Agradeço a todo o corpo docente do PROFMAT/UFTM, pelo carinho e paciência que tiveram comigo durante o transcorrer deste do curso.

A todos os meus amigos de curso que sempre estiveram presentes nesta caminhada.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão dessa monografia.

*quem sai à guerra precisa de orientação,
e com muitos conselheiros
se obtém a vitória.*

Pv. 24: 6

Resumo

O presente trabalho retrata uma forma diferenciada de abordar o conceito de limites e suas propriedades, tendo em vista que muitos alunos têm dificuldades para assimilar cada conceito e aplicá-los na resolução de exercícios ou em problemas práticos do dia-a-dia. Para que o objetivo deste trabalho fosse alcançado, utilizamos exemplos lúdicos e que estão presentes no nosso cotidiano com o intuito de facilitar a compreensão dos conceitos e das propriedades de limites e para auxiliar no entendimento de conceitos mais abstratos. A geometria foi uma ferramenta primordial neste cenário, pois existem conceitos que geometricamente são mais fáceis de serem compreendidos quando comparado com o uso da álgebra, por exemplo, o emprego de *épsilon* e *delta* na definição de limites. Mostramos também formas alternativas de abordar cada propriedade de limites sem fugir do rigor matemático e levando sempre a ideia de que o conceito de limite não deve ser memorizado, ou ainda, as técnicas de resolução de limites não são necessárias quando se compreende todos os termos e propriedades que estão associadas à definição.

Palavras-chave: funções, gráficos, limites, propriedades de limites.

Abstract

The present work presents a differentiated way of approaching the concept of limits and their properties, considering that many students have difficulties assimilating each concept and apply them in the resolution of exercises or practical problems of the day to day. For the purpose of this work to be achieved, we use playful examples that are present in our daily life in order to facilitate the understanding of the concepts and properties of boundaries and to aid in the understanding of more abstract concepts, geometry was a primordial tool in this scenario, since there are concepts that are geometrically easier to understand when compared to the use of algebra, for example, the use of epsilon and delta in the definition of limits. We also show alternative ways of approaching each boundary property without departing from mathematical rigor and always assuming that the boundary concept should not be memorized, or that limiting techniques are not necessary when one understands all terms and Properties that are associated with the setting.

Keywords: functions, graphs, limits, properties of limits.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
JUSTIFICATIVA	5
1 O CONCEITO DE LIMITES	11
1.1 A noção intuitiva de função	11
1.2 O sistema cartesiano ortogonal	13
1.3 A ideia intuitiva de limites	21
1.4 Um pouco de história do conceito limite	24
1.5 A ideia intuitiva de limites com funções contínuas	27
2 O LIMITE E A GEOMETRIA	35
2.1 <i>Épsilon e delta</i> com outro olhar	35
2.2 Primeiras propriedades de limites	45
2.3 Atividades sobre limites	49
2.3.1 Atividade 01	49
2.3.2 Atividade 02	50
2.4 Discussão das atividades propostas	51
3 PROPRIEDADES DE LIMITES	53
3.1 Limite da soma de duas funções	53
3.2 Limite de uma constante vezes uma função	61
3.3 Limite da diferença de duas funções	72
3.4 Atividade sobre propriedades de limites	73
CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
REFERÊNCIAS	78

Lista de Figuras

1	Função contínua	3
1.1	Representação <i>abelha</i> \times <i>categoria</i>	12
1.2	Representação da localização de cada abelha na colmeia	13
1.3	Unidade de medida	14
1.4	Eixo com as posições das abelhas	14
1.5	Eixo com as categorias das abelhas	15
1.6	Eixo com as posições das abelhas	15
1.7	Eixo horizontal e vertical com as posições das abelhas	16
1.8	Unidade de medida	16
1.9	Sistema cartesiano ortogonal	17
1.10	Representação das abelhas e suas funções	17
1.11	Número de abelhas após n horas	19
1.12	Número de abelhas após x horas	20
1.13	Abelhas em torno da rainha	21
1.14	Abelhas próximas à rainha	22
1.15	Abelhas em fila indiana em torno da abelha rainha	22
1.16	Relação entre as abelhas	23
1.17	Definição de limites com bolas abertas	23
1.18	Relação entre as abelhas em filas	24
1.19	Paradoxo de Zenão	25
1.20	Representação geométrica da sequência	26
1.21	Representação da convergência da sequência s_n	27
1.22	Gráfico de uma função discreta	28
1.23	Gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 1$	29
1.24	Comportamento f para valores menores do que 1	30
1.25	Comportamento f para valores maiores do que 1	31
1.26	Gráfico da função g	32
1.27	Construção do gráfico a partir do limite	33

2.1	Distância entre a rainha e o corpo estranho	36
2.2	Distância entre a rainha e as abelhas	37
2.3	Relação entre <i>delta</i> e <i>épsilon</i>	37
2.4	Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$	38
2.5	Valor de x tal que $f(x) = 3 + \epsilon$	40
2.6	Intervalos $(1 - \delta, 1 + \delta)$ e $(3 - \epsilon; 3 + \epsilon)$	41
2.7	Gráfico da função $f(x) = x^2$	42
2.8	Gráfico da função $f(x) = x^2$ com os intervalos	43
2.9	Intervalo em torno de $x_0 = 2$	44
2.10	Gráfico da função $g(x) = x$ com vizinhança em torno de $g(x_0) = x_0$	45
2.11	Gráfico da função $g(x) = x$ com vizinhança em torno de $g(x_0) = x_0$ e $\delta < \epsilon$	46
2.12	Gráfico da função $g(x) = x$ com vizinhança em torno de $h(x_0) = k$	47
2.13	Gráfico da função $h(x) = k$ um $\delta > 0$ qualquer	47
2.14	Exercício de cálculo de limites graficamente	48
2.15	Exercício de criação de gráfico e determinação de limites	49
2.16	Gráfico de $g(x)$	50
2.17	Gráfico de $f(x)$	51
3.1	Quantidade de novas abelhas na <i>Região 1</i>	54
3.2	Quantidade de novas abelhas na <i>Região 2</i>	55
3.3	Sequências a_n e b_n no mesmo sistema	56
3.4	Construção geométrica da soma das sequências a_n e b_n	56
3.5	Gráfico da sequência $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$	57
3.6	Gráfico da sequência $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$	58
3.7	Gráfico da sequência $c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$	58
3.8	Gráfico da função f	60
3.9	Gráfico da função g	60
3.10	Gráfico da função g	61
3.11	<i>Região 3</i> com 2048 ovos e a origem de novas abelhas	62
3.12	Gráfico com o dobro do comprimento do segmento azul	63
3.13	Gráfico da sequência a_n	64
3.14	Gráfico da sequência a_n	65
3.15	Gráfico da sequência $c_n = k \cdot a_n$	65
3.16	Gráfico da função f	66
3.17	Gráfico da função $g(x) = 2 \cdot f(x)$	67
3.18	Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$	68
3.19	Gráfico da função $g(x)$ com os intervalos	69

3.20	Gráfico da função $g(x)$ com as retas $x = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ e $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$	70
3.21	Gráfico da função $g(x)$ com os intervalos corretos	71
3.22	Gráfico da função $g(x)$	72
3.23	Gráfico das funções $g(x)$ e $h(x)$	73
3.24	Gráficos das funções f , g e h	74
3.25	Gráficos da função $p(x) = x^2 - 2x + 4$	75

Lista de Tabelas

1.1	Valores menores do que 1	30
1.2	Valores maiores do que 1	31
2.1	Valores de $f(x) = 2x + 1$ com $x < 1$	38
2.2	Valores de $f(x) = 2x + 1$ com $x > 1$	39

INTRODUÇÃO

Ao analisar o alto índice de desistência de estudantes em cursos de exatas como Matemática, Física, Engenharia etc, nota-se que muitos alunos têm dificuldades em compreender as disciplinas que são ministradas em tais cursos. Muitos estudantes não conseguem compreender os conceitos teóricos básicos que são fundamentais para entender outros conteúdos ou ainda, não são capazes de aplicar as ideias aprendidas para resolver problemas práticos, como por exemplo, calcular a taxa de variação e custo no financiamento de um imóvel.

Devemos ressaltar que a consequência dessa dificuldade em compreender o que é apresentado pelo professor é uma das possíveis causas das desistências como apontam diversas pesquisas realizadas sobre este assunto. A Folha de São Paulo (2016) divulgou um artigo onde mostrou que no curso de Matemática de uma determinada universidade federal, o índice de evasão é de 38% e cita ainda que a falta de preparo para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I foi um dos fatores que contribuíram para o percentual de evadidos. O Sindicato das Mantenedoras de Ensino Superior - SEMESP (2014) retratou também esse problema e citou que o percentual anual de evasão nos cursos de Ciências Exatas é de 26,6%, o que mostra que muitos alunos não conseguem concluir o curso.

Além disso, esta preocupação e o alto índice de desistência por parte dos alunos tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores conforme cita Almeida (2006). Este trabalho ainda cita que “as causas das dificuldades podem ser buscadas no aluno ou em fatores externos, em particular no modo de ensinar a Matemática” (ALMEIDA, 2006, p. 2).

Nessa perspectiva, Tall (1994) baseando-se em seus estudos e pesquisas, levanta algumas indagações relacionadas à compreensão do conceito de limites e a grande dificuldade enfrentada pelos alunos em compreender tais conceitos, tendo em vista que o conteúdo de cálculo é apresentado não somente pelo professor de cálculo, mas todos da universidade, em todas as disciplinas. e segue um planejamento e uma sequência organizada de teorias e resultados.

Uma das possíveis respostas para este questionamento pode ser o fato do discente, ao ingressar em um curso superior, não possuir todos os quesitos básicos e fundamentais

para o aprendizado da disciplina ou ainda, ele não entendeu o conceito, criando, portanto, uma ilusão de aprendizado o que contribui para a memorização de técnicas de resolução.

Em um artigo publicado pelo site Exame (2016) sobre o ranking do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), o Brasil está entre os oito piores no que tange ao aprendizado, ocupando a 63^a posição entre as 70 nações avaliadas em 2015 e ainda destaca que o pior resultado foi em Matemática, onde 70,3% dos estudantes estão abaixo do mínimo necessário.

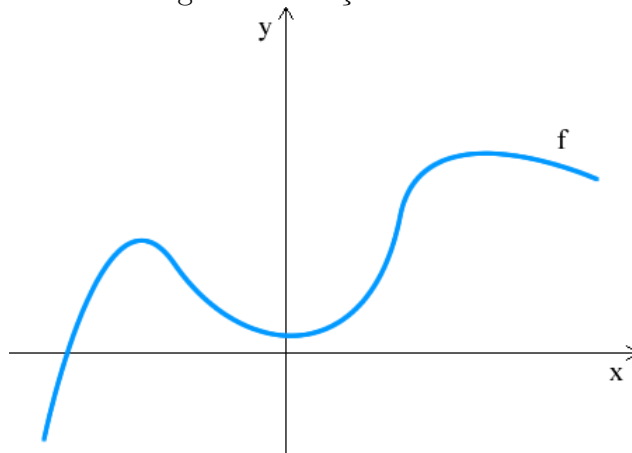
No curso de Matemática, um dos principais objetos de estudo é o cálculo diferencial e integral, tendo como estudo inicial os conceitos de *limites* (definições, suas propriedades, operações e aplicação para a análise de comportamento de funções reais), sendo que algumas faculdades oferecem algumas disciplinas como Fundamentos da Matemática Elementar ou pré-cálculo¹ para auxiliar no estudo de limites. Segundo Cottrill et al. (1996), há um consenso geral na literatura de que os alunos têm problemas com o conceito de limite, seja no contexto de funções e de continuidade ou de séries e sequências. Este autor ainda enfatiza que a maior dificuldade dos alunos é a compreensão do limite como sendo algo que nunca é realmente atingido ou alcançado.

Em um estudo realizado por Vinner (1991) e Cottrill et al. (1996) com um grupo de alunos com o intuito de saber quantos destes compreendiam o conceito de limite, apenas um aluno foi capaz de fornecer uma definição formal indicando razoavelmente a compreensão do conceito. Além disso, Harel (2004 apud SWINYARD, 2011), observou que embora as definições formais de alguns conceitos possam ser o objetivo final de ensino da Matemática, a ausência de figuras e gráficos contribuiu para que os alunos se tornassem incapazes de reter as definições por um longo período de tempo.

Baseando-se em experiências como docentes em séries finais do ensino médio, acredita-se que os gráficos apresentam conceitos e informações que são mais fáceis de serem compreendidas quando comparado a forma algébrica como são definidos. Para explicar, por exemplo, o que é uma função contínua, o docente pode apresentar ao estudante a Figura 1, que representa o gráfico de uma função qualquer f , atentando para o fato do gráfico não apresentar nenhum tipo de interrupção ou “buracos”.

¹Estas disciplinas tem como objetivo ensinar os quesitos básicos para o discente cursar a disciplina de Cálculo.

Figura 1: Função contínua



Fonte: Elaborada pelo autor

Diante deste problema, que está agregado aos diversos cursos de exatas, levanta-se a seguinte indagação: *Será que existe alguma forma alternativa que pode contribuir para o aprendizado destes conceitos?* Em busca de uma maneira mais fácil dos conteúdos serem assimilados pelos alunos, neste trabalho será discutido como os conceitos são abordado nos cursos de exatas e, com objetivo de tornar mais simples o aprendizado, serão propostas algumas atividades que irão dispensar qualquer tipo de técnicas de resolução, priorizando o raciocínio e a busca do conhecimento.

Acreditamos que, além dos livros didáticos, o uso da geometria e de *softwares* de geometria dinâmica, podem facilitar a compreensão de tais conceitos e diferenciar significativamente a metodologia e a dinâmica em sala de aula, pois, segundo Tall (1994, p. 4)

embora as definições dos conceitos sejam dadas de maneiras formais em faculdades de matemática, os alunos podem recorrer a este imaginário e deduzir teoremas através do uso de suas próprias experiências de pensamento. Por exemplo, “Contínuo” pode levar a inferência de algo “acontecendo sem uma pausa”, de modo que a função contínua deve passar claramente através de todos os valores intermediários, e também deve ser delimitada e atingir os seus limites. Para uma prova pela experiência do pensamento, basta imaginar uma imagem.

Segundo Elia et al. (2009), se os alunos não conseguem compreender a noção ou as ideias relacionadas a limites, então eles não podem compreender outros conceitos de análise, tais como a continuidade e a derivada.

Para este trabalho, no Capítulo I é apresentada uma análise de como alguns livros de ensino médio e de cálculo abordam o conceito de função para introduzir o conceito de limite, tendo em vista que a maneira que os conceitos são transmitidos aos alunos pode ser um dos possíveis motivos para a dificuldade apresentada pelos discentes. Além

disso, é realizado de maneira lúdica² a construção do conceito de sistema cartesiano e a ideia intuitiva de função, sendo este o pilar para a compreensão e estudos dos limites. É importante ressaltar que se o aluno não tiver a noção de alguns conceitos geométricos como medida, localização de pontos e etc, ele terá a oportunidade de aprender e recordar tais assuntos, pois a maneira como as ideias serão introduzidas levarão o estudante a construir o conhecimento tendo em vista que as definições não serão apresentadas de prontas e finalizadas.

O Capítulo II apresenta uma forma diferenciada de apresentar os símbolos *épsilon* e *delta* que são utilizados na definição de limites e para isto, novamente foi utilizado uma forma lúdica onde o aluno compreenderá como estes símbolos estão associados a definição, fugindo no primeiro momento, do rigor matemático.

No Capítulo III, é apresentado as principais propriedades relacionadas sobre limites como o limite de uma constante vezes uma função, o limite da soma, da diferença, da multiplicação e divisão de duas funções com domínios reais. E para complementar a todas as ideias presentes neste capítulo, foram propostas algumas atividades relacionadas com o intuito do aluno aplicar as propriedades sobre limites dispensando, portanto, a memorização e técnicas de resolução.

Em todos os Capítulos, além da discussão de como os conceitos limites são abordados nos cursos de exatas e nos livros didáticos, será apresentada uma maneira alternativa de abordar os mesmos conceitos e utilizando figuras, gráficos e situações lúdicas que fogem em primeiro momento do rigor matemático para então apresentar os conceitos e as propriedades utilizando a linguagem e símbolos matemáticos.

Portanto, nosso objetivo é propor uma maneira diferente de ensinar os conceitos de limites e suas principais propriedades, utilizando situações reais e lúdicas, sem fugir do rigor matemático de como os conceitos são definidos.

²Será utilizada uma situação real, porém com certo teor de divertimento e curiosidade na leitura.

JUSTIFICATIVA

Neste trabalho pretende-se apresentar uma abordagem diferenciada de ensino do conceito de limites que não fuja do rigor matemático, porém, de tal modo que o aluno consiga interpretar e compreender os conceitos que até então são considerados difíceis e que em sua maioria o estudante acaba memorizando os conceitos e o resultado é a não compreensão do conteúdo o que pode gerar um péssimo desempenho em avaliações.

Segundo Amorim (2011),

o conceito de limite é de difícil apreensão e, conseqüentemente, traz dificuldades também para quem o ensina. É possível perceber que os alunos, de uma maneira geral, são capazes de realizar longas listas de atividades envolvendo tal assunto, sem que realmente tenham compreendido o conceito (p. 37).

Essa dificuldade de aprendizado também foi encontrada nos estudos e pesquisas realizadas por Cottrill et al. (1996) com um grupo de estudantes onde o autor cita que muitos destes não conseguem compreender a definição como é apresentada nos livros de cálculo utilizados em diversos cursos de exatas. Entre estas diversas dificuldades de compreensão, está presente o entendimento dos símbolos *épsilon* e *delta* na definição de limite, ou ainda, os alunos não conseguem entender o teor da sentença: *para todo épsilon real maior do que zero, existe pelo menos um delta real maior do que zero tal que se o módulo da diferença entre x e x_0 é menor do que delta, então o módulo da diferença entre $f(x)$ e L é menor do que épsilon*, que em símbolos matemáticos representa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1)$$

Diante destas dificuldades apresentadas pelos participantes da pesquisa, Cottrill et al. (1996) salienta ainda que a ausência de figuras e/ou gráficos pode dificultar a compreensão e que pode levar o aluno a ter uma ideia errônea de tais conceitos e a consequência disso é o alto índice de reprovação na disciplina, pois as figuras e gráficos podem conter informações que são mais fáceis de serem compreendidas por meio da visualização enquanto que o uso de conceitos algébricos exige que o aluno associe o que está escrito com símbolos matemáticos com algum ente que ele conheça, por exemplo, o uso de *delta* e *épsilon* na definição de limites que geometricamente correspondem aos raios dos intervalos referentes ao ponto no domínio que está se aproximando e o limite da função, respectivamente.

Ao realizarmos uma pesquisa sobre o tema em questão no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), muitos autores enfatizaram o ensino de cálculo e suas aplicações no dia a dia, no ensino médio e até mesmo no ensino superior, no entanto, existe uma carência da associação dos conceitos algébricos com a interpretação geométrica e como os mesmos são transmitidos aos discentes.

Entre os diversos trabalhos analisados, citamos o trabalho de Maria (2013), onde o autor apresenta os conceitos de limites e de derivadas dando ênfase em seu trabalho a história da matemática e o surgimento do cálculo. Além disso, o autor ainda cita a preocupação de alguns trabalhos com respeito aos índices elevados de reprovação em cursos onde são ministradas a disciplina de cálculo e a tentativa de propor novos métodos de abordar os conteúdos.

No trabalho de Machado (2013), o autor aborda de forma simplificada os conceitos de limites e derivadas como uma proposta de estudos para o ensino médio, porém, o autor não faz a associação da definição dos conceitos com a representação geométrica, ou seja, ele não mostra a relação da definição e os entes da geometria.

No trabalho de Gonçalo (2013), o autor faz uma análise dos conceitos de cálculo apresentando as definições de limites e derivadas, conforme consta nas literaturas utilizadas para ensinar cálculo. Além disso, ele enfatiza que “um dos fatores que contribui de forma significativa para as grandes evasões nos cursos superiores onde se estudam disciplinas como o cálculo, é a deficiência na aprendizagem em Matemática” e este fato deve estar associado à dificuldade de assimilar o conceito algébrico.

No trabalho de Ferreira (2014), o autor faz uma análise dos conceitos de cálculo e como os livros didáticos tratam tais conceitos. Em Silva (2014), o autor realiza uma referência histórica em seu trabalho e faz uma abordagem sistemática no atual sistema de ensino médio/básico nas escolas enfatizando a literatura adotada nas instituições de ensino, realizando o estudo dos conceitos de limite, continuidade, teorema do valor médio, mas sempre com foco no ensino médio.

Na dissertação de Levita (2013), o autor faz uma abordagem dos conceitos de limites e de derivadas de maneira tradicional, ou seja, apenas utilizando os conceitos e métodos apresentados na maioria dos livros didáticos, porém com foco no estudo destes conceitos voltado para o ensino médio. Neste trabalho o autor utiliza símbolos e a forma algébrica para definir os conceitos dispensando a representação geométrica.

No trabalho de Paiva (2014), o objeto de estudo do autor é o cálculo de volumes utilizando limites e para realizar este estudo, o autor faz o uso do conceito de integral associado à representação geométrica com o intuito de facilitar o entendimento, porém, no que tange ao estudo de limites, o autor não associa os conceitos geométricos com a forma algébrica como é definido os limites.

Por fim, no trabalho de Neto (2016), o autor realiza um estudo histórico da Matemática para apresentar as bases necessárias para o estudo de limites, apresentando as dificuldades enfrentadas por diversos matemáticos do século XVI para compreender os diversos conceitos que hoje estudamos na disciplina de cálculo.

Nas diversas dissertações relacionadas ao trabalho em questão, os autores apresentam o conceito de limite com ênfase em derivadas como uma proposta para o ensino médio. No entanto, não há uma preocupação em relacionar a definição e termos abstratos como, por exemplo, *épsilon* e o *delta*, com a representação geométrica, ou ainda, existe uma preocupação maior com o tratamento algébrico da definição quando comparado com o geométrico. Assim, neste trabalho é apresentado uma maneira diferenciada de apresentar os conceitos, contribuindo para um aprendizado sólido em que o aluno terá a oportunidade de aprender por meio da investigação dos conceitos presentes nas figuras geométricas.

Com objetivo de saber como os autores de livros de ensino básico abordam o conceito de limite, realizamos uma pesquisa no portal do Ministério da Educação e Cultura (MEC) e encontramos diversos livros do ensino médio dos quais foram selecionados 7 (sete) literaturas e o método utilizado nesta amostra foi a orientação de escolha e análise dos livros didáticos que está disponível no portal do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)³. Além disso, deste conjunto de livros do ensino médio, apenas 3 (três) abordam o assunto sobre limites e destes, apenas 2 (dois) apresentam o conteúdo como uma “continuação” da ementa curricular da disciplina de Matemática do colegial.

Os livros que abordam os conceitos de cálculo são: **Matemática: Contexto E Aplicações – Volume 03**, Dante (1999); **Matemática No Ensino Médio – Volume 03**, Smole & Diniz (2010) e **Matemática No Ensino Médio – Volume 03**, Giovanni & Bonjorno (2005). É importante ressaltar que o conteúdo de limite de uma função assim como a derivada não é mais abordado em diversas escolas públicas, ficando a cargo dos cursos de exatas ensinarem aos estudantes tais conteúdos o que neste ponto torna-se um desafio tendo em vista a defasagem de aprendizagem que ocorrem nessas escolas, ou seja, muitos estudantes que ingressam nos cursos de exatas não detêm os quesitos básicos para estudar em tais cursos.

Além disso, ressaltamos que entre os livros citados acima, alguns autores, ao realizar a atualização do livro, o mesmo retirou de sua literatura os conceitos de ensino superior como limites e derivadas e citamos, por exemplo, a literatura **Matemática: Contexto E Aplicações – Volume 03**, Dante (1999), pois na edição mais atualizada (2014) os conceitos de limites e derivadas foram retirados e por isso optou-se em citar a

³FNDE. Guia PNLD 2015. Disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015>. Acessado em 06/03/2016.

edição referente ao ano de 1999.

Analisando o livro do autor Dante (1999), percebe-se que em termos de pré-cálculo, ou seja, assuntos básicos para estudar o conteúdo de cálculo, este livro é o mais completo quando comparado com as demais obras analisadas para fundamentar este trabalho. Além disso, é importante salientar que nesta obra é apresentada a definição de limites e algumas propriedades, porém, não há uma associação de tais conceitos com a representação geométrica. Além disso, uma metodologia notável nesta literatura é o fato da ideia intuitiva de limites ser tratada por meio de sequência o que contribui para um aprendizado sólido dos conceitos. Assim, neste trabalho será apresentada uma proposta de abordagem e ensino de limites que irá além da forma apresentada nesta literatura com objetivo de facilitar a compreensão de cada conceito e usando como ferramenta a representação geométrica.

Para finalizar os estudos, o autor ainda apresenta a ideia de deriva utilizando o limite do **quociente de Newton**⁴ para mostrar que o conceito de limites pode ser aplicado no estudo das derivadas.

Diferente de Dante (1999) que propôs inicialmente a compreensão do conceito de limite, Smole & Diniz (2010) fazem a interpretação geométrica da derivada e define a derivada como o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e associa o mesmo ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x_0 e para desenvolver este estudo, aplicam a derivada em uma situação na qual um carro se desloca de um ponto A até um ponto B, associando a derivada à **taxa de variação média** da velocidade.

É importante destacar que essa forma abordada por Smole & Diniz (2010) não representa a sequência de conteúdos ensinados nos cursos de Cálculo I onde o docente faz o estudo sobre limites e, após este estudo, apresenta a definição de derivada associada à ideia da reta secante ao gráfico de uma função f como estes autores fizeram.

Semelhante ao autor Dante (1999), os autores Giovanni & Bonjorno (2005) em sua obra, introduzem a ideia de limites por meio de exemplos exibindo o valor numérico da função $f(x)$ quando x tende a um determinado valor do domínio, ou seja, como uma sequência de variáveis numéricas. As obras de Dante (1999) e Smole & Diniz (2010) não apresentam o limite de funções polinomiais enquanto que Giovanni & Bonjorno (2005) abordam o limite de polinômios e o limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ que representa o limite do quociente de duas funções.

Em todas as obras analisadas, percebe-se que os conceitos são tratados de forma algébrica ignorando o aprendizado pela associação visual, ou seja, nas três literaturas o conteúdo foi apresentado de forma explícita e exclusivamente algébrica, priorizando

⁴A razão $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ é denominada quociente de Newton.

sempre a manipulação de variáveis e aplicação de técnicas de cálculo de limites de funções.

Além dos livros de Matemática do ensino médio, foi realizada uma pesquisa no acervo da biblioteca da Universidade Federal de Uberlândia e após uma análise em diversos livros de cálculo encontrado, percebeu-se que os autores apresentam primeiramente os conceitos de limites de forma intuitiva, isto é, o comportamento da função $f(x)$ quando x tende a determinado valor real (não necessariamente pertencente ao domínio de f) e, em seguida, é apresentado o conceito algébrico utilizando símbolos matemáticos (*delta* e *épsilon*).

Entre os diversos livros pesquisados citamos **Cálculo A: Funções, limites, derivadas e integração**, Flemming (2006); **Um curso de cálculo**, Guidorizzi (2001); **Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações**, Hoffmann (1999); **O Cálculo com Geometria Analítica**, Leithold (1994); **Cálculo**, Munem (1982); **Cálculo 1**, Stewart (2013) e **Cálculo com Geometria Analítica**, Swokowski (1994).

Nos exemplos, assim como nos demais conteúdos sobre limites, os autores apresentam alguns exercícios resolvidos e em seguida uma representação geométrica da situação do problema. Porém, nos exercícios não há essa mesma ênfase, ou seja, nos exercícios propostos, o intuito observado é que o estudante utilize os conceitos algébricos ao invés da representação geométrica, o que se entende que o aluno neste ponto já compreendeu a ideia e os conceitos relacionados a limites. Neste momento levantamos a seguinte indagação: *Será que os alunos compreenderam o conceito de limites ou decoraram um método de resolução de limites?* Com o intuito de evitar a mecanização de resoluções, será apresentado algumas atividades que poderão contribuir para analisar se o aluno aprendeu de forma correta o conceito de limite, além da forma lúdica e com representação geométrica que os assuntos serão abordados ao longo deste trabalho.

Diante das análises realizadas, tanto nas dissertações quanto dos livros do ensino básico e superior, percebe-se que a associação visual dos conceitos algébricos é fundamental no que tange ao aprendizado do aluno tendo em vista que, embora as definições e propriedades sejam dadas de maneiras formais em faculdades de Matemática, os alunos podem recorrer ao geométrico e deduzir teoremas através do uso de suas próprias experiências de pensamento (TALL, 1994).

Em outro estudo realizado por Williams (1991), o autor percebeu que os alunos demonstram grande interesse em gráficos como um meio de entendimento do conceito de limite. Além disso, nessa mesma pesquisa, ele percebeu que os participantes afirmaram que bastavam olhar para o gráfico que todas as informações já eram obtidas e com essa forma de pensar, muitos estudantes desenhavam gráficos para encontrar limites.

Portanto, acredita-se que o uso da representação geométrica é uma forma diferenciada de apresentar os conceitos além de ser uma proposta que pode melhorar significati-

vamente na compreensão dos conceitos tendo como consequência um aprendizado sólido por parte dos alunos. Para compreender todos os conceitos de limites é necessário compreender outros conceitos que são fundamentais que servirão de base para construir toda a teoria de cálculo e entre esses conceitos fundamentais citamos o plano cartesiano e a ideia de função, assuntos que será abordado no próximo capítulo.

1 O CONCEITO DE LIMITES

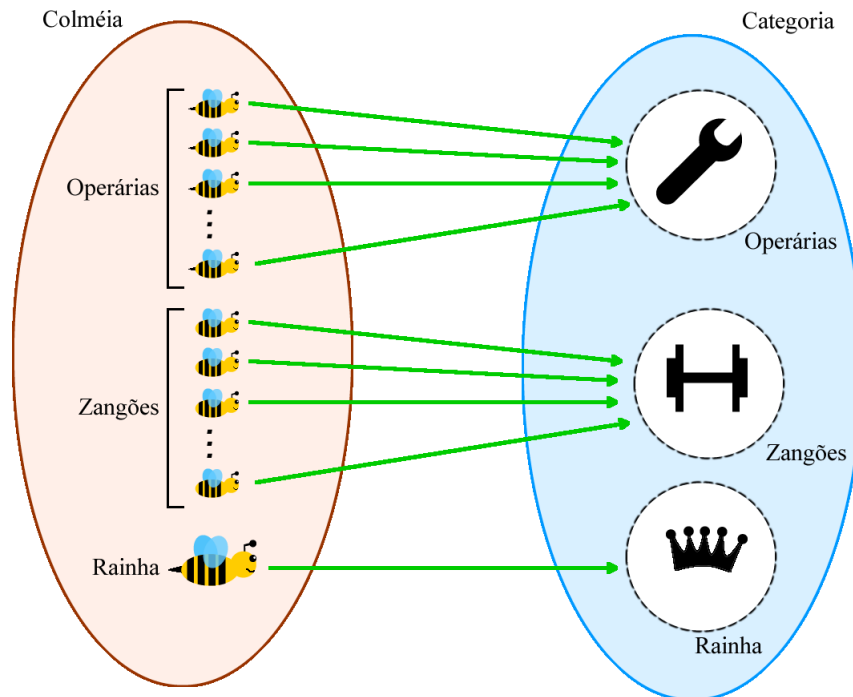
Para assimilar o conceito de limites é necessário a compreensão de outros conceitos que são importantes, porém, tratados muita das vezes de modo superficial por muitos autores em seus livros de cálculo, tendo em vista que estes representam o pilar para o estudo de limites.

A falta de entendimento desses conteúdos podem resultar em uma ilusão de compreensão e aprendizado sobre limites levando o aluno a acreditar que uma simples aplicação de técnica ou propriedade de limite é resultado de um aprendizado sólido. Para evitar esta ilusão de compreensão, será apresentado e construído com detalhes e de forma lúdica o conceito de sistema cartesiano, função e gráfico de função, antes de introduzir o conceito de limites, sua representação geométrica e suas propriedades fundamentais.

1.1 A noção intuitiva de função

Para compreendermos o conceito de função, iremos utilizar o sistema de vida de abelhas, a forma como elas trabalham e como elas são divididas em suas funções dentro da colmeia. Neste trabalho, com intuito de simplificar as ideias que serão apresentadas, iremos considerar que as abelhas são divididas em três categorias: *rainha*, *operárias* e os *zangões*.

Dentro deste sistema, iremos considerar também que uma abelha não pertence a duas categorias dentro da colmeia, isto é, uma abelha operária não pode ser rainha e não pode ser zangão, o mesmo que ocorre com as demais categorias. Assim, se escolhermos uma abelha ao acaso nessa colmeia, ela pertence a uma, e apenas uma, categoria e esta relação *abelha* \times *categoria* pode ser representada graficamente atribuindo cada abelha a função que exerce na colmeia da seguinte maneira:

Figura 1.1: Representação $abelha \times categoria$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe na Figura 1.1 que cada abelha da colmeia (conjunto de abelhas) está relacionada (relação representada pela seta) a uma única função (conjunto das categorias). A relação $abelha \times categoria$ é uma função, pois cada abelha (elemento x de um conjunto) é associada a uma única função relacionada a categoria (evento $f(x)$) e esta relação que associa cada abelha a sua função em seu grupo será chamada de f e representada da seguinte maneira:

$$f : \text{Abelha} \rightarrow \text{Categoria na colmeia} \\ x \mapsto f(x)$$

Toda relação que tem esse comportamento, ou seja, cada elemento de um conjunto é associado a um único elemento de outro conjunto, é uma função ou uma aplicação do primeiro conjunto no segundo conjunto. Deste modo não é necessários símbolos matemáticos, mas é possível descrever uma função usando símbolos e conceitos matemáticos que representam essa ideia. Cabe mencionar que, além mostrar a relação como função, para uma melhor compreensão de função o professor deve apresentar exemplos de relação que não é uma função.

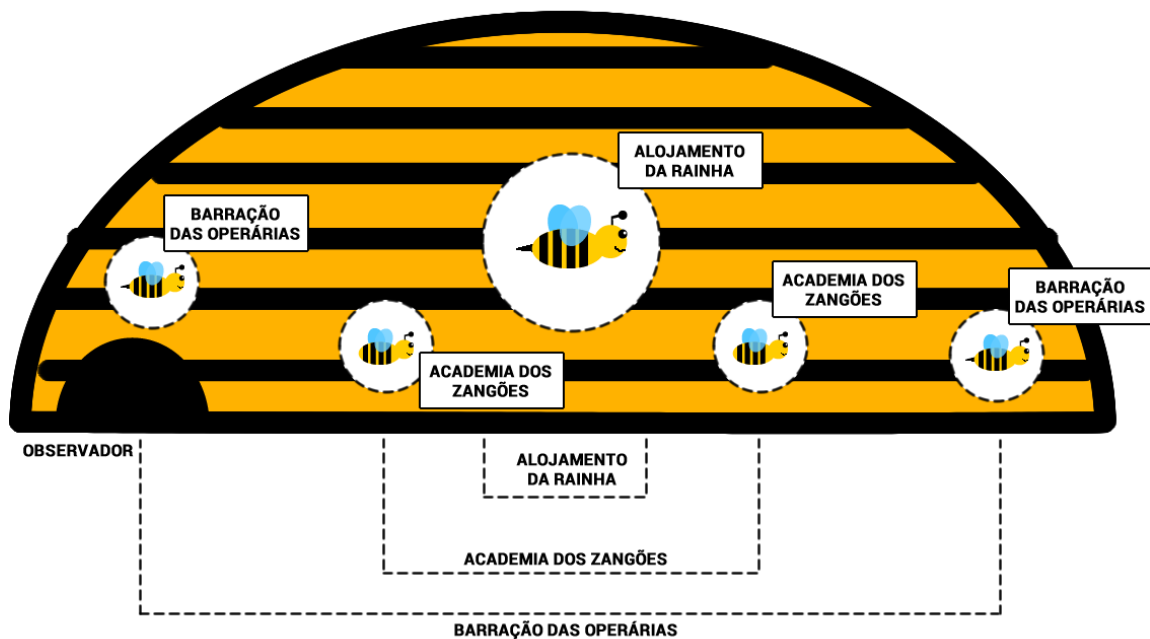
Pode-se também identificar as funções das abelhas em uma colmeia pela distância entre as abelhas e a rainha da seguinte forma: A rainha fica fixa no centro da colmeia, as demais funções podem ser definidas pela distância entre a abelha e a rainha. A partir

dessa ideia de distância entre as abelhas pode-se construir o conceito de plano cartesiano, assunto que será tratado a seguir.

1.2 O sistema cartesiano ortogonal

Para compreender a ideia de sistema cartesiano, primeiramente é necessário definir alguma medida e ponto de referência e para isto, considere a Figura 1.2 que representa a colmeia das abelhas.

Figura 1.2: Representação da localização de cada abelha na colmeia

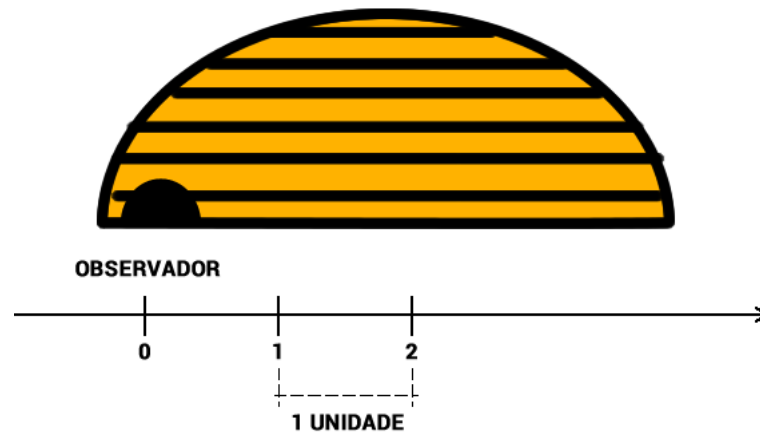


Fonte: Elaborada pelo autor

Para algum observador posicionado na porta da colmeia (a porta da colmeia será o ponto de referência) pode-se definir alguma medida para verificar a distância entre a rainha e as abelhas e para isto, pode-se escolher como medida o tamanho de um passo, um palmo ou alguma unidade de medida previamente estabelecida como, por exemplo, centímetro, metro, pé etc.

Pode-se então com uma régua munida da escala escolhida tendo como origem a porta da colmeia, fazer medidas de distâncias dentro da colmeia.

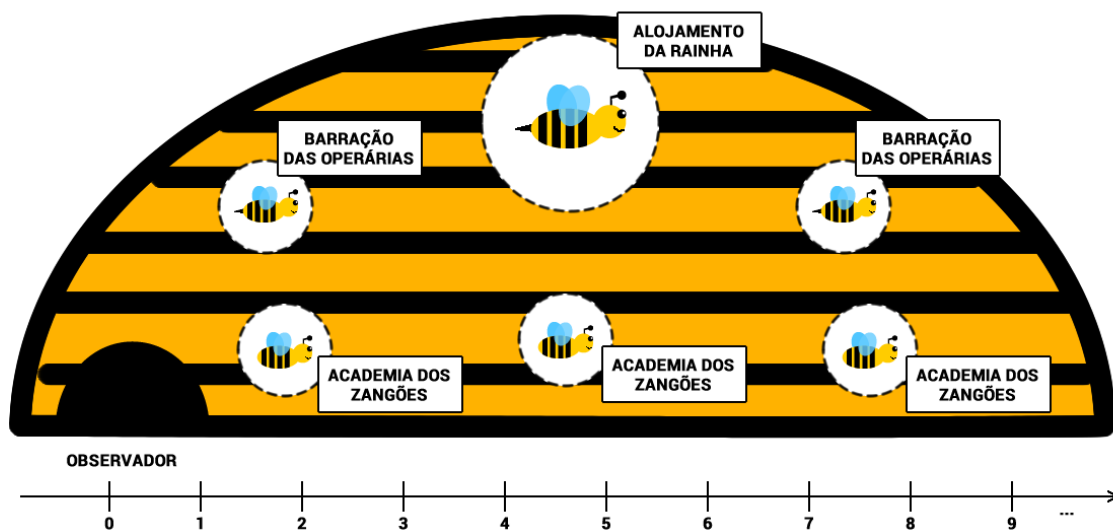
Figura 1.3: Unidade de medida



Fonte: Elaborada pelo autor

Deste modo, tem-se o 1º eixo para identificar as posições das abelhas e suas distâncias em relação ao observador:

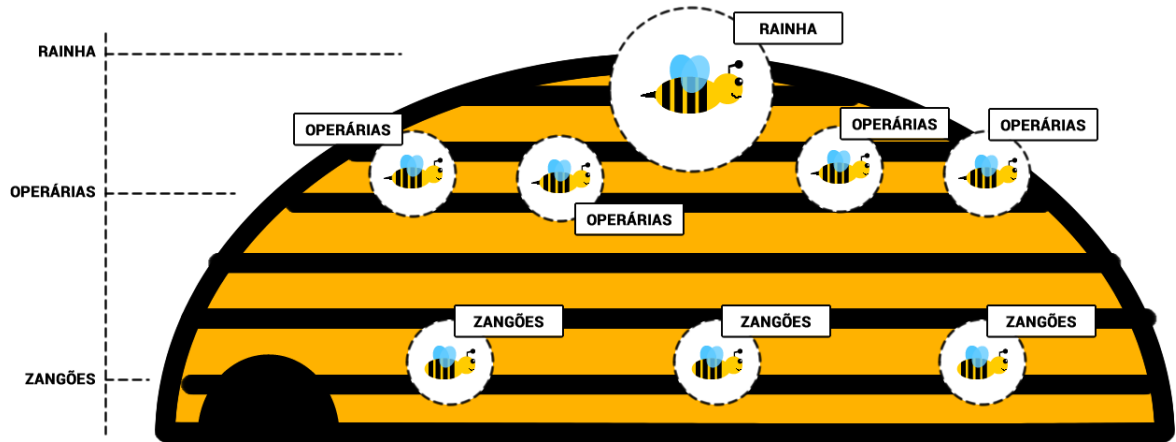
Figura 1.4: Eixo com as posições das abelhas



Fonte: Elaborada pelo autor

Seguindo esta mesma ideia, de que cada abelha desempenha um papel na colmeia, conforme citamos anteriormente, e esta função admitiremos agora estar associada à distância que as abelhas estão da base da colmeia, ou seja, a rainha fica no topo da colmeia, as operárias, com o intuito de protegê-la, fica no meio da colmeia e os zangões na base da colmeia, conforme ilustra a Figura 1.5:

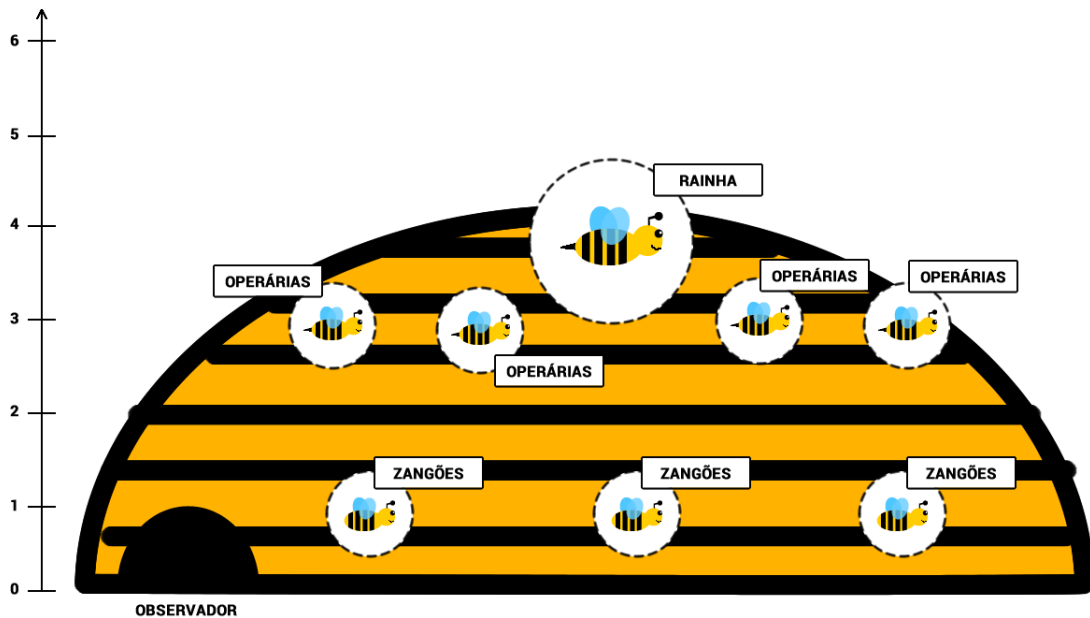
Figura 1.5: Eixo com as categorias das abelhas



Fonte: Elaborada pelo autor

Novamente com uma régua munida da escala escolhida tendo como origem a porta da colmeia, pode-se determinar a categoria da abelha por meio da distância que está da base da colmeia.

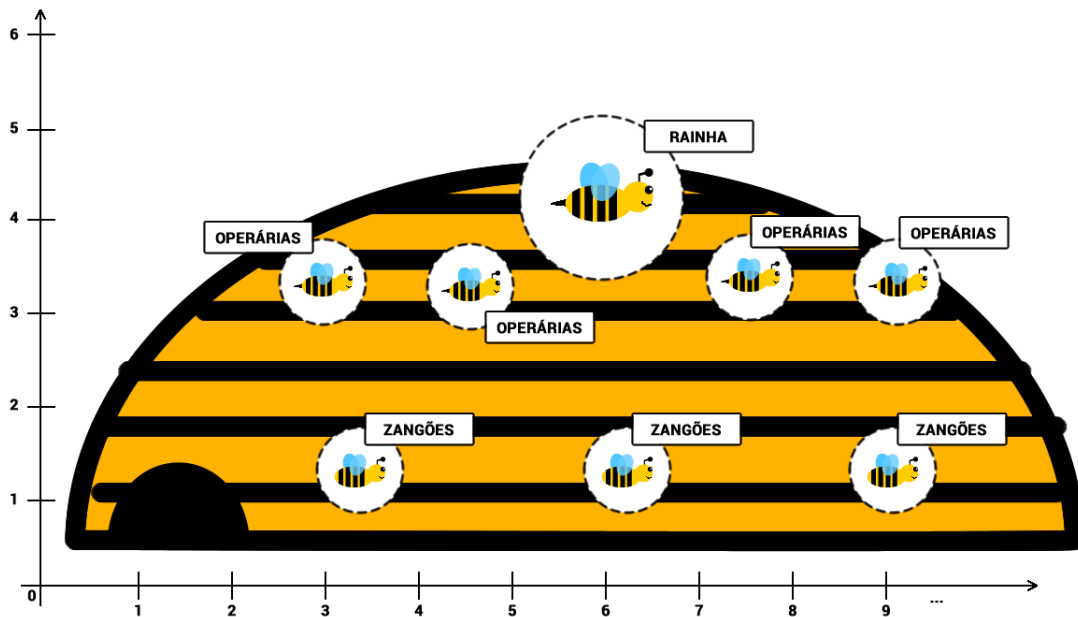
Figura 1.6: Eixo com as posições das abelhas



Fonte: Elaborada pelo autor

Diante deste estudo, temos um sistema que nos permite identificar a distância que cada abelha se encontra na colmeia (eixo horizontal) e a função que ela exerce na colmeia baseado na distância que está da base da colmeia (eixo vertical), conforme exibe a Figura 1.7:

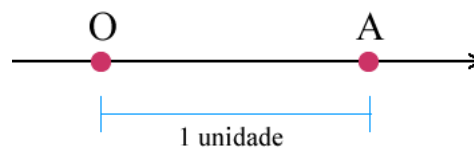
Figura 1.7: Eixo horizontal e vertical com as posições das abelhas



Fonte: Elaborada pelo autor

Com rigor matemático, o sistema cartesiano é constituído por duas retas x e y , perpendiculares entre si, no plano onde a reta x é geralmente considerada a reta horizontal e a segunda reta y , vertical, e semelhante a uma régua, cada uma dessas retas é munida de uma unidade de medida previamente escolhida podendo ser 1 (um) centímetro, 1 (um) metro, 1 (um) quilômetro etc, conforme ilustra a Figura 1.8:

Figura 1.8: Unidade de medida

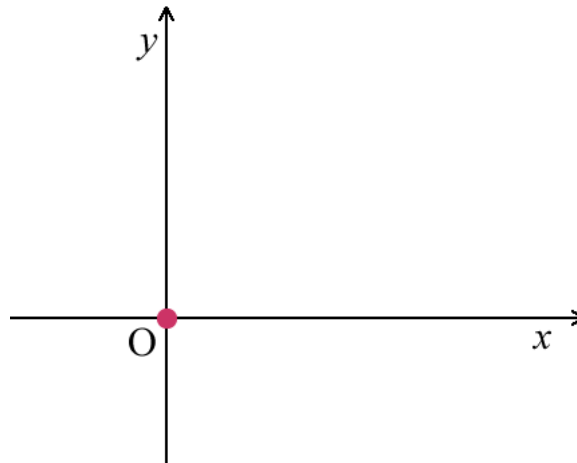


Fonte: Elaborada pelo autor

As retas x e y se intersectam em um ponto O , denominado **origem do sistema cartesiano** ortogonal. Além disso, é tradicional adotar neste sistema de eixos, o sentido positivo do eixo x a direita do ponto O , e no eixo y , acima do ponto O . Além disso, é adotado também que a esquerda do ponto O representa o sentido negativo no eixo x e abaixo do ponto O o sentido negativo do eixo y .

O plano que contém estes dois eixos é denominado **plano cartesiano** com origem no ponto O , sendo o eixo x denominado **eixo das abscissas** e o eixo y , **eixos das ordenadas**. A Figura 1.9 é uma representação deste sistema:

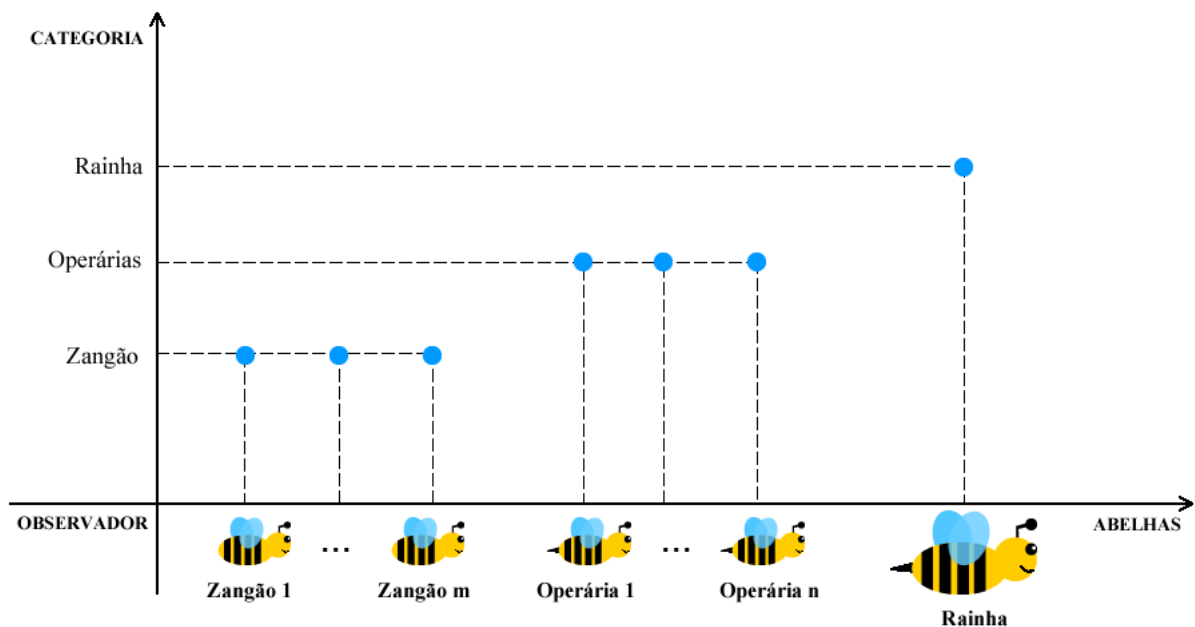
Figura 1.9: Sistema cartesiano ortogonal



Fonte: Elaborada pelo autor

Além de poder ser utilizado para localizar pontos e descrever gráficos de funções, podemos utilizá-lo para representar a situação proposta inicialmente das abelhas onde podemos associar cada abelha a sua função, ou seja, podemos representar por meio do seguinte ponto (*Abelha*, *Categoria*), conforme a Figura 1.10:

Figura 1.10: Representação das abelhas e suas funções



Fonte: Elaborada pelo autor

É importante ressaltar que com este sistema é possível determinar distância entre

abelhas em regiões diferentes da colmeia e que não estejam em posições verticais ou horizontais.

Baseado na ideia apresentada no caso das abelhas percebe-se que a compreensão do conceito de função é fundamental para o entendimento do cálculo, em particular o conceito de limite, tendo em vista que esta representa o objeto principal de estudos do cálculo. É importante ressaltar que nos livros didáticos do ensino médio analisados, em sua maioria, os autores apresentam a construção do gráfico das funções e faz um estudo algébrico dos entes associados como domínio, imagem e contradomínio deixando a aplicação em segundo plano ou em alguns casos apresentam apenas em um apêndice no final do capítulo deixando a cargo do estudante compreender e estudar esta aplicação.

Assim, acredita-se que um trabalho diferenciado tendo como objeto de estudo a representação geométrica e análise dos conceitos algébricos pode contribuir para uma melhor compreensão destes conceitos no ensino médio e conseqüentemente a compreensão dos conceitos de limites que são apresentados nos cursos de exatas no ensino superior.

Para compreender o conceito de função, vamos retomar a nossa ideia sobre as abelhas na colmeia. Suponha que na colmeia existam 200 abelhas e que cada hora nascem 50 abelhas. Desse modo, após 1 hora terão 250 abelhas na colmeia. Do mesmo modo que em 2 horas terão 300 abelhas, em 3 horas 350 abelhas e assim sucessivamente.

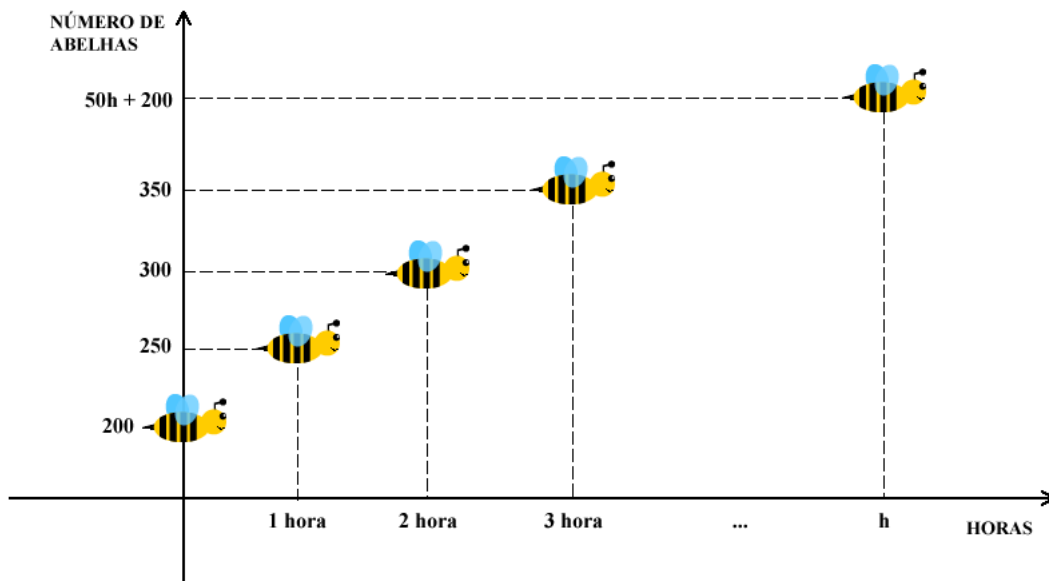
Se n representar o número de abelhas na colmeia após h horas, percebe-se que para cada valor de h , a colmeia terá $50h$ abelhas novas e considerando as 200 abelhas iniciais que existem na colmeia, conclui-se que o número de abelhas após h horas é dado por:

$$n = 50h + 200 \quad (1.1)$$

É importante ressaltar que o número de abelhas n na colmeia está relacionado com o tempo h em horas corridos, isto é, para determinar o número de abelhas é necessário saber quantas horas se passaram na colmeia.

Observe que esta correspondência entre o número de horas e o número de abelhas na colmeia é uma **função**, pois a cada hora temos apenas uma quantidade de abelhas.

Na Figura 1.11 temos a representação no sistema cartesiano do número de abelhas com o passar das horas:

Figura 1.11: Número de abelhas após n horas

Fonte: Elaborada pelo autor

De maneira geral, dizemos que uma função f representa uma lei ou uma correspondência que associa somente um valor da variável y para cada valor da variável x , onde a variável y é denominada variável dependente (de x), tendo em vista que ela é determinada a partir do conhecimento da variável x , que neste caso, é denominada variável independente. Esta correspondência é representada da seguinte forma:

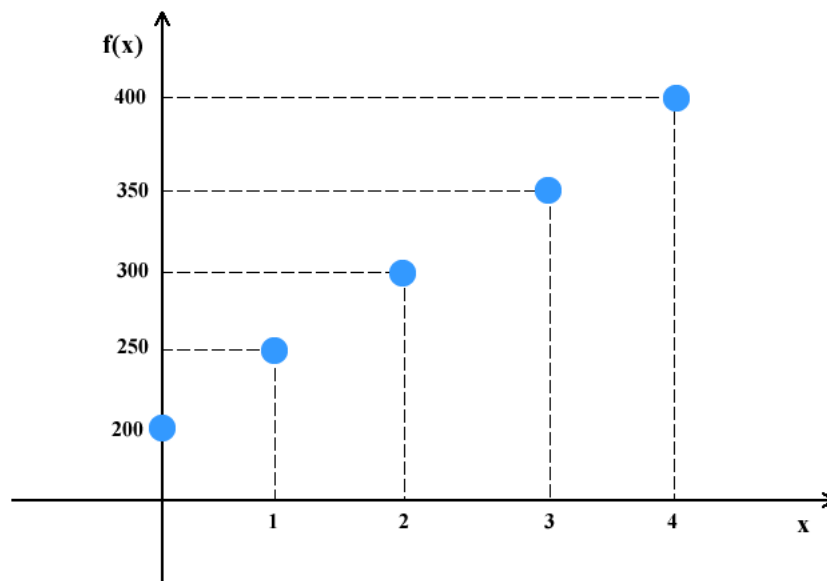
$$y = f(x) \quad (1.2)$$

Dizemos também que $y = f(x)$ é o valor numérico da função, isto é, o valor que y assume quando substituímos a variável x por um determinado número real.

Na situação hipotética da natalidade das abelhas, podemos representar a função como $f(x) = 50x + 200$ e pode-se escrever o número de abelhas na colmeia da seguinte forma $f(1) = 250$, $f(2) = 300$, $f(3) = 350$ etc. Um fato importante e que é necessário destacar é relacionado a quantidade inicial de abelhas que pode ser representada por $f(0) = 200$.

Toda função pode ser representada no plano cartesiano, utilizando para isto as informações sobre as variáveis x e y , onde variável x (variável independente) pode assumir qualquer valor em um determinado conjunto de números reais denominado domínio da função. Além disso, o conjunto formado pelos valores assumidos pela variável y , quando x assume os valores do domínio da função, é denominado imagem da função.

Considerando a função $f(x) = 50x + 200$ que representa o número de abelhas após x horas, e os valores numéricos da função $f(1) = 250$, $f(2) = 300$, $f(3) = 350$, $f(4) = 400$, obtemos o seguinte gráfico:

Figura 1.12: Número de abelhas após x horas

Fonte: Elaborada pelo autor

Nesta situação serão considerados apenas valores naturais para as horas, pois acreditamos que é mais fácil do aluno compreender, no entanto, o professor pode expandir para os demais conjuntos, em particular, para o conjunto dos **conjunto dos números racionais**¹.

Portanto, o domínio da função é composto pelas horas transcorridas $0, 1, 2, 3, \dots$ e a imagem é composta pelo número de abelhas na colmeia com o passar das horas $200, 250, 300, \dots$. Observe que neste caso, o domínio da função é o **conjunto dos números naturais**.

Observe neste exemplo que o gráfico da função $f(x) = 50x + 200$ é representado no plano cartesiano pelo conjunto de todos os pontos (x, y) , onde x pertence ao domínio da função (horas) e y a imagem da função (número de abelhas) e que esta relação pode ser representada da seguinte forma $y = f(x)$.

Além disso, podemos representar a relação como *(horas, número de abelhas)* e desta forma obtemos informações da colmeia de forma simplificada, por exemplo, ao dizer que $(5, 450)$ pertence ao gráfico da Figura 1.12, isto significa que após 5 horas a colméia terá 450 abelhas.

Diante do exposto, em notação de conjuntos, o gráfico da função $f(x) = 50x + 200$ é o conjunto de pontos pertencentes ao seguinte conjunto:

$$\{(x, f(x)) : x \in D_f\} \quad (1.3)$$

¹O conjunto dos números racionais é o conjunto formado pelos números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

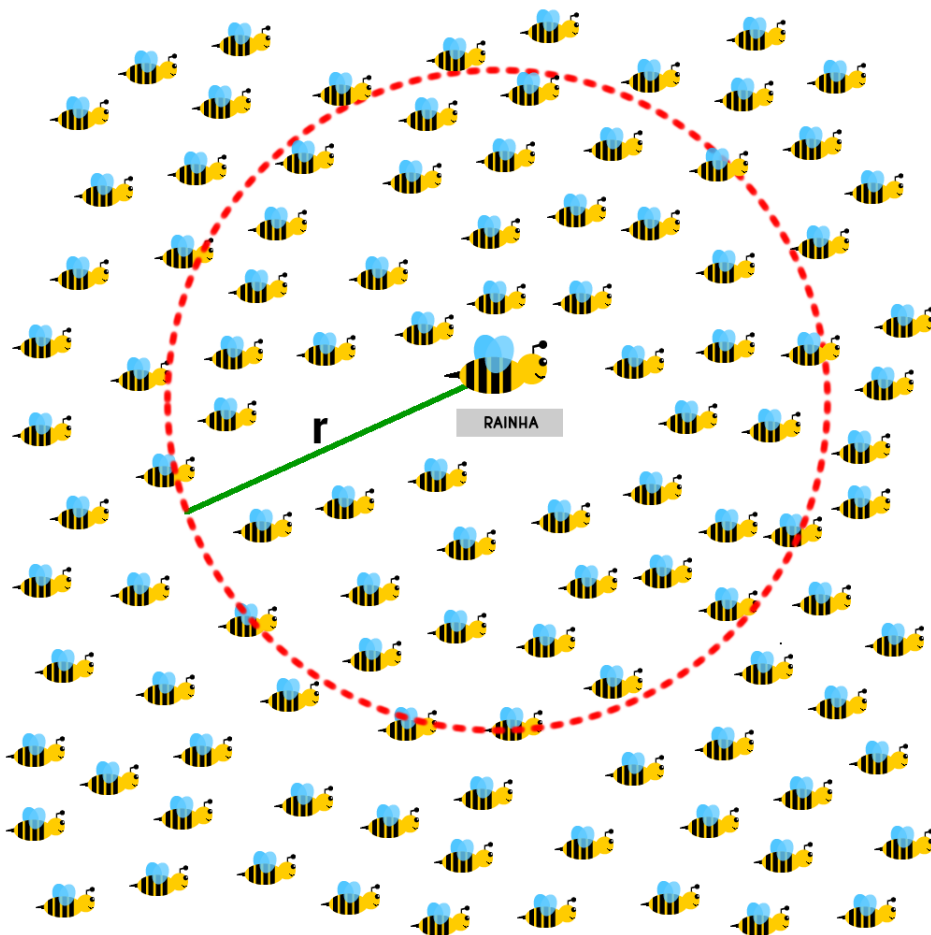
onde D_f representa o domínio da função f e que neste caso é o conjunto $D_f = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Em outras palavras, o par ordenado $(x, f(x))$ significa que após x horas terão $f(x)$ abelhas na colmeia e observe como a situação do exemplo tem uma grande relação com os símbolos e notações matemáticas.

1.3 A ideia intuitiva de limites

Retomando a situação das abelhas, consideremos que a colmeia está muito bem protegida e com um número razoavelmente grande de abelhas operárias e zangões muito próximos da abelha rainha ou do trono da rainha e tomemos uma circunferência de raio $r > 0$ onde o centro é representado pela abelha rainha, conforme ilustra a Figura 1.13

Figura 1.13: Abelhas em torno da rainha

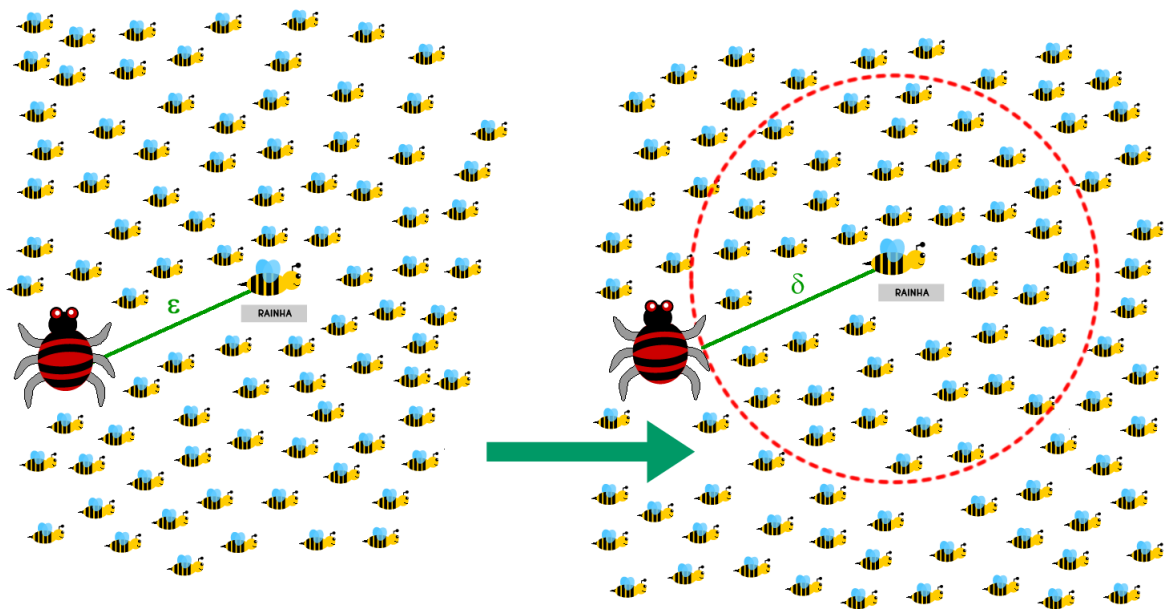


Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando a Figura 1.13 é possível verificar que se um corpo estranho está a uma distância r da rainha é possível obter um conjunto de abelhas na qual toda abelha deste

conjunto está mais próximo da abelha rainha do que o corpo estranho. Se considerarmos que o corpo estranho está a uma distância $\epsilon > 0$ da rainha e se tomarmos uma circunferência de raio $\delta > 0$ igual a distância do corpo estranho a rainha, temos que a colmeia estará bem protegida se tiver diversas abelhas dentro desta circunferência.

Figura 1.14: Abelhas próximas à rainha

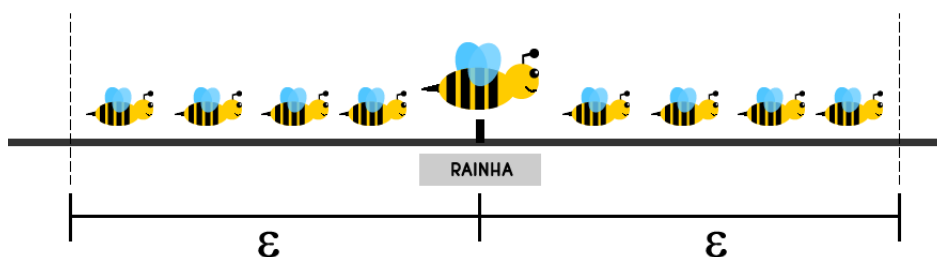


Fonte: Elaborada pelo autor

Se novamente considerarmos que o corpo estranho está mais próximo da rainha, digamos a uma distância $0 < \epsilon_2 < \epsilon$, ainda é possível obter uma circunferência de raio $\delta_2 > 0$ igual a distância do corpo estranho a rainha de modo que ainda existam diversas abelhas dentro desta circunferência protegendo a rainha.

Neste sentido, imagine que seja possível colocar as abelhas da circunferência de raio $\epsilon > 0$ em uma fila indiana em torno do trono da rainha conforme a ilustra a Figura 1.15:

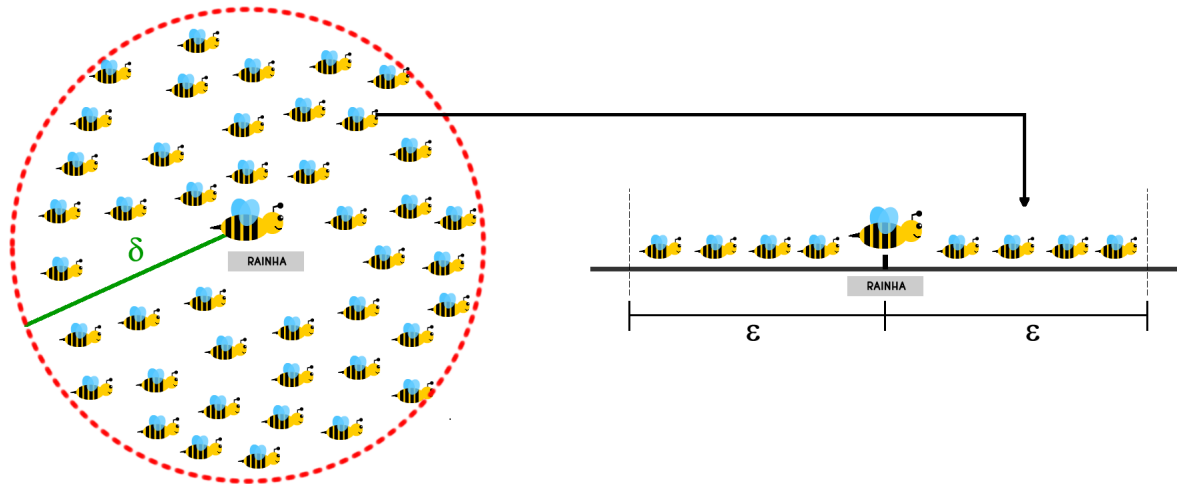
Figura 1.15: Abelhas em fila indiana em torno da abelha rainha



Fonte: Elaborada pelo autor

Desta forma, percebe-se que toda abelha na circunferência de raio δ pertence à fila com amplitude 2ϵ , conforme ilustra a Figura 1.16:

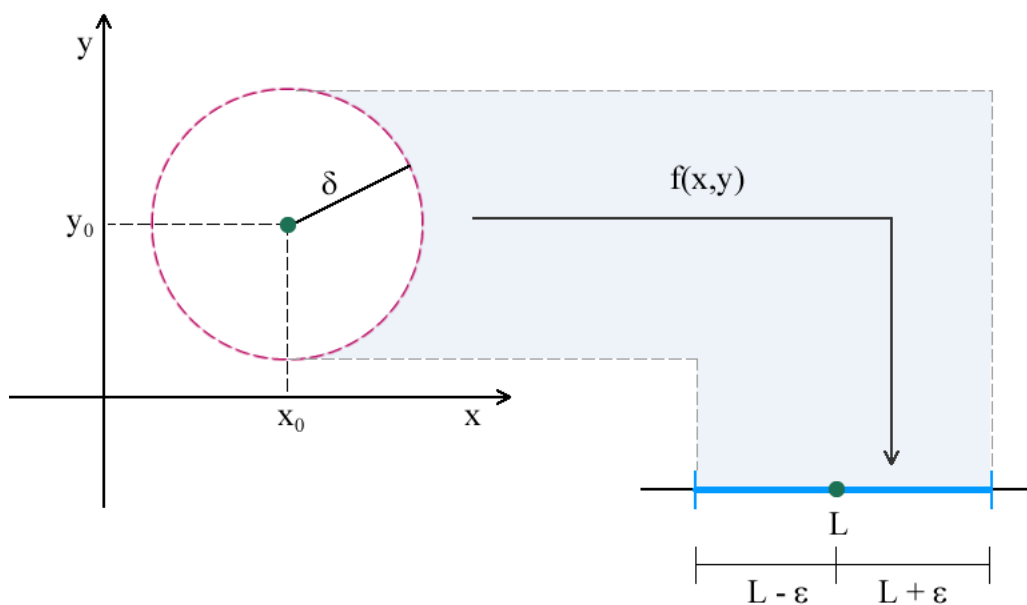
Figura 1.16: Relação entre as abelhas



Fonte: Elaborada pelo autor

Com rigor matemático, dizemos que a circunferência de raio $\delta > 0$ e centro no trono da abelha rainha é uma bola aberta e a fila indiana é um intervalo com centro na abelha rainha e comprimento 2ϵ , e com este conceito matemático diz-se que o limite de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é igual L , quando (x, y) se aproxima do ponto (x_0, y_0) , se for possível obter uma bola aberta de raio δ e centro (x_0, y_0) de modo que todo ponto nesta bola aberta tenha imagem no intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ pela função f , conforme ilustra Figura 1.17

Figura 1.17: Definição de limites com bolas abertas

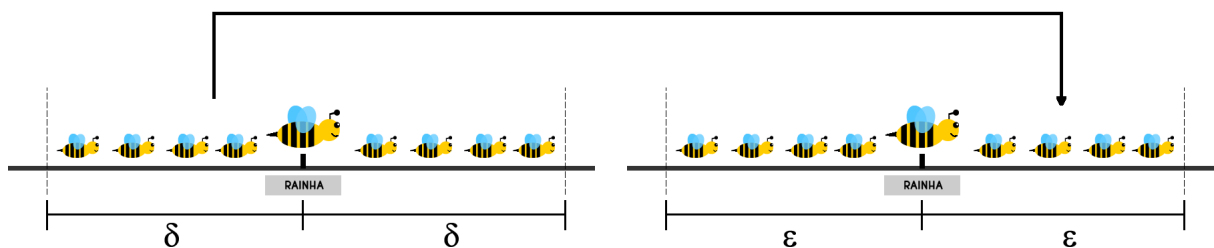


Fonte: Elaborada pelo autor

O conceito de limites com bolas abertas neste primeiro momento de formação e construção do conceito de limites pode ser um assunto difícil de se aprender, principalmente quando se trata de alunos que nunca tiveram contato ou noção de limites. Para facilitar então a compreensão, imagine agora que seja possível colocar tanto as abelhas da circunferência de raio δ quanto às abelhas da circunferência de raio ϵ em uma fila indiana em torno do trono da rainha, semelhante ao caso anterior.

Assim, toda abelha que pertence à fila com amplitude 2δ também pertence à fila com amplitude 2ϵ , conforme ilustra a Figura 1.18:

Figura 1.18: Relação entre as abelhas em filas



Fonte: Elaborada pelo autor

Desta forma, sendo $\epsilon > 0$ a distância entre a rainha e o corpo estranho, a fila indiana composta pelas abelhas que estão a uma distância menor do que ϵ da rainha formam o intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$ e as abelhas que estão protegendo e estão próximas à abelha rainha formam o intervalo $[-\delta, \delta]$, e com esses conceitos matemáticos podemos definir o limite de uma função.

1.4 Um pouco de história do conceito limite

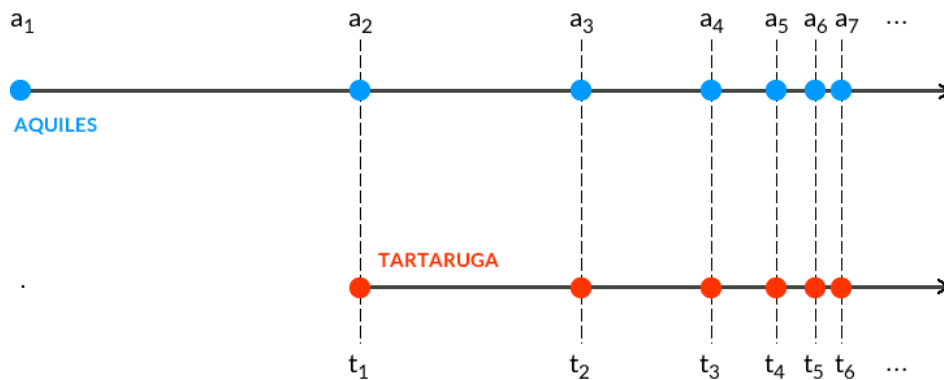
O conceito de limite como é conhecido hoje, demorou mais de dois milênios para ser estabelecido, tendo origens em problemas como o paradoxo proposto pelo filósofo grego Zenão, que viveu por volta do século V a.C, passando por Isaac Newton, no século XVII, onde este realizou diversos estudos relacionados a limites associando ao estudo de velocidades, e chegando até os dias atuais onde a definição passou a ser tratada algebricamente como está presente nos diversos livros de cálculo: *O limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.*

Um dos paradoxos de Zenão estava associado à corrida de uma tartaruga com o herói grego Aquiles onde a tartaruga tinha certa vantagem iniciando a uma determinada

distância na frente de Aquiles. Para Zenão, Aquiles nunca iria ultrapassar a tartaruga, pois segundo ele, se Aquiles iniciar em uma posição a_1 e a tartaruga em uma posição t_1 , quando ele estiver na posição $a_2 = t_1$, a tartaruga estaria em outra posição adiante t_2 . Quando Aquiles atingisse a posição $a_3 = t_2$, a tartaruga estará em outra posição adiante t_3 , e assim, esse processo continuaria infinitamente e, portanto, se considerarmos que o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis, Aquiles nunca ultrapassaria a tartaruga.

A Figura 1.19, ilustra geometricamente o problema proposto por Zenão:

Figura 1.19: Paradoxo de Zenão



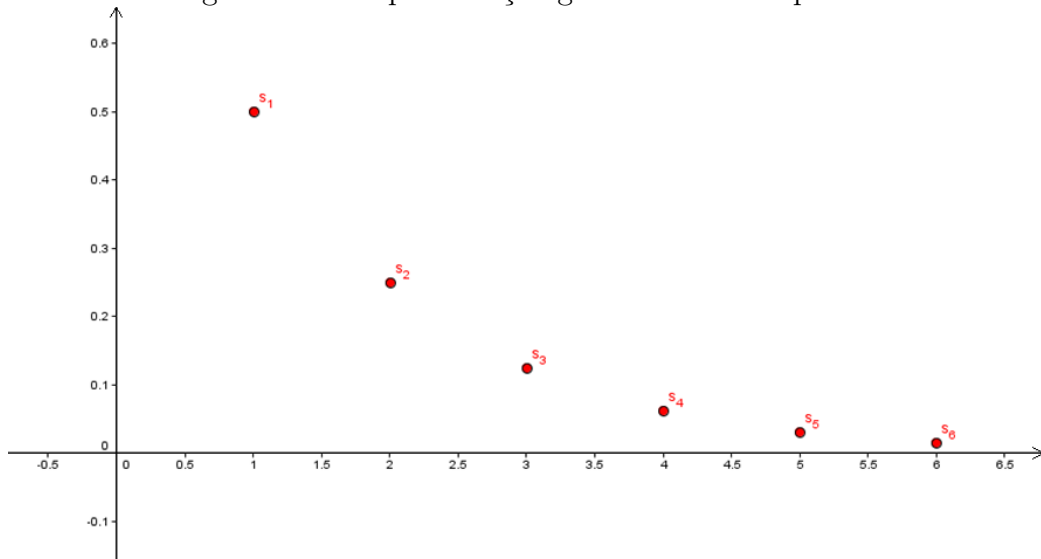
Fonte: Elaborada pelo autor

A ideia principal que fazemos correspondência hoje ao paradoxo de Zenão é o conceito de sequências, que corresponde a um conjunto de números reais $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ descritos em ordem crescente ou decrescente, onde corresponde ao termo geral da sequência. No caso da situação do paradoxo, podemos associar cada posição de Aquiles e da tartaruga as seguintes sequências, respectivamente: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots)$ e $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, \dots)$.

É importante ressaltar que será utilizado sequencias de pontos, pois acredita-se que fica mais fácil a compreensão dos intervalos e valores, tendo em vista que ao iniciar os estudos sobre limites, o aluno não tem noção de funções contínuas, ou ainda, possui uma ideia equivocada de continuidade.

Um exemplo de sequência com números reais é $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right)$ cuja expressão do termo geral é $s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e sua representação geométrica está na Figura 1.20:

Figura 1.20: Representação geométrica da sequência



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar tanto a sequência, quanto a Figura 1.20, percebe-se que os termos da sequência ficam cada vez menores, ou ainda, próximos de zero quando n cresce infinitamente. Assim, podemos encontrar termos da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tão próximos de zero quanto desejarmos, desde que seja tomado n suficientemente grande e isto significa que o limite da sequência é zero, o que em termos de notação escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (1.4)$$

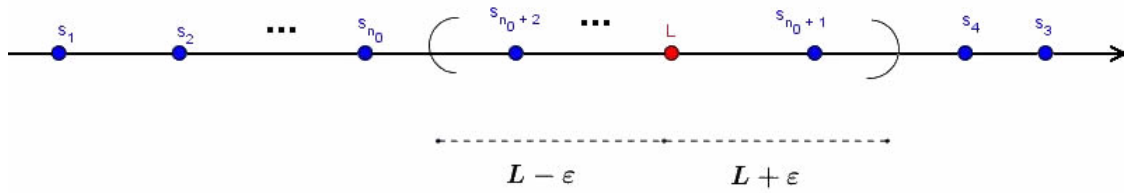
De modo geral, diz-se que o limite de uma sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais é L quando os termos s_n ficam tão próximos de L , desde que escolhamos n suficientemente grande. Em outras palavras, dizemos que o limite da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é L se para todo $\epsilon > 0$ é possível obter um número natural $n_0 > 0$ tal que se $n > n_0$, então $|s_n - L| < \epsilon$.

Utilizando símbolos matemáticos, o limite de s_n é representado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L \quad (1.5)$$

O número real $\epsilon > 0$ pode ser compreendido como sendo uma margem de erro, onde existe um número natural $n_0 > 0$, tal que se $n > n_0$, então os termos da sequência ficam próximos de L com margem de erro igual a ϵ .

A Figura 1.21 é uma representação geométrica do limite de uma sequência:

Figura 1.21: Representação da convergência da sequência s_n 

Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, no paradoxo de Zenão apresentado, se considerarmos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ as seqüências de Aquiles e da tartaruga, respectivamente, percebe-se que $a_n < t_n, \forall n \in \mathbb{N}$, e que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, ou seja, Aquiles aproxima da tartaruga exatamente no ponto L .

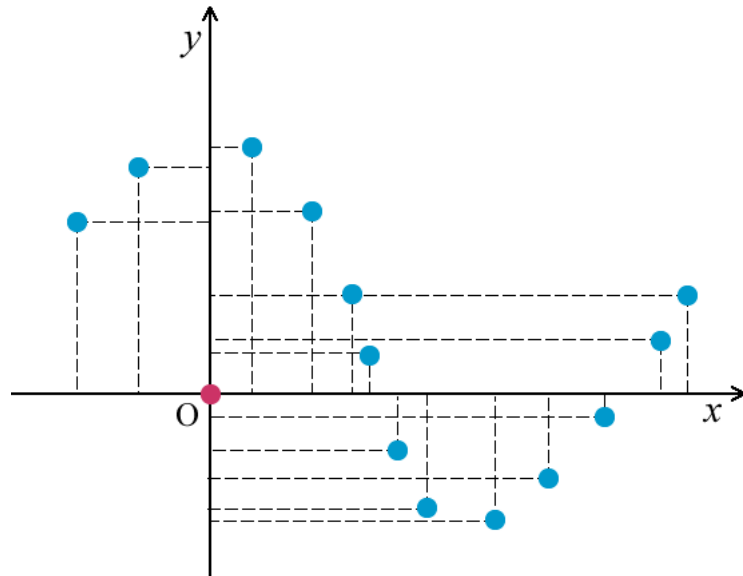
Neste primeiro momento, o paradoxo de Zenão foi citado por curiosidade, no entanto, embora possua uma simplicidade na compreensão, ele trata de um caso de seqüência de difícil entendimento para alunos que estão tendo o contato pela primeira vez com o conceito de seqüências, pois aborda a noção de infinito. Assim, será interessante trabalhar com seqüências que possuem valores fixos e, após familiarizado com os exemplos, trabalhar com seqüências que possuem infinitos termos.

1.5 A ideia intuitiva de limites com funções contínuas

Em 1.2 discutimos que o gráfico de uma função f é o conjunto de pontos pertencentes ao seguinte conjunto $\{(x, f(x)) : x \in D_f\}$, onde D_f representa o domínio da função e este conjunto de pontos pode ser representado no plano e desta forma obtemos o comportamento do gráfico da função.

A Figura 1.22 representa o gráfico de uma função $y = f(x)$ e observe que o gráfico de uma função não é necessariamente contínuo, ou seja, não é uma “linha contínua” sem interrupções.

Figura 1.22: Gráfico de uma função discreta



Fonte: Elaborada pelo autor

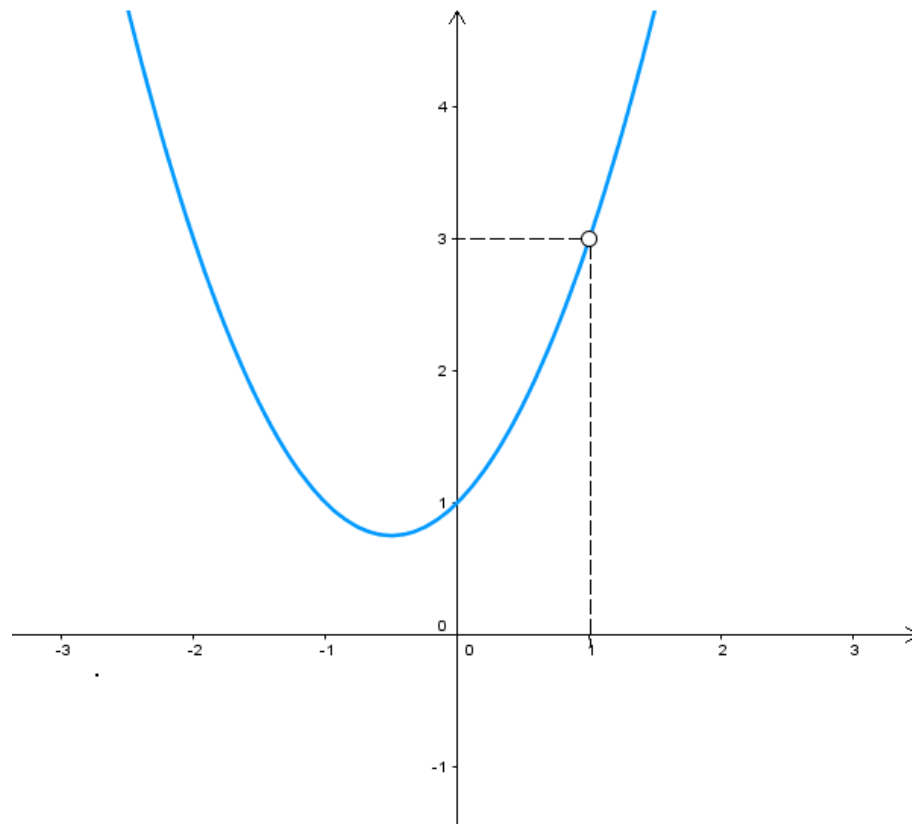
Durante a análise dos livros do ensino médio, percebeu-se que a maioria dos autores tratam apenas de funções contínuas e isto pode ser um fator que estimula o aluno a acreditar que o gráfico de toda função é contínuo, o que não é verdade, pois a Figura 1.22 representa o gráfico de uma função e não é contínua.

Neste sentido, após entender o gráfico de uma função com pontos, o aluno perceberá que as funções contínuas tem o mesmo comportamento das funções discretas, como é o caso das sequências que representam as funções do tipo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

O conceito de limites é o mais fundamental do cálculo, pois é por meio dele que é possível analisar convergência de sequências, séries, estudo de continuidade, derivada e integral. Além disso, é importante salientar que um dos principais objetos de estudos dos limites é o comportamento de uma função $f(x)$ quando x está próximo de um determinado valor real x_0 , e não necessariamente quando $x = x_0$, pois existem casos onde é possível determinar o limite da função quando x está em uma vizinhança de x_0 , mesmo x_0 não pertencendo ao domínio de f , ou ainda, quando o limite de f é diferente de $f(x_0)$.

Para compreender esta afirmação, consideremos a função $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = x^2 + x + 1$, cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.23:

Figura 1.23: Gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 1$



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe na figura acima, que a função não está definida para $x_0 = 1$, mas mesmo assim é possível determinar o limite de f quando x tende a $x_0 = 1$ e, neste caso, ressaltamos um erro comum que muitos estudantes cometem quando realizam o cálculo de limites que é determinar o valor numérico da função no ponto $x_0 = 1$ e atribuir o limite a este valor.

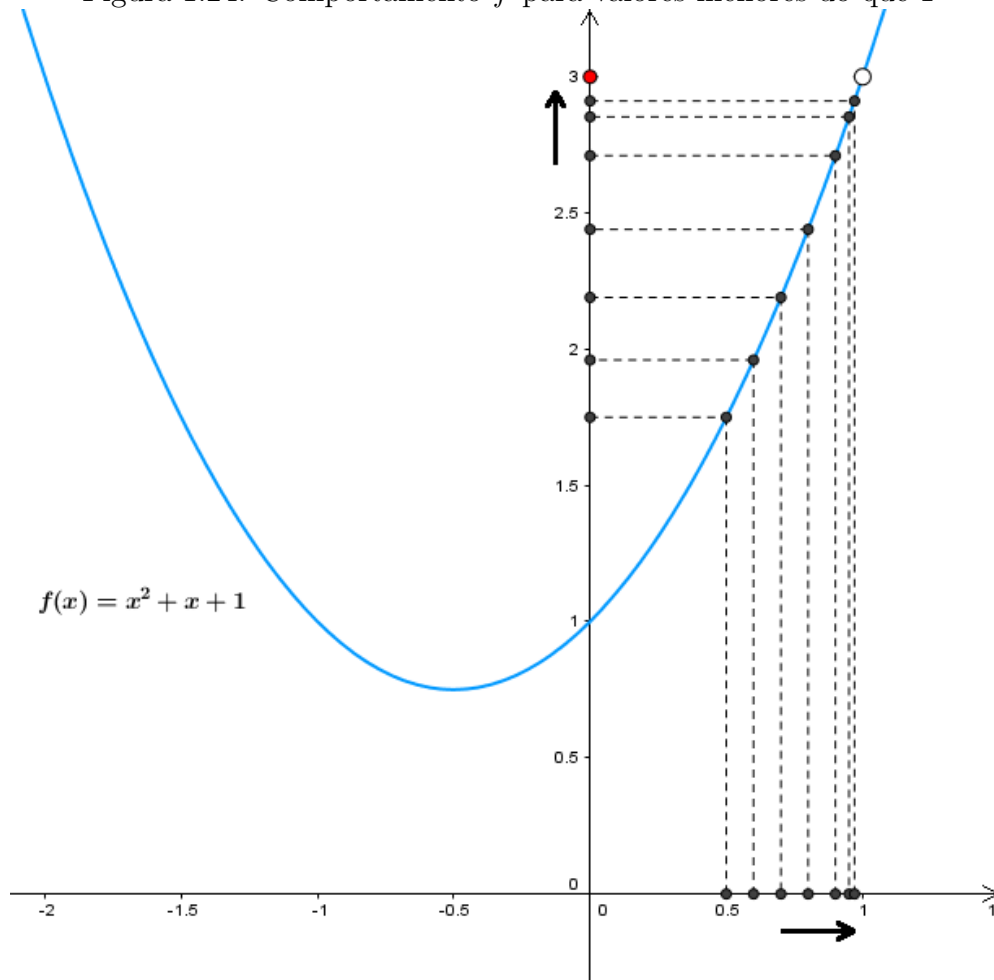
Para saber o comportamento da função quando x está próximo de $x_0 = 1$, isto é, o limite de f quando x tende a 1, vamos tomar duas sequências: uma sequência com valores maiores do que 1 e uma com valores menores do que 1, ambas com valores próximos de 1, porém diferentes de 1.

Consideremos a seguinte sequência de números reais com termos próximos e menores do que 1:

A Figura 1.24 ilustra o comportamento da função f , quando tomamos valores menores e próximos de $x_0 = 1$.

Tabela 1.1: Valores menores do que 1

Valores de x	Valores de $f(x)$
0,6	$f(0,6) = 1,96$
0,7	$f(0,7) = 2,19$
0,8	$f(0,8) = 2,44$
0,9	$f(0,9) = 2,71$
0,95	$f(0,95) = 2,85$
0,97	$f(0,97) = 2,91$
...	...

Figura 1.24: Comportamento f para valores menores do que 1

Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando a 1.24 e os valores da Tabela 1.1, percebe-se que a função se aproxima de 3 quando x está próximo de 1 por valores menores do que 1 e, neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a esquerda de 1 é igual a 3 e representamos por:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad (1.6)$$

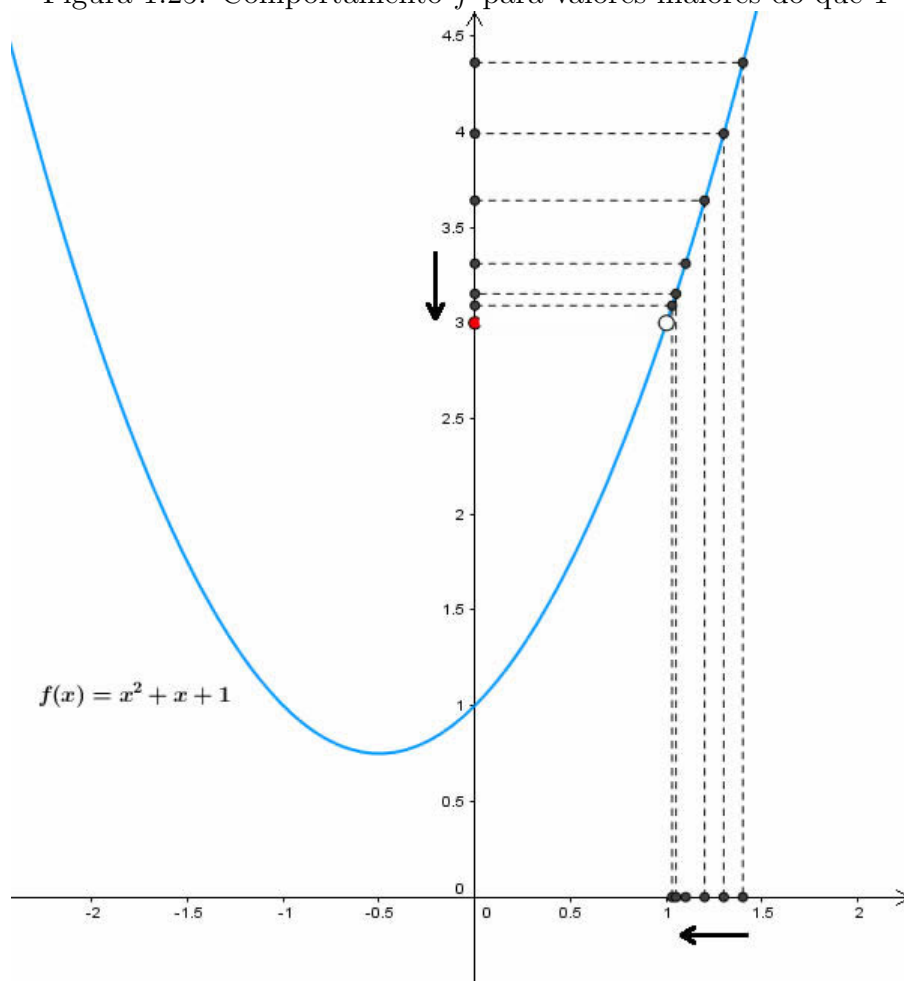
De maneira análoga ao estudo anterior, consideremos a seguinte sequência de números reais com termos próximos e maiores do que 1:

Tabela 1.2: Valores maiores do que 1

Valores de x	Valores de $f(x)$
1,4	$f(1,4) = 4,36$
1,3	$f(1,3) = 3,99$
1,2	$f(1,2) = 3,64$
1,1	$f(1,1) = 3,31$
1,05	$f(1,05) = 3,15$
1,03	$f(1,03) = 3,09$
...	...

A Figura 1.25 ilustra o comportamento da função f , quando tomamos valores maiores e próximos de $x_0 = 1$.

Figura 1.25: Comportamento f para valores maiores do que 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Semelhante ao caso anterior, analisando a 1.25 e a Tabela 1.2, percebe-se que a função também se aproxima de 3 quando x está próximo de 1 por valores maiores e próximos de 1. Assim, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende 1 pela direita é igual a 3 e representamos por:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \quad (1.7)$$

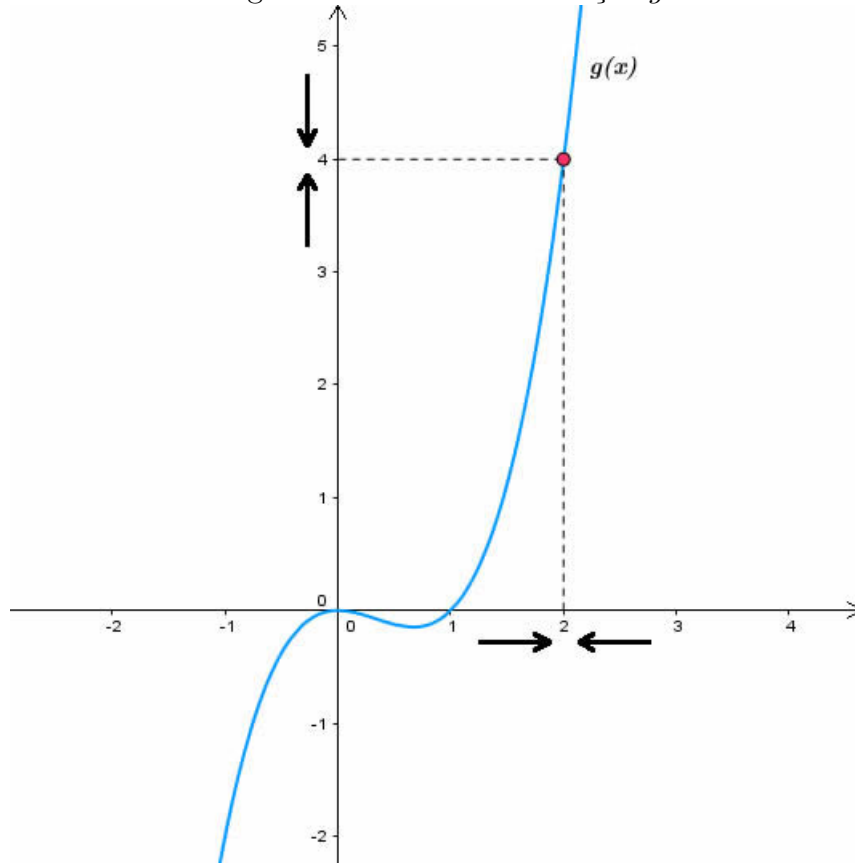
Diante desta análise realizada, o valor numérico da função $f(x) = x^2 + x + 1$ se aproxima de 3 quando x tende a 1 tanto com valores menores quanto para valores maiores e, portanto, dizemos que os *limites laterais* são iguais e que o limite de f quando x tende a 1 é igual a 3. Assim, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \quad (1.8)$$

Observe que os cálculos realizados acima apenas reforçaram a conclusão de que $f(x)$ se aproxima de 3 quando x está próximo de 1, pois analisando apenas o gráfico é possível obter esse resultado. Além disso, percebe-se que podemos retirar informações importantes se temos a representação geométrica da função no plano cartesiano, mesmo não sabendo a sua lei de formação.

Por exemplo, consideremos a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na Figura 1.26.

Figura 1.26: Gráfico da função g



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao realizar uma análise do gráfico da função $g(x)$, semelhante ao que foi feito anteriormente, percebe-se que quando x tende a 2, tanto pela direita quanto pela esquerda, nota-se que o valor numérico da função $g(x)$ tende a 4, levando a conclusão que os limites laterais de $g(x)$ coincidem e, portanto, o limite de $g(x)$ quando x tende a 2 é igual a 4, o que em termos de notação, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 \quad (1.9)$$

Uma observação importante é que a função $g(x)$ está definida no ponto $x = 2$, no entanto, a determinação do limite pode ser realizada quando sabemos a representação geométrica de uma função, mesmo esta função não sendo definida em um ou mais pontos, como foi o caso da função $f(x)$. Além disso, é possível obter por meio dos valores dos limites uma ideia do gráfico, ou seja, se o aluno souber o que ocorre com o limite da função em determinados pontos pertencentes ao domínio desta função, ele conseguirá determinar o comportamento do gráfico na vizinhança desses pontos e baseado nesses resultados ele consegue criar o gráfico ou um gráfico que se enquadra nos valores dos limites, mesmo não sabendo a lei de formação da função.

A Figura 1.27 representa uma atividade presente em (Stewart, 2013) onde o estudante deve determinar um gráfico baseado nos limites dados.

Figura 1.27: Construção do gráfico a partir do limite

Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$

16. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ não está definido

17. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$,
 $f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

18. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$,
 $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0$, $f(0) = 2$, $f(4) = 1$

Fonte: (STEWART, 2013, p. 90)

Embora as ideias utilizadas para determinar o limite das funções sejam simples, uma pesquisa realizada por Cottrill et al. (1996) mostrou que a compreensão da definição

de limite foi a dificuldade mais comum encontrada pelos alunos e a percepção de que o limite é algo que nunca é realmente atingido e/ou alcançado e que os alunos não haviam alcançado um nível de compreensão o suficiente para explicar de forma clara o que é o limite de uma função. Além disso, um ponto a destacar nos livros do ensino superior analisados, foi o fato de que diversos autores utilizam a definição com *épsilon* e *delta* para explicar o conceito de limites, o que nos leva a concluir que os alunos simplesmente memorizam tal definição e acreditam que compreenderam o conceito de limite pelo simples fato de se chegar ao resultado do limite solicitado no exercício.

2 O LIMITE E A GEOMETRIA

Iniciamos esta discussão sobre o valor numérico do limite e sua representação geométrica com a seguinte indagação: *Qual o critério para que uma função admita um limite? Ou ainda, apenas a representação geométrica é suficiente para determinar o limite de uma função?*

Para responder esta e outras perguntas, precisamos compreender alguns conceitos básicos, porém, importantes e que estão associados à ideia de limites e o que estes conceitos representam geometricamente e como eles estão associados a função que estamos analisando.

2.1 *Épsilon e delta com outro olhar*

O conceito de limite, embora seja simples, é carregado de dificuldades para os alunos, pois dizer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ significa $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ muitas das vezes se resume em uma simples memorização da definição e não o aprendizado, pois “lembrar a definição de limite é uma coisa, adquirir a concepção fundamental é outra” (CORNU, 1991, p. 153 apud AMORIM, 2011, p. 37).

Para o professor a tarefa de trabalhar a ideia de algo que nunca é alcançado é também carregado de dificuldades, pois “uma exposição clara das ideias não é suficiente para que os estudantes compreendam tal conceito” (AMORIM, 2011, p. 39).

Uma sugestão de Cornu (1991) citada por Amorim (2011) é que

antes de começar a trabalhar com a noção de limite, os estudantes tenham a possibilidade de trabalhar com atividades adequadas para ajudá-los a tomar consciência das próprias concepções espontâneas, imagens, intuições e experiências que virão à tona quando se iniciar o processo de aprendizagem de limites; em particular, deve-se discutir os diferentes significados das palavras utilizadas dentro desse contexto (p. 39).

Além disso, Williams (1991) cita que a maioria dos alunos que concluem um curso de cálculo tem uma pequena compreensão do conceito de limite, e muito poucos nunca alcançarão uma compreensão completa da rigorosa definição. Diante do exposto e tendo em vista a definição apresentada acima, fica então a indagação: Qual o significado para

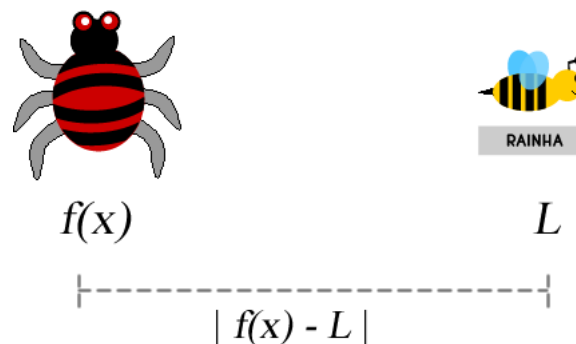
$\forall \epsilon > 0$ e $\exists \delta > 0$, ou ainda, por que a expressão $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ nem sempre é válida?

Para responder estas indagações, iremos recorrer à representação geométrica de cada um dos entes envolvidos na definição, pois, além dos gráficos serem carregados de informações, Williams (1991) percebeu em sua pesquisa realizada com alunos que estudavam cálculo, que estes demonstraram grande interesse em gráficos como um meio de entendimento do conceito de limite, fazendo problemas de limite, e justificando as declarações sobre limites.

No Capítulo 1 discutiu-se a ideia de que se um corpo estranho está próximo da rainha a uma distância menor do que ou igual a $\epsilon > 0$, então é possível obter uma circunferência de raio $\delta > 0$ igual a distância do corpo estranho a rainha de modo que existam diversas abelhas dentro desta circunferência protegendo a rainha.

Se considerarmos que o corpo estranho é representado por $f(x)$ e que L é o trono da rainha, então a distância entre o corpo estranho e a rainha pode ser indicado por $|f(x) - L|$ conforme ilustra a Figura 2.1.

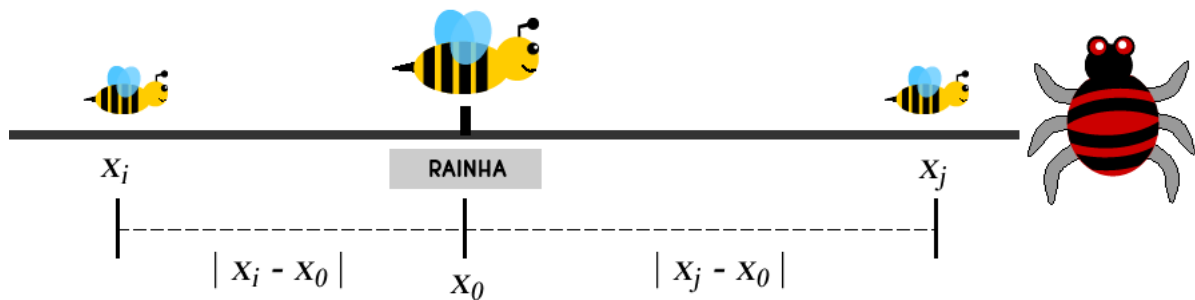
Figura 2.1: Distância entre a rainha e o corpo estranho



Fonte: Elaborada pelo autor

Por outro lado, se considerarmos como sendo x_i cada abelha que está protegendo a rainha e x_0 o trono da rainha, então podemos indicar a distância entre cada abelha e a rainha por $|x_i - x_0|$, conforme ilustra a Figura 2.2.

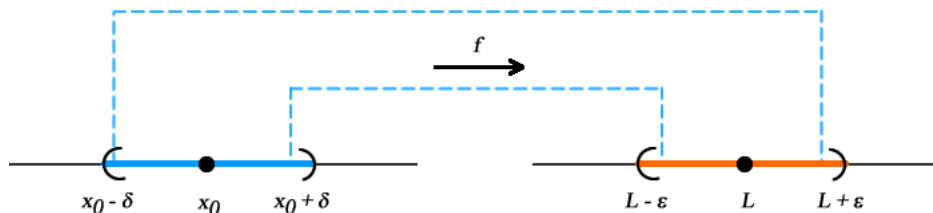
Figura 2.2: Distância entre a rainha e as abelhas



Fonte: Elaborada pelo autor

De posse de todos esses termos, se um corpo estranho está próximo à rainha a uma distância menor do que $\epsilon > 0$, ou seja, $|f(x) - L| < \epsilon$, então é possível obter diversas abelhas protegendo a rainha a uma distância menor do que δ , ou seja, $|x - x_0| < \delta$.

Em outras palavras, podemos escolher qualquer valor $\epsilon > 0$ que ainda assim, podemos obter $\delta > 0$ e em símbolos matemáticos, escrever $\forall \epsilon > 0$ e $\exists \delta > 0$, significa que se $f(x)$ está próximo de L por menos de ϵ , então x deve estar próximo x_0 por menos de δ , conforme ilustra a Figura 2.3:

Figura 2.3: Relação entre *delta* e *epsilon*

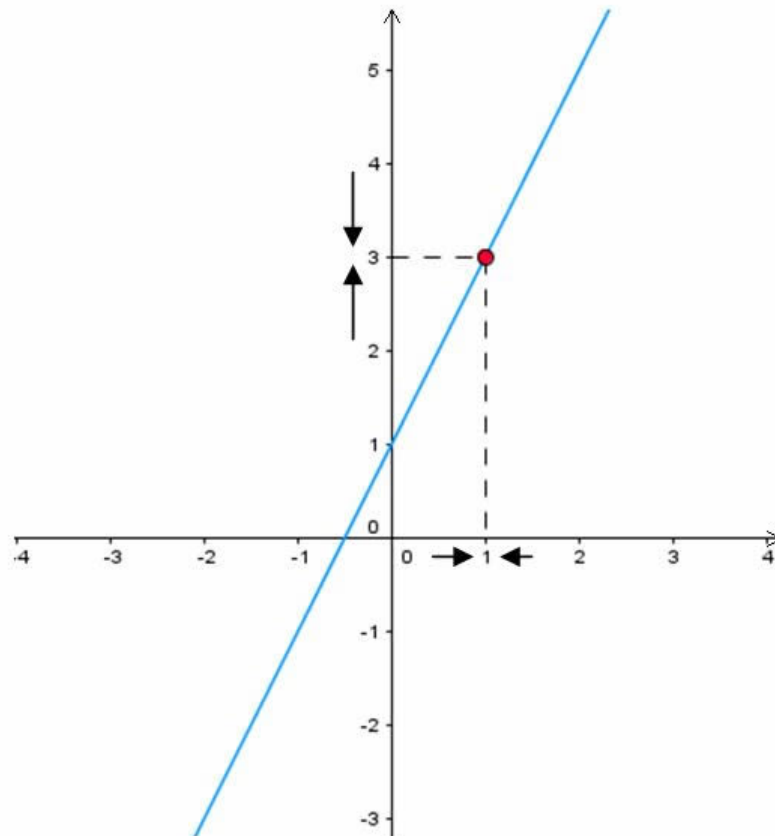
Fonte: Elaborada pelo autor

Desta forma, observando a Figura 2.3 e fazendo uma análise da situação da colméia, L representa a rainha e $L - \epsilon$ indica a distância que o corpo estranho está da rainha. Além disso, o intervalo representado em azul corresponde as abelhas que estarão próximas do trono da rainha, não tendo a obrigatoriedade da rainha estar no conjunto.

Portanto, escrever $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, significa que por menor que seja o intervalo centrado em L (de comprimento ϵ), podemos encontrar um intervalo com centro em x_0 (de comprimento δ) de tal modo que a imagem de todos os valores neste intervalo (exceto possivelmente x_0) pertencem ao intervalo com centro em L .

Para melhor compreensão das ideias apresentadas até o momento, vamos analisar o limite de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de um determinado valor real e, para isto, consideremos a função $f(x) = 2x + 1$, cujo gráfico está representado na Figura 2.4 e cujo limite será analisado no ponto $x = 1$.

Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$



Fonte: Elaborada pelo autor

Nesse sentido, vamos determinar alguns valores de $f(x) = 2x + 1$ com $x < 1$:

Tabela 2.1: Valores de $f(x) = 2x + 1$ com $x < 1$

Valores de x	Valores de $f(x)$
0,6	$f(0,6) = 2,2$
0,7	$f(0,7) = 2,4$
0,8	$f(0,8) = 2,6$
0,9	$f(0,9) = 2,8$
0,95	$f(0,95) = 2,9$
0,97	$f(0,97) = 2,94$
...	...

Analisando a Tabela 2.1 e a Figura 2.4, percebe-se que quando x se aproxima de 1 por valores menores do que 1, $f(x)$ se aproxima de 3 por valores menores do que 3.

De maneira semelhante, vamos determinar alguns valores de $f(x) = 2x + 1$ com $x > 1$:

Tabela 2.2: Valores de $f(x) = 2x + 1$ com $x > 1$

Valores de x	Valores de $f(x)$
1,4	$f(1,4) = 3,8$
1,3	$f(1,3) = 3,6$
1,2	$f(1,2) = 3,4$
1,1	$f(1,1) = 3,2$
1,05	$f(1,05) = 3,1$
1,03	$f(1,03) = 3,06$
...	...

Analisando a Tabela 2.2 e a Figura 2.4, percebe-se que quando x se aproxima de 1 por valores maiores do que 1, $f(x)$ se aproxima de 3 por valores maiores do que 3.

De maneira geral, quando x está próximo de $x_0 = 1$, $f(x)$ está próximo de 3, onde concluímos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ e observe que este resultado pode ser comprovado visualmente na Figura 2.4 por meio das indicações das setas.

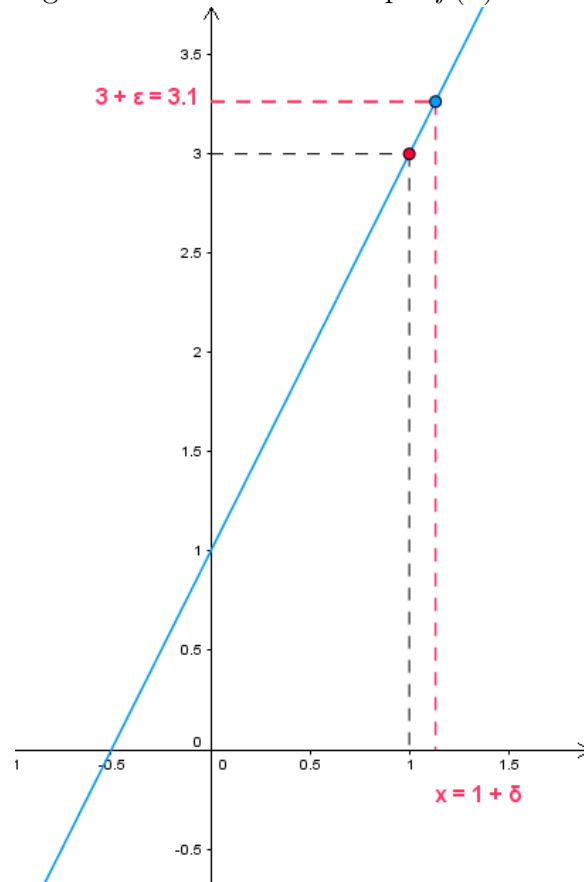
Assim, se $f(x)$ estiver próximo de 3 por menos de $\epsilon = 0,1$, então quão próximo de $x_0 = 1$ deve estar x , isto é, qual deve ser o valor de δ para que a imagem de x no intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$ esteja no intervalo $(3 - \epsilon; 3 + \epsilon)$?

Primeiramente, é importante observar que $|x - 1| > 0$ quando $x \neq 1$, ou seja, a distância de x até 1 é positiva se $x \neq 1$. Assim, queremos determinar qual deve ser a distância máxima de x até 1 para que a distância entre $f(x)$ até 3 seja menor do que $\epsilon = 0,1$, o que é equivalente a expressão:

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon = 0,1 \quad (2.1)$$

Para determinar um possível “candidato” para $\delta > 0$, vamos determinar o valor de x tal que $f(x) = 3 + \epsilon$ e considerar $x = 1 + \delta$, obtendo, portanto, o valor de δ conforme ilustra a Figura 2.5.

Figura 2.5: Valor de x tal que $f(x) = 3 + \epsilon$



Fonte: Elaborada pelo autor

Fazendo $f(x) = 3 + \epsilon$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \epsilon \\ (2x + 1) &= 3 + \epsilon \\ (2x + 1) - 3 &= \epsilon \\ 2x - 2 &= \epsilon \\ 2 \cdot (x - 1) &= \epsilon \\ x &= 1 + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

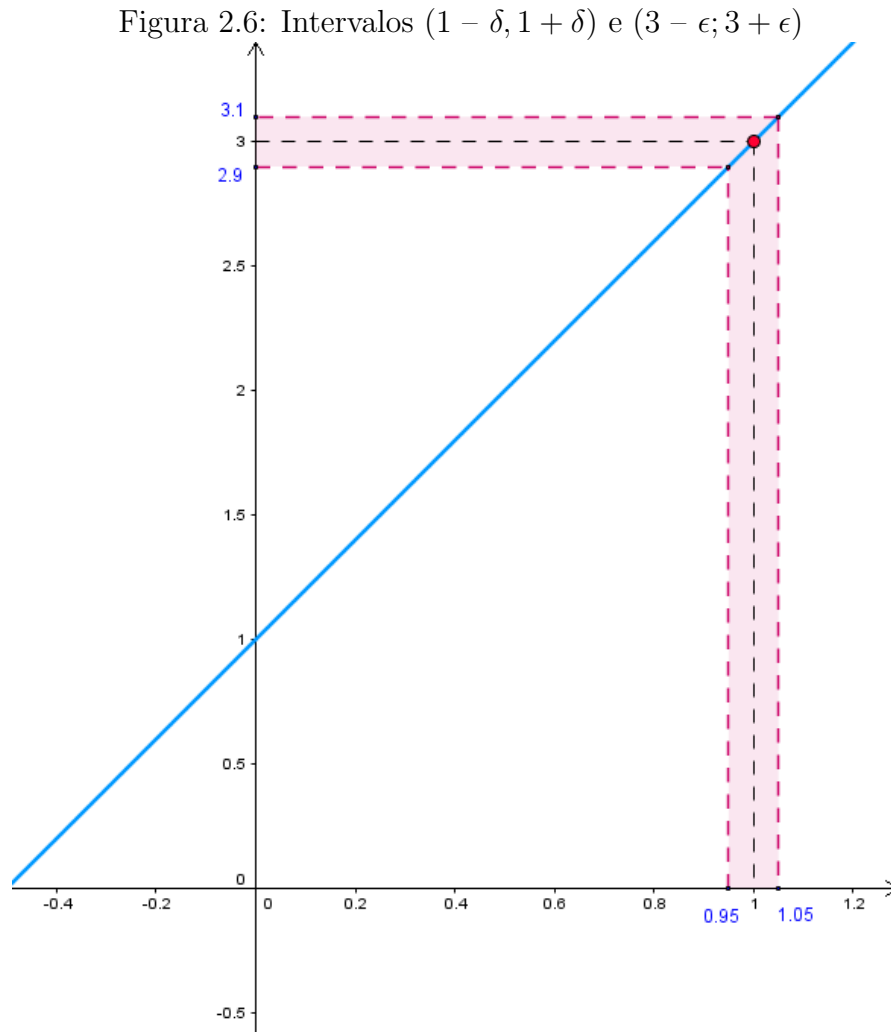
Analisando a expressão $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ pode-se considerar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, pois:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 1| &< \delta = \frac{\epsilon}{2} = 0,05 \\ 2|x - 1| &< 2(0,05) \\ |2x - 2| &< 0,1 \\ |(2x + 1) - 3| &< 0,1 \end{aligned}$$

$$|f(x) - 3| < \epsilon \quad (2.2)$$

Por outro lado, se $f(x) = 3 - \epsilon$, então ao desenvolver as operações de maneira semelhante ao caso $f(x) = 3 + \epsilon$, obteria-se $x = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ e, portanto, basta considerar novamente $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Nesta perspectiva, a distância de x a 1 deve ser menor do que $\delta = 0,05$ para que a distância de $f(x)$ a 3 seja menor do que $\epsilon = 0,1$, conforme ilustra a Figura 2.6:



Fonte: Elaborada pelo autor

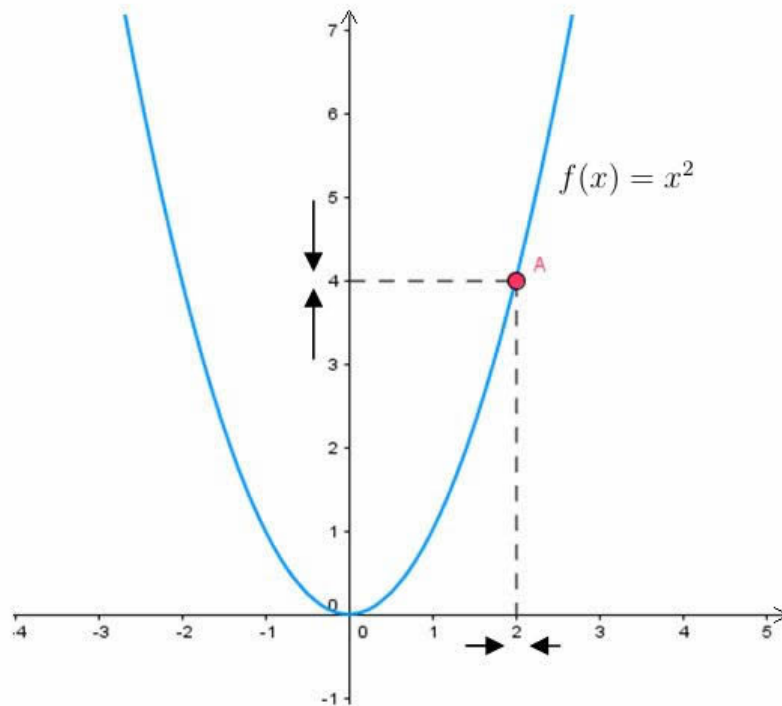
Observe pela Figura 2.6 que se for traçado uma reta paralela ao eixo x e passando pelo ponto $(0, y)$, com $y \in (3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$, então obtêm-se o ponto de intersecção com o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ e esse ponto possui abscissa pertencente ao intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$. Assim, se traçar diversas retas paralelas ao eixo das abscissas, estas retas terão pontos de intersecções com o gráfico de $f(x)$ cujas abscissas pertencem ao intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$.

Esta construção geométrica permite concluir que qualquer número real pertencente ao intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta) = (0,95; 1,05)$, possui imagem no intervalo $(3 - \epsilon, 3 + \epsilon) = (2,9; 3,1)$ pela função $f(x) = 2x + 1$. Portanto, neste caso, podemos estabelecer uma relação entre δ e ϵ , a luz da definição de limites, isto é, sempre que x estiver no intervalo $(0,95; 1,05)$ teremos $f(x)$ no intervalo $(2,9; 3,1)$ (ver novamente a Figura 2.6).

É importante ressaltar que se tomarmos um valor menor para ϵ , ainda será possível encontrar outro valor (menor) para δ de modo que todo número real pertencente ao intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$ terá imagem no intervalo $(3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$ pela função $f(x) = 2x + 1$ e o resultado será novamente semelhante ao apresentado na Figura 2.6.

Diante a discussão realizada até o momento, levantamos alguns pontos importantes no que tange a interpretação geométrica dos limites, ou seja, em alguns casos a determinação de $\delta > 0$ consiste em analisar o intervalo para garantir que todo ponto em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tem imagem no intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, ou seja, é necessário uma análise no comportamento da função para determinar qual $\epsilon > 0$ tomar para que a definição seja satisfeita e para compreender essa ideia, consideremos a função $f(x) = x^2$, cujo gráfico está representado na Figura 2.7:

Figura 2.7: Gráfico da função $f(x) = x^2$

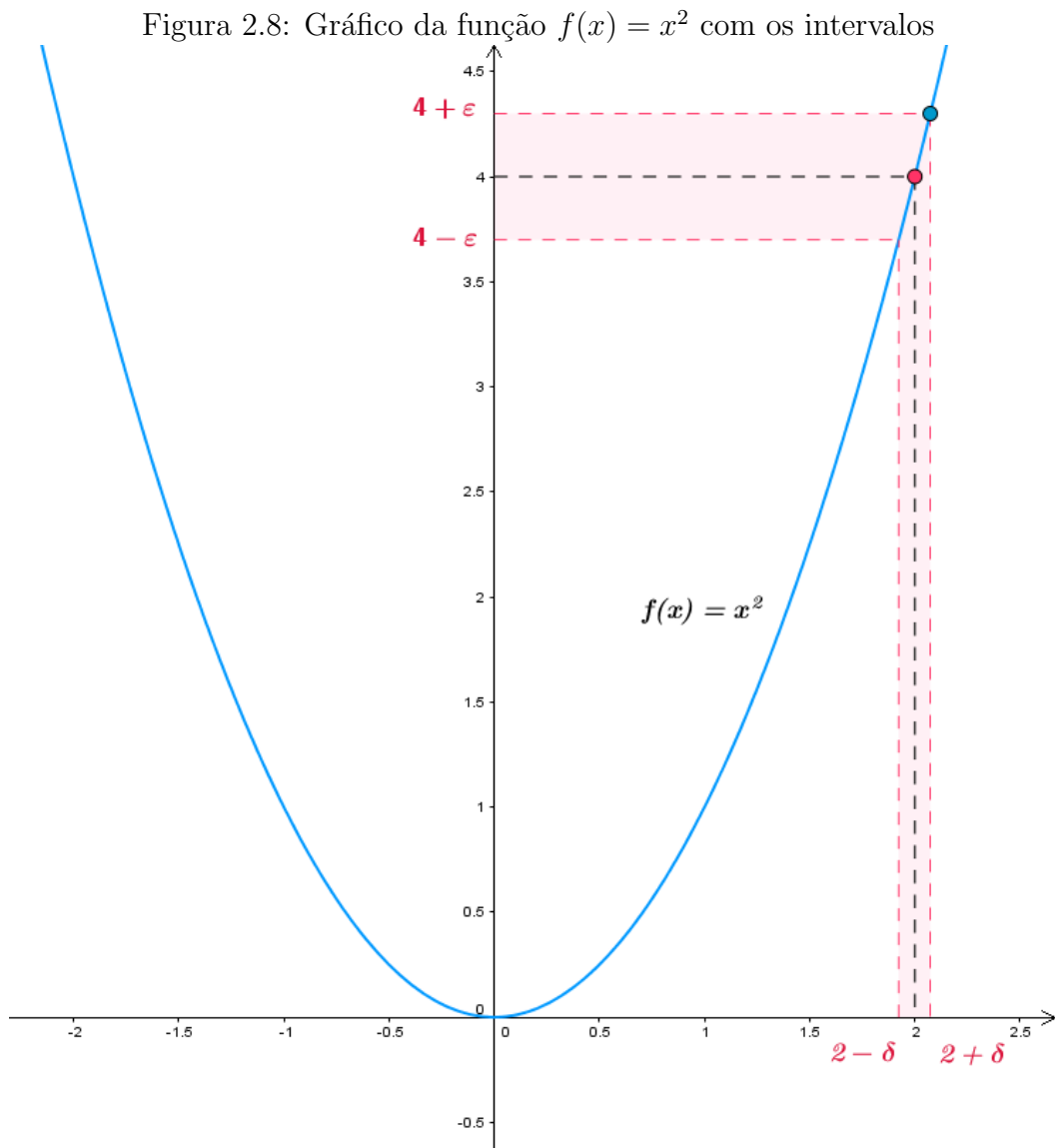


Fonte: Elaborada pelo autor

Por meio do gráfico da função $f(x) = x^2$, conclui-se que quando x tende a $x_0 = 2$, $f(x)$ está próximo de 4, onde concluímos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Desta forma, fazemos

novamente a seguinte indagação: se $f(x)$ estiver próximo de 4 por menos de $\epsilon = 0,3$, então quão próximo de $x_0 = 2$ deve estar x , isto é, qual deve ser o valor de $\delta > 0$ para que a imagem de x no intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ esteja no intervalo $(4 - \epsilon; 4 + \epsilon)$?

Para responder esta pergunta, consideremos a Figura 2.8 cujos intervalos em torno de $L = 4$ e $x_0 = 2$ estão indicados no gráfico:



Fonte: Elaborada pelo autor

Para determinar um “candidato” a ser o valor de δ neste caso, vamos determinar o valor de x de modo que $f(x) = 4 + \epsilon$, semelhante ao caso da função $f(x) = 2x + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 + \epsilon \\ x^2 &= 4 + \epsilon \\ x &= \pm\sqrt{4 + \epsilon} > 0 \end{aligned}$$

Como x está próximo de 2 e queremos obter um valor para $\delta > 0$, então iremos considerar $x > 0$:

$$x = \sqrt{4 + \epsilon} > 0$$

Neste sentido, um “candidato” a $\delta > 0$ é $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$. Por outro lado, vamos determinar o x de modo que $f(x) = 4 - \epsilon$, semelhante ao caso anterior e considerando novamente $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 - \epsilon \\ x^2 &= 4 - \epsilon \\ x &= \sqrt{4 - \epsilon} \end{aligned}$$

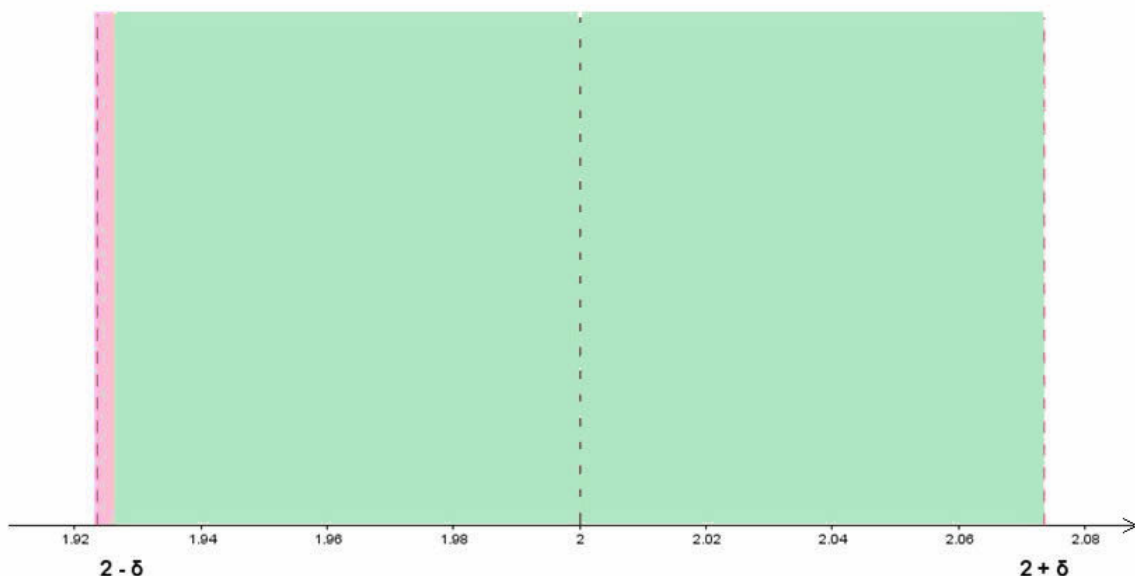
Neste ponto cabe uma importante observação referente ao valor de ϵ . Observe que neste caso, não pode ser tomado qualquer valor para $\epsilon > 0$, pois se tomar, por exemplo, $\epsilon = 5$, obtêm-se $4 - \epsilon = 4 - 5 = -1$ e como -1 não pertence à imagem de $f(x) = x^2$ pode ser impossível obter $\delta > 0$ que satisfaça as condições de limites.

Assim, ϵ neste caso fica restrito ao intervalo $(0, 4)$ para satisfazer as condições de limites e, satisfeita as condições de existência, temos que outro “candidato” a δ é $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ e note que $2 - \sqrt{4 - \epsilon} \neq \sqrt{4 + \epsilon} - 2$.

Como $\sqrt{4 + \epsilon} - 2 < 2 - \sqrt{4 - \epsilon}$, é necessário estabelecer um valor para δ de modo que a imagem de x no intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ esteja no intervalo $(4 - \epsilon; 4 + \epsilon)$ e para isto, vamos tomar $\delta = \min \{ \sqrt{4 + 0,3} - 2; 2 - \sqrt{4 - 0,3} \} = \sqrt{4 + 0,3} - 2 = 0,0736$.

A Figura 2.9 representa o intervalo em torno de $x_0 = 2$:

Figura 2.9: Intervalo em torno de $x_0 = 2$



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe na Figura 2.9 que a parte do intervalo **verde** corresponde ao valor de $\delta = \min \{ \sqrt{4 + \epsilon} - 2; 2 - \sqrt{4 - \epsilon} \} = \sqrt{4 + \epsilon} - 2$ enquanto que a parte **rosa** corresponde ao excesso caso tivéssemos tomado $\delta = 2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ e, neste caso, os valores de x pertencentes a essa parte não têm imagens no intervalo $(4 - \epsilon, 4 + \epsilon)$.

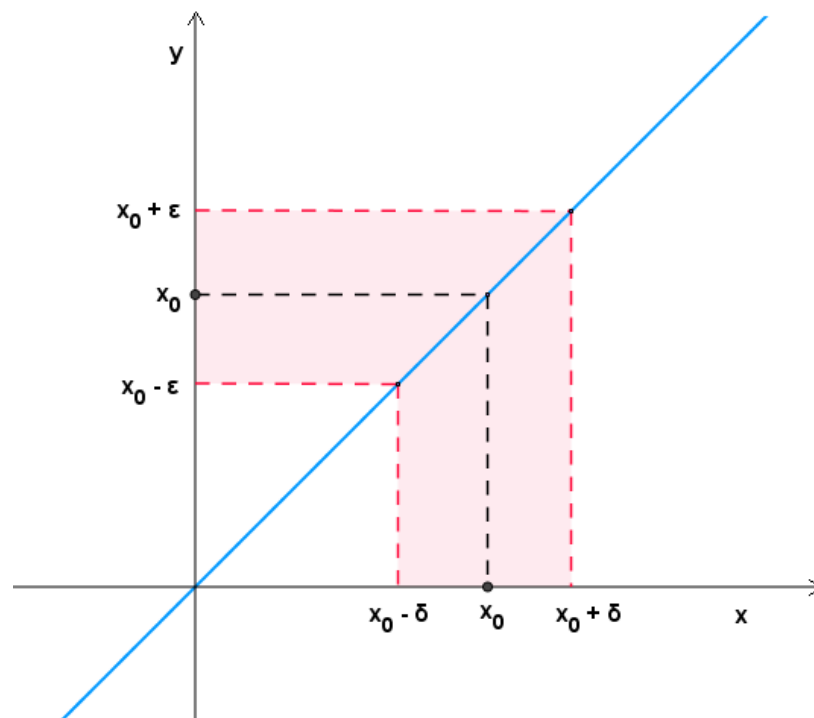
Portanto, basta tomar $\delta = 0,0736$, pois neste caso todo ponto no intervalo $(1,9264; 2,0736)$ terá imagem no intervalo $(3,7; 4,3)$.

2.2 Primeiras propriedades de limites

Seguindo a mesma idéia apresentada acima, vamos analisar geometricamente os seguintes limites $\lim_{x \rightarrow x_0} k$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} x$ onde k é uma constante real e determinar o valor desses limites.

O gráfico da função $g(x) = x$ está representado na Figura 2.10, onde tomamos uma vizinhança em torno de $g(x_0) = x_0$.

Figura 2.10: Gráfico da função $g(x) = x$ com vizinhança em torno de $g(x_0) = x_0$



Fonte: Elaborada pelo autor

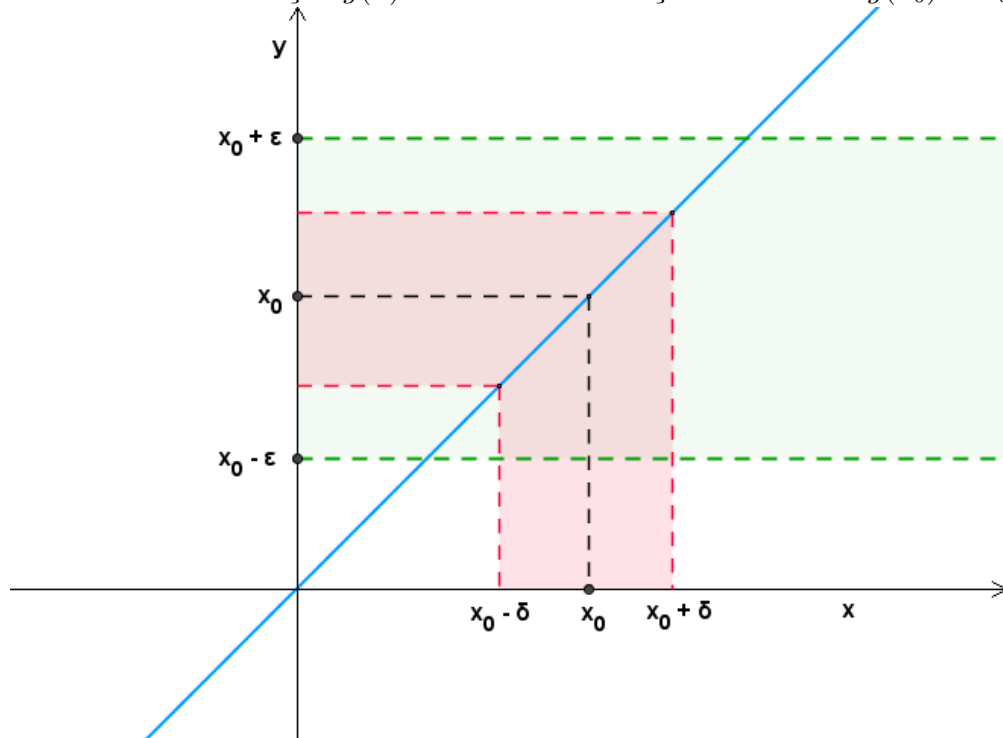
A Figura 2.10 permite concluir que se tomarmos $\delta = \epsilon$ (ou ainda $\delta < \epsilon$), teremos que qualquer número real x no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ terá imagem pertencente ao

intervalo $(g(x_0) - \epsilon, g(x_0) + \epsilon)$ e, conseqüentemente, podemos tomar $g(x_0)$ tão próximo de x_0 quanto quisermos desde que tomemos ϵ suficientemente pequeno e $\delta = \epsilon$. Desta forma, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0. \quad (2.3)$$

A Figura 2.11 ilustra a situação quando é tomando $\delta < \epsilon$:

Figura 2.11: Gráfico da função $g(x) = x$ com vizinhança em torno de $g(x_0) = x_0$ e $\delta < \epsilon$

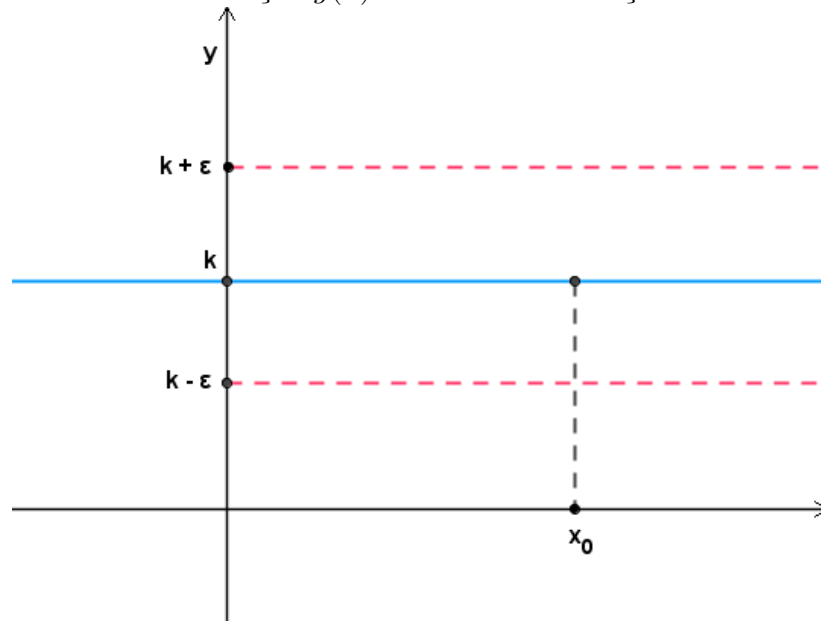


Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que nesta figura que todo x no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pertence ainda ao intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, ou ainda, para qualquer $\delta < \epsilon$ teremos que todos os pontos do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ terão imagens no intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Para realizar a análise do limite $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, onde $h(x) = k$, vamos considerar o gráfico da função $h(x)$ e uma vizinhança em torno de $h(x_0) = k$, com $k > 0$.

Figura 2.12: Gráfico da função $g(x) = x$ com vizinhança em torno de $h(x_0) = k$



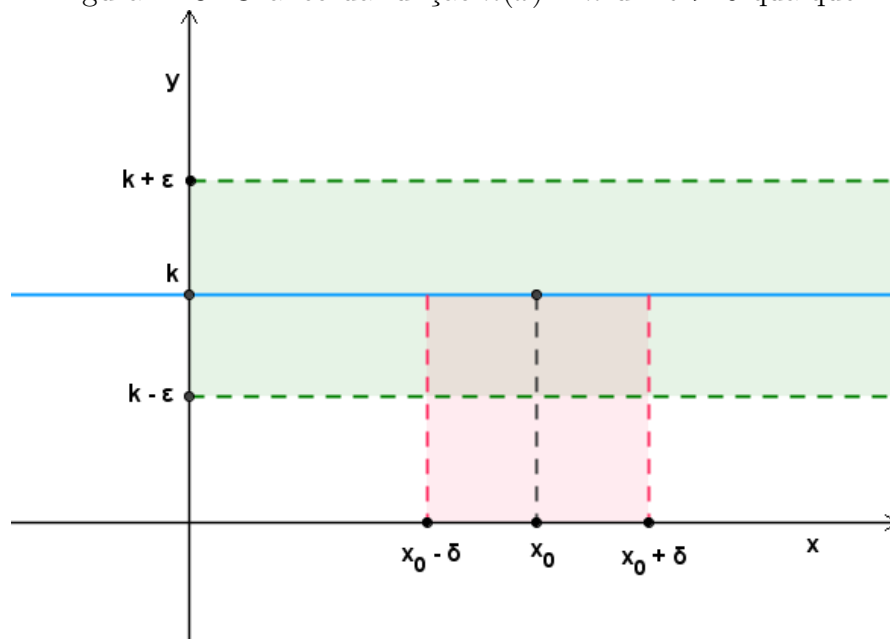
Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando a Figura 2.12, temos que para qualquer valor de $\epsilon > 0$, todo intervalo em torno de x_0 possui todos os pontos com imagens em $(h(x_0) - \epsilon, h(x_0) + \epsilon)$, ou seja, podemos tomar qualquer $\delta > 0$, pois nesse caso todo ponto no intervalo $(k - \delta, k + \delta)$ possui imagem em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, conseqüentemente, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k. \quad (2.4)$$

A Figura 2.13 ilustra a situação para um $\delta > 0$ qualquer:

Figura 2.13: Gráfico da função $h(x) = k$ um $\delta > 0$ qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe novamente que, por menor que seja $\delta > 0$, todo x no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ terá imagem em $(x_0 + \epsilon, x_0 + \epsilon)$, comprovando a Equação 2.4.

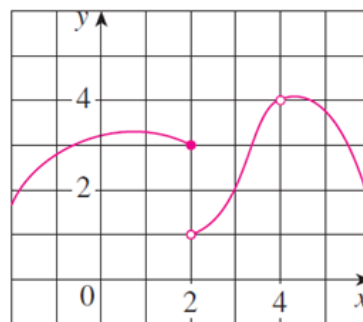
Diante das representações geométricas realizadas acima, chamamos a atenção para o quão importante é a interpretação geométrica no estudo de limites e suas propriedades, pois é possível ver claramente o comportamento da função e obter informações que algebricamente não seria possível. É importante que o aluno não seja instruído a resolver apenas exercícios que envolvem apenas manipulações algébricas, pelo contrário, é importante que alguns exemplos contenham gráficos e figuras para que os conceitos sejam de fato compreendidos.

Ao analisar a literatura de Stewart (2013), nota-se que o autor tem essa preocupação no que tange a representação geométrica, pois em diversos exercícios é exigido do aluno a interpretação do gráfico para determinar o limite, conforme ilustra a Figura 2.14.

Figura 2.14: Exercício de cálculo de limites graficamente

4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 (d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ (f) $f(4)$



Fonte: (Stewart, 2013, p.88)

Além da análise gráfica para determinar os limites, o autor leva ainda o estudante a desenvolver o gráfico para determinar o limite, conforme ilustra a Figura 2.15:

Figura 2.15: Exercício de criação de gráfico e determinação de limites

11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe:

$$11. f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} 1 + \text{sen } x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \text{sen } x & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

Fonte: (Stewart, 2013, p.89)

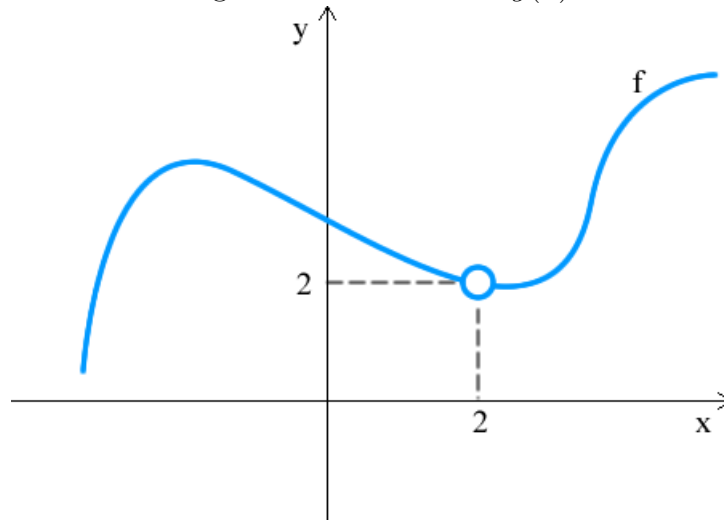
No estudo realizado por Williams (1991), o pesquisador percebeu que ao solicitar o valor do limite de algumas funções, alguns alunos envolvidos na pesquisa afirmaram que bastava olhar para o gráfico que todas as informações já eram obtidas, sendo que muitos destes representavam os gráficos no plano para encontrar limites, conforme os exemplos descritos nas figuras 2.14 e 2.15.

2.3 Atividades sobre limites

Diante da discussão realizada, percebe-se que se faz necessária uma reflexão no que tange aos exercícios presentes em livros de ensino superior relacionado a limites, fazendo com que o aluno possa raciocinar e aplicar os conceitos apresentados pelo professor e, nesta perspectiva, propomos algumas atividades que podem contribuir para o estudo e compreensão de limites, minimizando assim a memorização dos conceitos e aplicação sem sentido de técnicas para calcular valores de limites.

2.3.1 Atividade 01

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ cujo gráfico está representado na Figura 2.16.

Figura 2.16: Gráfico de $g(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Baseado no gráfico da função $f(x)$, responda as seguintes questões:

A) Mesmo a função não sendo definida para $x = 2$, é possível determinar o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

Justifique a resposta.

B) Qual o valor da função quando se aproxima de 2 por valores menores do que 2.

C) Qual o valor da função quando se aproxima de 2 por valores maiores do que 2.

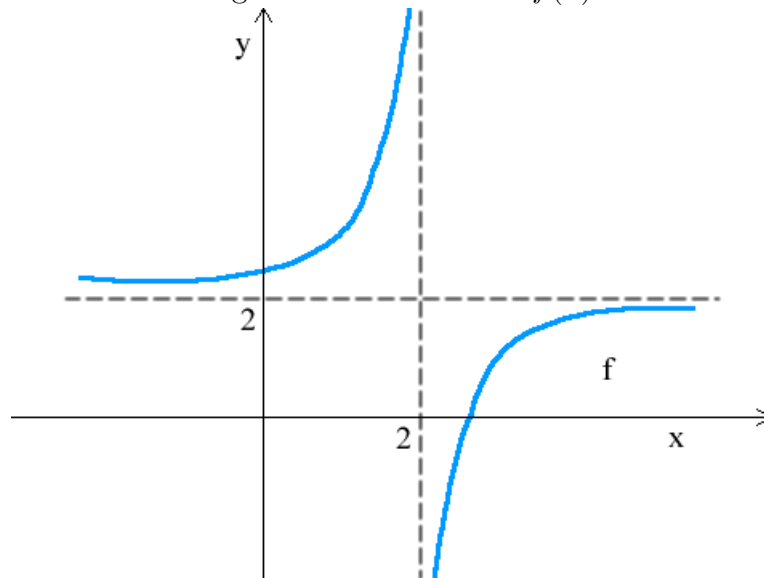
D) Baseado nos itens B) e C) qual o limite de $f(x)$ quando x tende a 2?

E) Podemos afirmar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$? Justifique a resposta.

F) Qual deve ser o valor de $f(2)$ para que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$? Justifique sua resposta.

2.3.2 Atividade 02

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na Figura 2.17.

Figura 2.17: Gráfico de $f(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Baseado no gráfico da função $f(x)$, responda as seguintes questões:

- A) Mesmo a função não sendo definida para $x = 2$, é possível determinar o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Justifique a resposta.
- B) Qual o valor da função quando se aproxima de 2 por valores menores do que 2.
- C) Qual o valor da função quando se aproxima de 2 por valores maiores do que 2.
- D) Baseado nos itens C) e D) qual o limite de $f(x)$ quando x tende a 2?
- E) Podemos afirmar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$? Justifique a resposta.
- F) Qual deve ser o valor de $f(2)$ para que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$? Justifique sua resposta.

2.4 Discussão das atividades propostas

Na atividade 2.3.1, espera-se que o aluno seja capaz de compreender que no estudo sobre limites o importante não é o que ocorre quando $x = 2$, mas sim o comportamento da função quando x está próximo de 2, e neste caso, analisando o gráfico, quando x se aproxima de 2 pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ está próximo de 2. Além disso, como os valores de $f(x)$ se aproxima de 2 quando x se aproxima de 2 tanto pela direita quanto pela esquerda, então conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$. Como $f(2)$ não está definida, então não se pode afirmar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ e para que isso ocorra é necessário que $f(2) = 2$.

Na atividade 2.3.2, espera-se que o aluno seja capaz de compreender que quando x se aproxima de 2 por valores menores do que dois, o valor da função aumenta indefinidamente e quando x se aproxima de 2 por valores maiores do que 2, a função diminui

indefinidamente e, como os limites não coincidem, então não existe¹ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

É importante salientar que essa atividade faz o aluno refletir sobre o conceito de limite, pois como o limite não existe, então não é possível determinar um valor para $f(2)$ de modo que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

¹Dizemos que o limite de uma função não existe quando os limites laterais são diferentes.

3 PROPRIEDADES DE LIMITES

No Capítulo 1 realizamos a discussão sobre o conceito de **função** e introduzimos o conceito de limites. Já no Capítulo 2, foi realizada uma discussão sobre o **épsilon** e o **delta** e foi apresentada as primeiras propriedades sobre limites, a saber, $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Neste capítulo serão discutidas algumas propriedades importantes como o limite da soma de duas funções, o limite de uma constante vezes uma função e o limite da diferença de duas funções, ou seja, os seguintes limites:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$

onde f e g são duas funções cujos limites $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existem.

É importante ressaltar que neste momento o estudante já deve estar familiarizado com o conceito de limites, no entanto, ainda será utilizado em algumas propriedades a ideia da colmeia, tratada nos capítulos anteriores, para facilitar a compreensão dessas propriedades.

3.1 Limite da soma de duas funções

Para explicar o limite da soma, primeiramente serão utilizadas duas funções com o mesmo domínio e, neste caso, adotaremos o domínio como sendo um subconjunto dos números naturais, pois acredita-se que o aluno ao compreender o que ocorre com cada valor da função em seu domínio, a ideia pode ser estendida para o caso onde o domínio é o conjunto dos números reais.

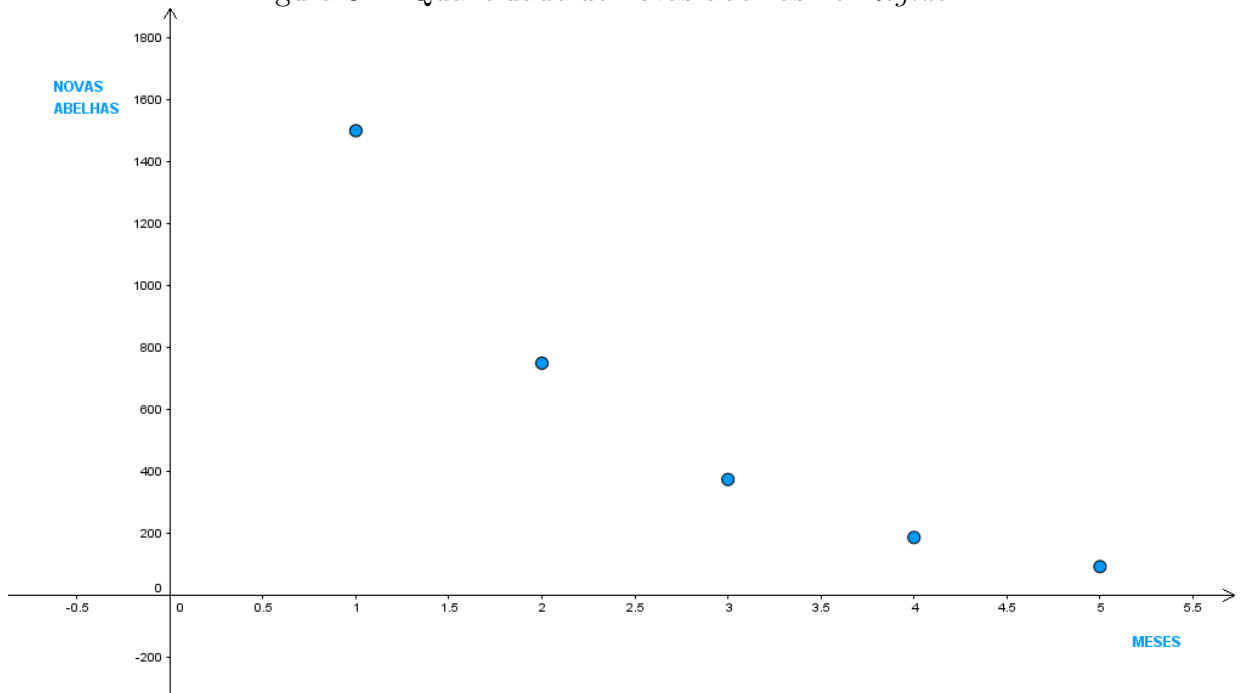
Retomando a ideia da colmeia, uma rainha pode botar cerca de três mil ovos por dia, sendo que a categoria da abelha (operária ou zangão) depende da fertilização de cada ovo, ou seja, as abelhas operárias são oriundas de ovos fertilizados e os não fertilizados dão origem aos zangões.

Suponha que dentro da colmeia existam duas regiões que contenham ovos que irão gerar novas abelhas (independente da categoria) e que na *Região 1* existam 3000 ovos e na *Região 2* existam 3500 ovos. Além disso, suponha ainda que a cada mês, a metade dos ovos existentes dão origem a novas abelhas, sendo que quando o número de ovos restantes for ímpar, o número de novas abelhas será igual ao menor inteiro maior do que a metade dos ovos restantes, por exemplo, se restar apenas 27 ovos, então nascerão 14 abelhas.

Diante do exposto, na *Região 1* terão 1500 novas abelhas após 1 mês e, tendo passados 2 meses, nascerão 750 abelhas, sendo que após 3 meses, existirão 375 abelhas, etc.

A sequência $a_n = (1500, 750, 375, 188, 94, 47, \dots, 1)$ e a Figura 3.1 representam a quantidade de novas abelhas ao longo meses.

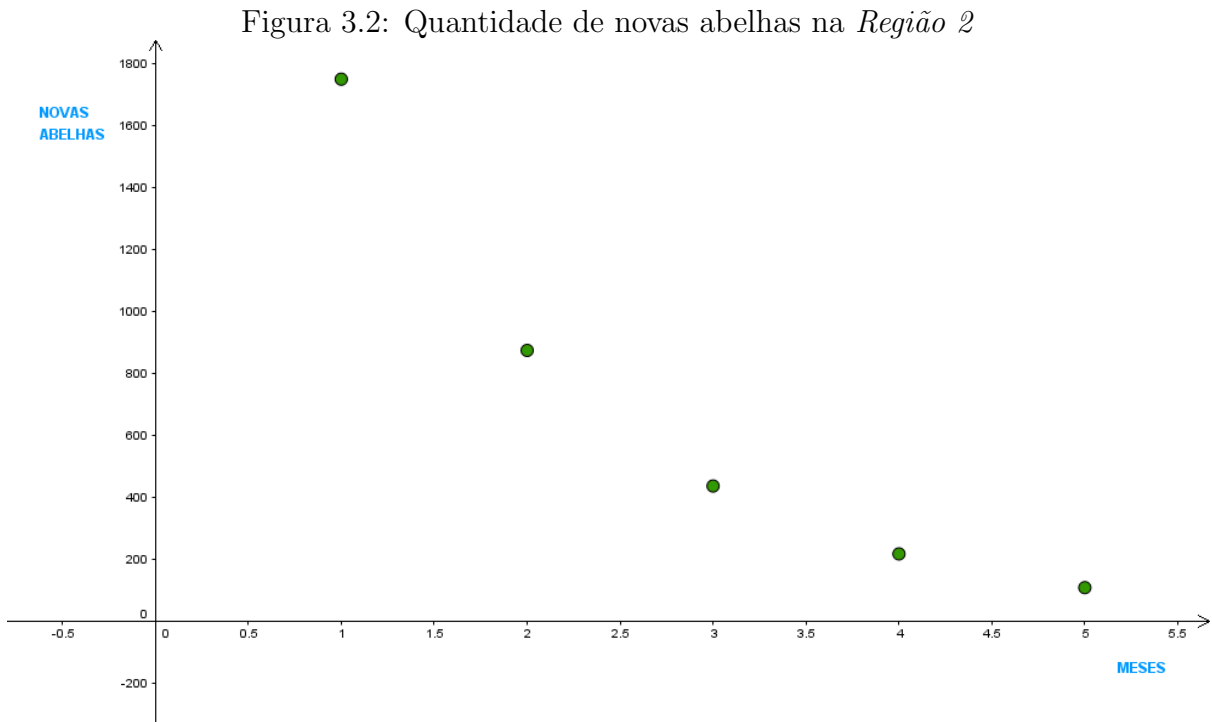
Figura 3.1: Quantidade de novas abelhas na *Região 1*



Fonte: Elaborada pelo autor

Um ponto importante a se destacar nesta sequência e que o professor pode realizar uma discussão em sala de aula é a ideia de que embora foi utilizado o símbolo “...” em a_n , a sequência não é infinita quando considerado apenas termos diferentes de zero, pois a partir de um determinado mês não irão nascer novas abelhas, ou seja, a partir do 12º mês não nascerão novas abelhas na *Região 1* e isto pode ser indagado ao estudante e propor a ele determinar em qual mês esse evento irá ocorrer, ou ainda, o professor pode instigar o aluno a perceber que sendo a_n a quantidade de novas abelhas, então $a_n = 0$ para $n > 12$.

Utilizando-se do mesmo raciocínio para a *Região 2*, obtemos a sequência $b_n = (1750, 875, 438, 219, 110, 55, \dots, 1)$ e a Figura 3.2 que representam a quantidade de novas abelhas ao longo dos meses nesta região.

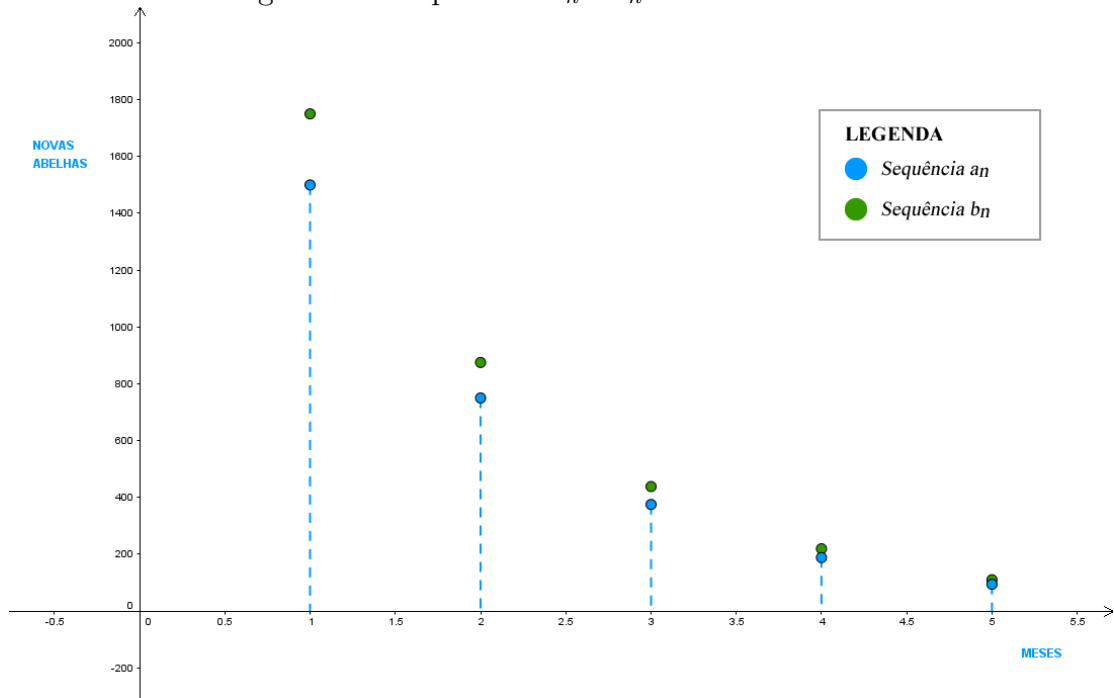


Fonte: Elaborada pelo autor

Novamente chamamos a atenção para o fato de que b_n não é uma sequência infinita quando considerado apenas termos diferentes de zero, pois semelhante ao caso anterior, a partir do 12º mês não nascerão novas abelhas o que significa que $b_n = 0$ para $n > 12$.

De posse dessas duas sequências, observe que podemos estimar a quantidade de novas abelhas que nascem em nossa colmeia e a partir de qual mês não irá nascer novas abelhas. Para isto, vamos realizar a seguinte análise geométrica considerando as sequências a_n e b_n no mesmo sistema cartesiano, conforme Figura 3.3, onde o comprimento do segmento pontilhado azul representa a quantidade novas abelhas na sequência a_n .

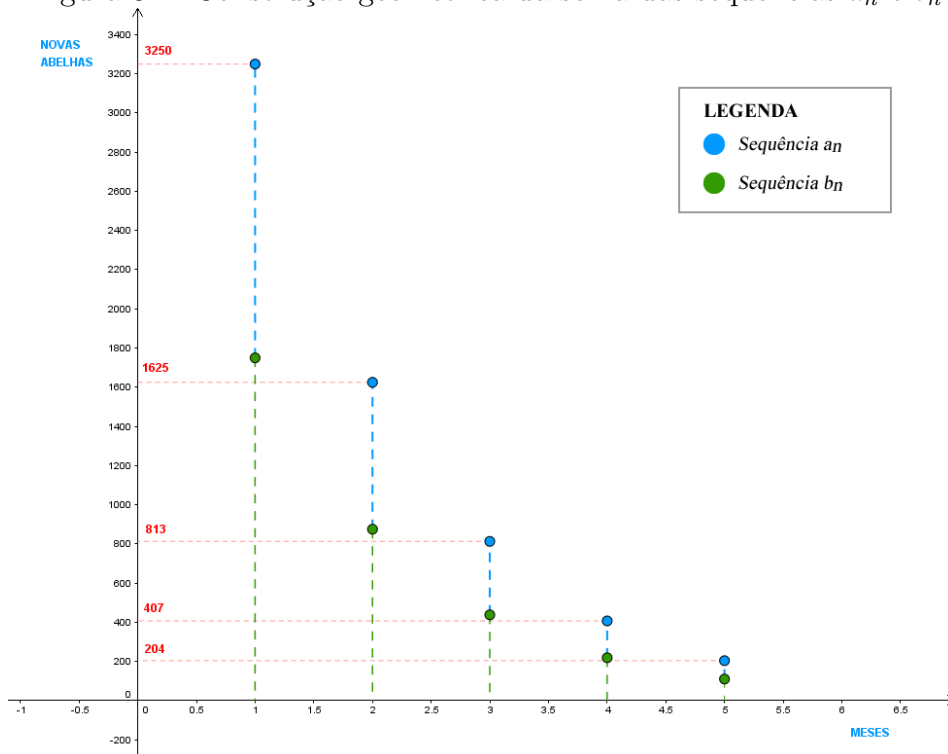
Figura 3.3: Sequências a_n e b_n no mesmo sistema



Fonte: Elaborada pelo autor

Se realizar uma translação vertical dos segmentos azuis até que uma de suas extremidades coincida com os pontos em verde (sequência b_n) obtemos a Figura 3.4.

Figura 3.4: Construção geométrica da soma das sequências a_n e b_n



Fonte: Elaborada pelo autor

Nesta perspectiva, com base na Figura 3.4 percebe-se que o comprimento total (segmento verde e azul) é igual a soma do comprimento do segmento azul com o comprimento do segmento verde e, de posse dessa soma total, pode-se formar a seguinte sequência:

$$c_n = (3250, 1625, 813, 407, 204, \dots, 2) \quad (3.1)$$

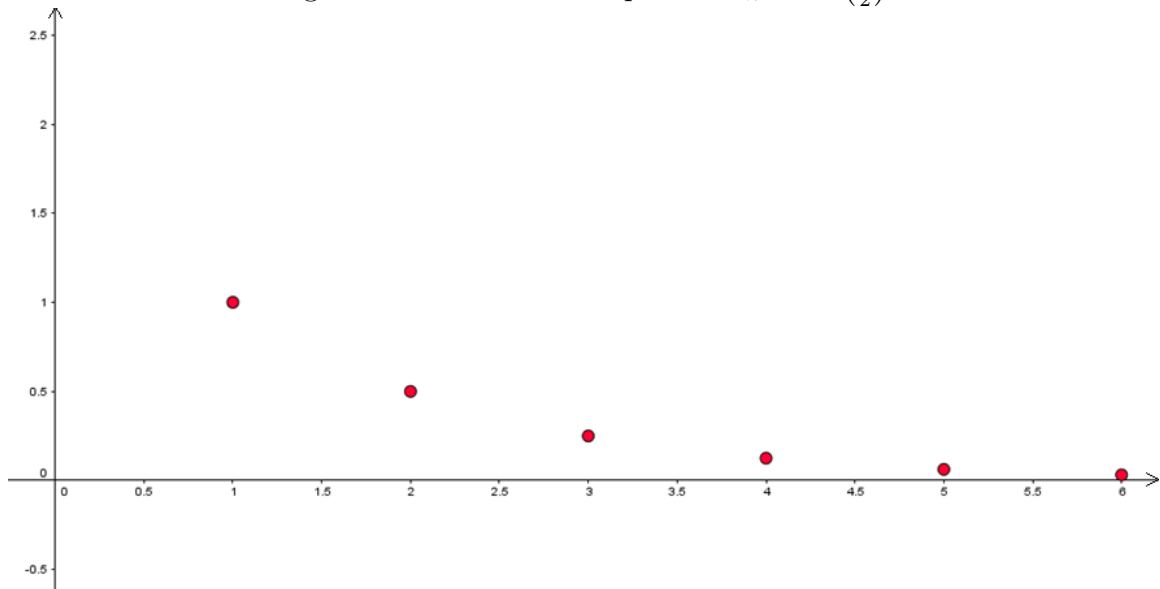
Observe que algebricamente cada termo da sequência c_n representa a soma dos termos a_n e b_n , ou seja, $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$ etc e, portanto, podemos escrever:

$$c_n = a_n + b_n \quad (3.2)$$

A sequência analisada nesse caso da colmeia é um caso de sequências de finitos termos, no entanto, caso o aluno já tenha familiaridade com sequências de infinitos termos, em particular, com a noção de **infinito**, este resultado pode ser estendido de maneira análoga, conforme exemplo a seguir.

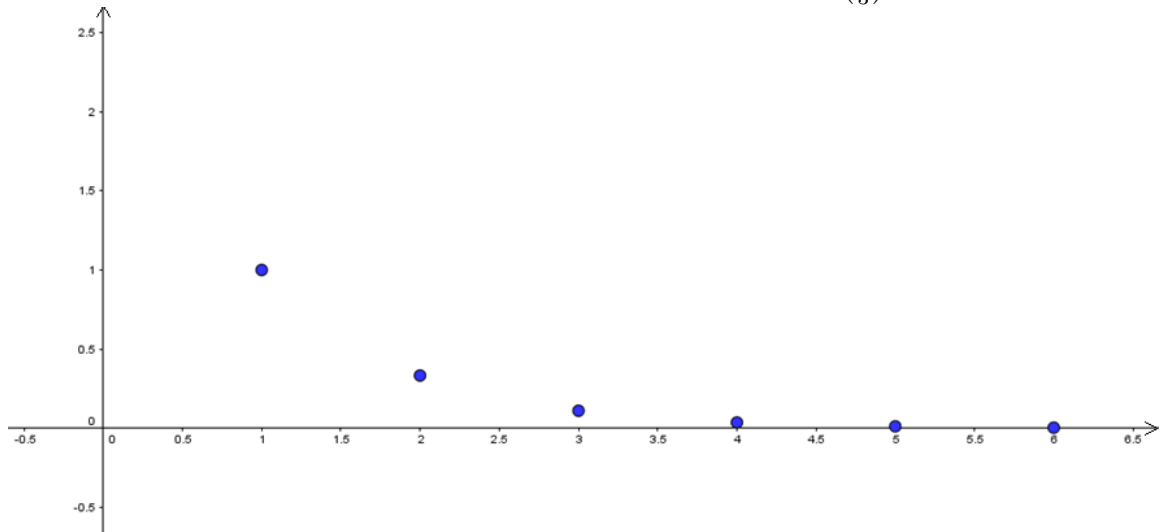
Consideremos as seguintes sequências $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, onde n é um número natural, cujos gráficos estão descritos na Figura 3.5 e na Figura 3.6.

Figura 3.5: Gráfico da sequência $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.6: Gráfico da sequência $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

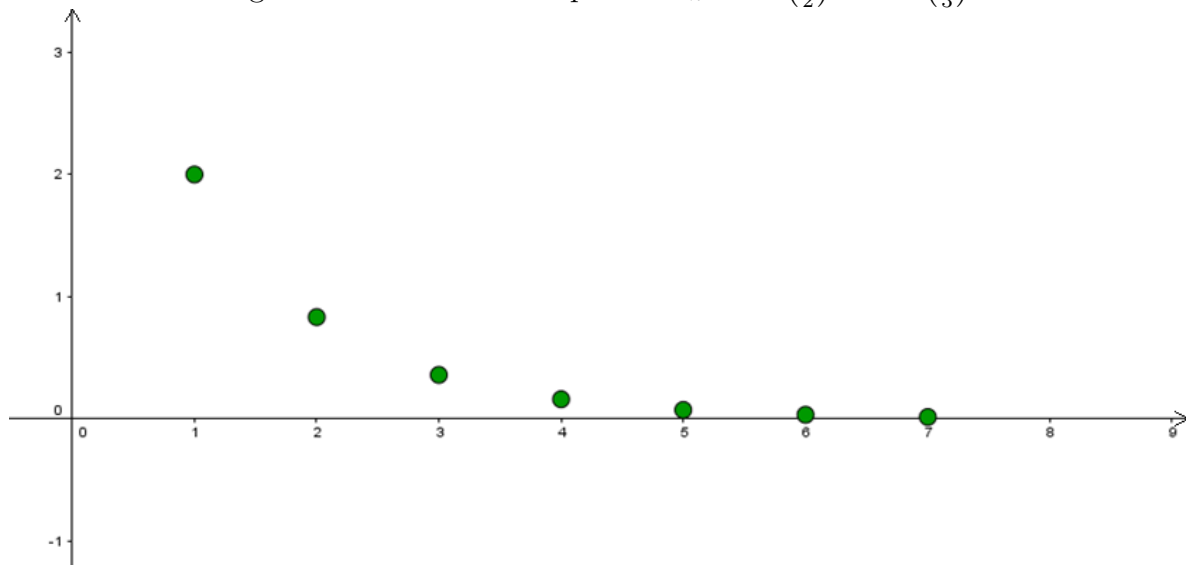


Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando as duas figuras percebe-se que as sequências satisfazem as seguintes condições $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ e, neste caso, queremos determinar o que ocorre com a sequência $c_n = a_n + b_n$. Para isto, vamos analisar o comportamento do gráfico da sequência c_n definida anteriormente.

Observe que os termos da sequência c_n são obtidos somando cada termo da sequência a_n aos termos da sequência b_n em suas posições, ou seja, a sequência c_n é dada por $c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, cujo gráfico está representado pela Figura 3.7:

Figura 3.7: Gráfico da sequência $c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$



Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando o comportamento do gráfico descrito na Figura 3.7 referente à sequência c_n percebe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ percebe-se que vale a seguinte igualdade:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (3.3)$$

No Capítulo 1 discutimos que o limite de uma sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é igual a L quando os termos s_n ficam tão próximos de L , desde que escolhamos n suficientemente grande, ou ainda, o limite da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é L quando para todo $\epsilon > 0$, podemos obter um número natural $n_0 > 0$, tal que se $n > n_0$, então $|s_n - L| < \epsilon$.

Esta relação $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ é válida para quaisquer seqüências a_n e b_n , e para ver isto, dado $\epsilon > 0$, sendo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, existem números naturais n_1 e n_2 tais que se $n > n_1$ então $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2$ então $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$.

Se considerarmos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então para $n > n_0$, obtêm-se:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (3.4)$$

ou seja, pelo que foi discutido sobre limite de seqüências, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (3.5)$$

Este resultado pode ser expandido para funções com domínio real cuja demonstração pode ser encontrada em literaturas de ensino superior onde é utilizada a álgebra para fazer as deduções lógicas da prova da propriedade em questão.

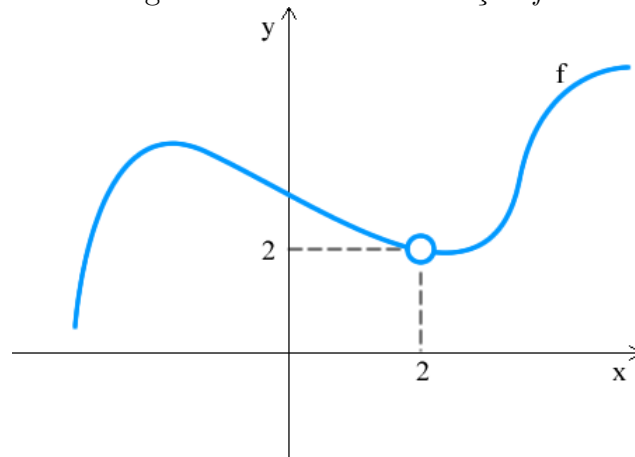
Desta forma, temos o seguinte resultado no campo das funções de domínio real:

Sejam f e g são duas funções cujos limites $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existe. Temos que o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ é dado por:

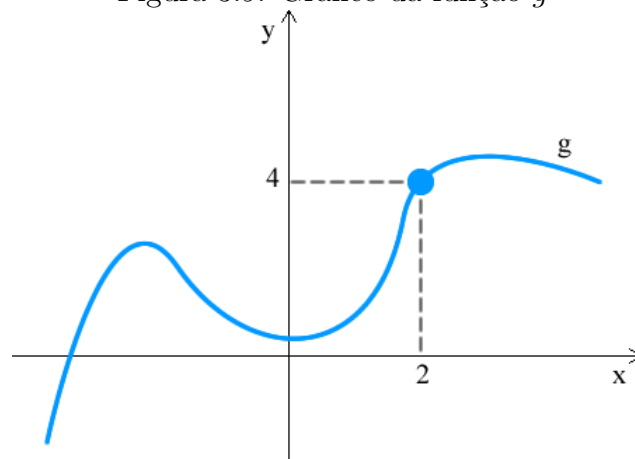
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (3.6)$$

Baseado neste importante resultado e sabendo o valor dos limites de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ em um determinado ponto ou se tivermos o gráfico das duas funções, podemos determinar o limite da função $h(x)$ definida por $h(x) = (f + g)(x)$.

Para melhor compressão, consideremos duas funções f e g cujos gráficos estão descritos nas Figuras 3.8 e 3.9:

Figura 3.8: Gráfico da função f 

Fonte: Elaborada pelo autor

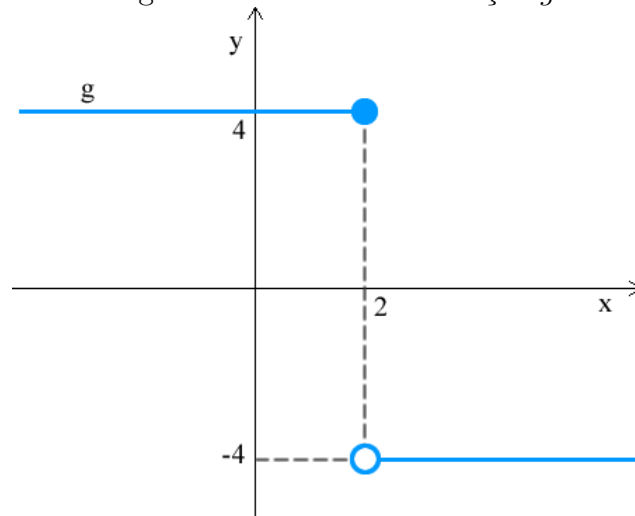
Figura 3.9: Gráfico da função g 

Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando os gráficos das funções f e g , percebe-se que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ e como $h(x) = f(x) + g(x)$, conclui-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 + 4 = 6 \quad (3.7)$$

Um fato importante que deve ser destacado neste momento é quando um dos limites não existe e, neste caso, o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ também não existe e para perceber esse resultado, consideremos a função $f(x)$, cujo gráfico está representado pela Figura 3.8, e a função $g(x)$, cujo gráfico está representado na Figura 3.10:

Figura 3.10: Gráfico da função g 

Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando a Figura 3.10, quando x se aproxima de 2 por valores menores do que 2, $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 4$ e neste caso temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f + g)(x) = 2 + 4 = 6 \quad (3.8)$$

Por outro lado, quando x se aproxima de 2 por valores maiores do que 2, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -4$ e, portanto, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f + g)(x) = 2 + (-4) = -2 \quad (3.9)$$

Como o limite de 3.8 é diferente do limite de 3.9, segue que não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 2} (f + g)(x)$.

Como forma de instigar o aluno a refletir sobre seu aprendizado, sugerimos que o docente ao trabalhar com as propriedades de limites, em particular, o limite da soma de duas funções, proponha atividades onde a única informação da atividade são os gráficos das funções e solicite que o aluno descreva o motivo da não existência do limite, pois assim o estudante poderá aplicar todos os conceitos aprendidos para refutar tal limite.

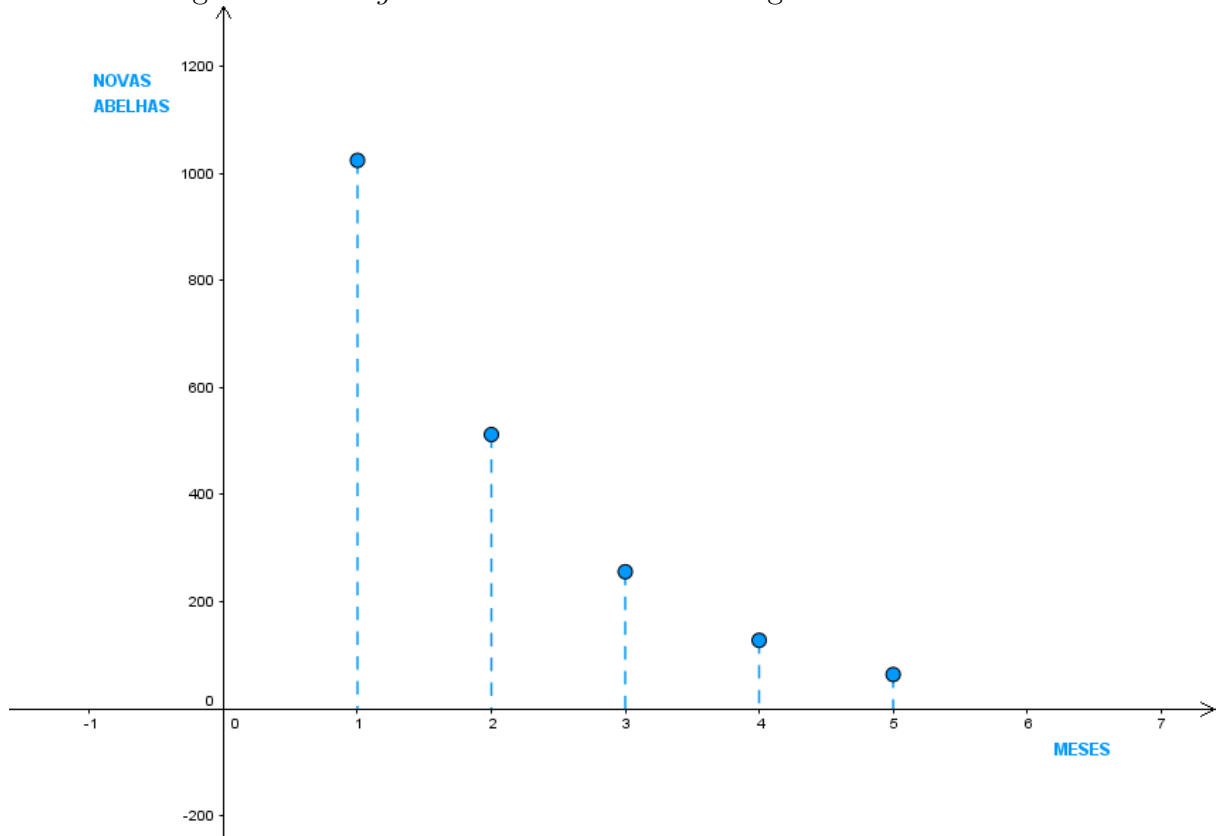
3.2 Limite de uma constante vezes uma função

Semelhante ao realizado na Seção 3.1, para explicar o limite de uma constante vezes uma função, será utilizada uma função discreta, pois se o aluno compreender o que ocorre ponto a ponto, então a ideia pode ser estendida a funções com domínio contínuo.

Para isto, retomemos a ideia da colmeia e consideremos que em uma *Região 03* tenham 2048 ovos e que a cada mês a metade dos ovos existentes dão origem a novas

abelhas. A sequência $a_n = (1024, 512, 256, 128, 64, 32, \dots)$ e a Figura 3.11 ilustram a quantidade de novas abelhas ao longo dos meses:

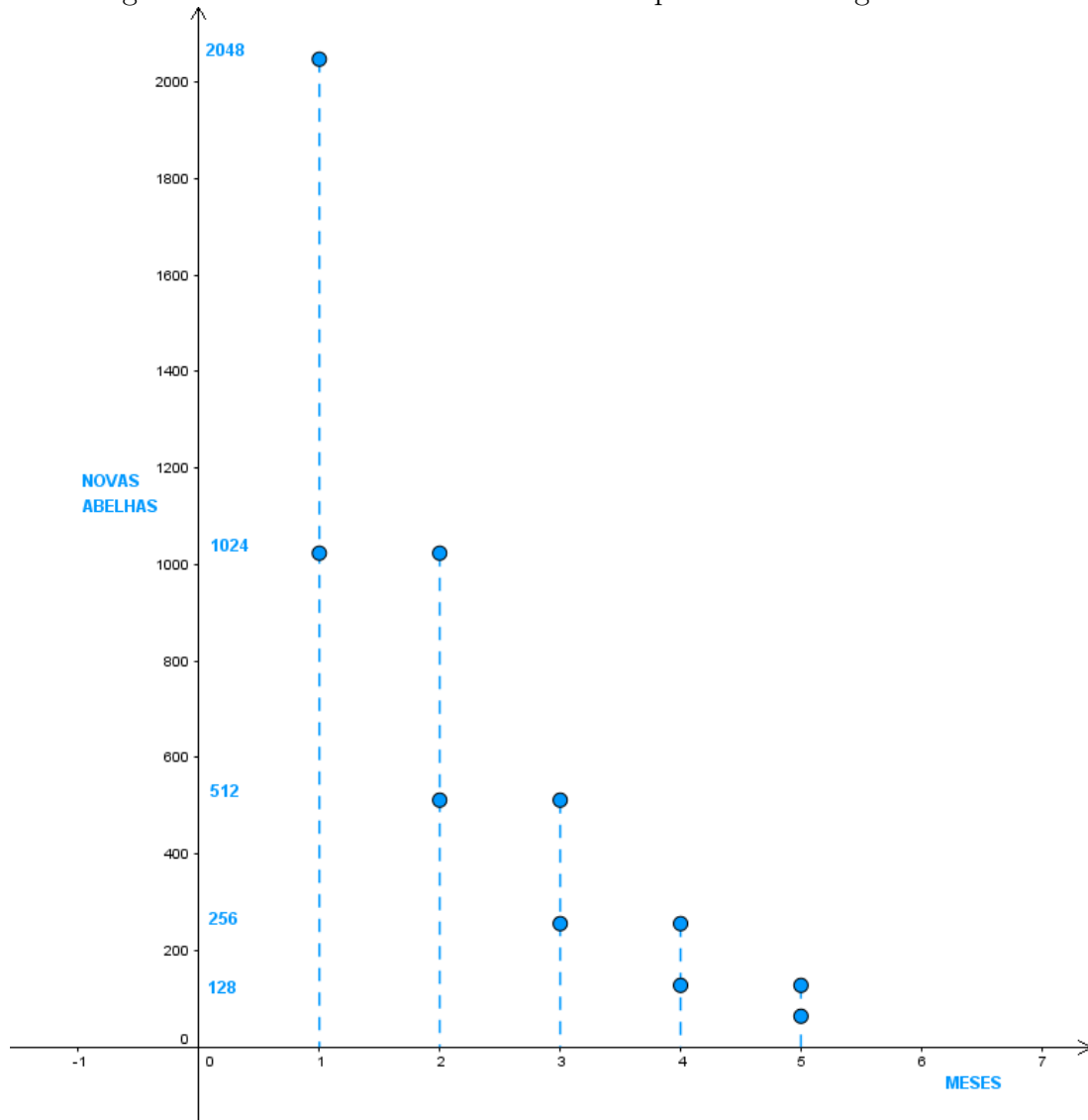
Figura 3.11: *Região 3* com 2048 ovos e a origem de novas abelhas



Fonte: Elaborada pelo autor

Pela Figura 3.11, o comprimento do segmento azul corresponde a quantidade de novas abelhas ao longo do meses e observe que se dobrar o comprimento desse segmento, então cada termo da sequência $a_n = (1024, 512, 256, 128, 64, 32, \dots)$ fica multiplicado por 2, conforme Figura 3.12.

Figura 3.12: Gráfico com o dobro do comprimento do segmento azul



Fonte: Elaborada pelo autor

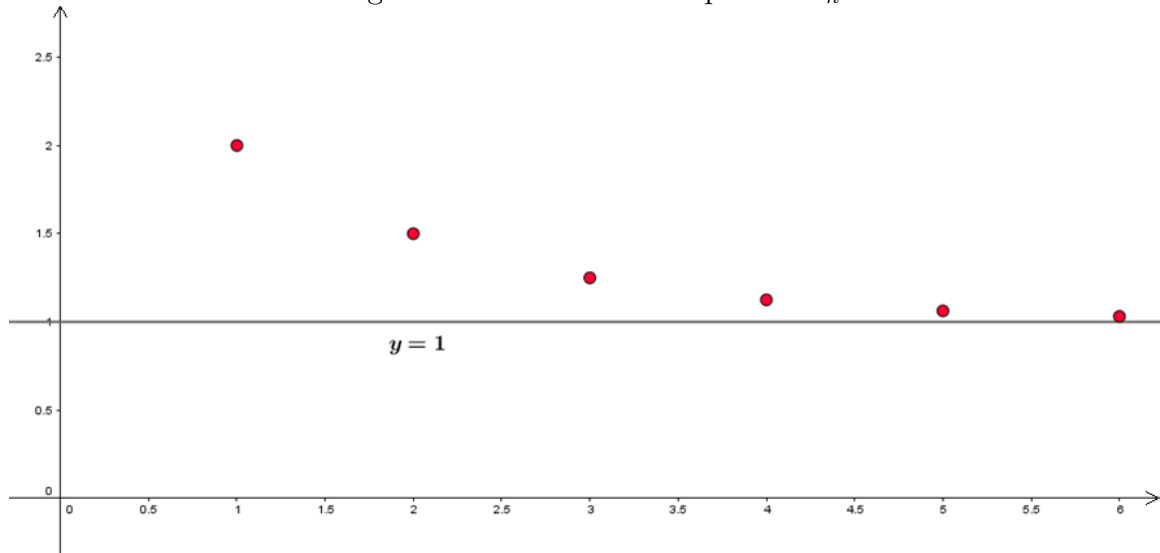
Observe que neste caso, a quantidade inicial de ovos também fica multiplicada por 2, ou seja, para que ocorra o resultado na Figura 3.12, deve-se ter 4096 e, portanto, se a sequência a_n for multiplicada por 2 conclui-se então que cada termo de a_n fica multiplicado por 2.

Portanto, obtemos uma nova sequência $c_n = 2 \cdot a_n$ cujos termos correspondem ao dobro dos termos da sequência a_n e este resultado é válido não apenas para sequência finita como foi o caso em questão, mas vale para toda sequência a_n e destacamos novamente que se o aluno tiver a noção de infinito então esse conceito pode ser estendido a sequências com infinitos termos, ou seja, se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência com $a_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então os termos da sequência $(k \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ficam multiplicados por k .

Vamos analisar um caso de sequência com infinitos termos e para isto consideremos

a seguinte sequência $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$, cujo gráfico está representado na Figura 3.13.

Figura 3.13: Gráfico da sequência a_n



Fonte: Elaborada pelo autor

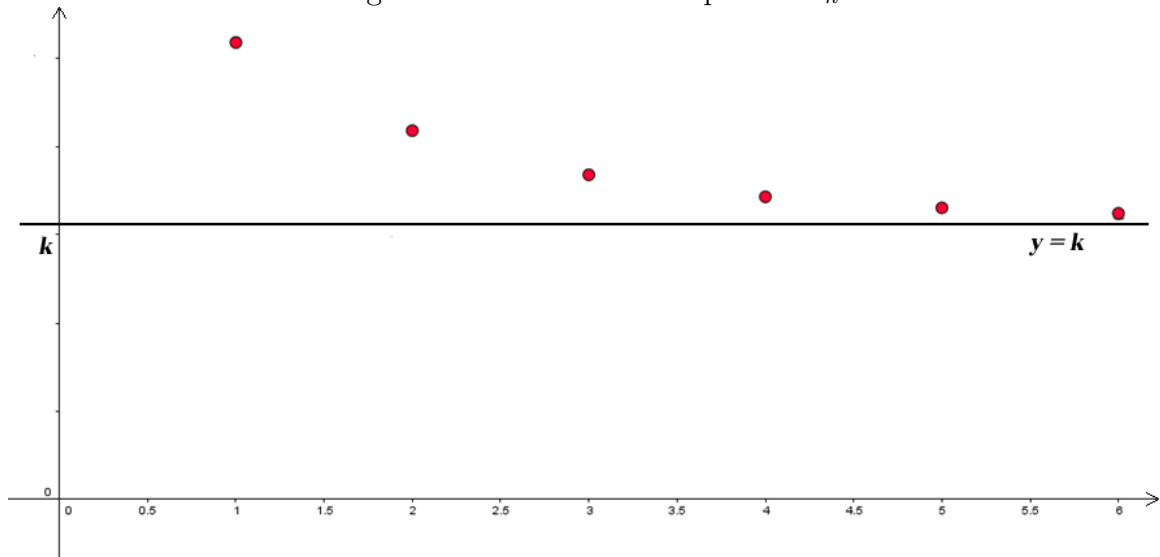
A reta $y = 1$ mostra que quando o valor de n aumenta, os termos da sequência se aproximam de 1, onde podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Novamente chama-se a atenção para o fato de que atividades semelhantes a esta devem ser trabalhadas apenas quando o aluno tem noção de infinito e, caso contrário, deve-se trabalhar com sequências com finitos termos como foi realizado anteriormente e estendendo o assunto até que ele consiga perceber que os resultados que são válidos para sequências com finitos termos valem também quando se tem infinitos termos.

Assim, para facilitar a compreensão da propriedade, vamos analisar dois casos particulares:

1º **CASO:** Se k é um número inteiro, então a sequência pode ser interpretada semelhante ao caso anterior descrito pela Figura 3.12, pois cada termo dessa sequência é obtido multiplicando cada a_n por k e, portanto, o limite também ficará multiplicado por k :

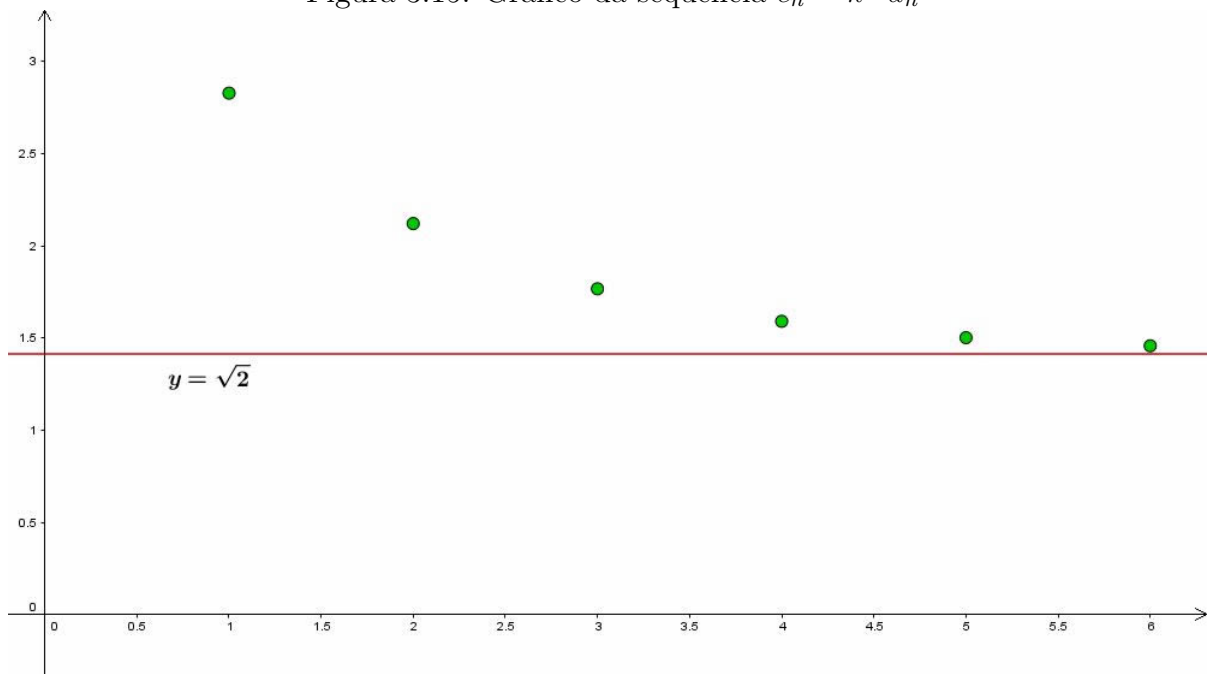
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (3.10)$$

Observe que o gráfico da sequência c_n se comportará conforme a Figura 3.14 e note que a reta $y = k$ mostra que quando n aumenta, os termos de c_n se aproxima k , confirmando a Equação 3.10.

Figura 3.14: Gráfico da sequência a_n 

Fonte: Elaborada pelo autor

2º CASO: Se k não é um número inteiro, então para analisar esse caso, vamos considerar um caso particular fazendo $k = \sqrt{2}$ e a sequência $c_n = k \cdot a_n = \sqrt{2} \cdot a_n$, cujo gráfico está descrito na Figura 3.15:

Figura 3.15: Gráfico da sequência $c_n = k \cdot a_n$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

A reta $y = \sqrt{2}$ na Figura 3.15 mostra que quando n aumenta, os termos da sequência $c_n = \sqrt{2} \cdot a_n$ ficam próximos de $\sqrt{2}$, onde podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2}$

e, neste caso, o limite de c_n é igual ao limite de a_n vezes $\sqrt{2}$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (3.11)$$

ou ainda, podemos escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (3.12)$$

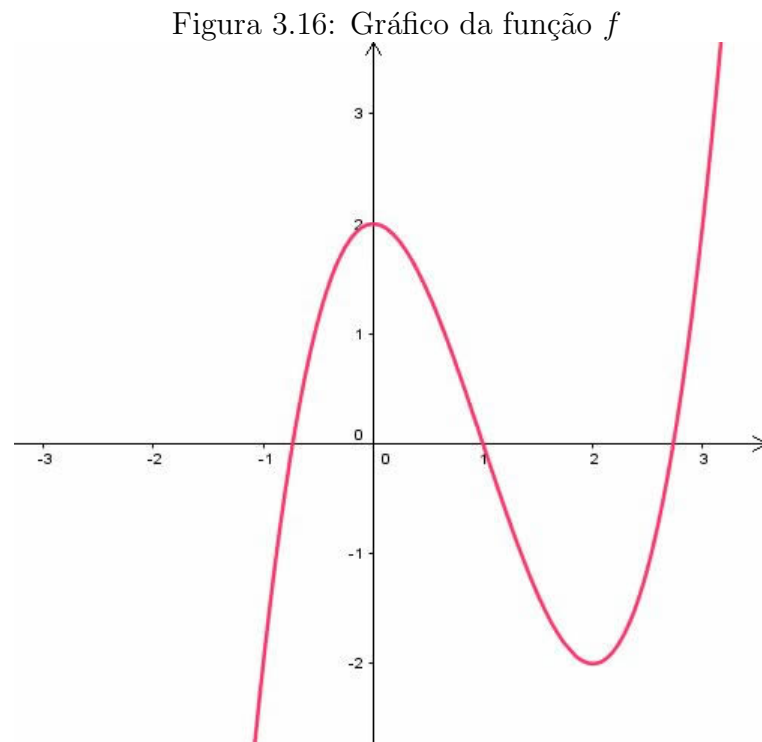
Para ver que igualdade $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ é sempre válida, pela discussão realizada no Capítulo 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ se, para todo $\epsilon > 0$ e $k > 0$, existe n_0 natural tal que $n > n_0$, então $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{k}$.

Portanto, segue que $|k \cdot a_n - k \cdot a| = k \cdot |a_n - a| < k \cdot \frac{\epsilon}{k} = \epsilon$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (3.13)$$

Semelhante ao caso do limite da soma, este resultado também pode se estender a funções reais e contínuas, onde a demonstração pode ser encontrada facilmente em livros de cálculo.

Graficamente, este resultado pode ser interpretado como sendo uma dilatação do gráfico da função verticalmente e para que essa ideia fique clara, considere a função $f(x)$ cujo gráfico está representado na Figura 3.16:



Fonte: Elaborada pelo autor

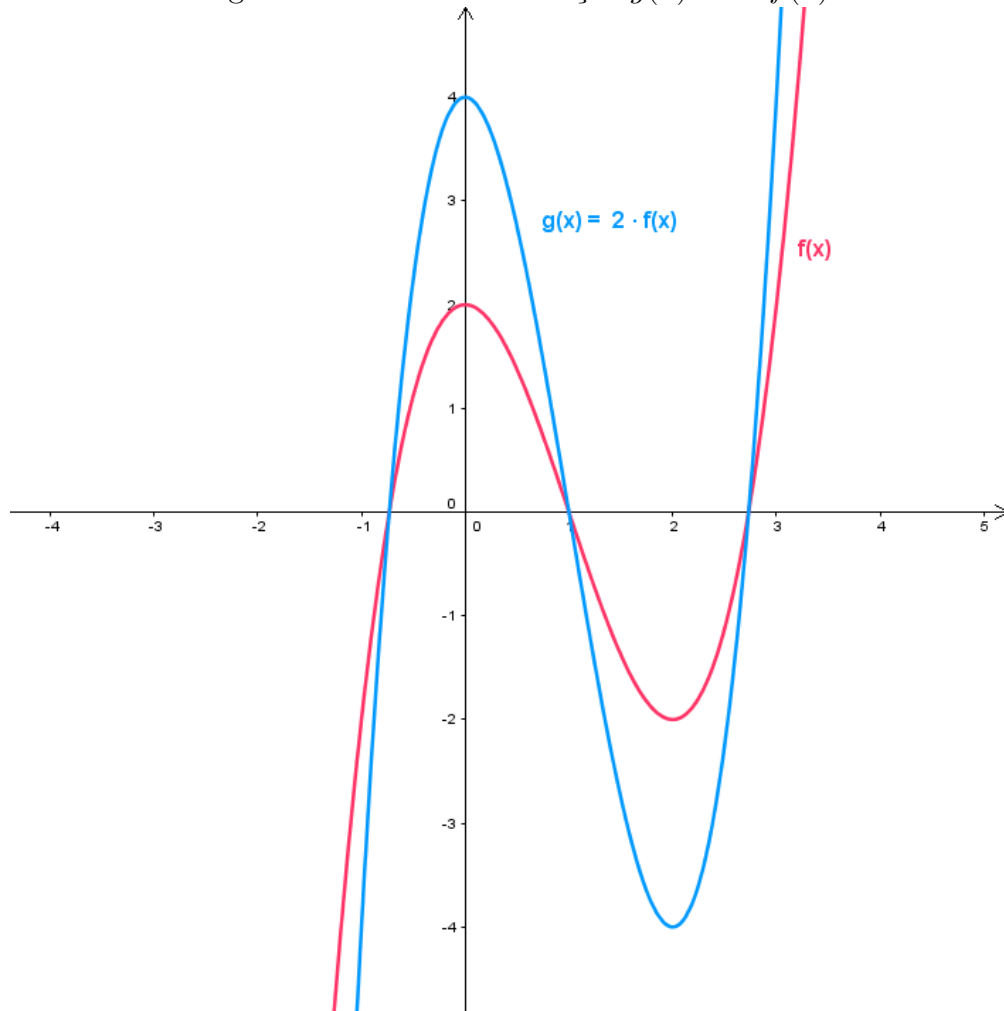
Tomando a função $g(x) = 2 \cdot f(x)$, percebemos que a função $g(x)$ representa a função $f(x)$ com uma **dilatação** no sentido do eixo das ordenadas e para perceber esta

ideia observe que cada imagem da função $g(x)$ pode ser obtida somando duas vezes a imagem da função $f(x)$ para cada x real, isto é, a função $g(x)$ pode ser escrita como $g(x) = f(x) + f(x)$ e, pelo que foi discutido em 3.1 sobre soma de funções, o limite de $g(x)$ é equivalente a somar duas vezes o limite de $f(x)$, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (3.14)$$

A Figura 3.17 representa as funções $f(x)$ e $g(x)$ e perceba que a função $g(x)$ representa uma dilatação da função $f(x)$ no sentido de que cada ponto da imagem de $g(x)$ é o dobro do respectivo ponto da imagem de $f(x)$:

Figura 3.17: Gráfico da função $g(x) = 2 \cdot f(x)$



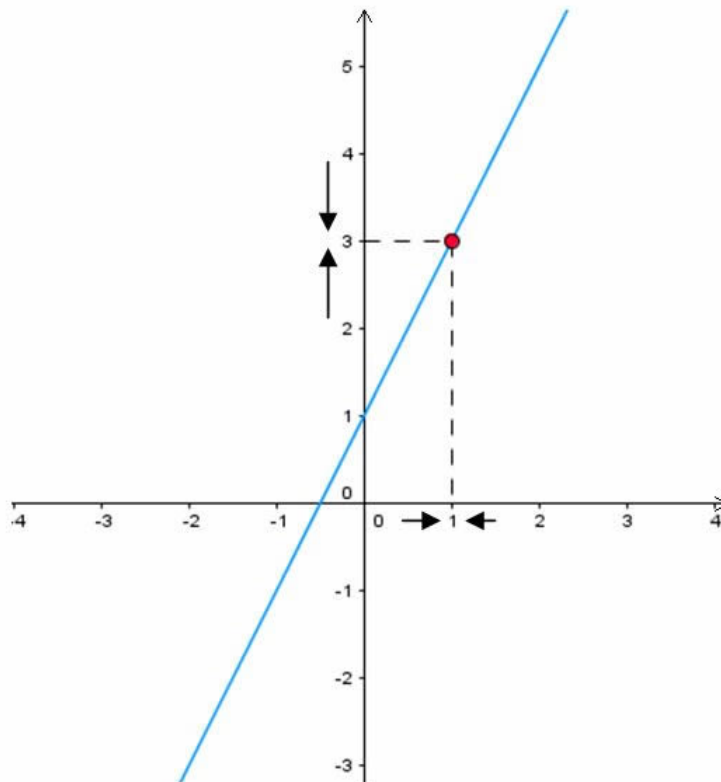
Fonte: Elaborada pelo autor

Um fato importante e que é interessante destacar é o fato de que o valor de k que está multiplicando a função $f(x)$ influencia na escolha de $\delta > 0$, ou seja, sabendo o limite da função $f(x)$ em um ponto x_0 , a escolha correta de $\delta > 0$ para que exista o limite de $g(x)$ no ponto x_0 depende também de k .

Para perceber essa relação entre o limite de g e o valor de k adotado, consideremos novamente a função $f(x) = 2x + 1$, estudada em 2.1, e $g(x) = 2 \cdot f(x)$, sendo neste caso $k = 2$.

Uma pequena análise na Figura 3.18 conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ e vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 6$.

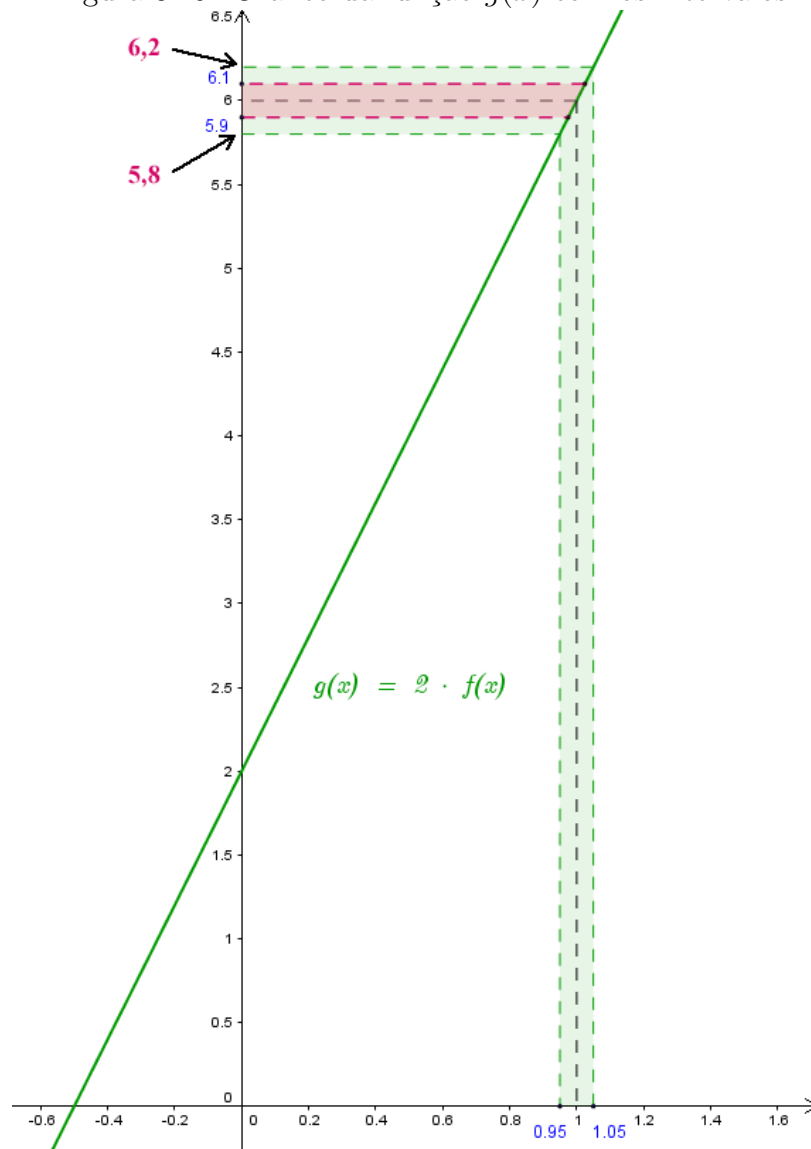
Figura 3.18: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$



Fonte: Elaborada pelo autor

Em 2.1 discutimos que se $\epsilon = 0,1$, então $\delta = 0,05$ para que a imagem de x no intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$ esteja no intervalo $(3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$ e observe, na Figura 3.19 que se for tomado esses mesmos valores para δ e ϵ em $g(x)$, existirão pontos no intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$ que não tem imagens no intervalo $(6 - \epsilon, 6 + \epsilon)$.

Figura 3.19: Gráfico da função $g(x)$ com os intervalos

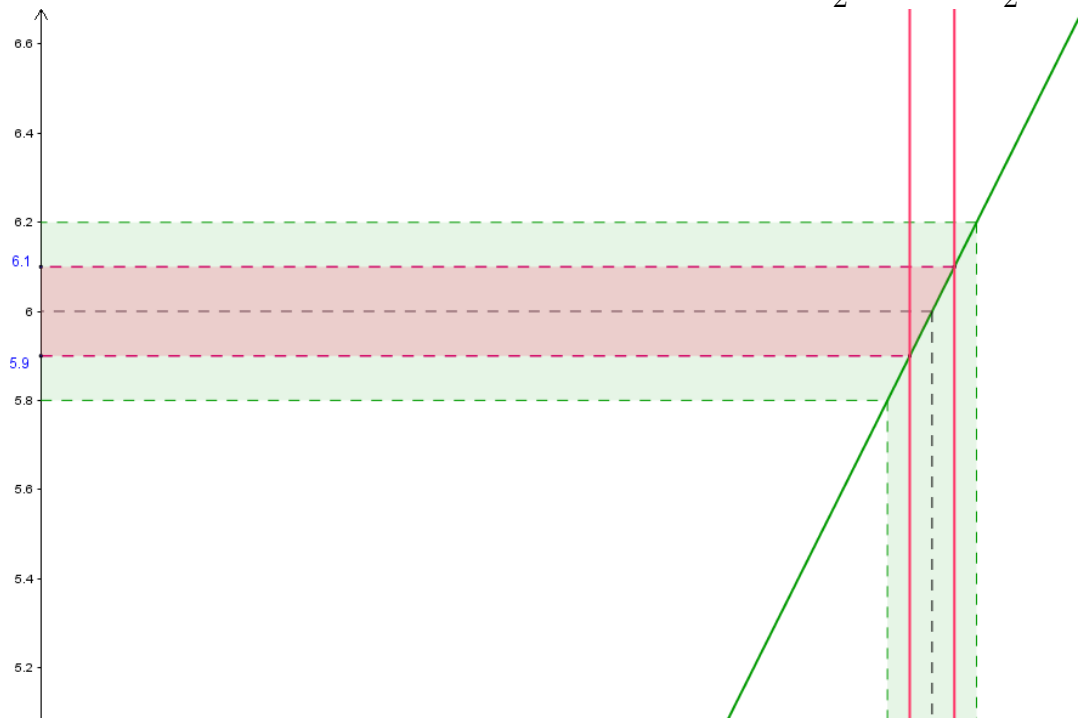


Fonte: Elaborada pelo autor

Intuitivamente, como a função $f(x)$ foi multiplicada por 2, então para corrigir esse “excesso”, um candidato para δ seria tomar $\delta = \frac{\epsilon}{k} = \frac{\epsilon}{2}$.

Assim, consideremos as retas $x = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ e $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ conforme mostra a Figura 3.20.

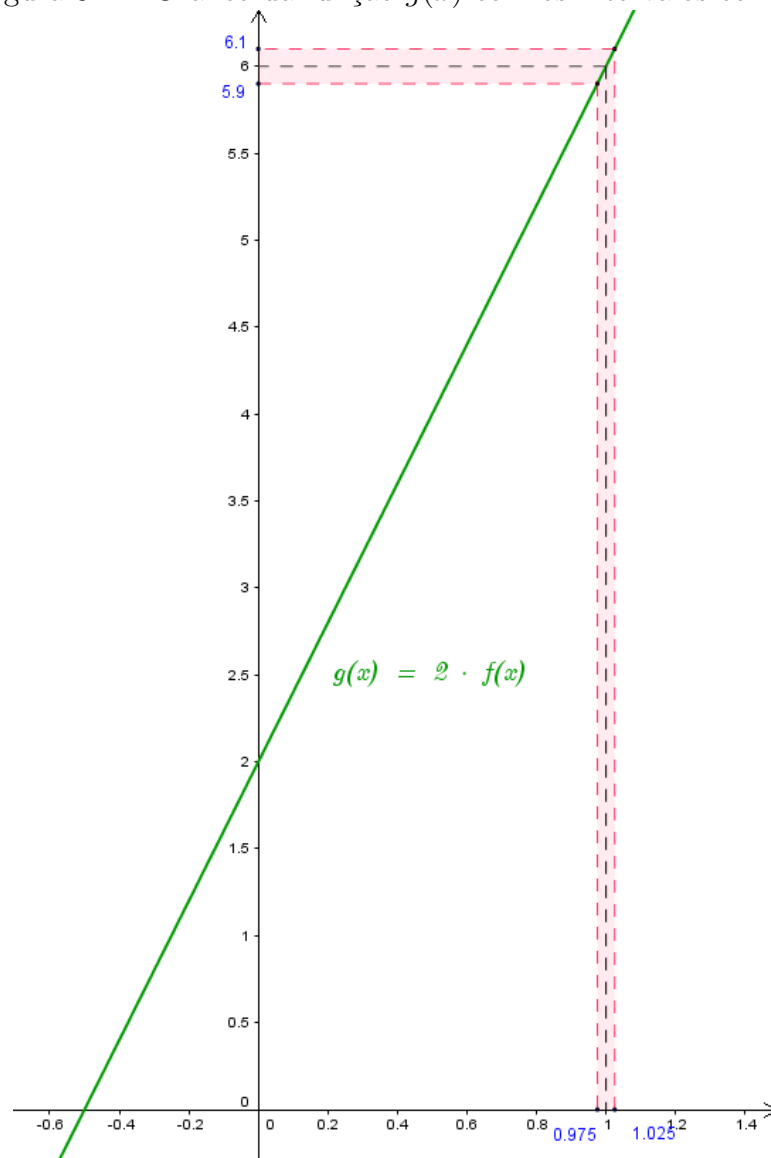
Figura 3.20: Gráfico da função $g(x)$ com as retas $x = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ e $x = 1 + \frac{\epsilon}{2}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que as retas passam exatamente nos pontos de intersecção das retas $y = 5,9$ e $y = 6,1$, ou seja, para que a imagem de x no intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$ esteja no intervalo $(6 - \epsilon, 6 + \epsilon)$ basta tomar, de fato, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, o que pode ser comprovado na Figura 3.21.

Figura 3.21: Gráfico da função $g(x)$ com os intervalos corretos



Fonte: Elaborada pelo autor

De maneira geral, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{|k|} > 0$, pois neste caso teremos que as imagem de x no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pertencerão ao intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, conforme mostrou a Figura 3.21.

Com um pouco de rigor, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, então para demonstrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$, deve-se mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x) - k \cdot L| < \epsilon$$

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, então $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|}$.

Assim, multiplicando ambos os membros de $|f(x) - L| < \epsilon$ por $|k|$, obtemos $|k| \cdot |f(x) - L| < |k| \cdot \frac{\epsilon}{|k|}$, ou seja, $|k \cdot f(x) - k \cdot L| < \epsilon$.

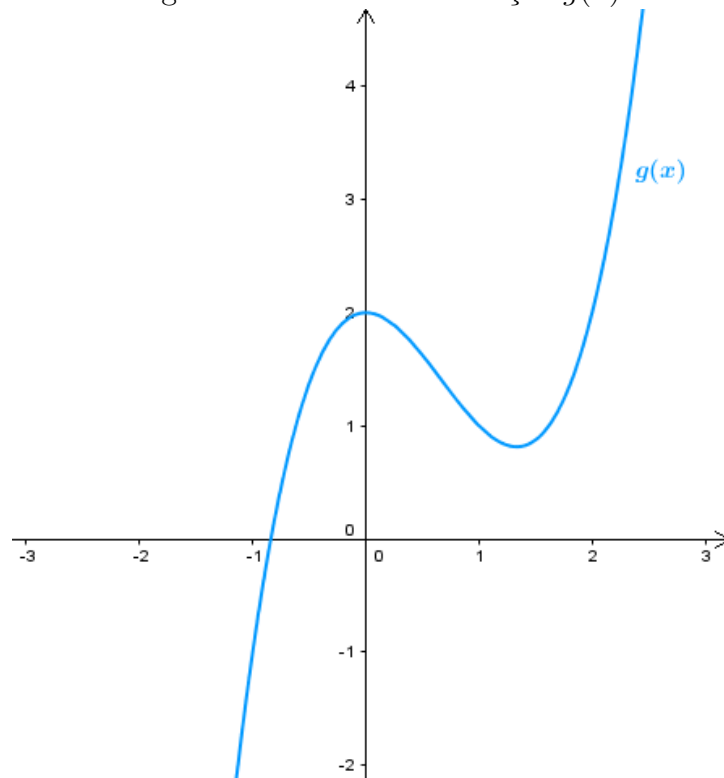
Portanto, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x) - k \cdot L| < \epsilon$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$.

3.3 Limite da diferença de duas funções

Para realizar o estudo do limite $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ será utilizado as ideias discutidas nas Seções 3.1 e 3.2.

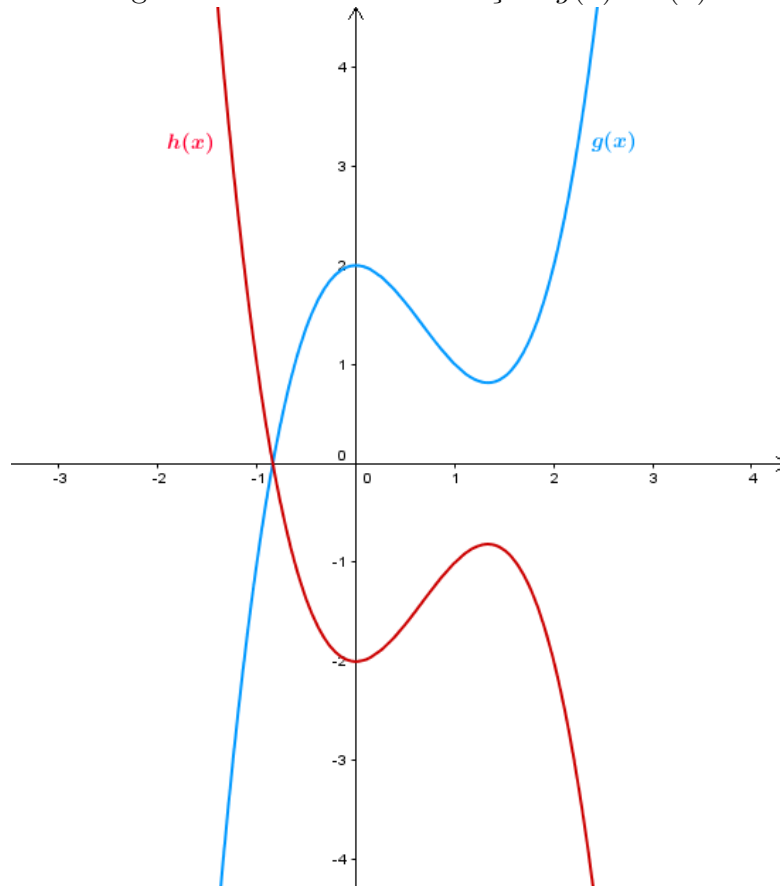
Antes de realizar o estudo do limite $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$, vamos analisar o gráfico da função h definida por $h(x) = -g(x)$ e para isto, seja $g(x)$ cujo gráfico está representado na Figura 3.22.

Figura 3.22: Gráfico da função $g(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor

Para obter o gráfico da função $h(x) = -g(x)$ basta realizar uma rotação do gráfico da função $g(x)$ em torno do eixo das abscissas, ou seja, os elementos pertencentes a imagem da função $h(x)$ tem sinal contrário dos elementos pertencentes a imagem de $g(x)$, conforme ilustra a Figura 3.23, onde está presente os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$.

Figura 3.23: Gráfico das funções $g(x)$ e $h(x)$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Neste sentido, pela discussão realizada na Seção 3.1 sobre o limite da soma de duas funções, podemos escrever:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \quad (3.15)$$

Cada valor de $h(x)$ corresponde ao valor de $-g(x)$ para cada valor de x , conforme mostra a Figura 3.23, e pela discussão realizada na Seção 3.2 sobre o limite de uma constante vezes uma função, então podemos escrever:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (-g(x)) = - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (3.16)$$

Assim, das igualdades 3.15 e 3.16 obtemos o limite da diferença das funções f e g :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (3.17)$$

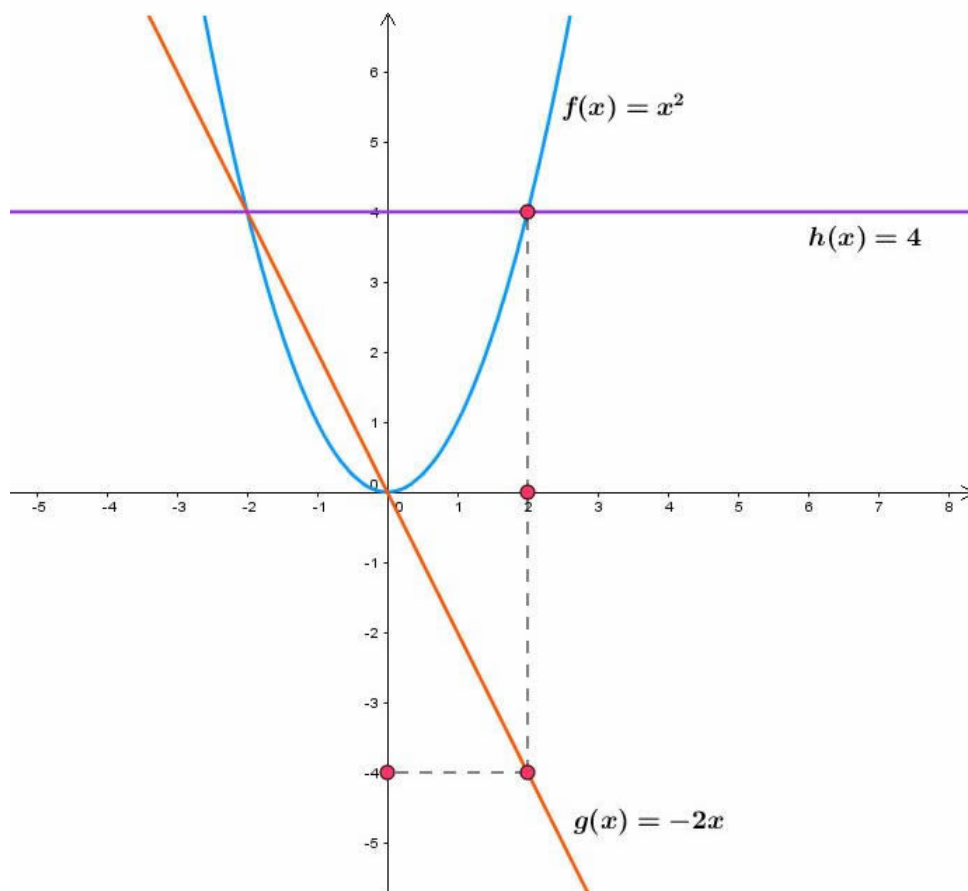
3.4 Atividade sobre propriedades de limites

Diante da discussão realizada sobre estas importantes propriedades de limites, é necessário salientar que os exercícios presentes nos livros textos utilizados em cursos de

exatas devem contribuir e explorar o aprendizado do aluno fazendo com que o mesmo possa refletir, raciocinar e aplicar os todos conceitos ministrados pelo professor e, nesta perspectiva, propomos a seguinte atividade que irá fazer o aluno refletir e aplicar o aprendizado das propriedades discutidas neste capítulo sem o uso de qualquer técnica de resolução ou memorização de resultados.

Considere as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = -2x$ e $h(x) = 4$, cujos gráficos estão representados na Figura 3.24.

Figura 3.24: Gráficos das funções f , g e h



Fonte: Elaborada pelo autor

Determine:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

B) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

C) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

D) Utilizando os itens anteriores, determine o limite $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x + 4$.

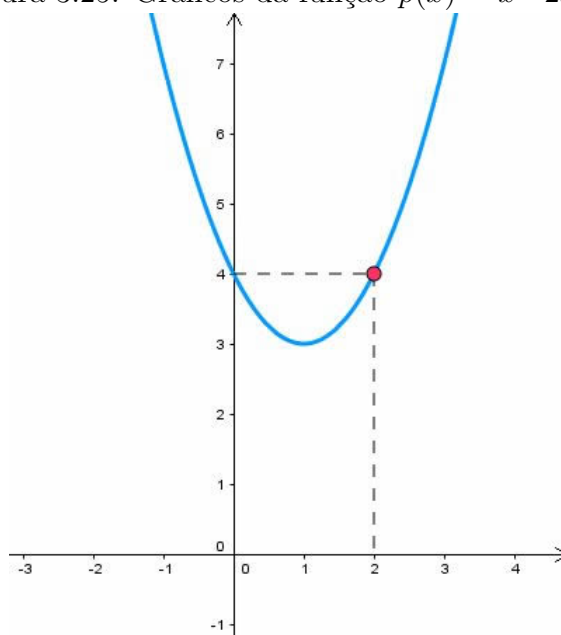
E) Faça o gráfico da função $p(x) = x^2 - 2x + 4$ e verifique graficamente se o limite encontrado corresponde ao limite do item **D**).

Nesta atividade, espera-se que o aluno seja capaz de identificar os limites dos itens **A**), **B**) e **C**) observando o gráfico e que neste caso correspondem a 4, -4 e 4, respectivamente. No item **D**), é necessário aplicar as propriedades discutidas neste capítulo, evitando o cálculo do limite conforme discutido no Capítulo 2, ou seja, espera-se que o aluno tenha em mente que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x + 4 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4 + (-4) + 4 = 4 \quad (3.18)$$

Para finalizar a atividade, espera-se no item **E**) que o aluno consiga construir a Figura 3.25 e perceber pelo gráfico que quando x se aproxima de 2 tanto pela direita quanto pela esquerda, a imagem de $p(x)$ se aproxima de 4, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = 4$.

Figura 3.25: Gráficos da função $p(x) = x^2 - 2x + 4$



Fonte: Elaborada pelo autor

Em uma análise geral da atividade proposta, espera-se que o aluno seja capaz de refletir e perceber como as propriedades e resultados discutidos neste capítulo se satisfazem ao aplicar em um exercício como no caso desta atividade. Além disso, as ideias discutidas até o momento podem contribuir para que o estudante priorize a compreensão dos conceitos e dispense a simples memorização de fórmulas ou técnicas resolutivas tendo em vista que quando compreendidas se tornam “fáceis” de serem aplicadas e obter o resultado final.

Portanto, acredita-se que atividades semelhantes ao exposto podem aumentar significativamente o aprendizado do aluno que está iniciando seus estudos sobre propriedades de limites e até para aqueles que estão familiarizados com elas tendo em vista que cada item não representa um exercício isolado, pelo contrário, o estudante terá a oportunidade de comprovar os resultados teóricos com os resultados obtidos no desenvolvimento da questão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo retratou uma forma diferente de abordar o conceito de limites onde foi priorizado a compreensão dos conceitos e descartado qualquer tipo de memorização ou técnicas de resolução de limites. Além disso, o uso de situações reais, como o caso da colmeia, foi uma forma de mostrar sem o rigor matemático como os conceitos estão relacionados com o cotidiano. Deve-se salientar também que a geometria é uma ferramenta indispensável, mesmo quando o teor do conceito é algébrico, pois ela ajuda a compreender de uma forma simples cada ente relacionado na definição, como foi o caso do *épsilon* e o *delta*.

As atividades propostas neste trabalho mostrou também que há possibilidades de nortear o estudante a não utilizar técnicas de resolução, pelo contrário, mostrou que o aluno deixa de ser agente passivo no que tange a simples aplicação de resultados e passa a ser agente ativo, construindo seu próprio conhecimento e percebendo como os conceitos estão relacionados entre si.

É importante destacar também que o desenvolvimento de um trabalho semelhante ao exposto com outros conteúdos como *derivadas*, *integrais* etc, pode trazer resultados positivos as aulas de matemática e, conseqüentemente, aumentar o interesse por essa disciplina.

Portanto, esperamos que este trabalho possa inspirar professores que ministram essa disciplina nos cursos de exatas a perceber que limites não se resume apenas a uma definição com *épsilons* e *deltas*, pelo contrário, há uma forma alternativa de abordar tais conceitos e utilizando o que está ao redor dos alunos de maneira lúdica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. S. *Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área*. Trabalho de conclusão de curso de Matemática - Universidade Católica de Brasília, 2006.

AMORIM, L. I. F. *A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para a Análise: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática*. Ouro Preto, 2011. 133f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Mestrado em Matemática.

COTTRILL, J. et al. *Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema*. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 17–192, 1996.

CORNU, B. *Limits*. In: TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 153-166, 1991.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto & Aplicações*, São Paulo: Ática, 1999.

ELIA, I et al. *Geometric and algebraic approaches in the concept of “limit” and the impact of the “didactic contract”*. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7: 765-790, Taiwan, 2009.

EXAME. *Brasil está entre os piores em ranking mundial de educação*, 2016. Disponível em: <goo.gl/YCsw6b>. Acesso em: 16/01/2017.

FERREIRA, A. M. *Resgate da inserção das noções elementares do cálculo (em particular, das noções de limite) durante o ensino médio*. Vitória, 2014. 122f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Mestrado em Matemática.

FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: Funções, limites, derivadas e integração*. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FOLHA DE SÃO PAULO. *Cursos de exatas mudam para tentar conter saída de alunos*, 2016. Disponível em: <goo.gl/ZLpzYc>. Acesso em: 21/12/2016.

GIOVANNI, J. R. & BONJORNO, J. R. *Matemática completa*, 2 ed. São Paulo: FTD, 2005 - Coleção Matemática Completa.

GONÇALO, R. C. *Limites, Continuidade, Derivabilidade e Aplicações*. João Pessoa, 2013. 75f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, Mestrado em Matemática.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001, v1.

HOFFMANN, L. D. et al. *Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 1999

IEZZI, G. et al. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 5.ed. São Paulo: Atual, 1999, v8.

LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LEVITA, R. S. *Introdução do limite e da derivada para o Ensino Médio*. Ilhéus, 2013. 73f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Mestrado em Matemática.

LIMA, E. L. *Análise real volume 1 - Funções de uma variável*. 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

MACHADO, A. J. S. *Limites e derivadas para o ensino médio*. Belém, 2013. 58f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

MARIA, O. S. *Cálculo diferencial no ensino médio: noções de limites, derivadas e aplicações*. Mossoró, 2013. 62f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mestrado em Matemática.

MUNEM, M. A. e FOULLIS, D. J. *Cálculo*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos

Editora, 1982.

NETO, G. A. C. *Uma ideia sobre o conceito de limite ao longo da história da matemática*. Uberaba, 2016. 118f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Mestrado em Matemática.

PAIVA, C. K. L. *Limite e Continuidade: Um enfoque acessível ao ensino médio com o auxílio do Geogebra*. Uberaba, 2014. 71f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Mestrado em Matemática.

SEMESP. *O fantasma da evasão*, 2014. Disponível em: <<http://www.semesp.org.br/site/o-fantasma-da-evasao/>>. Acesso em: 21/12/2016.

SILVA, J. G. *Limite e Continuidade: Um enfoque acessível ao ensino médio com o auxílio do Geogebra*. Campina Grande, 2014. 94f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado em Matemática.

SMOLE, K. S. & Diniz, M. I. *Matemática: Ensino médio*, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

STEWART, J. *Cálculo 1*. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SWINYARD, C. *Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike*. Journal of Mathematical Behavior. 30 93–114, 2011.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

TALL, D. *Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking*. International Congress of Mathematicians, Zurich, 1994.

TALL, D. & VINNER, S. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12 151-169, 1981.

VINNER, S. *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 69–81). Boston, MA: Kluwer, 1991.

WILLIAMS, S. R. *Models of limit held by college calculus students. Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219–236, 1991.