



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Marina de Toledo Tose

Volume: Princípio de Cavalieri no Ensino Médio

São José do Rio Preto
2017

Marina de Toledo Tose

Volume: Princípio de Cavalieri no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavan Lamas.

São José do Rio Preto
2017

Tose, Marina de Toledo.

Volume : o Princípio de Cavalieri no ensino médio / Marina de Toledo Tose. -- São José do Rio Preto, 2017

71 f. : il.

Orientador: Rita de Cássia Pavani Lamas

Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Geometria sólida. 4. Formas. 5. Superfícies (Matemática) 6. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Marina de Toledo Tose

Volume: Princípio de Cavalieri no Ensino Médio.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavan Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof.^a Dr.^a Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto

Prof.^o Dr.^o Oyran Silva Rayzaro
UEMS – Nova Andradina

São José do Rio Preto
16 de Fevereiro de 2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família que sempre me apoiou e me incentivou durante os períodos difíceis.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente aos meus familiares que sempre apoiaram minhas decisões e me deram forças para superar os obstáculos. Aos meus colegas de turma pelas horas de estudo em grupo e aos docentes que, durante esse tempo, me proporcionaram construir um conhecimento. A minha orientadora Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavan Lamas pela paciência e assistência na realização deste trabalho. E, à CAPES pelo incentivo financeiro.

RESUMO

A geometria espacial é de suma importância na matemática e tem ampla aplicação na vida cotidiana. No entanto, para melhor compreensão de seus conceitos, observa-se a necessidade de formas alternativas para o seu ensino na escola básica. Neste trabalho é descrito os conceitos de polígonos, poliedros e não poliedros, bem como os procedimentos utilizados para o ensino e aprendizagem de volumes e o Princípio de Cavalieri, por meio de atividade experimental, na segunda série do ensino médio.

Palavras-chave: Ensino de Matemática - Cálculo de Volumes - O Princípio de Cavalieri.

ABSTRACT

Spatial geometry is of paramount importance in mathematics and has wide application in everyday life. However, to better understand their concepts, there is a need for alternative ways of teaching in basic school. In this work the concepts of polygons, polyhedra and non-polyhedra are described, as well as the procedures used for teaching and learning of volume and the Cavalieri Principle, through experimental activity, in the second grade of high school.

Keywords: *Teaching of Mathematics - Calculus of Volumes - The Principle of Cavalieri.*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Região Triangular.....	15
Figura 2: Região Poligonal.	15
Figura 3: Ponto do interior de uma região poligonal, P, e ponto da fronteira, Q..	16
Figura 4: Pentágono ABCDE.	17
Figura 5: Polígonos.....	17
Figura 6: Polígonos regulares.....	17
Figura 7: Figuras planas não poligonais.....	18
Figura 8: Polígono convexo e não convexo.....	19
Figura 9: Superfície poliédrica aberta, fechada e uma figura que não é superfície poliédrica.	20
Figura 10: Superfícies poliédricas convexas.	20
Figura 11: Superfície poliédrica não convexa.	21
Figura 12: Poliedros regulares.....	22
Figura 13: Prisma Hexagonal.....	23
Figura 14: Secção de um prisma triangular.....	24
Figura 15: Secção reta de um prisma triangular.....	24
Figura 16: Prismas reto, oblíquo e Regular.	25
Figura 17: Paralelepípedo.	26
Figura 18: Paralelepípedo Retângulo.	26
Figura 19: Cubo.....	27
Figura 20: Pirâmide de base pentagonal.	28
Figura 21: Secções de uma pirâmide pentagonal.	28
Figura 22: Projeção ortogonal do ponto P sobre o plano π	29
Figura 23: Altura de uma pirâmide pentagonal.	29
Figura 24: Apótema de uma face lateral de uma pirâmide de base pentagonal.	30
Figura 25: Tetraedro.....	30
Figura 26: Tetraedro Regular.....	31
Figura 27: Circunferência de centro O e raio r.	32
Figura 28: Cilindro.....	33
Figura 29: Cilindro circular oblíquo e cilindro circular reto.....	34
Figura 30: Cilindro equilátero.	34
Figura 31: Cone.....	36
Figura 32: Cone de altura h.....	36
Figura 33: Cone circular oblíquo e cone circular reto.....	37
Figura 34: Esfera.....	38
Figura 35: Paralelepípedo retângulo com medidas a, b e c.....	40
Figura 36: Paralelepípedo P(a, b, h1) à esquerda e paralelepípedo P(a, b, h2) à direita, com h1 e h2 comensuráveis.	41
Figura 37: Paralelepípedo P(a, b, h1) à esquerda e paralelepípedo P(a, b, h2) à direita, com h1 e h2 incomensuráveis.	42

Figura 38: Cubo de aresta 1 justaposto no interior do paralelepípedo ABCDEFGH.	43
Figura 39: Escada.	44
Figura 40: Jarra.	45
Figura 41: Secções do prisma hexagonal reto e paralelepípedo retângulo.	46
Figura 42: Secções do prisma hexagonal oblíquo e paralelepípedo retângulo. ..	46
Figura 43: Cilindro e paralelepípedo retângulo de alturas congruentes e bases equivalentes.	47
Figura 44: Prisma de base triangular.	48
Figura 45: Prisma Hexagonal de base regular.	49
Figura 46: Secção no tetraedro paralela a sua base.	51
Figura 47: Tetraedros de mesma área da base e mesma altura.	53
Figura 48: Prisma triangular ABCDEF.	54
Figura 49: Corte do prisma triangular ABCDEF através do plano (A, C, E).	54
Figura 50: Corte da pirâmide quadrangular EACFD pelo plano (C, D, E).	54
Figura 51: Octaedro regular de aresta a.	56
Figura 52: Pirâmide regular de base quadrada.	57
Figura 53: Cone reto.	58
Figura 54: Cone oblíquo.	59
Figura 55: Cone e pirâmide com alturas congruentes e bases equivalentes.	60
Figura 56: Cone reto com base inscrita na face de um cubo.	61
Figura 57: Recipiente em forma de cone circular reto.	62
Figura 58: Cilindro equilátero com dois cones em seu interior.	63
Figura 59: Clépsidra e anticlépsidra.	63
Figura 60: Esfera e anticlépsidra seccionados por β	64
Figura 61: Esfera no interior de um cilindro de raio r.	65
Figura 62: Construção das superfícies.	67
Figura 63: Planificação das superfícies.	67
Figura 64: Superfícies construídas pelos alunos.	68

SUMÁRIO

Capítulo 1: INTRODUÇÃO	12
Capítulo 2: FIGURAS ESPACIAIS - POLIEDROS	15
2.1 Prismas	22
2.2 Pirâmide	27
Capítulo 3: FIGURAS ESPACIAIS - NÃO POLIEDROS.....	32
3.1 Cilindro	33
3.2 Cone	36
3.3 Esfera	37
Capítulo 4: CALCULO DE VOLUMES - PRINCÍPIO DE CAVALIERI	39
4.1 Volume do Paralelepípedo Retângulo.....	40
4.2 Volume de Prisma e Cilindros	45
4.3 Pirâmide	51
4.4 Cone	58
4.5 Esfera	62
Capítulo 5: VOLUME - ATIVIDADE EXPERIMENTAL.....	66
5.1 Desenvolvimento e resultados	66
CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
REFERÊNCIAS	73

Capítulo 1: INTRODUÇÃO

A origem da matemática é difícil de ser definida, pois, segundo Boyer (1996), “... os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever”, no entanto as construções das pirâmides e templos pelas civilizações Egípcia e Babilônica são o registro mais antigo de um conhecimento ordenado de Geometria.

Muitos outros povos antigos possuíam conhecimentos geométricos, como os Hindus e os Chineses, que também contribuíram para a geometria que conhecemos atualmente. Por volta do século VII a.C. a Geometria passou a ser vista como uma ciência dedutiva, mas somente no século III a.C. ela foi apresentada, por Euclides (323 – 285 a.C.), em forma de axiomas, o que originou o que conhecemos hoje por *Geometria Euclidiana*.

Segundo Contador (2006), “Os mais antigos registros de uma atividade geométrica desenvolvida pelo homem datam de cerca 3000 a. C. com os sumérios”. No entanto, foi no Egito, há cerca de 2000 a. C., que surgiu os primeiros indícios do estudo da Geometria Espacial, com a descoberta dos papiros de Moscou e de Rhind, os quais têm origens egípcias. Segundo Boyer (1996):

- “papiro de Moscou”: datado de 1850 a. C. Contém as soluções de 25 problemas de aritmética e geometria.
- “papiro de Ahmes ou papiro de Rhind”: datado de 1650 a. C. e comprado em 1858 por um escocês, Henry Rhind, em uma cidade às margens do rio Nilo. Contém as soluções de 85 problemas de aritmética e geometria.

Nos dias atuais existem inúmeras profissões que fazem uso indispensável dos conceitos geométricos, entre elas: arquitetura, engenharia, costureira, artista plástico, etc., ainda, situações como montar um brinquedo, jogar com amigos, determinar a quantidade de líquido que cabe em um determinado recipiente, entre outras, podem se transformar em um problema sem conhecimentos geométricos. Logo, fica explícita a importância da Geometria em nosso cotidiano e na formação de um indivíduo.

A Geometria surgiu da necessidade de se determinar comprimentos, áreas e volumes, fato que deu origem ao seu nome: geos (terra) e metron (medida) e,

desde então, está presente em todo nosso cotidiano, em casa nos formatos das paredes, nas formas retas e curvas das ruas e estradas, nos móveis e objetos de decoração, na escola etc. Na natureza ela aparece, dentre inúmeros exemplos, na forma cilíndrica do caule das plantas, na simetria das folhas e flores e até mesmo nos animais. Segundo Contador,

Não é possível datar o momento exato quando o homem passou a ter consciência do mundo à sua volta, mas é certo que foi a partir daí que passou a observar, perceber e comparar as diferentes formas de tudo que a Natureza lhe oferecia. Foi através dessas observações que inconscientemente, os conceitos geométricos foram se formando. (CONTADOR, 2006, p. 191)

Há alguns anos o ensino da Geometria vem sendo proposto pelos Parâmetros Nacionais Curriculares (PCNs) como substancial no desenvolvimento de competências matemáticas em todas as séries do ensino básico. Segundo a Proposta curricular do estado de São Paulo,

Consideramos que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries/anos do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo a diferença a escala do tratamento dada ao tema. (SÃO PAULO (ESTADO), 2010, p.39)

Diante desta importância, vários questionamentos podem surgir a respeito da construção do conhecimento geométrico, como por exemplo: “de que forma ensinar os conceitos geométricos fundamentais nas escolas?”, “utilizar somente a contextualização ou realizar experimentos e/ou jogos didáticos?”.

As metodologias de ensino e seus recursos são ferramentas valiosas no processo de ensino/aprendizagem, com elas é possível que professores e alunos interajam a fim de que o conhecimento seja transmitido e absorvido de forma significativa. Entretanto, este fato não anula a importância da exposição do conteúdo, no método tradicional, somente o complementa. Metodologias de ensino, em geral, utilizam esta exposição de conteúdo como uma de suas etapas.

Segundo Petrossi (1988, p.28), “A rigor não existe o método absoluto e eficiente”, assim, a escolha da metodologia deve ser feita considerando-se os paradigmas socioculturais e educacionais do aluno e nem sempre apresenta êxito.

Porém há inúmeras pesquisas apresentando resultados positivos com relação a utilização das mesmas.

O cálculo de volumes de alguns sólidos pode se tornar muito complexo e, por isso, muitos matemáticos, como o italiano Bonaventura Cavalieri, buscaram encontrar métodos que generalizassem este cálculo. Segundo texto encontrado no Caderno do Professor do estado de São Paulo,

Para Cavalieri a linha era formada por pontos sem comprimento, a superfície por infinitas linhas sem largura, e os sólidos eram interpretados por uma reunião de superfícies sem profundidade. No seu entendimento, as figuras planas são como tecidos compostos por fios paralelos e os sólidos, como livros, pilhas de folhas paralelas. (SÃO PAULO, 2015, p. 69 e 70)

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta, composta por atividades experimentais, as quais visam proporcionar aos alunos do ensino médio a oportunidade de observar os resultados e concluir propriedades matemáticas, entre elas o Princípio de Cavalieri. O conceito geométrico escolhido para este trabalho foi volume de poliedros e não poliedros, conforme capítulo 4, no entanto, a parte experimental proposta e desenvolvida junto aos alunos da 2º série do ensino médio se restringiu a volume de prismas, pirâmides e cilindros (Capítulo 5). Esta escolha foi motivada pelas dificuldades apresentadas pelos alunos, em experiências anteriores, na compreensão e aplicação destes conceitos. Nos capítulos 2 e 3 serão introduzidos os pré-requisitos fundamentais para o capítulo 4.

Capítulo 2: FIGURAS ESPACIAIS - POLIEDROS

Neste capítulo vamos definir conceitos envolvendo poliedros e conhecer suas propriedades. Para isso, vamos, primeiramente, introduzir algumas definições sobre polígonos, as quais foram baseadas em Barbosa (2000).

Definição 2.1: Uma *região triangular* é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo (Figura 1). Ainda, o triângulo é chamado de *fronteira* da região triangular e, o conjunto de pontos desta região que não pertencem a fronteira é chamado de *interior*.

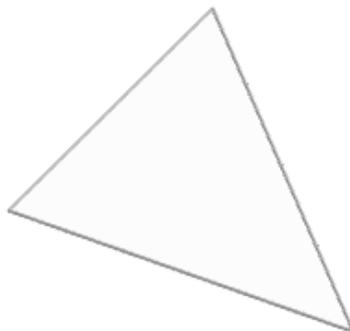


Figura 1: Região Triangular.

Definição 2.2: Uma *região poligonal* é a união de um número finito de regiões triangulares que, duas a duas, não tem pontos interiores em comum (Figura 2).

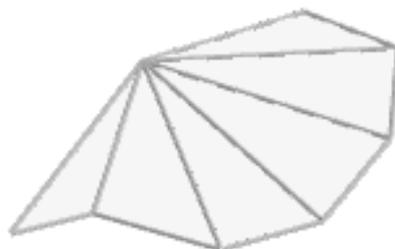


Figura 2: Região Poligonal.

Um ponto P é *interior* a uma região poligonal se existir alguma região triangular contida na região poligonal contendo o ponto P . O *interior* de uma região poligonal é o conjunto de pontos interiores da região. A *fronteira* de uma região poligonal é formada pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

Exemplo 2.1: O ponto P e Q , representados na Figura 3, são pontos pertencentes ao interior e a fronteira da região poligonal, respectivamente.

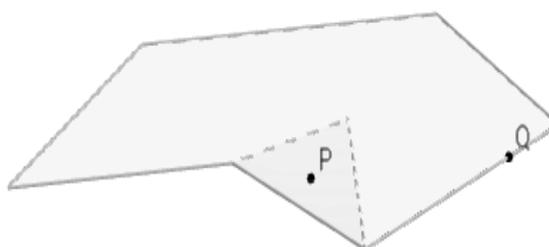


Figura 3: Ponto do interior de uma região poligonal, P , e ponto da fronteira, Q .

Os segmentos de retas que determinam a fronteira de uma região poligonal são chamados de *lados* desta região poligonal e os pontos onde estes segmentos se encontram são chamados de *vértices*.

Definição 2.3: Uma *poligonal* é uma figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são vértices da poligonal e os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ são os seus lados.

Definição 2.4: Um *polígono* é uma poligonal em que as seguintes quatro condições são satisfeitas:

- $A_n = A_1$;
- Os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;
- Cada vértice é extremidade de dois lados;
- Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Chamamos de *polígono regular* um polígono com lados congruentes (de mesma medida).

Pela Definição 2.3, a fronteira de uma região poligonal é um polígono.

Exemplo 2.2: Um pentágono é um polígono de cinco lados e cinco vértices (Figura 4).

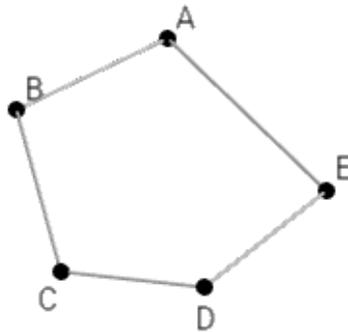


Figura 4: Pentágono ABCDE.

Exemplo 2.3: A Figura 5 apresenta exemplos de polígonos.

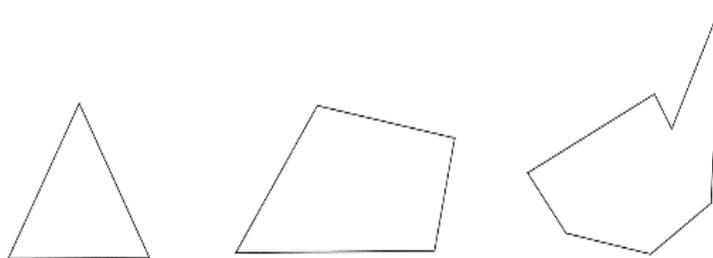


Figura 5: Polígonos.

Exemplo 2.4: A Figura 6 apresenta exemplos de polígonos regulares, ou seja, polígonos cujos lados têm mesma medida.

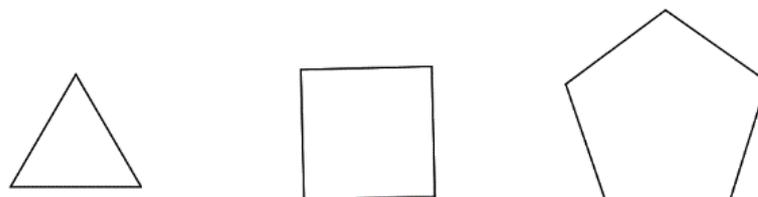


Figura 6: Polígonos regulares.

Figuras planas limitadas por curvas, como, por exemplo, o círculo, não são polígonos.

Exemplo 2.5: As figuras planas, representadas na figura 7, não são polígonos porque não são formadas apenas por segmentos e desta forma não satisfazem a definição 2.3.

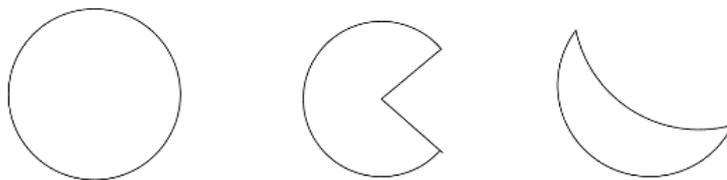


Figura 7: Figuras planas não poligonais.

A nomenclatura dos polígonos é dada de acordo com a quantidade de lados do mesmo. Segue o nome de alguns polígonos com o número de lados de cada um:

- Triângulo: 3 lados;
- Quadrilátero: 4 lados;
- Pentágono: 5 lados;
- Hexágono: 6 lados;
- Heptágono: 7 lados;
- Octágono: 8 lados;
- Eneágono: 9 lados;
- Decágono: 10 lados;
- Undecágono: 11 lados;
- Dodecágono: 12 lados;
- Pentadecágono: 15 lados;
- Icoságono: 20 lados.

Por abuso de linguagem uma região poligonal também é chamada de polígono simplesmente. Por exemplo, é utilizado triângulo para região triangular.

Definição 2.5: Um polígono é dito *convexo* se ele está contido num mesmo semiplano em relação à reta suporte de qualquer de seus lados, caso contrário, o polígono é dito *não convexo*.

Exemplo 2.6: Na Figura 8 o polígono da esquerda é um polígono convexo e o da direita é um polígono não convexo.

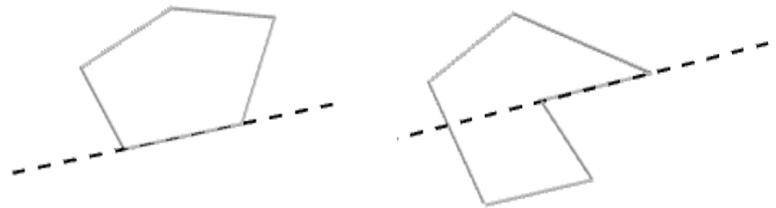


Figura 8: Polígono convexo e não convexo.

Definição 2.6: Uma *figura poliédrica* é a reunião de um número finito de polígonos planos tais que:

- i. A interseção de dois polígonos quaisquer ou é vazia, ou é um vértice ou é um dos lados dos polígonos;
- ii. Dois polígonos contendo um lado em comum não são coplanares;
- iii. Cada lado de cada polígono não pertence a mais do que dois polígonos.

Os lados e vértice dos polígonos são denominados *arestas* e *vértices* da figura poliédrica, respectivamente.

Definição 2.7: Uma *superfície poliédrica* é uma figura poliédrica reunida com as regiões poligonais (não necessariamente todas) determinadas pelos polígonos, denominadas faces da superfície poliédrica com a seguinte condição adicional na definição 2.6:

- iv. Existindo arestas que pertençam a uma só face elas devem formar uma única poligonal fechada denominada contorno.

Quando uma superfície não tiver contorno é dita *fechada*, caso contrário ela será dita *aberta*.

Exemplo 2.7: Uma caixa destampada é uma superfície poliédrica aberta, se estiver tampada é uma superfície poliédrica fechada e, se não tiver tampa e nem fundo não será uma superfície poliédrica (Figura 9).

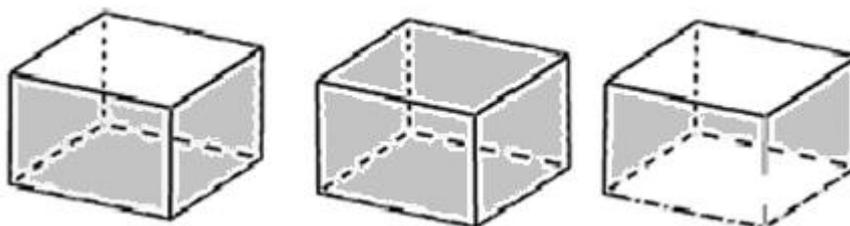


Figura 9: Superfície poliédrica aberta, fechada e uma figura que não é superfície poliédrica.

Definição 2.8: Uma superfície poliédrica é *convexa* quando satisfizer a seguinte condição adicional:

- v. O plano de cada polígono deixa todos os outros polígonos num mesmo semiespaço.

Exemplo 2.8: As figuras espaciais abaixo são exemplos de superfícies poliédricas convexas (Figura 10) e superfícies poliédricas não convexas (Figura 11).

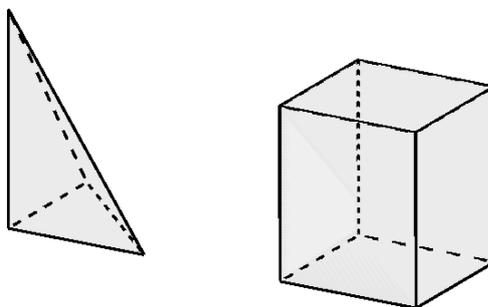


Figura 10: Superfícies poliédricas convexas.

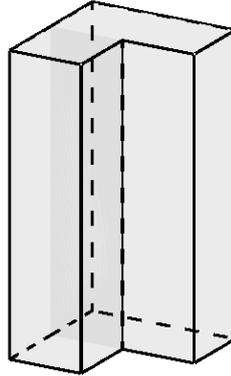


Figura 11: Superfície poliédrica não convexa.

Elementos da Superfície Poliédrica:

- Faces: os polígonos;
- Arestas: os lados dos polígonos;
- Vértices: os vértices dos polígonos.

Por abuso de linguagem as superfícies poliédricas recebem os mesmos nomes dos poliedros. Esses nomes são introduzidos ao longo dos próximos capítulos.

Definição 2.9: Chamamos de *poliedro* toda região do espaço delimitada por um conjunto de regiões poligonais, que satisfazem as seguintes condições:

- i. A interseção de duas regiões poligonais quaisquer ou é vazia, ou é um vértice ou é um dos lados;
- ii. Duas regiões poligonais contendo um lado em comum não são coplanares;
- iii. Cada lado de uma região poligonal não pertence a mais do que duas regiões.

Os lados e vértices das regiões poligonais são denominados arestas e vértices da figura poliédrica, respectivamente. As regiões poligonais são chamadas faces do poliedro.

Pela Definição 2.9, a fronteira do poliedro é exatamente sua superfície poliédrica. Se a superfície for convexa, então o poliedro é convexo. Neste trabalho, daremos ênfase aos poliedros convexos.

Observamos que a reunião de uma superfície poliédrica limitada convexa com seu interior determina um poliedro convexo, ainda, a reunião de todas as faces de um poliedro determina a sua superfície poliédrica. Em outras palavras, uma superfície poliédrica é apenas a “casca” do poliedro, com interior oco.

Definição 2.10: Um poliedro convexo é *regular* quando todas as faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Exemplo 2.9: O octaedro, representado à esquerda na Figura 12, e o paralelepípedo, à direita, são exemplos de poliedros regulares.

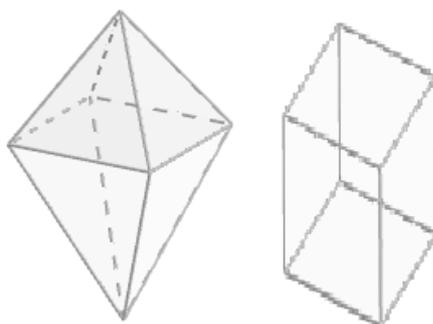


Figura 12: Poliedros regulares.

A seguir descrevemos alguns poliedros convexos.

2.1 Prismas

Definição 2.1.1: Sejam $A_1A_2\dots A_n$ vértices de uma região poligonal convexa situado no plano α e um segmento de reta \overline{PQ} , cuja reta suporte r , que contém \overline{PQ} , intercepta o plano α . Chamamos de *prisma* a reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a \overline{PQ} , com uma extremidade nos pontos da região poligonal e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α .

A denominação de um prisma depende da quantidade de lados que determina o polígono de sua base, ou seja, um prisma será triangular, quadrangular, etc., se suas bases forem triângulos, quadriláteros, etc. Ainda, um prisma possui os seguintes elementos:

- Bases: um prisma possui 2 bases determinadas por polígonos congruentes pertencentes a planos paralelos;
- Faces laterais: os paralelogramos (região quadrangular) determinados pelos vértices dos polígonos das bases;
- Arestas: os lados das regiões poligonais;
- Vértices: os vértices das regiões poligonais.

Exemplo 2.1.1: Um prisma cuja base é uma região poligonal de seis lados é chamado de prisma hexagonal (Figura 13).

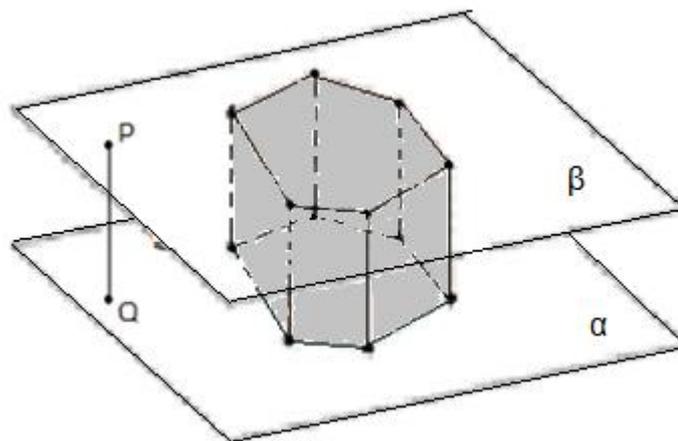


Figura 13: Prisma Hexagonal.

Definição 2.1.2: Secção de um prisma é uma região poligonal plana obtida da interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Secção *reta* é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.

Exemplo 2.1.2: A secção de um prisma triangular é um triângulo (Figura 14).

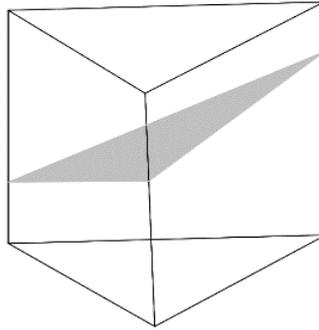


Figura 14: Secção de um prisma triangular.

Observemos que a secção é uma região triangular com um só vértice em cada aresta lateral do prisma.

Exemplo 2.1.3: O plano que determina a secção reta do prisma triangular é paralelo a base, neste caso, a secção é congruente à base (Figura 15).

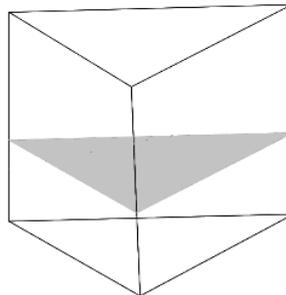


Figura 15: Secção reta de um prisma triangular.

Definição 2.1.3: A *superfície lateral* de um prisma é a reunião de suas faces laterais e a *superfície total* de um prisma é a reunião de sua superfície lateral com suas bases.

Definição 2.1.4: O prisma pode ser classificado como:

- i. *Prisma Reto* é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;

Uma reta r é perpendicular a um plano quando é ortogonal a todas as retas desse plano. Uma aresta lateral será perpendicular ao plano da base do prisma quando a sua reta suporte for perpendicular a esse plano.

- ii. *Prisma Obliquo* é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases;
- iii. *Prisma Regular* é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Exemplos desses prismas podem ser observados na Figura 16.

Uma outra forma de verificar que uma reta r é perpendicular a um plano é analisando se r é ortogonal a um par de retas concorrentes deste plano. A prova deste Teorema pode ser encontrada em Carvalho (2005).

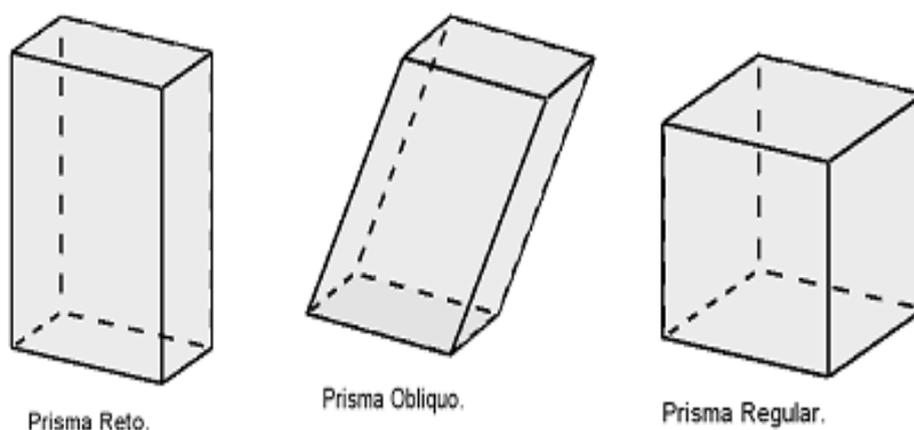


Figura 16: Prismas reto, oblíquo e Regular.

Proposição 2.1.1: As faces laterais de um prisma reto são retangulares.

Demonstração:

Sejam $A_1...A_n$ e $B_1...B_n$ vértices dos polígonos que determinam as bases de um prisma reto. Pela Definição 2.1.4 (i) temos que as arestas laterais do prisma são perpendiculares aos planos das bases e, conseqüentemente, às arestas das bases, ou seja, A_iB_i é perpendicular a A_iA_{i+1} e também a B_iB_{i+1} , com $1 \leq i \leq n$. Daí, A_iB_i é paralelo a $A_{i+1}B_{i+1}$ e A_iA_{i+1} é paralelo a B_iB_{i+1} . Logo $A_iB_iA_{i+1}B_{i+1}$ é um paralelogramo.

Como $A_i B_i$ é perpendicular a $A_i A_{i+1}$ e também a $B_i B_{i+1}$ e, ainda, $A_i B_i$ é paralelo a $A_{i+1} B_{i+1}$ (por construção), segue que $A_{i+1} B_{i+1}$ também é perpendicular a $A_i A_{i+1}$ e também a $B_i B_{i+1}$. Assim os ângulos internos do paralelogramo $A_i B_i A_{i+1} B_{i+1}$ são congruentes e medem 90° , ou seja, $A_i B_i A_{i+1} B_{i+1}$ é um retângulo.

Portanto, as faces de um prisma reto são retangulares. ■

Definição 2.1.5: *Paralelepípedo* é um prisma cujas bases são paralelogramos (Figura 17).

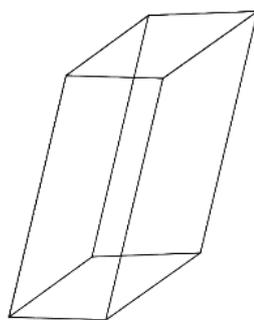


Figura 17: Paralelepípedo.

Definição 2.1.6: *Paralelepípedo Retângulo* é um prisma reto cujas bases são retangulares (Figura 18).

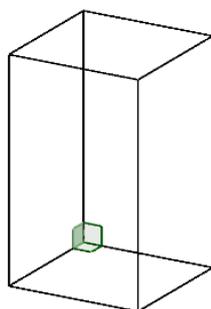


Figura 18: Paralelepípedo Retângulo.

Definição 2.1.7: Um *Cubo* é um paralelepípedo retângulo regular (Figura 19).

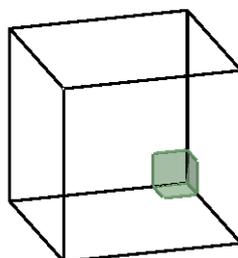


Figura 19: Cubo.

2.2 Pirâmide

Definição 2.2.1: Sejam $A_1A_2\dots A_n$ vértices de uma região poligonal convexa situados no plano α e um ponto V não pertencente a esse plano. Chama-se *pirâmide* de base $A_1A_2\dots A_n$ e vértice V à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e outra nos pontos da região.

Uma pirâmide possui os seguintes elementos:

- Base: a região pertencente ao plano α ;
- Faces laterais: As regiões triangulares determinadas pelos vértices da base e o vértice V ;
- Arestas: os lados das regiões poligonais;
- Vértices: os vértices das regiões poligonais.

É importante notar que a natureza de uma pirâmide será determinada pela quantidade de lados de sua base, ou seja, uma pirâmide será triangular, quadrangular, etc., se suas bases forem regiões triangulares, quadrangulares, etc.

Exemplo 2.2.1: Na Figura 20 temos uma pirâmide cuja base é formada por uma região poligonal de cinco lados, $A_1A_2A_3A_4A_5$. Essa é uma pirâmide pentagonal.

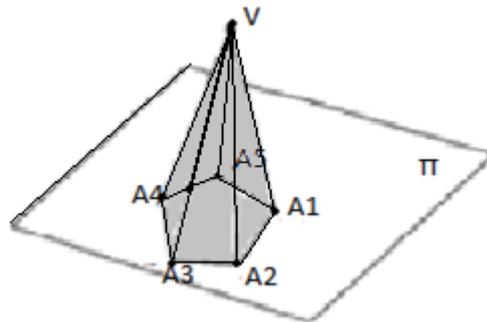


Figura 20: Pirâmide de base pentagonal.

Definição 2.2.2: Secção de uma pirâmide é uma região poligonal plana com apenas um vértice em cada aresta. Na Figura 21 as secções foram obtidas ao seccionar a pirâmide com um plano não paralelo e outro paralelo à base.

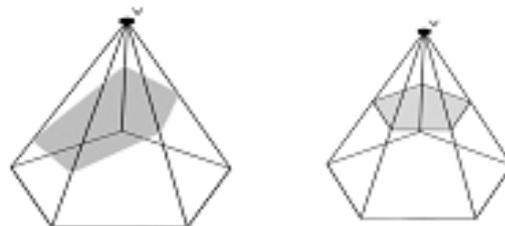


Figura 21: Secções de uma pirâmide pentagonal.

Pode ser observado que a secção de uma pirâmide é uma região poligonal de mesmo número de lados que a base desta pirâmide. No caso da pirâmide a direita na Figura 21, os lados da secção são paralelos aos lados da base da pirâmide.

Definição 2.2.3: A *superfície lateral* de uma pirâmide é a reunião das faces laterais da pirâmide. A *superfície total* de uma pirâmide é a reunião de sua superfície lateral com a região poligonal que determina sua base.

Se a região poligonal que determina a base de uma pirâmide é convexa, então esta pirâmide também é convexa.

Definição 2.2.4: Chamamos de *projeção ortogonal* de um ponto P sobre um plano π o ponto P' , ponto de intersecção entre o plano e a reta que passa por P , tal que o segmento PP' é perpendicular ao plano.

Exemplo 2.2.2: Projeção ortogonal do ponto P sobre o plano π (Figura 22).

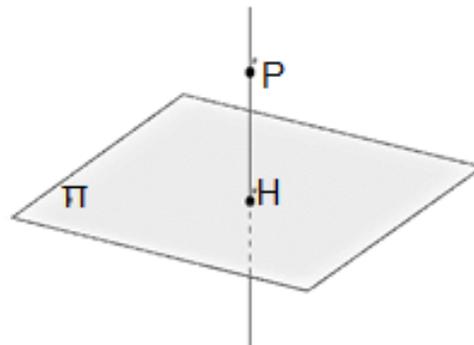


Figura 22: Projeção ortogonal do ponto P sobre o plano π .

Definição 2.2.5: Chamamos *altura* de uma pirâmide o segmento, de medida h , determinado pela projeção ortogonal H , do vértice V da pirâmide sobre o plano que contém a sua base.

Exemplo 2.2.3: Na Figura 23 está representada a altura VH , de medida h , de uma pirâmide de base pentagonal.

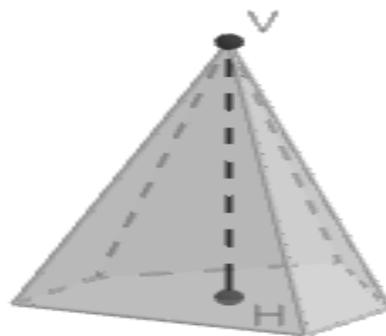


Figura 23: Altura de uma pirâmide pentagonal.

Definição 2.2.6: Uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base é chamada de *pirâmide regular*.

Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. A altura de uma face lateral relativa ao lado da base de uma pirâmide regular é denominada *apótema*.

Exemplo 2.2.4: Na figura 24 está representado a apótema a de uma das faces laterais de uma pirâmide de base pentagonal.

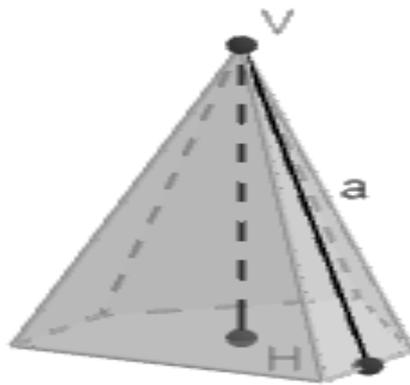


Figura 24: Apótema de uma face lateral de uma pirâmide de base pentagonal.

Definição 2.2.7: *Tetraedro* é uma pirâmide triangular (Figura 25).

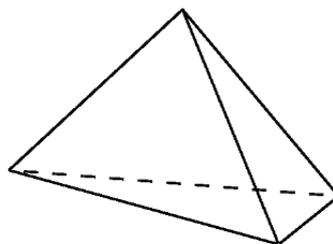


Figura 25: Tetraedro.

Pela Definição 2.10, o *Tetraedro regular* é um tetraedro que tem todas as faces congruentes (Figura 26).

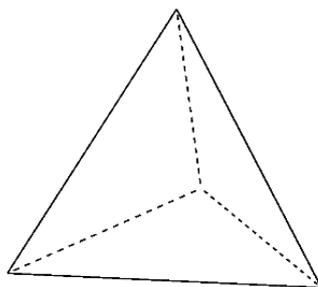


Figura 26: Tetraedro Regular.

Capítulo 3: FIGURAS ESPACIAIS - NÃO POLIEDROS

Neste capítulo vamos introduzir conceitos envolvendo figuras espaciais classificadas como não poliedros, de acordo com a Definição 2.9 e conhecer suas propriedades. Para isso, vamos, primeiramente, recordar algumas definições importantes sobre circunferência.

Definição 3.1: Chamamos de *Circunferência* o conjunto dos pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo desse plano. O ponto fixo e a distância r que determinam uma circunferência são chamados, respectivamente, de *centro* e *raio*.

Exemplo 3.1: Na Figura 27 abaixo temos uma circunferência de centro O e raio r .

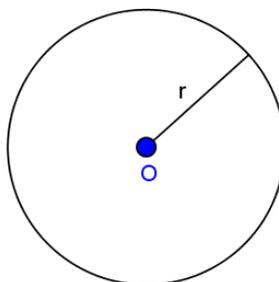


Figura 27: Circunferência de centro O e raio r .

Vamos considerar um círculo de centro O e raio r como sendo a região determinada pelos pontos do plano com distância menor ou igual a r de O , ou seja, a reunião da circunferência de centro O e raio r e seus pontos interiores.

3.1 Cilindro

Definição 3.1.1: Seja C um círculo de centro O e raio r pertencente a um plano π e seja PQ um segmento de medida não nula, não paralelo e não contido em π . Um *cilindro* é a reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a PQ , com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por π (Figura 28).

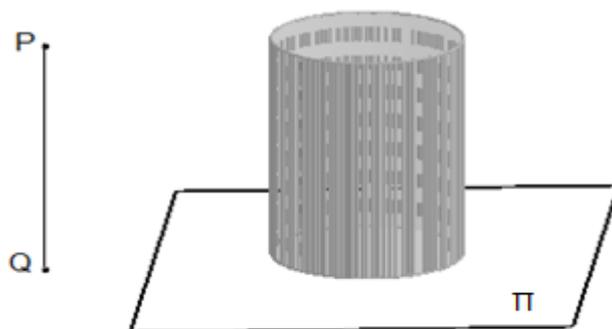


Figura 28: Cilindro.

Um cilindro possui os seguintes elementos:

- *Bases*: um cilindro possui 2 bases determinadas por círculos congruentes localizados em planos paralelos;
- *Geratrizes*: segmentos com uma extremidade em um ponto de uma das bases e outra extremidade no ponto correspondente da outra base.

Definição 3.1.2: A *altura* de um cilindro é a distância h entre os planos que contém as bases.

Definição 3.1.3: Chamamos de *superfície lateral* a reunião das geratrizes e de *superfície total* a reunião da superfície lateral com os círculos das bases.

Os cilindros podem ser classificados como *cilindro circular oblíquo*, quando as geratrizes são oblíquas aos planos das bases, ou *cilindro circular reto*, quando as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.

Exemplo 3.1.1: Na Figura 29 temos, a esquerda, um cilindro circular oblíquo e, a direita, um cilindro circular reto.



Figura 29: Cilindro circular oblíquo e cilindro circular reto.

Definição 3.1.4: Um *cilindro equilátero* é um cilindro cuja medida de sua altura equivale ao dobro da medida do raio de sua base.

Exemplo 3.1.2: Na Figura 30 o raio da base é $r = 2\text{cm}$ e altura $h = 4\text{cm}$. Logo, é um cilindro equilátero.

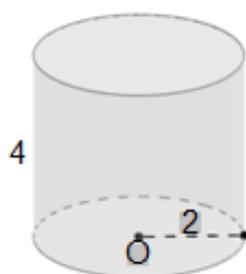


Figura 30: Cilindro equilátero.

3.2 Cone

Definição 3.2.1: Seja C um círculo de centro O e raio r pertencente a um plano π e seja V um ponto não pertencente a π . Chama-se *cone* à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e outra nos pontos do círculo (Figura 31).

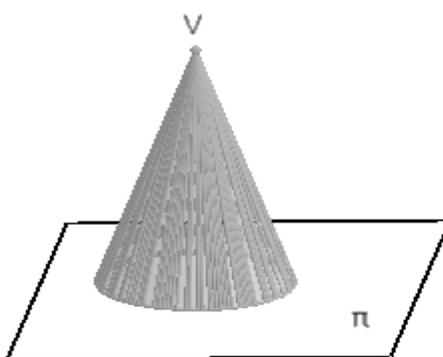


Figura 31: Cone.

Um cone possui os seguintes elementos:

- *Base:* círculo C de centro O e raio r ;
- *Geratrizes:* segmentos com uma extremidade no ponto V e outra extremidade nos pontos do círculo;
- *Vértice:* o ponto V conforme definição 3.2.1.

Definição 3.2.2: A *altura* de um cone é a medida h determinada pela projeção ortogonal do vértice V sobre o plano que contém sua base (Figura 32).

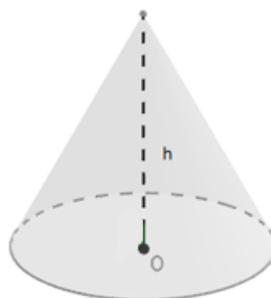


Figura 32: Cone de altura h .

Definição 3.2.3: A *superfície lateral* de um cone é a reunião de todas suas geratrizes e a *superfície total* é a reunião da superfície lateral com o círculo da base.

Os cones podem ser classificados como *cone circular oblíquo*, quando a reta que passa pelos pontos V e O é oblíqua ao plano da base, ou *cone circular reto*, quando a reta que passa pelos pontos V e O é perpendicular ao plano da base.

Exemplo 3.2.1: Na Figura 33 temos, a esquerda, um cone circular oblíquo e, a direita, um cone circular reto.

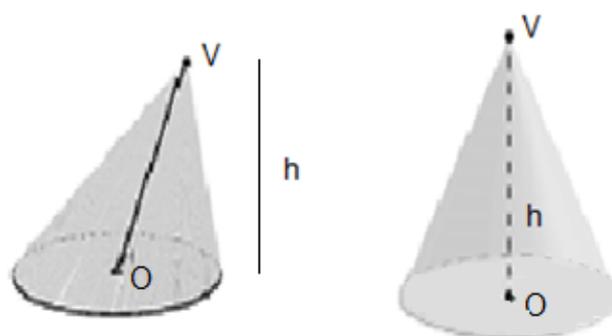


Figura 33: Cone circular oblíquo e cone circular reto.

3.3 Esfera

Definição 3.3.1: Consideremos um ponto O e um segmento de medida r . Uma *esfera* de centro O e raio r é o conjunto de pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r (Figura 34).

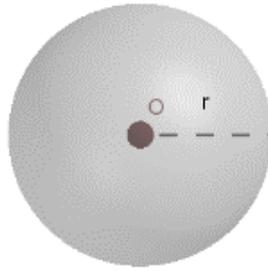


Figura 34: Esfera.

Definição 3.3.2: A *superfície* de uma esfera de centro O e raio r é o conjunto de pontos P do espaço, tais que a distância OP é igual a r .

Estudaremos a seguir como determinar o volume dos poliedros e não poliedros apresentados nos capítulos 2 e 3. Da forma como definidos, essas figuras espaciais são também chamadas de sólidos geométricos.

Capítulo 4: CALCULO DE VOLUMES - PRINCÍPIO DE CAVALIERI

De forma intuitiva, o volume de um sólido é o total de espaço que ele ocupa. No entanto, a definição segue:

Definição 4.1: *Volume* de um sólido ou *medida* do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

- i. Sólidos congruentes têm volumes iguais;
- ii. Se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2 .

A unidade de medida de volume de um sólido é, em geral considerado, o cubo de aresta 1 uc (unidade de comprimento). Neste caso, o seu volume é 1 uv (unidade de volume), conforme axioma 4.1.1. Para obter o volume de um sólido, o número real positivo pela Definição 4.1, compara-se o cubo com o sólido, de forma a determinar quantos cubos são necessários para obter o sólido, considerando também i e ii.

O Princípio de Cavalieri é uma importante ferramenta para o cálculo de volumes. Com ele é possível solucionar de maneira simples problemas que requereriam técnicas avançadas de cálculo diferencial e integral.

Axioma 4.1: (Princípio de Cavalieri) Dados dois sólidos S_1 e S_2 , se existe um plano α tal que todo plano β paralelo a α determina secções planas em S_1 e S_2 com áreas iguais, então os volumes de S_1 e S_2 são iguais.

Esta relação entre as áreas das secções planas e os volumes dos sólidos também é válida para aqueles com bases determinadas por figuras planas distintas, desde que tenham mesma área. Em outras palavras, o princípio de Cavalieri garante que se os sólidos possuírem secções com mesma área e tiverem a mesma altura, então eles terão o mesmo volume.

Neste capítulo vamos determinar métodos para encontrarmos o volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

4.1 Volume do Paralelepípedo Retângulo

Para determinarmos o volume de um paralelepípedo retângulo vamos considerar que a *unidade de volume seja o cubo de aresta 1uc*.

Axioma 4.1.1: O volume de um cubo de aresta com medida igual a 1(um) unidade de comprimento, ou cubo unitário, é igual a 1(um) unidade de volume. Esse volume será representado por $V(1,1,1) = 1$.

O Paralelepípedo Retângulo é determinado pelas medidas de seu comprimento, largura e altura, representados na Figura 35 por a , b e c , respectivamente. Vamos compará-lo com o cubo de aresta 1uc para obter o seu volume, ou seja, determinar o número real positivo, conforme Definição 4.1. Para isso, compararemos inicialmente dois paralelepípedos retângulos conforme 4.1.1.

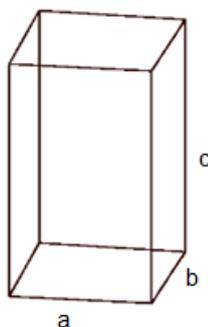


Figura 35: Paralelepípedo retângulo com medidas a , b e c .

Definição 4.1.1: Diz-se que dois subconjuntos infinitos H e K de números racionais são classes *contíguas* quando verificam as condições:

- i. Todo número de H é menor que todo número de K ;
- ii. Para cada $\varepsilon > 0$ existem $h \in H$ e $k \in K$ tais que $k - h < \varepsilon$.

Proposição 4.1.1: A razão entre dois paralelepípedos retângulos de bases congruentes é igual à razão entre as alturas.

Demonstração:

Sejam $P(a,b,h_1)$ e $P(a,b,h_2)$ dois paralelepípedos com mesmo comprimento, a , mesma largura, b , e altura h_1 e h_2 , respectivamente. Vamos mostrar que:

$$\frac{P(a,b,h_1)}{P(a,b,h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$$

1º caso: h_1 e h_2 são comensuráveis

Sendo h_1 e h_2 comensuráveis, existe um segmento x submúltiplo comum de h_1 e h_2 , tal que $h_1 = p \cdot x$ e $h_2 = q \cdot x$, com $p, q \in \mathbb{Q}$.

Assim,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \quad (4.1)$$

Desta forma é possível considerar os paralelepípedos $X(a,b,x)$ justapostos em $P(a,b,h_1)$ e $P(a,b,h_2)$, tal que $P(a,b,h_1) = p \cdot X$ e $P(a,b,h_2) = q \cdot X(a,b,c)$ (Figura 36).

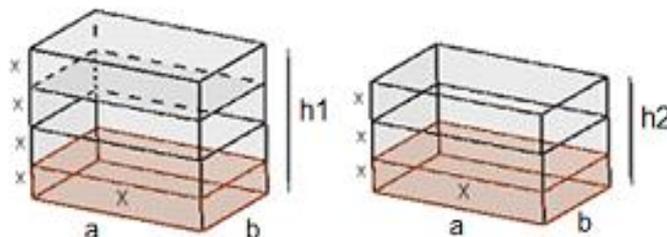


Figura 36: Paralelepípedo $P(a, b, h_1)$ à esquerda e paralelepípedo $P(a, b, h_2)$ à direita, com h_1 e h_2 comensuráveis.

Assim, a relação entre $P(a,b,h_1)$ e $P(a,b,h_2)$ é

$$\frac{P(a,b,h_1)}{P(a,b,h_2)} = \frac{p}{q} \quad (4.2)$$

De (4.1) e (4.2) segue que

$$\frac{P(a,b,h_1)}{P(a,b,h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$$

2º caso: h_1 e h_2 são incomensuráveis

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, não existe segmento múltiplo comum de h_1 e h_2 , de modo a considerar os paralelepípedos $X(a,b,x)$ justapostos em $P(a,b,h_1)$ e $P(a,b,h_2)$, como no caso anterior.

Considere um segmento de medida y , submúltiplo de h_1 , tal que

$$h_1 = n \cdot y, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

Comparando y com h_2 (Figura 37),

$$m \cdot y < h_2 < (m + 1) \cdot y,$$

com m distinto de n , por serem h_1 e h_2 incomensuráveis. Assim,

$$\frac{m}{n} < \frac{h_2}{h_1} < \frac{m + 1}{n} \quad (4.3)$$

Considerando os paralelepípedos $Y(a,b,y)$ justapostos em $P(a,b,h_1)$ e $P(a,b,h_2)$ (Figura 37), temos:

$$\begin{aligned} m \cdot Y(a, b, y) &< P(a, b, h_2) < (m + 1) \cdot Y(a, b, y) \\ n \cdot Y(a, b, y) &= P(a, b, h_1) \end{aligned}$$

$$\frac{m}{n} < \frac{P(a, b, h_2)}{P(a, b, h_1)} < \frac{m + 1}{n} \quad (4.4)$$

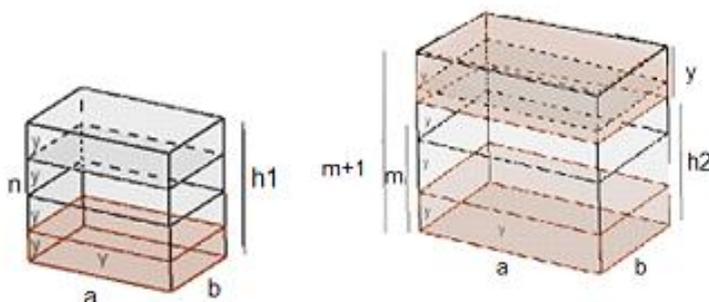


Figura 37: Paralelepípedo $P(a, b, h_1)$ à esquerda e paralelepípedo $P(a, b, h_2)$ à direita, com h_1 e h_2 incomensuráveis.

Como y é submúltiplo de h_1 , y pode variar, e dividindo y , aumenta n . Nestas condições, colocar como conjunto $H = \{\frac{m}{n}, m \text{ e } n \text{ natural}\}$ e $T = \{\frac{m+1}{n}, m \text{ e } n \text{ natural}\}$ formam duas classes contíguas que definem um único número real. Por (4.3) esse número é $\frac{h_2}{h_1}$ e por (4.4),

$$\frac{P(a, b, h_2)}{P(a, b, h_1)} = \frac{h_2}{h_1}.$$



Teorema 4.1.1: Seja ABCDEFGH um paralelepípedo retângulo de dimensões a , b e c . O volume deste paralelepípedo é $V = a \cdot b \cdot c$.

Demonstração:

Determinemos quantos cubos de aresta 1, $P(1,1,1)$, justapostos, podem ser colocados no interior do paralelepípedo retângulo ABCDEFGH, $P(a, b, c)$ (Figura 38) . Pela Definição 4.1, essa quantidade será o volume de ABCDEFGH. Desta forma, o volume procurado será

$$V = \frac{P(a, b, c)}{P(1,1,1)}.$$

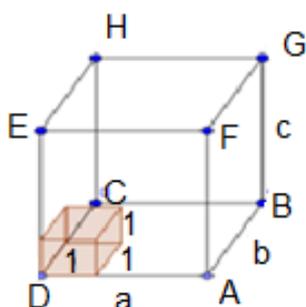


Figura 38: Cubo de aresta 1 justaposto no interior do paralelepípedo ABCDEFGH.

Consideremos os paralelepípedos $P(a,b,c)$, $P(a,b,1)$, $P(a,1,1)$ e $P(1,1,1)$. Pela proposição 4.1.1, considerando como bases congruentes os retângulos de lados medindo a e b em $P(a, b, c)$ e $P(a, b, 1)$,

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} = \frac{c}{1}.$$

Considerando como bases congruentes os retângulos de lados medindo a e 1 em $P(a,b,1)$ e $P(a,1,1)$,

$$\frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} = \frac{b}{1}.$$

Considerando como bases congruentes os retângulos de lados medindo b e 1 em $P(a,1,1)$ e $P(1,1,1)$,

$$\frac{P(a, 1, 1)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1}.$$

Desta forma,

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} \cdot \frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} \cdot \frac{P(a, 1, 1)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1}$$

$$\frac{P(a, b, c)}{P(1,1,1)} = a \cdot b \cdot c.$$

Portanto, $V = a.b.c.$ ■

Com isso, podemos concluir que o volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto entre a área de sua base e a medida de sua altura.

Exemplo 4.1.1: Considere uma escada com os degraus em forma de um paralelepípedo de dimensões: 1m de comprimento, 0,60m de largura e 0,50m de altura. Determine o volume total de concreto utilizado na construção dessa escada sabendo que ela possui 16 degraus (Figura 39).

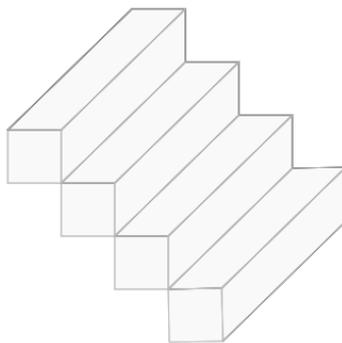


Figura 39: Escada.

Solução:

Primeiramente vamos calcular o volume de um degrau.

Como o degrau é um paralelepípedo com $a = 1\text{m}$ de comprimento, $b = 0,60\text{m}$ de largura e $c = 0,50\text{m}$ de altura, temos:

$$V = a \times b \times c = 1 \times 0,60 \times 0,50 = 0,30 \text{ m}^3.$$

Como a escada possui 16 degraus temos que o volume total da escada é de $0,30 \times 16 = 4,8\text{m}^3$ ou 4,8 mil litros de concreto.

Exemplo 4.1.2: Considere uma jarra no formato de um paralelepípedo, de dimensões 8cm de comprimento, 8cm de largura e 30cm de altura, contendo 1,6 litros de suco de laranja (Figura 40). Determine a distância d , em centímetros, entre o nível de suco na jarra e sua borda superior.

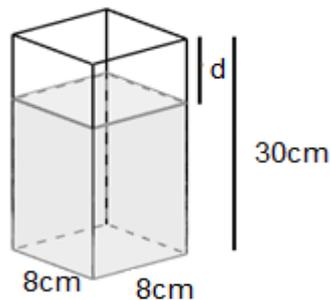


Figura 40: Jarra.

Solução:

O volume total da jarra de dimensões $a = 8\text{cm}$ de comprimento, $b = 8\text{cm}$ de largura e $c = 30\text{cm}$ de altura é dado por:

$$V_T = a \times b \times c = 8 \times 8 \times 30 = 1920 \text{ cm}^3.$$

Vamos chamar de h' a altura correspondente ao nível de suco na jarra.

Sabendo que $1\text{l} = 1000\text{cm}^3$ temos $1,6\text{l} = 1600\text{cm}^3$, com isso, vamos encontrar h' .

$$1600 = 8 \times 8 \times h' \rightarrow h' = \frac{1600}{64} = 25 \text{ cm}.$$

$$\text{Logo, } d = 30 - h' = 30 - 25 = 5 \text{ cm}.$$

4.2 Volume de Prisma e Cilindros

Proposição 4.2.1: O volume de um prisma e de um cilindro circular qualquer é o produto da sua área de sua base pela sua altura.

Demonstração:

Considere um prisma P_1 de altura h e área da base igual a A e um paralelepípedo retângulo P_2 de altura h e área da base também igual a A . Supondo, sem perda de generalidade que ambos os sólidos com base num mesmo plano α e estejam situados num mesmo semiespaço deste plano, temos que, dado

β um plano paralelo a α que secciona P_1 , β também irá seccionar P_2 . Ainda, as secções têm áreas iguais, pois são congruentes as bases.

As Figuras 41 e 42 mostram o caso em que o prisma é hexagonal.

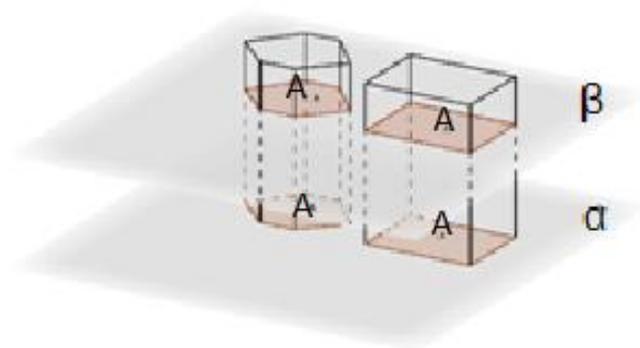


Figura 41: Seções do prisma hexagonal reto e paralelepípedo retângulo.

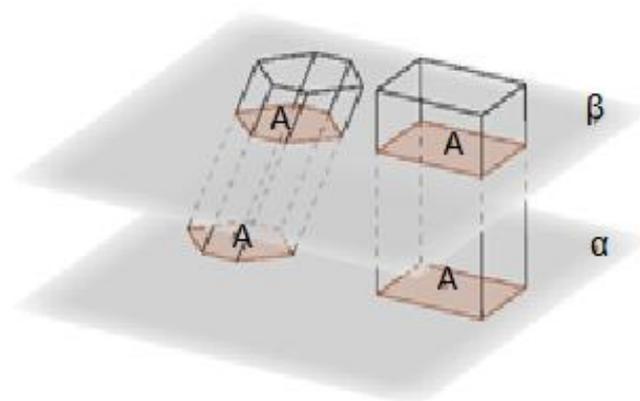


Figura 42: Seções do prisma hexagonal oblíquo e paralelepípedo retângulo.

Logo, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm o mesmo volume.

$$V_{P_1} = V_{P_2} \quad (4.5)$$

Pelo Teorema 4.1.1 o volume do paralelepípedo retângulo é dado pelo produto entre a área de sua base e a medida de sua altura. Assim,

$$V_{P_2} = A \cdot h \quad (4.6)$$

De (4.5) e (4.6) segue que:

$$V_{P_1} = A \cdot h$$

Ou seja, o volume de um prisma qualquer é o produto entre a área de sua base e a medida de sua altura.

Para o cilindro, considere S_1 um cilindro com área da base igual à A e altura h e, S_2 um prisma com área da base também igual à A e altura h . Ainda, suponhamos que os dois sólidos tenham bases pertencentes a um mesmo plano α e estejam situados num mesmo semiespaço determinado por este plano.

Seja β um plano paralelo a α que secciona os dois sólidos em ponto qualquer entre suas bases e suas alturas, temos que as secções originadas também terão área igual à A , pois são congruentes às respectivas bases. Na Figura 43, essas considerações podem ser observadas para o cilindro circular e o prisma particular (paralelepípedo).

Assim, pelo Princípio de Cavalieri, segue que os volumes do cilindro e do paralelepípedo retângulo são iguais, ou seja, o volume do cilindro é dado pelo produto entre a área da sua base e a medida de sua altura:

$$V_C = A \cdot h.$$

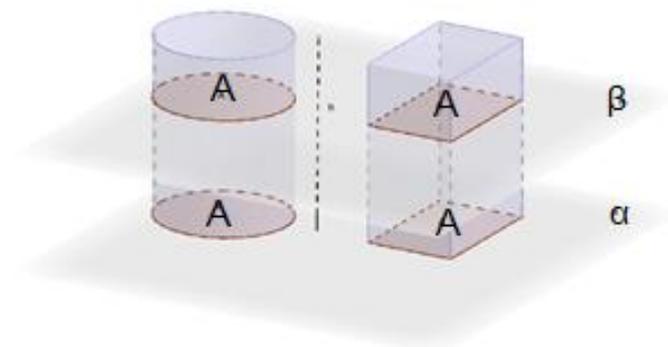


Figura 43: Cilindro e paralelepípedo retângulo de alturas congruentes e bases equivalentes. ■

Notemos que a base de um cilindro é um círculo e sua área é dada por $A = \pi r^2$, onde r é o raio do círculo.

Exemplo 4.2.1: Um prisma tem por base um triângulo equilátero cujo lado mede x e sua altura equivale ao dobro da altura do triângulo da base. Determine o volume desse prisma (Figura 44).



Figura 44: Prisma de base triangular.

Solução:

Como sabemos que a base deste prisma é um triângulo equilátero de lado medindo x temos que sua altura é dada por:

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Sabendo que o volume de um prisma é dado pelo produto entre a área de sua base e a medida de sua altura e, ainda, que a área de um triângulo é igual à metade do produto entre a medida de sua base e a medida de sua altura, temos que o volume deste prisma é:

$$V = \frac{x \cdot h}{2} \cdot 2h = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 2 \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3x^3}{4}.$$

Exemplo 4.2.2: Determine o volume de um prisma hexagonal regular com 3m de altura, sabendo que se a altura fosse de 5m o volume do prisma aumentaria em 6m^3 (Figura 45).

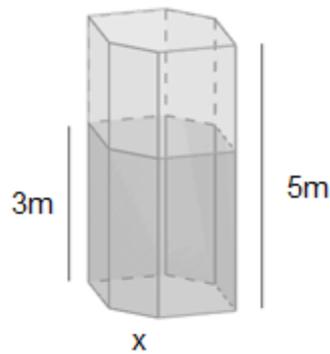


Figura 45: Prisma Hexagonal de base regular.

Solução:

Vamos considerar V e V' os volumes do prisma hexagonal de altura $3m$ e $5m$, respectivamente, e de x a medida da aresta da base desse prisma.

Como a base do prisma é um hexágono regular de lado medindo x temos que sua área é de:

$$A = 6 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Ainda,

$$V' = V + 6 \rightarrow A \cdot 5 = A \cdot 3 + 6 \rightarrow 2 \cdot A = 6 \rightarrow A = \frac{6}{2} \rightarrow A = 3m^2.$$

Logo,

$$V = 3 \cdot 3 = 9m^3.$$

Exemplo 4.2.3: Considerem um pedaço de cano cilíndrico com $30cm$ de comprimento e $10cm$ de diâmetro interno, posicionado verticalmente e com a base inferior vedada. Determine o que acontecerá se colocarmos $2L$ de água em seu interior.

Solução:

Sabendo que o raio de uma circunferência equivale à metade de seu diâmetro temos que o raio da base deste cilindro é de $5cm$. Ainda, consideremos seu comprimento como sendo sua altura.

Com isso, vamos determinar a capacidade, V , deste cano e, para isso, consideremos $\pi = 3,14$, aproximadamente:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 30 = 2355 \text{ cm}^3.$$

Lembrando que $1\text{L} = 1000 \text{ cm}^3$ temos que a capacidade do pedaço de cano é de, aproximadamente, 2,355L. Logo colocar 2L de água dentro deste cano não o encherá até a borda.

Exemplo 4.2.4: Considere um tonel de forma cilíndrica onde está depositada uma quantidade de vinho que ocupa a metade de sua capacidade. Retirando-se 40L de seu conteúdo, a altura do nível do vinho baixa de 20%. Determine, em litros, a capacidade desse tonel.

Solução:

Sabendo que ao retirarmos 40L de seu conteúdo a altura do nível de vinho baixa de 20% temos que estes 40L representam 20% da altura do tonel. Logo, para termos o tonel completo, será necessário 200L de vinho.

A base do princípio de Cavalieri é a comparação entre os sólidos. Desta forma, é de extrema importância que estes sejam escolhidos adequadamente, caso contrário o princípio não será válido. Por exemplo, ao se comparar dois prismas, independentemente da distância entre a secção e a base, as áreas das secções, em cada um, serão constantes.

Observemos que não é possível utilizar o princípio de Cavalieri para determinarmos o volume da pirâmide e do cone, comparando-os aos prismas ou até mesmo ao cilindro, pois nota-se que, na pirâmide e no cone, quanto mais próximos do vértice forem seccionados, menor será a área produzida.

4.3 Pirâmide

Considere um tetraedro seccionado por um plano paralelo a sua base e os tetraedros assim obtidos, $VABC$ e $V'A'B'C'$ (Figura 46). Sejam $VH = h$ e $VH' = h'$ as medidas das alturas, respectivamente.

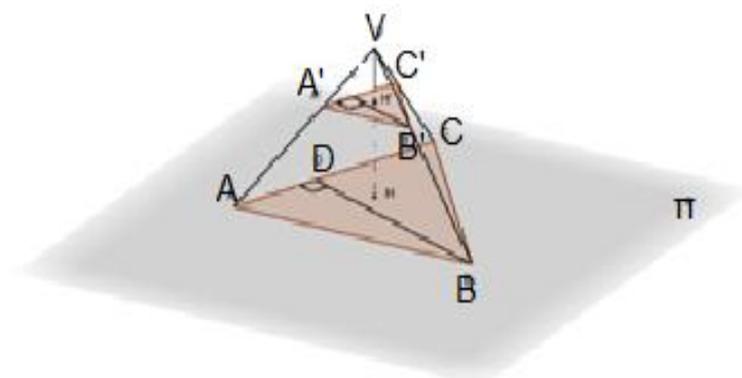


Figura 46: Secção no tetraedro paralela a sua base.

Teorema 4.3.1: Seja $VABC$ um tetraedro com base num plano α e seja β um plano paralelo a α que secciona $VABC$, temos:

- i. As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão;
- ii. A secção e a base são triângulos semelhantes;
- iii. A razão entre as áreas da secção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.

Demonstração:

Considere um tetraedro com base num plano α e seccionado por um plano β paralelo a sua base. Sejam $VH = h$ e $VH' = h'$ as alturas, respectivamente, dos tetraedros assim obtidos, $VABC$ e $V'A'B'C'$ (Figura 46).

- i. Temos que as retas AH e $A'H'$ são paralelas, pois $AH \in \alpha$ e $A'H' \in \beta$ e, por definição, $\alpha \parallel \beta$. Assim, os triângulos VAH e $VA'H'$ são semelhantes (caso ângulo-ângulo) e:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}.$$

Analogamente para as demais arestas laterais.

- ii. Como os lados dos triângulos ABC e A'B'C' são segmentos que pertencem, respectivamente, a α e a β e, como $\alpha \parallel \beta$, segue que os triângulos ABC e A'B'C' têm lados, respectivamente, paralelos ($AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $AC \parallel A'C'$). Com isso, os ângulos correspondentes destes triângulos são congruentes, ou seja:

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \angle BCA \equiv \angle B'C'A', \angle CAB \equiv \angle C'A'B'.$$

Portanto, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes (caso ângulo-ângulo-ângulo).

Ainda, os triângulos VAB e VA'B' são semelhantes:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} \rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}.$$

Logo, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes e a razão de semelhança é

$$\frac{h'}{h}.$$

- iii. Como BD e B'D' são alturas dos triângulos ABD e A'B'D' em relação a AC e A'C', respectivamente, e os ângulos A e A' são congruentes, esses triângulos são semelhantes.

Assim,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} \rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h}.$$

Logo,

$$\frac{\text{Área}(\Delta A'B'C')}{\text{Área}(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2}A'C' \cdot B'D'}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{AC \cdot BD} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$



Teorema 4.3.2: Dois tetraedros de bases de áreas equivalentes e alturas congruentes têm mesmo volume.

Demonstração:

Sejam T_1 e T_2 dois tetraedros com áreas da base A_1 e A_2 e altura H_1 e H_2 , respectivamente (Figura 47).

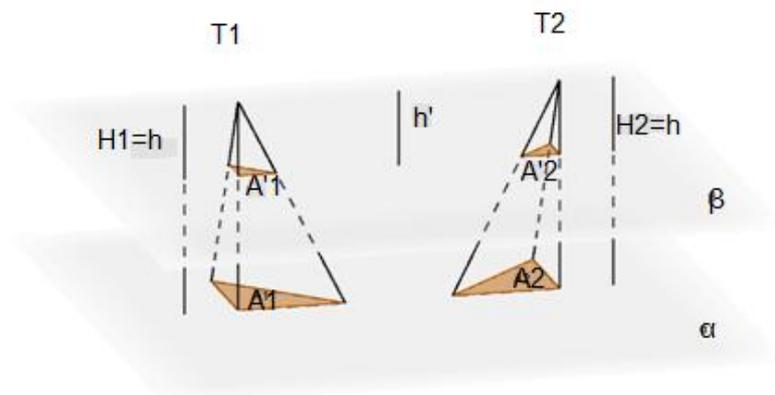


Figura 47: Tetraedros de mesma área da base e mesma altura.

Por hipótese,

$$A_1 = A_2 \text{ e } H_1 = H_2. \quad (4.7)$$

Considere as bases equivalentes pertencentes a um mesmo plano α e os vértices dos tetraedros em um mesmo semiespaço determinado por α . Seja β um plano, paralelo a α , o qual intersecciona T_1 e T_2 , distante h' de seus vértices, determinando as seções A_1' e A_2' respectivamente.

Assim, pelo teorema 4.3.1 (iii),

$$\frac{A_1'}{A_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{A_2'}{A_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Logo,

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2}. \quad (4.8)$$

Como $A_1 = A_2$, segue de (4.8) que $A_1' = A_2'$, ou seja, as seções têm mesma área. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, os tetraedros T_1 e T_2 têm volumes iguais. ■

Teorema 4.3.3: Todo prisma triangular é a soma de três tetraedros equivalentes entre si, ou seja, de mesmo volume.

Demonstração:

Consideremos o prisma triangular ABCDEF (Figura 48).

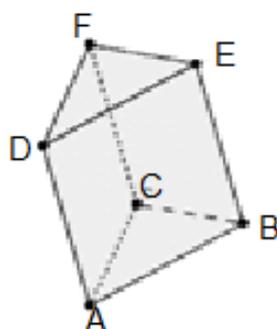


Figura 48: Prisma triangular ABCDEF.

Ao cortarmos este prisma pelo plano (A, C, E) obtemos o tetraedro $T_1 = EABC$ e a pirâmide quadrangular EACFD (Figura 49).

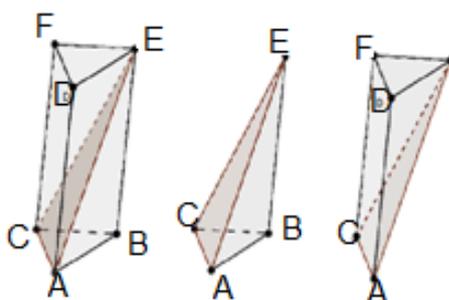


Figura 49: Corte do prisma triangular ABCDEF através do plano (A, C, E).

Cortando a pirâmide EACFD pelo plano (C, D, E) obtemos o tetraedro $T_2 = CDEF$ e o tetraedro $T_3 = EACD$ (Figura 50).

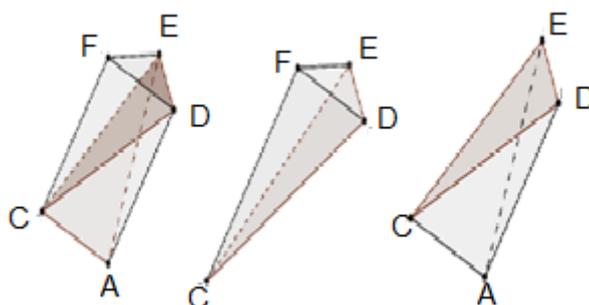


Figura 50: Corte da pirâmide quadrangular EACFD pelo plano (C, D, E).

Assim, o prisma $ABCDEF = T_1 + T_2 + T_3$, ou seja, o volume do prisma $ABCDEF$ é dado pela soma dos volumes de T_1 , T_2 e T_3 .

Como os triângulos ABC e DEF são congruentes, pois são bases do prisma, e BE e CF são congruentes, pois são a altura do prisma, pelo Princípio de Cavalieri, os tetraedros T_1 e T_2 possuem mesmo volume

$$V_{T_1} = V_{T_2}. \quad (4.9)$$

Como CD é a diagonal do paralelogramo $ACFD$ segue que os triângulos ACD e CDF são congruentes, logo possuem mesma área. Assim, os tetraedros T_2 e T_3 possuem mesmo volume, pois têm mesma área da base e mesma altura (distância do ponto E ao plano que contém o paralelogramo $ACFD$):

$$V_{T_2} = V_{T_3}. \quad (4.10)$$

De (4.9) e (4.10) temos:

$$V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}.$$



Proposição 4.3.1: O volume de um tetraedro, T , de área da base A e altura de medida h é dado por um terço do produto da área de sua base por sua altura, ou seja,

$$V_T = \frac{1}{3}Ah.$$

Demonstração:

Vamos considerar um prisma triangular com área da base A e altura de medida h .

Pelo Teorema 4.3.3 segue que este prisma pode ser dividido em três tetraedros T_1 , T_2 e T_3 de mesmo volume, ou seja,

$$V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V_T.$$

Assim,

$$V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = V_{Prisma},$$

$$V_T + V_T + V_T = V_{Prisma},$$

$$3V_T = Ah,$$

$$V_T = \frac{1}{3}Ah.$$



Proposição 4.3.2: O volume de uma pirâmide de área da base A e altura h é dado por um terço do produto da área de sua base por sua altura, ou seja,

$$V_P = \frac{1}{3}Ah.$$

Demonstração:

Seja A a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer, com base de n arestas, $n \in \mathbb{N}^*$. Esta pirâmide é dada pela soma de $(n - 2)$ tetraedros de área da base A_1, A_2, \dots, A_{n-2} , respectivamente, e altura medindo h . Assim,

$$\begin{aligned} V_P &= V_{T_1} + V_{T_2} + \dots + V_{T_{(n-2)}} = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \dots + \frac{1}{3}A_{n-2}h = \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-2})h = \frac{1}{3}Ah. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.1: Determine o volume de um octaedro regular de aresta medindo a (Figura 51).

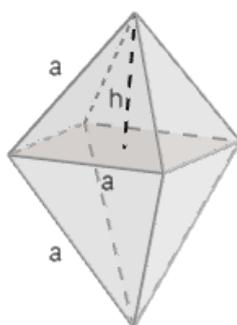


Figura 51: Octaedro regular de aresta a .

Solução:

Como pode ser observado na figura 51, um octaedro regular é a reunião de duas pirâmides de base quadrada com arestas medindo a , assim, o volume V do octaedro será o dobro do volume da pirâmide em questão.

Como as faces laterais de uma pirâmide regular de base quadrada são triângulos equiláteros e que suas arestas medem a temos que a altura da face é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ainda, lembrando que o pé da perpendicular do vértice da pirâmide regular de base quadrada é o centro de sua base segue que a sua distância à aresta da base é igual à metade da medida de sua aresta, ou seja, $\frac{a}{2}$ (Figura 52).

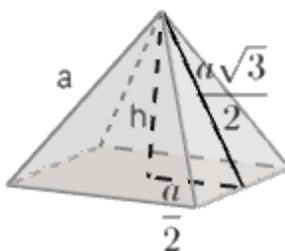


Figura 52: Pirâmide regular de base quadrada.

Assim,

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, o volume do octaedro é dado por:

$$V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \text{área da base} \cdot h \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Exemplo 4.3.2: Considere um prisma e uma pirâmide com bases de mesma área, A . Determine a altura da pirâmide, H , em função da altura h do prisma, sabendo que o volume do prisma é o dobro do volume da pirâmide.

Solução:

Sejam V e V' os volumes do prisma e da pirâmide, respectivamente. Como o volume do prisma é o dobro do volume da pirâmide, temos:

$$V = 2 \cdot V',$$

$$A \cdot h = \frac{2}{3} \cdot A \cdot H,$$

$$H = \frac{3}{2} \cdot h.$$

4.4 Cone

Para obter o volume do cone faremos uma comparação com o volume da pirâmide.

Proposição 4.4.1:

- i. A razão entre as áreas da secção e da base de um cone é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice;
- ii. O volume de um cone é um terço do produto da área de sua base pela medida de sua altura.

Demonstração:

- i. Considerando a razão de semelhança de triângulos para o cone reto (Figura 53),

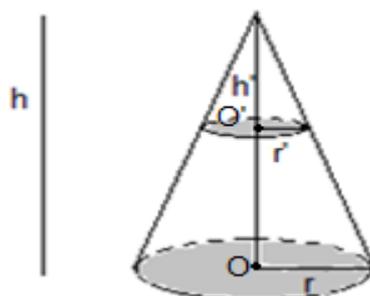


Figura 53: Cone reto.

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}.$$

Sendo A' a área da circunferência de centro O' e raio r' e A a área da circunferência de centro O e raio r , segue que $A' = \pi \cdot r'^2$ e $A = \pi \cdot r^2$. Assim,

$$\frac{A'}{A} = \frac{\pi \cdot r'^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{r'^2}{r^2} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Considerando a razão de semelhança de triângulos para o cone oblíquo (Figura 54),

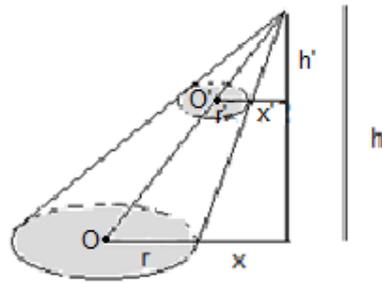


Figura 54: Cone oblquo.

$$\frac{x'}{x} = \frac{h'}{h}, \quad (4.11)$$

$$x' = \frac{x \cdot h'}{h}.$$

E,

$$\frac{r' + x'}{r + x} = \frac{h'}{h}.$$

Logo,

$$\frac{r' + x'}{r + x} = \frac{x'}{x},$$

$$x(r' + x') = x'(r + x),$$

$$r' = \frac{x' \cdot r}{x} \quad (4.12)$$

Sendo A' a área da circunferência de centro O' e raio r' e A a área da circunferência de centro O e raio r , segue que $A_1 = \pi \cdot r'^2$ e $A = \pi \cdot r^2$. Assim,

$$\frac{A'}{A} = \frac{\pi \cdot r'^2}{\pi \cdot r^2}.$$

De (4.12),

$$\frac{A'}{A} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{x' \cdot r}{x}\right)^2}{\pi \cdot r^2} = \left(\frac{x'}{x}\right)^2.$$

De (4.11),

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

ii. Consideremos S_1 um cone com área da base igual à A e altura h e, S_2 uma pirâmide com área da base também igual à A e altura h . Ainda, suponhamos que

os dois sólidos tenham bases pertencentes a um mesmo plano α e estejam situados num mesmo semiespaço determinado por este plano. A Figura 55 apresenta um caso particular em que a pirâmide tem base retangular.

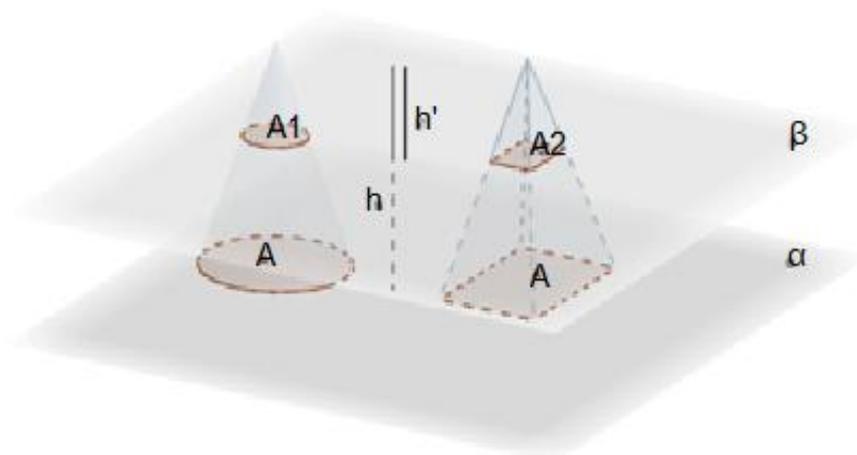


Figura 55: Cone e pirâmide com alturas congruentes e bases equivalentes.

Seja β um plano paralelo a α que secciona os dois sólidos em ponto qualquer entre suas bases e suas alturas, sendo A_1 e A_2 as áreas das secções do cone e da pirâmide, respectivamente.

Para a pirâmide, pelo Teorema 4.3.1 (iii),

$$\frac{A_2}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Para o cone, pela Proposição 4.1.1 (i),

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Logo, $A_1 = A_2$.

Pelo Princípio de Cavalieri, segue que os volumes do cone e da pirâmide de base retangular são iguais, ou seja, o volume do cone é dado por um terço do produto entre a área da sua base e a medida de sua altura:

$$V_C = \frac{1}{3}A \cdot h.$$



Notemos que a base de um cone é um círculo e sua área é dada por $A = \pi r^2$, onde r é o raio do círculo.

Exemplo 4.4.1: Consideremos um cone reto cuja base está inscrita na face de um cubo de aresta a (Figura 56). Sabendo que a área total deste cubo é igual a 54cm^2 e considerando $\pi = 3,14$, determine o volume do cone.

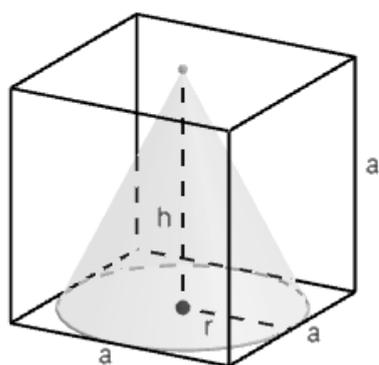


Figura 56: Cone reto com base inscrita na face de um cubo.

Solução:

Sabemos que a área total de um cubo é igual à soma das áreas de suas faces, as quais são quadrados. Assim,

$$A_{T_{cubo}} = 6 \cdot a^2 \rightarrow 54 = 6 \cdot a^2 \rightarrow a = 3\text{cm}.$$

Como a base do cone está inscrita na face do cubo temos que seu raio equivale a metade da aresta deste cubo, ou seja, $r = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}\text{cm}$. Ainda, $h = a = 3\text{cm}$.

Com isso, o volume deste cone é de:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (3,14) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 3 = \frac{28,26}{4} = 7,065\text{cm}^3.$$

Exemplo 4.4.2: Consideremos um recipiente em forma de um cone circular reto (Figura 57). Sabendo que o recipiente cheio até a borda comporta 800ml, determine o volume correspondente à metade de sua altura.

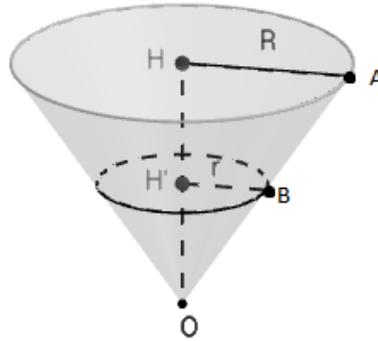


Figura 57: Recipiente em forma de cone circular reto.

Solução:

Sejam $OH = h$ e $OH' = \frac{h}{2}$.

Notemos que os triângulos OHA e OH'B são semelhantes (caso ângulo-ângulo). Logo:

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{R}{r'}$$

$$\frac{h}{\frac{h}{2}} = \frac{R}{r'}$$

$$r = \frac{R}{2}$$

Sendo $V = 800\text{ml}$ o volume do cone de altura h e V' o volume do cone de altura $\frac{h}{2}$, temos:

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} \cdot V = 100\text{ml}.$$

4.5 Esfera

Seja S_1 um cilindro equilátero de raio da base medindo r e seja M o ponto médio de seu eixo. Tomemos S_2 e S_3 dois cones cujas bases são as bases do cilindro e M é o vértice comum (Figura 58).

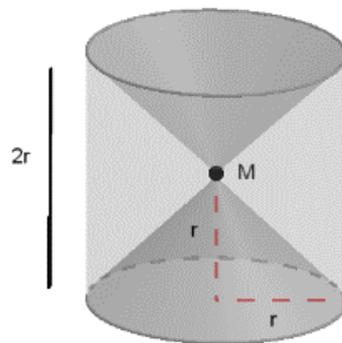


Figura 58: Cilindro equilátero com dois cones em seu interior.

A reunião de S_2 e S_3 determina um sólido chamado *clepsidra* e o sólido determinado pela região interna do cilindro subtraída da clesidra é chamado *anticlepsidra* (Figura 59).

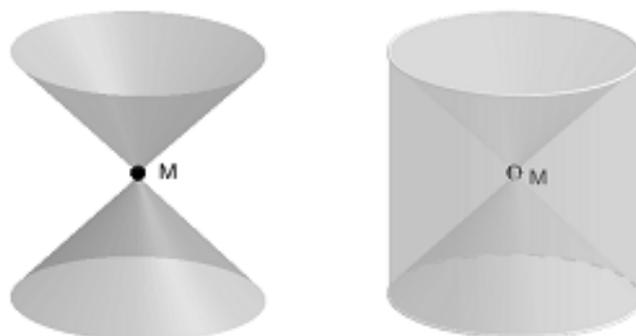


Figura 59: Clépsidra e anticlépsidra.

Proposição 4.5.1: O volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Demonstração:

Considere uma esfera de raio r tangente a um plano α , plano que contém uma das bases do cilindro S_1 . Considere ainda que a esfera e a anticlepsidra estejam em um mesmo semiespaço determinado por α . Seja β um plano paralelo a α que secciona a esfera a uma distância d de seu centro e que também secciona a anticlepsidra à mesma distância d de seu vértice (Figura 60).

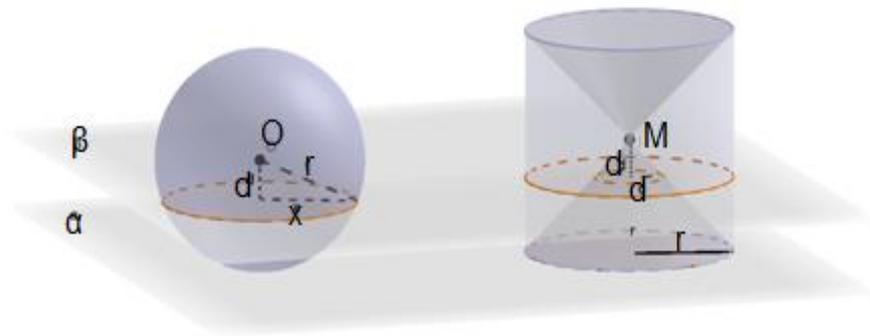


Figura 60: Esfera e anticlépsidra seccionados por β .

A secção na esfera determinada pelo plano β é o círculo de raio x , com área

$$A = \pi x^2 = \pi(r^2 - d^2).$$

E a secção correspondente na anticlépsidra é a coroa circular, com área

$$B = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2).$$

Logo, as áreas das secções determinadas por β na esfera e na anticlépsidra são iguais. Então, pelo Princípio de Cavalieri,

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{anticlépsidra}}.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} = V_{\text{anticlépsidra}} &= V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \right) = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 = \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$



Exemplo 4.5.1: Considere um cilindro equilátero de volume V cheio até a borda e uma esfera cujo raio coincide com o raio da base do cilindro. Determine o volume de líquido restante no cilindro após mergulharmos a esfera, completamente, no cilindro (Figura 61).



Figura 61: Esfera no interior de um cilindro de raio r .

Solução:

Sabemos que o volume de um cilindro de raio r e altura $2r$ (cilindro equilátero) é dado por

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

e, ainda, que o volume de uma esfera de raio r é dado por

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3.$$

Sendo V' o volume do líquido restante no cilindro após mergulharmos a esfera, temos que V' é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o volume da esfera. Assim,

$$V' = V_{cilindro} - V_{esfera} = 2 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{V_{cilindro}}{3}.$$

Portanto, o volume restante no cilindro será de um terço de sua capacidade total.

Exemplo 4.5.2: Determinar o raio R de um cilindro de altura $3r$ originado da fundição de duas esferas metálicas de raios r e $2r$.

Solução:

Sabemos que o volume do cilindro é igual à soma dos volumes V e V' das esferas de raio r e $2r$, respectivamente. Assim,

$$V_{cilindro} = V + V' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8r^3 = 12 \cdot \pi \cdot r^3.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi \cdot R^2 \cdot 3r &= 12 \cdot \pi \cdot r^3, \\ R^2 &= 4 \cdot r^2 \rightarrow R = 2r. \end{aligned}$$

Capítulo 5: VOLUME - ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Segundo Onuchic & Allevato (2014) a resolução de problemas é muito eficaz no processo de ensino/aprendizagem de matemática.

Considerada o “coração” da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes problemas. (ONICHIC & ALLEVATO, 2014, p. 35)

Desta forma, parte do conteúdo desenvolvido nos capítulos anteriores, como superfícies poliédricas, poliedros e volume, adaptados à linguagem dos alunos do ensino médio, foram introduzidos em sala de aula através do desenvolvimento de 5 atividades as quais possibilitam o desenvolvimento e análise do experimento proposto, assim como a elaboração e resolução de problemas. Ao desenvolver as atividades os problemas surgem naturalmente entre os alunos e eles se motivam em aprender os conteúdos necessários para resolvê-los. Essas atividades e seus resultados são apresentados a seguir.

5.1 Desenvolvimento e resultados

O experimento foi desenvolvido na segunda série do ensino médio de uma escola estadual do município de São José do Rio Preto de 30 alunos, com o objetivo de ajudá-los a entender as relações de área e volume dos poliedros. O assunto foi escolhido devido à imensa dificuldade que os alunos encontravam em “enxergar” estas relações em anos anteriores, com a utilização da metodologia tradicional. Os alunos foram divididos aleatoriamente em 5 (cinco) grupos de 6 (seis) alunos.

Com a atividade 1, cada grupo construiu uma superfície poliédrica. Para isso, cada grupo teve a sua disposição os materiais: 2 (duas) folhas de papel sulfite, 1 (uma) tesoura, 1 (régua) e 1 (uma) cola.

Atividade 1: Cada grupo deverá escolher uma figura entre paralelepípedo, prisma triangular regular, prisma hexagonal regular, cilindro ou pirâmide de base retangular, e construí-la de forma que sua base tenha uma área pré-determinada de 36 cm^2 e sua altura seja igual a 15 cm.

A primeira situação problema a ser resolvida consiste em como construir as bases destas figuras (Figura 62), ou seja, quais as suas dimensões de forma a satisfazer as condições dadas.



Figura 62: Construção das superfícies.

Para o desenvolvimento desta atividade foi necessário discutir com os alunos sobre a planificação e os elementos das superfícies: paralelepípedo, prisma triangular regular, prisma hexagonal regular, cilindro e pirâmide de base retangular, representados na figura 63, respectivamente, da esquerda para a direita.

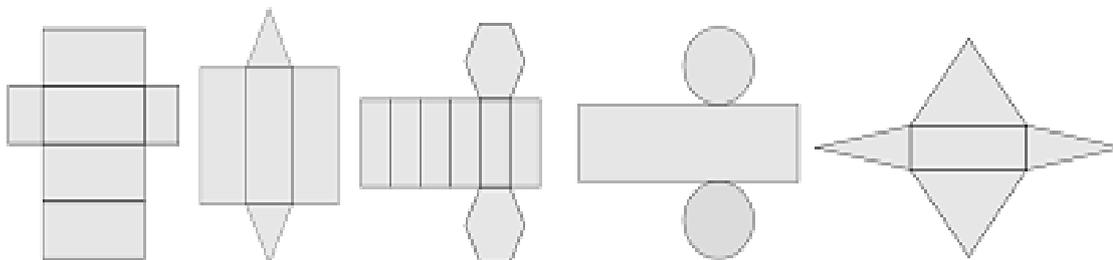


Figura 63: Planificação das superfícies.

Nesta atividade os alunos sentiram-se desafiados e, de certa forma, preocupados com o desenvolvimento da proposta. Surgiram questionamentos como:

- “quanto será a medida dos lados da base?”.
- “como encontrar a altura da base?”.
- “qual conta fazer?”.

Diante das dúvidas foi realizada uma revisão de áreas de figuras planas, especificamente as que seriam utilizadas no procedimento: retângulo, triângulo, hexágono e círculo. A revisão foi feita de maneira tradicional e expositiva, lembrando-os tanto das relações entre as figuras, quanto das fórmulas utilizadas para o cálculo das áreas.

Depois de todas as orientações, devido ao curto tempo de aula, foi solicitado para que cada grupo terminasse a construção de sua respectiva superfície em casa (Figura 64) e, na próxima aula, trouxesse-os prontos de forma que uma das faces (base no caso dos prismas) estivesse colada em apenas uma de suas arestas.

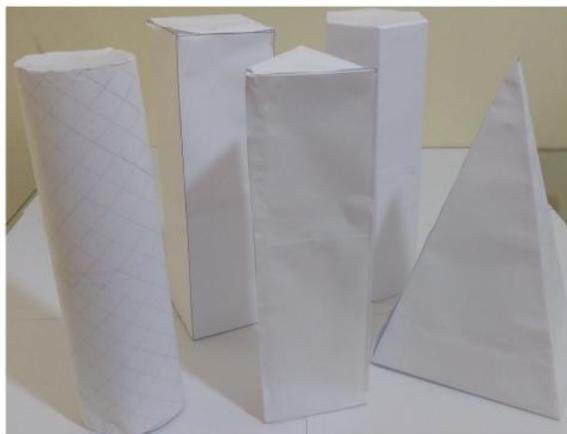


Figura 64: Superfícies construídas pelos alunos.

A proposta para as próximas etapas era verificar se os volumes das superfícies em questão tinham alguma relação entre si e, com isso, introduzir o Princípio de Cavalieri. Assim, foi solicitado que cada grupo trouxesse a figura construída, e uma quantidade de grãos de feijões para enchê-la, a qual representasse seu volume, para o desenvolvimento da atividade 2.

Atividade 2: Cada grupo deverá trocar a sua superfície com outro grupo de forma que nenhum grupo permaneça com o sólido que construiu e, ainda, deverá permanecer com os feijões que trouxeram. Após a troca deverão colocar seus feijões dentro da superfície que receberam de outro grupo.

A primeira reação foi de surpresa, de todos os grupos, tanto os grupos que verificaram que a quantidade de grãos preenchia exatamente a superfície, quanto dos que constataram que possuía muito mais grãos do que era necessário para preencher sua superfície (grupo que recebeu a pirâmide de base retangular) ou que seus grãos não eram suficientes (grupo que construiu a pirâmide de base retangular).

Essa troca foi proposta mais de uma vez, na atividade 3, com o objetivo de levar os alunos a excluïrem a possibilidade de ser apenas coincidência, com atividade 3.

Atividade 3: Repetir os passos da Atividade 2.

Nesta etapa surgiram questionamentos e afirmações como:

- “como isso é possível?”;
- “será que temos a mesma quantidade de grãos?”;
- “por que o meu não deu certo?”;
- “que legal, então nossos sólidos são iguais”;
- “neles cabem o mesmo tanto de feijões”;
- “mas por que a pirâmide é diferente?”;

Nesse momento foi necessária uma intervenção do professor, afinal, será que estas superfícies são realmente iguais? Esta questão foi esclarecida com uma pergunta simples: “o que faz com que dois objetos sejam iguais?”, com isso os alunos perceberam que para serem iguais as superfícies precisariam ter mesma altura, bases e faces laterais congruentes, tendo a mesma área e, também que, apesar de não serem iguais, há sólidos que comportam a mesma quantidade de grãos, o que significa que possuem mesmo volume.

Com isso, foi possível definir volume e prosseguir questionando-os sobre as semelhanças e as diferenças entre as superfícies, com o objetivo de fazê-los concluir quais relações garantiriam que eles tenham, ou não, o mesmo volume. Os alunos registraram as semelhanças e diferenças ao desenvolverem a atividade 4.

Atividade 4: Debater sobre as diferenças e semelhanças entre as superfícies.

Alguns alunos perceberam a relação entre as áreas da base e as alturas que, por construção, são iguais, mas, somente um aluno indagou o porquê a pirâmide não possuía o mesmo volume que os outros poliedros, uma vez que também possuía tais características. Esta questão foi respondida por outro aluno: “deve ser porque ela tem ponta e os outros não”. Para esclarecer mais sobre o volume foi proposta a atividade 5.

Atividade 5: Debater sobre o que aconteceria com o volume das superfícies caso alterássemos a área da base e mantivéssemos a altura ou vice-versa.

Os resultados foram surpreendentes:

- “claro que o volume mudaria”;
- “se diminuirmos a área da base o sólido ficará mais fino e caberá menos feijões, se aumentarmos ficará mais largo e caberá mais feijões”;
- “se diminuirmos a altura o sólido ficará mais baixo e caberá menos feijões, se aumentarmos ficará mais alto e caberá mais feijões”;

Durante as atividades 4 e 5 os alunos perceberam que ao seccionarmos dois prismas, ou um prisma e o cilindro, em uma mesma altura as secções ali determinadas são congruentes e, que o mesmo não era válido se uma das superfícies fosse a pirâmide. Desta forma, eles concluíram que se as secções de duas superfícies são congruentes e elas têm mesma altura então terão mesmo volume.

O professor atuou como mediador, e formalizou os resultados que os próprios alunos concluíam nas atividades, conforme proposto na metodologia de

resolução de problemas, entre eles o Princípio de Cavalieri. Embora os conceitos teóricos referentes aos capítulos 2 e 3 fizessem parte dos conteúdos de anos anteriores, foram reforçados esclarecendo as dúvidas que surgiam.

Ao final das atividades foi aplicada uma avaliação na qual os alunos obtiveram resultados satisfatórios com relação ao conteúdo desenvolvido via as atividades neste trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante este trabalho foi possível constatar que os alunos possuem dificuldades de aprendizagem ao se depararem com situações inéditas e, ainda, que estas decorrem, em sua maioria, da forma com que tais situações lhes são apresentadas. Assim, ao inserir um novo conteúdo o professor deve, primeiramente, se preocupar em como este será transmitido para o aluno, ou seja, levar em consideração todo o conhecimento que o aluno possui e buscar atividades que os façam se interessar pelo assunto, em outras palavras, instigá-los para a descoberta de novos conceitos.

As atividades desenvolvidas aqui permitiram que os alunos usassem seus conhecimentos prévios, noções básicas de polígonos e poliedros, em busca de soluções para cada situação proposta e, ainda, que debatessem entre si, o que possibilitou a interação de todos e despertou o interesse em buscar respostas. Esta busca possibilitou uma melhor compreensão dos conceitos teóricos.

Os alunos que participaram deste trabalho relataram sua preferência por aprender por meio deste tipo de atividade e se animaram em pensar nos próximos conteúdos, desejando que seus desenvolvimentos sejam baseados nas metodologias aqui propostas ao invés da metodologia tradicional.

Além da experiência positiva com as atividades experimentais anteriormente citadas, este trabalho possibilitou esclarecer conceitos básicos que serão utilizados com outros alunos em anos posteriores.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

BOYER, C. B. *História da matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. Matemática. Brasília, 1997. v. 3.

CAJORI, F. *Uma história da matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à geometria espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*. Geometria espacial. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

EVES, H. *Historia da geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v. 3.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. *Geometria plana e espacial*. Maringá, PR: Massoni, 2005.

LIMA, E. L. *Áreas e volumes*. Rio de Janeiro: SBM, 1980.

LIMA, E. L.; et al. *A matemática do ensino médio*. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

MEDEIROS, L. A. J. et al. *Lições de análise matemática*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2005.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino-aprendizagem de matemática através de resoluções de problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). *Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco, 2014. p. 35-52.

PETEROSSO, H. G.; FAZENDA, I. C. A. *Anotações sobre metodologia e prática de ensino na escola de 1º Grau*. 3. ed. São Paulo: Edições Loyola, 1988.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo. Matemática e suas tecnologias*. Coordenação Geral, Maria Inês Fini; Coordenação de Área, Nilson José Machado. São Paulo, 2010.