Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Progressões e Somatórios nos Vestibulares Militares

por

Jaildo dos Santos Bezerra

sob orientação do

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

01/2017
Recife - PE

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Progressões e Somatórios nos Vestibulares Militares †

por

Jaildo dos Santos Bezerra

sob orientação do

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

01/2017
Recife - PE

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Progressões e Somatórios nos Vestibulares Militares

por

Jaido dos Santos Bezerra

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DM - UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Aritmética.

Aprovada por:

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE (Orientador)

Prof. Gabriel Araújo Guedes - UFRPE

Prof. Alberes Lopes de Lima - Colégio Militar de Recife

09/2016

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado forças, determinação, sabedoria e tudo aquilo de que precisei nesta caminhada, o que não poderia vir de homem algum.

A todos os meus familiares, que me incentivaram e sempre acreditaram em minha capacidade, em especial, aos meus filhos Ícaro Rebouças Bezerra, Kévin Rebouças Bezerra, Laylla Marjorye Rebouças Bezerra, que sempre foram a mola propulsora dos meus sonhos e à minha esposa Rosemary Rebouças Bezerra, que tantas noites ficou acordada apoiando na logística a mim e aos meus amigos que compunham nosso grupo de estudos.

A todos os meus colegas do PROFMAT/2013, que tanto me apoiaram e me incentivaram nas horas difíceis; ao Prof. Dr. Rodrigo Gondim, Prof. Dra. Bárbara, Profa. Maité, Prof. Adriano, Prof. Marcelo Pedro, Profa. Taciana, Prof. Thiago, Prof. Wanderson e, em especial, e por questão de justiça, ao Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera, por ter demonstrado alto grau de profissionalismo, dedicação para com a nossa turma e por ter demonstrado tanta paciência e competência durante o período em que me orientou.

Por fim, todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e conclusão deste sonho o meu muito obrigado.

Dedicatória

Dedico a todos os professores que se fazem maiores do que a missão que lhes é dada, à memória do meu pai, que, mesmo sem ter formação escolar, sempre investiu em mim, conduzindo-me pelo caminho do bem. Aos meus filhos Ícaro Rebouças Bezerra, Kévin Rebouças Bezerra, Lallyla Marjorye Rebouças Bezerra, que foram a razão da minha força para superar todas as dificuldades durante a minha vida.

Resumo

Esta dissertação inicia-se com um resumo acerca da história das sequências. Na sequência, apresentamos um tópico sobre indução, nele apresentamos o princípio de indução matemática e sua aplicação para resolver problemas práticos, tais como o problema da pizza de Steiner e os coelhos de Fibonacci. No capítulo seguinte, abordamos as progressões aritméticas, geométricas harmônicas e aritmético-geométricas. Apresentando alguns teoremas, tais como a fórmula do termo geral e a soma dos n primeiros termos. Encerramos o capítulo fazendo algumas aplicações práticas em juros simples e compostos e, apresentando resultados sobre as médias aritmética, geométrica e harmônica de dois números positivos. O capítulo 4 inicia-se dissertando sobre a convergência de somatórios infinitos. Para tanto, apresentamos o limite de uma sequência e calculamos o limite de algumas sequências que são usadas na seção seguinte onde abordamos a convergência das séries harmônica, geométrica e aritmético-geométrica. Finalizamos este capítulo apresentado soluções a: o problema da mosca de Von Neumann e oa problema da bola que pula. Concluímos este trabalho com problemas sobre os vestibulares, em especial os vestibulares do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Escola preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), Instituto Militar de Engenharia (IME) e da Academia da Força aérea (AFA).

Abstract

We began this work making a summary in the history of numerical sequences, where we, in chronological order, shown the contributions given by many mathematicians. Continuing our work, we presented a topic of induction, presenting the principle of mathematical induction and its application to solve practical problems, such as the problem of Steiner pizza and Fibonacci rabbits. In the third chapter, we discuss the arithmetic progressions, with some theorems such as the general term, the sum of the first n terms and closed the chapter by some practical applications in simple interest. In Chapter 4 we discuss the geometric progression where we present various properties, formulas for obtaining the general term, the sum of the first n terms, harmonic progressions. In order to present the arithmetic-geometric progressions showing the formula of finite and infinite sum of its terms, concluding with practical applications of simple and compound interest, arithmetic means, geometric. The chapter 4 begins with infinite sums, where we present the limit of a sequence, a small approach to harmonic and geometric series, ending with the problem of Von Neumann fly and the problem of the bouncing ball. Finally, the work with problems on college entrance exams, especially the vestibular of Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Escola preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), Instituto Militar de Engenharia (IME) e da Academia da Força aérea (AFA).

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Nos vários anos em que observamos os Vestibulares do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), Instituto Militar de Engenharia (IME), Academia da Força Aérea (AFA) e Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx) e outros vestibulares, além de muitas olimpíadas de matemática, tanto brasileiras, como internacionais, é comum encontrarmos somatórios envolvendo os mais variados assuntos de matemática com soluções mais elaboradas que necessitam de um maior conhecimento sobre sequências. Este trabalho objetiva fornecer ferramentas que auxiliem esse universo de alunos nos mais diversos tipos de somatórios, utilizando, muitas vezes, propriedades pouco conhecidas pelos alunos, mas de fácil dedução.

Nos anos do ensino fundamental, encontramos algumas situações com somas finitas e infinitas, que causam no aluno certa dificuldade em entender o porquê de certos resultados. Essa curiosidade pode ser usada em favor do professor e levará o aluno a um aprofundamento do assunto. Fato facilmente visto nas dízimas periódica vista no 8º ano, por exemplo, $1,5555\ldots$ que podemos reescrever como

$$1 + 0,5 + 0,05 + 0,005 + \ldots = 1 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots = \frac{14}{9}.$$

O ensino de sequências no Ensino Médio, que, na maioria dos componentes curriculares das escolas públicas e privadas, é abordado, inicialmente, dependendo da instituição de ensino, no primeiro ou no segundo ano do ensino médio, tem sido um desafio para os professores de matemática, pois os alunos que estão iniciando no Ensino Médio trazem consigo muitas dificuldades elementares como, por exemplo, uma simples manipulação matemática e resolução de expressões que envolvam somas numéricas ou literais, pois geralmente necessitam do uso de fórmulas conhecidas, mas que não resolvem todos os tipos de somatórios. Ao chegar ao ensino médio, novamente o aluno se depara com várias situações em que surgem sequências como progressões geométricas infinitas. Nesse caso, faremos uma análise sobre a convergência ou divergência da soma dos termos desse tipo de sequência. Para isso teremos que desenvolver um estudo sobre as várias propriedades dos somatórios finitos.

Guardar fórmulas matemáticas sempre foi um grande desafio aos alunos, o que não permite um desenvolvimento mais aprofundado de certos elementos, e é com esse objetivo que vamos desenvolver ferramentas úteis para a utilização por parte desses alunos. Essas ferramentas irão enxugar de maneira substancial o decoreba dessas fórmulas, desenvolvendo o raciocínio e facilitará, de maneira grandiosa, os cálculos de algumas somas de séries que se mostram, em principio, complicadas. As dificuldades de guardar fórmulas é uma lacuna a ser preenchida na vida escolar dos alunos, pois passado aquele ano, poucos conseguem continuar lembrando dessas fórmulas. Queremos mudar essa concepção e, para isso, motivaremos o aluno a descobrir métodos práticos de realizar essas somas e que se envolvam o suficiente no processo de ensino-aprendizagem.

Começaremos nosso trabalho, no capítulo I, contando um pouco da história sobre as sequências surgidas na antiguidade, nesse caso por volta de 5000 anos pelos Egípcios, que eram utilizadas para padronizar os períodos de cheias do rio Nilo. Os mesopotâmios também já faziam uso de tal ferramenta matemática. Apresentamos também a brilhante ideia de Gauss sobre soma de progressão aritmética.

No capítulo II, para uma melhor compreensão do nosso trabalho, apresentamos o Princípio da indução finita, que nos dará suporte para prosseguir nas ideias apresentadas. Nesse contexto apresentamos problemas envolvendo somatórios finitos resolvidos, aplicando o Princípio da Indução Finita. Estudamos as propriedades das somas finitas, pois algumas somas (finitas) podem ser achadas usando essas propriedades ou alguns artifícios matemáticos. No final deste capítulo apresentamos, a modo de aplicação, o problema da Pizza de Steiner (1796 -1863, matemático alemão), que consiste em achar o número máximo de pedaços em que uma pizza pode ser dividida fazendo n cortes retilíneos; e o problema da reprodução de coelhos, resolvido pelo matemático italiano Leonardo de Pisano (1170 - 1250), conhecido por Fibonacci.

No prosseguimento do trabalho, entramos no capítulo III, onde abordaremos as progressões. Estudamos as progressões aritméticas, geométricas, harmônicas e aritmético-geométricas. Para as progressões aritméticas, geométricas e harmônicas, determinamos uma fórmula para o termo geral. Alem disso, salvo para as progressões harmônicas, apresentamos e provamos a fórmula para a soma dos n primeiros termos de tais progressões. Nesse capítulo, ainda apresentamos, a modo de aplicação das progressões aritmética e geométrica, as taxas de juros simples e compostos. Também, como uma aplicação dos conceitos estudados, apresentamos algumas propriedades das médias aritmética, geométrica e harmônica de dois números reais positivos.

No capítulo IV, estudamos os somatórios infinitos, veremos quando um somatório infinito de números reais é um número real. Para isto, apresentamos o conceito de limite de uma sequência. Veremos a divergência da série harmônica e mostraremos que quando a razão q de uma série geométrica ou aritmético-geométrica, satisfaz $0 < |q| < 1$, tais séries são convergentes. Também, neste capítulo, apresentamos diversos exemplos e duas aplicações, a saber: a mosca de Von Neumann e a bola que pula.

Concluiremos nosso trabalho apresentando no capítulo V vários exercícios das provas de ingresso para o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), a Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), do Instituto Militar de Engenharia (IME) e da Academia da Força Aérea (AFA), envolvendo principalmente as progressões aritméticas, geométricas, harmônicas e aritmético-geométrico.

Capítulo 1

Um Pouco de História sobre Sequências

Nesse capítulo abordaremos um pouco sobre a história das sequências relatando fatos ocorridos na antiguidade que constam em documentos como o papiro de Rind e outros. Para este capítulo usamos as seguintes referências [16], [17] e [18].

A primeira sequência numérica descoberta pelo homem é provavelmente a sequência de números naturais 1, 2, 3, 4, $\cdots$

Os Pitagóricos tinham por hábito atribuir propriedades geométricas aos números naturais. Isto deu origem ao conceito de sequências de números figurativos, que são números naturais provenientes da contagem de pontos em certos arranjos geométricos. Números triangulares são números naturais provenientes da contagem de pontos em arranjos triangulares, como mostra a figura abaixo.

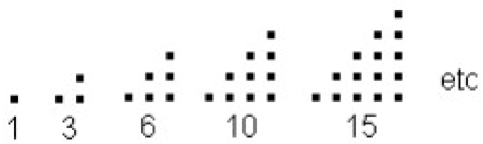

Figura 1.1: Números Triangulares

Assim, os números triangulares formam uma sequencia

$$T_1, T_2, T_3, T_3, \cdots, T_n, \cdots$$

onde

$$T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 6,\ T_4 = 10,\ T_5 = 15, \cdots$$

Para visualizarmos como esta sequência se relaciona com progressões aritméticas, consideraremos a sequência de arranjos verticais de números naturais:

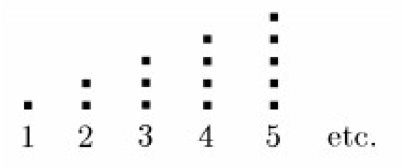

Figura 1.2: Arranjos verticais de números naturais

Os gregos acreditavam que a Matemática havia se originado no antigo Egito. Já os egípcios acreditavam que a Matemática foi dada a eles pelo deus Thoth.

Dois papiros famosos são as principais fontes de informação sobre a Matemática do Egito antigo. São eles o **Papiro de Moscou** e o **Papiro Rhind**. O Papiro Rhind foi escrito em torno de 1650 a.C. por Ahmes, um escriba (escritor de papiros) egípcio. Este papiro foi adquirido em 1858, em Luxor, Egito, por Alexandre H. Rhind e posteriormente, em 1865, comprado pelo Museu Britânico. O Papiro de Moscou é do ano 1850 a.C.. Em 1893 foi comprado pelo russo V.S. Golenishev e levado para Moscou.

Parece que o Papiro Rhind é baseado num papiro ainda mais antigo. É uma coletânea de problemas resolvidos de matemática elementar, muitos deles úteis ao cotidiano do antigo Egito. É curioso notar, no entanto, que muitos dos problemas do Papiro Rhind constituem puro entretenimento matemático.

Figura 1.3: Parte do Papiro de Rhind

Nesse papiro de Rhind, ainda aparece uma sequência de frações, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ que estão relacionadas à unidade de volume usada na medição da quantidade de grãos, conhecida como Hekat. Esses termos ficaram conhecidos como frações dos olhos do Deus Hórus.

Na Mesopotâmia também tem-se registros de sequências geométricas, escritas em tabelas babilônicas, cerca de 1800 anos antes de Cristo. Uma dessas tabelas apresentava a

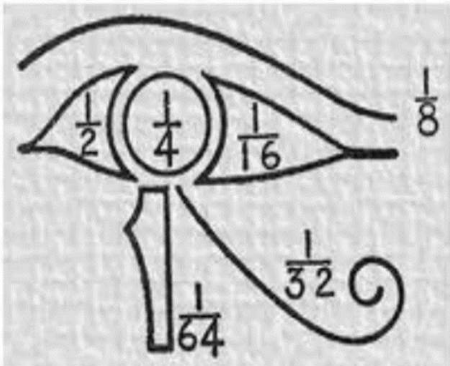

Figura 1.4: Frações dos olhos do Deus Hórus

soma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$.

Progressões aritméticas e geométricas no Papiro de Rhind

Dentre os problemas resolvidos no Papiro de Rhind encontra-se os seguintes problemas de progressões aritméticas.

Problema 40 do Papiro de Rhind: Divida 100 pães dentre 5 pessoas de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que $\frac{1}{7}$ da soma das três maiores partes seja igual à soma das duas menores partes.

Resposta: Represente as 5 partes por $x - 2r$, $x - r$, x, $x + r$, $x + 2r$, onde x representa o termo central e r a razão dela. Agora resolvemos:

$$\begin{cases} (x-2r)+(x-r)+x+(x+r)+(x-2r)=100 \\ \frac{1}{7}\,(x+(x+r)+(x+2r))=(x-2r)+(x-r) \end{cases}$$

Achamos: $x = 20$ e $r = \frac{55}{6}$. Portanto, as partes recebidas formam uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = \frac{5}{3}$ e razão $r = \frac{55}{6}$, sendo iguais a: $\frac{5}{3}$, $\frac{65}{6}$, 20, $\frac{175}{6}$ e $\frac{115}{3}$.

Problema 64 do Papiro de Rhind (adaptado): 10 medidas de milho são distribuídas a 10 pessoas, formando uma sequência de medidas de tal modo que cada pessoa, a partir da segunda, recebe $\frac{1}{8}$ a menos que a pessoa precedente. Determine essas medidas.

Resposta: Essas medidas formam uma progressão aritmética de 10 termos, de razão $\frac{1}{8}$, cuja soma dos termos é igual a 10 (medidas), sendo portanto uma progressão de primeiro termo 7/16 e razão (dada) igual a 1/8.

O problema que segue é provavelmente a mais antiga referência a uma progressão geométrica de que se tem notícia na História da Matemática.

Problema 79 do Papiro Rhind (adaptado) Numa aldeia egípcia há sete casas. Em cada casa, há sete gatos. Para cada gato, há sete ratos. Para cada rato, há sete espigas de trigo. Em cada espiga, há sete grãos.

(a) Quantos grãos há ao todo, nas sete casas?

(b) Casas, gatos, ratos, espigas e grãos, quantos objetos são ao todo?

Zenão e as progressões geométricas

No seculo 5 a.C., no sul da Itália viveu o grego Zenão de Eléia. [1] Zenão era um filósofo que rejeitava a ideia de que existem infinitos números naturais, de que numa linha reta há infinitos pontos, e assim por diante. Naquela época, para mostrar que o conceito de infinito não é um conceito válido, Zenão criou alguns argumentos, conhecidos hoje como "paradoxos de Zenão". Alguns desses argumentos trazem à tona o conceito de soma de uma progressão geométrica. Estas são talvez as primeiras progressões geométricas que aparecem na História da Matemática após a progressão geométrica do Problema 79 do Papiro Rhind. Vejamos um dos argumentos de Zenão.

Aquiles e uma tartaruga estão disputando uma corrida ao longo de uma linha graduada. Aquiles começa em 0 e a tartaruga começa em 1. Aquiles desloca-se a uma velocidade constante, duas vezes mais rápido que a tartaruga. Isto significa que, em cada intervalo de tempo, a tartaruga percorre metade da distância percorrida por Aquiles naquele intervalo. Quando Aquiles chega ao ponto 1, a tartaruga encontra-se em $1 + \frac{1}{2}$. Quando Aquiles chega ao ponto $1 + \frac{1}{2}$ a tartaruga encontra-se no ponto $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, e assim por diante.

A partir da observação acima, Zenão argumenta que Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois Aquiles terá sempre infinitos pontos a percorrer para alcançar a tartaruga. Afinal, Aquiles alcançará ou não a tartaruga? Se você acha que sim, a que distância do seu ponto de partida?

A solução é dada usando conceitos de cinemática elementar. Como a velocidade v de Aquiles é constante, o deslocamento de Aquiles, medido a partir do ponto 0, é dado por $d_1 = v \cdot t$, onde t é o tempo decorrido desde o início da corrida, enquanto que o da tartaruga, também medido a partir do marco 0, é dado por $d_2 = 1 + \left(\frac{v}{2} \cdot t\right)$. No instante em que Aquiles encontra a tartaruga, temos $d_1 = d_2$, e então $t = \frac{2}{v}$. Nesse instante, $d_1 = d_2 = 2$. Portanto, Aquiles encontra a tartaruga a 2 unidades de onde partiu.

Zenão não foi o único matemático da antiguidade a trabalhar com sequências. Vários matemáticos gregos da antiguidade também o fizeram. Usando uma técnica refinada de raciocínio chamada de "método de Exaustão", Arquimedes (287 - 212 a.C.) alcançou vários resultados importantes envolvendo áreas e volumes de várias figuras e sólidos. Na verdade, ele construiu vários exemplos e tentou explicar como somas infinitas poderiam ter resultados finitos. Dentre seus vários resultados estava que a área sob um arco parabólico é sempre dois terços da base vezes a altura. Seu trabalho não foi tão completo ou rigoroso, como daqueles matemáticos que vieram depois e desenvolveram sequências e séries como Newton e Leibniz, mas foi tão impressionante quanto. Embora Arquimedes tenha sido obstruído pela falta de precisão e notação eficiente, foi capaz de descobrir muitos dos elementos da análise moderna de sequências e séries.

[1]Zenão de Eléia (cerca de 490/485 a.C.?-430 a.C.?) foi um filósofo pré-socrático da escola eleática que nasceu em Eleia, hoje Vélia, Itália. Discípulo de Parmênides de Eleia, defendeu de modo apaixonado a filosofia do mestre. Seu método consistia na elaboração de paradoxos. Acredita-se que Zenão tenha criado cerca de quarenta destes paradoxos, todos contra a multiplicidade, a divisibilidade e o movimento.

O próximo contribuinte importante para esta área da matemática foi Leonardo Fibonacci [2] (Fibonacci = filius Bonacci). Ele criou uma sequência de inteiros na qual cada número é igual à soma dos dois antecessores $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$, introduzindo-a em termos de modelagem de uma população reprodutiva de coelhos. Esta sequência tem muitas propriedades curiosas e interessantes e continua sendo aplicada em várias áreas da matemática moderna e ciência.

Carl Friedrich Gauss

No século XVIII, existe uma famosa estória com respeito ao matemático Carl Friedrich Gauss [3] conhecido como o príncipe da matemática, conforme citada abaixo.

Um professor, para manter seus alunos ocupados, mandou que somassem todos os números de um a cem. Esperava que eles passassem bastante tempo executando a tarefa. Para sua surpresa, em poucos instantes um aluno de sete ou oito anos chamado Gauss deu a resposta correta: 5050. Como ele fez a conta tão rápido? Gauss observou que se somasse o primeiro número com o último, $1 + 100$, obtinha 101. Se somasse o segundo com o penúltimo, $2+99$, também obtinha 101. Somando o terceiro número com o antepenúltimo, $3 + 98$, o resultado também era 101. Percebeu então que, na verdade, somar todos os números de 1 a 100 correspondia a somar 50 vezes o número 101, o que resulta em 5050. E assim, ainda criança Gauss inventou a fórmula da soma de progressões aritméticas. Gauss viveu entre 1777 e 1855 e foi sem dúvida um dos maiores matemáticos que já existiram. É por muitos considerado o maior gênio matemático de todos os tempos, razão pela qual também é conhecido como o Príncipe da Matemática.

Vamos verificar, de maneira geral, o que realmente Gauss com toda sua genialidade conseguiu fazer.

Pensou Gauss, escrevendo essa soma na forma $S_n = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$, seu objetivo era obter S.

Considerando a soma novamente só que escrita na ordem decrescente dos seus valores $S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$, e adicionou as parcelas das duas.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Donde segue, $S_n = \frac{(n+1)n}{2}$.

[2] Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, (Pisa, 1170 - 1250) foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

[3] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números e análise matemática.

Muitos outros matemáticos, astrônomos, físicos e etc., usaram e aplicaram as sequências e séries para o desenvolvimento das diversas áreas da ciências. Para mais detalhes sobre este assunto recomendamos a referência [16].

Capítulo 2

Indução Matemática

"Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de ensino médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista".

Abramo Hefez

Um dos métodos mais usados para estabelecer fórmulas em somas finitas é o Principio de Indução Matemática. Por este motivo, iniciamos nosso trabalho com este assunto. As referências usadas aqui são as [5], [11], [8] e [9].

Entre todos os números que o ser humano já considerou, os naturais foram os primeiros a serem criados, inicialmente com o intuito de contar. Apesar desses números serem os mais simples, isso, absolutamente, não quer dizer que eles sejam totalmente entendidos, havendo ainda mistérios que os cercam a serem desvendados.

O que tem a ver o Princípio da Indução Finita com o conjunto dos números Naturais? Antecipo que tem tudo. Bem, podemos intuitivamente descrevê-lo dizendo quais são os seus elementos, eles são os números reais da forma:

$$\begin{array}{lllllll}
1 & = & 1 & & & & \\
2 & = & 1+1 & & & & \\
3 & = & 2+1 & = & (1+1)+1 & & \\
4 & = & 3+1 & = & (2+1)+1 & = & (1+1+1)+1 \\
 & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Ocorre, porém, que dificilmente podemos provar alguma propriedade desses números utilizando apenas esta descrição, pois, apesar de sabermos intuitivamente quais são os números que os pontinhos acima representam, teríamos dificuldade de descrevê-los de modo suficientemente explícito.

Uma alternativa consiste em dar algumas propriedades que caracterizem de modo inequívoco o conjunto dos naturais dentro do conjunto dos números reais.

2.1 O Princípio da Indução Matemática

Vamos considerar um subconjunto S dos números reais com as seguintes propriedades:
(1) S contém o número 1.
(2) Toda vez que S contém n, ele necessariamente contém o números $n + 1$.
(3) Não existe subconjunto próprio de S satisfazendo as condições (1) e (2).

Em outras palavras, a propriedade (3) nos diz que se houver um outro conjunto S' com as propriedades (1), (2) e (3), e se, S' é um subconjunto de S que possui as propriedades (1) e (2), então $S = S'$.

Vamos mostrar que se existe um subconjunto S dos números reais satisfazendo as três condições acima, então esse conjunto S é único. De fato, se S_1 e S_2 são dois subconjuntos dos números reais, satisfazendo (1) e (2), temos que $S_1 \cap S_2$ possui as propriedades (1) e (2), logo $S_1 = S_1 \cap S_2 = S_2$.

Esse **único** subconjunto dos números reais será chamado de conjunto dos números naturais e denotado por $\mathbb{N}$. Podemos, agora, enunciar:

Axioma 2.1 (Princípio de Indução Matemática). *Dado S um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que:*
(1) *S contém o número* 1.
(2) *Toda vez que S contém n, ele necessariamente contém o números* $n + 1$.
Então $S = \mathbb{N}$.

Este Principio (axioma) fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração, conhecida como demostração por indução.

Suponha que seja dada uma sentença matemática $P(n)$ que dependa de uma variável n, a qual se torna verdadeira ou falsa quando substituímos n por um número natural dado qualquer. Tais sentenças serão ditas *sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos naturais*

Vejamos alguns exemplos de sentenças abertas

Exemplo 2.1 *$P(n)$: n é par.*

É claro que a afirmação $P(1)$ é falsa, pois ela diz que 1 é par; $P(3)$, $P(5)$ e $P(11)$ são falsas, pois afirmam, respectivamente, que 3, 5 e 11 são pares.

Exemplo 2.2 *$P(n)$: n é múltiplo de* 3.

Temos, por exemplo, que $P(2)$, $P(4)$ e $P(5)$ são falsas, enquanto $P(3)$, $P(9)$ e $P(15)$ são verdadeiras.

Exemplo 2.3 *$P(n)$: $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$, equivalentemente, "A soma dos n primeiros números impares é igual a n^2".*

Temos que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $\cdots$, $P(10)$ são verdadeiras. Por exemplo, para $P(3)$, temos:

$$P(3) : 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2.$$

Aqui sabemos precisamente o que significa a sentença aberta $P(n)$, a pesar dos pontinhos na sua definição. Ela significa:

"A soma dos n primeiros números impares é igual a n^2".

Você consegue visualizar algum número natural m tal que $P(m)$ seja falsa? Bem, após mais algumas tentativas, você se convencerá de que esta fórmula tem grandes chances de ser verdadeira para todo número natural n; ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como provar então que uma sentença aberta definida sobre os naturais é sempre verdadeira? Você há de convir que não seria possível testar, um por um, todos os números naturais, pois eles são em número infinito. Portanto, será preciso encontrar algum método.

A seguir vamos expor a técnica da demonstração por indução que resolverá esse problema.

Teorema 2.1 (Prova por Indução Matemática). *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:*

i) $P(1)$ é verdadeira;

ii) Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. O enunciado acima é, praticamente, equivalente ao Principio de Indução Matemática, mesmo assim, cabe uma demonstração. Denote por

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ seja verdadeira } \}$$

Mostremos que $S = \mathbb{N}$. Temos:

(1) $1 \in S$, pois por (i), $P(1)$ é verdadeira.

(2) Cada vez que $n \in S$, tem-se que $n+1 \in S$, o que é estabelecido usando (ii).

Assim, usando o axioma (2.1), obtemos que $S = \mathbb{N}$. Isto é, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Utilizemos o teorema acima para provar que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2. Isto é,

Exemplo 2.4 *Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale:*

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a sentença: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Temos:

i) $P(1)$ é verdadeira, pois a fórmula acima para $n = 1$ é $1 = 1^2$.

ii) Suponha agora que, para algum n natural, $P(n)$ seja verdadeira, ou seja, que

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Queremos provar que $P(n+1)$ é verdadeira. Veja que $(2n+1)$ é o próximo número ímpar após $(2n - 1)$. Da nossa hipótese, $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, vamos somar $(2n + 1)$ a ambos os lados da igualdade,

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1).$$

Observe que $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Assim,

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Isto mostra que $P(n + 1)$ é verdadeira, toda vez que $P(n)$ é verdadeira.

Pelo teorema (2.1), a fórmula é válida para todo número natural n.

Usemos a prova por indução matemática para estabelecer o resultado obtido por Gauss e exposto em nossa introdução.

Exercício 2.1 *Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale:*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Solução. Para $n \in \mathbb{N}$, seja

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Temos:
$i)$ $P(1)$ é verdadeira, pois a fórmula acima para $n = 1$ é $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
$ii)$ Suponha agora que, $P(n)$ seja verdadeira, ou seja, que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Somando $n+1$ a ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Isto é, nossa sentença $P(n+1)$ é verdadeira. Pelo teorema (2.1), a fórmula é válida para todo número natural n.

Finalizamos esta seção, fazendo mais um exercício.

Exercício 2.2 *Validar a fórmula*

$$P(n):\ 1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solução. Observe que

$$P(1):\ 1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$$

é verdadeira.

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n)$ seja verdadeira. Então, somando $(n+1)^2$ a ambos lados dessa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}, \end{aligned}$$

estabelecendo, assim, a veracidade de $P(n+1)$. Portanto, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Definição por Recorrência

Recorde que fizemos objeções na seção anterior ao uso dos pontinhos nas demonstrações de algumas fórmulas; não que sejamos contra, eles ajudam muito a representar situações em que há um número grande (eventualmente infinito) de objetos a serem descritos e a visualizar propriedades desses objetos. Nessa dissertação, estamos tentando mostrar como se pode estabelecer um maior padrão de rigor no tratamento de certos problemas matemáticos, mas isso não deve ser tomado ao pé da letra.

O problema que queremos abordar e mostrar que se pode estabelecer um rigor maior é o seguinte: O que realmente significa uma expressão da forma

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1),$$

que consideramos na seção anterior?

Apesar de intuirmos o que se quer dizer, isso formalmente ainda não faz sentido, pois a operação de adição de números é definida para um par de números, e aqui temos n números sendo somados de uma só vez, além do inconveniente dos pontinhos, é claro. Para dar um sentido preciso a esse tipo de expressão, vamos ver como a Indução Matemática pode nos ajudar.

Definição 2.1 (Definição por Recorrência) *Para definir uma expressão E_n, para todo número natural n, basta definirmos E_1 e mostrar, para cada $n \in \mathbb{N}$, como obter sem ambiguidade E_{n+1} a partir de E_n. Nesse caso, dizemos que E_n foi definido por recorrência ou indutivamente.*

Demonstração. Para mostrar que temos efetivamente uma definição para todo número natural n, usaremos a prova por Indução Matemática, o Teorema (2.1). Considere a sentença aberta

$$P(n) : E_n \text{ está definido}$$

Por construção dos E_n, temos que:

(i) $P(1)$ é verdadeira.

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é também verdadeira.

Portanto, pelo Teorema (2.1) , temos que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n. Isto é, a expressão E_n está definida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

A definição por recorrência é muito usada num conceito chamado sequência. Uma sequência como sugere o nome é uma "coleção de elementos" de natureza qualquer, ordenados. Na verdade, trata-se apenas de elementos de um conjunto *etiquetados* com os números naturais.

Definição 2.2 *Seja A um conjunto não vazio. Uma sequência em A é uma função*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & A \\ & n & \rightsquigarrow & a(n) \end{array}$$

que associa a cada número natural n um único elemento $a(n) \in A$, o qual é chamado n-ésimo termo da sequência.

Como uma função é dada quando se conhece a imagem de todos seus elementos do seu domínio, uma sequência $a : \mathbb{N} \to A$ pode ser representada como

$$a(1), a(2), a(3), \cdots, a(n), \cdots ;$$

ou ainda, quando denotamos $a(n)$ por a_n, podemos representá-la por

$$(a_n) : \ a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots$$

Vejamos agora alguns conceitos que são definidos por recorrência.

Exemplo 2.5 *Define-se o fatorial $n!$ de um número natural n como:*

$$1! = 1, \qquad e \qquad (n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

Exemplo 2.6 *Seja $a \in R$. Define a potencia a^n, com $n \in \mathbb{N}$, por recorrência pondo:*

$$a^1 = a, \qquad \textit{supondo } a^n \textit{ definido, defina } a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Quando é dada uma recorrência, um problema importante é determinar uma fórmula fechada para o termo geral da sequência, isto é, uma fórmula que nos fornece o n-ésimo termo sem recorrer aos termos anteriores. Vejamos isso num exemplo.

Exemplo 2.7 *Seja (a_n) uma sequência de números reais, definida por recorrência pondo:*

$$a_1 = 1, \qquad e \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}, \ n \geq 1.$$

Mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $a_n = \frac{1}{n}$.

Vamos mostrar isto por indução:

(i) Para $n = 1$, temos $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$.

(ii) Suponha que $a_n = \frac{1}{n}$, então:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{a_n+1} && \text{definição da sequência } a_n \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} && \text{hipótese de indução} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n}{n}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema (2.1), obtemos que $a_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Somas Finitas

Nesta seção, consideraremos que o conjunto A possui duas operações satisfazendo as leis básicas da aritmética.

Definição 2.3 *Se (a_n) é uma sequência em A. Para dar sentido às somas*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

basta definir recorrentemente S_n. Pomos $S_1 = a_1$ e supondo S_n, definido, definimos

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Somas como S_n serão também denotadas com a notação de somatórios:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

que se lê como "somatório" quando i varia de 1 até n de a_i. Assim, temos definido por recorrência:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Na próxima seção, veremos algumas propriedades deste somatório.

2.3.1 Propriedades das Somas Finitas

Provaremos a seguir alguns resultados bem simples sobre somatórios que irão nos ajudar a resolver alguns problemas

Proposição 2.1 *Sejam (a_n), (b_n) duas sequências de elementos do conjunto A e seja $c \in A$. Então*

(i)	$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$	*Propriedade Aditiva*
(ii)	$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$	*Propriedade Homogênea*
(iii)	$\sum_{i=1}^{n} c = nc$	*Propriedade da constante*
(iv)	$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_k \cdot b_i = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$	*Propriedade Multiplicativa*
(v)	$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$	*Propriedade Telescopica*

Demonstração. (i) Provemos o resultado por indução sobre n. Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{1}(a_i \pm b_i) = a_1 \pm b_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i \pm \sum_{i=1}^{1} b_i,$$

mostrando que a fórmula é válida nesse caso.

Suponha a fórmula válida para algum número natural n. Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(a_i \pm b_i) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) + (a_{n+1} \pm b_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i + (a_{n+1} \pm b_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \pm \left(\sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \pm \sum_{i=1}^{n+1} b_i,\end{aligned}$$

mostrando que a fórmula é valida para $n + 1$. Pelo Teorema (2.1), temos que a fórmula é valida para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Novamente, usaremos indução para provarmos o resultado. Para $n = 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{1} c \cdot a_i = c \cdot a_1 = c \cdot \sum_{i=1}^{1} a_i.$$

Logo, a fórmula é válida no neste caso.

Suponha agora que a fórmula é válida para algum número natural n. Temos

$$\sum_{i=1}^{n+1} c \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i + c \cdot a_{n+1} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i + c \cdot a_{n+1} = c \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) = c \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

Portanto, a fórmula também é válida para $n + 1$. Segue do Teorema (2.1) que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Deixamos como exercício para o leitor.

(iv) Mostraremos esta propriedade usando a propriedade homogênea já mostrada.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_k \cdot b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot b_i + \sum_{i=1}^{n} a_2 \cdot b_i + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_m \cdot b_i \\
&= a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i + \cdots + a_m \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i
\end{aligned}$$

(v) Esta fórmula também a demonstraremos por indução sobre n. Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{1}(a_{i+1} - a_i) = a_2 - a_1,$$

o que mostra a validade da fórmula neste caso.

Suponhamos agora que a fórmula seja válida para um número natural n. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) &= \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\
&= (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\
&= a_{n+2} - a_1,
\end{aligned}$$

mostrando que a fórmula é válida para $n + 1$ e, portanto, vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Vejamos agora, com alguns exemplos, como podemos tirar partidos destas propriedades do somatório.

Exercício 2.3 *Calcular a soma:*

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1).$$

Solução. Usando a notação do somatório, podemos escrever

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1).$$

Assim, aplicando o item (i) da proposição anterior, temos

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \\ &= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

Onde, na terceira igualdade acima, temos usado os exemplos (2.1) e (2.2).

Exercício 2.4 *Calcular a soma*

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Solução. Usando o somatório, podemos escrever

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, vamos decompor a fração $\frac{1}{i\cdot(i+1)}$ em frações parciais. Isto consiste em determinar constantes a e b tais que

$$\frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i+1} \tag{2.1}$$

Temos

$$\frac{a}{i} + \frac{b}{i+1} = \frac{a(i+1)+bi}{i\cdot(i+1)} = \frac{(a+b)i+a}{i\cdot(i+1)}.$$

Logo, a equação (2.1) é válida quando as constantes a e b satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} a &= 1 \\ a+b &= 0 \end{cases}$$

Logo, $a = 1$ e $b = -1$. Assim, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Substituindo a igualdade acima em nosso somatório e usando a propriedade telescópica dos somatórios, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)\\ &= -\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Portanto, $S_n = \frac{n}{n+1}$.

2.4 Aplicações

Nesta seção, veremos algumas aplicações do Princípio de Indução e das propriedades do somatório.

2.4.1 Problemas Resolvidos

A seguir apresentamos alguns problemas extraídos do Olimpíadas ou exame de acesso ao ITA o IME

Problema 2.1 (Olimpíada Canadá - 1969) *Achar o valor da soma*

$$S_n = 1! + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!).$$

Solução: Usando a notação de somatório, podemos escrever

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i!).$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, podemos escrever $i = [(i+1)-1]$. Assim, usando propriedade das somas telescópicas, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(i!) &= \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)-1\right](i!) = \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)\cdot i! - i!\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)!-i!\right] = (n+1)!-1!.\end{aligned}$$

Portanto, $S_n = (n+1)! - 1$.

Problema 2.2 *Determinar o valor da soma*

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Solução. Seja $i \in \mathbb{N}$ e considere a seguinte identidade:

$$(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1.$$

Daí, segue que

$$(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1.$$

Tomando os somatórios de ambos os membros da igualdade acima e aplicando ao lado esquerdo a propriedade telescópica dos somatórios, obtemos

$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^4 - i^4\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1\right)$$

Usando as propriedades (i), (ii) e (iii) dos somatórios enunciados na Proposição (2.1) e as fórmulas obtidas nos exemplos (2.1) e (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}(n+1)^4 - 1 &= \sum_{i=1}^{n} \left(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1\right) \\ &= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{(n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n}{4} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.\end{aligned}$$

Obtemos, assim, o valor da soma

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

É possível generalizar este procedimento para obter fórmulas recorrentes para as somas

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

quando p varia nos naturais.

2.4.2 A Pizza de Steiner

O geômetra alemão Jacob Steiner (1796 - 1863) propôs e resolveu, em 1826, o seguinte problema:

Qual é o número máximo de pedaços em que uma pizza pode ser divida em n cortes retilíneos?

Solução: Vamos inicialmente construir uma tabela na qual indicaremos o número máximo de pedaços obtido em cada corte da pizza.

Cortes	Pedaços	Observação
0	1	
1	2	1+1
2	4	1+1+2
3	7	1+1+2+3
4	11	1+1+2+3+4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	p_n	$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$

Note que o terceiro corte não pode passar pelo ponto de interseção dos cortes anteriores, pois se for o caso teríamos 6 pedaços, que não é o número máximo de pedaços da pizza com 3 cortes.

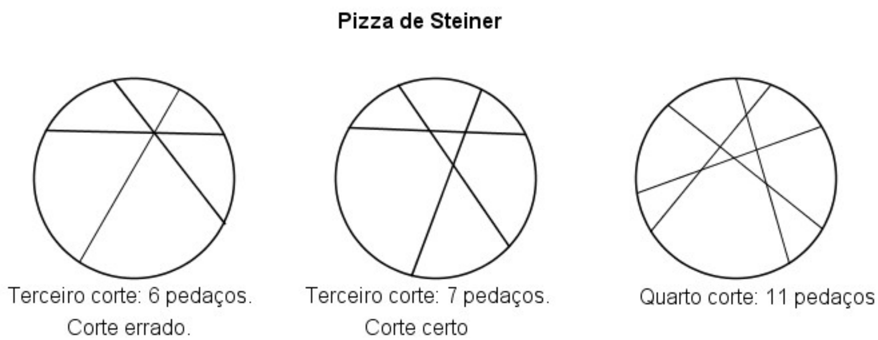

Figura 2.1: Pizza de Steiner

Indiquemos por p_n o número máximo de pedaços da pizza gerado no n-ésimo corte. Note que, pela tabela acima temos:

$$p_n = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos mostrar por indução que a fórmula deduzida acima está de fato certa.

Para $n = 0$, isto é, a pizza sem corte, claramente teríamos $p_0 = 1$.

Para $n = 1$, ou seja, com apenas um corte, é claro que só podemos obter dois pedaços. Portanto, a fórmula está correta, pois

$$p_1 = 1 + \frac{1(1+1)}{2} = 2.$$

Admitamos agora que, para algum valor de n, a fórmula p_n esteja correta. Vamos provar que a fórmula p_{n+1} também está correta.

Suponhamos que para n cortes, obtivemos o número máximo $p_n = 1+\frac{n(n+1)}{2}$ de pedaços da pizza e queremos fazer mais um corte, de modo a obter o maior número possível de pedaços.

Vamos conseguir isso se o $(n+1)$-ésimo corte encontrar cada um dos n cortes anteriores em pontos que não são de interseção de dois cortes.

Por outro lado, se o $(n+1)$-ésimo corte encontra todos os n cortes anteriores, ele produz $n+1$ novos pedaços: o corte começa em um determinado pedaço e, ao encontrar o primeiro corte, ele separa em dois o pedaço em que esta, entrando em outro pedaço. Ao encontrar o segundo corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço, e assim sucessivamente, até encontrar o n-ésimo corte separando o último pedaço em que entrar em dois.

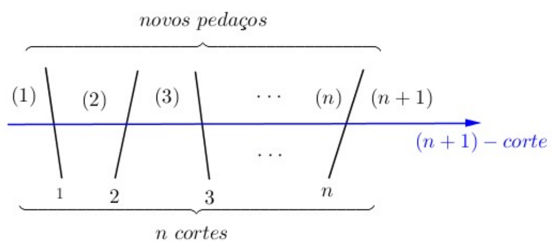

Figura 2.2: Cortes na Pizza de Steiner

Assim, são obtidos $n+1$ pedaços a mais dos que já existiam; logo,

$$p_{n+1} = p_n + (n+1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

mostrando que a fórmula está correta para $n+1$ cortes. O resultado segue pelo Teorema (2.1).

2.4.3 Os Coelhos de Fibonacci

Trata-se de um problema proposto e resolvido pelo matemático italiano Leonardo de Pisano. Seu sobrenome é conhecido por Fibonacci, por ser um diminutivo de fillius Bonacci, porque seu pai se chamava Guilielmo Bonacci.

O problema de Fibonacci consistia na reprodução dos coelhos: Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

Leonardo apresenta a seguinte solução:

Mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Assim, o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Se denotarmos o número de coelhos existentes no n-ésimo mês por F_n, temos, então, que

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_1 = F_2 = 1.$$

Essas relações definem, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada de sequência de Fibonacci, cujos elementos, chamados de números de Fibonacci, possuem propriedades aritméticas notáveis, que ainda hoje são objeto de investigação.

Uma recorrência do tipo

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

só permite determinar o elemento x_n se conhecermos os elementos anteriores x_{n-1} e x_{n-2}, que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois elementos anteriores, e assim por diante. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados x_1 e x_2.

Vejamos agora uma propriedade que satisfaz os números de Fibonacci. Esta propriedade segue de analisar o comportamento dos termos da sequência. Observe a seguinte tabela.

Termos	Comportamento	Verificação
$F_1 = 1$	-	-
$F_2 = 1$	$F_2^2 = F_1F_3 - 1$	$1^2 = 1 \cdot 2 - 1$
$F_3 = 2$	$F_3^2 = F_2F_4 + 1$	$2^2 = 1 \cdot 3 + 1$
$F_4 = 3$	$F_4^2 = F_3F_5 - 1$	$3^2 = 2 \cdot 5 - 1$
$F_5 = 5$	$F_5^2 = F_4F_6 + 1$	$5^2 = 3 \cdot 8 + 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_n	$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$	?

Assim, temos:

Problema 2.3 *Verificar que para todo $n \geq 2$, os números de Fibonacci, satisfazem:*

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}.$$

Solução. Vamos provar a validade dessa afirmação usando a Prova por Indução Matemática, o teorema (2.1). Na tabela acima, já verificamos que para $n = 2$, a fórmula é verdadeira.

Admitamos agora que a fórmula seja verdadeira para n, ou seja, é verdadeiro que

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1} \qquad \text{(nossa hipotése de indução).}$$

Queremos mostrar que a fórmula também é verdadeiro para $(n+1)$. Isto é,

$$F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n.$$

Para $n \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 &= F_{n+1}F_{n+1} \\
&= F_{n+1}\left(F_n + F_{n-1}\right) && \text{pela definição dos termos de Fibonacci} \\
&= F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} && \text{distributibidade} \\
&= F_{n+1}F_n + (F_n^2 - (-1)^{n-1}) && \text{pela hipótese de indução} \\
&= F_n\left(F_{n+1} + F_n\right) + (-1)^n \\
&= F_nF_{n+2} + (-1)^n && \text{pela definição dos termos de Fibonacci}
\end{aligned}$$

Assim provamos também que a fórmula é válida para $n + 1$. Segue do teorema (2.1) que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Capítulo 3

Progressões

O uso das sequências é de suma importância nas várias áreas da matemática, este capítulo destinar-se-á ao estudo das progressões aritméticas, geométricas e harmônicas. Estudaremos algumas de suas propriedades e apresentaremos aplicações. As principais referências bibliográficas usadas neste capitulo são: [4], [6], [7], [11], [9] e [10].

3.1 Progressões Aritméticas

São comuns na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais. Por exemplo, a fabricação de automóveis de uma fábrica que produz de 35 unidades por mês. As Progressões aritméticas são sequencias nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo, sua definição formal é:

Definição 3.1 *Uma sequência* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de números reais é uma progressão aritmética (abreviamos PA) se existir um número real* r *tal que a recorrência* $a_{n+1} = a_n + r$ *seja satisfeita* $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Na definição acima, o número real r, é denominado razão da PA.

Exemplo 3.1 *As sequências:*
1. $(2, 5, 8, 11, \cdots)$ *(cada termo é igual ao anterior mais* 3*)*
2. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$ *(todos os termos iguais)*
3. $(5, 3, 1, -1, \cdots)$ *(cada termo é igual ao anterior menos* 2*)*

Exemplo 3.2 *Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética. Calcule os lados sabendo que o perímetro do triângulo vale* 24.

Pondo os lados em ordem crescente e chamando x *o cateto maior, os lados do triângulo serão* $x - r$, x, $x + r$ *e teremos:*

$$\begin{cases} (x-r)^2 + x^2 = (x+r)^2 \\ (x-r) + x + (x+r) = 24 \end{cases} \quad \textit{ou seja,} \quad \begin{cases} x^2 = 4rx \\ 3x = 24 \end{cases}$$

Daí, $x = 8$ *e* $r = 2$*. Portanto, os lados do triângulo são* 6, 8 *e* 10*.*

Teorema 3.1 [Termo Geral de uma PA]. *Se* $(a_n)_{n\geq 1}$ *é uma Progressão Aritmética de razão* r*, então*

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r, \quad \textit{para todo } n \geq 1. \textit{ (Fórmula do termo geral)}$$

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução:

(i) Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 + (1-1)r = a_1$.

(ii) Suponha que $a_n = a_1 + (n-1)\,r$, então:

$$\begin{array}{rcll} a_{n+1} & = & a_n + r & \text{definição da PA } (a_n) \\ & = & (a_1 + (n-1)r) + r & \text{hipótese de indução} \\ & = & a_1 + ((n+1)-1)\,r & \end{array}$$

Isto é, a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)\,r$ vale para $n+1$. O Princípio de Indução Matemática permite concluir que a fórmula do termo geral é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 3.3 *Considere a sequência* (a_n) *definida por recorrência como segue*

$$a_1 = 1 \quad e \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n}, \; \forall\, n \geq 1.$$

Calcule a_n *em função de* n

Solução. É claro que os termos da sequência (a_n) são todos positivos. Logo, podemos definir a sequência (b_n) pondo $b_n = \frac{1}{a_n}$. Assim, temos

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+2a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 2 = b_n + 2.$$

Isto é, (b_n) é uma PA de termo inicial $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ e razão 2. Portanto, tal PA coincide com aquela formada pelos inteiros ímpares positivos, cujo termo geral é $b_n = 2n - 1$ para todo $n \geq 1$. Logo,

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2n-1}, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observação 3.1 *Se uma grandeza* G *sofre aumentos mensais iguais a* r*, seu valor daqui a* n *meses será* $G_n = G_0 + nr$*, onde* G_0 *é o valor inicial da grandeza. Podemos dar uma interpretação geométrica a esta situação. Observe que a função que associa a cada* n

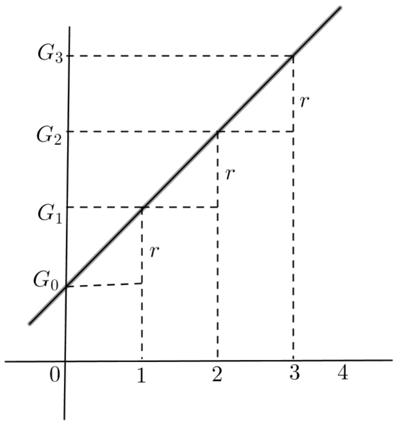

Figura 3.1: Crescimento da grandeza G_n com aumento r

natural o valor G_n é simplesmente a restrição aos naturais da função afim $G(x) = G_0 + rx$, ou seja, $G(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 1. Concluímos que os pontos

$$(1, G(1))\,,\ (2, G(2))\,,\ (3, G(3))\,,\ \cdots\,,(n, G(n))\,,$$

estão sobre uma linha reta

Reciprocamente, se, em uma sequência (a_n), o termo de ordem n for dado por um polinômio de grau menor ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética. Com efeito, se $a_n = a \cdot n + b$, (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = a$ e primeiro termo $a_1 = a + b$.

Portanto, pensando uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico da função é formado por uma sequência de pontos colineares do plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, $(4, a_4)$, etc. estão em linha reta.

Teorema 3.2 (Soma dos n primeiros termos de uma PA). *A soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética (a_n) é igual a*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Apresentamos uma prova usando a ideia de Carl F. Gauss aos 7 anos de idade, quando seu professor lhe pediu que calcula-se a soma dos inteiros de 1 até 100. Escrevemos S_n de dois formas,

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n & = & a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \end{array}$$

Daí, somando obtemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Agora, observe que, ao passar de um parêntesis para o seguinte, a primeira parcela aumenta em r e a segunda parcela diminui em r, o que não altera a soma. Por exemplo, no somando (a_2+a_{n-1}) sua primeira parcela é $a_2 = a_1+r$ e a segunda parcela é $a_{n-1} = a_n-r$. Outra maneira de observarmos que temos somas iguais para termos equidistantes dos extremos é a seguinte,

$$\begin{aligned} a_i + a_{n-i+1} &= (a_1 + (i-1)\,r) + (a_1 + (n-i+1-1)\,r) \\ &= a_1 + a_1 + (i-1+n-i)r \\ &= a_1 + (a_1 + (n-1)r) \\ &= a_1 + a_n \end{aligned}$$

Portanto, na soma acima, todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$. Logo,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \;\Rightarrow\; S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

O que mostra o teorema. □

Usando a fórmula acima, podemos obter facilmente

Exemplo 3.4 *A soma dos n primeiros números ímpares (positivos) é*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2.$$

Exemplo 3.5 *A soma dos vinte primeiros termos da PA $(2, 5, 8, 11, \cdots)$ é*

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2} = (a_1 + a_{20})10.$$

Como $a_1 = 2$ e $r = 3$, temos $a_{20} = a_1 + 19r = 59$. Logo, $S_{20} = (2 + 59)10 = 610$.

Exemplo 3.6 *Obter o valor da soma:*

$$S = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \cdots + (98^2 - 97^2) + (100^2 - 99^2).$$

Inicialmente, usando produtos notáveis, vamos fatorar os somando entre parênteses, obtemos

$$\begin{aligned} S &= (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + \cdots + (98-97)(98+97) + (100-99)(100+99) \\ &= 1(3) + 1(7) + 1(11) + \cdots + 1(91) + 1(191) + 1(195) + 1(199) \end{aligned}$$

Isto é, a soma S é a soma dos 50 primeiros termos da PA $(3, 7, 11, \cdots)$, cujo primeiro termo é 3 e a razão é $r = 4$. Assim,

$$S = \frac{(3 + 199)50}{2} = 202 \cdot 25 = 5050.$$

Definição 3.2 *Define-se para sequências o operador* $\triangle$, *chamado operador diferença, por:*

$$\triangle a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Portanto, da definição segue imediatamente que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, $(\triangle a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é constante.

Definição 3.3 *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência* (a_n) *na qual as diferenças* $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$, *entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não estacionária. De modo mais geral, uma progressão aritmética de ordem* k *é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem* $k - 1$.

Exercício 3.1 (Mackenzie, 99 adaptada). *Na sequência numérica* $(4, 7, a_3, a_4, a_5, \cdots)$, *as diferenças* $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$, *formam uma sequência aritmética de razão 2. Qual é o termo que ocupa a 15ºposição?*

Solução: A sequência $b_n = \triangle a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética com primeiro termo $b_1 = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ e razão $r = 2$. Logo, $b_n = 3 + (n - 1)2$, $n \geq 1$. Assim, calculando a soma dos primeiros 14 termos da PA (b_n), obtemos

$$\frac{(b_1 + b_{14})14}{2} = \sum_{n=1}^{14} b_n = \sum_{n=1}^{14} (a_{n+1} - a_n) = a_{15} - a_1.$$

Isto fornece,

$$\frac{(3 + (3 + 13 \cdot 2))\,14}{2} = a_{15} - 4 \;\Rightarrow\; a_{15} = 32 \cdot 7 + 4 = 224 + 4 = 228.$$

Exercício 3.2 (UENF-2002). *Considere a sequência numérica a seguir*

$$(a_n)_{n \geq 1} = (0, 3, 8, 15, 24, \cdots).$$

Achar o 6ºtermo e o termo geral da sequência.

Solução: Inicialmente vamos achar o 6ºtermo. Para tal, observe que

$$a_2 - a_1 = 3,\ a_3 - a_2 = 5,\ a_4 - a_3 = 7 \text{ e } a_5 - a_4 = 9.$$

Portanto, a diferença $b_n = \triangle a_n = a_{n+1} - a_n$ forma uma progressão aritmética com primeiro termo $b_1 = 3$ e razão $r = 2$. Daí

$$3 + (5-1)2 = b_5 = a_6 - a_5 = a_6 - 24 \ \Rightarrow\ a_6 = 24 + 11 = 35.$$

Agora vamos achar o termo geral da sequência. Para isto, calculamos a soma dos primeiros $(n-1)$ termos da progressão aritmética (b_n),

$$\frac{(3 + 2(n-1) + 1)(n-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = a_n - a_1.$$

Deduzimos daí que

$$\frac{(2n+2)(n-1)}{2} = a_n - 0 \ \text{ ou seja, }\ a_n = (n+1)(n-1) = n^2 - 1.$$

Exercício 3.3 *Calcular a soma dos quadrados dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.*

Solução: Seja (a_n) uma progressão aritmética de razão r, queremos calcular a soma

$$S_n = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \ldots + (a_n)^2.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $a_{i+1} = a_i + r$, logo $a_{i+1}^3 = (a_i + r)^3 = a_i^3 + 3a_i^2 r + 3a_i r^2 + r^3$. Portanto,

$$a_{i+1}^3 - a_i^3 = 3a_i^2 r + 3a_i r^2 + r^3, \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Daí, calculando a soma de $i = 1$ até $i = n$, obtemos,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i+1}^3 - a_i^3\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(3a_i^2 r + 3a_i r^2 + r^3\right) = 3r\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 3r^2\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} r^3.$$

O que fornece,

$$a_{n+1}^3 - a_1^3 = 3rS_n + 3r^2\frac{(a_1 + a_n)n}{2} + nr^3.$$

Isolando S_n, usando que $a_{n+1} = a_n + r$, obteremos,

$$S_n = \frac{1}{6r}\left[2(a_n + r)^3 - 2a_1^3 - 3r^2(a_1 + a_n)n - 2nr^3\right].$$

Observações 3.1 *Este exercício nos permite observar:*
(a) *Usando* $a_1 = 1$, $a_n = n$ *e* $r = 1$ *na soma acima, obtemos a soma dos quadrados dos* n *primeiros números naturais.*
(b) *A soma de potências, de qualquer grau, dos termos de uma sequência aritmética pode ser calculada usando o mesmo procedimento visto acima.*

Exercício 3.4 *Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética crescente. Mostre que a razão da progressão é igual ao raio do círculo inscrito no triângulo e que os lados são diretamente proporcionais aos números* 3, 4 *e* 5.

Solução: Seja ABC um triângulo reto em C, cujos lados estão em uma progressão aritmética de razão r. Inicialmente, vamos provar que os lados são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5. Para tanto, podemos supor que $BC = x - r$, $CA = x$ e $AB = x + r$, como indica a figura à esquerda da imagem abaixo.

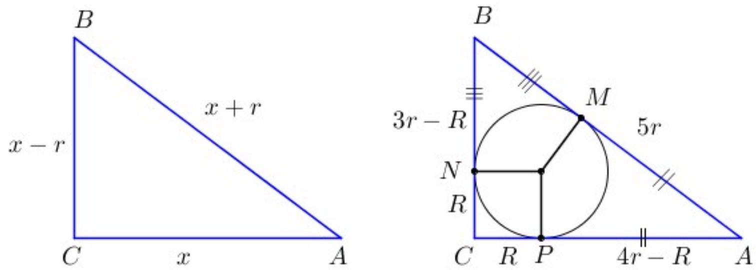

Figura 3.2: Triângulo retângulo com lados em progressão aritmética

Usando o teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 = AB^2 \;&\Rightarrow\; (x-r)^2 + x^2 = (x+r)^2 \\ &\Rightarrow\; (x^2 - 2xr + r^2) + x^2 = x^2 + 2xr + r^2 \\ &\Rightarrow\; x^2 - 4xr = 0 \\ &\Rightarrow\; x(x - 4r) = 0 \end{aligned}$$

Donde obtemos $x = 0$ ou $x = 4r$. Quando $x = 0$, teríamos que um dos lados do triângulo teria comprimento 0 metro o que é absurdo. Logo, $x = 4r$ e, portanto os comprimentos dos lados do triângulo retângulo são:

$$BC = x - r = 3r, \qquad AC = x = 4r \quad \text{e} \quad AB = x + r = 5r.$$

O que mostra que os lados do triângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Finalmente, mostremos que o raio R da circunferência inscrita ao triângulo tem raio igual à razão da progressão. Sejam M, N e P os pontos de tangência da circunferência e o triângulo, como indicado na figura anterior à direita. Temos assim,

$$CP = CN = R, \quad AM = AP = 4r - R \quad \text{e} \quad BM = BN = 3r - R.$$

Logo,

$$5r = AB = AM + MB = (4r - R) + (3r - R) \Rightarrow 5r = 7r - 2R \Rightarrow r = R.$$

Portanto, o raio da circunferência inscrita ao triângulo é igual à razão da progressão.

3.2 Progressões Geométricas

Além das progressões aritméticas, que são a versão discreta da função afim, há um segundo tipo importante de sequência, denominado progressão geométrica, que está associado à função exponencial. Essa nova classe de sequências não só possui muitas aplicações científicas, como também forma a base dos modelos usados em finanças.

Definição 3.4 *Uma sequência (a_n) de números reais, de termos não nulos, é uma progressão geométrica (abreviamos PG), se o quociente entre dois termos consecutivos é um valor constante chamado razão. Denotando por q a razão da progressão geométrica (a_n), temos, por definição, que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Exemplo 3.7 *As sequências*

1. $(1, 2, 4, 8, 12, \cdots)$ *(cada termo é igual ao dobro do anterior)*
2. $\left(18, 6, 2, \frac{2}{3}, \cdots\right)$ *(cada termo é igual à terça parte do anterior)*
3. $(3, 3, 3, 3, \cdots)$ *(todos os termos iguais)*

são progressões geométricas de razões respectivamente iguais a 2*,* $\frac{1}{3}$ *e* 1*.*

As progressões geométricas também podem ser tratadas como sequências que variam com taxa de crescimento constante.

Definição 3.5 *A taxa de crescimento de uma grandeza, que passa do valor x para o valor y, é definida por $\frac{y-x}{x}$. Isto é, a taxa de crescimento é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial.*

Exemplo 3.8 *A taxa de crescimento de uma grandeza que passa do valor 5 para o valor 7 é igual a* $\frac{7-5}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 \equiv 40\%$.

Exemplo 3.9 *Suponha que a população de um certo país aumenta* 2% *ao ano. Então, a população p_n do país no ano n será igual à população p_{n-1} do ano anterior mais o aumento de população, que é igual a* 2% *da população p_{n-1}, isto é,*

$$p_n = p_{n-1} + 2\%\, p_{n-1} = p_{n-1} + 0,02\, p_{n-1} = 1,02\, p_{n-1}.$$

Resumindo, a população em cada ano é igual à população do ano anterior multiplicada pela constante $1,02$.

Note que a taxa de crescimento de p_n é de $2\% = 0,02$.

Mais geralmente temos

Teorema 3.3 *Seja (G_n) uma sequência representando uma grandeza. Então, (G_n) tem taxa de crescimento constante igual a i, se , e somente se, $G_{n+1} = (1+i)G_n$, para todo natural n.*

Demonstração: Se a taxa de crescimento de G_n é i, então $i = \frac{G_{n+1}-G_n}{G_n}$, daí $G_{n+1} - G_n = iG_n$. Portanto,

$$G_{n+1} = G_n + iG_n = (1+i)G_n.$$

Reciprocamente, se $G_{n+1} = (1+i)G_n$, então $G_{n+1} - G_n = i \cdot G_n$. Logo, $i = \frac{G_{n+1}-G_n}{G_n}$ e a taxa de crescimento de G_n é constante e igual a i. □

Exemplo 3.10 *Progressões geométricas de razões $q_1 = 1,1$, $q_2 = 0,8$, são sequências com taxas de crescimento iguais a $i_1 = 0,1 = 10\%$ e $i_2 = -0,2 = -20\%$, respectivamente*

Exemplo 3.11 *Se a sequência $(4, x, 9, ...)$ é uma progressão geométrica, então*

- *a taxa decrescimento do primeiro termo para o segundo termo é* $\frac{x-4}{4}$
- *a taxa decrescimento do segundo termo para o terceiro termo é* $\frac{9-x}{x}$

Logo,

$$\frac{x-4}{4} = \frac{9-x}{x} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36.$$

Daí $x = \pm 6$.

Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma progressão geométrica e admitindo dados o primeiro termo a_1 e a razão da progressão geométrica, podemos determinar o n-ésimo termo da sequência em termos desses dados o que torna muito fácil o trabalho da busca de qualquer outro termo dentro da sequência geométrica. A determinação de um termo dentro de um sequência é muito relevante, o teorema enunciado abaixo, nos dará uma ferramenta importantíssima no estudo das progressões geométricas.

Teorema 3.4 [Termo geral de uma PG]. *Em toda progressão geométrica (a_n) de razão q, o termo de ordem n, a_n, é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.*

Demonstração: Temos, por definição, da progressão geométrica (a_n)

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \ \frac{a_3}{a_2} = q, \ \frac{a_4}{a_3} = q, \ \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q.$$

Multiplicando essas $(n-1)$ igualdades membro a membro obteremos,

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}, \quad \text{daí} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

$\square$

Essa fórmula permite obtermos qualquer termo desde que conheçamos o primeiro termo e a razão da sequência, mas podemos expressar, de uma forma mais geral, uma maneira de calcular o termo geral da progressão geométrica em função de qualquer outro termo da sequência e a razão.

Observação 3.2 *Suponhamos conhecido o p-ésimo termo a_p, $p > 1$ e a razão q de uma progressão geométrica (a_n). Então, o n-ésimo termo da progressão é dado por $a_n = a_p q^{n-p}$.*

De fato, aplicando a fórmula obtida anteriormente, temos

$$a_p = a_1 q^{p-1} \text{ daí segue que } a_1 = \frac{a_p}{q^{p-1}}.$$

Portanto,

$$a_n = \left(\frac{a_p}{q^{p-1}}\right) q^{n-1} = a_p \cdot q^{1-p} \cdot q^{n-1} = a_p \cdot q^{n-p}.$$

Exemplo 3.12 *Se a população de certa cidade é hoje de* 500 *mil habitantes e cresce a* 3% *ao ano, a população dessa cidade daqui a* 10 *anos será*

$$p_{10} = p_0(1+i)^{10} = 500(1+0,03)^{10} \cong 672 \text{ mil habitantes.}$$

Teorema 3.5 [Soma dos n primeiros termos de uma PG]. *A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é dada por*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstração: Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ e, multiplicando por q, obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$$

Subtraindo essas igualdades, segue

$$S_n - qS_n = a_1 - a_n \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n,$$

ou seja, $(1-q)S_n = a_1(1-q^n)$. Daí, uma vez que $q \neq 1$, temos $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. $\square$

Observação 3.3 *Quando progressão geométrica (a_n) é estacionária, ou seja, quando a razão $q = 1$, torne-se bastante trivial a soma dos n primeiros termos, pois como $q = 1$, obtemos $a_n = a_1$, $\forall\, n \geq 1$. Logo,*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 = n \cdot a_1.$$

Exemplo 3.13 *Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro do xadrez tem 64 casas, quantidade de grãos pedida pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2, ou seja,*

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

Calculando, obtemos um número de vinte dígitos, 18.446.744.073.709.551.661.

Exercício 3.5 *Calcule o valor da soma*

$$2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 + \cdots + 497 \cdot 3^{99} + 502 \cdot 3^{100},$$

onde da esquerda para a direita, a k^a *parcela é igual ao produto do k-ésimo termo da PA* $2, 7, 12, \cdots, 502$ *pelo k-ésimo termo da PG* $1, 3, 3^2, \cdots, 3^{100}$.

Solução: Imitamos o argumento usado na prova do teorema anterior. Temos

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 + \cdots + 497 \cdot 3^{99} + 502 \cdot 3^{100} \\ 3S &= 2 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3^3 + \cdots + 497 \cdot 3^{100} + 502 \cdot 3^{101} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2S &= 3S - S \\ &= -5\left(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{100}\right) + 502 \cdot 3^{101} - 2 \cdot 1 \\ &= -5 \cdot \frac{1 - 3^{100}}{1 - 3} + 502 \cdot 3^{101} - 2 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 3^{100} + 502 \cdot 3^{101} - 2 \end{aligned}$$

3.3 Progressões Harmônicas

Estudaremos nesta seção os conceitos básico sobre as progressões harmônicas

Definição 3.6 *Uma sequência* (a_n) *de números reais, de termos não nulos, é uma progressão harmônica (abreviamos PH), se seus termos inversos formam uma progressão aritmética. Isto é,*

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots) \text{ é PH } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots \frac{1}{a_n}, \cdots\right) \text{ é PA }.$$

Exemplo 3.14 *As sequências*

1. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ *é PH, pois* $(1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$ *é PA.*
2. $\left(-\frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{3}, \cdots\right)$ *é PH, pois* $(-3, -1, 1, 3, \cdots)$ *é PA.*
3. $(2, 2, 2, 2, \cdots)$ *é PH, pois* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$ *é PA.*

A seguir, vamos a estabelecer uma fórmula para o termo geral de uma PH

Teorema 3.6 (Termo Geral da PH) *Seja (a_n) uma progressão harmônica, o termo geral de ordem n, a_n é dado por:*

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}, \quad (n > 1).$$

Demonstração: Temos que a progressão aritmética $(b_n) = \left(\frac{1}{a_n}\right)$ possui razão

$$r = b_2 - b_1 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}.$$

Logo, por (3.1) seu termo geral é dado por

$$b_n = b_1 + (n-1)r = \frac{1}{a_1} + (n-1)\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}.$$

Como $b_n = \frac{1}{a_n}$, segue que,

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}$$

que é a expressão do termo geral de uma progressão harmônica para $n > 1$. □

Exercício 3.6 *Achar o nono termo da progressão harmônica* $\left(3, \frac{12}{7}, \frac{6}{5}, \cdots, \frac{12}{13}, \cdots\right)$.

Solução: Primeiro observamos que a sequência dada é de fato uma progressão harmônica, pois a sequência dos termos inversos, $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}, \frac{13}{12}, \cdots\right)$ é uma PA de razão

$$r = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Usando a fórmula deduzida anteriormente, teremos,

$$a_9 = \frac{3 \cdot \frac{12}{7}}{\frac{12}{7} + (9-1) \cdot \left(3 - \frac{12}{7}\right)} = \frac{\frac{36}{7}}{\frac{84}{7}} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7}.$$

3.4 Progressões Aritmético-Geométrica

Algumas sequências não permitem a utilização direta das fórmulas deduzidas anteriormente para as PA, PG e PH., esse tipo de sequência possui fórmulas complicadas para serem "gravadas" pelo aluno, mas vamos desenvolver fórmulas para essas somas, porém forneceremos artifícios que darão uma visão mais interessante para a solução.

Definição 3.7 *Uma sequência de números reais não nulos (a_n) é uma progressão aritmético-geométrica (abreviaremos PAG) se seus termos podem ser escritos da forma*

$$a_i = [a_1 + (i-1)r]q^{i-1}, \quad \forall\, i \geq 1,$$

onde $r \neq 0$ e $q \neq 0, 1$ são constantes. Isto é, cada termo a_i da sequência é o produto da PA $a_1 + (i-1)r$ de razão $r \neq 0$ e a PG q^{i-1} de razão $q \neq 0, 1$.

Exemplo 3.15 *As sequências*

1. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \cdots\right)$ *é uma PAG, pois seus termos são da forma*

$$a_i = \frac{2i-1}{2^i} = \left(i - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \left[\frac{1}{2} + (i-1)\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

2. $\left(2, -\frac{5}{2}, 3, -\frac{7}{2}, 4, \cdots\right)$ *é uma PAG, pois seus termos são da forma*

$$a_i = (-1)^{i-1}\frac{1}{2}(i+3) = \left[2 + (i-1)\frac{1}{2}\right](-1)^{i-1}$$

2. $(1, 2x, 3x^2, 4x^3, \cdots)$ *é uma PAG para $x \neq 0, 1$, pois seus termos são da forma*

$$a_i = ix^{i-1} = [1 + (i-1)]\, x^{i-1}$$

Veja que a própria definição da PAG estabelece uma forma para o termo geral da sequência. Logo, estabeleçamos o valor da soma dos n primeiros termos de uma PAG.

Teorema 3.7 [Soma dos n primeiros termas da PAG]. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma sequência aritmético-geométrica (a_n), onde $a_i = [a_1 + (i-1)r]q^{i-1}$, $\forall\, i \geq 1$, é dada por*

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2},$$

onde, por definição, $q \neq 0, 1$.

Demonstração: Podemos escrever,

$$S_n = a_1 + (a_1 + r)q + \cdots + [a_1 + (n-2)r]q^{n-2} + [a_1 + (n-1)r]\, q^{n-1}. \tag{3.1}$$

Multiplicando (3.1) por $q \neq 0, 1$, vem:

$$qS_n = a_1q + (a_1 + r)q^2 + \cdots + [a_1 + (n-2)r]q^{n-1} + [a_1 + (n-1)r]\, q^n. \tag{3.2}$$

Subtraindo (3.1) de (3.2), segue

$$S_n - qS_n = a_1 + \underbrace{rq + rq^2 + \ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1}}_{S} - [a_1 + (n-1)r]q^n,$$

onde S é uma PG de razão q com $n-1$ termos e primeiro termo igual a rq. Logo,

$$S = \frac{rq(1-q^{n-1})}{1-q}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(1-q)S_n &= a_1 + \frac{rq(1-q^{n-1})}{1-q} - [a_1 + (n-1)r]q^n \\
&= a_1(1-q^n) + \frac{rq(1-q^{n-1}) - (1-q)(n-1)rq^n}{1-q} \\
&= a_1(1-q^n) + \frac{rq\left[1-q^{n-1} - (1-q)(n-1)q^{n-1}\right]}{1-q} \\
&= a_1(1-q^n) + \frac{rq\left[1-nq^{n-1} + (n-1)q^n\right]}{1-q}
\end{aligned}$$

Segue que,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\left[(1-nq^{n-1}) + (n-1)q^n\right]}{(1-q)^2}.$$

□

Façamos uma aplicação da fórmula.

Exercício 3.7 *Calcular a soma dos n primeiros termos das sequências aritmético-geométricas abaixo:*

(*a*) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \cdots\right)$

(*b*) $(1, 2x, 3x^2, 4x^3, \cdots)$

Solução:

(*a*) Pela parte (*a*) do exemplo anterior, temos $a_i = \left[\frac{1}{2} + (i-1)\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$. Logo,

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad r = 1 \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2}.$$

Portanto, usando a fórmula deduzida e fazendo as substituições, obtemos

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\,[1-nq^{n-1}+(n-1)q^n]}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1/2\,(1-(1/2)^n)}{1-1/2} + \frac{1\cdot(1/2)\,[1-n(1/2)^{n-1}+(n-1)(1/2)^n])}{(1-1/2)^2} \\
&= 1-(1/2)^n + 2\,[1-2n(1/2)^n+(n-1)(1/2)^n] \\
&= 3+(-1-4n+2(n-1))\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 3-(3+2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

(b) Temos que $a_i = [1+(i-1)\cdot 1]\,x^{i-1}$. Logo, $a_1 = 1$, $r = 1$ e $q = x$. Assim,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1\cdot(1-x^n)}{1-x} + \frac{1\cdot x\,[1-nx^{n-1}+(n-1)x^n])}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(1-x^n)(1-x)+x+[(n-1)x-n]\,x^n}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-x^n+x^{n+1}+(nx-x+n)\,x^n}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1+(nx+n-1)\,x^n}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

3.5 Aplicações

Nesta seção, veremos duas aplicações que envolvem os conceitos de progressões.

3.5.1 Juros simples e compostos

A taxa de juros é um conceito central da Matemática Financeira que está bastante presente em nossas vidas cotidianas. Sempre que realizamos uma compra, nos deparamos com este conceito. Alguém que dispõe um capital C (chamado de principal) empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma $C + J$ é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = J/C$, que é taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros

Existem dois tipos de juros: os juros simples e os juros compostos.

Os juros simples referem-se aos acréscimos somados ao capital inicial no final da aplicação.

Os juros compostos (juros sobre juros) referem-se aos acréscimos somados ao capital, ao fim de cada período de aplicação, formando um novo capital com essa soma. Os bancos e as lojas normalmente utilizam os juros compostos na cobrança do dinheiro emprestado.

Um exemplo bastante simples para a aplicação de juros compostos seria: um capital de R$ 1000,00 aplicado em renda fixa a uma taxa de 20% ao ano. O valor do montante M_1, obtido após um ano de aplicação, é calculado adicionando-se ao capital aplicado os juros do período, ou seja:

$$M_1 = 1.000,00 + 0,20 \cdot 1.000,00 = 1.20 \cdot 1.000,00 = 1.200,00.$$

Observe que, para aumentar uma quantia em 20%, basta multiplicá-la por $1,20$. Dessa forma, o montante após dois anos é igual ao valor do montante após um ano multiplicado por $1,20$:

$$M_2 = M_1 \cdot 1,20 = 1.000,20 \cdot 1,20 = 1.440,00$$

O montante após três anos é igual ao montante após 2 anos multiplicado por 1,20:

$$M_3 = M_2 \cdot 1,20 = 1.440,00 \cdot 1.20 = 1.728,00$$

Procedendo da mesma forma, podemos concluir que a sequência formada pelos valores dos montantes, ano a ano e com base no aplicado inicialmente, constitui-se numa progressão geométrica cujo primeiro termo é igual a R$ 1.000,00 e cuja razão é igual a 1,20. Assim, teremos a seguinte sequência:

$$(1.200,00;\ 1.200,00;\ 1.440,00;\ 1.728,00;\ \cdots)$$

Veja que quando os juros gerados em cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros no próximo período, dizemos que o capital cresce segundo o regime de capitalização composta ou juros compostos. Nesse caso, se a taxa de variação percentual do capital for constante, os valores do capital seguem uma progressão geométrica e, por isso, podem ser modelados por uma função exponencial do tipo:

Para estudarmos o modelo de variação de um capital C_0 em um regime de capitalização composta, aplicado a uma taxa mensal de i%, durante n meses. O montante produzido pelo primeiro mês será:

$$M_1 = C_0 \cdot (1 + i)$$

O montante produzido até o segundo mês é igual ao montante produzido no primeiro mês multiplicado por $(1 + i)$

$$M_2 = M_1 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2$$

Dessa forma teremos:

$$M_3 = C_0 \cdot (1+i)^3, \quad M_4 = C_0 \cdot (1+i)^4, \quad M_5 = C_0 \cdot (1+i)^5, \quad \cdots$$

Assim, o montante produzido até o mês n será dado por: $M_n = C_0 \cdot (1+i)^n$. Isto é o que afirma o seguinte:

Teorema 3.8 *No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se em n períodos de tempo, em um montante igual a $M_n = C_0 \cdot (1+i)^n$.*

Demonstração: Para cada k seja M_k a dívida após k período de tempo. Temos

$$M_{k+1} = M_k + iM_k = (1+i)M_k.$$

Daí, (M_k) é uma progressão geométrica de razão $(1+i)$ e com termo inicial, no tempo $n=0$, igual a C_0 (note que, o primeiro termo, com $n=1$, é $C_0(1+i)$). Logo, seu termo geral (n-ésimo termo) é dado por $M_n = C_0 \cdot (1+i)^n$. □

No caso de juros simples temos

Teorema 3.9 *No regime de juros simples de taxa i, um principal C_0 transforma-se em n períodos de tempo, em um montante igual a $M_n = C_0 + n \cdot i\, C_0$.*

Demonstração: Para cada k, Seja M_k a divida após k período de tempo. Temos, usando o regime de juros simples, que

$$M_k = C_0 + k \cdot i\, C_0 = C_0 + [(k+1) - 1]\, i\, C_0.$$

Daí (M_k) é uma progressão aritmética de razão $i\, C_0$ e termo geral $M_n = C_0 + n \cdot i\, C_0$. □

Em algumas poucas situações usam-se juros simples e não juros compostos. No regime de juros simples, os juros são calculados, em cada período, sobre o principal e não sobre o montante do período anterior.

A tabela a seguir mostra a evolução de um principal de R$ 100,00 a juros de 10% ao mês.

Época	Juros simples	Juros compostos
0	100	100
1	110	110
2	120	121
3	130	133,1

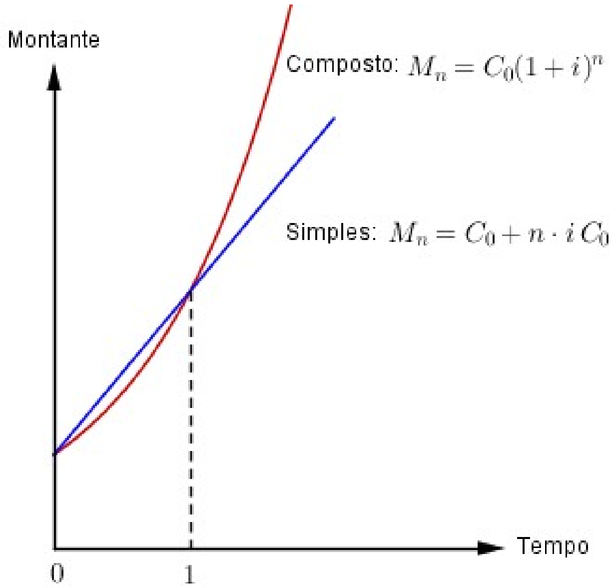

Figura 3.3: Juros simples e composto

Observação 3.4 *Note que:*
(a) *A juros compostos, os montantes constituem uma progressão geométrica, de razão* $(1+i)$, *e a juros simples, uma progressão aritmética, de razão* iC_0.
(b) *No regime de juros simples, taxas proporcionais são equivalentes. Juros de 10% ao mês equivalem a juros de 20% ao bimestre, de 30% ao trimestre, etc.*

Na vida real, juros simples são raramente usados. O gráfico mostra que os montantes a juros compostos são maiores que os montantes a juros simples. É, portanto, de interesse dos detentores do capital que os juros aplicados sejam compostos.

Vejamos alguns problemas comuns na vida real nos quais aplicamos esses conceitos.

Exercício 3.8 *Cristina toma um empréstimo de R\$ 150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina ao final de três meses, se o regime de juros é:*
(a) *composto*? (b) *simples*?

Solução:
(a) Composto: Sabemos que $M(n) = C_0 \cdot (1+i)^n$, como $C_0 = 150,00$ e $i = 12\%$, daí,

$$M(3) = 150,00 \cdot (1 + 12\%)^3 = 150,00 \cdot (1,12)^3 \cong 270,74.$$

(b) Simples: agora o montante é $M(n) = C_0(1 + ni)$. Assim,

$$M(3) = 150,00 \cdot (1 + 3 \cdot 12\%) = 150,00 \cdot 1,36 = 204,00.$$

Exercício 3.9 *Qual o capital inicial que deve ser aplicado a uma taxa de 2% a.m., para ao final de 1 ano e meio gerar R\$ 100.000,00, nos regimes de juros:*
(a) *simples?* (b) *composto?*

Solução:
(a) Simples: Temos $C = \frac{M_n}{1+ni}$, onde $n = 18$, $i = 0,02$ e $M_{18} = \$100.000,00$. Assim,

$$C = \frac{100.000}{1 + 18 \cdot 0,02} = 73.529,41.$$

(b) Composto: Neste caso temos $C = \frac{M_n}{(1+i)^n}$, logo

$$C = \frac{100.000}{(1 + 0,02)^{18}} = 70.015,94$$

Exercício 3.10 *Qual o prazo de uma aplicação à taxa de 4% a.m. que dobra seu capital inicial, nos regimes de juros:*
(a) *simples?* (b) *composto?*

Solução:
(a) Simples: Desejamos achar n tal que

$$M_n = C \cdot (1 + ni) = 2C \Rightarrow n = \frac{2-1}{i} = \frac{1}{i} = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ meses}.$$

(b) Composto: Agora o prazo n da aplicação deve verificar:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n = 2C \Rightarrow n \ln(1 + i) = \ln 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,04} = 17,67.$$

Como estamos considerando o regime de capitalização descontínua, o prazo n deve ser de 18 meses.

Exercício 3.11 *Geraldo tomou um empréstimo de R\$ 300,00 a juros compostos mensais de 5%. Dois meses após, Geraldo pagou R\$ 150,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?*

Solução: Do exposto no enunciado, temos que, no final do segundo mês teremos

$$M(2) = 300,00 \cdot (1 + 5\%)^2 = 300,00 \cdot (1,05)^2 = 330,75,$$

como Geraldo deu R\$ 150,00 ao final do segundo mês, ficou ainda a quantia de R\$ 180,75 para quitar ao final do terceiro mês, assim,

$$M(1) = 180,75 \cdot (1 + 5\%)^1 = 18,75 \cdot (1,05) \cong 189,79.$$

Exercício 3.12 *Telma tem duas opções de pagamento na compra de um telefone celular: três prestações mensais de R$ 100,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 51,00 cada, sendo a primeira paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Telma, isto é, Telma considera indiferente pagar ou receber 100 reais agora ou 102 reais daqui a um mês, o que ela deve preferir?*

Solução: Vamos calcular qual o montante no final dos dois planos de pagamento, Primeiro em três prestações de 100 reais,

$$M_1 = 100 + 100 \cdot (1 + 2\%)^1 + 100 \cdot (1 + 2\%)^2 = 306,04.$$

Agora vamos obter o valor em seis prestações de 51 reais,

$$M_2 = 51 + 51 \cdot (1 + 2\%)^1 + 51 \cdot (1 + 2\%)^2 + \cdots + 51 \cdot (1 = 2\%)^5 = 321,70,$$

portanto Telma deve escolher o plano de três parcelas de R$ 100,00.

3.5.2 Médias

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre as médias clássicas entre dois números reais positivos, isto porque envolvem os conceitos estudados neste capítulo.

Definição 3.8 *Dados dois números positivos a e b, definimos as médias aritmética m_A, geométrica m_G e harmônica m_H de a e b, respectivamente como sendo os números:*

$$m_A\{a,b\} = \frac{a+b}{2}, \qquad m_G\{a,b\} = \sqrt{ab} \quad e \quad m_H\{a,b\} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Note que:

$$m_H\{a,b\} = \frac{(m_G\{a,b\})^2}{m_A\{a,b\}} \quad \text{ou} \quad m_G\{a,b\} = \sqrt{m_A\{a,b\} \cdot m_H\{a,b\}}.$$

Ainda, quando $a = b > 0$, tem-se que $m_A\{a,b\} = m_G\{a,b\} = m_H\{a,b\} = a$.

Observações 3.2 *Note que*
1. *Se os três números positivos a_1, a_2 e a_3 estão em progressão aritmética, então a razão r é dada por:*

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

Isto é, o termos intermediário a_2 é a média aritmética entre a_1 e a_3.
2. *Se os três números positivos a_1, a_2 e a_3 estão em progressão geométrica, então sua razão q é dada por*

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_2 = \sqrt{a_1 a_3}.$$

Isto é, o termos intermediário a_2 é a média geométrica entre a_1 e a_3.
3. *Se os três números positivos a_1, a_2 e a_3 estão em progressão harmônica, então $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$ e $\frac{1}{a_3}$ estão em uma progressão aritmética de razão:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 - a_3}{a_2 a_3} \\ &\Rightarrow \quad a_3(a_1 - a_2) = a_1(a_2 - a_3) \\ &\Rightarrow \quad a_2(a_1 + a_3) = 2a_1 a_3 \\ &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{2a_1 a_3}{a_1 + a_3} \end{aligned}$$

Isto é, o termos intermediário a_2 é a média harmônica entre a_1 e a_3.

Papus de Alexandria, geômetra grego que viveu por volta do ano 300 a.C., descreve uma construção das médias aritmética, geométrica e harmônica, representando as três médias em um único semi-círculo que apresentamos a seguir.

A construção de Papus das médias.

Considere três pontos colineares A, B e C tais que B está entre A e C. Suponha que os comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sejam $AB = a$ e $BC = b$ com $a < b$. Construa um semi-círculo de diâmetro $\overline{AC}$. No semi-círculo ADC, de centro O, Papus construiu $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ e $\overline{BF} \perp \overline{OD}$ e mostrou que nestas condições, entre as grandezas $AB = a$ e $BC = b$, tem-se:
(a) OD é a média aritmética
(b) DB é a média geométrica
(c) DF é a média harmônica

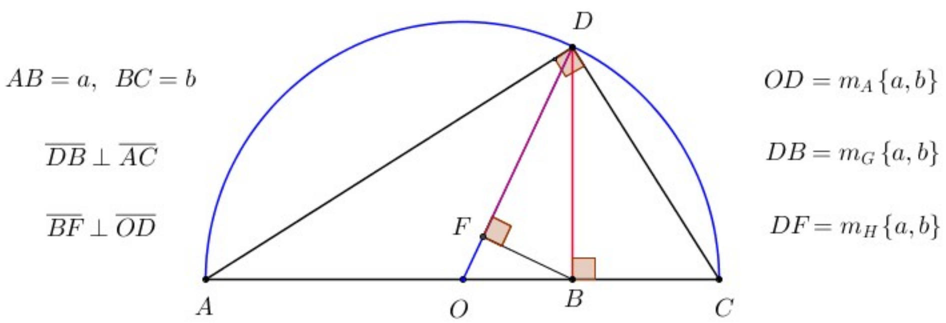

Figura 3.4: A construção das médias num semi-círculo dada por Papus

As afirmações acima, feitas por Papus, podem ser provadas como segue:
(a) Sendo O o centro do semi-círculo de diâmetro AC, temos que OD é raio. Logo,

$$OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{a+b}{2} = m_A\{a, b\}.$$

(b) Temos, por construção, que o triangulo ADC é retângulo em D, pois está inscrito no semi-círculo inicial de diâmetro AC e centro O, e DB é a altura relativa à base AC.

Pelo critério AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos, os triângulos retângulos DBA e CBD são semelhantes, pois

$$\measuredangle(DAB) = \measuredangle(CDB) \qquad \text{e} \qquad \measuredangle(ADB) = \measuredangle(BCD).$$

Essas relações são obtidas usando que:

$$\begin{array}{ll} \measuredangle(DAB) + \measuredangle(BCD) = 90^{\text{o}}, & \text{pois } \triangle ADC \text{ é reto em } D \\ \measuredangle(DAB) + \measuredangle(ADB) = 90^{\text{o}}, & \text{pois } \triangle ADB \text{ é reto em } B \\ \measuredangle(BCD) + \measuredangle(CDB) = 90^{\text{o}}, & \text{pois } \triangle DBC \text{ é reto em } B \end{array}$$

Agora, dessa semelhança e pela proporcionalidade dos lados correspondentes dos triângulos DBA e CBD, obtemos:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{DB} = \frac{DB}{b} \ \Leftrightarrow \ DB^2 = ab.$$

Como $DB > 0$, segue da relação acima que

$$DB = \sqrt{ab} = m_G\,\{a, b\}.$$

(c) Note que os triângulos ODB e BFD são semelhantes, pois são retângulos e têm o ângulo agudo $\measuredangle(FDB)$ em comum. Assim, pela proporcionalidade de seus lados, obtemos

$$\frac{DF}{DB} = \frac{DB}{OD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{FD}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{1/2(a+b)}.$$

Portanto,

$$FD = \frac{2ab}{a+b} = m_H\,\{a, b\}.$$

Observação 3.5 *Utilizado a desigualdade triangular, a construção de Papus também estabelece que a média harmônica é sempre menor que a média geométrica e que esta, por sua vez, é menor que a média aritmética, excepto quando $a = b$.*

A seguir mostramos este fato algebricamente.

Proposição 3.1 *Dados dois números reais positivos, a e b, tais que $a \leq b$, suas médias aritmética m_A, geométrica m_G e harmônica m_H satisfazem as seguintes desigualdades,*

$$a \leq m_H\,\{a, b\} \leq m_G\,\{a, b\} \leq m_A\,\{a, b\} \leq b.$$

e as igualdades ocorrem se, e somente se, $a = b$.

Demonstração: Salvo a primeira e a última desigualdades que seguem da hipótese $a \leq b$, as demais são consequências do seguinte resultado básico de números reais:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} :\ 0 \leq (a-b)^2.$$

De fato, se $a > 0$ e $b > 0$, tem-se

$$a \leq m_H\,\{a,b\} \;\Leftrightarrow\; a \leq \frac{2ab}{a+b} \;\Leftrightarrow\; ab + a^2 \leq 2ab \;\Leftrightarrow\; a(a-b) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; a \leq b.$$

$$m_H \leq m_G \;\Leftrightarrow\; \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \;\Leftrightarrow\; \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab \;\Leftrightarrow\; 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq (a-b)^2.$$

$$m_G\,\{a,b\} \leq m_A\,\{a,b\} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \;\Leftrightarrow\; 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq (a-b)^2.$$

$$m_A\,\{a,b\} \leq b \;\Leftrightarrow\; \frac{a+b}{2} \leq b \;\Leftrightarrow\; a + b \leq 2b \;\Leftrightarrow\; a \leq b.$$

Além disso, as igualdades acontecem se, e somente se, $(a-b)^2 = 0$. Isto é, $a = b$. □

O trapézio e as médias

O trapézio pode ser usado para determinar médias aritmética, geométrica e harmônica de dois valores a e b. Os valores de tais médias correspondem ao comprimento de segmentos paralelos as bases do trapézio, conforme proposição a seguir.

Proposição 3.2 *Seja $ABCD$ um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ de comprimentos a e b, respectivamente, e seja O o ponto de intersecção das diagonais do trapézio. Então, as medias aritmética, geométrica e harmônica de a e b são respectivamente, os comprimentos dos segmentos paralelos às bases do trapézio, $\overline{MN}$, $\overline{GH}$ e $\overline{PQ}$, tais que:*

- (i) $\overline{MN}$ *é a base média do trapézio*
- (ii) $\overline{GH}$ *divide o trapézio em dois trapézios semelhantes $ABHG$ e $GHCD$*
- (iii) $\overline{PQ}$ *passa pelo ponto O*

Demonstração:

(i) Sendo a base média do trapézio o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio. É fácil verificar que o valor da base média é igual à semi-soma das bases do trapézio. Assim,

$$MN = \frac{1}{2}\,(AB + BC) = \frac{a+b}{2} = m_A\,\{a,b\}.$$

(ii) Sendo os trapézios $ABHG$ e $GHCD$ semelhantes, a razão de semelhança r verifica:

$$r = \frac{AB}{GH} = \frac{GH}{DC}.$$

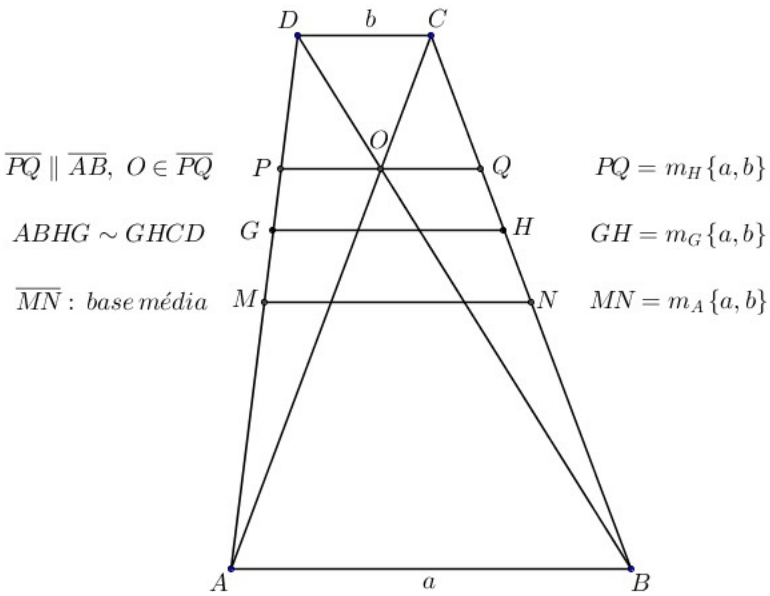

Figura 3.5: As médias sobre um trapézio

Portanto,

$$\frac{a}{GH} = \frac{GH}{b} \Rightarrow GH^2 = ab \Rightarrow GH = \sqrt{ab} = m_G\{a, b\}.$$

(iii) Inicialmente, provaremos que $PO = OQ$. Observamos que $\overline{PO}$ paralelo a $\overline{DC}$, daí obtemos que os triângulos AOP e ACD são semelhantes, logo

$$\frac{CD}{OP} = \frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AO}. \tag{3.3}$$

Também temos que $\triangle BOQ \sim \triangle BDC$, onde o símbolo $\sim$ significa semelhança. Portanto,

$$\frac{CD}{QO} = \frac{BC}{BQ} = \frac{DB}{OB}. \tag{3.4}$$

Por outra parte, considerando as retas paralelas determinadas pelos segmentos $\overline{AB}$ $\overline{PQ}$ e $\overline{DC}$ cortados pelas transversais determinadas por $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, obtemos pelo Teorema de Tales,

$$\frac{AD}{AP} = \frac{BC}{BQ}. \tag{3.5}$$

Assim, das equações (3.3), (3.4) e (3.5), obtemos

$$\frac{CD}{OP} = \frac{CD}{QO} \Rightarrow OP = QO.$$

Isto prova nossa primeira afirmação. Agora, pela semelhança dos triângulos ABD e POD, obtemos

$$\frac{PO}{AB} = \frac{DP}{DA} = \frac{DA - PA}{DA} = 1 - \frac{PA}{DA}.$$

Portanto, por (3.3), segue que:

$$\frac{PO}{AB} = 1 - \frac{OP}{CD} \Rightarrow OP\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = 1.$$

Logo,

$$PQ = 2OP = 2\left(\frac{AB \cdot CD}{AB + CD}\right) = \frac{2ab}{a+b} = m_H\,\{a, b\}.$$

O que mostra a parte (iii) da proposição e conclui sua demonstração. $\square$

Para consultar os resultados de geometria plana elementar usados nesta seção, indicamos a referência [1].

Capítulo 4

Somatórios infinitos

Nos capítulos precedentes, temos estudado o seguinte problema: Dada sequência de números reais (a_n), qual é a soma dos n primeiros termos dessa sequência. Isto é, qual é o valor do somatório

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Temos estabelecido o valor dessa soma quando a sequência é uma progressão aritmética, geométrica ou aritmético-geométrica. Também, usando o Princípio de Indução Matemática, temos estabelecido o valor desse somatório finito, para algumas sequências.

Agora estaremos interessados em estabelecer, caso exista, um valor para o somatório infinito. Ou seja, queremos estabelecer se de fato o somatório infinito

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{n-1} + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é um número real. Como veremos nem sempre esse somatório infinito é um número real, por exemplo, é fácil ver que o somatório infinito do número 1 não existe. Isto é,

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \nexists$$

A seguir, vamos estabelecer, de forma mais precisa, o significado do somatório infinito de uma sequência de números reais, ser um número real. O conceito envolvido neste conteúdo é o de limite de uma sequência, com o qual iniciamos este capítulo. As referências bibliográficas usadas aqui são: [6], [8], [12], [15]

4.1 Limite de sequências

Dada uma sequência de números reais (a_n), desejamos saber se os números reais a_n ficam próximos de um número l, quando n cresce, por exemplo, se $a_n = \frac{1}{n}$ é razoável dizer que a_n aproxima-se de 0 quando n aumenta. Vejamos agora o conceito de limite de uma sequência.

Definição 4.1 *Dizemos que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ tem limite o número real l quando, fixado arbitrariamente um $\epsilon > 0$, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$.*

Quando (a_n) tem limite l, diremos que a sequência é **convergente** e escreveremos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ ou $a_n \to l$. Assim, podemos escrever,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \ \Leftrightarrow\ \forall\,\epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - l| < \epsilon.$$

Ainda, uma sequência que não possui limite será dita **divergente**.

Exemplo 4.1 *A seguir apresentamos alguma sequências convergentes e divergentes*

(a) *Se $a_n = \frac{1}{n}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, a fim de que $|a_n - 0| < \epsilon$ basta que $n > \frac{1}{\epsilon}$; assim, fixado $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, teremos*

$$n > n_0 \ \Rightarrow\ n > \frac{1}{\epsilon} \ \Rightarrow\ \frac{1}{n} < \epsilon \ \Rightarrow\ |a_n - 0| < \epsilon.$$

(b) *Se $a_n = (-1)^n$, então $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge. Observe que os elementos da sequência são alternadamente 1 e -1. Logo, não se aproximam de um mesmo número real. Isto porque fixado $l \in \mathbb{R}$, temos para qualquer $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} |a_n - l| + |a_{n+1} + l| &= |a_n - l| + |l - a_{n+1}| \\ &\geq |(a_n - l) + (l - a_{n+1})| \\ &= |a_n - a_{n+1}| = 2. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos $|a_n - l| \geq 1$ ou $|a_{n+1} - l| \geq 1$. Assim, para $0 < \epsilon < 1$, não conseguimos ter $|a_n - l| < \epsilon$ para todo n suficientemente grande.

(c) *Se $a_n = \frac{n}{n+1}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. Note que*

$$|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}.$$

Portanto, escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$n > n_0 \ \Rightarrow\ n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \ \Rightarrow\ |a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon.$$

A seguir, mostraremos dois resultados que utilizaremos nas seções seguintes. O primeiro estabelece o limite de uma sequência geométrica de razão $0 < |q| < 1$. Mais precisamente, temos

Teorema 4.1 *Se* $|q| < 1$*, então* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Demonstração: Temos que mostrar que, dado ϵ positivo podemos determinar um índice n_0 tal que $|q^n - 0| < \epsilon$, $\forall\, n > n_0$. Temos:

Caso $q = 0$, dado $\epsilon > 0$, temos $|q^n| = 0 < \epsilon$, $\forall\, n > 0$.

Agora, caso $0 < |q| < 1$, como $\frac{1}{|q|} > 1$, podemos escrever $\frac{1}{|q|} = 1 + p$ ode $p > 0$. Então, a fórmula binomial fornece

$$\begin{aligned}\frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n &= \binom{n}{0} 1^{n-1} p^0 + \binom{n}{1} 1^{n-2} p^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} 1 p^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0 p^n \\ &= 1 + np + \cdots np^{n-1} + p^n. \geq 1 + np.\end{aligned}$$

Segue daí que

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np} \leq \frac{1}{np}.$$

Agora, note que para $\epsilon > 0$, temos

$$\frac{1}{np} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < np \Leftrightarrow n > \frac{1}{p\epsilon}.$$

Portanto, escolhendo um índice n_0 tal que $n_0 > \frac{1}{p\epsilon}$, obtemos

$$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{p\epsilon} \Rightarrow |q^n - 0| \leq \frac{1}{np} < \epsilon.$$

□

O segundo resultado que usaremos nas seções seguintes é:

Teorema 4.2 *Se* $|q| < 1$*, então* $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$

Demostração: Temos que mostrar que, para todo ϵ positivo previamente escolhido, existe um índice n_0 tal que $|nq^n| < \epsilon$, $\forall\, n > n_0$.

Se $q = 0$, escolhido $\epsilon > 0$, temos $|nq^n| = 0 < \epsilon$, $\forall\, n > 0$.

Se $q \neq 0$ e de $|q| < 1$ obtemos $\frac{1}{|q|} > 1$. Colocamos $\frac{1}{|q|} = 1 + p$, onde $p > 0$. Pela fórmula do binômio, para $n > 2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n &= 1 + np + \frac{n(n-1)}{2} p^2 + \binom{n}{3} p^3 + \cdots + \binom{n}{n} p^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2} p^2.\end{aligned}$$

Assim, para $n > 2$

$$n|q|^n = \frac{n}{(1+p)^2} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}p^2} = \frac{2}{(n-1)p^2} < \frac{4}{np^2}.$$

Observe que

$$\frac{4}{np^2} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{4}{\epsilon p^2}.$$

Portanto, escolhendo $n_0 = \max\left\{3, \dfrac{4}{\varepsilon p^2}\right\}$, obtemos

$$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{4}{\epsilon p^2} \Rightarrow |nq^n| < \frac{4}{np^2} < \epsilon.$$

$\square$

4.2 Séries

A seguir, trataremos das séries de números reais, e definiremos a convergência de séries. Será este conceito, o que nos permitirá saber quando um somatório infinito é um número real ou não.

Definição 4.2 *Dada uma sequência (a_n) de números reais, podemos formar uma outra sequência (S_n) de números reais, definida do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & & \vdots \\ S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Entenderemos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, como sequência (S_n). O número real S_n é denominado a n-ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, e dizemos que tal série converge para $S \in \mathbb{R}$ se a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ de suas somas parciais converge para S. Nesse caso, diremos que S é a soma da série e escreveremos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

Assim, o somatório infinito

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n + \cdots$$

será um número real, quando a sequência de suas somas parciais (S_n) é uma sequência convergente e, neste caso, teremos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Exemplo 4.2 *Seguem exemplos de séries, sem explicitar sua convergência*
(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$
(b) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$
(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \cdots$

Exemplo 4.3 *A série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n = (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ não é convergente, pois a sequência de suas somas parciais é*

$$(S_n) = (-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \cdots)$$

que não é convergente.

Exemplo 4.4 *Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Assim, nossa série pode ser escrita da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, onde $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Pelo exemplo (2.4) do capítulo 2, temos:*

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad e \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Proposição 4.1 [Critério do termo geral]. *Se a série $\sum_{n\geq 1} a_n$ é convergente, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Equivalentemente, se a sequência (a_n) não converge para zero, então a série $\sum_{n\geq 1} a_n$ é divergente.*

Frequentemente, este teorema é usado para estabelecer a divergência da série estudada.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, queremos provar que existe um índice n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \epsilon$. Seja $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Pela definição de convergência de uma série, existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - S| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - S| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, pela desigualdade triangular, temos para $n > n_0$

$$|a_n| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - S| + |S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\square$

Exemplo 4.5 *Usando o critério do termo geral, podemos estabelecer que as séries*

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ *é divergent, pois* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ *é divergent, pois a sequência* $a_n = (-1)^n$ *é divergent*

A recíproca da proposição acima não é valida. Isto é, existem séries divergentes $\sum_{n\geq 1} a_n$ para as quais se tem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. O exemplo clássico é o da série harmônica que passamos a estudar a seguir junto com alguns exemplos de séries cujas sequências de somas parciais foram estudadas no capítulo anterior.

4.2.1 Série Harmônica

A série harmônica é a somatório infinito dos inversos dos números inteiros positivos, isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Vejamos aqui que a série harmônica é divergente. Percebemos que os termos da série harmônica vão decrescendo tendendo para zero dando uma falsa impressão de que a série é uma convergente, ou seja, que o somatório infinito é um número real, mas essa impressão de convergência não se confirma. Observe inicialmente que

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$.

Assim, usando que, para cada inteiro $k > 1$, temos

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}}}_{=\frac{1}{2^k}} > \underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{ parceleas}} = \frac{1}{2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right) \\ &> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right) = 1+m\cdot\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $2^m \leq n < 2^{m+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=3}^{n}\frac{1}{j} \\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=3}^{2^m}\frac{1}{j} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{m}\left(\sum_{j=1}^{2^{k-1}}\frac{1}{2^{k-1}+j}\right) \\ &> 1+\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}+(m-1)\cdot\frac{1}{2} = 1+m\cdot\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, uma vez que a sequência $\left(1+\frac{m}{2}\right)$ é divergente, segue que a série harmônica é divergente.

4.2.2 Série Geométrica

Definição 4.3 *Dado um número real q, não nulo, a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots$$

é chamada série geométrica.

A seguir, mostraremos que se $0 < |q| < 1$, a série geométrica é convergente.

Teorema 4.3 *Dado $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ é convergente se, e somente se, $0 < |q| < 1$. Neste último caso, temos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}. \tag{4.1}$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $0 < |q| < 1$, e seja (S_n) a sequência das somas parciais da série geométrica. Pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, dada no teorema (3.5), obtemos

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Portanto, para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, basta aplicar o teorema (4.1), onde mostramos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ para os valores de q tais que $|q| < 1$.

Mostremos agora que se a série geometria é convergente, então $0 < |q| < 1$. Para isto, basta mostrar que se $|q| \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ é divergente. O que segue aplicando a proposição (4.1), pois, quando $|q| \geq 1$, a sequência é (q^n) é divergente. $\square$

Observações 4.1 *Note que:*
1. *Como sabemos, a razão q de uma progressão geométrica não pode ser igual a zero, mas, mesmo assim, quando $q = 0$ vale a fórmula* (4.1).
2. *Segue do teorema anterior que para $0 < |q| < 1$, temos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1 - q}.$$

De fato, a sequência das somas parciais da série acima é $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. Daí,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a\frac{1}{1 - q}.$$

3. *Fazendo uma mudança no índice, temos*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}.$$

Exemplo 4.6 *Em particular, temos:*
(a) *Para $q = \frac{1}{4}$, a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

é convergente e sua soma é o número real $S = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.
(b) *Para $q = -\frac{1}{2}$, a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^n} + \cdots$$

é convergente e sua soma é o número real $S = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.
(*c*) *Para* $q = \frac{1}{10}$, *a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

é convergente e sua soma é o número real $S = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$. *Note que, neste caso, a sequência de somas parciais é* $S_n = 0,\underbrace{99\cdots 99}_{n\ noves}$. *Isto quer dizer que* $0,999999\cdots = 1$.

Exemplo 4.7 *Determinar o número racional (ou geratriz) equivalente à dizima periódica* $3,142424242\cdots$.
Solução. *Seja* $x = 3,142424242\cdots$, *temos*

$$x = 3,1+0,042+0,00042+0,0000042+\cdots = 3,1+42\cdot(10)^{-3}+42\cdot(10)^{-5}++42\cdot(10)^{-7}+\cdots$$

Logo,

$$\begin{aligned} x &= 3,1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{42}{10^3}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1} = \frac{31}{10}+\frac{42}{10^3}\frac{1}{1-10^{-2}} \\ &= \frac{31}{10}+\frac{42}{990} = \frac{99\cdot 31+42}{990} = \frac{3111}{990} = \frac{1037}{330} \end{aligned}$$

4.2.3 Série Aritmético-Geométrica

Vimos no teorema (3.7) que a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão Aritmético-Geométrica é dada por

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1-nq^{n-1}+(n-1)q^n]}{(1-q)^2},$$

vamos determinar agora o somatório infinito dos termos de uma sequências aritmético-geométrica quando a razão q da progressão geométrica satisfaz $|q| < 1$.

Teorema 4.4 *Dado* $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0, 1$, *a série aritmético-geométrica* $\sum_{n=1}^{+\infty}[a_1+(n-1)r]\,q^{n-1}$ *é convergente se, e somente se,* $0 < |q| < 1$. *Neste último caso, temos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[a_1+(n-1)r]\,q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}. \tag{4.2}$$

Demonstração: Suponha inicialmente que $0 < |q| < 1$. Pelo teorema (3.7), a sequência das somas parciais da série aritmético-geométrica é dada por,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2}.$$

Agora, $\sum_{n=1}^{+\infty} [a_1 + (n-1)r]\, q^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1-nq^{n-1}+(n-1)q^n]}{(1-q)^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 q^n}{1-q} + \lim_{n\to\infty} \frac{rq}{(1-q)^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{rnq^n}{(1-q)^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{rq(n-1)q^n}{(1-q)^2} \\
&= \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n + \frac{rq}{(1-q)^2} - \frac{r}{(1-q)^2} \lim_{n\to\infty} nq^n + \lim_{n\to\infty} \frac{rqq^n n - rqq^n}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

Usando os teorema (4.1) e (4.2), uma vez que $0 < |q| < 1$, obtenos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{a_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2} + \frac{rq}{(1-q)^2}\left(\lim_{n\to\infty} nq^n - \lim_{n\to\infty} q^n\right) \\
&= \frac{a_1}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}
\end{aligned}$$

Finalmente, para mostrar que se a série aritmético-geometria é convergente, temos $0 < |q| < 1$, basta mostrar que se $|q| \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} [a_1 + (n-1)r]\, q^{n-1}$ é divergente. O que segue aplicando a proposição (4.1), pois, quando $|q| \geq 1$, a sequência $([a_1 + (n-1)r]\, q^{n-1})$ é divergente. $\square$

Observação 4.1 *Como sabemos quando $q = 0$, a sequência $([a_1 + (n-1)r]\, q^{n-1})$ não define uma progressão aritmético-geométrica. Mesmo assim, vale a fórmula* (4.2).

Exemplo 4.8 *Calcular o valor da soma*

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots$$

Solução: Note que a soma corresponde à série aritmético-geométrica com $a_1 = \frac{1}{2}$, $r = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. Logo, usando a fórmula (4.2), obtemos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + (n-1)\right] \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1 \cdot 1/2}{(1-1/2)^2} = 1 + 2 = 3.$$

Exemplo 4.9 *Calcular o valor da soma*

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n} + \cdots$$

1ª Solução: Observamos que o somatório infinito é uma série aritmético-geométrica com $a_1 = 1$, $r = 1$ e $q = \frac{1}{3}$, daí teremos usando a fórmula (4.2)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (n-1)] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - 1/3} + \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

2ª Solução: Inicialmente, começamos enumerando S por

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}} \frac{n+1}{3^n} + \cdots \tag{4.3}$$

Agora, multiplicando a equação (4.3) por $\frac{1}{3}$, obtemos

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \cdots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} + \cdots \tag{4.4}$$

Subtraindo (4.4) a (4.3), teremos

$$S - \frac{1}{3}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

Assim, pela fórmula (4.1), segue que

$$\frac{2}{3}S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \frac{9}{4}.$$

3ª Solução: Escrevemos o n-ésimo termo do somatório S como uma soma de n termos iguais. Isto é,

$$\begin{array}{lclcl}
s_1 & = & 1 & = & 1 \\
s_2 & = & \frac{2}{3} & = & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
s_3 & = & \frac{3}{3^2} & = & \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \\
s_4 & = & \frac{4}{3^3} & = & \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} \\
s_5 & = & \frac{5}{3^4} & = & \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Observe agora que a soma de cada coluna da expressão acima forma uma série. Isto é,

$$S = S_1^* + S_2^* + S_3^* + S_4^* + \cdots S_n^* + \cdots,$$

onde cada somando S_n^* é uma série geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Assim, pela fórmula (4.1), obtemos

$$\begin{array}{rclcl}
S_1^* & = & 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots & = & \frac{1}{1-1/3}=\frac{3}{2} \\
S_2^* & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\cdots & = & \frac{1/3}{1-1/3}=\frac{3}{2\cdot 3} \\
S_3^* & = & \frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}+\cdots & = & \frac{1/3^2}{1-1/3}=\frac{3}{2\cdot 3^2} \\
S_4^* & = & \frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\cdots & = & \frac{1/3^3}{1-1/3}=\frac{3}{2\cdot 3^3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Portanto, usando novamente a fórmula (4.1), obtemos

$$\begin{array}{rcl}
S & = & S_1^*+S_2^*+S_3^*+S_4^*+\cdots S_n^*+\cdots \\
 & = & \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2\cdot 3}+\dfrac{3}{2\cdot 3^2}+\dfrac{3}{2\cdot 3^3}+\cdots+\dfrac{3}{2\cdot 3^{n-1}}+\cdots \\
 & = & \dfrac{3/2}{1-1/3}=\dfrac{9}{4}
\end{array}$$

O exemplo anterior pode ser generalizado como segue

Exemplo 4.10 *Determine o valor do somatório infinito*

$$S = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+(n+1)x^n+(n+2)x^{n+1}+\cdots,$$

sabendo-se que $|x|<1$

1ª Solução: Usando a fórmula (4.2), para $a_1 = 1$, $r = 1$ e $q = x$, obtemos

$$S = \frac{1}{1-x}+\frac{1\cdot x}{(1-x)^2}=\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

2ª Solução: Quando $|x|<1$, desejamos determinar a soma

$$S = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\cdots \tag{4.5}$$

multiplicando por x a equação (4.5), obtemos

$$xS = x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+\cdots \tag{4.6}$$

Agora, subtraindo (4.5) com (4.6), obtemos

$$S-xS = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\cdots \tag{4.7}$$

Isto é $S-xS$ é a série geométrica de razão x, com $|x|<1$. Logo da fórmula (4.1), obtemos

$$(1-x)S = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Segue que

$$S = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

3ª Solução: Vejamos agora uma outra maneira de resolver essa somatório infinito. Para isto consideramos:

$$\begin{array}{lcl}
s_1 & = & 1 \\
s_2 & = & x+x \\
s_3 & = & x^2+x^2+x^2 \\
s_3 & = & x^3+x^3+x^3+x^3 \\
s_4 & = & x^4+x^4+x^4+x^4+x^4 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Somando as colunas, temos

$$S = S_1^* + S_2^* + S_3^* + S_4^* + S_5^* \cdots ,$$

onde cada S_n^* é uma série geométrica de razão x (com $|x|<1$) e primeiro termo x^{n-1}. Assim, usando a fórmula (4.1), obteremos

$$\begin{array}{lclcl}
S_1^* & = & 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots & = & \frac{1}{1-x} \\
S_2^* & = & x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots & = & \frac{x}{1-x} \\
S_3^* & = & x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\cdots & = & \frac{x^2}{1-x} \\
S_4^* & = & x^3+x^4+x^5+x^6+x^7\cdots & = & \frac{x^3}{1-x} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Portanto,

$$S = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^3}{1-x} + \cdots$$

Isto é, S é uma sequência geométrica com primeiro termo $\frac{1}{1-x}$ e razão x com $|x|<1$. Daí,

$$S = \frac{\frac{1}{1-x}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

4.3 Aplicações

Nesta seção, veremos dois problemas que, para resolvê-los devemos usar os somatórios infinitos.

4.3.1 A mosca de Von Neumann

Um problema muito interessante e conhecido, é o problema da mosca de Von Neumann e diz o seguinte:
Dois ciclistas começam afastados 20 milhas e andam em direções opostas a uma velocidade constante de 10 mi/h. Ao mesmo tempo, uma mosca, que viaja a 15 mi/h, começa na roda dianteira do ciclista do norte, voa até à roda dianteira do do sul, regressa ao do norte e assim por diante, até ficar esmagada entre as duas rodas. Qual é a distância percorrida pela mosca?

Há duas maneiras de resolver este problema: a mais lenta é calcular a distância que a mosca percorre na primeira viagem, depois na segunda, etc., e depois somar as séries infinitas que se obtêm; a maneira mais rápida é observar que as bicicletas se encontram uma hora depois de partirem, portanto a mosca só tem uma hora para as viagens, donde a resposta é 15 milhas.

Quando fizeram esta pergunta a von Neumann, este resolveu-a num instante, o que decepcionou bastante quem fez a pergunta, que disse "Oh, devia ter ouvido o truque antes!", ao que von Neumann respondeu "Truque? apenas somei as séries infinitas!"

Solução: Uma das soluções, dentre as muitas que podem ser concebidas, é a seguinte: Sendo no início a distância entre as duas bicicletas 20 milhas, e as velocidades das mesmas, 10 milhas por hora, o choque entre as bicicletas ocorre após 1h, pois as velocidades são opostas, assim a velocidade relativa é de 20 milhas por hora. Como a velocidade da mosca é de 15 milhas por hora, o espaço que ela percorre durante esse mesmo tempo de 1h é 15 milhas.

Von Neumann apresenta uma solução com argumento de que ele obtém a distância total percorrida pela mosca como soma das distâncias percorridas subsequentemente nos intervalos de tempo em que ela se desloca de uma roda para a outra.

Vamos considerar t_1 como o tempo em que a mosca demora para sair da bicicleta 1 e chegar à bicicleta 2. Seja d_1 a distância que ela percorre durante esse tempo t_1 e seja D_1 a distância percorrida pelas bicicletas nesse tempo t_1. Temos:

$$d_1 = 20 - 2D_1 \Rightarrow d_1 + 2D_1 = 20 \tag{4.8}$$

Sabemos a velocidade da mosca e também a velocidade das bicicletas, daí obtemos

$$d_1 = 15t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{d_1}{15} \quad \text{e} \quad D_1 = 10t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{D_1}{10}.$$

Segue que

$$\frac{d_1}{15} = \frac{D_1}{10} \Leftrightarrow D_1 = \frac{2}{3}d_1.$$

Também temos, de (4.8),

$$d_1 + 2D_1 = 20 \Rightarrow 15t_1 + 2 \cdot 10t_1 = 20 \Rightarrow t_1 = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

Portanto, a distância d_1 percorrida pela mosca é

$$d_1 = 15t_1 = 15 \cdot \frac{4}{7} = \frac{60}{7}.$$

Daí,

$$D_1 = \frac{2}{3} \cdot d_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{60}{7} = \frac{40}{7}$$

Usando raciocínio análogo, podemos obter d_2 (distância percorrida pela mosca quando ela sai da bicicleta 2 e volta para a bicicleta 1), que leva o tempo t_2 para ser percorrida o tempo necessário para a mosca retornar à bicicleta 1 e D_2 a distância percorrida pelas bicicletas no tempo t_2. Temos

$$d_2 = d_1 - 2D_2 = \frac{60}{7} - 2D_2 \tag{4.9}$$

Como antes, temos

$$t_2 = \frac{d_2}{15} = \frac{D_2}{10} \Rightarrow D_2 = \frac{2}{3}d_2.$$

Assim,

$$d_2 + 2D_2 = \frac{60}{7} \Rightarrow d_2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}d_2\right) = \frac{60}{7} \Rightarrow, d_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{60}{7}.$$

Portanto,

$$t_2 = \frac{1}{15} \cdot \frac{180}{7^2} = \frac{12}{7^2} \quad \text{e} \quad D_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{7^2} = \frac{120}{7^2}.$$

Se efetuarmos novamente os cálculos, seguindo o mesmo raciocínio, vamos obter

$$d_3 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \frac{60}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot d_1, \quad d_4 = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \frac{60}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot d_1, \cdots$$

Observando o comportamento da sequência teremos:

$$d_n = \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} \cdot d_1.$$

Assim o comportamento da sequência (d_n) é de uma progressão geométrica com primeiro termo $d_1 = 60/7$ e razão $q = 3/7$.

Nesse movimento de ida e vinda de uma roda da bicicleta 1 para a da bicicleta 2, a distância percorrida pela mosca será dada exatamente pela soma das parcelas obtidas em cada trecho, ou ainda, a distância S será:

$$S = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n + \cdots$$

Podemos usar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG, pois $0 < q < 1$, daí,

$$S = \frac{d_1}{1-q} = \frac{60/7}{1-3/7} = \frac{60}{4} = 15\,\text{milhas}.$$

4.3.2 A bola que pula

Vamos supor que deixamos cair de uma altura de 8 m uma bola que pula. Vamos supor também que, cada vez que a bola toca o chão, ela pula e volta a subir a metade da altura do pulo anterior. Nessas condições, qual é a distância vertical que a bola vai percorrer?

Solução: Quando soltamos a bola, ela percorre 8 metros. Quando ela quica no chão, ela volta a subir, no primeiro pulo, 4 metros (metade de 8 metros). Então ela percorre 4 metros para acima e 4 metros para abaixo. Isto é, $8 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2}$. No segundo pulo, a bola percorre 2 metros para acima e 2 metros para abaixo, o que pode ser escrito como $8 \cdot \frac{1}{2^2} + 8 \cdot \frac{1}{2^4}$ e, assim sucessivamente.

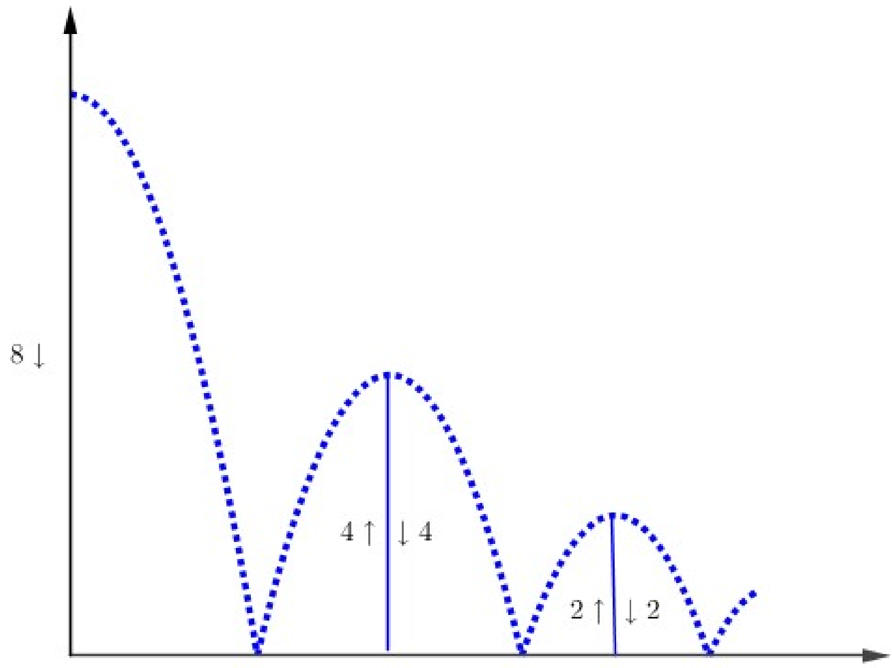

Figura 4.1: Distância vertical da bola que pula

Temos assim, para a distância vertical percorrida pela bola,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \text{primeiro pulo} & & \text{segundo pulo} & & \text{terceiro pulo} & & \cdots \\
8 & + & 4+4 & + & 2+2 & + & 1+1 & + & \cdots \\
8 & + & 8\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{2} & + & 8\cdot\frac{1}{2^2}+8\cdot\frac{1}{2^2} & + & 8\cdot\frac{1}{2^3}+8\cdot\frac{1}{2^3} & + & \cdots \\
-8+16\cdot\frac{1}{2^0} & + & 16\cdot\frac{1}{2} & + & 16\cdot\frac{1}{2^2} & + & 16\frac{1}{2^3} & + & \cdots
\end{array}$$

Isto fornece,

$$-8 + \frac{16}{2^0} + \frac{16}{2^1} + \frac{16}{2^2} + \frac{16}{2^3} + \cdots = -8 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{2^n}$$

Finalmente, usando a fórmula da soma infinita da série geométrica com primeiro termo 16 e razão $\frac{1}{2}$, obtemos a distância vertical percorrida pela bola que pula como,

$$-8 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{2^n} = -8 + \frac{16}{1 - 1/2} = -8 + 32 = 24.$$

Capítulo 5

Problemas de Vestibulares

Conforme foi dito no início do nosso trabalho, os vestibulares do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), a Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), do Instituto Militar de Engenharia (IME) e da Academia da Força Aérea (AFA), trazem no seu contexto uma grande variedade de questões que abordam os assuntos relacionados com progressões, tanto aritméticas quanto geométricas e com um grau de dificuldade diferenciado.

Por muitas vezes, trabalhei vários desses problemas em sala de aula e observei a enorme dificuldade dos alunos em lidar com problemas dessa natureza e com esse nível de exigência, tal fato foi motor impulsionador para que eu tomasse a decisão de realizar um trabalho nessa direção, pois sei que trarei uma contribuição significativa para esse público jovem.

Neste último capítulo aplicaremos as ferramentas estudadas e desenvolvidas na resolução de tais questões pelos alunos do ensino médio. As principais referências usadas aqui são [2], [3], [13] e [14].

5.1 Vestibular do ITA

Nesta seção, apresentamos problemas de provas de ingresso ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Questão 01. (ITA 2005) Seja $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de $a + r$.

Solução: Os termos de índices pares formam uma progressão geométrica de primeiro termo $a_2 = ar$ e razão r^2, já os termos de índices múltiplos de 3 formam uma progressão geométrica de primeiro termo $a_3 = ar^2$ e razão r^3. Desta forma, as respectivas somas dessas sub-sequências fornecem,

$$\frac{ar}{1-r^2} = 4, \qquad \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13}. \tag{5.1}$$

Daí, dividindo a primeira equação de (5.1) pela segunda e sabendo que a razão r da série geométrica deve satisfazer $0 < |r| < 1$, obtemos

$$\frac{ar}{1-r^2} \cdot \frac{1-r^3}{ar^2} = 4 \cdot \frac{13}{16} \Rightarrow \frac{(1-r)(1+r+r^2)}{r(1-r)(1+r)} = \frac{13}{16} \Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r(1+r)} = \frac{13}{4}$$

Portanto,

$$4(1+r+r^2) = 13r(1+r) \Rightarrow 9r^2 + 9r - 4 = 0.$$

Assim, a razão r da progressão geométrica são a raízes desta equação de segundo grau, logo

$$r = \frac{1}{18}\left(-9 \pm \sqrt{81+144}\right) = \frac{1}{18}\left(-9 \pm 15\right) \Rightarrow r = \frac{1}{3} \text{ ou } r = -\frac{4}{3}$$

Como $0 < |r| < 1$, segue que $r = \frac{1}{3}$. Substituído este valor de r na primeira equação de (5.1), segue que

$$\frac{1/3a}{1-1/3^2} = 4 \Rightarrow \frac{1/3a}{8/9} = 4 \Rightarrow \frac{3}{8}a = 4 \Rightarrow a = \frac{32}{3}.$$

Finalmente, obtemos

$$a + r = \frac{32}{3} + \frac{1}{3} = \frac{33}{3} = 11.$$

Questão 02. (ITA 2003) Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, a_3, \cdots, a_n$, formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sabendo-se que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $\frac{n^2-q^3}{q^4}$ é igual a:

Solução: Como $-\frac{1}{2}$ é raiz do polinômio P, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, daí

$$2\left(-\frac{1}{2}\right) + a_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a_3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + a_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

Agora sendo $2, a_2, a_3, \cdots, a_n$ termos de uma progressão geométrica de razão q, seu k-ésimo termo é da forma $a_k = a_1q^{k-1} = 2q^{k-1}$. Asim, a relação acima fica

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + \frac{2q}{2^2} - \frac{2q^2}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^n 2q^{n-1}}{2^n} \\ &= -1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{2^2} + \cdots + \frac{(-1)^n q^{n-1}}{2^{n-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)\left(-\frac{q}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Vem, da soma dos n primeiros termos de uma PG com primeiro termo -1 e razão $-\frac{q}{2}$,

$$(-1)\frac{(-q/2)^n - 1}{-q/2-1} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{q}{2}\right)^n - 1 = 0 \Rightarrow \left(-\frac{q}{2}\right)^n = 1,$$

como $q > 0$, segue $q = 2$ e n par. Como $P(2) = 5460$, temos

$$P(2) = 2 \cdot 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + \cdots + a_n 2^n = 5460,$$

usando que $a_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$, vem

$$4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = 5460,$$

somando os termos,

$$4\left(\frac{4^n - 1}{4-1}\right) = 5460 \Rightarrow 4^n - 1 = \frac{3}{4} \cdot 5460 = 4095 \Rightarrow 4^n = 4096 \Rightarrow n = 6.$$

Finalmente, temos

$$\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{6^2 - 2^3}{2^4} = \frac{36-8}{16} = \frac{7}{4}.$$

Questão 03.(ITA 1999) Sejam a_k e b_k números reais com $k = 1, 2, \cdots, 6$. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$, são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0$, para todo $k = 1, 2, \cdots, 6$. Se $(a_1,\, a_2,\, a_3, \cdots, a_6)$ é uma progressão aritmética de razão $-1/5$ e soma 9, então z_3 é igual a:

Solução: Como $(a_1,\, a_2,\, a_3, \cdots, a_6)$ é uma PA de razão $r = -1/5$ e soma 9, obtemos

$$a_6 = a_1 + 5r = a_1 - 1, \qquad \text{e} \qquad 9 = \frac{(a_1 + a_6)6}{2} = 3(2a_1 - 1) \Rightarrow a_1 = 2.$$

Assim, $a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2\frac{-1}{5} = \frac{8}{5}$ e como $|z_3| = 2$, segue que

$$\left(\frac{8}{5}\right)^2 + b_3^2 = 4 \Rightarrow b_3^2 = 4 - \frac{64}{25} = \frac{36}{25} \Rightarrow b_3 = \frac{6}{5}, \text{ pois } b_3 \geq 0.$$

Portanto, $z_3 = a_3 + ib_3 = \frac{8}{5} + i\frac{6}{5}$.

Questão 04.(ITA 1998) Seja $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ uma progressão geométrica de razão a_1 e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão é:

Solução: Como a progressão geométrica (a_n) tem primeiro termo e razão igual a a_1, dai $\frac{a_1}{1-a_1} = 3a_1$. Portanto.

$$a_1 - 3a_1(1 - a_1) = 0 \Rightarrow a_1(3a_1 - 2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ ou } a = \frac{2}{3}.$$

Como $0 < a_1 < 1$, vem $a_1 = \frac{2}{3}$. Assim,

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{18+12+8}{27} = \frac{38}{27}$$

Questão 05.(ITA 1997) Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 números reais formando, nessa ordem, uma progressão geométrica crescente com $a_1 \neq 0$. Sejam x_1, x_2, x_3 as raízes da equação $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i \in$, então a soma $x_1 + x_2 + x_3$ é:

Solução: Como os coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 da equação são números reais e $x_1 = 2i \in \mathbb{C}$ é uma das outras raízes de um polinômio de grau 3, x_2 ou x_3 é o conjugado de $2i$. Então, faça $x_2 = -2i$ que também é uma raiz da equação, daí usando as relações de soma e produto de raízes (Relações de Girard), teremos,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_1} = -\frac{a_1q}{a_1} - q \Rightarrow 2i + (-2i) + x_3 = -q \Rightarrow x_3 = -q$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_4}{a_1} = -\frac{a_1q^3}{a_1} = -q^3 \Rightarrow 4x_3 = -q^3$$

Portanto,

$$4(-q) = -q^3 \Rightarrow q^3 - 4q = 0 \Rightarrow q(q^2-4) = 0,$$

cujas raízes são -2, 0, 2. Como a_1, a_2, a_3, a_4 é uma sequência crescente de razão q, segue $q = 2$. Assim, $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Questão 06. (ITA 2010) Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$$

Sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razões 3 e 4 e de somas 80 e 255, respectivamente. Então, o determinante da inversa de A e o elemento a_{23} da inversa de A, valem respectivamente:

Solução: Usando a expressão da soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com primeiro termo a_1 e razão q é $S_n = a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$, temos

$$80 = x_1\left(\frac{3^4-1}{3-1}\right) = 40x_1 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$225 = y_1\left(\frac{4^4-1}{4-1}\right) = 85y_1 \Rightarrow y_1 = 3$$

Daí, obtemos

$$x_2 = 2,\ x_2 = 6,\ x_3 = 16,\ x_4 = 54, \qquad \text{e} \qquad y_1 = 3,\ y_2 = 12,\ y_3 = 48,\ y_4 = 192$$

Portanto a matriz A fica

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de A usando Laplace na quanrta linha, obtemos

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 6 & 18 & 54 \\ 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -(6 \cdot 48 - 12 \cdot 18) = -72.$$

Portanto,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{72}.$$

Podemos obter um elemento qualquer da matriz inversa de A sabendo que esta é dada $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{adj}$, onde A_{adj} é a adjunta da matriz A (transposta da matriz cofatora). Logo, se C_{32} é o cofator na linha 3 e coluna 2 matriz A, obtemos

$$\left(A^{-1}\right)_{23} = \frac{C_{32}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{-864}{-72} = 12.$$

Questão 07. (ITA 2010) A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \cdots, a_{5(n-1)+1}, \cdots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \cdots, a_{5n}, \cdots)$ tem soma 2. Então a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ é igual a:

Solução: Como (a_n) é uma PG de razão r e primeiro termo a_1, seu termo geral é $a_n = a_1 r^{n-1}$. Logo, $\left(a_{5(n-1)+1}\right)$ é uma PG de razão r^5 com primeiro termo a_1 e (a_{5n}) é uma PG de razão r^5 com primeiro termo $a_1 r^4$. Portanto, usando a fórmula da soma de uma progressão geométrica infinita, para essas progressões, obtemos respectivamente

$$\frac{a_1}{1 - r^5} = 8 \qquad \text{e} \qquad \frac{a_1 r^4}{1 - r^5} = 2. \tag{5.2}$$

Daí,

$$r^4 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pois } r < 0.$$

Substituído esse valor de r na primeira equação de (5.2), obtemos

$$\frac{a_1}{1+\sqrt{2}/8} = 8 \Rightarrow a_1 = 8\left(1+\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = 8+\sqrt{2}.$$

Portanto a soma da PG (a_n) é

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{8+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}/2} = \frac{16+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 14-6\sqrt{2}.$$

Questão 08. (ITA 1990) Numa progressão geométrica de três termos a razão é e^{-2a}, a soma dos termos é 7 enquanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de a é:

Solução: Se b é o primeiro termo da PG de razão $q = e^{-2a}$, seus três termos são: b, bq e bq^2. Pelas hipóteses temos

$$b+bq+bq^2 = 7 \qquad \text{e} \qquad bq^2 - b = 3.$$

Daí,

$$\frac{1+q+q^2}{q^2-1} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3(1+q+q^2) = 7(q^2-1) \Rightarrow 4q^2-3q-10 = 0,$$

de maneira que $q = 2$ ou $q = -\frac{5}{4}$. Assim, sendo $e^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos $q = e^{-2a} = 2$ e, portanto, $a = -\ln 2$.

Questão 09. (ITA 2005) Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a:

Solução: O volumes das cunhas formadas pelos cortes dos n planos forma uma progressão aritmética cuja soma é o volume de uma semi-esfera, daí

$$\frac{4\pi r^3}{6} = \left[\frac{\pi r^3}{18} + \left(\frac{\pi r^3}{18} + (n-1)\frac{\pi r^3}{45}\right)\right]\frac{n}{2}.$$

Simplificando, teremos

$$\frac{2\pi r^3}{3} = \frac{n(n+4)\pi r^3}{90} \Rightarrow n^2+4n-60 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ ou } n = -10.$$

Como $n > 0$, segue que $n = 6$.

Questão 10. (ITA 1998) Seja $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ uma progressão geométrica infinita de razão a_1, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

Solução: A soma dos termos desta progressão geométrica infinita (de razão e primeiro termo igual a a_1) é dada por

$$S = \frac{a_1}{1-a_1} = 3a_1 \Rightarrow 1 = 3(1-a_1) \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}.$$

Logo, a soma de seus três primeiros termos é

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1)^2 + (a_1)^3 = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{38}{27}.$$

Questão 11. (ITA 1994) Seja (a, b, c, d, e) uma progressão geométrica de razão a, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Se a soma de seus termos é igual a $13a + 12$ e x é um número real positivo diferente de 1, tal que

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_e x} = \frac{5}{2},$$

então é igual a:

Solução: Como (a, b, c, d, e) é uma progressão geométrica de razão a, temos

$$(a, b, c, d, e) = (a, a^2, a^3, a^4, a^5),$$

daí, sua soma é

$$\begin{aligned} a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 = 13a + 12 \quad &\Rightarrow \quad a^4(a+1) + a^2(a+1) - 12(a+1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (a^4 + a^2 - 12)(a+1) = 0, \end{aligned}$$

cujas raízes são: $a = -1$, $a^2 = 3$ e $a^2 = -4$, como $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $a = \sqrt{3}$. Agora, usando a fórmula de mudança de base nos logaritmos, obtemos

$$\begin{aligned} \log_x a + \log_x b + \log_x c + \log_x d + \log_x e = \frac{5}{2} \quad &\Rightarrow \quad \log_x (a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) = \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow \quad \log_x \left(a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5\right) = \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow \quad \log_x a^{15} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, como $a = \sqrt{3}$, segue que

$$15 \log_x \sqrt{3} = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_x \sqrt{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_x 3 = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_x 3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3^3 = 27.$$

Questão 12. (ITA 1993) A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r é 50 e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão q é

12. Se ambas as progressões tiverem o mesmo termo inicial menor do que 10 e sabendo-se que $q = r^2$, podemos afirmar que a soma dos 4 primeiros termos da progressão geométrica será:

Solução: Seja a_1 o primeiro termo comum às duas progressões. Do enunciado, devemos ter

$$\frac{(2a_1 + 4r)5}{2} = 50, \quad \text{e} \quad \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-r^2} = 12.$$

Isto é,

$$a_1 + 2r = 10 \quad \text{e} \quad a_1 = 12(1 - r^2).$$

Daí,

$$12(1 - r^2) + 2r = 10 \Rightarrow 12r^2 - 2r - 2 = 0.$$

As raízes desta equação de segundo grau são $r = \frac{1}{2}$ ou $r = -\frac{1}{3}$. Logo, para $a_1 = 10 - 2r$, teremos os valores $a_1 = 9$ ou $a_1 = \frac{31}{3}$. Observe que, quando $r = -\frac{1}{3}$, nesta caso $a_1 = \frac{31}{3}$, e a soma da progressão aritmética é

$$\frac{(2a_1 + 4r)5}{2} = \frac{[2(31/3) + 4(-1/3)]\,5}{2} = \frac{145}{3} \neq 50.$$

Portanto, $r = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 9 < 10$ e a soma dos quatro primeiros termos da progressão geométrica é dada por

$$S == a_1\left(\frac{r^8 - 1}{r^2 - 1}\right) = 9\left(\frac{(1/2)^8 - 1}{(1/2)^2 - 1}\right) = 9\left(\frac{63/64}{3/4}\right) = \frac{765}{64}.$$

Questão 13. (ITA 1990) Numa progressão geométrica de razão q, sabe-se que:
I - o produto do logaritmo natural do primeiro termo a_1 pelo logaritmo natural da razão é 24.
II - a soma do logaritmo natural do segundo termo com o logaritmo natural do terceiro termo é 26.
Se $\ln q$ é um número inteiro então o termo geral a_n vale:

Solução: Dos dados do problema, temos

$$\ln a_1 \ln q = 24 \qquad \text{e} \qquad \ln a_2 + \ln a_3 = \ln a_1 q + \ln a_1 q^2 = 2\ln a_1 + 3\ln q = 26.$$

Daí, segue

$$\left(\frac{26 - 3\ln q}{2}\right)\ln q = 24 \Rightarrow (26 - 3\ln q)\ln q = 48 \Rightarrow 3\ln^2 q - 26\ln q + 48 = 0.$$

As raízes desta equação são $\ln q = 6$ ou $\ln q = \frac{8}{3}$, de tal maneira que $q = e^6$, pois $\ln q$ é inteiro, e assim $\ln a_1 = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow a_1 = e^4$. Logo, o termo geral da progressão é

$$a_n = a_1 q^{n-1} = e^4(e^6)^{n-1} = e^4 e^{6(n-1)} = e^{6n-2}.$$

Questão 14. (ITA 1998) Suponha que os números 2, x, y e 1458 estão, nessa ordem, em progressão geométrica. Desse modo o valor de $x + y$ é:

Solução: Como 2, x, y, 1458, estão em Progressão geométrica, se a razão dessa PG é q, teríamos que esses quatro termos são 2, $2q$, $2q^2$, $2q^3$. Portanto, $2q^3 = 1458$, donde vem $q^3 = 729$, logo $q = 9$. Assim,

$$x + y = 2q + 2q^2 = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 81 = 180.$$

5.2 Vestibular da EsPCEx

Nesta seção, apresentamos problemas de provas de ingresso à Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx).

Questão 01. (EsPCEx 2001) Atribuindo-se um valor a cada letra da sigla ESPCEX, de modo que as letras "E", "S", "P", "C" e "X" formem nessa ordem uma progressão geométrica e que $E \cdot P \cdot C + E \cdot S \cdot X = 8$, pode-se afirmar que o produto $E \cdot S \cdot P \cdot C \cdot E \cdot X$ vale:

Solução: Os termos"E", "S", "P", "C" e "X" formam nessa ordem uma progressão geométrica, usando que a razão dessa PG é q, podemos então reescrever q,

$$(E, S, P, C, X) = (E, Eq, Eq^2, Eq^3, Eq^4),$$

temos ainda que $E \cdot P \cdot C + E \cdot S \cdot X = 8$, donde vem,

$$E \cdot Eq^2 \cdot Eq^3 + E \cdot Eq \cdot Eq^4 = 8 \;\Rightarrow\; E^3q^5 = E^3q^5 = 8 \;\Rightarrow\; E^3q^5 = 4.$$

Assim vem,

$$E \cdot S \cdot P \cdot C \cdot E \cdot X = E \cdot Eq \cdot Eq^2 \cdot Eq^3 \cdot Eq^4 = E^6q^{10} = (E^3q^5)^2 = 4^2 = 16.$$

Questão 02. (EsPCEx 2002) Uma progressão aritmética tem razão $r = -10$, sabendo que seu 100º (centésimo) termo é zero, pode-se afirmar que seu 14º (décimo quarto) termo vale:

Solução: Podemos escrever $a_n = a_k + (n - k) \cdot r$. Logo,

$$\begin{aligned} a_{100} = a_{14} + (100 - 14) \cdot (-10) \quad &\Rightarrow \quad a_{14} + 86(-10) = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_{14} = 860. \end{aligned}$$

Questão 03. (EsPCEx 2001) A sequência de números reais a, b, c, d forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 110, a sequência de números reais a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. A soma d + f é igual a:

Solução: Dos dados do problema (a, b, c, d) é uma progressão aritmética, cuja soma é 110. Logo, $a + b + c + d = 110$. Temos ainda que a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2, temos então que $b = 2a$, concluímos que a progressão aritmética (a, b, c, d) tem razão a, assim teremos:

$$a + b + c + d = a + 2a + 3a + 4a = 110 \Rightarrow 10a = 110 \Rightarrow a = 11.$$

Portanto,

$$d + f = (2a)2 + (2a)2^2 = 4a + 8a = 12a = 12 \cdot 11 = 132.$$

Questão 04. (EsPCEx 2001) Os números a, b e c determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r $(r \neq 0)$. Na ordem b, a, c determinam uma progressão geométrica (PG). Então a razão da PG é:

Solução: Temos que a, b e c é uma progressão aritmética de razão $r \neq 0$, então $b = a + r$ e $c = a + 2r$. Temos também que b, a e c é uma progressão geométrica, então $a^2 = b \cdot c$, fazendo as substituições, teremos:

$$a^2 = (a + r) \cdot (a + 2r) = a^2 + 3ar + 2r^2 \Rightarrow 0 = r(3a + 2r).$$

As raízes da equação acima são: $r = 0$ ou $r = -\frac{3a}{2}$. Como, por hipótese, $r \neq 0$, concluímos que $r = -\frac{3a}{2}$. Portanto, $b = a + r = a - \frac{3a}{2} = -\frac{a}{2}$ e razão da PG será:

$$q = \frac{a}{b} = \frac{a}{-a/2} = -2.$$

Questão 05. (EsPCEx 2002) Na tabela abaixo, em que os números das linhas 1 e 2 encontram-se em progressão aritmética, seja n o número da coluna em que pela primeira vez o número b_n da linha 2 é maior que o a_n da linha 1.

	1	2	3	4		n
linha 1	1000	1004	1008	1012	$\cdots$	a_n
linha 2	20	27	34	41	$\cdots$	b_n

A soma dos algarismos de n é:

Solução: Na linha 1 a lei de formação é dada por

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1000 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 996.$$

Na linha 2 a lei de formação é dada por

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot r = 20 + (n - 1) \cdot 7 = 7n + 13.$$

Queremos determinar o menor natural n tal que $b_n > a_n$. Assim,

$$13 + 7n > 4n + 996 \Rightarrow 3n > 983 \Rightarrow n > 327,7.$$

O menor natural n que satisfaz $n > 327,7$ é $n = 328$ e é a ordem em que o primeiro termo dos elementos da linha de baixo ficam maior que os da linha de cima. Assim a soma dos algoritmo de tal n é

$$3 + 2 + 8 = 13.$$

Questão 06. (EsPCEx 2003) Se para todo n inteiro e positivo

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n,$$

então $\frac{1}{3}S_{2003}$ é igual a:

Solução: Cada diferença de duas parcelas consecutivas até 2002 tem como resultado -1, assim temos 1001 parcelas de -1, daí

$$S_{2003} = \underbrace{-1 - 1 - \cdots - 1}_{1001\ parcelas} + 2003 = -1001 + 2003 = 1002.$$

Portanto,

$$\frac{1}{3}S_{2003} = \frac{1002}{3} = 334.$$

Questão 07. (EsPCEx 2004) O sexto termo de uma progressão geométrica é igual a b, e o sétimo termo é igual a c. Se o primeiro termo desta progressão é diferente de zero e a razão maior que um, então o primeiro termo é igual a:

Solução: Seja (a_n) a PG, de razão q, que verifica os dados do problema. Então, temos $a_6 = b$ e $a_7 = c$. Como $a_7 = a_6 \cdot q$, segue que $c = b \cdot q$ e, daí $q = \frac{c}{b}$. Queremos achar o valor de a_1 e sabemos que $a_6 = a_1 \cdot q^5$. Portanto,

$$a_1 = a_6 \cdot q^{-5} = b \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{-5} = b \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^5 = \frac{b^6}{c^5}.$$

Questão 08. (EsPCEx 2012) Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Em muitos casos, um fractal é gerado pela repetição indefinida de um padrão. A figura abaixo segue esse princípio. Para construí-la, inicia-se com uma faixa de comprimento m na primeira linha. Para obter a segunda linha, uma faixa de comprimento m é dividida em três partes congruentes, suprimindo-se a parte do meio. Procede-se de maneira análoga para a obtenção das demais linhas, conforme indicado na figura.

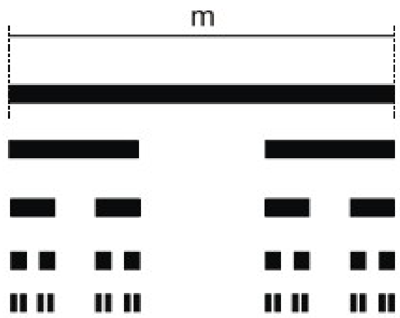

Figura 5.1: Fractais: EsPCEx 2012

Se, partindo de uma faixa de comprimento m, esse procedimento for efetuado infinitas vezes, a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas é:

Solução: Das informações dadas no problema, temos;

1^{a} $linha:\ \ m$

2^{a} $linha:\ \ 2\frac{m}{3}$

3^{a} $linha:\ \ 4\frac{m/3}{3} = \frac{4m}{9}$

e assim sucessivamente, A sequência formada é uma progressão geométrica infinita de razão

$$q = \frac{\frac{2m}{3}}{m} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a soma dos infinitos termos será

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{m}{1-\frac{2}{3}} = \frac{m}{\frac{1}{3}} = 3m.$$

5.3 Vestibular do IME e da AFA

Nesta seção, apresentamos alguns problemas dos vestibulares do Instituto Militar de Engenharia (IME) e da Academia da Força Aérea (AFA)

Questão 01. (IME 2005) Sejam a, b, c e d números reais positivos e diferentes de 1. Sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que: $c^2 = (ac)^{\log_a b}$

Solução: Como os termos estão em progressão aritmética, usando a propriedade de mudança de base dos logaritmos, teremos

$$\log_b d = \frac{1}{2}(\log_a d + \log_c d) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_d a} + \frac{1}{\log_d c}\right).$$

Daí,

$$\frac{2}{\log_d b} = \frac{\log_d c + \log_d a}{\log_d a \log_d c} = \frac{\log_d (ac)}{\log_d a \log_d c} \Rightarrow 2\log_d c = \frac{\log_d b \log_d (ac)}{\log_d a}.$$

Portanto,

$$\log_d c^2 = \frac{\log_d b}{\log_d a}\log_d(ac) = \log_a b \log_d(ac) = \log_d\left((ac)^{\log_a b}\right).$$

Segue que $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

Questão 02. (AFA 2002) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada pela fórmula $S_n = \frac{3n^2+n}{2}$, então a soma do 4° com o 6° termo dessa progressão aritmética é:

Solução: Sabemos que $S_1 = a_1$ e $S_2 = a_1 + a_2$. Assim,

$$a_1 = S_1 = \frac{3 \cdot 1^1 + 1}{2} = 2, \qquad a_2 = S_2 - a_1 = \frac{3 \cdot 2^2 + 2}{2} - 2 = 7 - 2 = 5.$$

Segue que a razão será $r = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$, logo a soma pedida será:

$$a_4 + a_6 = (a_1 + 3 \cdot r) + (a_1 + 5 \cdot r) = 2a_1 + 8r = 2 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 4 + 24 = 28.$$

Questão 03. (IME 1999) Determine as possíveis progressões aritméticas para as quais o resultado da divisão da soma dos seus n primeiros termos pela soma dos seus $2n$ primeiros termos seja independente do valor de n.

Solução: Observe que

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{(a_1 + a_n)n}{(a_1 + a_{2n})2n} = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2(2a_1 + (2n-1)r)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a_1 - r + nr}{2a_1 - r + 2nr},$$

existem duas possibilidades para que essa divisão não dependa de n.

(i) $r = 0$ e $a_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ a PA é constante

(ii) $r = 2a_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ a PA é igual a $(a_1, 3a_1, 5a_1, 7a_1, \cdots)$

Questão 04. (AFA 1999) Se a sequência de inteiros positivos $(2, x, y)$ é uma progressão geométrica e $(x+1, y, 11)$ uma progressão aritmética, então o valor de $x + y$ é:

Solução: Se $(2, x, y)$ é uma progressão geométrica, então $x^2 = 2y$. Por outra parte, como $(x+1, y, 11)$ é uma progressão aritmética, temos $2y = x + 12$. Assim, $x^2 = x + 12$, cuja raízes são $x = 4$ e $x = -3$. Agora, sendo x é um inteiro positivo, termos $x = 4$ e, pela primeira equação acima, $y = 8$, assim a soma $x + y = 12$.

Questão 05. (IME 1997) Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a enésima linha compreende n números. Encontre em função de n, nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.

1					
3	5				
7	9	11			
13	15	17	19		
21	23	25	27	29	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solução: Seja a_n o primeiro número da n-ésima linha na distribuição dos números impares dados acima. Temos

$$a_2 - a_1 = 2,\ a_3 - a_2 = 4,\ a_4 - a_3 = 6,\ a_5 - a_4 = 8,\ \cdots\ a_n - a_{n-1} = 2(n-1),\ \cdots$$

Assim, somando as $(n-1)$ primeiras equações acima, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1).$$

Isto é,

$$a_n - a_1 = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i = 2\frac{(n-1)(n)}{2} = n(n-1).$$

Portanto,

$$a_n - 1 = n(n-1) \Rightarrow a_n = n^2 - n + 1.$$

Agora, determinemos o n-ésimo termo da linha n, que denotamos por b_n. Temos,

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 + 2,\ b_3 = a_3 + 4,\ b_4 = a_4 + 6, b_5 = a_5 + 8,\ \cdots$$

Daí,

$$b_n = a_n + 2(n-1) = n^2 - n + 1 + 2(n-1) = n^2 + n - 1.$$

Como os n elementos de da linha n formam uma progressão aritmética, a soma desses elementos será:

$$S_n = \frac{(a_n + b_n)n}{2} = \frac{(n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1)n}{2} = n^3$$

Questão 06. (IME 2011) Uma progressão aritmética (a_n) tem $a_1 > 0$ e $3a_8 = 5a_{13}$. Se S_n é a soma dos n primeiros termos desta progressão, o valor de n para que S_n seja máxima é:

Solução: Seja r a razão da PA, logo seu termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r$. Assim,

$$3a_8 = 5a_{13} \Leftrightarrow 3(a_1 + 7r) = 5(a_1 + 12r) \Leftrightarrow -2a_1 = -39r.$$

Portanto, sendo $a_1 > 0$, obtemos $r < 0$. Agora, sabemos que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2} = \frac{(2a_1 + nr - r)n}{2}.$$

Logo, como $2a_1 = -39r$, obtemos

$$S_n = \frac{(2a_1 + nr - r)n}{2} = \frac{(-39r + nr - r)n}{2} = \frac{r}{2}n^2 - 20rn.$$

Então, como $r < 0$, $f(x) = \frac{r}{2}x^2 - 20rx$ é uma parábola com concavidade para abaixo. Assim, S_n possui um máximo quando

$$n = x_V = -\frac{-20r}{r} = 20.$$

Questão 07. (IME 2015) O valor do somatório abaixo é

$$\sum_{k=1}^{15} Img\left(cis^{2k-1}\frac{\pi}{36}\right).$$

Observação: $Img(w)$ é a parte imaginária do número complexo w e $cis\theta = sen\theta + i\cos\theta$.

Solução: A somas da parte imaginaria é a parte imaginaria da soma, logo

$$\sum_{k=1}^{15} Img\left(cis^{2k-1}\frac{\pi}{36}\right) = Img\left(\sum_{k=1}^{15} cis^{2k-1}\frac{\pi}{36}\right).$$

Chamando $cis\frac{\pi}{36} = z$, o somatório fica, $\sum_{k=1}^{15} z^{2k-1}$ que é uma soma de uma progressão geométrica com primeiro termo z, razão z^2 e número de termos $n = 15$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{15} z^{2k-1} = z\frac{z^{30}-1}{z^2-1}$$

Note que $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, assim a expressão acima pode ser reescrita como

$$z\frac{z^{30}-1}{z^2 - z\cdot\bar{z}} = z\frac{z^{30}-1}{z(z-\bar{Z})} = \frac{z^{30}-1}{z-\bar{z}}.$$

O denominador vale:

$$z - \bar{z} = \left(\cos\frac{\pi}{36} + i\,sen\frac{\pi}{36}\right) - \left(\cos\frac{\pi}{36} - i\,sen\frac{\pi}{36}\right) = 2i\,sen\frac{\pi}{36}.$$

O numerador vale:

$$z^{30} - 1 = \left(cis\frac{\pi}{36}\right)^{30} - 1 = cis\frac{30\pi}{36} - 1 = cis\frac{5\pi}{6} - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - 1.$$

Portanto, o somatório resulta

$$\sum_{k=1}^{15} z^{2k-1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - 1}{2i\,sen\frac{\pi}{36}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{sen\frac{\pi}{36}} + i\frac{\sqrt{3}+2}{sen\frac{\pi}{36}}\right).$$

Daí, vem

$$\sum_{k=1}^{15} Img\left(cis^{2k-1}\frac{\pi}{36}\right) = Img\left(\sum_{k=1}^{15} cis^{2k-1}\frac{\pi}{36}\right) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}+2}{sen\frac{\pi}{36}}.$$

Questão 08. (AFA 2011) Conforme figura abaixo, A é o ponto de tangência das circunferências de centros C_1, C_2 e C_3. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.

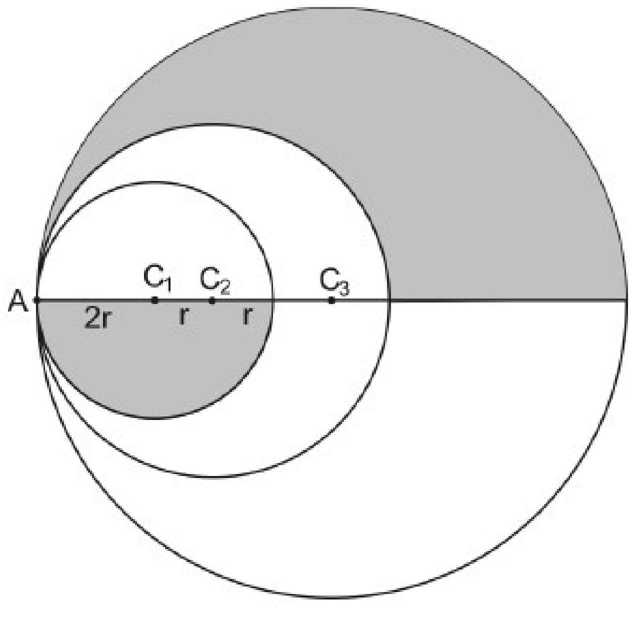

Figura 5.2: Área: AFA 2011

Se os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 medem, respectivamente, $2r$ e $3r$, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

Solução: Seja r_3 o raio da circunferência C_3. Como os raios dessas três circunferências, que são $(2r, 3r, r_3)$, estão em uma progressão geométrica, temos:

$$(3r)^2 = (2r)\cdot r_3 \Rightarrow 9r^2 = 2r\cdot r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{9}{2}r$$

Agora, a área da região sombreada é igual à metade da área da circunferência de centro C_3 menos a metade da área da circunferência de centro C_2 mais metade da área da circunferência de centro C_1. Logo, a área sombreada S é dada por

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{2}\pi \cdot r_3^2 - \frac{1}{2}\pi(3r)^2\right) + \frac{1}{2}\pi(2r)^2 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{9^2 r^2}{2^2} - 9r^2 + 4r^2\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{81}{4} - 5\right) r^2 \\ &= \frac{61}{8}\pi\, r^2. \end{aligned}$$

Considerações Finais

Nosso trabalho começou com uma ideia simples de propiciar aos alunos de ensino médio a possibilidade de fornecer um material de qualidade para o direcionamento aos concursos militares e foi tomando corpo à medida que o professor orientador sugeria ideias. No decorrer de seu desenvolvimento, muitas foram as modificações e vários foram os questionamentos e inquietações até que tomasse a forma final.

No entanto, teve seu mérito maior quando forneceu aos alunos e professores a oportunidade de ter um material de consulta de qualidade e tornou possível aliar a teoria e a prática. O esforço empreendido na busca de referências teóricas que possibilitassem a execução do trabalho com bases sólidas colaborou para o meu próprio aperfeiçoamento. O trabalho despertou curiosidades que vieram à tona. Porém é bom salientar que nem todas as indagações foram esclarecidas, pois o conhecimento é inesgotável. No início a nossa intenção era obter respostas mais objetivas sobre os assuntos de permeavam os concursos militares. Entretanto essa intenção foi tomando novas formas e a cada novo desafio surgido, buscamos no aprofundamento teórico desvendar tais mistérios. Colaborar com a formação dos nossos alunos e com a sociedade onde estamos inseridos foi instigador para a conclusão do nosso trabalho. Produzir um trabalho dessa natureza traz um grande enriquecimento pessoal e acadêmico. O arcabouço construído, o desenvolvimento, a forma como foi abordado, os vários caminhos tomados foram necessários e de fundamental importância para a conclusão desse estudo, o que vai colaborar com uma melhor preparação para nossos professores e jovens envolvidos.

No início, abordamos os primórdios do surgimento das sequências, em especial as progressões aritméticas e geométricas, mas no próprio decorrer do trabalho fez-se necessário a inclusão das progressões harmônicas e as progressões aritmético-geométricas. Para dar um suporte melhor e antes de falarmos especificamente sobre progressões, fizemos um estudo sobre o princípio de indução, diga-se de passagem, de enorme importância para a sustentação do TCC. A fundamentação desse princípio nos deu bases sólidas para o desenvolvimento desse trabalho. Provamos muitas fórmulas usando tal ferramenta e fizemos aplicações práticas de problemas clássicos como o da "Pizza de Stein"e "Os Coelhos de Fibonacci", também usando o Princípio de Indução como ferramenta. Não foi em vão que Abramo Hefez disse a frase: "Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de ensino médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista".

Fizemos a apresentação do somatório e suas propriedades que foram extremamente importantes e facilitaram sobremaneira a solução de várias situações. Abordamos, na sequência, as progressões aritméticas, onde também fizemos um embasamento teórico e aplicações práticas como, por exemplo, resolução de problemas de juros simples. Em progressão geométrica estudamos as somas finitas e fizemos a abordagem de problemas clássicos, tais como ?O Problema do Xadrez com os Grãos de Trigo? e a aplicação na resolução de juros compostos. Foram apresentadas também as progressões harmônicas onde fizemos aplicações na geometria plana onde segmentos representavam as médias aritmética, geométricas e harmônicas. As progressões aritmético-geométricas surgiram para sanar o vazio que ficou quanto às somas que não podiam ser resolvidas por meio das progressões aritméticas ou geométricas ou harmônicas. Porém as fórmulas deduzidas não são agradáveis aos olhos dos alunos de ensino médio, por isso, também foram apresentadas outras formas de resolução sem a utilização de tais fórmulas.

Surgiram as somas infinitas e a partir desse ponto fez-se necessário a abordagem de limites para dar significado a tais somas. Alguns teoremas foram apresentados para dar suporte a um breve estudo de série, onde basicamente abordamos séries harmônicas, séries geométricas e séries aritmético-geométricas. Desse ponto em diante tivemos uma ferramenta poderosa para a resolução de várias situações problemas, tais como ? O Problema da Mosca Von Neumann? e ? O Problema da Bola que Pula?.

Concluímos nosso trabalho com uma bateria de problemas selecionados de vestibulares de várias escolas militares, ITA, AFA, IME e EsPCEx. Esperamos que a nossa humilde contribuição tenha atingido o público ao qual se propôs. Deixamos essa pequena frase dita pelo Professor Geraldo Ávila(1933-2010), para refletirmos: "Ninguém aprende Matemática ouvindo o professor em sala de aula, por mais organizadas e claras que sejam suas preleções, por mais que se entenda tudo que ele explica. Isto ajuda muito, mas é preciso estudar por conta própria logo após as aulas, antes que os benefícios delas desapareçam, com o tempo. Mas este estudo exige muita disciplina e concentração: estuda-se sentado à mesa, com lápis e papel na mão, prontos para serem usados a todo momento. Você tem que interromper a leitura para fazer um gráfico ou diagrama, ou alguma figura que ajude a seguir o raciocínio do livro, sugerir ou testar uma ideia. Por isso mesmo, não espere que o livro seja completo, sem lacunas a serem preenchidas pelo leitor; do contrário, esse leitor será induzido a uma situação passiva, quando o mais importante é desenvolver as habilidades para o trabalho independente. Os exercícios são uma das partes mais importante do livro. De nada adianta estudar a teoria sem aplicar-se na resolução dos exercícios propostos. Muitos desses exercícios são complementos da teoria e não podem ser negligenciados, sob pena de grande prejuízo no aprendizado. Você estará fazendo progresso realmente significativo quando sentir que está realmente aprendendo a aprender."

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques, *Geometria Euclidiana Plana*, 11ª Edição, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[2] DE OLIVEIRA, Marcelo Rufino; CARNEIRO, Manoel Leite, *Coleção Elementos da Matemática*, volume 3, 3ª Edição, Editora VestSeller, Fortaleza, 2010.

[3] DA SILVA, José Anchieta, *Provas Comentadas de Matematica 2001 a 2012*, 1ª Edição, EsPCEx, Editora VestSeller, Fortaleza, 2013.

[4] DA SIVA, Thiago Rodrigues; DE ALMEIDA, Dulce Mary *As Desigualdades entre as Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática de Dois Números Reais*, Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática (FAMAT) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU-MG), número 6, p. 62-74, maio/2006.

[5] HEFEZ, Abramo, *Indução Matemática*, Programa de Iniciação Científica da nº 4, OBMEP 2007.

[6] LOPES, Luís, *Manual de Progressões*, Editora Interciência Ltda., Rio de Janeiro, 1998.

[7] MARTINS, David Pinto, *Progressão harmônica e o triângulo de Leibniz*, Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37, 2015, p. 426-438.

[8] MELO, Maria Eulália de Moraes; VERA, Jorge Antonio Hinojosa. *Números Reais*, Editora Universitária da UFRPE, Recife, 2012.

[9] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, *Matemática Discreta*, Segunda Edição, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[10] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C., *Progressões e Matemática Financeira*, Quinta Edição, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[11] NETO, Antonio Caminha Muniz, *Números Reais*, Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[12] NETO, Antonio Caminha Muniz, *Introdução à Análise*, Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[13] NETTO, Sergio Lima, *A Matemática no Vestibular do ITA*, 1ª Edição, Editora VestSeller, Fortaleza, 2013.

[14] NETTO, Sergio Lima, *A Matemática no Vestibular do IME*, 1ª Edição, Editora VestSeller, Fortaleza, 2011.

[15] THOMAS, George B., *Cálculo*, volume 2, Addison Wesley, São Paulo, 2003.

Sites consultados:

[16] *História das Sequências e Séries* http://www.mat.ufmg.br/calculoII/h1sese.html

[17] SAMPAIO, João C. V., *O Ensino da Álgebra Elementar atrávez de sua História: Sequências e Progressões*, disponível em: http://www.dm.ufscar.br/ sampaio/sequencias.PDF.

[18] *Papiro de Rhind*, https://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind

[19] *Portal do Professor*, http://portaldoprofessor.mec.gov.br.