SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

HEBISON ALMEIDA DOS SANTOS

LOGARITMO: DA TEORIA À APLICAÇÃO

BELÉM-PARÁ
2017

HEBISON ALMEIDA DOS SANTOS

LOGARITMO: DA TEORIA À APLICAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada para obtenção do titulo de Mestre em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato.

BELÉM-PARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós Graduação do ICEN

Santos, Hebison Almeida dos
Logaritmo: da teoria à aplicação/ Hebison Almeida dos Santos; orientador, Renato Fabrício Costa Lobato.-2017.
97 f.: il 29 cm
Inclui bibliografias

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2017.

1. Logaritmos – estudo e ensino. 2. Logaritmos - Conhecimentos e aprendizagem. 3. Estratégias de aprendizagem. 4. Logaritmos – Teoria e aplicações. I. Lobato, Renato Fabrício Costa, orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 513.2207

HEBISON ALMEIDA DOS SANTOS

LOGARITMO: DA TEORIA À APLICAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada para obtenção do titulo de Mestre em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato.

Data da apresentação: 2 de março de 2017.

Aprovado.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato - Orientador
PROFMAT/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
PROFMAT/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
PROFMAT/ICEN/UFPA

Prof. Dr. João Furtado de Souza
Faculdade de Física/ICEN/UFPA

Aos meus pais que sempre mostraram que a educação nos torna pessoas melhores.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter sempre me guiado pelo seu caminho e me feito uma pessoa melhor.

Aos meus pais e meus irmãos que sempre me entenderam e deram força para a realização deste sonho.

A minha esposa Vanessa Kelle de Oliveira pela sua compreensão e amor, e por entender o meu sonho e as minhas metas dentro da educação.

Aos meus amigos que sempre acompanharam minha luta e dedicação ao realizar esta obra, e que estes, em nenhum momento tiraram minhas forças.

A diretora Mariélia da Silva Oliveira da escola Roberto Fernandes de Oliveira pela sua ajuda e compreensão nos momentos em que não pude está na escola e pelos seus conselhos para que não desistisse em meios as dificuldades percebendo a importância deste curso para mim.

A Universidade Federal do Pará por proporcionar este momento de aprendizado e formação para podermos compartilhar estas informações e melhorar a educação que nos rodeia.

Aos professores doutores Aldo Freitas Vieira, Valcir João Da Cunha Farias, Anderson David De Souza Campelo, Augusto César Dos Reis Costa, Anderson De Jesus Araújo Ramos, Irene Castro Pereira, Tânia Madeleine Begazo Valdívia e José Augusto Nunes Fernandes que contribuíram com suas experiências e se dedicaram para que pudéssemos absorver o máximo de conhecimento possível . Em especial ao meu orientador Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato por ter acreditado neste trabalho.

Aos amigos do Profmat 2015 Gilcleison Lima De Araújo, Haroldo De Oliveira e Silva, Miguel Junior Almeida Pinto, Raimundo Do Socorro Coelho Barra, Rondinelli Oliveira Pinto, Rodrigo Jorge da Silva Nascimento, Andrey Helton Goulart Flexa, João Carlos Estevam De Carvalho e Robylson Nascimento De Souza que unidos conseguimos vencer as dificuldades que surgiram.

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens”

René Descartes

RESUMO

O estudo teve como objetivo abordar o ensino de logaritmo quanto ao aspecto teórico para o fortalecimento dos conceitos e aplicado com a intenção de mostrar as modelagens em diversas áreas do conhecimento. Para alcançar este, a pesquisa tem por natureza de ser aplicada, tendo uma abordagem qualitativa, exploratória e baseada em pesquisas bibliográficas. A partir das pesquisas em livros, artigos, dissertações entre outras fontes, foram selecionados conceitos sobre os logaritmos fazendo suas respectivas demonstrações quando necessárias, posteriormente com as análises realizadas no acervo foram escolhidos 16 temas diversos aplicados a ideia de logaritmo. Em cada tema foram propostos os seguintes itens: Uma introdução que o define, os teóricos envolvidos, a demonstração básica e por fim as aplicações. Após a organização de todos os temas pode-se perceber o quão é grande o leque de aplicações que podem ser envolvidos os logaritmos, favorecendo de forma eficaz a atuação do professor em sala de aula, pois este pode se utilizar do material produzido para enriquecer suas aulas e motivar o aluno em frente a este conteúdo tornando o processo de aprendizagem mais atraente.

PALAVRAS-CHAVES: Logaritmo. Teoria. Aplicações.

ABSTRACT

The study had as objective to approach the teaching of logarithm in the theoretical aspect and for the strengthening of concepts and applied with the intention of showing the modeling in several areas of knowledge. To achieve it, the research has the nature of being applied, taking a qualitative and exploratory approach and based on bibliografic researches. From the researches in books, articles, dissertations, among other sources, were selected concepts about the logarithms making their respective demonstrations when necessary, later, with the analysis made in the collection, 16 different themes were chosen, applyng the idea of logarithm. In each theme, the following items were proposed: An introduction that defines it, the theorists involved, the basic demonstrations and finally the apllications. After the organization of all themes, we can realize how great is the range of applications that the logarithms can be involved, favoring the teacher's performance effectively in the classroom, because he can use the matrial produced to enrich their classes and motivate the student about this content, making the learning process more attractive.

KEYWORDS: Logarithms. Theory. Applications.

Lista de Figuras

2.1 Idealizadores do Logaritmo . . . 18
2.2 Comparação de gráficos . . . 19

3.1 Comparação de áreas . . . 27
3.2 Equivalência de áreas . . . 28
3.3 Relação da função com a área . . . 28
3.4 Análise da função . . . 30

4.1 Comparando função crescente e decrescente . . . 34
4.2 Reta $y = x$ para a função logaritmo e exponencial de mesma base com $a > 1$ 34
4.3 Função $y = x$ para a função logaritmo e exponencial de mesma base com $0 < a < 1$ . . . 35
4.4 Comparação de gráficos para diferentes bases com $a > 1$ . . . 35
4.5 Comparação de gráficos para diferentes bases com $0 < a < 1$. . . . 36

6.1 Relação entre a intensidade sonora e distância . . . 44
6.2 Esquema do terremoto . . . 48
6.3 Exemplos de fractais . . . 64
6.4 Fractais de Sierpinski, Cantor e Koch respectivamente. . . . 64
6.5 Triângulo de Sierpinky . . . 65
6.6 Conjunto de Cantor . . . 65
6.7 Floco de neve de Koch . . . 66
6.8 Noção de dimensão . . . 66
6.9 Relação entre pressão e volume . . . 71
6.10 Crescimento de bactérias . . . 79
6.11 Altura do Albúmen . . . 83

Lista de Tabelas

6.1 Níveis de intensidade sonora 47
6.2 Danos ocasionados pelos terremotos de acordo com a escala de Richter . . 49
6.3 Escala de Mercalli e seus efeitos 51
6.4 pH de algumas substâncias 52
6.5 Magnitude de alguns objetos 60
6.6 Graduação alcoólica de algumas bebidas 62
6.7 Comparação entre a escala De Pitágoras e Zarlino 68
6.8 Comparação entre as escalas de Zarlino e Logarítmica 69
6.9 Pressão atmosférica em relação a altitude. 72
6.10 Probabilidade do primeiro dígito. 76
6.11 Probabilidade do primeiro dígito para a sequência de Fibonacci. 77
6.12 Classificação de ovos de acordo com Haugh 83

LISTAS DE SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
Profmat	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

LISTAS DE SÍMBOLOS

W	Watt
W/m^2	Watt por metro
kWh	Kilowatt hora
pH	Potencial Hidrogeniônico
pOH	Potencial hidroxiliônico
C^{14}	Carbono 14
CO_2	Dióxido de carbono
Kpc	Quiloparsec
C_2H_5OH	Álcool
Hz	Hertz
cmHg	Centímetro de Mercúrio
atm	Atmosfera
g	Grama
S^{35}	Enxofre
mCi	Milicurie

Sumário

1 INTRODUÇÃO **14**

2 HISTÓRIA DOS LOGARITMOS **17**

3 LOGARITMOS **21**

3.1 Definição 21

3.2 Propriedades dos logaritmos 21

3.2.1 Logaritmo do Produto 22

3.2.2 Logaritmo do quociente 22

3.2.3 Logaritmo da potência 23

3.3 Mudança de base 23

3.3.1 Propriedade da mudança de base 23

3.3.2 Consequências da propriedade da mudança de base 24

3.4 Exemplos teóricos 25

3.5 Logaritmos decimais 26

3.6 Logaritmos naturais 27

4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA **31**

4.1 Caracterização da função logarítmica 31

4.2 Propriedades da função logarítmica 32

4.3 Gráfico de uma função logarítmica 34

5 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS **37**

5.1 Equações logarítmica 37

5.1.1 Equações logarítmicas da forma $\lg_a f(x) = \lg_a g(x)$ 37

5.1.2 Equações logarítmicas da forma $\lg_a f(x) = \alpha$ 38

5.1.3 Substituição de uma expressão logarítmica por uma incógnita auxiliar na resolução. 38
5.2 Inequações logarítmicas 38
5.2.1 Inequações logarítmicas da forma $\lg_a f(x) > \lg_a g(x)$. 39
5.2.2 Inequações logarítmicas do tipo $\lg_a f(x) > k$ ou $\lg_a f(x) < k$. 39
5.2.3 Inequações logarítmicas com resolução utilizando incógnitas auxiliares. 40

6 APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS EM DIVERSAS ÁREAS 41
6.1 Juros compostos 41
6.2 Nível de intensidade sonora 43
6.3 Escala Richter 47
6.4 pH 51
6.5 Método do carbono 14 53
6.6 Lei de resfriamento de um corpo 56
6.7 Magnitude aparente de uma estrela 58
6.8 Eliminação do álcool ingerido 62
6.9 Dimensão fractal 63
6.10 Escala musical 67
6.11 Pressão Atmosférica 70
6.12 Modelo de crescimento populacional 73
6.13 Lei de Benford 75
6.14 Colônias de Bactérias 78
6.15 Decaimento radioativo 80
6.16 Unidade de Haugh 82

7 CONCLUSÃO 86

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 87

ANEXO A - A REAL ANÁLISE DE INVESTIMENTOS E UMA DESIGUALDADE QUASE BERNOULLI 94

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A Matemática com o passar do tempo mostrou uma grande contribuição no avanço das aplicações em outras ciências, isto é resultado do aperfeiçoamento das técnicas e do processo de pesquisa, como reforçam os Parâmetro Curriculares Nacionais(PCN)

> a aprendizagem na área da matemática indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.(BRASIL,2000,p.86)

Neste sentido tem-se um fortalecimento dos conceitos matemáticos teóricos para que estes possam estruturar situações cotidianas e assim contribuir para o avanço da Ciência. Ademais, nas escolas entende-se que é importante que a Matemática seja trabalhada de forma aplicada, fazendo relações com fenômenos naturais e entre outros, quebrando assim, as barreiras tradicionais da mecanização dos conteúdos e das poucas relações com a realidade do aluno.

No contexto de aplicações da Matemática na situação cotidiana do aluno, destacam-se os logaritmos, que de acordo com Lima (1973, p.8)

> foram criados como instrumentos para tornar mais simples cálculos aritméticos complicados. Posteriormente verificou-se que a importância dos logaritmos na Matemática e nas Ciências em geral era bem maior do que se pensava. Com efeito, diversos fatos matemáticos, bem como vários fenômenos naturais e até mesmo sociais, podem ser expressos quantitativamente por meio dos logaritmos.

Este trabalho abordará o tema logaritmos, buscando uma visão prática de suas aplicações. Conforme Boyer(1974) os mesmos foram inventados de forma independente e simultânea pelos matemáticos Jonh Napier e Jobst Briggs, com intuito de facilitar os cálculos resultantes dos avanços ocorridos na navegação, astronomia e comércio no século XVI. Com o passar do tempo e o avanço da tecnologia as tábuas inicialmente inventadas por estes matemáticos perderam um pouco de sua utilidade, mas as consequências resultantes dos estudos relacionados com os logaritmos, como as propriedades e a sua utilização funcional trouxeram uma nova perspectiva de aplicação deste conteúdo, mostrando-se de grande relevância para o avanço da ciência.

Este trabalho procura estruturar suas ideias nos estudos detalhados dos matemáticos Lima(1996) e Iezzi(2004), nos livros didáticos direcionados aos alunos do ensino médio, em artigos acadêmicos desenvolvidos por discentes e professores de universidades assim como nos materiais elaborados pelos organizadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional(PROFMAT). Esta pesquisa tem por natureza de ser aplicada, pois objetiva mostrar os conceitos e aplicações sobre os logaritmos em situações diversas tendo um enfoque qualitativo com uma interpretação importante dos fenômenos se propondo a detalhar o conhecimento sobre o tema adotando uma linha com caráter exploratório visando maior intimidade, sendo estruturada em levantamentos bibliográfico, pois como afirma Fonseca(2002,p.32) "existem pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações".

A pesquisa apresentará inicialmente a parte histórica dos logaritmos, tentando frisar a importância de seu surgimento para a época, os seus avanços e sua sistematização pelos grandes matemáticos envolvidos nesta contribuição. Após o conhecimento sobre a história dos logaritmos o trabalho abordará a sua definição, mostrando suas propriedades como da transformação do produto em soma e da divisão em subtração, propriedades estas que motivaram o surgimento dos logaritmos assim como as de potências. Também se fará um estudo sobre a mudança de base, o logaritmo decimal, a ideia geométrica do logaritmo natural pela faixa da hipérbole, avançando para a caracterização da função logarítmica, de significativa importância em aplicações modeladas matematicamente. Na atual proposta da Base Nacional Curricular Comum(BNCC) o aluno deve reconhecer a função logarítmica, suas representações algébricas e gráficas, compreendendo seus modelos de variação, identificando domínio e imagem, e utilizar essas noções e representações para resolver problemas.

Além do mais, o estudo sobre os logaritmos, na continuação do trabalho, apresentará técnicas de resoluções de problemas envolvendo as equações e inequações. Finalizando, na sequência do trabalho será exposta uma variedade de aplicações em que os logaritmos são utilizados em varias ciências na explicação de fenômenos biológicos, químicos, econômicos, físicos e entre outros, dando uma ideia sobre a modelagem utilizada para alcançar os logaritmos nestas aplicações e mostrando o quanto o estudo deste conteúdo é de grande importância para o aprendizado dos alunos que entram no ensino médio, determinando assim sua relevância nos avanços tecnológicos e humanos. O entendimento prático é de grande importância, pois como afirma D' Ambrósio(2002, p.31)

> o ciclo de aquisição do conhecimento é deflagrado a partir de fatos da realidade. Deste modo, a construção do conhecimento matemático pode ser mais eficiente se emergir de fenômenos que tem origem na realidade. Assim, a exploração, no ensino, de situações de vida real, em que a matemática se aplica, torna-a mais dinâmica e interessante e proporciona maior eficiência no processo de ensino e aprendizagem.

Neste sentido a relação entre a teoria com base nos logaritmos e a prática torna-se relevante e tende a atrair a atenção do discente, pois este consegue enxergar a sua realidade na matemática, e as diversas vertentes em que um conteúdo matemático adquirido alcança dentro das ciências.

Capítulo 2

HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

Desde a antiguidade, momento de auge da civilização babilônica, os cálculos relacionados à astronomia eram muito trabalhosos, no final do século XVI, o desenvolvimento científico no Renascimento fazia com que a matemática passasse por um grande desafio, este consistia em facilitar os cálculos que existiam na astronomia, na navegação que estava em busca de novas terras e também em consequência no avanço do comércio. Esta facilitação também versava na tentativa de diminuir possíveis erros que poderiam ser causados por essas enormes estimativas aritméticas, até o inicio do século XVII, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram tarefas extremamente árduas.

As operações aritméticas podem ser classificadas em 3 graus de dificuldade, a adição e a subtração estariam no primeiro grau, a multiplicação e divisão no segundo grau e a potenciação e radiciação no terceiro grau, então se procurava uma forma que permitisse reduzir as operações de segundo ou terceiro graus em uma de grau menor e, portanto mais simples de ser realizada. Neste período alguns métodos eram bastante comuns na resolução destes problemas, entre eles, a prostaférese que se utilizava das relações trigonométricas da forma $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, porém estavam distante do que realmente era necessário.

Neste contexto surgem os pais da ideia de logaritmo, a saber:

Figura 2.1: Idealizadores do Logaritmo

(a) Jonh Napier

Fonte:napierbrasil.com.br

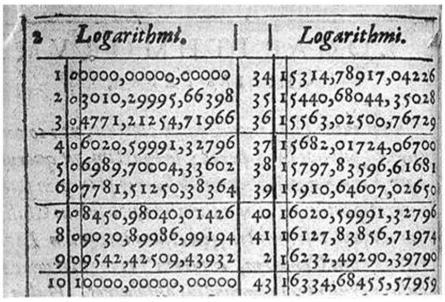
(b) Jobst Bürgi

Fonte:ecalculo.if.usp.br

Estes fizeram trabalhos deslumbrantes de forma independente e quase que simultâneos, sendo o primeiro tendo adotado uma ideia mais geométrica enquanto o segundo mais algébrica, o intuito principal desta invenção era tornar cálculos mais complexos em cálculos mais simples, ademais aparece um terceiro matemático que contribuiu para que a ideia de logaritmo surgisse este foi Michael Stifel(1487-1567), nascido na Alemanha na cidade de Esslinger, em sua obra Arithmetica integra, o mais importante tratado de álgebra da Alemanha, aparece o seu estudo relacionado aos coeficientes binomiais e sua fórmula recorrente até hoje conhecida como relação de Stifel. Na obra publicada por este grande matemático surge o inicio da noção de logaritmo, quando Stifel observa que o produto(quociente) entre dois termos da progressão geométrica 1, 2, 4, 8,... estava associado a progressão aritmética 0, 1, 2, 3, 4,... na soma(diferença) de dois termos respectivos, esta observação seria de muita importância.

Surge então Jobst Bürgi, suíço, um homem que se dedicava a fabricação de relógios, também gostava da astronomia e teria colaborado com Kepler. Após absorver as ideias de Stifel, tenta chegar a sua ideia de logaritmo a partir de uma P.A de primeiro termo 0 com razão 10 até chegar ao numero 32000, e uma P.G correspondente de razão $1 + 10^{-4}$ primeiro termo igual a 10^8, os números tomados por Bürgi tentava evitar o uso de decimais e que estes números em seu estudo ficassem muito próximos entre si. Segue uma noção desta tabela de logaritmo do matemático Bürgi

Figura 2.2: Tábuas de Logaritmos



2		Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Fonte:www.scielo.org.mx

Bürgi inventou seus logaritmos por volta de 1600, porém publicou apenas em 1620, isto fez com que na época ficasse atrás dos trabalhos do barão escocês Jonh Napier publicado em 1614. È importante salientar que Napier não era um matemático profissional nasceu na Escócia e teve sua vida dividida entre a ciência e a religião, fez previsões sobre o mundo e se dedicou a astronomia e matemática, desenvolveu sua ideia de logaritmos sem precisar do conceito exponencial de potências, conhecimento este creditado a René Descartes francês que a desenvolveu em 1637, anos após a publicação dos estudos de Napier.

Jonh Napier, o criador dos logaritmos, nome este inventado por Napier que significa razão(logos) e número(arithmos), publicou sua obra em 1614 denominada Merifice logarithmorum canonis descriptio(uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), nela é apresentada uma tábua de logaritmos dos senos de 0^o até 90^o, esta ideologia trigonométrica era justamente para facilitar os cálculos árduos existente na navegação, astronomia e no comércio.

Napier utilizou um conceito geométrico para definir sua ideia de logaritmo, mostrando uma relação entre dois segmentos de reta, e chegando após suas observações a expressão $y = 10^7 \lg_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{10^7}\right)$, a expressão também lhe ajudara a tornar os números muito próximos entre si e a evitar números decimais. Esta concepção é bem mais complicada da usada atualmente mais se fazia necessária para aquele momento, pois ela transforma um produto numa adição seguida de uma subtração. Surge neste contexto Henry Briggs(1556-1630) que ocupava a primeira cátedra no Gresham College de Londres que viajara até Londres onde encontraria o criador dos logaritmos. Napier sabia da vinda de Briggs e o aguardava com expectativa, Briggs passou um mês, os dois chegaram a conclusão que a tábua mais ideal seria a de base 10. Em 1624 como fruto de um trabalho de sete anos, Briggs publica a obra Arithmetica logarithmica onde apresentava uma tábua de logaritmos decimais com

14 casas dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000. O intervalo entre 20000 e 90000 seriam ainda calculados apenas com 10 casas decimais pelo editor e livreiro Adrien Vlacq(1600-1666) e seriam publicados em uma segunda edição desta mesma obra em 1628.

Na história dos logaritmos vale ressaltar as ideias do matemático Carl F. Gauss(1777-1855), nascido na Alemanha na cidade Brunswick, em 1812 publicou um conjunto de tábuas cujo objetivo era de fornecer os valores de $\lg(a \pm b)$ sabendo as constantes $\lg a$ e $\lg b$. Este estudo foi de grande importância para os marinheiros que necessitavam de simplificação para os seus cálculos de navegação, tornando uma ferramenta de grande relevância prática.

Os logaritmos foram reconhecidos como uma invenção extraordinária, e teve um impacto decisivo no desenvolvimento cientifico da época e atual favorecendo os avanços importantíssimos na área tecnológica, como por exemplo a terceira lei de Keppler[1] só foi descoberta com a ajuda dos logaritmos, onde o astrônomo os chamou de benção e que também aumentava vastamente o seu poder computacional, haja vista a dificuldade dos cálculos que existiam na época. Com o avanço da tecnologia surgiram às calculadoras e os computadores e com isso as tábuas perderam sua utilidade, mas não tornaram os logaritmos inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoente crédito dado ao inglês Jonh Wallis[2] em 1685 e o conceito de base para os logaritmos apresentada pelo Galês William Jones[3] em 1742, transformaram os logaritmos em um relevante instrumento de resolução de equações exponenciais. Atualmente os estudos são direcionados também para as modelagens funcionais advindas da função logarítmica, como a analise em fenômenos geológicos, físicos, químicos, econômicos e entre outros, contribuído desta forma para o avanço da ciência.

[1]Johannes Kepler(1571-1630) nasceu na cidade de Weil der Stadt (Alemanha) foi um importante astrônomo, astrofísico e matemático da época do Renascimento Científico. As suas três Leis revolucionaram o conhecimento astronômico mostrando que os planetas realizavam movimentos elípticos ao redor do Sol.

[2]John Wallis(1616-1703) nasceu em Ashford, Kent, Inglaterra. Ele é considerado o mais influente matemático inglês que antecedeu Newton.

[3]William Jones(1675-1749) nasceu em Llanfihangel Tw'r Beird, Anglesey, Wales, foi pioneiro no emprego da letra π (pi) para expressar a razão da circunferência para o diâmetro em um círculo em seu famoso livro sobre cálculo diferencial e séries infinitas, A new introduction to the mathematics.

Capítulo 3

LOGARITMOS

Os logaritmos como já comentados foram de grande importância para a facilitação de cálculos antes muito trabalhosos, e suas propriedades surgiram com a intenção de facilitar ainda mais este incansável trabalho, segue inicialmente a definição de logaritmos e antilogaritmos.

3.1 Definição

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 1$, chama-se de logaritmo de b na base a o valor dado a:

$$\lg_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Em relação aos termos que compõem esta expressão tem-se que a é a base, b é o logaritmando e x é neste caso o logaritmo. Claro que esta definição faz com que tenha-se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Com esta mesma ideologia pode ser definido a noção de antilogaritmo, da seguinte forma:

$$\lg_a b = x \Leftrightarrow \text{antilg}_a^x = b$$

3.2 Propriedades dos logaritmos

As propriedades dos logaritmos surgiram para facilitar os cálculos, portanto possuem grande relevância na prática, segue algumas propriedades, como:

3.2.1 Logaritmo do Produto

$$\lg_a (b.c) = \lg_a b + \lg_a c$$

Demonstração:

Basta fazer $\lg_a b = x$, $\lg_a c = y$ e $\lg_a(b.c) = z$ e provar que $z = x + y$, segue portanto que dado que $\lg_a b = x$, e $\lg_a c = y$ e $\lg_a(b.c) = z$, por definição segue que $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = bc$. Daí vem que $a^z = a^x.a^y \Rightarrow a^z = a^{(x+y)} \Rightarrow z = x + y$. ■

Observe que esta propriedade pode ser estendida para o produto de n fatores positivos com $n \geq 2$. Ou seja,

$$\lg_a c_1 c_2 c_3 \cdots c_n = \lg_a c_1 + \lg_a c_2 + \lg_a c_3 + \cdots + \lg_a c_n$$

Para demonstrar basta fazer indução sobre n.

3.2.2 Logaritmo do quociente

$$\lg_a \left(\frac{b}{c}\right) = \lg_a b - \lg_a c$$

Demonstração:

Tem-se que fazer $\lg_a b = x$, $\lg_a c = y$ e $\lg_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$ e provar que $z = x - y$, segue daí pela definição que $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = \frac{b}{c}$. Desta tem-se que:

$$a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y \qquad ■$$

Observe que em decorrência desta propriedade anterior e tomando $b = 1$, tem-se que:

$$\lg_a \frac{1}{c} = \lg_a 1 - \lg_a c = 0 - \lg_a c = -\lg_a c$$

3.2.3 Logaritmo da potência

$$\lg_a b^k = k \lg_a b$$

Demonstração:

Fazendo $\lg_a b = x$, $\lg_a b^k = y$ para k$\in \mathbb{R}$ deve-se provar que $y = kx$. Da definição de logaritmos tem-se que $a^x = b$, $a^y = b^k$ segue daí que

$$a^y = (a^x)^k \Rightarrow a^y = a^{kx} \Rightarrow y = kx \qquad \blacksquare$$

Em decorrência da propriedade anterior tem-se que em relação a radiciação a propriedade pode ser da forma:

$$\lg_a \sqrt[n]{b} = \lg_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \lg_a b$$

3.3 Mudança de base

A mudança de base é muito importante nas operações que envolvem os logaritmos, assim segue alguns resultados.

3.3.1 Propriedade da mudança de base

Tomando três números reais x, y e z com x e z diferentes de 1, então o seguinte resultado é válido:

$$\lg_x y = \frac{\lg_z y}{\lg_z x}$$

Demonstração:

Tem-se que $\lg_x y = k$, $\lg_z y = w$ e $\lg_z x = t$ notando que para isto deve-se ter $z \neq 0$ e $a \neq 1$, deve-se provar neste contexto que $k = \frac{w}{t}$. Ora, como $\lg_x y = k$, $\lg_z y = w$ e $\lg_z x = t$, tem-se respectivamente que $x^k = y$, $z^w = y$ e $z^t = x$, daí basta ver que $(z^t)^k = x^k = y = z^w \Rightarrow tk = w \Rightarrow k = \frac{w}{t}$. $\blacksquare$

A propriedade citada acima, pode ser expressa da forma:

$$\lg_a b = \lg_c b . \lg_a c$$

Com a, b e c número pertencentes aos números reais com condição de que a e c diferentes de 1.

Demonstração:

$$\lg_c b . \lg_a c = \frac{\lg_a b}{\lg_a c} . \lg_a c = \lg_a b \qquad \blacksquare$$

3.3.2 Consequências da propriedade da mudança de base

Observe que em consequência da definição dada, tem-se os seguintes resultados:

$$\lg_a b = \frac{1}{\lg_b a} \tag{3.1}$$

$$\lg_{a^k} b = \frac{1}{k} \lg_a b \tag{3.2}$$

Demonstração de (3.1)

Basta converter $\lg_a b$ para a base b, tem-se

$$\frac{1}{\lg_b a} = \frac{\lg_b b}{\lg_b a} = \lg_a b \qquad \blacksquare$$

Demonstração de (3.2)

Deve-se observar que se $b \neq 1$ tem-se que:

$$\lg_{a^k} b = \frac{1}{\lg_b a^k} = \frac{1}{k} . \frac{1}{\lg_b a} = \frac{1}{k} . \lg_a b \qquad \blacksquare$$

Se $b = 1$, então observe que para $\lg_a 1 = 0$ e $\lg_{a^k} 1 = \frac{1}{k} . \lg_a 1$.

3.4 Exemplos teóricos

- Se a, b e c são reais positivos com $a \neq 1$ e $ac \neq 1$, prove que:

$$\lg_a b = (\lg_{ac} b)(1 + \lg_a c)$$

Demonstração:

Observe que $1 + \lg_a c = \lg_a a + \lg_a c = \lg_a ac$, daí segue que $\lg_a b = \lg_{ac} b. \lg_a ac$ pela mudança de base tem-se que $\lg_a b = \frac{\lg_{ac} b}{\lg_{ac} a} = \lg_a b$, segue daí o resultado. $\blacksquare$

- Se a, b, c e d são reais positivos diferentes de 1 e $a.b \neq 1$, prove que:

$$\lg_a d. \lg_b d + \lg_b d. \lg_c d + \lg_c d. \lg_a d = \frac{\lg_a d. \lg_b d. \lg_c d}{\lg_{abc} d}$$

Demonstração:

Usando a s propriedades do logaritmo tem-se:

$$\begin{aligned}
&= \lg_a d. \lg_b d + \lg_b d. \lg_c d + \lg_c d. \lg_a d \\
&= \frac{1}{\lg_d a}.\frac{1}{\lg_d b} + \frac{1}{\lg_d b}.\frac{1}{\lg_d c} + \frac{1}{\lg_d c}.\frac{1}{\lg_d a} \\
&= \frac{\lg_d c + \lg_d a + \lg_d b}{\lg_d c. \lg_d a. \lg_d b} = \frac{\lg_d abc}{\lg_d c. \lg_d a. \lg_d b} = \frac{lg_a d. \lg_b d. \lg_c d}{\lg_d abc} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observe que a igualdade é obtida.

- Se a e b são raízes da equação $x^2 - px + q = 0 (p > 0$ e $0 < q \neq 1)$, demostre que:

$$\lg_q a^a + \lg_q b^b + \lg_q a^b + \lg_q b^a = p$$

Demonstração:

Usando as propriedades do logaritmo tem-se: Da propriedade da potência tem-se $\lg_q a^a = a\lg_q a$, $\lg_q b^b = b\lg_q b$, $\lg_q a^b = b\lg_q a$ e $\lg_q b^a = a\lg_q b$, pelos termos semelhantes e agrupando-os vem que $(a+b)(\lg_q a + \lg_q b) = (a+b)\lg_q ab$. Sabe-se que na equação do segundo grau $x^2 - px + q = 0$ que $a + b = p$ e $ab = q$ substituindo isto em $(a+b)\lg_q ab$ tem-se $p\lg_q q$ =p, portanto a igualdade é válida. ■

3.5 Logaritmos decimais

Após o encontro entre Napier e Briggs sobre a maravilhosa invenção dos logaritmos, os mesmo chegaram à conclusão de que a base 10 seria a mais útil para a época. Por exemplo o número 183,5 pode ser da forma $1,835.10^{-2}$, ou seja, $k = p.10^n$, sendo $1 \leq p < 10$, daí com esta ultima condição tem-se que $\lg kp$ é um número compreendido entre 0 e 1.

Neste sentido, dado $k = p.10^n$ e utilizando as propriedades dos logaritmos tem-se $\lg k = \lg p + n$, com $\lg p$ representando a mantissa do logaritmo de k e n a característica de $\lg k$. Assim, a mantissa está sempre entre 0 e 1 podendo ser igual a 0, já a característica de $\lg k$ é um número sempre inteiro positivo, negativo ou 0, por exemplo

$$\lg 183,5 = \lg 1,835 + 2$$

Na escrita citada acima se tem que $\lg 183,5$ é a mantissa e o 2 sendo a característica. Para a característica, caso $k > 1$, é igual ao numero de algarismos de sua parte inteira, menos 1. De fato seja $k > 1$ e k com $(r+1)$algarismos na sua parte inteira, então $10^r \leq k < 10^{r+1}$ segue que $\lg 10^r \leq \lg k < \lg 10^{r+1}$,daí $r \leq \lg k - r + 1$, portanto a característica de $\lg k$ é r.

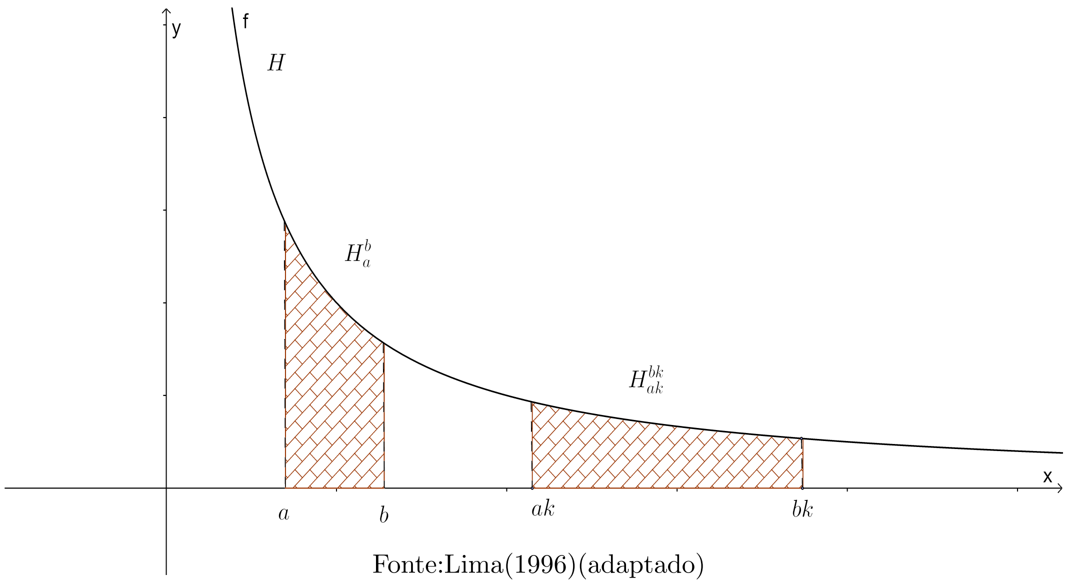
Caso $0 < k < 1$, a característica é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo do número. Ou seja, seja k com r algarismos iguais a zeros antecedendo o primeiro algarismo não nulo, dai $10^{-r} \leq k < 10^{-r+1}$ segue portanto que $\lg 10^{-r} \leq \lg k < \lg 10^{-r+1}$, isto é $-r \leq \lg k < -r + 1$. Portanto para este caso a característica do $\lg k$ é $-r$.

A mantissa é geralmente um número irracional e por isso quando busca-se o logaritmo de um numero k, busca-se uma aproximação. Uma propriedade importante da mantissa é que ela não se altera quando se multiplica por uma potencia de 10 com expoente inteiro, isto é, dados os números 1,234 e 12,34 estes possuem a mesma mantissa pois diferem apenas da posição da virgula. De fato seja w $\in \mathbb{Z}$ então a diferença $\lg(10^w.x)$ - $\lg x$ por meio das propriedade da divisão tem-se que $\lg \frac{10^w x}{x} = \lg 10^w$ com $w \in \mathbb{Z}$

3.6 Logaritmos naturais

Nesta parte do trabalho se fará uma explanação sobre a importância dos logaritmos naturais e sua construção. A definição será dada por meio geométrico em relação a faixa do ramo positivo da hipérbole definida pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \neq 0$, ou seja, dada duas reta verticais $x = a$ e $x = b$, chama-se de faixa H_a^b o conjunto do plano limitado lateralmente por esta retas pelo eixo x e pela função, então, é possível através de uma transformação mostrar que as áreas da hipérbole representadas por H_a^b e H_{ka}^{kb} possuem a mesma área de acordo com o gráfico.

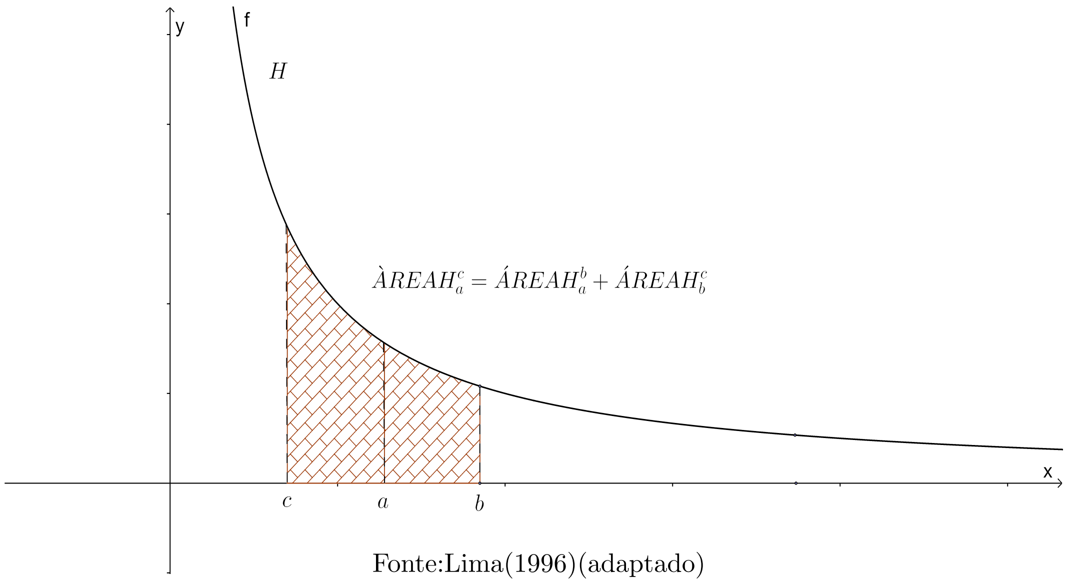
Figura 3.1: Comparação de áreas



Fonte:Lima(1996)(adaptado)

Adotar-se-ia que a área será positiva se $a < b$ para H_a^b e negativa para $b < a$, com área nula quando os pontos de referências forem iguais. Isto é, $\acute{A}REAH_a^b = \acute{a}reaH_a^b$ se $a < b$, $\acute{A}REAH_a^b = -\acute{a}reaH_a^b$ se $b < a$ e $\acute{a}reaH_a^a = 0$. Também pode ser observado em relação a área que se $a < b < c$ tem-se que $\acute{a}reaH_a^b + \acute{a}reaH_b^c = \acute{a}reaH_a^c$, observe o gráfico que retrata esta situação:

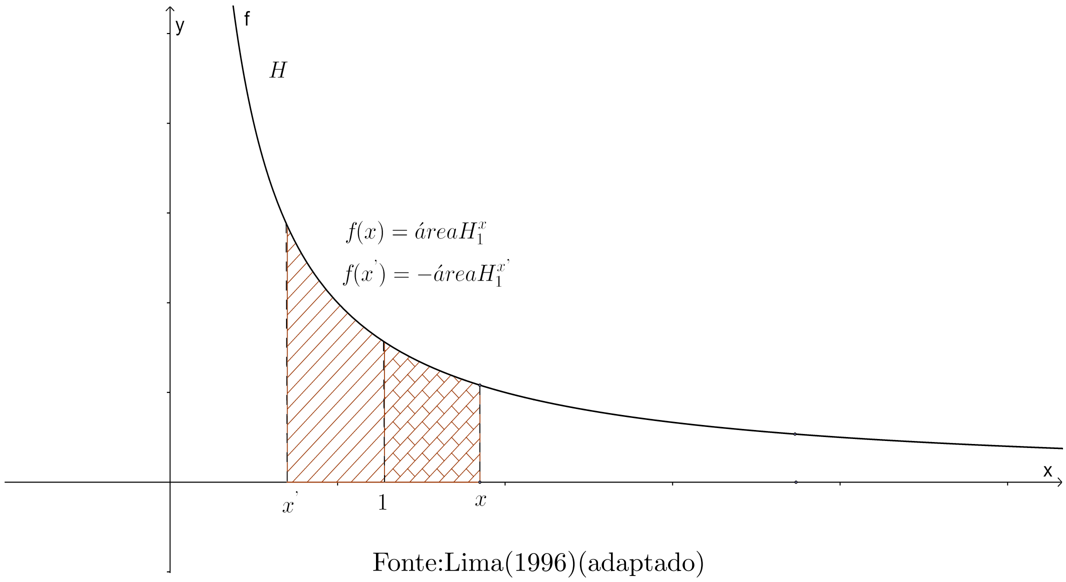
Figura 3.2: Equivalência de áreas



Fonte:Lima(1996)(adaptado)

Aqui tem-se a definição da função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo $f(x) = \acute{A}REAH_1^x$, ou seja,

Figura 3.3: Relação das função com a área



Fonte:Lima(1996)(adaptado)

Daí tem-se que $f(x) = \acute{A}REAH_1^x$ e $f(x) = -\acute{A}REAH_1^{x'}$ daí se define o logaritmo natural da forma:

$$\ln x = \acute{A}REAH_1^x \ \text{ e } \ \ln x' = -\acute{A}REAH_1^{x'}$$

Logo é direto que esta função é crescente, e é positiva se, e somente se, $x > 1$ e é negativa se, e somente se, $0 < x < 1$, também é observável que $f(1) = 0$. Portanto escreve-se $\ln x$ para representar $\lg_e^x$, a expressão $\ln x$ será denominada de logaritmo natural de x. A base dos logaritmos naturais representado pelo número irracional e tem a característica da $\acute{A}REAH_1^e = 1$, este logaritmo é o mais usado em aplicações também denominado de logaritmo neperiano.

Segue alguns exercícios sobre o logaritmo natural:

a) Usando o gráfico com o qual se define geometricamente o logaritmo natural ln, mostre que $\ln(1+x) < x$ para todo $x > 0$, e daí $\ln x < x$.
Solução:

$\ln 1 + x$ é a área de uma faixa de hipérbole, contida no retângulo de altura 1 e base igual ao intervalo $[1; 1+x]$ do eixo das abscissas. Daí $\ln(1+x) < x$, pois x é a área desse retângulo. Como $\ln x$ é uma função crescente de x, tem-se $\ln x < \ln(1+x) < x$.

b) Tomando $\sqrt{x}$ em vez de x nesta última desigualdade, prove que para todo x suficientemente grande o quociente $\frac{\ln x}{x}$ pode tornar-se tão pequeno quanto se queira.
Solução:

Colocando-se $\sqrt{x}$ no lugar de x, tem-se $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$, ou seja, $\frac{1}{2}.\ln x < \sqrt{x}$. Dividindo ambos os membros por x, vem

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Deseja-se ter $\frac{\ln x}{x}$, basta tomar $\frac{2}{\sqrt{x}} < \varepsilon$, isto é, $x > \frac{4}{e^2}$.

(c) Prove ainda que essa conclusão é válida para logaritmos em qualquer base maior que 1.
Solução:

Finalmente, se $\lg x$ significar o logaritmo de x na base a, então tomando $c = \lg e$ teremos $\lg x = c.\ln x$, e daí

$$\frac{\lg x}{x} = c.\frac{\ln x}{x}$$

ou seja, os dois quocientes diferem apenas por uma constante. Então

$$\frac{\lg x}{x} \leq \frac{2c}{\sqrt{x}}$$

que é menor do que ε se $x > \frac{4c^2}{e^2}$.

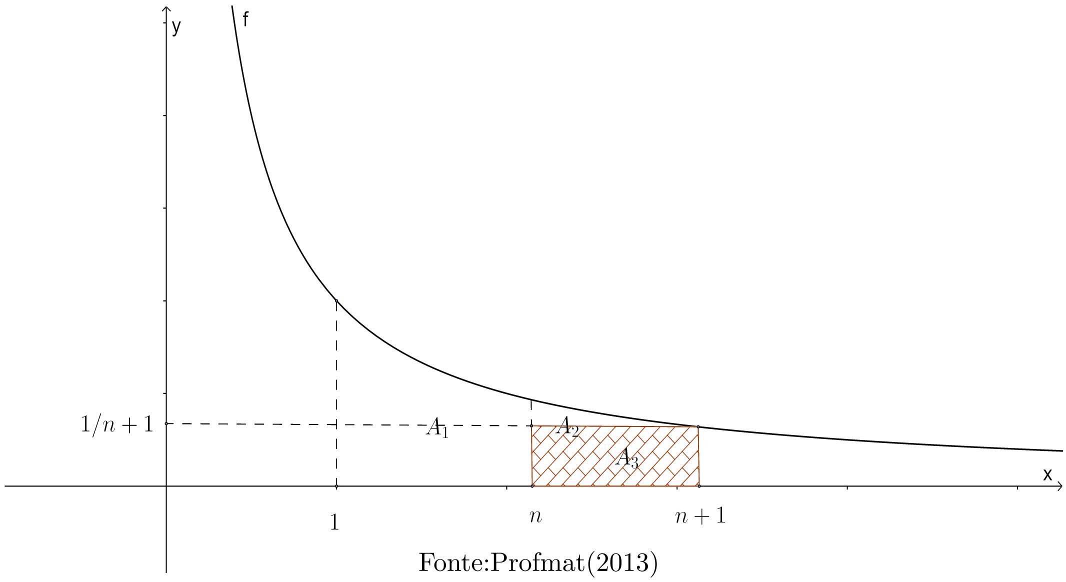
d) Dado n inteiro positivo, use argumentos geométricos para provar que

$$\frac{1}{(n+1)} < \ln(n+1) - \ln n$$

Solução:

Observando o gráfico que representa a situação proposta nesta questão.

Figura 3.4: Análise da função



Fonte:Profmat(2013)

Vê-se que $\ln(n+1) = A_1 + A_2 = \ln n + A_2$, isto é, $A_2 = \ln(n+1) - \ln n$. Por outro lado, $A_2 > A_3 = \frac{1}{(n+1)}$. Logo, $\frac{1}{(n+1)} < \ln(n+1) - \ln n$.

Capítulo 4

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Dado um número real $a(0 < a \neq 1)$, chama-se de função logarítmica com base a a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x do domínio o número $\lg_a x$.

4.1 Caracterização da função logarítmica

A função logarítmica tem a propriedade de transformar produtos em soma isto se tornou o ponto chave da criação dos logaritmos. Segue o teorema de caracterização das funções logarítmicas.
TEOREMA: Seja f: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x)+f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \lg_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração:

Admita-se que a função logarítmica f seja crescente, o caso descrente é análogo, pela definição dada no teorema tem-se que $f(1) = f(1.1) = f(1)+f(1)$ resultando que $f(1) = 0$, suponha-se que exista um $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(a) = 1$. Do fato que f é uma função crescente segue que $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, daí $a > 1$. Seja qualquer $k \in \mathbb{N}$ observe que:

$$f(a^k) = f(a.a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = 1 + 1 + \cdots + 1 = k$$

$$0 = f(1) = f(a^k.a^{(-k)}) = f(a^k) + f(a^{(-k)}) = k + f(a^{(-k)})$$

Sendo assim $f(a^{-k}) = -k$. Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, segue então que

$$m = f(a^m) = f(a^r n) = f((a^r)^n) = n.f(a^r)$$

Do resultado obtido acima tem-se que $f(a^r) = m/n = r$. Suponha-se que se $x \in \mathbb{R}$ é irracional para r e s racionais vem que:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Observe que do último resultado todo número racional r que é menor do que x também é menor do que $f(a^x)$ e nesta mesma ideia todo número s que é maior do que x também é maior do que $f(a^x)$. Portanto $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Analisando o caso geral para uma função $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade inicial $g(xy) = g(x) + g(y)$. Assim como $g(1) = 0$ e $g(2) = b > 0$, seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma nova função da forma $f(x) = \frac{g(x)}{b}$ cumprindo o fato de que $f(2) = 1$, tem-se da primeira parte que $f(x) = \lg_2 x$ para todo $x > 0$, daí vem que

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)}$$

Do fato que $a = 2^{\frac{1}{b}}$ e aplicando lg na base a de ambos os lados da igualdade $a^{g(x)} = x$ obtêm-se $g(x) = \lg_a x$. $\blacksquare$

4.2 Propriedades da função logarítmica

A função logarítmica possui algumas propriedades, entre elas:

(I) Se $0 < a \neq 1$, então as funções $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ expressa por $f(x) = \lg_a x$ e também $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ expressa por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração:

De fato, basta mostrar que $(fog)(x) = (gof)(x)$.

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) = \lg_a g(x) = \lg_a^{a^x} = x \\ (gof)(x) &= g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\lg_a x} = x \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

(II) A função logarítmica $f(x) = \lg_a x$ é crescente se , e somente se, $a > 1$.

Demonstração:

Inicialmente vamos mostra que para $a > 1$ se $x > x^{'}$ então $f(x) > f(x^{'})$. Quaisquer que sejam x e y positivos com $x > x^{'}$ pela definição de logaritmos tem-se que vale $a^{\lg_a x} > a^{\lg_a x^{'}}$ e pela definição de inequação exponencial tem-se que $x > x^{'}$. Reciprocamente dado que $x > x^{'}$ implica em $f(x) > f(x^{'})$ então segue que $a > 1$. Dado $\lg_a x = y$ e pela definição $x = a^y$ e $x^{'} = a^{y^{'}}$ como $y > y^{'}$ isto implica que $a^y > a^{y^{'}}$. Como a função é crescente segue que $a > 1$. Para a função decrescente o caso é análogo. ■

(III) função logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva.

Demonstração:

Tomando uma função f com $a > 1$ e $x < x^{'}$, sabe-se que a função é crescente se $f(x) < f(x^{'})$ e para $1 < a < 0$ a função é decrescente se $f(x) > f(x^{'})$. Logo para qualquer $x \neq x^{'}$ tem-se que $f(x) \neq f(x^{'})$. ■

(IV) Os números maiores que 1 possuem logaritmos positivos e os números x tal que $0 < x < 1$ possuem logaritmos negativos.

Demonstração:

Sendo f uma função logarítmica crescente sendo $0 < x < 1 < y$ resulta a desigualdade $f(x) < f(1) < f(y)$, resultando que $f(x) < 0 < f(y)$. ■

(V) Para todo $x > 0$, tem-se $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

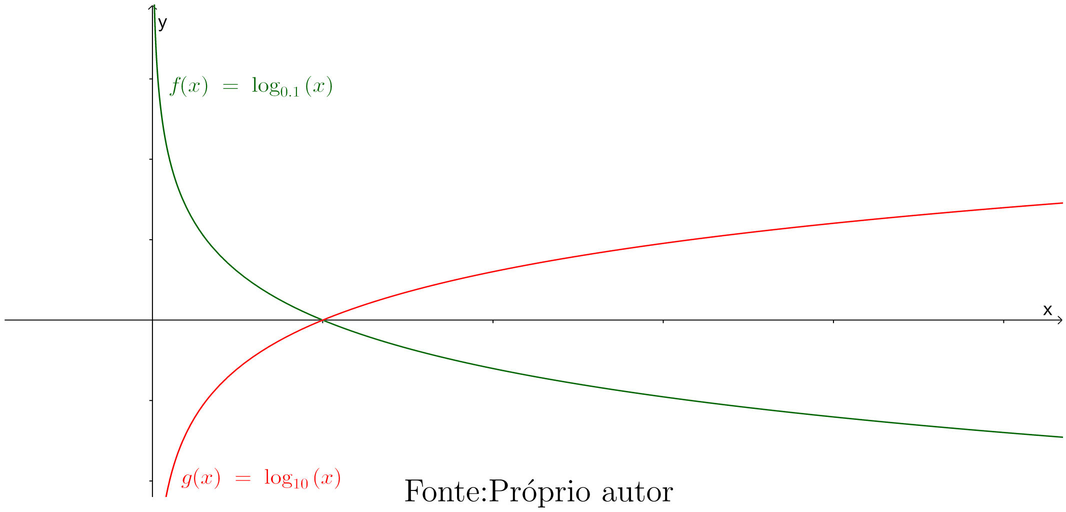
Demonstração:

Observe que $x.(\frac{1}{x}) = 1$, da definição da função logarítmica tem-se que vale $f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0$, onde $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$. ■

4.3 Gráfico de uma função logarítmica

Seja a função $h(x) = \lg_a x$ com $0 < a \neq 1$, verifique nos gráficos a seguir que estão todos a direita, o eixo x é interceptado na abscissa 1, se $a > 1$ então a função é crescente no caso de $g(x)$ e se $0 < a < 1$ então a função é decrescente no caso de $f(x) = \lg_{\frac{1}{10}} x$.

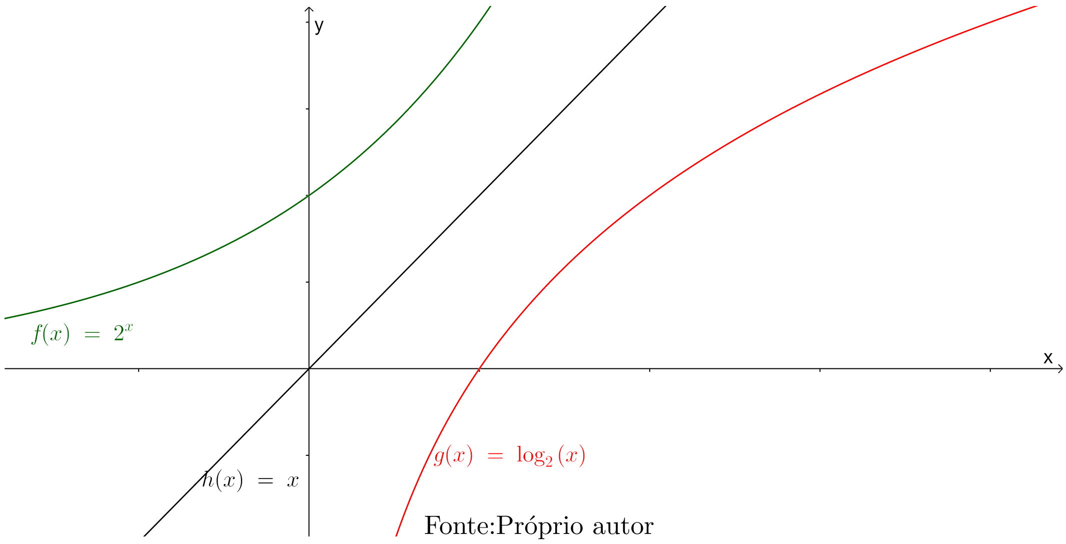
Figura 4.1: Comparando função crescente e decrescente



Fonte:Próprio autor

Observe que os gráficos $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \lg_2 x$ são simétricos em relação à reta $h : y = x$ que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

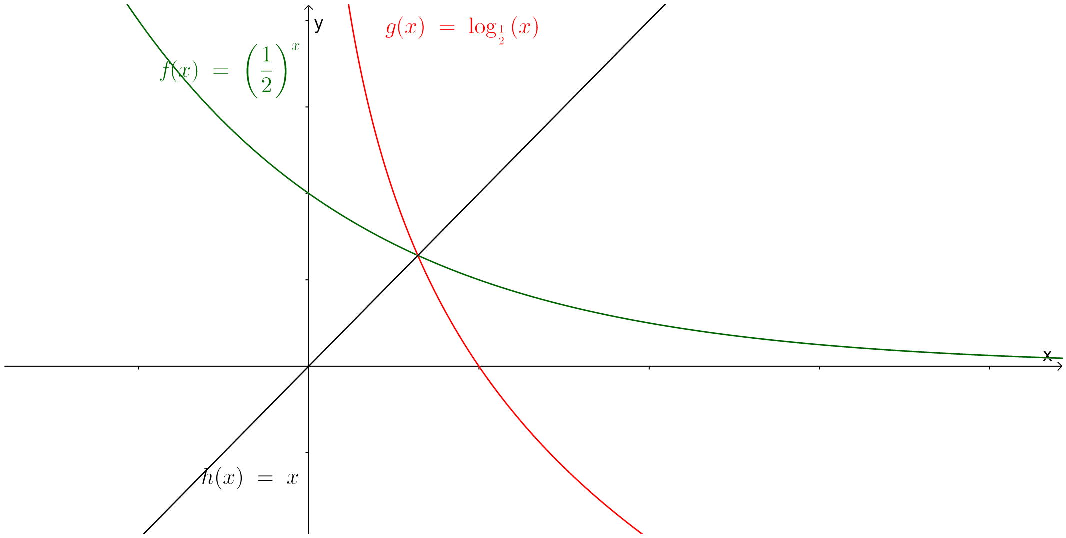
Figura 4.2: Reta $y = x$ para a função logaritmo e exponencial de mesma base com $a > 1$



Fonte:Próprio autor

A mesma ideia só que para funções decrescentes considerando $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ e $g(x) = \lg_{\frac{1}{2}} x$ e a reta $h : y = x$, tem-se:

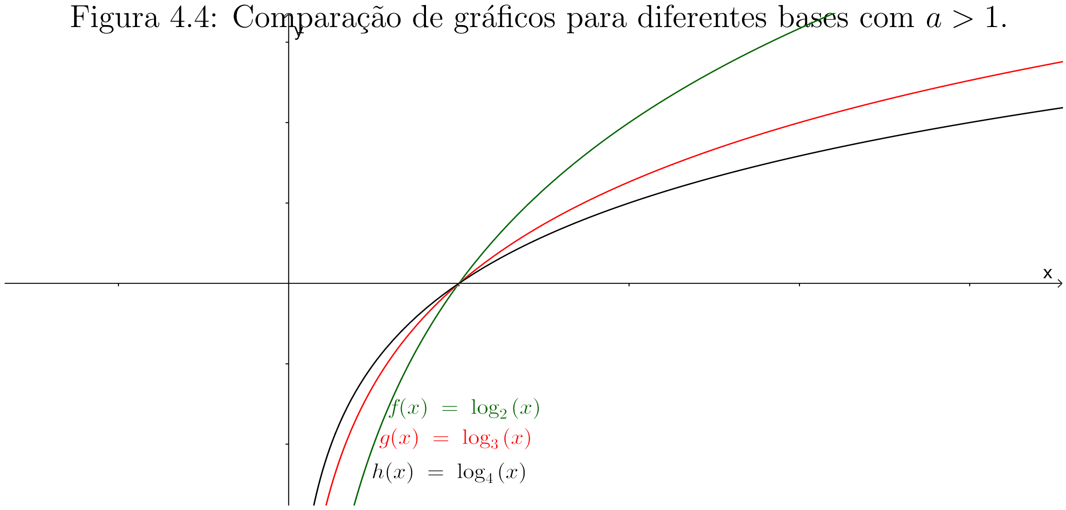
Figura 4.3: Função $y = x$ para a função logaritmo e exponencial de mesma base com $0 < a < 1$



Fonte:Próprio autor

Observe o comportamento do gráfico na medida em que a base aumenta para as funções $q(x) = \lg_2 x$, $r(x) = \lg_3 x$ e $s(x) = \lg_4 x$.

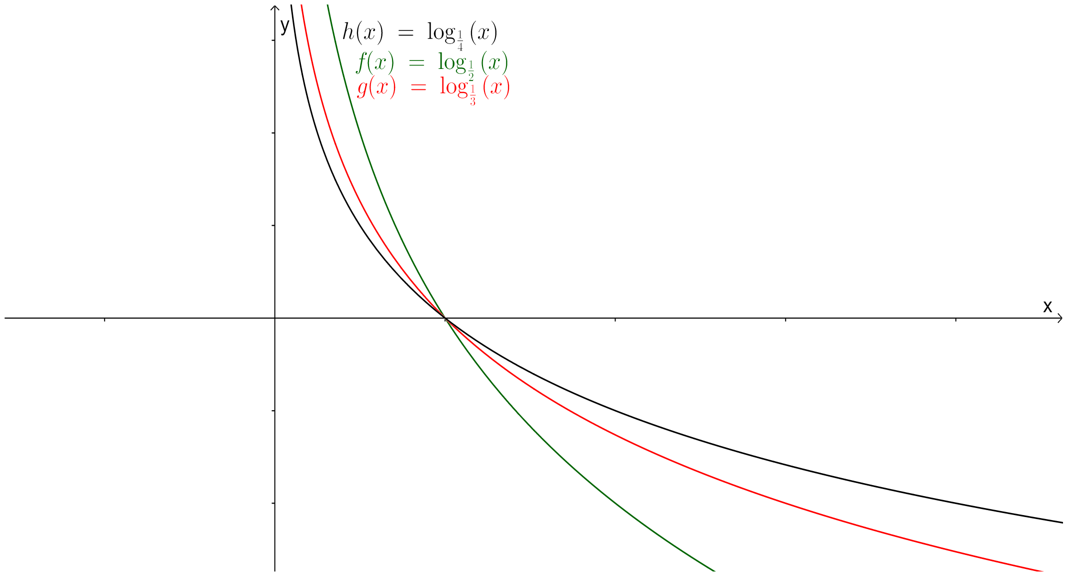
Figura 4.4: Comparação de gráficos para diferentes bases com $a > 1$.



Fonte:Próprio autor

Agora para as funções decrescente $q(x) = lg_{\frac{1}{2}}x$,$r(x) = \lg_{\frac{1}{3}} x$ e $s(x) = \lg_{\frac{1}{4}} x$.

Figura 4.5: Comparação de gráficos para diferentes bases com $0 < a < 1$.



Fonte:Próprio autor

Em todos os gráficos representados adota-se a sua expressão básica para as devidas conclusões.

Capítulo 5

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

No âmbito das aplicações envolvendo os logarítmicos as equações e inequações possuem uma grande importância na resolução das situações problemas, mas é relevante analisar suas formas e regras especificas enquanto as imagens e os valores para $a > 1$ e $0 < a < 1$.

A seguir são apresentadas as ideias de equação e inequação com uma visão logarítmica.

5.1 Equações logarítmica

As equações logarítmicas podem ser divididas quanto à forma de resolução, sendo as seguintes:

5.1.1 Equações logarítmicas da forma $\lg_a f(x) = \lg_a g(x)$

De acordo com a definição já dada de logaritmo e considerando o tipo da equação proposta se tem $f(x) = g(x) > 0$. Observe que se $\lg_2(6x - 10) = \lg_2 8$, então $6x - 10 = 8$ e portanto $x = 3$, isto é, $S = 3$.

Para $\lg_2(-x^2 - 6x - 14) = \lg_2(-2x^2 + 2x - 26)$, usando a propriedade como já foi mencionado tem-se após simplificações que $x^2 - 8x + 12 = 0$, como é uma equação do segundo grau, sua resolução fornece os valores $x = 6$ ou $x = 2$, observe que os valores de x encontrados quando substituídos nas expressões iniciais resultam em um valor negativo, logo este x não é valido para esta equação e portanto $S = \emptyset$. Deve-se sempre se atentar as condições de existência do logaritmo, pois nem todo x encontrado será solução da equação, portanto se deve fazer uma substituição dos valores obtidos para verificar se realmente são válidos para a equação dada.

5.1.2 Equações logarítmicas da forma $\lg_a f(x) = \alpha$

Aplicando a definição de logaritmo tem-se que $f(x) = a^\alpha$, neste caso não há necessidade de verificar a condição de existência. Para $\lg_3(9x + 18) = 5$, aplicando a ideia de resolução segue que $9x + 18 = 3^5$, e portanto $x = 7$, ou seja $S = \{7\}$. Para $\lg_4(x^2 - 6x + 24) = 2$, observe que $x^2 - 6x + 8 = 0$, resultando em $x = 4$ ou $x = 2$. Portanto a solução da equação é da forma $S = \{4, 2\}$.

5.1.3 Substituição de uma expressão logarítmica por uma incógnita auxiliar na resolução.

A substituição é de grande importância em equações que possuem uma certa dificuldade algébrica na organização dos logaritmos, e é muito utilizada, imagine uma expressão da forma $\lg_3^2 x - \lg_3 x = 2$, fazendo a substituição $\lg_2 x = y$, tem-se que $y^2 - y - 2 = 0$, que é uma equação do segundo com incógnita y mais fácil de resolver, determinando as raízes desta equação segue que $y = 2$ ou $y = 1$. Observe que devido a substituição realizada anteriormente deve-se desfazer esta troca de variável, assim $\lg_3 x = 2$ implicando em $x = 9$ e $\lg_3 x = 1$ resultando em $x = 3$. Neste sentido este processo facilitou muito a resolução da equação inicial, e portanto o conjunto solução da equação logarítmica é $S = \{3, 9\}$.

5.2 Inequações logarítmicas

Assim como nas equações as inequações logarítmicas possuem grande aplicabilidade nas situações problemas, em processos de modelagem determinando valores máximos e mínimos permitidos para que certos experimentos ou estudos possam ser concretizados com sucesso, ou válidos para determinadas amplitudes, tudo isso a partir da noção de desigualdade, assim existem algumas formas de resolução de acordo como se apresentam, seguem essas propriedades:

5.2.1 Inequações logarítmicas da forma $\lg_a f(x) > \lg_a g(x)$.

No caso das inequações deve-se observar que a função logarítmica é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$. Para $a > 1$, não há alteração na desigualdade dos logaritmos, isto é, $\lg_a f(x) > \lg_a g(x)$ se , e somente se $0 > f(x) > g(x)$. Para o caso em que a função é decrescente com $0 < a < 1$ e $\lg_a f(x) > \lg_a g(x)$ se , e somente se, $0 < \lg_a f(x) < \lg_a g(x)$. Observe que para a expressão:

$$\lg_3 4x - 3 < \lg_3 5$$

A base do logaritmo é maior que 1, logo a desigualdade não se altera, e portanto é válido que $0 < 4x - 3 < 5$, isto é, $\frac{3}{4} < x < 2$. Neste sentido o conjunto solução S é da forma $S = \{x \in \mathbb{R} | \frac{3}{4} < x < 2\}$. Agora observe o seguinte exemplo:

$$\lg_{\frac{1}{3}} (x^2 - 2x - 6) \leq \lg_{\frac{1}{3}} 2$$

A base neste caso está entre 0 e 1 e portanto a desigualdade mudará de sentido haja vista que a função ela é decrescente, assim $x^2 - 2x - 6 \geq 2$ resulta na inequação $x^2 - 2x - 8 \geq 0$, resolvendo esta desigualdade obtém-se $x \leq -2$ ou $x \geq 4$. Portanto o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$.

5.2.2 Inequações logarítmicas do tipo $\lg_a f(x) > k$ ou $\lg_a f(x) < k$.

Para este tipo de inequação se $\lg_a f(x) > k$ e $a > 1$ então $f(x) > a^k$ caso a esteja entre 0 e 1 tem-se $0 < f(x) < a^k$. Por exemplo, $\lg_2 (2x + 6) < 4$ daí aplicando a ideia acima segue que $0 < 2x + 6 < 16$ esta desigualdade resulta em $-3 < x < 5$, logo o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 5\}$. Se fosse o exemplo $\lg_{\frac{1}{3}} (7x + 11) > -4$ então tem-se $0 < 7x + 11 < 81$ que consequentemente resultariam em $\frac{-11}{7} < x < 10$. Como já foi comentado é sempre importante se atentar em relação a base do logaritmo, pois dependendo do tipo de base deve-se ter uma interpretação diferente.

5.2.3 Inequações logarítmicas com resolução utilizando incógnitas auxiliares.

Como já foi idealizado para as equações o procedimento é análogo apenas usando os métodos para a resolução de inequações. Seja o exemplo para $0 < a < 1$.

$$\frac{1 + \lg_a^2 x}{1 + \lg_a x} > 1$$

Observe que pode ser feito a substituição de incógnita fazendo $log_a x = y$, daí a nova inequação é

$$\frac{1 + y^2}{1 + y} > 1$$

Se $y > 0$ então $1 + y^2 > 1 + y$, isto é $y^2 - y > 0$ e isto vale para $y < 0$ e $y > 1$. Retornando para a variável x obtêm-se $\lg_a x > 1$ daí $x < a$ e $\lg_a x < 0$ resultando em $x > 1$ e, portanto das duas $1 < x < a$. Por outro lado se $y < 0$ então $1 + y^2 > 1 - y$, isto é $y^2 + y > 0$ resolvendo esta equação tem-se $y < -1$ e $y > 0$, retornando para a incógnita inicial, e sabendo que $0 < a < 1$ então segue que a inequação $\lg_a x < -1$ tem valor a igual a $x > \frac{1}{a}$ para $\lg_a x > 0$ tem-se que $x < 1$, das duas soluções $\frac{1}{a} < x < 1$.

Dos dois casos para $y > 0$ ou $y < 0$ surge o conjunto solução da forma:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < a \text{ ou } 1/a < x < 1\}$$

Capítulo 6

APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS EM DIVERSAS ÁREAS

Nesta parte trabalho será proposto varias aplicações antecedidas pela explicação básica da modelagem respectiva buscando inicialmente entender como surge e posteriormente entender sua aplicação no cotidiano das pessoas.

6.1 Juros compostos

Dentre várias operações que a matemática financeira dispõe, pode-se citar a operação de empréstimo. Uma lógica é que a existência de um capital C, emprestado por certo período de tempo n faz com que este retorne com um acréscimo J decorrente do empréstimo. Este acréscimo é chamado de juros, o resultante de $C + J$ é denominado montante.

È possível perceber que ao passar do tempo o capital cresce, portanto, existe uma razão pelo qual o mesmo é multiplicado. Ou seja, a taxa de crescimento pode ser representada como $i = J/C$, que nada mais é do que a taxa de juros.
Teorema: No regime de juros compostos de taxa i, um capital C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1 + i)^n$.

Demonstração:

Basta observar que o capital cresce a uma taxa constante i e, portanto, forma uma progressão geométrica de razão $1 + i$.

Seja C_0 o capital inicial observa-se que:

$$C_1 = C_0(1+i)$$

$$C_2 = C_1(1+i)$$

$$C_3 = C_2(1+i)$$

....

$$C_n = C_{(n-1)}(1+i)$$

Fazendo a simplificação dos termos comuns de ambos os lados da igualdade tem-se então: $C_n = C_0(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)\ldots(1+i)$, sendo que $(1+i)$ aparecendo n vezes, logo:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Basta observar que o capital cresce a uma taxa constante i e, portanto, forma uma progressão geométrica de razão $1+i$. $\blacksquare$

Aplicação: Carlos é um pequeno empreendedor, para alavancar suas vendas ele pretende investir em sua loja para que possa melhor atender seus clientes e ter um capital em caixa para propiciar melhores condições de pagamento, neste sentido observa que um banco oferece um empréstimo de R\$25.000,00 a taxa de 3% a.m. Sabe-se que de acordo com o orçamento preestabelecido pelo proprietário a operação financeira não poderá gerar mais de R\$35.000,00 de despesa, assim nestas condições e supondo o valor da operação em exatamente R\$35.000,00. Qual será o tempo que Carlos deve pagar para que a operação financeira esteja de acordo com o planejamento prévio?

Solução:

De acordo com a situação proposta, observe que o capital pretendido pela empresa é de R\$25.000,00. Como a taxa é de 3% a.m e o valor almejado pelo pagamento é de R\$35.000,00, tem-se a seguinte situação inicial:

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 35.000 &= 25.000(1+0,03)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
35000/25000 &= (1,03)^t \\
1,4 &= (1,03)^t
\end{aligned}$$

Pela última igualdade o meio mais indicado será a utilização dos logaritmos para determinação do tempo, assim:

$$lg(1,4) = lg(1,03)^t$$

Como lg $(1,4) = 0,1461$ e lg $(1,03) = 0,0128$, então:

$$\begin{aligned}
0,1461 &= t.lg(1,03) \\
0,1461 &= t.(0,0128) \\
t &= 0,1461/0,0128 \\
t &= 11,41
\end{aligned}$$

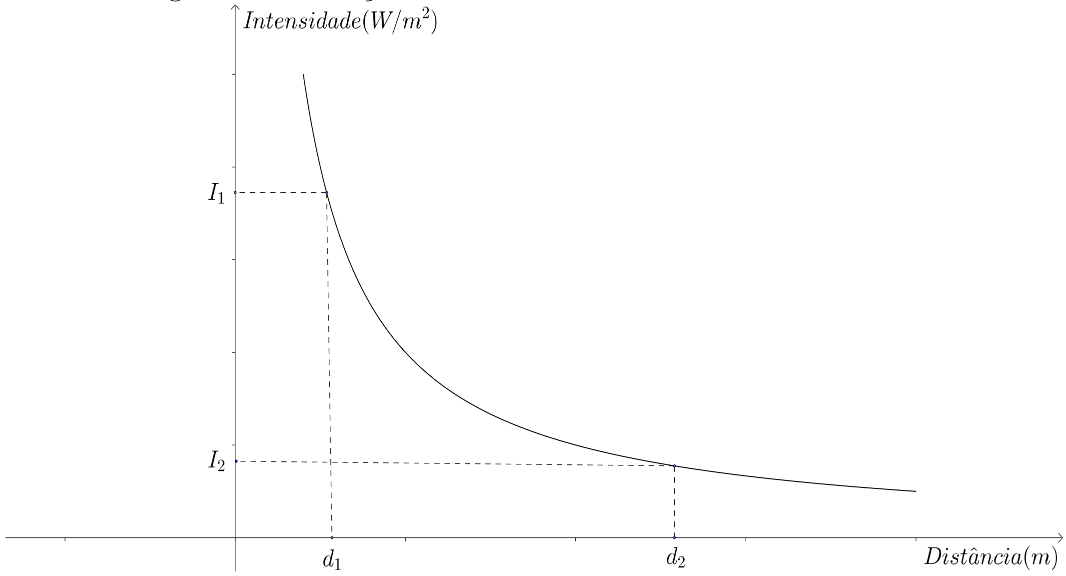
Tem-se que Carlos para adequar o tempo ao seu planejamento a operação financeira não deve passar do prazo de 11,41 meses.

6.2 Nível de intensidade sonora

O que é intensidade sonora? Na prática é o que em muitas ocasiões dizem, aumenta o volume ou abaixa o volume, mas fisicamente é definida com uma qualidade que permite distinguir um som fraco de um som forte, a intensidade sonora é inversa ao quadrado da distância, ou seja, a intensidade depende da distancia entre o ouvinte e a fonte sonora, imagine a seguinte situação: Você está em uma festa, e o som está tocando, imagine este som se afastando de você, o volume(intensidade) irá diminuindo a medida que se afasta. Já o nível de intensidade sonora vai quantificar o quando em decibéis esta onda sonora recebida por você equivale.

A inversibilidade proporcional entre a distância e a intensidade sonora pode ser observado pelo gráfico seguinte:

Figura 6.1: Relação entre a intensidade sonora e distância



Fonte:Próprio autor

A definição utilizada pela matemática para modelar tal situação é baseada em conceitos fisiológicos médios, admitindo-se a intensidade mínima recebida pelo ser humano é equivalente a $I_0 = 1,0.10^{-12}W/m^2$ para a frequência de $1000Hz$ e que o nível de intensidade sonora varia em escala logarítmica de base 10.

Neste sentido, os sons de intensidade 10^k vezes maior que a intensidade sonora mínima é percebida com o nível de intensidade sonora k vezes maior, entre outras palavras, uma onda sonora com 10^5 vezes maior que a intensidade mínima é percebido em média como se mostrasse com intensidade equivalente a 5 vezes maior.

Considerando $I_0 = 1,0.10^{-12}W/m^2$ e I como sendo a intensidade sonora recebida pelo ouvinte tem-se a seguinte definição para o nível de intensidade sonora:

$$N = 10.\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Demonstração:

Inicialmente a intensidade sonora é definida pela razão entre a potência recebida e a unidade de área, daí

$$I = \frac{P}{A} \tag{6.1}$$

Por outro lado é sabido que a potência sonora é definida como:

$$P = \frac{E}{\Delta t} \tag{6.2}$$

Onde E é a energia e Δt é o tempo, fazendo a substituição de (6.2) em (6.1), obtêm-se:

$$I = \frac{(E/\Delta t)}{A} \Leftrightarrow I = \frac{E}{A.\Delta t}$$

Como foi mencionado o limiar da audibilidade humana, ou seja, o menor valor para quantificar a intensidade sonora é definida para $I_0 = 1,0.10^{-12} W/m^2$, e sua máxima(limiar de dor) para $I = 1,0 W/m^2$.

Como na medida em que o observador se afasta da fonte sonora sua intensidade vai diminuindo em escala logarítmica, sendo assim:

$$N = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

A unidade utilizada para representar o nível de intensidade sonora é o Bel(B)[4] , porém devido o seu uso não ser frequente no cotidiano das pessoas, é usado um submúltiplo chamado de decibel(dB), a relação entre as medidas é $1B = 10dB$. Assim, tem-se:

$$N = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) B = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) 10dB = 10 \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) dB \qquad \blacksquare$$

Segue uma aplicação relacionada ao tema de intensidade sonora com o objetivo a variação entre duas intensidades.

Aplicação 1: Considere dois sons de intensidade I_1 e I_2 e níveis sonoros N_1 e N_2, respectivamente. Determine $\Delta N = N_2 - N_1$, em decibel.

Solução:

De acordo com a expressão demonstrada acima, tem-se que os níveis de intensidade N_1 e N_2 são:

$$N_1 = 10 \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ e } N_2 = 10 \lg\left(\frac{I_2}{I_0}\right)$$

Daí vem que:

[4] O Bel tem seu nome em homenagem ao físico Alexander Graham Bell.

$$\Delta N = N_2 - N_1 = 10\lg\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\lg\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - \lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$$

$$\Delta N = N_2 - N_1 = 10\lg\frac{\left(\frac{I_2}{I_0}\right)}{\left(\frac{I_1}{I_0}\right)} = 10\lg\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

Aplicação 2: Um determinado aparelho de som emite ondas de $I_0 = 1,0.10^{-7}W/m^2$, sabendo que a referência da audibilidade humana é de $I_0 = 1,0.10^{-12}W/m^2$, determine o nível intensidade sonora.

Solução:

De acordo com os dados da questão tem-se a o seguinte:

$$\begin{aligned} N &= 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\lg\left(\frac{1,0.10^{-7}}{1,0.10^{-12}}\right) = 10\lg\,(10)^5 \\ &= 5.10.\lg 10 = 5.10.1 = 50dB \end{aligned}$$

Portanto o nível de intensidade do aparelho de som será de $50dB$. De acordo com a tabela a seguir de níveis de intensidade da aplicação 2 pode ser comparado com a de um ambiente de escritório, ou um carro silencioso.

Sobre este tema é interessante observar que a percepção do sistema auditivo é aproximadamente logarítmica e não linear, para que uma pessoa possa realmente perceber uma certa diferença na intensidade sonora é necessário que o nível aumente cerca de $1dB$. Isto equivale a um aumento de 26% na potência sonora, neste sentido se uma pessoa que tem um aparelho de som de $100W$ e pretende comprar um outro que dobre a sua potencia deverá comprar um de $1000W$ e não um de $200W$ haja vista como comentado anteriormente a percepção auditiva obedece uma função logarítmica.

Outra fator importante neste contexto do nível de intensidade sonora é o tempo em que uma pessoa pode ficar exposta a uma fonte sonora, por exemplo, uma pessoa que está exposta ao alarme de uma viatura poderá ficar no máximo por 4 horas. De acordo com a tabela este alarme equivale a $90dB$, e portanto com o estudo não seria prejudicial analisando o limite de $120dB$, porém este tempo de contato torna esta intensidade de $90dB$ prejudicial ao aparelho auditivo humano.

Segue após estas aplicações e observações uma tabela de alguns níveis de intensidade sonora, sendo que a partir de $120dB$ já é considerado o limiar da sensação dolorosa:

Tabela 6.1: Níveis de intensidade sonora

Quadro 1- Níveis de intensidade sonora	
Situação	Medida em decibels
Foguete saturno e grandes explosões	200
Jato	150
Decolagem de um avião	140
Britadeira e motor de um avião na proximidade dos reatores	130
Limiar da dor, passagem de um F1 ouvido da tribuna, concerto de rock e trovão próximo	120
Sirene ou concerto de rock e martelo pneumático	110
Cortador de grama e passagem de um comboio em uma estação	100
Alarme de uma viatura e conversação em uma festa barulhenta e rua barulhenta.	90
Chegada de um trem de passageiros à estação.	80
Aspirador de pó, restaurante barulhento e rua animada.	70
Conversação normal, grande armazém e janela sobre a rua.	60
Carro silencioso e escritório.	50
Conversação em ambiente silencioso, por exemplo a biblioteca.	45
Mosquito e sala de estar calma.	40
Ambiente para boas condições para dormir.	35
Quarto e respiração ofegante.	30
Murmúrio no deserto.	20
Vento em folhas de árvore, câmara insonorizada e respiração normal.	10
Limiar da audição.	0

Fonte: www.areaseg.com/acustica(adaptado)

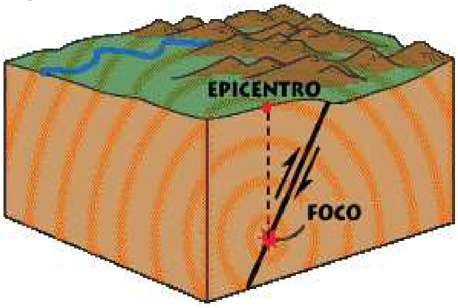
O importante é sempre ter precaução quando estiver exposto a fonte sonoras, ouvir música através do fone de ouvido sempre na intensidade recomendada.

6.3 Escala Richter

A sismologia é a ciência que estuda as vibrações ou ondas sísmicas que ocorrem na terra, sejam elas naturais ou decorrentes de grandes explosões, perfuração de poços petrolíferos entre outros. O terremoto é considerado um fenômeno natural que ocorre devido a movimentação da crosta terrestre, esta movimentação é geralmente causada pelo choque entre duas placas tectônicas, esse choquem liberam uma grande quantidade de energia e ocasionam tremores na terra.

As ondas sísmicas causadas pelo choque entre as placas vão para todas as direções tendo como ponto de partida o foco ou também chamado de hipocentro, já o ponto acima do hipocentro na superfície é denominado de epicentro. Partindo do epicentro o solo tende a se movimentar de forma cíclica , caso este ponto esteja abaixo do mar então ele ocasionará um maremoto ou tsunami.

Figura 6.2: Esquema do terremoto



Fonte:www.windows2universe.org/earth/geology

As ondas sísmicas são medidas por um aparelho bastante sensível denominado de sismógrafo, esta tecnologia surge em 1935 através dos estudos de Charles Francis Richter e Beno Gutemberg tornando assim possível medir com precisão a magnitude e determinar o epicentro de um tremor.

A escala de Richter é logarítmica seu objetivo é quantificar a magnitude dos terremotos tendo como base a amplitude das ondas sísmicas geradas que se propagam a partir do epicentro, esta escala é construída a partir da utilização dos logaritmos decimais.

Vale citar alguns terremotos que ocorreram, o maior terremoto da história aconteceu no Chile em 1960 com magnitude igual a 9.5 na escala Richter, também gerando maremoto com ondas de até 10 metros, outro também de grande magnitude ocorreu no Alaska nos Estados Unidos no ano de 1964 com magnitude de 9.2 causando tsunamis. Em Sumatra na Indonésia no ano de 2004 um terremoto de magnitude 9.1 causou um tsunami que matou cerca de 230 mil pessoas em 14 países da região. Outro também de grande impacto foi o ocorrido no Japão magnitude de 9.0 no ano de 2011 este terremoto, teve o epicentro no oceano Pacífico, a uma distância de a 400 km da capital do Japão a cidade de Tóquio e a uma profundidade de 32 km, gerando ondas enormes alcançado até 10 metros, estas ondas ao chegarem na costa atingiram uma velocidade de 800 km/h . Estes foram alguns que ocorreram mais de acordo com a história existiram outros de iguais importâncias.

A magnitude de um terremoto equivale ao logaritmo da medida das amplitudes das ondas sísmicas com distância de $100km$ do epicentro. Observe os efeitos dos terremotos dependendo do seu valor na escala de Richter na seguinte tabela:

Tabela 6.2: Danos ocasionados pelos terremotos de acordo com a escala de Richter

Escala	Efeitos
0 a 1,9	Tremor detectado apenas por um sismógrafo.
2 a 2,9	Oscilações de objetos suspensos.
3 a 3,9	Vibração parecida com a da passagem de um caminhão.
4 a 4,9	Vidros quebrados e queda de pequenos objetos
5 a 5,9	Móveis são deslocados e ocorre fendas nas paredes.
6 a 6,9	Danos nas construções e destruição das casas mais frágeis.
7 a 7,9	Danos maiores, fissuras no subsolo e canos que se rompem.
8 a 8,9	Pontes destruídas e maioria das construções desaba.
9 ou mais	Destruição quase total de construções e tremor de terra visível ao olho nu.

Fonte:http://ositiodaciencia.blogspot.com.br/2010/06/escalas-sismicas.html(adaptado)

Logo sendo k a amplitude máxima medida no sismógrafo e k_0 uma amplitude de referência, então a magnitude de um terremoto é dada por:

$$M = \lg k - \lg k_0 \tag{6.3}$$

Caso se queira comparar duas magnitudes M_1 e M_2 de dois terremotos em função da amplitude das ondas sísmicas geradas de acordo com a escala de Richter tendo para isto $M_1 = \lg k_1 - \lg k_0$ e $M_2 = \lg k_2 - \lg k_0$. Daí

$$M_1 - M_2 = (\lg k_1 - \lg k_0) - (\lg k_2 - \lg k_0)$$
$$M_1 - M_2 = (\lg k_1 - \lg k_2) = \lg\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$$

Aplicação: Um terremoto é medido com uma amplitude de 456 vezes maior que a referencia utilizada pelo sismógrafo que é k_0, assim, qual é a magnitude deste terremoto utilizando a escala de Richter?

Solução:

Observe que tomando $k = 456k_0$ e substituindo na expressão (6.3), tem-se que:

$M = (\lg k - \lg k_0) = \lg \frac{k}{k_0} = \lg \frac{456k_0}{k_0} = \lg 456 = 2,65$

Portanto a magnitude deste terremoto na escala Richter é de 2,65.

Nas suas primeiras investigações Richter utilizou para verificar a magnitude dos terremotos a expressão $M = \lg A + 3.\lg(8.\Delta t) - 2,92$ onde M é a magnitude do terremoto, A é a amplitude da onda e Δt é a variação temporal entre as ondas longitudinal e transversal, após varias revisões Richter e Gutemberg chegaram a uma relação que envolvia a energia liberada que é dada por:

$$\lg E_s = 1,5M_s + 11,8 \tag{6.4}$$

onde E_s é a energia liberada e M_s magnitude da onda, por outro lado sabe-se que a energia liberada pode ser expressa por

$$E_s = \frac{1}{(2.10^4)} M_0 \tag{6.5}$$

Também a intensidade de um terremoto de acordo com os estudos de Richter pode ser expressa da forma $I = \frac{2}{3} \lg \frac{E}{E_0}$ onde $E_0 = 7.10^{-3} kWh$.

Em 1979 surge a escala de magnitude momento proposta por Thomas C. Hanks e Hiroo Kanamori ambos sismólogos com o intuito de substituir a escala de Richter e corrigir algumas invariâncias mas mantendo a ordem de magnitude. Ao substituir a equação (6.5) em (6.4), obtêm-se a escala de magnitude momento que é dada por $M_s = \frac{2}{3} \lg M_0 - 10,7$.

As escalas de Richter e a de magnitude momento medem a intensidade absoluta do terremoto. Quando se analisa os danos estruturais por exemplo na zona urbana de uma cidade foi apresentada pelo sismólogo Mercalli sua escala que não se baseia em registros sismográficos, mas sim em efeitos ou danos causados nas estruturas e o que foi percebido pelas pessoas.

Esta escala tem uma relevância subjetiva pois se um terremoto apresentou 5,5 graus na escala Richter, se este aconteceu em um deserto terá uma classificação diferente caso ocorresse em uma cidade na interpretação de Mercalli, pois como já foi comentado o que importa são os danos. Então neste caso o terremoto no deserto receberia uma classificação menor em relação a cidade, pois o estragos no primeiro seria bem menor.

Sua escala é dividida em 12 níveis analisando este critérios sensoriais, observe de acordo com o quadro a seguir:

Tabela 6.3: Escala de Mercalli e seus efeitos

Escala	Efeitos
I	Vibrações são registradas por instrumentos.
II	Pessoas paradas nos andares altos sente o tremor.
III	As casas tremem e objetos pendurados balançam.
IV	Pratos vibram, carros balançam e arvores tremem.
V	Portas se abrem, líquidos derramam dos copos e pessoas que dormiam acordam.
VI	Pessoas andam com a instabilidade, janelas partem-se e quadros caem da parede.
VII	È difícil ficar em pé, sinos grandes tocam e tijolos caem.
VIII	A condução de automóvel é afetada e fendas no solo molhado.
IX	Pânico geral e danos em fundação.
X	A maioria dos edifícios destruídos e água lançada para fora dos rios.
XI	Trilhos ferroviários dobram-se, fendas aparecem no solo e rochas caem.
XII	Destruição total, cursos de rios alterados e visão distorcida.

Fonte:http://ositiodaciencia.blogspot.com.br/2010/06/escalas-sismicas.html(adaptado)

6.4 pH

O pH, ou potencial hidrogeniônico possibilita a classificação de uma solução aquosa em ácida, neutra ou básica por meio da concentração de íons de hidrogênio em mol/L. Os valores do pH variam entre 0 e 14, se $0 \leq pH < 7$ então a solução é considerada ácida, caso $pH = 7$ então é neutra e se $7 < pH \leq 14$ a solução será uma base.

Dentro deste tema do equilíbrio iônico da água, além da existência dos cátions hidrônio também existe a presença de íons hidróxido ($[OH^-]$), neste sentido o pH de uma solução leva em consideração a concentração de hidrônios(cátions) e os hidróxidos(ânions). Daí tem-se que uma solução que apresenta hidrônios é acida enquanto a que apresenta hidróxidos é básica. Em termos de classificação enquanto aos hidrônios e hidróxidos, uma solução acida é quando tem mais hidrônios do que hidróxidos, é neutra quando estas quantidades são iguais e é básica quando a quantidade de hidrônios é menor do que as de hidróxidos.

Observe o quadro com o pH de algumas soluções:

Tabela 6.4: pH de algumas substâncias

Solução	pH	Tipo
Suco de limão	2,3	Ácida
Vinho tinto	3,8	Ácida
Vinagre	2,4 a 3,4	Ácida
Leite	6,4 a 6,8	Ácida
Água destilada	7	Neutra
Sangue	7,3	Base
Bicarbonato de sódio	8,4	Base
Leite de magnésia	10,5	Base
Amoníaco	12	Base

Fonte:http://educador.brasilescola.uol.com.br/trabalhando-escala-ph.html(adaptado)

Em 1909, após a análise de diversos estudos na segunda metade do século XIX e no inicio do XX o bioquímico Sören P. Sörensen[5] estabeleceu uma maneira para expressar o pH de uma substancia utilizando para isto o logaritmo negativo da sua concentração de íons de hidrogênio ($[H^+]$) , isto é

$$pH = -\lg [H^+]$$

Baseado neste conceito e também do produto iônico obtido de forma experimental chegando a constante de ionização da água que vale 10^{-14} a 25^oC valor este resultante do produto iônico da água ($[H^+]$).($[OH^-]$), assim como o de pOH que é obtido pelo logaritmo negativo da concentração de íons de hidroxila($[OH^-]$) e representado por $pOH = -\lg [OH^-]$ surge a relação $pH + pOH = 14$. Neste sentido a ideia de pH é possível em uma solução porque para ele é determinado uma variação numérica intervalar de 0 até 14.

Aplicação 1: O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\lg [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e lg, o logaritmo na base 10. Ao analisar determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5,4.10^{-8} mol/L$. Determine o pH desta solução.

Solução:

[5]Sören Peter Lauritz Sörensen (1868-1939), se concentrou na bioquímica, o estudo mais relevante foi o de expressar a concentração dos íons hidrônio (H_3O^+) presentes em um sistema. Assim, em 1909, propôs o pH (Potencial Hidrogeniônico), que indica o grau de acidez e basicidade de uma solução aquosa.

Sabe-se que $[H^{+}] = 5,4.10^{-8} mol/L$, substituindo este valor em $pH = -\lg[H^{+}]$ e utilizando as propriedades de logaritmos tem-se:

$$
\begin{aligned}
pH &= -\lg[H^{+}] = -\lg 5,4.10^{-8} \\
&= -\lg 5,4 - \lg 10^{-8} = -\lg\left(\frac{54}{10}\right) + 8.\lg 10 \\
&= -\lg 54 + \lg 10 + 8.1 = -\lg 9.2.3 + 1 + 8 = -\lg 9 - \lg 2 - \lg 3 + 9 \\
&= -\lg 3^{2} - 0,30 - 0,48 + 9 = -2.\lg 3 + 8,22 \\
&= -2.(0,48) + 8,22 = -0,96 + 8,22 \\
&= 7,26
\end{aligned}
$$

Aplicação 2: Dentro da ideia proposta sobre concentrações existem dois conceitos que se relacionam o de pH e o de pOH, neste sentido, mostre que $pH + pOH = 14$.
Solução: Sabe-se que o produto iônico da água $([H^{+}]).([OH^{-}])$ vale 1.10^{-14} a $25^{o}C$ e dadas as expressões $pOH = -\lg[OH^{-}]$ e $pH = -\lg[H^{+}]$, e utilizando o conceito de propriedade de potência e de produto tem-se:

$$
\begin{aligned}
pH + pOH &= -\lg[H^{+}] - \lg[OH^{-}] = -\lg([H^{+}]).([OH^{-}]) = -\lg 1.10^{-14} \\
&= -\lg 1 - \lg 10^{-14} = -0 + 14.1 = 0 + 14 = 14
\end{aligned}
$$

6.5 Método do carbono 14

O Carbono 14 é um isótopo radioativo do Carbono que é representado por C^{14} ele é formado no ar atmosférico resultante da colisão entre os nêutrons dos raios cósmicos e os núcleos de nitrogênio, a reação química do Carbono 14 com o oxigênio forma o gás carbônico radioativo conhecido também pela sigla CO_2. Este gás é absorvido pelas plantas em sua alimentação devido o processo de fotossíntese e como consequência também pelos animais que se alimentam destas plantas. O que se observa é que a quantidade de carbono 14 presente nas plantas e animais vivos é praticamente constante, esta observação foi feita nas pesquisas de Willard Libby[6], este verificou que na medida que o carbono é absorvido pela ingestão de alimentos ele também é reduzido pela sua desintegração, quando uma

[6]Willard Frank Libby(1908-1980) químico norte-americano. É reconhecido pela descoberta do método de datamento conhecido por datação por radiocarbono, recebendo por isto o Nobel de Química de 1960.

animal morre ele para de absorver o carbono e sua redução ocorre na medida em que não há mais absorção, assim, esta característica do carbono 14 pode ser utilizado para calcular a data de fosseis ou de outro objeto de madeira.

Os testes realizados por Libby teve como base a comparação entre os resultados com carbono 14 e a história, por exemplo, um dos teste foi no caixão mortuário egípcio da época do faraó Zoser, de acordo com a história ele teria vivido por volta de 2000 anos antes de cristo, ao fazer o teste com carbono 14 constatou-se uma proximidade muito grande com o relato histórico, assim como em um experimento com arvores milenares onde o carbono aproximou-se muito bem da data real, comparada através dos anéis nos troncos das árvores, sabe-se que cada anel representa um ano.

Neste contexto entra o conceito de meia-vida de uma substância radioativa, que é o tempo necessário para que uma dada substância se reduza a metade, no caso do carbono 14 a sua meia-vida é de 5730 anos. O carbono 14 é indicado para analise de objetos com idade inferior a 40000 anos, para períodos maiores o mais indicado seria o urânio 238 pois este se desintegra de forma mais lenta transformando-se com o passar dos anos em chumbo 206.

Esta desintegração do carbono 14 através de observações possui sua lei da forma:

$$M(t) = M_0.e^{-\alpha t} \tag{6.6}$$

Em que M_0 é a massa da substancia ou corpo radioativo cuja taxa de desintegração é α, sua massa M, após um tempo t em anos de desintegração. No caso da meia-vida tem-se:

$$M(t) = \frac{M_0}{2} \tag{6.7}$$

Sendo t representando a meia-vida, observe que substituindo(6.7) em (6.6) tem-se:

$$M(t) = M_0.e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{M_0}{2} = M_0.e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\alpha t}$$

Aplicando ln dos dois lados e utilizando as propriedades do logaritmo segue que a constante de desintegração α é dada por:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-\alpha t} &\Leftrightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\alpha t \\ &\Leftrightarrow -\alpha t = -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{t} \end{aligned} \tag{6.8}$$

O tempo t em anos de desintegração para se atingir a meia-vida pode ser expresso por:

$$t = \frac{\ln 2}{\alpha} \tag{6.9}$$

Observe que a meia-vida de uma substancia radioativa independe da massa. Caso o interesse fosse em determinar o tempo e não somente a ideia de meia-vida faz-se da seguinte forma isolando t em (6.6) através das propriedades de logaritmos, como segue:

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0.e^{-\alpha t} \\ \frac{M(t)}{M_0} &= e^{-\alpha t} \\ \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) &= \ln e^{-\alpha t} \\ \ln M(t) - \ln M_0 &= -\alpha t \\ t &= -\frac{\ln M(t) - \ln M_0}{\alpha} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Aplicação 1: Um osso de um animal pré-histórico contém $\frac{1}{15}$ da quantidade de carbono 14 de um osso atual. Determine o tempo em que este animal está morto.

Solução:

Pelo enunciado tem-se que $M_0 = 15M(t)$, fazendo a substituição em (6.10) tem-se que:

$$t = -\frac{\ln M(t) - \ln M_0}{\alpha} = -\frac{\ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right)}{\frac{\ln 2}{5}} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{\frac{0{,}6931}{5730}} = -\frac{\ln 1 - \ln 15}{0{,}00012} = \frac{-0 + 2{,}7080}{0{,}00012} \cong 22567$$

Daí o tempo deste osso é de aproximadamente 22567 anos.

Aplicação 2: O cobalto 60 muito utilizado nos hospitais possui 10 gramas, sabendo que em um certo momento ele terá 0,625g, determine o tempo necessário para que esta desintegração ocorra sabendo que a meia-vida do cobalto 60 é de 5 anos.

Solução:

Utilizando a expressão (6.10) como base tem-se que $\ln M(t) = \ln 10$, $\ln M_0 = \ln 0,625$ além do mais $\alpha = \frac{\ln 2}{t} = \frac{\ln 2}{5}$ substituindo segue que:

$$t = -\frac{\ln M(t) - \ln M_0}{\alpha} = -\frac{\ln 10 - \ln 0,625}{\frac{\ln 2}{5}} = \frac{2,3025 + 0,47}{\frac{0,6931}{5}} = \frac{2,7725}{0,1386} = 20$$

Portanto o tempo para que o cobalto 60 passe de $10g$ para $0,625g$ é de 20 anos.

6.6 Lei de resfriamento de um corpo

O principio que rege o resfriamento de um corpo pode ser tratado com a mesma ideia de desintegração radioativa, a lei de resfriamento de Newton comenta que a taxa de mudança de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e sua vizinhança. Em termos matemáticos a expressão pode ser representada por:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \tag{6.11}$$

Sendo T a temperatura do corpo, t o tempo, T_a a temperatura do ambiente e k é uma constante que depende do material que constituem o corpo, o sinal negativo representa que a temperatura do corpo está decrescendo com o aumento do tempo, em relação a temperatura do meio ambiente.

Antes de obter a expressão final é importante analisar três hipóteses relacionadas a condução de calor, a primeira, é que a temperatura T depende do tempo e é a mesma em todos os lugares ou pontos do corpo, a segunda é que a temperatura T_a do meio ambiente em que está inserido o corpo permanece constante durante o período de observação e a terceira é a própria definição da lei.

Assumindo verdadeiras as hipóteses e observando que (6.11) é uma EDO separável então segue que:

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = -kdt$$

Integrando ambos os lados em relação a variável tempo, então:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{(T - T_a)} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln(T - T_a) \quad = \quad -kt + k_0 \tag{6.12}$$

Aplicando a função exponencial nos dois lados da igualdade de (6.12), segue então que:

$$e^{\ln(T - T_a)} = e^{k(-t+1)} \Leftrightarrow T - T_a = e^{-kt}.e^1 \Leftrightarrow T - T_a = e^{-kt}.c \Leftrightarrow T = T_a + c.e^{-kt} \tag{6.13}$$

A equação (6.13) é a solução da equação diferencial de (6.11). Por outro lado considerando a temperatura inicial do corpo como sendo $T(0) = T_0$, fazendo a substituição $t = 0$ tem-se que:

$$T(t) = T_a + c.e^{-kt} \Leftrightarrow T_0 = T_a + c.e^0 \Leftrightarrow c = T_0 - T_a$$

Substituindo o c encontrado em (6.13) resulta em

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a).e^{-kt} \tag{6.14}$$

Um dos problemas mais comuns é a determinação da hora da morte, isto pode ser obtido através da utilização das propriedades do logaritmo na expressão (6.14), assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
T(t) &= T_a + (T_0 - T_a).e^{-kt} \\
T(t) - T_a &= (T_0 - T_a).e^{-kt} \\
\frac{T(t) - T_a}{(T_0 - T_a)} &= e^{-kt} \\
\ln \frac{T(t) - T_a}{(T_0 - T_a)} &= \ln e^{-kt} \\
\ln \frac{T(t) - T_a}{(T_0 - T_a)} &= -kt \\
t &= -\frac{\ln \frac{T(t) - T_a}{(T_0 - T_a)}}{k} \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

Aplicação: Uma pessoa foi assassinada em um determinado bairro de uma cidade, sabe-se que na hora da descoberta a temperatura do corpo era de 30^oC e que duas horas depois a temperatura do corpo era de 23^oC, foi verificado que a temperatura ambiente na cena do crime era de 20^oC. Determine a hora em que esta pessoa morreu.
Solução:

Antes de determinar a hora que a pessoa morreu, é importante determinar a constante k que será muito útil. Da questão tem-se que $T(t) = 23^oC$, $T_a = 20^oC$, $T_0 = 30^oC$ e $t = 2h$. Substituindo os dados em (6.14) vem que:

$$23 = 20 + (30 - 20)e^{-2k} \Leftrightarrow \frac{3}{10} = e^{-2k} \Leftrightarrow -2k = \ln 0,3 \Leftrightarrow k = 0,6$$

Com o valor de k obtido, substituindo os dados em (6.15) tem-se:

$$t = -\frac{\ln \frac{T(t)-T_a}{(T_0-T_a)}}{k} = -\frac{\ln \frac{30-20}{(37-20)}}{0,6} = -\frac{\ln \frac{10}{(17)}}{0,6} = -\frac{\ln 10 - \ln 17}{0,6} = -\frac{-0,5306}{0,6} = 0,83h$$

Assim, $t = 0,83h$ que através de uma regra de três simples equivale a 53 minutos.

6.7 Magnitude aparente de uma estrela

Uma aplicação muito interessante dos logaritmos na astronomia está relacionada com o brilho das estrelas, esse brilho é classificado de acordo com uma escala que foi definida inicialmente por Hiparcos e em seguida foi redefinida por Ptolomeu. Em 129 a.C Hiparco era muito respeitado na astronomia catalogou cerca de 850 estrelas de acordo com o seu brilho, este documento é considerado o primeiro em relação a classificação das estrelas, tudo feito a olho nu, haja a vista a ausência de instrumentos nesta época.

Esta classificação começa na observação das 20 estrelas mais brilhante no céu, o qual as classificava como de 1ª grandeza, pois estas eram as primeiras a surgir depois do pôr-do-sol, as de 2ª grandeza brilhavam menos que as da 1ª, e assim foi classificando até as estrelas de 6ª grandeza que estavam já no limite da visão humana. Em outras palavras, atuais, esta classificação varia das estrelas que brilham mais para as que brilham menos, as primeiras são consideradas de 1ª magnitude e as últimas de 6ª magnitude.

No ano de 140, Ptolomeu publicou sua obra Almagesto, que reunia todo o conhecimento sobre astronomia até então, além do mais ampliou o leque de Hiparco para 1022 estrelas, este trabalho foi uma referência por muito tempo até que Kepler consolidou a teoria heliocêntrica.

Mais tarde o astrônomo Herschel[7] após fazer uma série de estudos onde tinha como objetivo comparar o brilho das estrelas, verificou que uma estrela de primeira magnitude pode ser vista a olha nu tendo uma magnitude de m_1 com brilho F_1. A relação entre a 1ª magnitude e a 6ª magnitude em relação ao brilho é dado por $F_1 = 100F_6$, sendo assim o intervalo de 5 magnitudes equivale a um aumento de 100 vezes maior em relação ao brilho das estrelas da 1ª até a 6ª magnitude.

Neste contexto a medição do brilho de uma estrela apenas pela visão humana parecia muita subjetiva, a partir do século XIX, foram feitas varias experiência para verificar a percepção do olho humano em relação a luminosidade, como uma delas, duas lâmpadas com o dobro da potência da outra foram colocadas a $100m$ de distância, foi percebido que mesmo uma das lâmpadas com o dobro da potência não parecia brilhar com o dobro da intensidade, daí uma grande conclusão, a percepção das diferenças de luminosidade pela visão não era linear.

Em 1856 os cientistas Ernst Heinrich Weber e Gustav Theodor Fechner constataram que o aparelho ótico humano não era mesmo linear e sim proporcional ao logaritmo da potência luminosa, esta descoberta seria a base para a nova reformulação da escala de magnitude das estrelas, essas constatações ficaram conhecida como Lei de Weber-Fechner. Em 1859 o astrônomo Norman Robert Pogson através de um fotômetro, comprovou a relação de $F_1 = 100F_6$ proposta por Herschel e reestruturou a escala. Portanto baseado na nova concepção tem-se que os intervalos entre cada magnitude é dado por $100^{\frac{1}{5}} \cong 2,51$, constante essa conhecida como razão de Pogson. Esta escala foi determinada de acordo com as observações do olho humano e, portanto corresponde a de um detetor logarítmico. Assim, existem classificações em relação aos valores negativos e positivos. Para valores positivos estão as estrelas consideradas fracas, enquanto as de valores negativos são consideradas estrelas muito brilhantes. Segue uma tabela de valores de magnitude de um alguns objetos:

[7]William Herschel(1738-1822), foi um notável astrônomo alemão que se naturalizou inglês, descobriu o planeta Úrano em 1781 e contribuiu para os estudos sobre magnitude de uma estrela.

Tabela 6.5: Magnitude de alguns objetos

Magnitude	Objetos mais populares
-27	O sol.
-13	Brilho da lua cheia.
-5	Vênus em seu momento mais brilhante.
-3	Marte e Júpiter, ambos em máximo brilho.
-2,5	Brilho médio da ISS- Estação Espacial Internacional.
-0,25	Saturno.
0,0	Estrela Vega, Alpha da constelação de Lira.
5,6	Planeta Urano em seu máximo brilho.
6,0	Limite da visão humana sem instrumentos.
13,6	Plutão.
30	Capacidade do telescópio Hubble.

Fonte:http://www.apolo11.com/sistema_de_magnitudes.php

Para calcular a magnitude de uma estrela observa-se que $\Delta_m = m_i - m_j$ é a diferença entre as magnitudes, por exemplo $\Delta_4 - \Delta_2 = 2$, também sabe-se que $\frac{F_1}{F_6} = 100$ e que $100^{\frac{1}{5}} \cong 2,5$, dai tem-se o seguinte:

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{\frac{1}{5}} = 100^{\frac{(m_2-m_1)}{5}} \tag{6.16}$$

Aplicando o logaritmo dos dois lados da igualdade (6.16) resulta em:

$$\lg\frac{F_1}{F_2} = \lg 100^{\frac{(m_2-m_1)}{5}} \Leftrightarrow \lg\frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{5}(m_2 - m_1) = 0,4(m_2 - m_1)$$

Que equivale a:

$$m_2 - m_1 = 2,5\lg\frac{F_1}{F_2} \tag{6.17}$$

Para concluir esta analise observe que é preciso determinar uma formula geral para calcular a magnitude m de uma estrela, algumas suposições serão importantes como supor que o brilho F de m seja igual a F_2, isto é, $F = F_2$, tomando $m_1 = 0$ e seja também $F_0 = F_1$, tem-se em (6.7) que $m = 2,5\lg\frac{F_0}{F_2}$, aplicando as propriedades de logaritmo tem-se que $m = 2,5\lg F_0 - 2,5\lg F$ fazendo $C = 2,5\lg F_0$ que é a referência para o ponto inicial da escala de acordo com o sistema fotométrico adotado obtém-se

$$m = C - 2,5\lg F \tag{6.18}$$

È importante salientar que o brilho de uma estrela também depende da distância, isto é

$$F = 2,5\frac{L}{4\pi d^2} \tag{6.19}$$

onde L e uma constante positiva. Substituindo (6.19) em (6.18), tem-se:

$$\begin{aligned} m &= C - 2,5\lg F = C - 2,5\lg\frac{L}{4\pi d^2} = C - 2,5(\lg L - \lg 4\pi d^2) \\ &= C - 2,5\lg L + 5\lg 4\pi d + \lg 4\pi = C^{'} - 2,5\lg L + 5\lg d \end{aligned}$$

Deste resultado, a magnitude de uma estrela em relação a sua distância é dada por:

$$m = C^{'} - 2,5\lg L + 5\lg d$$

Uma unidade bastante utilizada para medir distâncias estrelares é o Parsec(pc) que é a contração das palavras paralax(paralaxe) e second(segundo), tem-se uma relação de equivalência entre as unidades de medidas tal que $1pc = 3,26156\ anos - luz$. Segue algumas aplicações sobre o tema.

Aplicação 1: Quantas vezes a estrela Épsilon, a Intrometida da constelação do Cruzeiro do Sul, é mais brilhante que o planeta Urano?
Solução:

Sabe-se que a magnitude de Épsilon vale $m_1 = 3,6$ e a de Urano $m_2 = 5,6$, pela teoria desenvolvida neste tópico a diferença de magnitudes é dada por:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 5,6 - 3,6 = 2$$

A diferença de magnitudes é de 2, assim para cada um deste vale $100^{\frac{1}{5}}$, daí basta fazer $100^{\frac{1}{5}}.100^{\frac{1}{5}} = (2,512).2,512) = 6,3$, isto é, a estrela Épsilon é mais brilhante que o planeta Urano em 6,3 vezes.

Aplicação 2: A magnitude de uma estrela na galáxia Andrômeda a $690kpc$ de distância é $m_2 = 5$. Se a estrela explode como supernova, seu brilho pode aumentar até um bilhão, ou seja,10^9 vezes. Calcule a magnitude aparente em tal caso.

Solução:

Usando a expressão (6.7) e sabendo que $F_2 = 10^9 F_1$

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= 2,5 \lg \frac{F_1}{F_2} \Leftrightarrow 5 - m_1 = 2,5 \lg \frac{F_1}{10^9 F_1} \Leftrightarrow 5 - m_1 = 2,5 \lg \frac{1}{10^9} \Leftrightarrow \\ 5 - m_1 &= 2,5.(-9) \Leftrightarrow m_1 = 22,5 - 5 = 17,5 \end{aligned}$$

Portanto a magnitude aparente da estrela é de 17,5 vezes.

6.8 Eliminação do álcool ingerido

O álcool etílico quando ingerido por uma pessoa passa por um processo de eliminação de forma lenta que ocorre pela urina, pelo suor e respiração, o álcool quimicamente é definido pela fórmula C_2H_5OH, a bebida alcoólica é obtida através do processo de fermentação que é a ação de microrganismos sobre os açúcares das diferentes matérias primas, através deste processo se produz bebidas com até 15% de álcool, caso se queira concentrações maiores após a fermentação ocorre à destilação. A concentração alcoólica depende da bebida, segue a tabela com alguns dados:

Tabela 6.6: Graduação alcoólica de algumas bebidas

Tipo de bebida	Graduação alcoólica(^{o}GL)
Cerveja	4 a 6
Vinho	12 a 14
Vodka	30 a 40
Rum ou gim	40 a 45
Cachaça	40 a 48
Wisky	40 a 50
Absinto	53,5

Fonte: Próprio autor

Foi observado em experimentos que o álcool em algumas situações é eliminado pelo corpo humano seguindo uma função exponencial, esta função baseasse que a quantidade de álcool é proporcional a quantidade em um dado instante. Este modelo pode ser expresso por $C(t) = c_0.e^{-kt}$, onde c_0 é a concentração inicial. Como o objetivo é verificar o tempo necessário para a eliminação do álcool, isolando t, segue que:

$$\frac{C(t)}{c_0} = e^{-kt} \Leftrightarrow t = -\frac{ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)}{k} \tag{6.20}$$

De acordo com Bassanezi(2002) que sugere um experimento que foi realizado com três medidas, sendo a primeira com 70 minutos depois de um grupo de pessoas terem ingerido bebida alcoólica, a segunda com 75 minutos e a terceira com 155. Usando o fato de que a primeira foi a partir de 70 minutos, ou seja, $t \geq 70$. Supondo que uma determinada pessoa ingeriu $1,472(g/L)$ de álcool, e fazendo a mudança de variável $n = t - 70$ para que $n = 0$ para $t = 70$ com $n \geq 0$. Daí fazendo as substituições necessárias em (6.20), segue que:

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)}{k} \Leftrightarrow n = -\frac{\ln\left(\frac{C(t)}{0{,}8707}\right)}{0,0075} - 70$$

Aplicação 1: De acordo com a expressão em (6.20) para indivíduos que beberam cerca de 10 copos de cerveja, supondo que ele pretende dirigir e para isso deve ter uma graduação alcoólica de 0,1, assim quanto tempo deve esperar para que possa dirigir com segurança?
Solução:

Tomando $C(t) = 0,1$, substituindo em (6.20), tem-se:

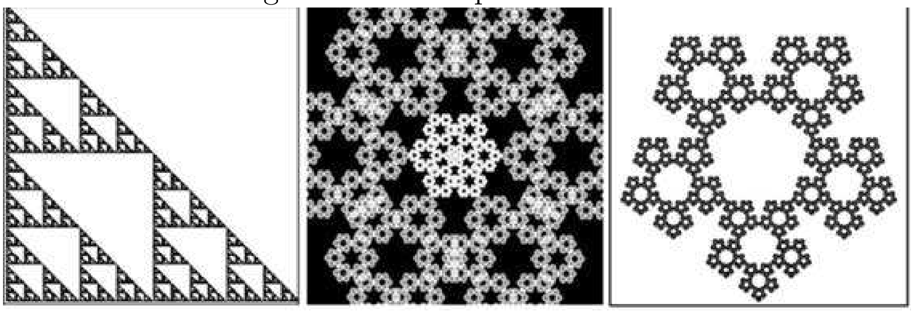
$$\begin{aligned} n &= -\frac{\ln\frac{C(t)}{0{,}8707}}{0,0075} - 70 = -\frac{\ln\frac{0{,}1}{0{,}8707}}{0,0075} - 70 = -\frac{ln 0,114850}{0,0075} - 70 \\ &= -\frac{(-2,164127)}{0,0075} - 70 = 288 - 70 = 218 \end{aligned}$$

Portanto isto equivale a quase 4 horas.

6.9 Dimensão fractal

O fractal deriva do latim Fractus que pode ser interpretado como quebrado ou fraturado, ele pode ser entendido como uma estrutura geométrica que são muito parecidos em diferentes tipos de escala, como um objeto que possui pequenas partes dele mesmo, exemplos de fractais:

Figura 6.3: Exemplos de fractais



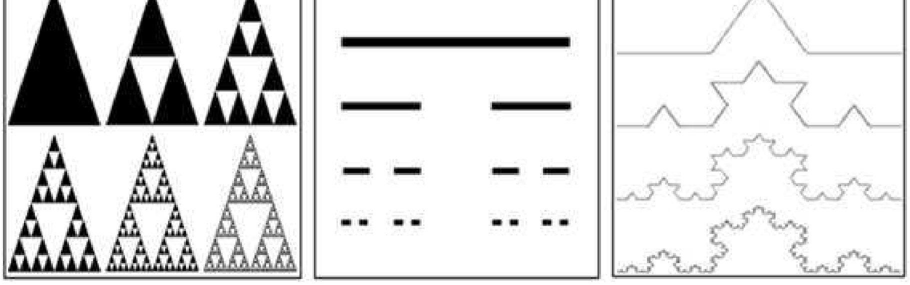
Fonte:www.scielo.br

Existem várias estruturas naturais que são fractais e que apresentam uma grande complexidade tanto na riqueza dos detalhes como de forma geral, os fractais encontrados na natureza têm características finitas, pois não possuem as interações recursivas da matemática assim como os que ocorreram com o surgimento da computação. Algumas características são pertinentes aos fractais como a Auto-semelhança, escala e complexidade.

A auto-semelhança ocorre quando uma figura à medida que aumenta de escala mantém sua partes sempre semelhantes entre si, esta característica ainda se divide em exata ou aproximada, estes se referem o quanto a figura se assemelhará das suas partes. Já a escala representa o quanto essas partes cresceram tendo como base as medidas iniciais e a complexidade surge na medida em que a escala aumenta e tende pormenorizar os detalhes do fractal.

Na história deste tema os fractais que surgiram inicialmente foram o triângulo de Sierpinski , conjunto de Cantor e o floco de neve de Koch. Seguem os fractais respectivamente:

Figura 6.4: Fractais de Sierpinski, Cantor e Koch respectivamente.

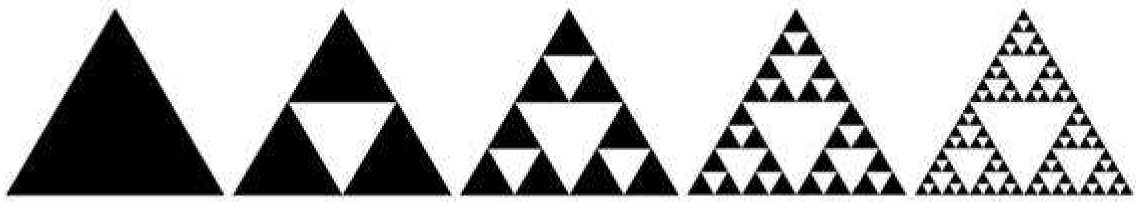


Fonte:www.scielo.br

De forma breve se fará a explicação de cada um destes. No triângulo famoso de

Sierpinski [8] , pega-se um triangulo equilátero e o divide em quatro triângulos equiláteros, cujos os vértices desses novos são os pontos médios do triangulo de origem, sendo que o triangulo central é descartado do fractal, de forma recursiva chega-se ao triangulo de Sierpinski, observe a figura mais detalhada:

Figura 6.5: Triângulo de Sierpinky



Fonte:www.scielo.br

No conjunto de Cantor[9] de forma simples trata-se de intervalos fechados, de mesmo comprimento e disjuntos entre si, ou seja:

Figura 6.6: Conjunto de Cantor

Fonte:www.scielo.br

No caso do floco de neve de Koch[10] toma-se um triangulo equilátero e divida os seus

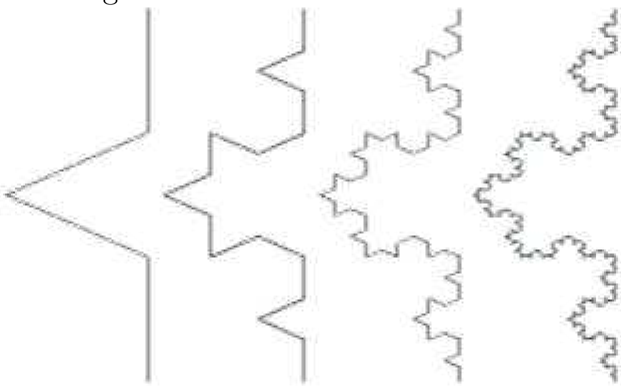
[8]Waclav Sierpinski (1882-1969), foi um matemático polonês, entrou para o departamento de física e matemática da Universidade de Varsóvia em 1899. Além do triangulo, tem-se o tapete e a curva relacionado aos fractais e entre outras contribuições para a matemática.

[9]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) matemático com enorme contribuições, conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos, fez a distinção entre conjuntos numeráveis e não-enumeráveis e também em relação ao fractais.

[10]Helge Von Koch(1870-1924)), teve várias contribuições para a matemática, ficou famoso pela Curva do floco de neve de Koch que aparece em seu trabalho Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane publicado em 1906.

lados em três segmentos congruentes, após isto retira-se o segmento do meio e substitui por um triangulo equilátero com lado igual a medida do segmento retirado porém sem a base, essas iterações vão gerar o floco de neve de Koch de acordo com a imagem.

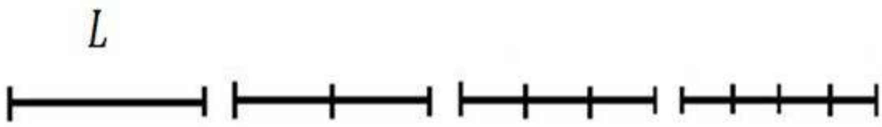
Figura 6.7: Floco de neve de Koch



Fonte:www.scielo.br

Dando prosseguimento ao estudo dos fractais, tem-se a definição de dimensão de um fractal que não precisa ser um número inteiro. Em relação a esta ideia de dimensão fracionária surge Mandelbrot que mostrou a existência de tais dimensões que posteriormente ficou conhecida como dimensão fractal. O objetivo aqui neste trabalho é mostrar a dimensão de fractais com caraterística de auto-semelhança. Seja $n = 1, 2, 3, \ldots$ e U o comprimento de cada segmento obtido pela divisão desta mesma reta.

Figura 6.8: Noção de dimensão



Fonte:Próprio autor

Observe que cada segmento de reta que é formado após a divisão tem comprimento $U = \frac{L}{N}$, em que L é o comprimento do segmento maior e N é o número de segmentos menores após a divisão, suponha-se que $L = 1$, daí do comprimento da reta inicial, logo $U = \frac{1}{N}$. Como já é sabido a dimensão de uma reta é um, do quadrado é dois e do cubo é três, a partir desta noção surge então uma relação definida por:

$$N = \frac{1}{r^D}$$

Onde r é coeficiente de redução e D é a dimensão do objeto. Assim, aplicando o logaritmo dos dois lados tem-se:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D \Leftrightarrow \lg N = \lg\left(\frac{1}{r}\right)^D \Leftrightarrow D = \frac{\lg N}{\lg \frac{1}{r}} \tag{6.21}$$

A formula (6.21) fornece a dimensão de objetos fractais ou não fractais.

Aplicação 1: Determine a dimensão do floco de neve de Koch.
Solução:

De acordo com a teoria dada o floco de neve de Koch possui um coeficiente de redução de $\frac{1}{3}$ haja vista que a cada iteração substitui a terça parte do segmento por um novo triângulo equilátero e o numero de segmentos que surge a cada etapa é $N = 4$, pois ao substituir o segmento médio da primeira iteração por um triangulo equilátero sem base obtêm-se quatro segmentos. Usando (6.21), tem-se:

$$D = \frac{\lg N}{\lg \frac{1}{r}} = \frac{\lg 4}{\lg \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\lg 4}{\lg 3} = \frac{0,6020}{0,4771} = 1,26$$

Portanto a dimensão do floco de neve de Koch é 1,26.

6.10 Escala musical

De acordo com a história Pitágoras foi um dos precursores da música, diz a história que ao passar em frente de uma oficina ouviu a batida de martelos e achou que os sons se combinavam, e a partir disto teria criado o monocórdio, que é um instrumento de uma corda só, esta invenção era justamente para estudar as relações entre os sons.

Em suas observações ele verificou que quando dividia a corda ao meio a tonalidade era a mesma produzida pela corda solta só que mais aguda, ou seja, uma oitava acima. Também descobriu que os sons mais agradáveis eram as quartas e as quintas, justamente por que a divisão destes segmentos de corda representavam números exatos. Indicou números inteiros referente ao comprimento da corda com as divisões em relação a corda solta.

Para os discípulos de Pitágoras, a música dividia-se na natureza dos sons, no seu estabelecimento, no cálculo dos intervalos e nas proporções musicais. Após isto, surgem Gioseffe Zarlino[11] e Marin Mersenne[12] que contribuíram de forma intensa para o desenvolvimento da música juntamente com a matemática, utilizando-se da noção de Pitágoras que determinou a oitava como sendo a razão de 1 para 2, e como uma escala musical tem-se 12 semitons, então de um semitom para outro ocorre um avanço na altura de $2^{\frac{1}{12}}$, e entre oitavas é de $2^{\frac{2}{12}}$.

Neste contexto Zarlino em seus estudos sobre a escala musical sempre buscou facilitar o entendimento intervalar entre as notas, pois estes intervalos inicialmente apresentavam razões muito difíceis e por este motivo dificultavam algumas conclusões, assim sempre propusera a facilitações na escala musical como a mudança de algumas razões.

Nas analises sobre intervalos relacionado a música existe uma comparação entre os estudos adotados por Pitágoras e Zarlino em relação ao comprimento das cordas e consequentemente favorecendo o estudo entre os intervalos existentes e entre as notas musicais.

Segue a tabela com esta comparação:

Tabela 6.7: Comparação entre a escala De Pitágoras e Zarlino

Intervalos	Razão entre o comprimento das cordas de acordo com Pitágoras	Razão entre o comprimento das cordas de acordo com Zarlino
Oitavas	2:1	2:1
Quinta	3:2	3:2
Quarta	4:3	4:3
Sexta	27:16	5:3
Terça	81:64	5:4
Segunda	9:8	9:8
Sétima	243:128	15:8

Fonte:Juliani(2003)

Mersenne em 1635 propusera um novo sistema de afinação no qual quaisquer meiostons adjacentes possuem frequências constantes. Isto é, deveria ter um valor I tal que $I^{12} = 2$, isto é, $i = \sqrt[12]{2} \cong 1,0594$. Daí então as frequências obtidas por Zarlino e a escala

[11]Gioseffo Zarlino (1517-1590), foi um teórico musical italiano e compositor da Renascença. Foi, possivelmente, o mais famoso teórico musical ao lado de Aristoxenos e Rameau, e trouxe grande contribuição para a teoria do contraponto e da afinação dos instrumentos musicais.

[12]Marin Mersenne (1588-1648) foi um padre mínimo, teólogo, matemático, teórico musical, e filósofo francês, suas contribuições foram os primos de Mersenne, desenvolveu a teoria da ressonância natural, combinações e permutações para contabilizar sequências de notas musicais, entre outras.

logarítmica ficou em Hz da forma:

Tabela 6.8: Comparação entre as escalas de Zarlino e Logarítmica

Notas	Escala de Zarlino	Escala Logarítmica
A	220	220
B	247,5	246,9
C	264	261,6
D	297	296,6
E	330	329,6
F	352	349,2
G	396	391,9
A	440	440
B	495	493,8
C	528	523,2
D	594	593,2
E	660	658,4
F	704	698,4
G	783	783,8
A	880	880

Fonte:Juliani(2003)

De acordo com os dados, seja N o número de semitons cuja distancia entre eles é de $2^{\frac{1}{12}}$ em um intervalo de f_i até f_j. Daí vem que:

$$(2^{\frac{1}{12}})^N = \frac{f_i}{f_j}$$

Aplicando o logaritmo de ambos lados e utilizando algumas propriedades, tem-se que:

$$\lg{(2^{\frac{1}{12}})}^N = \lg\frac{f_i}{f_j} \Leftrightarrow N.\lg{(2^{\frac{1}{12}})} = \lg\frac{f_i}{f_j} \Leftrightarrow N = \lg_{\sqrt[12]{2}}\frac{f_i}{f_j} \tag{6.22}$$

Portanto (6.22) representa a distância em semitons de uma frequência a outra.

Aplicações 1: Determine a distância entre as frequências $698,4Hz$ e $440Hz$.

Solução:

Aplicando a expressão (6.22) e fazendo $f_i = 698,4Hz$ e $f_j = 440Hz$, obtêm-se:

$$N = \lg_{\sqrt[12]{2}}\frac{f_i}{f_j} = \lg_{\sqrt[12]{2}}\frac{698,4}{440} = \lg_{\sqrt[12]{2}}1,5852 \cong 8$$

Isto é, a distancia entre as notas de acordo com a tabela com frequências de $698,4Hz$

e $440Hz$ é de 8 semitons.

Aplicações 2: Sabendo que o sinal de discar de um telefone é o primeiro sol antes do lá padrão, determine a frequência desta nota sol.
Solução:

Seja $N = 2$, pois o a nota sol está dois semitons antes do lá que a nota padrão que vale $f_i = 440Hz$, substituindo em (6.22), tem-se:

$$N = \lg_{\sqrt[12]{2}} \frac{f_i}{f_j} \Leftrightarrow 2 = \lg_{\sqrt[12]{2}} \frac{440}{f_j} \Leftrightarrow f_j = \frac{440}{\sqrt[12]{2}}^{2} = \frac{440}{1,0594} = 391,9Hz$$

6.11 Pressão Atmosférica

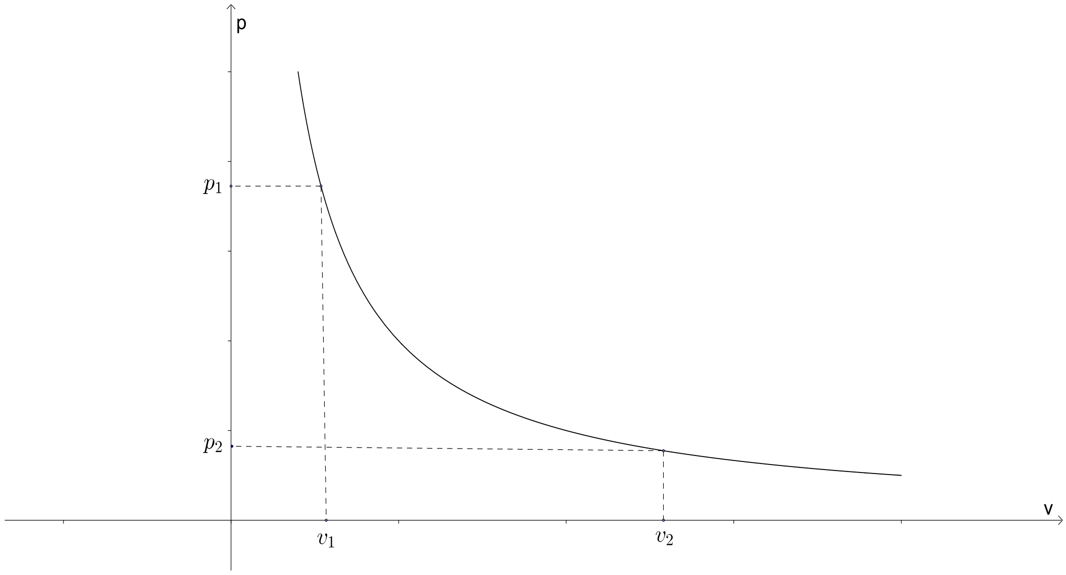
A pressão atmosférica pode ser entendida como a pressão que é exercida pelo ar da atmosfera na superfície do planeta, como a pressão é uma relação entre força e área então a pressão atmosférica mede a força da pressão do ar em uma determinada área do planeta ou região. Em 1662 o físico Robert Boyle resolveu fazer um experimento para medir a pressão atmosférica, pediu a um vidreiro que fizesse uma peça de vidro em forma de J fechado na parte superior com uma chave de passagem, e em sua casa colocou mercúrio nesta peça, e ia controlando a entrada de mercúrio e do ar, e percebeu após vários experimentos que o nível de mercúrio era igual nos dois ramos da peça de vidro e a pressão também era igual.

De acordo com suas observações Boyle definiu sua lei para uma temperatura constante e para uma determinada massa dada de um gás, o volume varia de forma inversamente proporcional a pressão absoluta que recebe, ou seja, ao duplicar a pressão por exemplo o volume fica divido na mesma proporção.

Como a camada atmosférica pode ser vista como fluido, então esta sofre ação do campo gravitacional, como as regiões da terra estão mais bem definidas do que outras, então esse ar exercerá uma pressão como visto no experimento de Boyle, a esta pressão denomina-se de pressão atmosférica. Torricelli já havia feito um experimento parecido como o de Boyle, onde determinou que a pressão atmosférica exercida no nível do mar equivalia a $76cmHg$, também esta pressão é denominada por $1atm$.

Devido a esses experimentos observou-se que a pressão e o volume possuem comportamento exponencial, observe:

Figura 6.9: Relação entre pressão e volume



Fonte:osfundamentosdafisica.blogspot.com.br

Como o volume do ar é inversamente proporcional à altura em que uma determinada pessoas se encontra, ou seja, se uma pessoa está no nível do mar $h = 0$, então existe um volume de ar v_k sobre ela, caso esta esteja acima do nível do mar em uma altura $h = x$, então o volume de ar será igual a v_z , sendo que $v_z < v_k$. Como a pressão é inversamente proporcional ao volume, logo também é inversamente proporcional a altura, assim a medida que a altura h aumenta em relação ao nível do mar, a pressão atmosférica diminui, e este também está relacionado pelo fato de que o ar tende a se tornar mais rarefeito com o avanço da altura.

Portanto a expressão que calcula a pressão em função da altura h pode ser determinada por:

$$p(h) = p_0.e^{-kh} \tag{6.23}$$

Em que p_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar e k é uma constante. Um aparelho muito utilizado para medir a pressão de uma determinada localidade é o barômetro, instrumento este criado por Torricelli. Também é possível determinar a altura dada duas pressões específica, para isto basta isolar h em (6.23), e aplicar as propriedades dos logaritmos, então:

$$\begin{aligned} p(h) &= p_0.e^{-kh} \\ \frac{p(h)}{p_0} &= e^{-kh} \\ \ln\frac{p(h)}{p_0} &= \ln e^{-kh} \\ \ln\frac{p(h)}{p_0} &= -kh \\ h &= -\frac{1}{k}\ln\frac{p(h)}{p_0} \qquad (6.24) \end{aligned}$$

Também é possível calcular k, conhecidas às duas pressões p_1 e p_2 verificadas para alturas h_1 e h_2, substituindo esses dados em (6.23), tem-se:

$$p_1 = p_0.e^{-kh_1}$$

$$p_2 = p_0.e^{-kh_2}$$

Dividindo ambas as equações obtêm-se

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-k(h_1-h_2)} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\frac{p_1}{p_2}}{h_2-h_1} \qquad (6.25)$$

As equações (6.23), (6.24) e (6.25) podem ser aplicadas dentro do contexto da pressão atmosféricas para resolver diversas situações. Segue uma tabela com algumas relações entre altura e a pressão.

Tabela 6.9: Pressão atmosférica em relação a altitude.

Altitude(m)	Pressão(cmHg)
0	76
500	72
100	67
2000	60
3000	53
4000	47
5000	41

Fonte: http://fisicapaidegua.com

Aplicações 1: Uma pessoa está em uma montanha onde a pressão exercida pela coluna de ar vale $60cmHg$, sabendo que a pressão exercida no nível do mar vale $76cmHg$ e que a contante $k = -1,18.10^{-4}m^{-1}$. Assim, determine a altura que se encontra esta pessoa.
Solução:

Denotando por $p(h) = 60cmHg$, $p_0 = 76cmHg$ e $k = -1,18.10^{-4}m^{-1}$. Substituindo estes valores em (6.24), segue que:

$$h = -\frac{1}{k}\ln\frac{p(h)}{p_0} = -\frac{1}{-1,18.10^{-4}}\ln\frac{60}{76} = -\frac{1}{-1,18.10^{-4}}\ln 0,789493 = 2000m$$

Portanto a pessoa se encontra a uma altura de $2000m$.

Aplicações 2: Para determinar a contante k como já foi mencionado basta ter os valores das alturas e das pressões respectivamente. De acordo com a tabela e tomando $p_1 = 41cmHg$ e $p_2 = 76cmHg$ e verificadas para alturas $h_1 = 5000m$ e $h_2 = 0m$. Determine a constante k.
Solução:

Usando a expressão (6.25) e com os valores dados na questão, tem-se:

$$k = \frac{\ln\frac{p_1}{p_2}}{h_2 - h_1} = \frac{\ln\frac{41}{76}}{5000 - 0} = \frac{\ln 0,539473}{5000} = \frac{-0,617161}{5000} = -0,000123$$

Do resultado acima e utilizando a base 10 para representação tem-se que a contante é da forma $k = -1,23.10^{-4}m^{-1}$.

6.12 Modelo de crescimento populacional

O crescimento ou decrescimento da população pode ser observado em período de tempos equiespaçados, considera-se nesta teoria que as taxas de natalidade e mortalidade sejam constantes e que não existam processo de migração, e por isso este modelo pode ser classificado como um crescimento independente da densidade da população. Neste sentido a taxa de crescimento desta população pode ser expressa por:

$$P_{n+1} = P_n + N - M \tag{6.26}$$

Onde P representa a população, N o número de nascimentos e M o número de mortes.

Seja x a taxa de nascimento per capita a cada geração e y a taxa relacionada a mortalidade, isto é, $N = xP_n$ e $M = yP_n$, observe que o número de indivíduos nascidos ou que morreram é proporcional a extensão da população. Por outro lado, substituindo os valores de N e M em (6.26), tem-se que:

$$P_{n+1} = P_n + N - M \Leftrightarrow P_{n+1} = P_n + xP_n - yP_n \Leftrightarrow P_{n+1} = P_n(1 + x - y)$$

Fazendo $x - y = k$, então $P_{n+1} = P_n(1 + k_n)$ e $1 + k_n = r$, daí

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = r \tag{6.27}$$

A equação (6.27) pode ser entendida como a taxa de crescimento da população de uma tempo para o outro. Nesta equação a população cresce de forma constante, assim para um período inicial pode-se ter $P_{n+1} = P_n r$, para um segundo período de igual distância se terá $P_{n+1} = P_n r r = P_n r^2$ de forma sucessiva a população após um determinado período tendo como base o primeiro pode ser dado por:

$$P(t) = P_0 r^t \tag{6.28}$$

Aplicando logaritmo dos dois lados da equação (6.28) tem-se:

$$\begin{aligned} \lg P(t) &= \lg P_0 r^t \\ \lg P(t) &= \lg P_0 + \lg r^t \\ \lg P(t) &= \lg P_0 + t \lg r \end{aligned} \tag{6.29}$$

Da equação (6.29) para verificar t basta isolar e utilizar as propriedades de logaritmos, obtendo $t = \lg_r \frac{P(t)}{p_0}$ Também existe o crescimento continuo quando a população possui nascimentos e mortes continuamente, podendo ser modelado da seguinte forma:

$$P(t) = P_0 e^{wt} \tag{6.30}$$

Sendo $P(t)$ a população futura, P_0 a população presente, w a constante de crescimento e t o período analisado. Aplicando o logaritmo natural dos dois lados pode se obter o tempo em função da população, daí:

$$t = \frac{\ln \frac{P(t)}{P_0}}{w} \tag{6.31}$$

Aplicação 1: Supondo que uma população possua em uma observação inicial 50000 habitantes, e que em um observação final possua 80000, sabendo que $w = 0,123$, determine o tempo em quinquênios que foi necessário para que a população tivesse crescido.
Solução:

Com base na expressão (6.31) e considerando $P(t) = 80000$, $P_0 = 50000$ e $w = 0,123$, tem-se:

$$t = \frac{\ln \frac{P(t)}{P_0}}{w} = \frac{\ln \frac{80000}{50000}}{0,123} = \frac{\ln 1,6}{0,123} = \frac{0,47}{0,123} \cong 4$$

De acordo com o resultado a população passou de 50000 para 80000 em 20 anos.

Aplicação 2: Foi verificado que uma população possuía cerca de 125.239 pessoas no censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística(IBGE), após a realização de outro censo foi verificado que a população teve um aumento chegando a 134.278. Determine o tempo em triênios entre as medições do IBGE considerando que a constante $w = 1,2.10^{-2}$.
Solução:

Pelos dados da questão, substituindo em (6.31), tem-se que:

$$t = \frac{\ln \frac{P(t)}{P_0}}{w} = \frac{\ln \frac{134728}{125239}}{0,012} = \frac{\ln 1,07576}{0,012} = \frac{0,07303}{0,012} \cong 6$$

Observe para que a população tenha o aumento citado a contagem feita pelo IBGE deve ter um período de 18 anos.

6.13 Lei de Benford

Historicamente a lei de Frank Benford ou conhecida também como a lei dos primeiros dígitos surgiu através de algumas obervações. Em 1881 o matemático Simon Newcomb verificou que as páginas de uma típica tábua de logaritmos eram mais sujas no inicio, e com o passar das páginas elas iam ficando mais limpas de acordo como eram colocadas estas tabelas de logaritmos decimais. A partir desta observação ele inferiu que os cientistas usavam mais números que começavam com 1 do que com o 2, usavam mais os números que começavam com 2 do que com o 3, assim sucessivamente. Através desta observação levou-o a concluir que a probabilidade de que um número tenha seu primeiro digito igual a d é igual a:

$$F(d) = \lg\left(1 + \frac{1}{d}\right) \text{ com} 1 \leq d \leq 9 \qquad (6.32)$$

Esta descoberta de Newcomb passou por um tempo sem ser levada em consideração, até que em 1938 o físico Benford conseguiu constatar de forma empírica as observações feitas por Newcomb quando analisou raízes quadradas, dados dispersos entre outros. Em 1961 um outro matemático, Roger Pinkham verificou que a invariância da escala realmente implicava na conhecida lei de Benford. Segue a probabilidade dos dígitos de 1 a 9 configurarem como primeiro digito:

Tabela 6.10: Probabilidade do primeiro dígito.

Primeiro Dígito	Probabilidade
1	30,1%
2	17,61%
3	12,49%
4	9,69%
5	7,92%
6	6,69%
7	5,80%
8	5,12%
9	4,58%

Fonte:gigamatematica.blogspot.com.br

Analisando algumas outras situações pode-se verificar o quanto esta lei é importante, por exemplo, em 1995, Theodore P. Hill mostrou que os números de Fibonacci também obedecia a lei de Benford, sejam os primeiros números da sequência de Fibonacci a saber: 1,1,2,3,5,8,13,21,... e assim por diante. Observando os 300 primeiros números encontram-se as seguintes probabilidades:

Tabela 6.11: Probabilidade do primeiro dígito para a sequência de Fibonacci.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilidade	30	17,67	13	9	8,33	6,33	5,67	5,67	4,33

Fonte:gigamatematica.blogspot.com.br

Hill propôs uma generalização para a lei de Benford para outros algarismos significativos, pois o primeiro digito poderia ser formado por mais algarismos, segue que:

$$F(d_1 d_2 d_3 \cdots d_k) = \lg \left(1 + \frac{1}{d_1 d_2 d_3 \cdots d_k}\right) \tag{6.33}$$

Nestes estudos foram observados que a Lei de Benford possui duas propriedades, a primeira é que a distribuição de dígitos significativos é a única invariante a mudanças da escala utilizada, ou seja, mesma que uma determinada sequência que é regida pela lei de Benford for multiplicada por uma constante k, a sequência ainda continua sendo regida pela lei. A segunda é que mesmo ocorrendo a mudança de base da função logarítmica dos dados analisados, isto não prejudica a distribuição dos números em relação a lei.

Uma das aplicações da lei de Benford está na auditoria fiscal, pois através desta lei são checados os dados com o intuito de verificar se são realmente verdadeiros ou se são falsos, também foi usada nas eleições do Irã em 2009 para verificar fraudes eleitorais. Uma de suas aplicações foi nas mesas de jogos principalmente os eletrônicos pois são mais passiveis de fraudes, é interessante citar também a possibilidade de descobrir possíveis fraudes dentro das empresas e até descobrir em que setor isto ocorreu. Por estes motivos entre outros a lei de Benford ganhou bastante espaço na procura de ações ilícitas.

Aplicação 1: Mostre a probabilidade de ocorrência do primeiro digito ser igual a 5.
Solução:

Fazendo $d = 5$ em (6.32) tem-se:

$$F(d) = \lg \left(1 + \frac{1}{5}\right) = F(d) = \lg \left(\frac{6}{5}\right) = \lg 1,2 = 0,0792$$

Representando o resultado obtido em porcentagem segue que a probabilidade de se obter 5 como o primeiro digito é 7,92%.

Aplicação 2: Verifique a probabilidade de que os dois primeiros dígitos significativos de uma variável sejam iguais a 5 e 2 respectivamente.
Solução:

Usando a expressão (6.33) agora para $d_1d_2 = 52$, segue que:

$$F(d) = \lg\left(1+\frac{1}{52}\right) = F(d) = \lg\left(\frac{53}{52}\right) = \lg 1,01923 = 0,0082$$

Escrevendo o resultando em porcentagem, tem-se que a probabilidade procurada é de 0,82%.

6.14 Colônias de Bactérias

As bactérias são organismos unicelulares simples pois não possuem núcleo, são milhares de diferentes bactérias nas quais a maioria não são prejudiciais a saúde. As bactérias podem ser úteis ou não aos organismos humanos. Por exemplo, uma bactéria que é benéfica ao intestino pode ser prejudicial caso seja encontrada em outro órgão, assim como tem bactérias que por natureza não são benéfica ao ser humano que causam doenças como a tuberculose, leptospirose entre outras. Um dos modelos mais conhecidos para crescimento populacional é o de Malthus[13] , este modelo como já foi mencionado anteriormente, define que o crescimento de uma população em dado instante é proporcional a população total naquele mesmo instante.

Este modelo é justificado pela expressão:

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{6.34}$$

Onde k é uma constante de proporcionalidade, t é o instante de análise, o modelo Malthusiano é muito indicado para populações pequenas, neste sentido após a resolução de (6.34), obtêm-se:

$$P(t) = P_0e^{kt} \tag{6.35}$$

O modelo de Malthus pode ser representado quando se trata de um crescimento dis-

[13]Thomas Robert Malthus (1766-1834) foi um economista britânico. É considerado o pai da demografia por sua teoria para o controle do aumento populacional, conhecida como malthusianismo.

creto por:

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t) \tag{6.36}$$

Fazendo na expressão 6.36 , $P(0) = P_0$ obtêm-se:

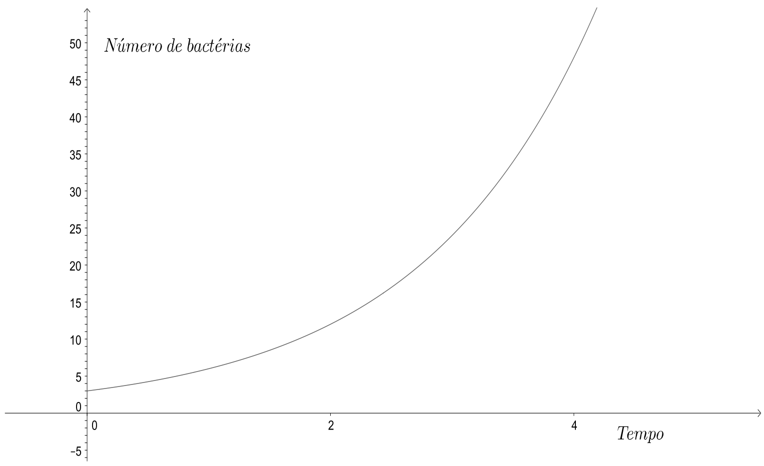
$$P(t) = (1+\alpha)^t.P_{(0)} \tag{6.37}$$

Da expressão (6.37) é possível obter o tempo t de intervalos de crescimento da colonia de bactérias para isto é necessário aplicar o logaritmos de ambos os lados da equação citada, assim:

$$\begin{aligned} \lg P(t) &= \lg{(1+\alpha)^t.P_0} \\ \lg P(t) &= \lg P_0 + t.\lg{(1+\alpha)} \\ t &= \frac{\lg P(t) - \lg P_0}{\lg{(1+\alpha)}} \end{aligned} \tag{6.38}$$

O modelo de crescimento de bactérias possui várias representações gráficas, o gráfico seguinte mostra uma delas sendo que a população está em função do tempo:

Figura 6.10: Crescimento de bactérias



Fonte:Próprio autor

Aplicação 1: Uma população inicialmente com 8000 bactérias cresce 50% a cada hora, assim, determine o número de bactérias que terá apos 8 horas.
Solução:

Tendo $P_0 = 8000$, $\alpha = 0,5$ e $t = 8h$, então o valor da população após 8 horas aplicando os dados obtidos em (6.37) é:

$$\begin{aligned} P(t) &= (1+\alpha)^t.P_{(0)} \\ P(8) &= (1+0,5)^8.8000 = 8000.(1,5)^8 = 8000.(25,628) \cong 205.031 \end{aligned}$$

Portanto o número de bactérias aproximadas procuradas é de 205.031

Aplicação 2: Suponha-se que uma colônia de bactérias possua a característica de aumento de 80%, se a população era de 100.000 e passou a ser de 435.000, determine o tempo necessário para que isto ocorresse.
Solução:

Seja de acordo com a questão $P(t) = 435.000$, $P_0 = 100.000$ e $\alpha = 0,8$, usando a expressão (6.38) para resolver, tem-se:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\lg P(t) - \lg P_0}{\lg{(1+\alpha)}} \\ t &= \frac{\lg 435000 - \lg 100000}{\lg{(1+0,8)}} = \frac{5,6384-5}{0,2552} = \frac{0,6384}{0,2552} \cong 2,5 \end{aligned}$$

Portanto o período necessário para que esta população cresça de acordo com os dados é de 2,5 unidades de tempo.

6.15 Decaimento radioativo

O decaimento pode ser entendido como o rompimento dos isótopos instáveis presentes no núcleo devido a instabilidade atômica. Assim, átomos com passar do tempo emitem partículas que se transformam em outras, ou seja, a quantidade inicial presente diminui de forma constante e igual a k de forma proporcional ao instante analisado. Neste contexto essa constante de redução é verificada de forma empírica pois depende da substância analisada. Por exemplo, o isótopo do Urânio é desintegrado quando seu núcleo se rompe, a partir daí na primeira etapa é produzido o Tório, que também se desintegra originando o Protactínio e vai se determinando outras substâncias até a última etapa que aparece o chumbo, como o chumbo é um isótopo estável não ocorre desintegração do mesmo. A quantidade presente $C(t)$ pode ser expressa inicialmente por:

$$C(t) = C_0(1-k)^t \tag{6.39}$$

Onde C_0 é a quantidade inicial de substancia, k a constante de redução e t o tempo para a redução desejada. Suponha-se que esta desintegração ocorra em um intervalo de $\frac{1}{n}$ segundos, daí a concentração existente será de:

$$C_0 - \frac{k}{n}C_0 = C_0\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Isto para uma desintegração, observa-se que para n segue que:

$$C_0\left(1-\frac{k}{n}\right).\left(1-\frac{k}{n}\right).\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n \Leftrightarrow C(t) = C_0\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \tag{6.40}$$

Supondo agora que o número de desintegrações seja infinito, isto é, $n \to \infty$, daí:

$$C(t) = \lim_{n\to\infty} C_0\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} C_0\left(1-\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^n = \lim_{t\to\infty} C_0\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t\alpha} = C_0e^{-\alpha}$$

No limite anterior foi usado $t = -\frac{n}{\alpha}$ e o fato de que $\lim_{t\to\infty} C_0\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, daí pela variação desejada em que a cada instante a massa inicial reduzida equivale $\frac{\alpha t}{n}$, então tem-se que:

$$C(t) = C_0e^{-\alpha t} \tag{6.41}$$

Caso deseja-se obter o tempo para um determinado decaimento, pode ser usado uma outra expressão obtida da aplicação do ln dos dois lados de (6.41), daí:

$$\begin{aligned} \frac{C(t)}{C_0} &= C_0e^{-\alpha t} \\ \ln\frac{C(t)}{C_0} &= \ln e^{-\alpha t} \\ t &= -\frac{\ln\frac{C(t)}{C_0}}{\alpha} \end{aligned} \tag{6.42}$$

A equação (6.42) possibilita determinar o tempo t ocorrido no decaimento radioativo.

Aplicação 1: Uma certa substância radioativa possui uma massa de $40g$ que se desintegra até 32 gramas em um período de 8 horas, assim, determine o coeficiente de redução α.

Solução:

Sejam os dados $C(t) = 32g$, $C_0 = 40g$ e $t = 8$, usando a variação da expressão (6.42) segue que:

$$\alpha = -\frac{\ln \frac{C(t)}{C_0}}{t} = -\frac{\ln \frac{32)}{40}}{8} = -\frac{\ln 0,8}{8} = -\frac{(-0,2231)}{8} \cong 0,027$$

Portanto a constante de decaimento na situação proposta vale 0,0027.

Aplicação 2: O volume de um fluido extracelular pode ser medido injetando-se sulfato de sódio marcado com S^{35}. Uma tal fonte tem uma atividade inicial de $2mCi$. Sabendo-se que a constante de redução vale $\alpha = 0,00797d^{-1}$, após quanto tempo a atividade cai a $0,5mCi$.

Solução:

De acordo com os dados $C(T) = 0,5mCi = 0,5.10^{-3}mCi$, $C_0 = 2mCi = 2.10^{-3}Ci$ e $\alpha = 0,00797d^{-1}$, substituindo este dados em (6.42) segue que:

$$t = -\frac{\ln \frac{C(t)}{C_0}}{\alpha} = -\frac{\ln \frac{0,5)}{2}}{0,00797} = -\frac{\ln 0,25}{0,00797} = -\frac{(-1,3862)}{0,00797} = \frac{1,3862}{0,00797} \cong 174$$

Portanto nas condições exposta na questão o tempo necessário será de 174 dias

6.16 Unidade de Haugh

Os métodos para avaliar a qualidade dos ovos são variados, entre eles, existe a unidade de Haugh que mede a quantidade somente de proteínas. Esta medida se baseia na massa do ovo e na altura do albúmen(que nada mais é do que a clara) quando quebrado em superfície considerada plana. Este método foi proposto em 1937 por Raymond Haugh, em seus experimentos ele observou que a massa do ovo e a altura da clara densa se relacionam pela expressão:

$$UH = 100 \lg \left(H - 1,7M^{0,37} + 7,6\right) \tag{6.43}$$

Em que H representa a altura da clara densa e M a massa do ovo. Através desta expressão foi proposta uma tabela onde a qualidade do ovo está de acordo com a relação das unidade de Haugh. Observe-a:

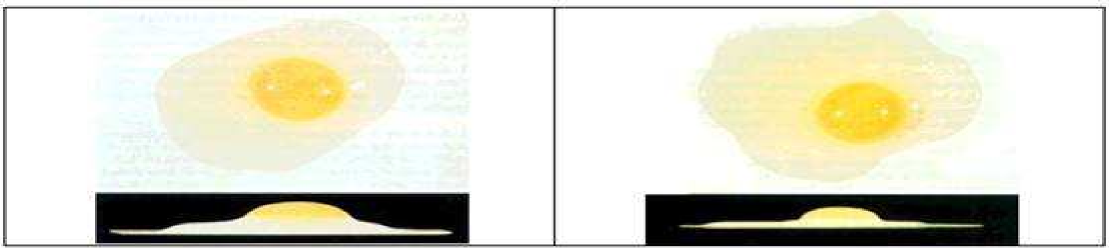
Tabela 6.12: Classificação de ovos de acordo com Haugh

U.H	Descrição Qualitativa
90	Excelente
80	Muito bom
70	Aceitável
65	Regular
60	Mínimo
55	Pobre
50	Inaceitável

Fonte:ocw.um.es/cc.-de-la-salud

Para assegurar que o teste seja feito de forma adequada é preciso que a temperatura do ovo esteja entre 7^oC e 15^oC, após isto verificar a massa do ovo logo em seguida se quebra o ovo de tal forma que a clara não seja prejudicada, após isto deve colocar o conteúdo do ovo em uma superfície plana e cuidadosamente fazer a medição da altura da clara, observe:

Figura 6.11: Altura do Albúmen



Fonte:ocw.um.es/cc.-de-la-salud

Os instrumentos utilizados para fazer esta medição são vários, mas a variação da altura da clara está relacionada a vários fatores como a idade das galinhas, a alimentação entre outros.

Aplicação 1: Um determinado ovo possui uma massa de $56g$ e foi verificado com um micrômetro que sua altura é $6mm$, verifique com base na tabela de qualidade que faixa este ovo pode ser classificado.

Solução:

Usando a expressão (6.43) e sabendo que $M = 56g$ e $H = 6mm$, a unidade de Haugh é igual a:

$$
\begin{aligned}
UH &= 100 \lg \left(H - 1,7M^{0,37} + 7,6\right) \\
UH &= 100 \lg \left(6 - 1,7(56)^{0,37} + 7,6\right) \\
UH &= \lg 6,0617 = 100(0,7825) = 78,25
\end{aligned}
$$

Portanto a $UH = 78,25$, e pela tabela tem-se que o ovo está entre a categoria aceitável e muito bom.

Aplicação 2: O ovo é uma fonte rica em ferro, zinco, proteína, fósforos entre outros, o ano de 2016 a produção bateu recorde, sendo o estado de São Paulo como maior referencia na produção de ovos do Brasil. Supondo que uma determina granja produza uma variedade enorme de ovos usando como parâmetro de qualidade a unidade Haugh. Dentro do seu processo de classificação ela separa ovos para exportação sendo estes lotes com $UH = 90$, assim, sabendo que a massa deste ovos tem em média $58,5g$, verifique a altura da clara densa para esses ovos analisados.

Solução:

Da questão tem-se que $UH = 90$ e $M = 58,5g$, substituindo em (6.43) segue que:

$$
\begin{aligned}
UH &= 100 \lg \left(H - 1,7M^{0,37} + 7,6\right) \\
90 &= 100 \lg \left(H - 1,7(58,5)^{0,37} + 7,6\right) \\
0,9 &= \lg \left(H - 0,0611\right) \\
10^{0,9} &= H - 0,0611 \\
H &= 7,94 + 0,06 \cong 8mm
\end{aligned}
$$

Portanto a altura que deve ter o albúmen deste ovo para que a sua unidade de Haugh seja igual a 90 com massa de $58g$ deve ser de $8mm$.

Capítulo 7

CONCLUSÃO

Os logaritmos surgiram para atender as necessidades dos cálculos bastante trabalhosos no final do século XVI, o aprofundamento nesta área e a consequentemente sistematização do seu estudo trouxeram grandes benefícios de aplicações para a ciência.

A ideia funcional dos logaritmos e a sua grande aplicabilidade foram vista sobre diversos ângulos neste trabalho, como a interessante lei Benford, a Unidade de Haugh, a dimensão fractal e entre tantas outras em um total de 16 aplicações. Assim, nesta pesquisa, os logaritmos foram abordados inicialmente com caráter histórico, posteriormente teórico com a intenção de desenvolver alguns conceitos importantes, como as propriedades, equações, inequações e função justificando-as por meio de demonstrações.

A visão teórica apresentada no decorrer do trabalho foi utilizada como base para mostrar as diversas aplicações que envolvem a ideia de logaritmos, cada modelagem com um pouco da sua história ou da lei de sua formação, os teóricos envolvidos e aplicações relacionadas com a situação proposta, algumas com suas leis de modelagens com ideia inicial de exponencial, porém sendo tratada por uma visão logarítmica dentro das aplicações abordadas. Analisando estas diversas aplicações é possível verificar o quanto é rica a dimensão para o uso dos logaritmos, e o quanto um aluno é possível aprender e entender tendo uma visão mais ampla de tais modelagens.

Por isso, este trabalho além de seu caráter educativo, com a intenção de fortalecer os conhecimentos teóricos sobre os logaritmos, trás também uma contribuição informativa com o objetivo de mostrar as diversas aplicações, sendo estas, de grande desconhecimento por parte dos alunos do ensino médio ou que o utilizam o tema para estudar, fazendo as vezes que o assunto não seja tão importante como deveria, haja vista a pouca explanação de sua aplicabilidade em sala de aula.

Neste sentido, espera-se que os alunos que se utilizarem deste material assim como os professores, possam se sentir motivados a buscarem mais aplicações, mais situações onde os logaritmos possam ser identificados, conhecendo outras visões e assim utilizando-as com o objetivo de fortalecer os laço deste tema com a ciência e assim colocando os logaritmos como protagonistas deste mundo tão belo de aplicações.

As situações-problemas em que os logaritmos estão envolvidos devem ser pesquisadas, modeladas e idealizadas, pois são em grande quantidades e de importâncias diversas para a ciência e para as pessoas, contribuindo de forma efetiva para o enriquecimento do conhecimento e de novas perspectivas para o avanço da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ASTROWEB. **Estrelas**: Distâncias e Magnitudes. Disponível em: <http://astroweb.iag.usp.br/ dalpino/AGA215/APOSTILA/cap08cor.pdf>. Acesso em: 4 de outubro de 2016.

[2] BASSANEZI, Rodney Carlos, **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002. 385p.

[3] BÔAS, Newton V.; DOCA, Ricardo H.; BISCUOLA, José G. Física Para o Ensino médio volume 2. **Física Para o Ensino médio**, São Paulo: Saraiva, 2010. 448p.

[4] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Base nacional curricular comum**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2016.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

[7] CAVALCANTI, Bruno. **Escala de Magnitude Momento (MMS)**. Disponível em: <http://www.windows2universe.org/earth/geology/quake_1.html&lang=sp>. Acesso em: 26 de agosto de 2016.

[8] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[9] DANTE, Luiz Roberto. Matemática para o ensino médio volume 1. **Contextos e Aplicações**, São Paulo: 2. Ed. Ática, 2014. 300p.

[10] DINIZ, Maria Ignez.; SMOLE, Kátia Stocco. Matemática para o ensino médio volume 1. **Matemática ensino médio**, São Paulo: 6. Ed. Saraiva, 2010. 320p.

[11] ECOLOGIA. **Ecologia das populações**: Modelos de densidade independente. Disponível em: <http://ecologia.ib.usp.br/ecopop/doku.php?id=exercicios:exerc2>. Acesso em: 25 de setembro de 2016.

[12] FELIX, Rodrigo Aécio. **Uma forma de apresentação da interpretação geométrica do logaritmo natural e estudo de algumas de suas propriedades**. 2013, 102f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

[13] FONSECA, João José Saraiva. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

[14] GARSTKA, Susana. **A Matemática nas práticas sociais: Efeitos e Consequências da ingestão de álcool**. 2013, 66f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática)- Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Instituto e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

[15] GIGAMATEMÁTICA. **Lei de Benford**. Disponível em:<http://gigamatematica .blogspot.com.br/2011/07/lei-de-benford.html>. Acesso em: 12 de outubro de 2016.

[16] GIL, Antônio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 3. São Paulo: Atlas, 1991.

[17] GIOVANNI, José Ruy.; BONJORNO José Roberto. Matemática para o ensino médio volume 1. **Matemática completa**: 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005.285p.

[18] GUIA DO ESTUDANTE. **Pressão atmosférica**. Disponível em <http://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/fisica-pressao-atmosferica/>. Acesso em: 8 de setembro de 2016.

[19] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Logaritmos. 9. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[20] IEZZI, Gelson et al. Matemática do ensino médio volume 1. **Matemática Ciência e Aplicações**: 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.303p.

[21] JULIANI, Juliana Pimentel. **Matemática e Música**. 2003, 85f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática)- Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003.

[22] JÚNIOR , Dulcídio Braz. **Terremotos e a escala Richter**. Disponível em: <http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2010-01-10_2010-01-16.html> . Acesso em: 30 de agosto de 2016.

[23] LEONARDO, Fábio Martins de(org.). Matemática para o ensino médio volume 1.**Conexões com a Matemática**: 2. Ed. São Paulo: Moderna, 2013.306p.

[24] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: Livro Técnico S.A, 1973.

[25] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

[26] LIMA, Elon Lages et al. Matemática do Ensino Médio volume 1. **Matemática**, Rio de Janeiro: 9. Ed. SMB, 2006. 240p.

[27] LIMA, Cristiane Petry . Aula de EDO - **Lei do Resfriamento de Newton**. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/cristianepetrylima/aula-de-edo-lei-do-resfriamento-de-newton>. Acesso em: 20 de Julho de 2016.

[28] MARTINS, Manoel Marino. **Logaritmos**. 2000, 49f. Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação em Licenciatura em Matemática)- Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

[29] MORGADO, Augusto César.; CARVALHO Paulo Cezar Pinto. **Coleção Profmat**: Matemática Discreta, Rio de Janeiro: 1. ed. SBM. 195p.

[30] MOL, Gerson; SANTOS, Wildson. Química para o Ensino Médio volume 1. **Química Cidadã**, São Paulo: 2. ed. FTD, 2013.320p.

[31] MUDANÇAS ABRUPTAS. **A melhor lei contra a fraude**. Disponível em:< http://www.mudancasabruptas.com.br/Benford.html>. Acesso em: 10 de novembro de 2016.

[32] NEWTON, Villas B.; DOCA, Ricardo H.; BISCUOLA, Gualter J. Física para o Ensino Médio volume 2. **Física**, São Paulo: 1. ed. Saraiva, 2010. 448p.

[33] NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006, 78f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática)- Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2006.

[34] ORSO, Priscilla. **Diagnóstico da aplicação de modelagem Matemática para entendimento do crescimento bacteriano**. 2014, 40f. Monografia(especialização em Ensino de Ciências)- Diretoria de Pesquisa e pós-graduação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2014.

[35] OBSTAT, Nihil. **Novas tábuas de Logaritmos**. São Paulo: Paulo de Azevedo, 1937. 175p.

[36] PAIVA, Manoel. Matemática para o ensino médio volume 1. **Matemática**, São Paulo: 1. Ed. Moderna, 2010.362p.

[37] PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Calos Magno A. Física para o Ensino Médio volume 2. **Física Ciência e Tecnologia**, São Paulo: 1. ed. Moderna, 2005, 214p.

[38] ROBALLO, Murilo Sérgio **Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas**. 2014, 67f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Departamento de matemática, Instituto de Ciências exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

[39] ROCHA, Felipe Rigos da.; CYMROT, Raquel. **Aplicação da lei de Benford em dados provenientes de controle estatístico de processos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 29, 2009, Salvador. Anais. Salvador: ABEPRO,2009.

[40] SEARA DA CIÊNCIA. **Datação Isotópica**. Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/datacao/datacao4.htm> . Acesso em: 28 de Julho de 2016.

[41] SILVA, Flávia S. M.;ARITA, Andréa C. P.; GAMBERA, Laura R. Revista eletrônica Paulista de Matemática: **A geometria da esponja de Menger**. Disponível

em:<http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/vfull/3edicao.pdf>.Acesso em: 08 jun. 2016, 21:08.

[42] SILVA, Josiel Pereira da. **Logaritmos e Aplicações**. 2013, 57f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências e de Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.

[43] SIMONATO, Adriano Luís.; GALLO, Kenia Cristina.; Revista online: **Aplicação de modelagem no crescimento populacional Brasileiro**. Disponível em: <http://www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario/9/19042010084307.pdf>. Acesso em: 14 de novembro de 2016.

[44] SOARES, Costa Evanildo. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011, 142f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Programa de pós-graduação em ensino de Ciências naturais e Matemática, Centro de Ciências Exatas e da terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

[45] SOUZA, Jorge Raimundo da Trindade. **Orientações e Normas Para Elaboração de Trabalhos Acadêmicos**. Belém: Ed. da UFPA, 2013.79p.

[46] SOUZA, Joamir. Matemática para o ensino médio: **Novo Olhar**.São Paulo: 2. Ed. FTD, 2013. 176p.

[47] VERONEZ, Michele R. D.; BOASCZIK, Vanessa M.; KMITA, Aline. **A modelagem Matemática no uso de fones de ouvido em mp3 players**. ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 4, 2010, Maringá. Anais. Maringá: FAFIUV, 2010.

ANEXO

A REAL ANÁLISE DE INVESTIMENTOS E UMA DESIGUALDADE QUASE BERNOULLI

RENATO FABRÍCIO COSTA LOBATO
CUBT/UFPA
<renatolobato@ufpa.br>

ESTIMANDO INTEGRAIS

A bem da verdade, sabemos que o conhecimento matemático torna-se muito mais atraente, quando transcende o limite do teórico e torna-se palpável, porém não menos elegante, desde que revestido pelo rigor peculiar da Matemática.

A Análise Real, é essa ciência "elegante", quando se fala em rigor, muito bem vivido pelos matemáticos puristas. Bem, estudar uma aplicabilidade da Análise Real, nos parece interessante e motivador. Eis que propomos uma pequena aplicação em finanças. Não temos a pretensão de mostrar algo novo, até porque supomos que alguém já o tenha feito, porém, digamos que estejamos organizando algumas idéias de uma forma mais didática. Para iniciarmos nossa explanação:

Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para $x > 0$. Desde que f seja contínua em qualquer intervalo fechado $I = [a, b] \subset (0, +\infty)$ definimos o logarítmo natural, como sendo:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{h} dh, \text{ com } x > 0 \tag{1}$$

Agora, observe que:

$$\frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{1+h} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Como sabemos, a integral preserva ordem. Dessa feita, podemos escrever:

$$\int_0^x \frac{1}{1+nh} dh \leq \int_0^x \frac{1}{1+h} dh \ \forall \ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

No lado esquerdo de (2) façamos:

$$u = 1 + nh \Longrightarrow du = ndh, \text{ isto é, } dh = \frac{1}{n} du$$

Por outro lado, para $h = 0$, teremos $u = 1$ e para $h = x$, $u = 1 + nx$. Daí,

$$\int_0^x \frac{1}{1+nh}dh = \frac{1}{n}\int_1^{1+nx}\frac{1}{u}du \tag{3}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (3), resulta:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_1^{1+nx}\frac{1}{u}du &= \frac{1}{n}\Big[\ln(1+nx)-\ln(1)\Big]\\ &= \frac{1}{n}\ln(1+nx)\end{aligned} \tag{4}$$

No lado direito de (2) façamos:

$$w = 1+h \Longrightarrow dw = dh$$

Por outro lado, para $h = 0$, teremos $w = 1$ e para $h = x$, $w = 1+x$. Daí,

$$\int_0^x \frac{1}{1+h}dh = \int_1^{1+x}\frac{1}{w}dw \tag{5}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (5), resulta

$$\begin{aligned}\int_1^{1+x}\frac{1}{w}dw &= \Big[\ln(1+x)-\ln(1)\Big]\\ &= \ln(1+nx)\end{aligned} \tag{6}$$

Portanto de (2), (4) e (6), resulta

$$\frac{1}{n}\ln(1+nx) \leq \ln(1+x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\ln(1+nx) \leq n\ln(1+x) = \log(1+x)^n$$

Isso significa que:

$$(1+nx) \leq (1+x)^n \tag{7}$$

Agora, a pergunta mais cabível para ocasião:

O que isso tem haver com finanças?

Esperamos lhes responder! Sabemos que a capitalização simples é aquela em que a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial; não incidindo, pois, sobre os juros acumulados. Neste regime de capitalização a taxa varia linearmente com a variável temporal. Diferentemente da simples, a capitalização composta incorpora os juros ao capital a cada novo período, é o que chamamos de juros sobre juros. No regime de capitalização composta a taxa varia exponencialmente com o tempo.

Vamos considerar um capital $C \neq 0$ capitalizado em um período n a uma taxa i. Os montantes para as capitalizações simples e composta, são dados respectivamente por:

$$M_s = C(1+ni) \tag{8}$$

$$M_c = C(1+i)^n \tag{9}$$

Dividindo (8) por (9), obtém-se:

$$\frac{M_s}{M_c} = (1+ni)(1+i)^n \tag{10}$$

Aplicando (7) em (10), com $x = i$, resulta

$$\frac{M_s}{M_c} \leq 1 \Longrightarrow M_s \leq M_c$$

Tal resultado, não é nenhuma novidade para nobre leitor, pois tratamos de dois tipos de funções clássicas, isto é:

Uma de Crescimento Polinomial: $M_s(n) = 1 + ni$

A outro de Crescimento Exponencial: $M_c(n) = (1 + i)^n$

Esperamos aqui motivar o leitor curioso, a buscar outros aprofundamentos, concebendo dessa forma, um aprimoramento gradual e eficiente em Matemática.

A busca pela excelência em nosso ofício, é um arduo trabalho, no entanto, envidar esforços nesse sentido, sempre tem algo de recompensador, ou seja, o sentimento de dever cumprido.

A VERDADEIRA DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Seja r um real, de tal sorte que $r > -1$, então tem-se:

$$(1 + r)^n \geq 1 + nr, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{11}$$

Prova

A demonstração desse fato, se dá por indução.

Veja-se que a desigualdade é válida para $n = 1$.

Supondo agora a validade para n_0, mostremos que é válida para $(n_0 + 1)$.

Com efeito, basta tomarmos em (11) $n = n_0$ e como $(1+r) > 0$, podemos multiplica-lo em ambos os membros de (11).Daí obtemos

$$(1 + r)^{n_0+1} \geq (1 + n_0 r)(1 + r) \tag{12}$$

Donde segue-se que:

$$(1 + r)^{n_0+1} \geq 1 + r + n_0 r + n_0 r^2 \tag{14}$$

Veja-se que $n_0 r^2 > 0$, portanto, pode ser suprimido do membro direito de (14) e ainda preservarmos a desigualdade. Assim:

$$(1 + r)^{n_0+1} \geq 1 + (n_0 + 1)r \tag{15}$$

Isso finda a demonstração requerida.

Em homenagem a ***Lívia Renata Vale Franco de Sá***

REFERÊNCIAS

[1] Boccaletti, D. *From The Epicycles of The Greeks to Kepler's Ellipse – The Breakdown of The Circle Paradigm.* Cosmology Through Time - Ancient and Modern Cosmology in The Mediterranean Area, Monte Porzio Catone (Rome), Italy, 2001.

[2] Bortolossi, H. J. *Epiciclos e Interpolação Trigonométrica.* Conteúdos Digitais para O Ensino e A Aprendizagem de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2013. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/epiciclos/>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

[3] Kleiner, I. *Excursions in The History of Mathematics.* New York: Birkhäuser, 2012.

[4] Pawley, M. G. *Closed Plane Curves Described by Finite and Infinite Sums of Rotating Vectors.* Journal of The Franklin Institute, v. 307, n. 3, p. 155-173, 1979.