SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAIMUNDO DO SOCORRO COELHO BARRA

UMA PROPOSTA DE ENSINO ENVOLVENDO OS TEMAS JUROS COMPOSTOS, FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

BELÉM - PARÁ
2017

RAIMUNDO DO SOCORRO COELHO BARRA

UMA PROPOSTA DE ENSINO ENVOLVENDO OS TEMAS JUROS COMPOSTOS, FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Dissertação de Mestrado apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará.
Orientadora: Profª. Dra. Irene Castro Pereira.

BELÉM - PARÁ
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós Graduação do ICEN

Barra, Raimundo do Socorro Coelho
Uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica/ Raimundo do Socorro Coelho Barra; orientadora, Irene Castro Pereira.-2017.
78 f.: il 29 cm
Inclui bibliografias

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2017.

1. Matemática-Estudo e ensino (Ensino Médio). 2. Juros compostos. 3. Funções exponenciais. 4. Séries geométricas. I. Pereira, Irene Castro,orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 510.7

RAIMUNDO DO SOCORRO COELHO BARRA

UMA PROPOSTA DE ENSINO ENVOLVENDO OS TEMAS JUROS COMPOSTOS, FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Dissertação de Mestrado apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará.
Orientadora: Prof^{a}. Dra. Irene Castro Pereira.

Data da Apresentação: 02 de março de 2017.

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Irene

Prof^{a}. Dra. Irene Castro Pereira.
PROFMAT / ICEN / UFPA - Presidente/Orientadora

Fernandes

Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
PROFMAT / ICEN / UFPA - Membro

Prof. Dr. Rubenvaldo Monteiro Pereira
UFPA - Campus Universitário do Tocantins - Membro

Aos meus pais pela combinação perfeita entre o sustento e o incentivo baseados na Lei de Amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus inteligência suprema e causa primeira de todas as coisas.

A Jesus Cristo modelo e guia para toda a humanidade.

Aos meus pais Odilon Pantoja Barra (Em Memória) e Maria de Lourdes Coelho Barra que sempre me ensinaram o caminho do amor, da justiça e da caridade e deram-me todas as condições pra estudar.

Aos meus amores, Patrícia (esposa), Ana Carolina, Ana Laura e Ana Luísa (filhas) pela compreensão, pelo incentivo e por serem sempre meu porto seguro.

Aos meus irmãos Barra, Socorro, Mere, Sônia, Odilon, Wagner e Monik, pois de alguma forma contribuíram para este momento ímpar na minha vida.

Aos meus sobrinhos Tiago e Taline e a minha sogra Ercila por me acolherem em suas casas no período do curso.

Aos meus amigos e demais familiares pelo incentivo e pela força.

Aos meus amigos/irmãos do curso Gilcleison, Hebison, Haroldo, Miguel, Robylson. Rondinelli, Rodrigo, Andrey e João Carlos pela convivência, pelo aprendizado e pela amizade.

A minha orientadora professora Doutora Irene Castro Pereira pela sua disponibilidade, dedicação e compromisso dando-me todas as condições para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os meus professores doutores do PROFMAT: Valcir João Farias, Anderson Campelo, Augusto César dos Reis, Anderson Ramos, Renato Fabrício Lobato, Irene Pereira, Tânia Valdivia, José Augusto Fernandes e Aldo Vieira.

Aos membros da banca examinadora pela revisão do texto e sugestões valiosas.

A Universidade Federal do Pará e demais Instituições que com este formato de Mestrado me proporcionaram fazê-lo, de outro modo seria quase impossível.

Aos proprietários e tripulantes do Barco Motor Jubileu pela convivência e amizade construída durante minhas viagens Cametá-Belém-Cametá para fazer este curso.

"Quem elabora uma proposta de ensino é o primeiro a repensar sua prática docente."

Raimundo Barra

RESUMO

O trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino envolvendo os temas Juros Compostos, Função Exponencial e Progressão Geométrica. Nesta proposta de ensino os temas são iniciados com um problema contextualizado, relacionado ao cotidiano dos estudantes do 1º ano do ensino médio do município de Cametá ou com o de outras áreas do conhecimento. A resolução desses problemas, que deve ser feita pelos estudantes com auxílio do professor, proporciona a familiarização com os temas em estudo e, em alguns casos, a definição dos mesmos. No decorrer da proposta, trabalha-se as relações entre os temas, finalizando com um problema envolvendo os três temas de modo simultâneo. Para elaboração desta proposta de ensino, são realizadas comparações entre livros didáticos utilizados nas escolas do Brasil para verificar como os autores apresentam os temas deste trabalho. Foi realizado também, um estudo nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com objetivo de verificar as orientações pedagógicas contidas nesses documentos oficiais, relacionados aos temas objeto deste trabalho. Existe, também, uma lista de questões do novo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) envolvendo os temas Juros Compostos, Função Exponencial e Progressão Geométrica, e antes de apresentá-la, comenta-se um pouco sobre o novo ENEM. Esta proposta de ensino, para além da sua elaboração, tem como finalidade instigar o professor, otimizar o tempo ensinando os temas de forma simultânea, fortalecer e ampliar a autonomia do professor e dos estudantes.

Palavras-chave: Proposta de Ensino. Juros Compostos. Função Exponencial. Progressão Geométrica.

ABSTRACT

This work has as a goal to present a teaching proposal involving the subjects Compound Interest, Exponential Function and Geometric Progression. In this teaching proposal the subjects are started with a contextualized problem, related to the daily life of students of the 1st year of high school in Cametá districts, or also targeting other knowledge areas. The solution of these problems, which must be done by the students with the help of the teacher, provides familiarity with the subjects through study and, in some cases, the definition of the same. Throughout the proposal, the relationships between these themes are worked out, finishing with a problem involving the three subjects simultaneously. Making this teaching proposal, comparisons were made between some textbooks used in public schools in Brazil to verify how the authors present the contents of this work. A study was also carried out on the National Curricular Parameters for High School (NCPHS) and on the National Curricular Common Base (NCCB) with the objective of verifying the pedagogical guidelines contained in these official documents related to the contents of this work. There is also a list of questions of the new National High School Examination (NHSE) involving the topics Compound Interest, Exponential Function and Geometrical Progression, and before presenting the list of questions, some discussions are made on the new NHSE. This teaching proposal, besides its elaboration, aims to instigate the teacher, gain a significant time over teaching the three subjects simultaneously, strengthen and extend the teacher's and the students' autonomy.

Keywords: Teaching Proposal. Compound Interest. Exponential Function. Geometric progression.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Na maioria das vezes, nós professores de matemática, ensinamos os conteúdos de forma fragmentada, não nos perguntando, por exemplo, existem temas que se relacionam? Temas correlatos, podem ser contextualizados? O que fazer para que os temas sejam significativos para os alunos?

Esses questionamentos me parecem pertinentes, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio relacionado a área de Matemática, um dos objetivos nesse nível é o de levar o aluno a "estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo." (Brasil, 2000, p. 42)

Procurando responder aos questionamentos feitos anteriormente, considerando o objetivo supra citado, considerando ainda, minha vida na docência e minha vivência como aluno do Mestrado Profissional, apresento neste trabalho uma proposta de ensino envolvendo os temas Juros Compostos, Função Exponencial e Progressão Geométrica. Nesta proposta pretendo, com relação aos estudantes, dá condições para que os mesmos construam seus conhecimentos sobre os temas e percebam relações entre eles, com relação aos professores, oportunizar um material que poderá contribuir para um ganho significativo de tempo e de poder ensinar de forma simultânea esses temas. Dito isto, apresento nos parágrafos seguintes, como este trabalho está estruturado.

No capítulo 1, temos a introdução, onde comento sobre o trabalho e da forma que o mesmo ficou estruturado.

No capítulo 2, descrevo e comparo como os autores Dante (2013a), Iezzi et al (2013a) e Paiva (2013) apresentam o tema Função Exponencial em seus respectivos livros didáticos em uso nas escolas, bem como se os mesmos a relacionam com os temas Progressão Geométrica e Juros Compostos.

No capítulo 3 de forma análoga ao capítulo 2, descrevo e comparo como os autores supra citados apresentam o tema Progressão Geométrica e se os mesmos a relacionam com os temas Função Exponencial e Juros Compostos.

No capítulo 4, como feito nos capítulos 2 e 3, descrevo e comparo como os autores Dante (2013b), Iezzi et al (2013b) e Paiva (2013) apresentam o tema Juros Compostos em seus respectivos livros didáticos em uso nas escolas públicas do Brasil, bem como se os mesmos o relacionam com os temas Função Exponencial e Progressão Geométrica.

No capítulo 5, analiso os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular buscando nos mesmos as orientações pedagógicas que balizem a proposta de ensino apresentada neste trabalho.

No capítulo 6, apresento a proposta de ensino, baseada na resolução de problemas e na construção do conhecimento pelo estudante.

No capítulo 7, faço um apanhado sobre alguns aspectos importantes do novo Exame Nacional do Ensino Médio, e em seguida apresento uma lista de questões do mesmo, todas resolvidas, envolvendo os temas Juros Compostos, Função Exponencial e Progressão Geométrica.

No capítulo 8, faço algumas considerações sobre a experiência de realizar este trabalho e o que espero do mesmo.

Capítulo 2

A Função Exponencial

Neste capítulo descrevo e comparo a forma como os autores Dante (2013a), Iezzi et al (2013a) e Paiva (2013) apresentam o tema função exponencial em seus respectivos livros didáticos em uso nas escolas, bem como se os mesmos a relacionam com os temas progressão geométrica e juros compostos. No decorrer da descrição e das comparações, faço comentários e observações que julgo necessários para os objetivos deste trabalho.

2.1 A Função Exponencial apresentada por Dante

O autor Luiz Roberto Dante, Livre docente em Educação Matemática pela Universidade do Estado de São Paulo (Unesp) - Campus Rio Claro, apresenta em Dante (2013a), na abertura de cada unidade, duas páginas que proporcionam o primeiro encontro com os temas que serão abordados na mesma.

Na unidade que trata do tema função exponencial e função logarítmica as duas primeiras páginas trazem informações sobre terremotos ou sismo, placas tectônicas, energia liberada e a escala Richter, conteúdos que serão tratados de forma aprofundada no assunto logaritmo. Esses conteúdos também são estudados pela Geografia, evidenciando que Dante (2013a), conduzindo-se interdisciplinarmente, faz conexão com outra área do conhecimento.

Dante (2013a) apresenta também, na abertura de cada capítulo um texto introdutório com o objetivo de apresentar, por meio de uma situação real ou contexto histórico, o tema a ser estudado.

No caso do capítulo que trata do tema função exponencial, por exemplo, ele comenta sobre radioatividade e define meia-vida, isto é, o tempo que uma substância leva para que metade de seus átomos se desintegrem. A partir daí, observando a padronização que surge para x meias-vidas transcorridas, obtém uma função chamada exponencial, uma vez que a variável x se encontra no expoente.

Em seguida, Dante (2013a) apresenta dois exemplos emblemáticos. O primeiro, trata de uma cultura de bactérias onde a população dobra a cada hora. Sugere então que os alunos formem duplas para completarem a Tabela 2.1 com o número de bactérias nas 10 primeiras horas, considera que há 1 000 bactérias no início da pesquisa.

Tabela 2.1: Números de Bactérias

Horas após o início	**Número de bactérias**	**Proporção entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial**
0	1 000	1
1	2 000	2

Fonte: Dante (2013a)

Depois que a dupla construir e fizer o solicitado o autor pede que reflitam sobre as seguintes questões:

> a) Na 1ª hora, a quantidade de bactérias aumentou em 1 000 (era 1 000, foi para 2 000). E, na 2ª hora? E na 3ª hora? Por que esse valor não é sempre o mesmo?
> b) Existe uma lógica na sequência de valores que indicam a proporção entre a quantidade de bactérias em determinada hora e o valor inicial? Qual é essa lógica?
> c) Usando a lógica interpretada no item anterior, qual deve ser a proporção entre a quantidade de bactérias após 20 horas e a quantidade inicial? E qual deve ser a quantidade de bactérias após 20 horas?
>
> d) Qual deve ser a quantidade de bactérias após x horas? (DANTE 2013a, p. 147)

Neste exemplo, o autor sugere aos professores que estimulem os alunos a preencherem corretamente a Tabela 2.1, permitindo inclusive o uso da calculadora. No item a), a ideia é que essa percepção ajude depois a entender intuitivamente que o gráfico da função exponencial não será uma reta. Nos itens b), c) e d), a ideia é chegar intuitivamente ao modelo da função exponencial que descreve a situação proposta.

O segundo exemplo, trata de um empréstimo bancário feito por uma pessoa, no valor de R$ 10 000,00 para pagar depois de 3 meses, à taxa de juros de 3% ao mês, no regime de juros compostos, o famoso "juros sobre juros", com os seguintes itens:

a) Qual será o montante a pagar no final do 1º mês? Do 2ª mês? E do 3º mês?;

b) Qual seria o montante a pagar no final de n meses?.

No primeiro exemplo, o modelo matemático usado para resolver a situação é dado pela função, do tipo exponencial,

$$f(x) = b \cdot a^x \tag{2.1}$$

Que, neste caso, seria, $f(x) = 1000 \cdot 2^x$, onde $b = 1000$ $(f(0) = b)$, $a = 2 \left(\frac{f(1)}{f(0)} \quad ou \quad \frac{f(2)}{f(1)}\right)$ e x é o tempo decorrido, em horas. No segundo exemplo, para resolver o problema, basta tomar a fórmula do montante, dada por:

$$M = C(1+i)^n, \tag{2.2}$$

em que M é o montante, C o capital, n o período de tempo e i é a taxa de juros.

Finaliza este item com dois gráficos, o primeiro projetando para os próximos 12 meses, cuja figura mais parece uma reta do que uma curva exponencial e o outro para os próximos 50 meses, onde, a partir de um determinado número de meses seu crescimento acentua-se exponencialmente.

Esse capítulo traz ainda, além da introdução comentada anteriormente, os seguintes itens: revisão de potenciação, revisão de radiciação, função exponencial, conexão entre funções exponenciais e progressões, equações exponenciais, inequações exponenciais, o número irracional e e a função exponencial e^x e aplicações da função exponencial.

Considerando o tema função exponencial, Dante (2013a) começa dando a seguinte definição:

> Consideremos um número a real positivo tal que $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, representada por $f(x) = a^x$, é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam x e y reais:
> 1ª) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
> 2ª) $f(1) = a^1 = a$
> 3ª) $x < y \Rightarrow a^x < y$ [sic] quando $a > 1$
> $x < y \Rightarrow a^x > y$ [sic] quando $0 < a < 1$. (DANTE, 2013a, p. 159)

Duas situações são observadas nessa definição: A primeira, diz respeito a 3ª propriedade, pois a mesma está errada, provavelmente erro de digitação, o correto seria $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$. A segunda, diz respeito a essa definição feita por Dante (2013a), é a primeira vez que a usa em seu livro didático. Definição semelhante à usada por Elon Lages Lima em Lima (2013), livro utilizado no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

> Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:
> 1ª) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
> 2ª) $a^1 = a$;
> 3ª) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$
> $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$. (LIMA 2013, p. 154-155)

Continuando a apresentação, ainda neste item, Dante (2013a) trata do gráfico da função exponencial. Analisa os gráficos de duas funções do tipo $f(x) = a^x$, a primeira com $a > 1$ $(a = 2)$ e a segunda com $0 < a < 1$ $(a = \frac{1}{2})$. Constrói as tabelas com $x \in \mathbb{Z}$ no intervalo [-3,3] e os respectivos gráficos, para em seguida generalizar num único plano cartesiano, a função do tipo $f(x) = a^x$ nos dois casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Analisando as tabelas e os gráficos, Dante (2013a) retira algumas conclusões para a função exponencial, como por exemplo: Que o gráfico é uma figura chamada curva exponencial e não toca o eixo x; que para $a > 1$ a função é crescente e para $0 < a < 1$ a função é decrescente; e que a mesma é bijetiva e ilimitada superiormente. Por fim, ensina como construir o gráfico da função exponencial usando o software Geogebra.

Depois de definir a função exponencial $f(x) = a^x$ e da análise gráfica, Dante (2013a) apresenta uma conexão entre funções exponenciais e progressões. Para iniciar lembra que a progressão aritmética (PA) e a progressão geométrica (PG) foram definidas em capítulo anterior. A partir desse conhecimento verifica o que ocorre com uma função, do tipo exponencial, (2.1).

Como exemplo para fazer essa verificação considera uma função exponencial $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3 \cdot 2^x$ e a PA 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... de razão 2, para, logo em seguida, mostrar que $f(1) = 6$, $f(3) = 24$, $f(5) = 96$, $f(7) = 384$, $f(9) = 1536$, $f(11) = 6144$, $f(13) = 24567$, ... é uma PG de razão 4, ou seja, 2^2.

Conclui daí, que é possível provar que isso ocorre com qualquer função, do tipo exponencial, (2.1) e que essa propriedade caracteriza a função desse tipo, ou seja,

> ... se f é uma função do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$, ela transforma uma PA de razão r em uma PG de razão a^r. E, reciprocamente, se uma função transforma uma PA de razão r em uma PG de razão a^r, então essa função é do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$, com $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$. (DANTE, 2013a, p. 164)

Em seguida, observa que na PA (1, 3, 5,7, 9, 11, 13, ...), o 3º termo, que vale 5, é dado por: $5 = 1 + 2 \cdot 2(a_n = a_1 + nr)$[1] e $f(5) = f(1) \cdot \underbrace{2}_{a}^{(\overbrace{2}^{r} \cdot \overbrace{2}^{n})} \Rightarrow 96 = 6 \cdot 2^4$. Uma aplicação, dessa observação, é o cálculo dos juros compostos quando realizados em intervalos de tempos iguais.

Por exemplo, um capital inicial de R$ 100 000,00, aplicado a juros fixos de 2% ao mês, produz no final de 1 mês um montante de R$ 102 000,00, pois $C_0 \cdot (1+i) = 100000 \cdot (1+0,02) = 100000 \cdot 1,02 = R\$102000,00$; no final de 2 meses um montante de R$ 104 040,00, pois $C_0 \cdot (1+i)^2 = 100000 \cdot (1+0,02)^2 = 100000 \cdot (1,02)^2 = R\$104040,00$; no final de 3 meses um montante de R$ 106 120,80, pois $C_0 \cdot (1+i)^3 = 100000 \cdot (1+0,02)^3 = 100000 \cdot (1,02)^3 = R\$106120,80$ e assim por diante.

Os números 102 000,00; 104 040,00; 106 120,80, ... formam uma PG de razão 1,02.

Ainda neste item conexões entre funções exponenciais e progressões, Dante (2013a) faz a caracterização da função de tipo exponencial (2.1), sem entretanto prová-la.

1

[1] Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

> ... se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ em uma progressão geométrica $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, com $y_n = f(x_n)$, e se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, então teremos $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (DANTE, 2013a, p. 165)

Dante (2013a), descrevendo o tema função exponencial estabelece relação entre este e os temas progressão geométrica e juros compostos.

2.2 A Função Exponencial apresentada por Iezzi et al

Os autores Gelson Iezzi, professor licenciado pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo; Osvaldo Doce, professor da rede pública estadual de São Paulo; David Degenszajn, professor da rede particular de ensino em São Paulo; Roberto Périgo, professor da rede particular de ensino e de cursos pré-vestibulares e Nilze de Almeida, professora efetiva da rede pública estadual de São Paulo, apresentam em Iezzi et al (2013a), na introdução de cada capítulo, infográficos, matérias de jornais, de revistas e da internet, como forma de mostrar aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento e no cotidiano.

Nesse sentido, Iezzi et al (2013a) apresentam na introdução do capítulo que trata da função exponencial o problema do crescimento populacional de certa espécie de alga em uma região litorânea. Com este problema os autores estabelecem relação entre a Matemática e a Biologia.

Continuando à apresentação do problema, Iezzi et al (2013a) informam que a área estimada da superfície coberta pelas algas aumenta 75% a cada ano, em relação à área da superfície coberta no ano anterior. Estimam que, atualmente, a área coberta é de aproximadamente 4000 m^2. A partir dessas informações querem saber qual será a área da superfície coberta pelas algas daqui a 2 anos, a 3 anos e a x anos, mantendo o mesmo crescimento anual.

Iezzi et al (2013a) apresentam a resolução do problema fazendo os cálculos ano após ano até o terceiro. Em seguida, generalizam para x anos, encontrando a lei definida por $y = (1,75)^x \cdot 4000$, que é um exemplo de função exponencial, tema que será tratado em seguida.

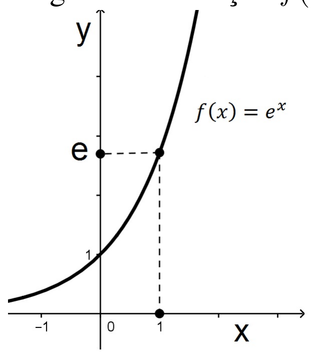
Neste capítulo, os autores apresentam os seguintes temas: revisão sobre os tipos de potências e suas propriedades, função exponencial, equação exponencial e inequações exponenciais.

Com relação à função exponencial Iezzi et al definem a como “qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$” (2013a, p. 138), apresentam exemplos de função exponencial e observam as restrições com relação à base a.

No estudo gráfico da função exponencial, constroem os gráfico das seguintes funções: $y = 2^x, y = (\frac{1}{2})^x, y = 3^x$ e $y = (\frac{1}{3})^x$, sendo que as duas últimas figuram num mesmo plano cartesiano, e afirmam que as curvas obtidas nessas construções são chamadas de curvas exponenciais.

Ainda no referido capítulo, apresentam o número irracional e, cujo valor vale 2,718281828459..., definem a função exponencial na base e, por $f(x) = e^x$, com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e apresentam o gráfico da mesma, conforme ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: gráfico da função $f(x) = e^x$



Fonte: Iezzi et al (2013a)

A partir da análise gráfica da função exponencial $y = a^x$, Iezzi et al (2013) apresentam algumas propriedades, como por exemplo: que o gráfico corta o eixo dos y no ponto de ordenada 1; que se $a > 1$ a função é crescente e que se $0 < a < 1$ a função é decrescente; e que o conjunto imagem é dado por: $Im = y \in \mathbb{R}; y > 0 = \mathbb{R}_+^*$

Continuando o tema função exponencial tratam sobre as outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujas leis apresentam a variável x no expoente de alguma potência, como exemplo, retomam a função $y = (1,75)^x \cdot 4000$, usada na resolução do problema apresentado na introdução do capítulo, função esta que para Lima (2013) é a primeira caracterização das funções de tipo exponencial $y = b \cdot a^x$, e concluem que o gráfico da mesma é análogo ao gráfico da função $y = a^x$, quando $a > 0$.

Por fim, mostram que o gráfico de funções exponenciais da forma $y = a^x + k$, sendo k uma constante real, pode ser obtido a partir do gráfico da função $y = a^x$ e uma aplicação da função exponencial na Química, o conhecido decaimento radioativo.

Iezzi et al (2013) não estabelecem relação entre o tema função exponencial e os temas progressão geométrica e juros compostos.

2.3 A Função Exponencial apresentada por Paiva

O autor Manoel Paiva, mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e professor em escolas particulares, apresenta em Paiva (2013), no início de cada capítulo uma abertura para estimular a reflexão sobre um problema contextualizado, tendo como objetivo averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes ou que poderão ser resolvidos após o estudo do capítulo.

Paiva (2013), no capítulo que trata do tema função exponencial, descreve um problema que envolve a evolução tecnológica, especificamente, a evolução do número de transistores nos microprocessadores com a Lei de Moore[2].

Continuando à apresentação, na introdução do capítulo Paiva (2013) cita várias situações do cotidiano que podem ser estudadas com o auxílio das funções exponenciais, como por exemplo, juro em aplicações financeiras ou empréstimos, crescimento populacional, depreciação de um bem, decaimento radioativo etc.

No capítulo em questão, Paiva apresenta o seguinte problema de crescimento populacional para apresentar a função exponencial:

> Em uma cultura laboratorial, vamos considerar determinada bactéria, que se dividirá em duas, dando origem à primeira geração; cada bactéria da primeira geração sofrerá bipartição, dando origem à segunda geração, e assim por diante. (2013, p. 206)

O autor resolve o problema construindo uma tabela indicando várias gerações e generaliza tal procedimento, encontrando o modelo $y = 2^x$ que determina a população de uma colônia de bactérias após x gerações. Afirma que funções como essa são chamadas de funções exponenciais, tema que será estudado no capítulo, o qual trata ainda dos seguintes temas: potenciação e radiciação, equação exponencial e inequação exponencial.

Paiva (2013) inicia o estudo do tema função exponencial, apresentando um problema de aplicação financeira em regime de juro composto. Supõe um investimento, numa aplicação financeira, de R$ 2 000,00, cuja taxa diária de juro seja de 0,04%, desejando saber qual será o montante acumulado em t dias.

O problema é resolvido resgatando a fórmula do montante, ou seja, $M = C \cdot (1 + i)^t$. Substituindo os valores dados no problema encontra a seguinte função:

$$M(t) = 2000 \cdot (1 + 0,0004)^t = 2000 \cdot (1,0004)^t$$

Por apresentar a variável t como expoente de uma constante positiva e diferente de 1, essa função é chamada de função exponencial. Daí, Paiva define-a da seguinte maneira "Chama-se função exponencial toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$".(2013, p. 215).

Neste exemplo, Paiva (2013) estabelece relação com o tema juros compostos, utilizando-se da fórmula do montante como uma aplicação da função exponencial do tipo (2.2), mesmo sem fazer menção sobre ela em sua apresentação.

2

[2] Quanto maior o número de transistores em um chip, maior será sua capacidade de processamento.

Após definir a função exponencial, Paiva (2013) faz o estudo ´gráfico da mesma, apresentando esboços das seguintes funções: $f(x) = 2^x$ e $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. Generalizando esses esboços para a função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 1$ e $0 < a < 1$ e, por fim apresenta as seguintes propriedades:

> 1ª) Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$;
> 2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$. Tem-se, então: $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$, para qualquer a real maior que 1;
> 3ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$. Tem-se, então: $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1$, para qualquer a real com $0 < a < 1$. (PAIVA, 2013, p. 216)

No próximo capítulo trato do tema progressão geométrica apresentada por Dante (2013a), Iezzi (2013a) e Paiva (2013), em suas obras destinadas aos alunos do ensino médio.

Capítulo 3

A Progressão Geométrica

Como feito no capítulo 2 deste trabalho, também neste capítulo descrevo e comparo a forma como os autores Dante (2013a), Iezzi et al (2013a) e Paiva (2013) apresentam o tema progressão geométrica em seus respectivos livros didáticos, bem como se os mesmos a relacionam com os temas função exponencial e juros compostos. Da mesma forma que fiz no capítulo 1, também aqui, faço comentários e observações no decorrer da descrição e das comparações, que julgo necessários para os objetivos deste trabalho.

3.1 A Progressão Geométrica apresentada por Dante

Dante (2013a) chama este capítulo de Sequências, como fez no capítulo sobre funções exponenciais, aqui também começa com uma introdução, neste caso, falando sobre regularidades que os fenômenos da natureza apresentam, afirmando que a Matemática estuda essas regularidades, em realidade, padrões de comportamento comuns a diferentes situações fenomênicas, padrões estes que são transformados em representações numéricas, dentre estas representações, tem-se as sequências numéricas chamadas de PA e PG.

Em seguida, Dante (2013a) retoma a definição de sequência estudada no item Função e Sequências no capítulo denominado Funções da mesma obra. Como sempre faz em cada capítulo e em cada item, inicia com algumas atividades, finaliza com a determinação de uma sequência por recorrência.

Continuando, Dante (2013a) apresenta ainda neste capítulo os temas: progressão aritmética e progressão geométrica. Com relação a progressão geométrica, começa definindo a taxa de crescimento relativo de uma grandeza e apresenta a seguinte situação-problema: "Em 2013 uma usina produziu 200 000 kg de açúcar. Quantos quilogramas essa usina produzirá no período de 2013 a 2018 se o aumento da produção anual for sempre 10% em relação ao ano anterior?" (DANTE, 2013a, p. 220).

Dante (2013a) resolve essa situação-problema calculando a produção ano após ano começando em 2013 com 20 000 kg e a partir de 2014 acrescenta os 10%, ou seja, multiplica 1,10 a produção do ano anterior para obter a produção do ano em curso. Neste caso, encontra os seguintes valores até 2018: (200 000, 220 000, 242 000, 266 200, 292 820, 322 102). Esclarece ainda que esses tipos de sequências de valores onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando cada termo anterior por um número fixo (no caso, 1,10) são chamadas de progressões geométricas e esse número fixo é chamado de razão da progressão geométrica.

Após essa introdução, Dante (2013a) define a progressão geométrica como sendo

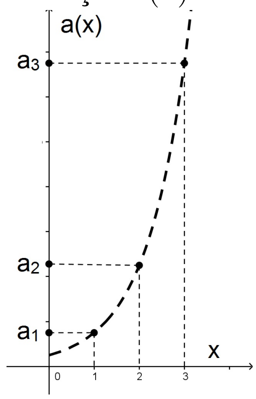
> ... toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (q) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. (DANTE, 2013a, p. 220)

Depois dessa definição, Dante (2013a) apresenta e demonstra a fórmula do termo geral (a_n) de uma progressão geométrica, isto é, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde a_1 é o primeiro termo, n o número de termos e q a razão. Observa que, em alguns casos, é mais conveniente colocar o primeiro termo como a_0 e não a_1, com isso o termo geral da progressão geométrica passa a ser $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Ainda neste item que trata do tema progressão geométrica, o autor também apresenta a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG finita, ou seja, $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, para $q \neq 1$; a soma dos termos de uma PG infinita, isto é, $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ (para $-1 < q < 1$); a conexão entre progressão geométrica e função exponencial e problemas envolvendo progressão aritmética e progressão geométrica ao mesmo tempo.

Começa o item conexão entre progressão geométrica e função exponencial considerando uma progressão geométrica (termo geral de uma progressão geométrica: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$) como um caso particular de uma função exponencial do tipo $a(x) = a \cdot q^{x-1}$ de domínio $\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, 4, ..., n, ...$ e seu gráfico formado pelos pares ordenados (n, a_n) como ilustra a Figura 3.1 abaixo.

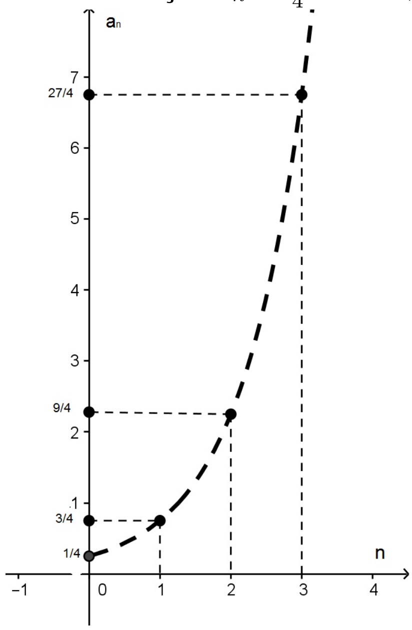
Figura 3.1: gráfico da função $a(x) = a \cdot q^{x-1}$, com $x \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Dante (2013a)

Em virtude do domínio ser discreto foi tracejada a curva passando pelos pontos, $(1, a_1)$, $(2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...$ da Figura 3.1. Dante (2013a) apresenta como exemplo, para este caso, o gráfico da função $a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^{(n-1)}$ formado pelos pontos $(1, \frac{3}{4}), (2, \frac{9}{4}), (3, \frac{27}{4})$, etc. e a progressão geométrica dada por $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}, ...)$, conforme Figura 3.2 abaixo. Com este item Dante (2013a) estabelece relação entre os temas progressão geométrica e função exponencial.

Figura 3.2: gráfico da função $a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^{(n-1)}$, com $n \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Dante (2013a)

3.2 A Progressão Geométrica apresentada por Iezzi et al

O tema progressão geométrica é estudada no capítulo dez, do primeiro volume em Iezzi et al (2013a). Neste capítulo, além do tema progressão geométrica, os autores apresentam também, os temas sequências numéricas e progressão aritmética. Dentro do tema progressão geométrica trata da conexão desta com a função exponencial.

No item dedicado ao tema progressão geométrica Iezzi et al (2013a), como fazem em quase todas as introduções dos capítulos e dos itens, iniciam com um problema. Neste caso, o problema trata de uma empresa de comunicação que planeja iniciar suas atividades em determinada região, comercializando pacotes de programas de TV por assinatura. Tendo como meta para o primeiro ano de operações vender 25 pacotes no primeiro mês, 50 pacotes no segundo mês, 100 pacotes no terceiro mês, e assim por diante.

Supondo que essa meta seja alcançada, a sequência de pacotes vendidos seria: (25, 50, 100, 200, 400, ...). Aqui, os autores observam que cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por 2. Concluem que sequências com essa característica são chamadas de progressão geométrica. Logo em seguida, Iezzi et al a definem como sendo "a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada razão da progressão geométrica e é indicada por q". (2013, p. 205)

Continuando a apresentação, Iezzi et al (2013a) tratam da classificação da progressão geométrica em cinco categorias: crescente, decrescente, constante, alternada ou oscilante e estacionária. Em seguida, a partir da definição da progressão geométrica demonstram a fórmula do termo geral da PG, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n o número de termos da PG.

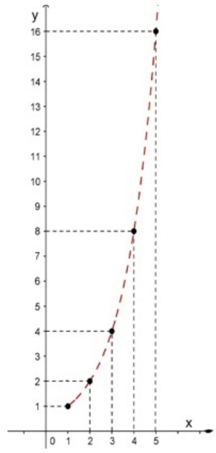
Após essa demonstração, considerando $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ uma PG, demonstram também, a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, isto é, $S_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{q-1}$. apresentam ainda, a soma dos termos de uma PG infinita, ou seja, $S_\infty = \frac{a_1}{q-1}$ justificando-a e o produto dos n primeiros termos de uma PG, isto é, $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$.

Na última parte deste item dedicado ao tema progressão geométrica, Iezzi et al (2013a) estabelecem relação entre este a e função exponencial.

Iezzi et al (2013a) consideram a PG (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...), de primeiro termo 1 e razão 2, como sendo uma função f com domínio em $\mathbb{N}^*$. De fato, pois ela é construída pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Em verdade, os autores associam f à função exponencial dada por $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável x assume.

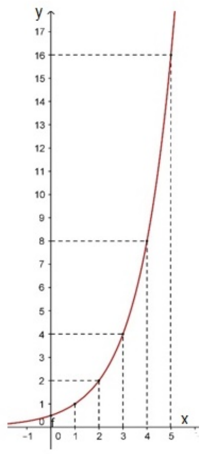
Os autores finalizam este item, bem como o capítulo, apresentando dois gráficos, o primeiro da função f com domínio nos números naturais sem o zero e o segundo com domínio nos números reais.

Figura 3.3: gráfico da função $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, com $x \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Iezzi et al (2013a)

Figura 3.4: gráfico da função $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, com $x \in \mathbb{R}$



Fonte: Iezzi et al (2013a)

3.3 A Progressão Geométrica apresentada por Paiva

O tema progressão geométrica é estudado no capítulo doze, do primeiro volume em Paiva (2013) denominado de sequências. Neste capítulo, além do tema progressão geométrica, o autor trata também dos seguintes temas: conceito de sequência, lei de formação de uma sequência e progressão aritmética. Na abertura do capítulo apresenta um problema envolvendo a preparação de um atleta para uma competição, problema que pode ser resolvido com os conhecimentos de progressão aritmética.

No último item deste capítulo, esse autor desenvolve o tema progressão geométrica e, na introdução do mesmo, esclarece que os problemas que serão tratados neste tópico também podem ser resolvidos com o auxílio da função exponencial, estudada no capítulo dez, pois envolvem grandezas que crescem ou decrescem através do produto por uma taxa constante.

Apresenta a situação seguinte, mostrando que a mesma é resolvida com o conhecimento de progressão geométrica.

> Alguns gases utilizados na indústria, como os clorofluorcarbonetos (CFC), têm efeito devastador na camada de ozônio que protege a Terra contra um tipo nocivo de radiação solar. Esses gases provocam falhas nessa camada, conhecidas como ´´buracos da camada de ozônio”. O Protocolo de Montreal, realizado em 1987, estabeleceu acordos para a eliminação do uso dessas substâncias que destroem a camada de ozônio. Cerca de 190 países já assinaram esse tratado. Supondo que o protocolo de Montreal tenha sido respeitado pelos países, o buraco na camada de ozônio deverá ter uma redução média de 30% a cada década a partir de 2005. (PAIVA, 2013, p. 268)

Paiva (2013) supõe que naquela época o buraco tivesse uma extensão de $x\ km^2$ e calcula a extensão do buraco, década a década, até 2065, obtendo a seguinte sequência (2005, 2015, 2025, 2035, 2045, 2055, 2065) mostrando que é equivalente à sequência $(x, x \cdot 0,7, x \cdot (0,7)^2, x \cdot (0,7)^3, x \cdot (0,7)^4,\ x \cdot (0,7)^5, x \cdot (0,7)^6)$ e conclui afirmando que a sequência de termo geral $x \cdot (0,7)^n$, para n décadas, que aparece nessa situação é um exemplo de progressão geométrica.

De modo geral, Paiva define que progressão geométrica "é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante q. O número q é chamado de razão da progressão geométrica". (2013, p. 269). Em seguida, o autor mostra que as progressões geométricas podem ser classificadas em crescente, decrescente, constante, oscilante e quase nula.

Para construir a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, o autor utiliza um problema envolvendo juros compostos, onde um capital de R$ 10 000,00 é aplicado durante 4 anos à taxa de juro de 20% ao ano. Encontrando a sequência (10000, 12000, 14400, 17280, 20736) que representa o montante, em real, ano a ano, a partir do início da aplicação. Observa que esses montantes são calculados multiplicando o capital inicial por potências de 1,2. Daí, conclui que a sequência descrita anteriormente é uma progressão geométrica com $a_1 = 10000$ e a razão $q = 1,2$.

Generalizando essa ideia para qualquer progressão geométrica $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ de razão q, determina a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Continuando a apresentação, Paiva demonstra a seguinte propriedade: "Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois; isto é, sendo $a \neq 0$, temos: (a, b, c) é $PG \Leftrightarrow b^2 = ac$." (2013, p. 273)

Paiva (2013) Continua a apresentação, tratando da soma dos n primeiros termos de uma PG. Desta vez, utilizando um problema que trata do crescimento da produção de soja de um Estado brasileiro. Para estimar o total de soja produzido nesse Estado em trinta anos, de 2001 a 2030, supõe que a taxa de crescimento é constante e igual a 5%. Desta maneira, encontra a seguinte sequência $(4; 4,2; 4,41; ...; 4 \cdot (1,05)^{27}; 4 \cdot (1,05)^{28}; 4 \cdot (1,05)^{29})$ que são os termos da progressão geométrica com $a_1 = 4$ e a razão $q = 1,05$.

Para encontrar o total de soja produzido nesse Estado no período considerado, Paiva (2013) toma a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, isto é, $S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q}$. Em seguida, apresenta a demonstração da mesma para uma progressão geométrica, não constante, dada por $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Após essa demonstração, apresenta a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, dessa vez, o problema trata de uma empresa que reservou 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. Aplicando a cada ano que passa metade do valor que tinha no ano anterior. Utilizando-se dos cálculos feitos na resolução desse problema o autor chega na fórmula

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, com $-1 < q < 1$ que determina a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica.

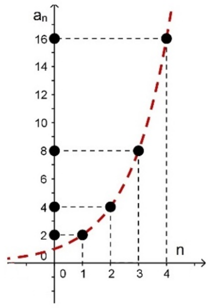
Paiva (2013) termina o capítulo com a conexão entre progressão geométrica e função exponencial utilizando-se da representação gráfica da PG (2, 4, 8, 16, ...), cujo termo geral é $a_n = 2^n$, formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano:

Tabela 3.1: pontos (n, a_n) do plano cartesiano

n	1	2	3	4	5	...
(n, a_n)	(1, 2)	(2, 4)	(3, 8)	(4, 16)	(5, 32)	...

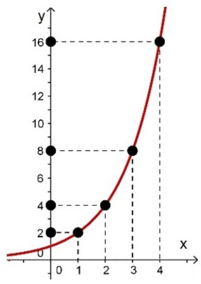
Fonte: Paiva (2013)

Figura 3.5: gráfico da sequência $a_n = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Paiva (2013)

Figura 3.6: gráfico da sequência $a_n = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Paiva (2013)

Esse autor, observa que o termo geral $a_n = 2^n$ é identificado com a função exponencial $y = 2^x$ quando x assume valores naturais não nulos, concluindo que a representação gráfica da progressão geométrica (2, 4, 8, 16, ...) é formada por pontos do gráfico da função exponencial $y = 2^x$. Generaliza, considerando a progressão geométrica não constante $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão positiva q. Seu termo geral a$_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, é equivalente a $a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$ e, portanto, a representação gráfica dessa progressão geométrica é formada por pontos da função $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$.

Nesse caso, Paiva (2013) estabelece relação entre os temas progressão geométrica e função exponencial, nessa ordem, pois utiliza o termo geral de uma progressão geométrica para mostrar que o mesmo é equivalente uma função exponencial do tipo $y = b \cdot a^x$. Concluindo daí, que algumas importantes propriedades da função exponencial podem ser aplicadas na resolução de problemas que envolvam progressões geométricas.

Terminada a apresentação do tema progressão geométrica, ainda falta apresentar como o tema juros compostos são tratados nas obras consideradas, o que faço no próximo capítulo.

Capítulo 4

Os Juros Compostos

Neste capítulo descrevo e comparo a forma como os autores Dante (2013b), Iezzi et al (2013b) e Paiva (2013) apresentam o tema juros compostos em seus respectivos livros didáticos, bem como se os mesmos o relacionam com os temas função exponencial e progressão geométrica. Da mesma forma que fiz nos capítulos 2 e 3, faço também comentários e observações, no decorrer da descrição e das comparações, que julgo necessários para os objetivos deste trabalho.

4.1 Os Juros Compostos apresentado por Dante

O tema juros compostos, encontra-se em Dante (2013b), no capítulo um, denominado matemática financeira, no item termos importantes de matemática financeira, juntamente com juros simples e conexão entre juros e funções.

Esse autor, inicia o tema juros compostos apresentando um problema que trata da aplicação de um capital de R$ 40 000,00 a taxa de 2% ao mês, durante 3 meses. Deseja saber o montante após 3 meses.

Dante (2013b) resolve o problema utilizando os dois sistemas de juros: o simples e o composto e mostra a diferença entre ambos. Na resolução do problema utilizando o sistema de juros compostos, faz os cálculos mês a mês, primeiro calculando os juros sobre o capital e em seguida, juntando esse juro calculado com o capital, obtendo o montante, faz dessa maneira até o terceiro mês. Observa que esse processo não é conveniente para situações de longo prazo, e apresenta um processo prático de resolução, a fórmula do montante no sistema de juros compostos, ou seja, $M = C \cdot (1 + i)^t$, onde M é chamado de montante, C é o capital ou principal, i é taxa de juros e t é o período de aplicação.

No próximo item do capítulo, Dante (2013) apresenta a conexão entre juros e funções, ou seja, entre juros simples e as funções linear $(f(x) = ax)$ e afim $(f(x) = ax + b)$, cujos gráficos é uma reta e entre juros compostos e a função do tipo exponencial $f(x) = a \cdot b^x$, cujo gráfico é uma curva chamada de curva exponencial. Abordo nesta seção, somente o que diz respeito ao tema juros compostos, objeto deste trabalho.

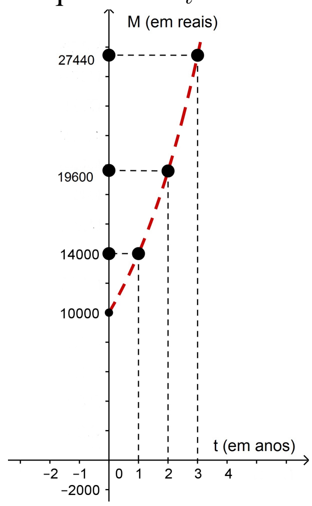
Dante (2013b) inicia o tema juros compostos considerando a situação de uma dívida de R$ 10000,00 que deve ser paga com juro composto de 40% ao ano. Esse autor, resolve essa situação, mostrando que o montante é obtido em função do tempo por meio da equação $M = 10000 \cdot (1,4)^t$ que envolve uma função do tipo exponencial ($f(x) = a \cdot b^x$). Constrói a Tabela 4.1 e a Figura 4.1, ilustradas logo abaixo, e mostra que a sequência dos montantes a partir do primeiro ano (14000, 19600, 27440, 38416, ...) é uma progressão geométrica de razão 1,4 e cujo termo geral é dado por $M_t = 10000 \cdot (1,4)^t$.

Tabela 4.1: montantes da dívida de R$ 10 000,00 ao ano

t	0	1	2	3	4	...
$M = h(t) = 10000 \cdot (1,4)^t$	10000	14000	19600	27440	38416	...

Fonte: Dante (2013b)

Figura 4.1: gráfico da sequência $M_t = 10000 \cdot (1,4)^t$, com $t \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Dante (2013b)

A relação que Dante (2013b) estabelece neste capítulo, é entre os temas juros compostos e função exponencial, nessa ordem. Entretanto, a função exponencial explorada é dada pelo termo geral de uma progressão geométrica. Dessa forma, o autor estabelece relação entre os três temas de forma integrada.

4.2 Os Juros Compostos apresentado por Iezzi et al

O tema juros compostos, encontra-se em Iezzi et al (2013b), no capítulo seis, denominado matemática financeira, juntamente com os itens juros, juros simples e juros e funções.

Esses autores na introdução do capítulo mencionam vários problemas que são estudados pela matemática financeira como por exemplo, atrasos em pagamentos de contas e aplicações financeiras. Tratam do item juros onde procuram esclarecer e conceituar os termos de uso frequente na matemática financeira: juros (J), capital (C), taxa de juros (i) e montante (M). Apresentam, também, o tema juros simples.

Da mesma forma como apresentaram o tema função exponencial e progressão geométrica, Iezzi et al (2013b) iniciam o tema juros compostos, com uma situação-problema que trata sobre uma pessoa (Miguel) que depois de um ano economizando conseguiu juntar R$ 500,00. Com esse dinheiro abriu uma caderneta de poupança para seu filho, como presente pela passagem do seu 10º aniversário. Supõem que o rendimento dessa caderneta de poupança tenha sido de 0,8% ao mês e que não será feita nenhuma retirada de dinheiro nos próximos anos. Deseja saber quando o filho de Miguel completar 18 anos, que valor ele terá disponível em sua caderneta.

O raciocínio usado por Iezzi et al (2013b) para resolver essa situação problema é o mesmo usado por Dante (2013b) na seção 4.1., ou seja, fazem os cálculos mês a mês, primeiro calculando os juros sobre o investimento inicial (poupança) e em seguida, juntando esse juro calculado com o investimento inicial obtendo o montante, continuando assim até o terceiro mês, concluem que esse mecanismo, pelo qual o saldo dessa poupança irá crescer, mês a mês, é conhecido como capitalização acumulada ou regime de juros compostos.

Iezzi et al (2013b) generalizam esse raciocínio e constroem a fórmula do montante ao final de n períodos, qual seja, $M_n = C \cdot (1 + i)^n$. Lembram ainda que o regime de juros compostos é utilizado na grande maioria das transações comerciais e aplicações financeiras e apresentam ainda os juros compostos com taxa de juros variável.

Continuando a apresentação, Iezzi et al (2013b) tratam no último item do capítulo seis sobre juros e funções. Iniciando por uma situação-problema, no caso, uma dívida de R$ 1 000,00 que será paga com juros compostos de 50% ao ano devendo ser quitada após um número inteiro de anos.

Esses autores calculam os montantes dessa dívida, ano a ano, com a ajuda do Quadro 4.2, ilustrado abaixo, onde o montante da dívida em um determinado ano é 50% maior que o montante relativo ao ano anterior (ou 1,5 vez o montante anterior)

Daí, Iezzi et al (2013b) observam que a sequência de montantes (1500; 2250; 3375; 5062,50; ...) é uma progressão geométrica de razão 1,5 e cujo termo geral é dado por: $a_n = 1000 \cdot (1,5)^n$. Lembram ainda que toda progressão geométrica é uma função f de domínio em N^*. Observam também que essa função f pode ser associada à função definida por $y = 1000 \cdot (1,5)^x$ (função

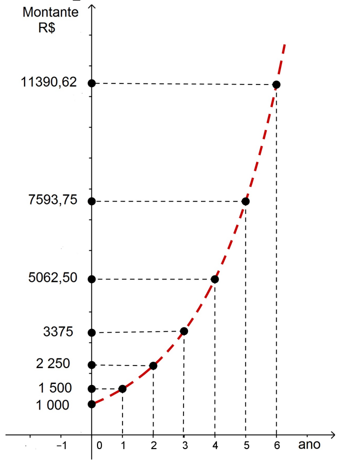
Tabela 4.2: montantes da dívida de R$ 1 000,00 ao ano

Ano	1	2	3	4	5	6	...
Montante	1500	2200	3375	5062,50	7593,75	11390,62	...

Fonte: Iezzi et al (2013b)

exponencial), restrita aos valores naturais não nulos que x assume. Esses autores representam este resultado graficamente, conforme Figura 4.2, ilustrada em seguida.

Figura 4.2: gráfico da sequência $a_n = 1000 \cdot (1,5)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Iezzi et al (2013b)

Observando o gráfico Iezzi et al (2013b) concluem, que os pontos do gráfico correspondem aos pontos da curva exponencial dada por $y = 1000 \cdot (1,5)^x$, quando a variável x assume valores naturais e que não foi traçada uma curva exponencial contínua, pois, o domínio é N^*.

A relação que esses autores estabelecem neste capítulo é entre os temas juros compostos e função exponencial, nessa ordem. Entretanto, a função exponencial explorada é dada pelo termo geral de uma progressão geométrica. Dessa forma, os autores estabelecem relação entre os três temas de forma integrada. Ressaltando, que na seção anterior foi observada esta mesma conclusão.

4.3 Os Juros Compostos apresentado por Paiva

O tema juros compostos apresentado por Paiva (2013) está inserido no capítulo dois, denominado temas básicos da álgebra e matemática financeira. Com relação à álgebra, revisa os temas: equações polinomiais do 1º grau, inequações polinomiais do 1º grau; sistemas de equações polinomiais do 1º grau e equações polinomiais do 2º grau. Com relação à matemática financeira, trata dos temas: porcentagem, juros simples e juros compostos.

Com relação ao tema juros compostos, esse autor informa que é o modelo mais usado nas transações financeiras e mostra como efetuá-lo. Para isso, solicita que se calcule o juro composto produzido por uma aplicação de R$ 100 000,00 à taxa de 10% ao mês, durante três meses.

Paiva (2013) realiza os cálculo ano após ano, da mesma maneira feita por Dante (2013b) e Iezzi et al (2013b), já descritas nas seções 4.1 e 4.2, ou seja, primeiro calcula os juros sobre a aplicação e em seguida, junta esse juro calculado com a aplicação obtendo o montante, continuando assim até o terceiro mês. Raciocinando de modo análogo, a essa situação descrita anteriormente, constrói a fórmula para o cálculo do montante com juros compostos e taxa constante, ou seja, $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que M é o montante, C é o capital, i é a taxa de juros e t é o período de aplicação.

Esse autor observa também, que para calcular o montante se as taxas de juro variarem nas unidades de tempo, isto é, i_1 na primeira unidade, i_2 na segunda unidade, i_3 na terceira unidade, ..., i_t na t-ésima unidade, então o montante seria calculado por: $M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)...(1 + i_t)$.

Diferente dos autores Dante (2013a) e Iezzi et al (2013a) que apresentam os temas função exponencial e progressão geométrica nessas obras e Juros Compostos em Dante (2013b) e Iezzi et al (2013b), Paiva (2013) apresenta-os, somente nessa obra e na seguinte ordem: juros compostos, função exponencial e progressão geométrica.

Observo que Paiva (2013) não estabelece relação do tema juros compostos com os temas função exponencial e progressão geométrica.

No próximo capítulo, analiso como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) abordam a disciplina Matemática, considerando suas orientações pedagógicas, relacionadas aos temas objeto deste trabalho quais sejam, função exponencial, progressão geométrica e juros compostos, da mesma forma faço com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), embora a mesma não tenha ainda sido regulamentada.

Capítulo 5

Fundamentação Teórica

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica. Para isso, descrevi e comparei nos capítulos 2, 3 e 4, como os autores Dante (2013a e 2013b), Iezzi et al (2013a e 2013b) e Paiva (2013) os apresentam em suas obras destinadas aos alunos do ensino médio.

Além da descrição e das comparações feitas é fundamental e necessário, para balizar a referida proposta, verificar qual ou quais orientações pedagógicas encontram-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionadas aos temas. O que faço neste capítulo.

5.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Segundo os PCNEM são nove as finalidades do ensino da Matemática no nível médio, dentre elas destaco a que tem como objetivo levar o aluno a "estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo."(BRASIL, 2000, p. 42). Ora, o que vejo hoje e que muitas vezes fiz em minha prática docente, foi justamente o contrário, ou seja, não estabelecer conexão entre os temas matemáticos.

Nas comparações que realizei nos livros didáticos já citados anteriormente, observei que os autores de modo geral estabelecem relação entre os temas, de modo geral de forma contextualizada. Dessa maneira, atendendo o que preconiza o PCNEM quando afirma que

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões com diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro e fora da Matemática, como a sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2000, p. 43)

Reforçando esse entendimento cita como um primeiro exemplo o ensino das funções. "O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui" (BRA-

SIL, 2000, p. 43) e cita várias conexões que se pode fazer com o tema Função, como por exemplo, "As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções" (BRASIL, 2000, p. 43).

Além do mais, os PCNEM propõem, principalmente a nós professores, com o objetivo de permitir o desenvolvimento das capacidades dos alunos iniciada no ensino fundamental, rever e redimensionar alguns temas tradicionalmente ensinados.

Nesse sentido, proponho rever e redimensionar o ensino dos temas função exponencial, progressão geométrica e juros compostos, ou melhor, apresentar uma proposta de ensino envolvendo esses temas e suas relações da forma mais contextualizada possível e até certo ponto interdisciplinar, mesmo não sendo este o objeto deste trabalho.

Entretanto, como o próprio PCNEM afirma

> ... não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 2000, p. 43)

Considerando o exposto acima é que busco na proposta que apresento no próximo capítulo, na parte introdutória de cada tema, iniciar com uma situação-problema contextualizada e dentro da realidade dos estudantes, no caso, moradores do município de Cametá (PA), cursando o 1º ano do Ensino Médio. Acredito que dessa forma, partindo da vivência dos estudantes, o aprendizado possa ocorrer de forma natural e com significado para eles.

Sendo assim, utilizarei como estratégia de ensino, nesta proposta que envolve os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica, a resolução de problemas pois,

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p. 52)

Saber que é nosso papel na posição de professor, contribuir para que nossos alunos adquiram autoconfiança, responsabilidade, autonomia e capacidade de comunicação e argumentação, não deixa de ser desafiador. Agora, como contribuir com isso se nós, professores, principalmente com relação à autonomia, ainda nos prendemos a um livro didático ou a um material usado desde sempre para ministrar aulas?

Será que quando propomos algo novo, desafiador, que vai de encontro a uma mesmice que o aluno sempre presenciou, não o impacta num primeiro momento? Acredito que sim, e é nesse momento que cabe a nós, professores, fazermos o diferencial. Se o aluno percebe que o professor é autônomo, responsável, se comunica e argumenta bem, não tenho dúvida que os alunos terão mais facilidades para desenvolver essas características. Espero com esta proposta contribuir com os alunos nesse desenvolvimento.

Outro aspecto relevante que os PCNEM tratam ainda com relação aos alunos é o desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes que eles devem ter em relação ao conhecimento e às relações entre colegas e professores, onde afirma que os mesmos, a um só tempo, são objetivos centrais da educação, bem como são elas que permitem ou impossibilitam a aprendizagem, quaisquer que sejam os conteúdos e as metodologias de trabalho.

5.2 Base Nacional Comum Curricular

Além dos PCNEM, outro documento importante é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mesmo ainda estando em discussão, vejo como importante incluí-la neste trabalho pois, como disse no início deste capítulo, ela também dará sustentação teórica para a proposta que apresentarei.

Antes de comentar sobre os pontos diretamente ligados aos temas deste trabalho, vamos nos situar como a Matemática está organizada na BNCC,

> Na BNCC, a Matemática está organizada em cinco unidades de conhecimento: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções, refletindo o que tem sido feito nos documentos curriculares brasileiros mais atuais. Essas unidades de conhecimento, no Ensino Médio, são contempladas em cada uma das cinco Unidades Curriculares em que se organizam os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do componente Matemática e, em cada uma delas, recebe uma ênfase diferente, dependendo do avanço na etapa, buscando garantir que os/as estudante desenvolvam raciocínios cada vez mais sofisticados, em Matemática, ao longo dos anos de escolarização. (BRASIL, 2016, p. 562)

Esses objetivos de aprendizagem de Matemática estão organizados por unidades curriculares, de I a V. Inicialmente, estão apresentados nas unidades de conhecimento pois,

> Dessa forma, é possível ter uma visão do conjunto dos objetivos de uma mesma unidade de conhecimento, o que permite identificar as aprendizagens já realizadas pelo estudante em Unidades Curriculares anteriores e reconhecer em que medida as aprendizagens a serem efetivadas na atual unidade se articulam com aquelas das unidades posteriores. (BRASIL, 2016, p. 563)

A BNCC considera quatro eixos de formação: pensamento crítico e projeto de vida, intervenção no mundo natural e social, letramentos e capacidade de aprender e solidariedade e sociabilidade. Os objetivos gerais de formação da área de Matemática para o Ensino Médio em relação a esses eixos são sete, entre os quais destaco o quarto, "Estabelecer relações entre conceitos matemáticos de Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções, bem como entre a Matemática e outras áreas do conhecimento" (BRASIL, 2016, p. 560).

Este objetivo está relacionado aos eixos de formação intervenção no mundo natural e social e letramentos e capacidade de aprender. Objetivo este, também contemplado nos PCNEM, já mencionado no início deste capítulo.

Com relação à unidade de conhecimento Números e Operações na unidade curricular I da BNCC, temos o seguinte objetivo de aprendizagem a destacar "Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagem e juros compostos, incluindo o uso de tecnologias digitais" (BRASIL, 2016, p. 574). Aqui há uma novidade, o aluno além de resolver problemas deve também elaborá-los.

Nas unidades curriculares III e IV da BNCC, ainda desta mesma unidade de conhecimento Números e Operações, temos o seguinte objetivo a destacar:

> Resolver e elaborar problemas, envolvendo porcentagem em situações tais como cálculos de acréscimos e decréscimos, taxa percentual e juros compostos, parcelamentos, financiamentos, dentre outros, com o uso de tecnologias digitais. (BRASIL, 2016, p. 575).

Novamente propõe, além da resolução dos problemas, a elaboração. Objetivos estes que tratam do tema juros compostos, um dos objetos deste trabalho.

Com relação à unidade de conhecimento Álgebra e Funções, na unidade curricular III da BNCC, temos dois objetivos a destacar, o primeiro

> Reconhecer função exponencial e logarítmica, suas representações algébricas e gráficas, compreendendo seus modelos de variação, identificando domínio e imagem, e utilizar essas noções e representações para resolver problemas, como os que envolvem juros compostos (BRASIL, 2016, p. 579).

E o segundo, "Reconhecer progressões geométricas como sequências numéricas de variação exponencial, associá-las a funções exponenciais de domínios discretos e utilizá-las para resolver problemas, como os de juros compostos" (BRASIL, 2016, p. 579).

Finalizo este capítulo, tendo clareza que esses objetivos de aprendizagem de Matemática contidos na BNCC, as considerações feitas sobre os PCNEM e a descrição e as comparações realizadas nos três capítulos anteriores, vêm reforçar e sustentar, como dito anteriormente, esta proposta de ensino envolvendo os temas Juros Compostos, Função Exponencial e Progressão Geométrica. Proposta esta que apresento no próximo capítulo.

Capítulo 6

Uma Proposta de Ensino

Neste capítulo descrevo a proposta de ensino envolvendo os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica. A proposta seguirá a ordem dos temas descrita anteriormente.

Após a apresentação da proposta de intervenção metodológica, faço algumas considerações direcionadas ao professor no sentido de auxiliá-lo na aplicação da mesma.

6.1 A Proposta

De modo geral esta proposta, que se propõe trabalhar de forma integrada os temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica, busca (re)construir o conhecimento dos estudantes sobre esses temas a partir da sua realidade e com sua participação em todo o processo, tendo o professor como mediador dessa (re)construção.

Os conceitos, definições e propriedades que utilizo nesta proposta, foram retirados de uma das obras mencionadas nos capítulos 2, 3 e 4. ocorrendo o mesmo com os exemplos e problemas. Faço adaptações, quando necessário, bem como apresento novos problemas.

6.1.1 Juros Compostos

Vejamos o seguinte problema:

Problema 6.1: Dona Filó, servidora da Prefeitura Municipal de Cametá, concursada como técnica em Alimentação Escolar, recebeu R$ 1.200,00 de décimo terceiro salário referente ao ano de 2016. Ela pretende viajar em julho, seu período de férias, para isso, depositou seu décimo terceiro na poupança, com juros de 0,8% ao mês. Quanto Dona Filó terá na poupança em julho de 2017, para sua viagem, sabendo que a mesma depositou seu dinheiro em janeiro de 2017 e não vai fazer nenhuma retirada nesse período de aplicação?

Para resolver esse problema vamos completar a Tabela 6.1 a seguir: Portando, Dona Filó

Tabela 6.1: saldo da poupança ao mês

Ao final do:	**Valor aplicado (R$)**	**Juros (R$)**	**Saldo (R$) (Valor aplicado + Juros)**
1° mês	1200,00		
2° mês			
3° mês			
4° mês			
5° mês			
6° mês			

Fonte: O autor

terá na poupança para sua viagem de férias a importância de __________.

O mecanismo pelo qual o saldo dessa poupança cresceu, mês a mês, é conhecido como regime de **capitalização acumulada** ou regime de **juros compostos.** Vamos agora generalizar este raciocínio.

Consideremos um **capital** C, aplicado a juros compostos a uma **taxa de juros** i - expressa na formal decimal - fixa por período, durante n períodos. (O período considerado deve ser compatível com a unidade de tempo da taxa.)

Temos:

- Ao final do primeiro período, o primeiro montante será igual a:

$$M_1 = C + C.i \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$$

- Ao final do segundo período, o segundo montante será igual a:

$$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2$$

- Ao final do terceiro período, o terceiro montante será igual a:

$$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3$$

- Ao final do quarto período, o quarto montante será igual a:

$$M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_4 = C \cdot (1 + i)^4$$

$$\vdots$$

- Ao final do n-ésimo período, o n-ésimo montante será igual a:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n \tag{6.1}$$

A equação 6.1 é conhecida como fórmula do montante no sistema de juros compostos. Esse sistema é utilizado na grande maioria das transações comerciais e aplicações financeiras.

Observação 6.1: Note que na dedução da fórmula do montante feita anteriormente a taxa de juros é constante em cada um dos períodos. No entanto, muitas vezes, as taxas de rentabilidade de um fundo de investimento variam de um mês para outro. Quando isso ocorre, podemos calcular os montantes mês a mês, lembrando que o princípio de capitalização acumulado é o mesmo.

Agora vamos testar o seu conhecimento em relação ao juros compostos, faça o desafio 6.1.

Desafio 6.1: Baseado no que você estudou anteriormente, elabore um problema envolvendo juros compostos semelhante ao Problema 6.1 e peça a um de seus colegas de sala que o resolva.

6.1.2 Função Exponencial

Para apresentar a função exponencial, vamos partir da situação a seguir, mostrando a relação entre essa função e uma forma de crescimento de grandezas.

A maioria das bactérias reproduz-se por bipartição, processo pelo qual cada bactéria se divide em duas.

Problema 6.2: Em uma cultura laboratorial, vamos considerar determinada bactéria, que se dividirá em duas, dando origem à primeira geração; cada bactéria da primeira geração sofrerá bipartição, dando origem à segunda geração, e assim por diante. Complete a Tabela 6.2 abaixo mostrando o crescimento do número de bactérias, a partir de uma bactéria, admitindo-se que todas sobrevivam a cada geração.

Tabela 6.2: números de bactérias

	Inicial	1ª geração	2ª geração	3ª geração	4ª geração	...
Números de bactérias	1					...

Fonte: O autor

Note que a linha onde se registra o número de bactérias apresenta as potências ______ ,______ , ______ ,______ ,______, ... Assim, o número y de indivíduos gerados por uma bactéria será, na geração x, expresso pela função:

$$y = \underline{\hspace{6cm}}$$

Funções como essa, que têm a variável no expoente, são chamadas de funções exponenciais. Antes de formalizar sua definição, vamos resolver mais dois problemas.

Problema 6.3: Seu Manoel, aposentado do Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS), resolveu fazer um empréstimo numa determinada instituição bancária no valor de R$ 10 000,00 para construir a cozinha de sua casa. Pretende pagar depois de 4 meses. Sabendo que a taxa de juros da instituição bancária, para empréstimo consignado, é de 5% ao mês, quanto seu Manoel pagará ao banco ao fim do 4º mês?

Note que este problema pode ser resolvido utilizando a fórmula do montante estudado no tema Juros Compostos. (Lembra dela? Onde se encontra a variável?) Sendo assim, identifique os elementos que compõe a fórmula e resolva o problema proposto.

Utilizando-se do Problema 6.3, construa dois gráficos no plano cartesiano. O primeiro (Figura 6.3), considerando os 12 primeiros meses (mês a mês) e o segundo (Figura 6.4), considerando os 60 primeiros meses (de 5 em 5 meses) para pagar o empréstimo. No eixo das abscissas coloque o tempo (em meses) e no eixo das ordenadas coloque o montante (em reais). Utilize calculadora para encontrar os montantes solicitados e papel quadriculado para fazer os gráficos.

Agora, partindo do que você já sabe sobre gráficos e considerando os dois que você construiu, de modo geral, a que conclusão ou conclusões você pode tirar comparando-os.

Problema 6.4: Imagine que, em uma região litorânea, a população de certa espécie de alga tem crescido de modo que a área estimada da superfície coberta pelas algas aumenta 75% a cada ano, em relação à área da superfície coberta no ano anterior. Os biólogos estimam que, atualmente, a área coberta é de aproximadamente $4000\ m^2$. Mantido esse crescimento, qual será a área da superfície coberta pelas algas daqui a x anos?

Para resolver essa situação-problema complete a Tabela 6.3 abaixo:

Tabela 6.3: área da superfície coberta pelas algas ao ano

Daqui a:	**Área atual**	**Aumento**	**Nova área**
1 ano	4 000	$0,75 \cdot 4000$	$1,75 \cdot 4000$
2 anos	$1,75 \cdot 4000$		
3 anos			
4 anos			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x anos	...	...	...

Fonte: Iezzi et al (2013a)

Portanto, chamando a área da superfície coberta pelas algas após o crescimento de y, temos a seguinte função para daqui a x anos:

$$\boxed{y = \qquad\qquad}$$

Observe que a variável x se encontra no ____________________. Portanto a função acima é mais um exemplo de função exponencial.

Agora, já podemos definir a função exponencial dada por $f(x) = a^x$.

Definição 6.1: Consideremos um número a real positivo tal que $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, representada por $f(x) = a^x$, é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam x e y reais:

1ª) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2ª) $f(1) = a^1 = a$;

3ª) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Exemplos:

a) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ e) $f(x) = (\sqrt{2})^x$

b) $y = 5^x$ $d)$f(x) = $(0,4)^x$ f) $f(x) = 10^x$

Gráfico da função exponencial

Para iniciar o estudo gráfico da função exponencial, complete as tabelas seguintes onde constam as funções citadas nos exemplos a) e b). Em seguida, construa os gráficos das mesmas em papel quadriculado, indicando como Figura 6.5 e 6.6, respectivamente.

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$, ou seja, $a > 1$

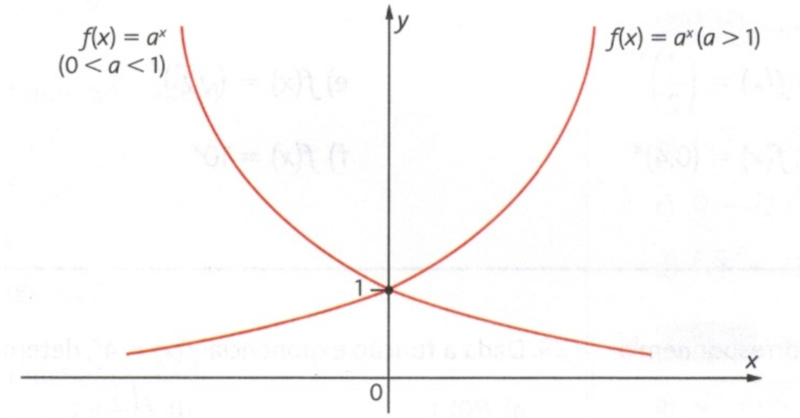
x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
2^x							
$y = 2^x$							

b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ ou $y = (\frac{1}{2})^x$, ou seja, $0 < a < 1$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$(\frac{1}{2})^x$							
$y = (\frac{1}{2})^x$							

De modo geral, o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$ é dado pela Figura 6.1 ilustrada logo em seguida:

Figura 6.1: Gráfico da função $f(x) = a^x$, com $a > 1$ e $0 < a < 1$



Fonte: Dante (2013a)

Propriedades:

- O gráfico é uma curva chamada ____________________, que passa pelo ponto __________;
- O gráfico não intersecta o eixo _______, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor zero (não existe x real tal que $f(x) = 0$);
- Quando $a > 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um __________ lento enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o ____________ de y se torna cada vez mais acentuado;
- Quando $0 < a < 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um ___________ acentuado enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o ____________ de y se torna cada vez menos acentuado;
- $D(f) =$ _______, $CD(f) =$ _______, $Im(f) =$ _______;
- Para $a > 1$, a função é _______________ $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$;
- Para $0 < a < 1$, a função é _______________ $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$;
- A função exponencial é sobrejetiva: $Im(f) = R_+^* = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de a);
- A função exponencial é injetiva $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou usando a contrapositiva $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2)$, pois ela é crescente ou decrescente;
- A função exponencial é _______________, logo, admite inversa;

- A função exponencial é ilimitada ________________.

Observação 6.2: Existem outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujas leis apresentam a variável x no expoente de alguma potência (com base positiva e diferente de 1), como, por exemplo:

$$\mathbf{a)}y = 3 \cdot 2^x \qquad \mathbf{b)}y = \frac{1}{4} \cdot 10^x \qquad \mathbf{c)}y = 2^{x-1} + 3$$

Essas funções têm como gráficos curvas exponenciais semelhantes às apresentadas nos exemplos anteriores e também serão tratadas como funções exponenciais. Com relação aos exemplos **a)** e **b)** são funções denominadas de função do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$.

Para finalizar o estudo da função exponencial vamos retomar o Problema 6.3, que foi apresentada no início do tema função exponencial e resolvido por você utilizando-se da seguinte fórmula: $M_n = 10000 \cdot (1 + 0,05)^n$. Em seguida você construiu dois gráficos ilustrados pelas Figura 6.3 e 6.4. Construa novamente, o gráfico ilustrado da Figura 6.4 para isso utilize papel quadriculado.

Que relação (ou relações) você pode estabelecer entre a Figura 6.1 que ilustra o gráfico da função exponencial definida por $f(x) = a^x$, com $a > 1$ e a Figura 6.4 que ilustra o gráfico do montante $M_n = 10000 \cdot (1 + 0,05)^n$ construído anteriormente?

6.1.3 Progressão Geométrica

A taxa de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão entre seu aumento e seu valor inicial. Assim, uma grandeza que passa do valor a para o valor b tem taxa de crescimento igual a

$$\frac{b-a}{a} \tag{6.2}$$

Por exemplo, a taxa de crescimento relativo do rendimento de uma aplicação financeira, com capital de R$ 5 000,00 sendo resgatada por R$ 6 000,00 um ano depois, é de 20%, pois

$$\frac{6-5}{5} = \frac{1}{5} = 0,20 = 20\%$$

Estudaremos agora, as sequências que variam com taxa de crescimento relativo constante. Para isso, novamente vamos tomar o problema 6.3 resolvido na seção anterior:

Seu Manoel, aposentado do Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS), resolveu fazer um empréstimo numa determinada instituição bancária no valor de R$ 10 000,00 para construir a cozinha de sua casa. Pretende pagar depois de 4 meses. Sabendo que a taxa de juros da instituição bancária, para empréstimo consignado, é de 5% ao mês, quanto seu Manoel pagará ao banco ao fim do 4º mês?

Com base nesse problema complete a Tabela 6.4 abaixo com os valores que faltam. Lembre-se, você já os calculou anteriormente.

Tabela 6.4: montante da dívida de R$ 10 000,00 ao mês

Valor inicial	Após 1º mês	Após 2º mês	Após 3º mês	Após 4º mês
10 000				

Fonte: O autor

Nessas condições, o valor da dívida, nesse período, será representado pela sequência (10000, _____ ,_____ ,_____ ,_____)

Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo (no caso, __________), ou seja, o empréstimo teve uma taxa de crescimento relativo constante de 5% em relação ao mês anterior.[1]

Sequências com esse tipo de lei de formação são chamadas **progressões geométricas**. Nesse exemplo, o valor __________ é chamado **razão** da progressão geométrica e indicado por q (no exemplo q = __________). Dizemos que os termos dessa sequência estão em progressão geométrica.

Definição 6.2: Progressão geométrica é toda sequências de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (q) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

1

[1]Se uma grandeza tem taxa de crescimento relativo igual a i, o novo valor é obtido fazendo $(1+i)$ vezes o valor anterior. No exemplo, $(1+i) = (1+0,05) = 1,05$

Exemplos:

a) $(1, 3, 9, 27, 81, ...)$. $q = 3$

b) $(100, 50, 25, 25/2, 25/4, ...)$. $q = \frac{1}{2}$

c) $(2, -8, 32, -128, 512, ...)$. $q = -4$

d) $(0, 0, 0, 0, 0, ...)$. razão indeterminada.

e) $(2, 4, 8, 16, 32)$. $q = 2$.

Vamos agora construir o modelo que nos permite encontrar o termo geral de uma progressão geométrica. Tomemos mais uma vez o Problema 6.3. Note que os valores encontrados dos montantes, em real, mês a mês, a partir do início do empréstimo é dado por:

$$(10000; 10500; 11025; 11576,25; 12155,06)$$

Observe que essa sequência é uma progressão geométrica de razão $q = 1,05$. Lembre-se também, que podemos calcular o montante em cada mês, multiplicando o capital (empréstimo) inicial por potências de 1,05. Por exemplo, para calcular o 2º montante, basta efetuar: $10000 \cdot (1,05)^1$. Note que o resultado é o 2º termo da progressão geométrica, em que $a_1 = 10000$ e $q = 1,05$, isto é: $a_2 = a_1 \cdot q^1$

Raciocinando de modo análogo, temos: $a_3 = a_1 \cdot q^2$; $a_4 = a_1 \cdot q^3$ e $a_5 = a_1 \cdot q^4$.

Mesmo que essa progressão geométrica tivesse mais termos, cada um deles poderia ser representado em função de a_1 e q:

$$(\underbrace{a_1 \cdot q^0}_{a_1}, \underbrace{a_1 \cdot q^1}_{a_2}, \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5}, \underbrace{a_1 \cdot q^5}_{a_6}, \underbrace{a_1 \cdot q^6}_{a_7}, ...)$$

,

Observe que a_1 e q são constantes quem está variando é o expoente q. Logo, qualquer termo a_n é igual ao produto de a_1 pela potência q^{n-1}.

Portanto, em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, seu termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde:

- a_n = termo geral;
- n = número de termos (até a_n);
- a_1 = 1º termo;
- q = razão.

Observação 6.3: Algumas vezes é conveniente colocar o 1º termo como a_0 e não a_1, ficando o termo geral da progressão geométrica dado por $a_n = a_0 \cdot q^n$. Por exemplo, se o número de sócios de um clube hoje é 2 000 e cresce 5% ao ano, quantos sócios esse clube terá em 3 anos?

Do enunciado temos que, $a_0 = 2000$ e $q = 1 + i = 1 + 0,05 = 1,05$.

Logo, $a_3 = a_0 \cdot q^3 = 2000 \cdot (1,05)^3 \cong 2315$.

Portanto, após 3 anos, o clube terá aproximadamente 2 315 sócios.

Vimos anteriormente que o termo geral de uma progressão geométrica é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Nesse caso, podemos pensar em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural positivo n o valor dado por esse modelo.

No caso do Problema 6.3 em que teríamos $a_1 = 10000$, $q = 0,05$ e $n = 4$, podemos pensar de acordo com os valores da Tabela 6.5 abaixo:

Tabela 6.5: Associação entre os meses e a dívida de seu Manoel

Número natural positivo n (meses)	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	(n, a_n)
1	10 000	(1, 10 000)
2	10 500	(2, 10 500)
3	11 576,25	(3, 11 576,25)
4	12 155,06	(4, 12 155,06)

Fonte: O autor

Agora é com você. Utilizando os pares ordenados da tabela anterior, construa o gráfico da sequência $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, em papel quadriculado, relativo ao problema 6.3. denomine-o de Figura 6.7.

Note que o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico da função exponencial $f(x) = 10000 \cdot (1,05)^{x-1}$.

Portanto, a sequência $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é um caso particular da função do tipo exponencial $f(x) = a \cdot q^{x-1}$ quando $x \in \mathbb{N}^*$.

Agora vamos ver como se calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, para isso acompanhe a resolução do problema seguinte:

Problema 6.5: Considerando, hipoteticamente, que a taxa de crescimento anual da produção de açaí no Estado do Pará seja de 5%. Para estimar o total de açaí produzido no Pará em trinta anos, de 2001 a 2030, o secretário da agricultura supôs que essa taxa permaneça constante a partir da produção de 2001, que foi de 4 milhões de toneladas. Essa estimativa é a soma dos termos da seguinte progressão geométrica, de trinta termos e razão 1,05, em que cada termo representa a quantidade de açaí produzida anualmente, em milhões de toneladas:

$$(4; 4,2; 4,41; ...; 4 \cdot (1,05)^{27}; 4 \cdot (1,05)^{28}; 4 \cdot (1,05)^{29})$$

Mesmo dispondo de uma calculadora, o secretário não somou os termos um a um, pois o trabalho seria longo e tedioso. Ele usou a fórmula a seguir, que calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica não constante, com o primeiro termo a_1 e a razão q:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Observe a simplicidade do cálculo, que obviamente não dispensa o uso da calculadora:

$$S_{30} = \frac{4 \cdot (1 - (1,05)^{30})}{1 - 1,05} \approx 265,8$$

Portanto, nesses trinta anos, a produção de açaí do Estado do Pará será de, aproximadamente, 265 milhões e 800 mil toneladas.

Formalizamos esse procedimento pelo teorema:

Teorema 6.1: A soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica não constante $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \tag{6.3}$$

A demonstração dessa fórmula é a seguinte:

Demonstração:

Indicando por S_n a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

ou, ainda,

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1} \tag{6.4}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (6.4) pela razão q da progressão geométrica, obtemos:

$$qS_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^n \tag{6.5}$$

Subtraindo a igualdade (6.5) da igualdade (6.4), membro a membro, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1 \cdot (1-q^n)$$

Como $q \neq 1$, pois a progressão geométrica não é constante, podemos dividir ambos os membros dessa última igualdade por $1-q$, concluindo:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \quad \blacksquare$$

A partir deste modelo, podemos calcular também a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, observe a resolução do problema seguinte:

Problema 6.6: Uma empresa reservou R$ 1 000 000,00 para aplicar em obras sociais. No primeiro ano será aplicado a metade dessa verba, e em cada ano seguinte será aplicada a metade do que sobrou da verba no ano anterior. A progressão geométrica infinita a seguir representa os valores, em milhão de reais, aplicados ano a ano:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...\right)$$

Observe que, a cada ano que passa, o total aplicado em obras sociais aumenta e se aproxima cada vez mais de 1 milhão de reais:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,96875$

...

Por mais que adicionemos termos a essa progressão geométrica, jamais chegaremos à soma 1; porém, adicionando mais e mais parcelas, iremos nos aproximar de 1 tanto quanto quisermos. Por isso, dizemos que 1 é o limite dessa soma.

Veremos a seguir que existe limite da soma dos infinitos termos de qualquer progressão geométrica cuja razão q obedeça a condição: $-1 < q < 1$.

O limite (indicado por S_∞) da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ...)$, de razão q, com $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \tag{6.6}$$

Vamos justificar essa fórmula a partir da soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica, isto é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \therefore S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}$$

Quando o número n de termos aumenta indefinidamente (tende ao infinito), a potência q^n se aproxima indefinidamente de zero (tende a zero), pois o número q está entre -1 e 1.

Assim, a expressão S_n se aproxima indefinidamente de $\frac{a_1}{1-q}$. Indicando esse limite por S_∞, temos a equação (6.6)

Notas:

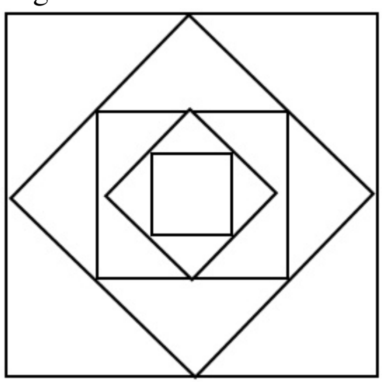
1. Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q se, e somente se, $-1 < q < 1$.

2. O limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica é chamado, simplesmente, de soma dos infinitos termos da progressão geométrica.

Por fim, resolva o seguinte problema, com pequenos ajustes, proposto por Arruda (2013).

Problema 6.7: As irmãs, Alessandra e Daniele, alunas com facilidade em aprender matemática, desejavam construir um jardim para o quintal da sua casa, de tal forma que no centro desse jardim tivesse uma estátua em cima de um chão de mármore como ilustrado na Figura 6.2 :

Figura 6.2: chão de mármore



Fonte: Arruda (2013)

Elas sabiam que a construção deste chão era feito da seguinte forma: dado o quadrado mais interno, considerado como o original, de lado $10\ mm$, os outros quadrados seriam construídos de modo que, a partir do 1º, os pontos médios dos lados de cada um deles seriam os vértices do quadrado anterior.

Além disso, apaixonadas por uma planta chamada "dobradinha", elas gostariam de plantar na grama em volta da estátua algumas dessas plantas. Tais plantas são chamadas de dobradinhas porque são compradas com $100\ mm$ de altura e cada dia que se passa dobram de tamanho até atingir 3 metros.

O único problema para estas irmãs é que elas não possuíam dinheiro suficiente para montar tal jardim. Júlio, um amigo muito antigo da família, dono de uma grande fortuna decidiu pegar todo o dinheiro que as irmãs tinham dando a elas um rendimento de 100% ao dia, fato que ele sabe não se encontrar em lugar algum no mercado financeiro.

Empolgadas com a situação, as irmãs deram R$ 100,00 para Júlio no dia 02/10/2012. Júlio disse que lhes concederia o dinheiro quando atingissem o total necessário de R$ 1 600,00 com a única condição de que as irmãs provassem seus conhecimentos matemáticos determinando a área de todos os quadrados do chão e o tamanho da planta "dobradinha" a cada dia que se passasse.

Determine o que foi pedido por Júlio e o número de dias necessários para que as irmãs atinjam a quantia desejada para montar o jardim.

Para isso, utilize as seguintes tabelas:

Tabela 6.6: área do quadrado

Quadrado (Q)	Área do quadrado (mm^2)	Quociente entre áreas de quadrados consecutivos	Taxa de variação entre áreas de quadrados consecutivos (%)
Original	10^2		
1º Quadrado			
2º Quadrado			
3º Quadrado			
4º Quadrado			

Fonte: Arruda (2013)

Tabela 6.7: tamanho da planta ao dia

Dias decorridos	Tamanho da planta (em mm)	Quociente entre tamanho da planta em dias consecutivos	Taxa de variação entre tamanho da planta em dias consecutivos ($\%$)
0	100		
1			
2			
3			
4			

Fonte: Arruda (2013)

Tabela 6.8: montante do empréstimo ao dia

Dias decorridos	Montante em reais	Quociente entre montantes consecutivos	Taxa de variação entre montantes consecutivos ($\%$)
0	100		
1			
2			
3			
4			

Fonte: Arruda (2013)

A) Qual semelhança você percebeu entre as sequências formadas pelas áreas dos quadrados, o tamanho das plantas e os montantes da aplicação?

B) Sabemos que é possível encontrar uma lei de formação para cada uma dessas situações. Na primeira delas chamamos comumente de termo geral da sequência (neste caso, desconsideramos o quadrado original), na segunda apenas de lei de função e na terceira de Montante. Determine essas leis e em seguida esboce o gráfico de cada uma delas no plano cartesiano. Para esboçar os gráficos utilize papel quadriculado.

C) Após resolver os itens anteriores, podemos afirmar que há semelhanças numérica entre as soluções? Em caso negativo, apresente uma justificativa que as diferencie do ponto de vista matemático.

6.2 Algumas considerações aos professores

Como disse no início da apresentação da proposta, faço agora algumas considerações que entendo serem úteis para a boa aplicação da mesma, procurando dessa forma, deixá-la ao alcance de todos os professores que desejarem fazer algo um pouco diferente e desafiador. Vamos a elas:

1ª) É uma proposta que envolve três temas que comumente são apresentados nos livros didáticos de maneira separados, ou seja, de modo geral os temas aparecem assim: juros simples e juros compostos, estudo das funções: afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica e progressão aritmética e progressão geométrica;

2ª) Considerando o exposto acima, só terá sentido essa proposta se você, professor, também fizer o mesmo para os temas juros simples, função afim e progressão aritmética, ou seja, criar a sua própria proposta de ensino. Desafiador? Que nada. Você consegue;

3ª) Não é uma proposta fechada, na realidade funciona mais como um incentivo para os professores (me incluo também) repensarem sua prática docente, podendo inclusive criar uma outra, baseada nela ou não e de acordo com sua realidade;

4ª) Nas atividades solicitadas aos alunos procure deixá-los à vontade, no momento certo, que você sabe qual é, instigue-os a encontrar a solução;

5ª) Se a escola que você trabalha, contar com laboratório de informática, utilize o software Geogebra, para construir os gráficos solicitados na proposta. Exemplos você encontra em Dante (2013a);

6ª) Os problemas apresentados nesta proposta permitem ao professor tecer comentários para além do ensino dos temas estudados. Por exemplo, o Problema 6.3 lhe permite conversar sobre aposentadoria, INSS, empréstimos, que podem se constituir em temas transversais;

7ª) As possíveis respostas das atividades proposta aos alunos, você encontra no apêndice.

No próximo capítulo apresento uma lista de questões do novo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que dizem respeito aos temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica. Antes porém, apresento alguns aspectos importantes relacionado ao novo ENEM.

Capítulo 7

Lista de Questões do novo ENEM

Neste capítulo apresento uma lista de questões do novo ENEM como complementação da proposta de ensino. Questões, é claro, relacionadas ao tema objeto deste trabalho.

Dada a importância do ENEM para os estudantes do Ensino Médio, pois é a porta de entrada para as universidades, analiso na próxima seção aspectos importantes do mesmo.

7.1 Um pouco do Novo ENEM

O ENEM foi criado em 1998 e segundo Dante tendo como objetivo

> avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica, cuja ideia central considera os princípios da LDB (Lei n. 9 394/96), que preconiza, dentre as funções do Ensino Médio, o domínio dos princípios científicos, tecnológicos que orientam a produção moderna, bem como a compreensão do conhecimento das formas contemporâneas de uso e aplicação das linguagens, da utilização dos códigos e o domínio e a aquisição da organização da reflexão filosófica e sociológica para a vida em sociedade. (2013a, p. 319)

Em 2009, o Ministério da Educação (MEC) muda de forma significativa a proposta do exame, tão significativa que hoje ele é chamado de Novo ENEM. A partir daí, o novo ENEM passou a ser um instrumento de política pública para conduzir e alinhar o currículo do Ensino Médio em todo país.

Ainda segundo Dante o novo ENEM tem como finalidade “avaliar o aspecto cognitivo, mas enfatizando a capacidade de autonomia intelectual e o pensamento crítico dos alunos” (2013a, p.319).

Segundo esse autor o novo ENEM também se propõe

> a melhorar a qualidade do Ensino Médio, uma vez que avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos, não isoladamente, mas de forma conjunta. Assim, o conteúdo ministrado no Ensino Médio passa a ser determinado pelos professores, coordenadores e diretores e não exclusivamente ditado pelas universidades. Desse modo, é importante que os docentes compreendam e discutam a proposta integralmente, pois a execução desses pressupostos em sala de aula poderá contribuir para uma reorientação nas concepções e nas práticas, já que não se trata de mera revisão de conteúdos a ensinar, mas de redimensionar o papel da escola e seus atores. (DANTE, 2013a, p. 319)

Atualmente, com os resultados do ENEM, os inscritos podem concorrer a vagas nas universidades federais que integram o SISU (Sistema de Seleção Unificada), a bolsas do Prouni (Programa Universidade para Todos) e a financiamentos do FIES (Programa de Financiamento Estudantil).

A nota também pode ser utilizada para participação em diversos processos seletivos, inclusive em outros países. Até o ano de 2016 essa nota também poderia ser usada e para obter a certificação do ensino médio.

A prova do novo ENEM abrange uma redação e 180 questões objetivas, sendo 45 questões de cada uma das áreas de conhecimento em que está dividido o exame, quais sejam, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (Língua portuguesa, Literatura e Língua estrangeira), Matemática e suas tecnologias (Álgebra e Geometria), Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Física, Química e Biologia) e Ciências Humanas e suas Tecnologias (Geografia, História, Filosofia e Sociologia).

As questões do novo ENEM são elaboradas com base da Matriz de Referência divulgadas pelo MEC. Nessa matriz estão descritas as competências e habilidades que se esperam do aluno do Ensino Médio e que estão fundamentadas em cinco eixos cognitivos: Domínio das linguagens (DL), Compreensão dos fenômenos (CF), Enfrentamento das situações-problema (SP), Construção de argumentação (CA) e Elaboração de propostas (EP). Em seguida apresento a Tabela 7.1 que trata dos objetivos cognitivos que se espera dos alunos ao final da Educação Básica.

Tabela 7.1: objetivos cognitivos

DL	Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das linguagens espanhola e inglesa.
CF	Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
SP	Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
CA	Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
EP	Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Fonte: O autor

São sete as competências de área da Matriz de Referência para a prova de Matemática e trinta as habilidades (indicada por H). Trato somente das que envolvem os temas objeto deste trabalho.

- **Competência de área 1** - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

  H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem;

  H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimento numérico;

  H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas;

  H5 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

- **Competência de área 5** - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

  H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas;

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas; H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos;

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos com recurso para construção de argumentação;

H23 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Analisando as informações supra citadas, na competência de área 1 temos os juros compostos e a progressão geométrica e na competência de área 5 todos os três temas. Para os juros compostos, temos as habilidades H3, H4, H5, H19, H21 e H23; para a função exponencial as habilidades H19, H20 e H21 e para a progressão geométrica as habilidades H2, H3, H4, H21, H22 e H23.

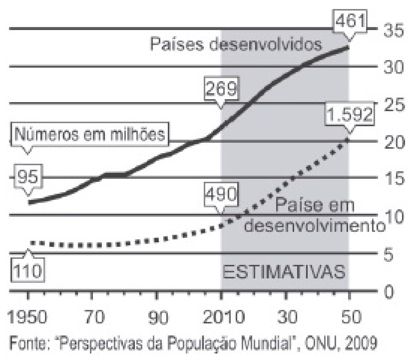
7.2 Algumas questões do Novo ENEM

Apresento agora, a lista com dez questões do novo ENEM, todas resolvidas, solicitadas no período de 2009 a 2016, relacionadas aos temas juros compostos, função exponencial e progressão geométrica.[1]

(ENEM - 2009) Questão 137 - Tema: Função Exponencial

1). A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.

1



Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

[1]Todas as questões contidas nesta lista, foram selecionadas da prova de capa amarela, onde podem ser localizadas pela numeração. (endereço eletrônico: enem.inep.gov.br)

Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a populacao com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

a) 490 e 510 milhões b) 550 e 620 milhões c) 780 e 800 milhões.

d) 810 e 860 milhões e) 870 e 910 milhões

Resolução:

Do enunciado da questão, temos que:

x = 0 corresponde ao ano 2000; $x = 1$ corresponde ao ano 2001; $x = 2$ corresponde ao ano 2002; ...; $x = 30$ corresponde ao ano 2030. Logo, o y (população em milhões de habitantes) procurado será dado quando $x = 30$, ou seja,

$$y = 363e^{0,03x} = 363 \cdot e^{0,03 \cdot 30} = 363(e^{0,3})^3 = 363 \cdot (1,35)^3 \cong 893$$

Portanto, a população com 60 anos de idade ou mais, em 2030, será de, aproximadamente, 893 milhões.

Resposta: alternativa e)

(ENEM - 2011) Questão 157 - Tema: Juros Compostos

2). Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	**IR (imposto de renda)**
Poupança	0,560	isento
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.

b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.

c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.

d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.

e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

Resolução Na poupança, a aplicação de R$ 500,00 gera um montante de:

$$M_P = 500 \cdot (1 + 0,00560)^1 = 500 \cdot 1,00560 = 502,80$$

.

No CDB, a aplicação de R$ 500,00 gera um montante de:

$$M_{CDB} = 500 \cdot (1 + 0,00876)^1 = 500 \cdot 1,00876 = 504,38$$

.

O desconto(D) sobre o ganho no CDB será de:

$$D = 0,04 \cdot 0,00876 \cdot 500 \cong 0,17$$

.

Logo, no CDB, com o desconto do imposto de renda, a aplicação de R$ 500,00 gera um montante de: $R\$504,38 - R\$0,17 \cong R\$504,21$.

Assim, a melhor aplicação para o jovem investidor é o CDB, pois o montante gerado é maior.

Resposta: alternativa d)

(ENEM - 2011) Questão 178 - Tema: Juros Compostos

3). Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades

n	$1,03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Resolução

Supondo que a quantia investida seja **C**, vamos calcular o montante gerado em cada aplicação e daí verificar a rentabilidade de cada uma delas no período de um ano.

Montante do Investimento A: do enunciado, temos: $n = 12$ e $i = 0,03$.

$$M_A = C \cdot (1 + 0,03)^{12} = C \cdot (1,03)^{12} = 1,426C$$

.

Logo, a rentabilidade anual do investimento A será de 0,426, ou seja, 42,6%.

Montante do Investimento B: do enunciado, temos que a rentabilidade anual do investimento B será de 36%.

Montante do Investimento C: do enunciado, temos: $n = 2$ e $i = 0,18$.

$$M_C = C \cdot (1 + 0,18)^2 = C \cdot (1,18)^2 = 1,3924C$$

.

Logo, a rentabilidade anual do investimento C será de 0,3924, ou seja, 39,24%.

Portanto, para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual (42,6%) é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C, respectivamente iguais a 36% e 39,24%.

Resposta: alternativa c)

(ENEM - 2012) Questão 150 - Tema: Juros Compostos

4). Arthur deseja comprar um terreno de Cleber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor), em um investimento, com rentabilidade de 10$\%$ ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução

- Opção 1: Arthur desembolsa R$ 55 000,00 de imediato.

- Opção 2: Arthur desembolsa R$ 30 000,00. Aplica R$ 25 000,00, que, após 6 meses, rende um montante de $1,10 \cdot R\$25000,00 = R\$27500,00$. Pagando uma prestação de R$ 26 000,00, restará R$ 1 500,00. Esse valor, aplicado por mais 6 meses, resulta em um montante de $1,10 \cdot R\$1500,00 = R\$1650,00$.

- Opção 3: Arthur desembolsa R$ 20 000,00. Aplica R$ 35 000,00, que, após 6 meses, rende um montante de $1,10 \cdot R\$35000,00 = R\$38500,00$. Pagando uma prestação de R$ 20 000,00, restará R$ 18 500,00. Esse valor, aplicado por mais 6 meses, resulta em um montante de $1,10 \cdot R\$18500,00 = R\$20350,00$. Pagando a parcela de R$ 18 000,00, sobrar-lhe-á R$ 2 350,00.

- Opção 4: Arthur desembolsa R$ 15 000,00. Aplica R$ 40 000,00, que, após um ano, renderá um montante de $1,10 \cdot 1,10 \cdot R\$40000,00 = R\$48400,00$. Pagando uma parcela de R$ 39 000,00, sobrar-lhe-á R$ 9 400,00.

- Opção 5: Se Arthur nada pagar no ato da compra, aplicara os R$ 55 000,00, que, após um ano, resultara em um montante de $1,10 \cdot 1,10 \cdot R\$55000,00 = R\$66550,00$. Pagando R$ 60 000,00, restar-lhe-á R$ 6 550,00.

Para Arthur, a melhor opção é a 4, pois lhe permitirá, no final de um ano, ficar com a maior quantidade de dinheiro. Observe que, nesta opção 4, o valor pago por Arthur (R$ 15 000,00 + R$ 39 000,00 = R$ 54 000,00) é menor que o valor pago à vista (R$ 55 000,00).

Resposta: alternativa d)

(ENEM - 2013) Questão 162 - Tema: Função Exponencial

5). Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para log_{10}^{2}.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27 b) 36 c) 50 d) 54 e) 100

Resolução

Do enunciado, tem-se:

I) $log_{10}^{2} = 0,3 \Leftrightarrow 2 = 10^{0,3}$

II) Sendo a meia-vida do césio-137 de 30 anos, então:

$$M(30) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow A \cdot (2,7)^{30k} = \frac{A}{2} \Leftrightarrow (2,7)^{30k} = 2^{-1} = (10^{0,3})^{-1} = 10^{-0,3} \tag{7.1}$$

III) Quantidade de massa do césio-137 após redução de 10% da quantidade inicial:

$$M(t) = \frac{10}{100} \cdot A \Leftrightarrow A \cdot (2,7)^{kt} = \frac{1}{10} \cdot A \Leftrightarrow (2,7)^{kt} = \frac{1}{10} \tag{7.2}$$

Elevando os dois membros da equação (7.2) a 30ª potência, obtemos:

$$((2,7)^{kt})^{30} = (\frac{1}{10})^{30} \Rightarrow [(2,7)^{30k}]^{t} = 10^{-30} \tag{7.3}$$

Substituindo a equação (7.1) na equação (7.3), temos:

$$[10^{-0,3}]^{t} = 10^{-30} \Rightarrow -0,3t = -30 \Rightarrow t = 100$$

Portanto, o tempo necessário para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial é de 100 anos.

Resposta: alternativa e)

(ENEM - 2014) Questão 156 - Tema: Progressão Geométrica

6). A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020. Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de

a) 1,14 b) 1,42 c) 1,52 d) 1,70 e) 1,80.

Resolução

Como a variação percentual relativa na taxa de fecundidade é a mesma nos períodos considerados, então a taxa de fecundidade forma uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1,90}{2,38}$ e primeiro termo $a_1 = 2,38$.

Seja a_3 a taxa de fecundidade para o ano de 2020, então:

$$a_3 = 2,38 \cdot \left(\frac{1,90}{2,38}\right)^2 = \frac{1,90^2}{2,38} \cong 1,52$$

Portanto, a taxa de fecundidade no Brasil, em 2020, estará mais próxima de 1,52.

Resposta: alternativa c)

(ENEM - 2015) Questão 159 - Tema: Progressão Geométrica

7). O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirido novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual e a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?

a) $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8000$

b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8000$

c) $P(t) = 4000 \cdot t^{-1} + 8000$

d) $P(t) = 8000 \cdot (0,5)^{t-1}$

e) $P(t) = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$

Resolução

O número de unidades produzidas P, em funcao de t, corresponde, em cada ano, aos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 8000$ unidades e razão $q = 1,5$.

Logo, a expressão que determina esse número de unidades é

$$P(t) = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$$

Resposta: alternativa e)

(ENEM - 2016-2) Questão 141 - Tema: Função Exponencial

8). O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação a quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço. b) reduzida à metade. c) reduzida a dois terços. d) duplicada. e) triplicada.

Resolução

Sabendo que $20min = \frac{20}{60}h = \frac{1}{3}h$, então:

$$p(t) = 40 \cdot (2^3)^{\frac{1}{3}} = 40 \cdot 2 = 80$$

Portanto, a população de bactérias após 20 min será de 80 mil, ou seja, o dobro de 40 mil que era o número de bactérias inicial.

Resposta: alternativa d)

(ENEM - 2016-2) Questão 160 - Tema: Progressão Geométrica

9). Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento.

Uma representação possível do número esperado de participantes para o ultimo dia é

a) 3 x 345

b) (3 + 3 + 3) x 345

c) 3^3 x 345

d) 3 x 4 x 345

e) 3^4 x 345

Resolução

Pelo enunciado do problema o número de participantes representa uma progressão geométrica finita com primeiro termo $a_1 = 345$ e razão $q = 3$.

Seja a_4 o número de participantes do último dia, ou seja, do quarto dia, então:

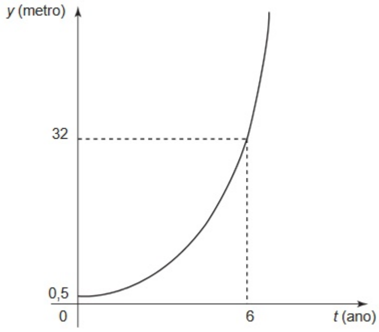
$$a_4 = 345 \cdot 3^{4-1} = 3^3 \cdot 345$$

Portanto, uma representação possível do número esperado de participantes para o ultimo dia é $3^3 \cdot 345$.

Resposta: alternativa c)

(ENEM - 2016-2) Questão 174 - Tema: Função Exponencial

10). Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a e uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

a) 3 b) 4 c) 6 d) $log_2 7$ e) $log_2 15$.

Resolução

Para $t = 0$ temos $y(0) = 0,5 \Leftrightarrow a^{0-1} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 0,5 \Leftrightarrow a = 2$

Logo, a função que relaciona à altura y da planta com o tempo decorrido após o plantio é

$$y(t) = 2^{t-1}$$

Para crescer 7,5 m após o plantio, a altura deve ser 8 m (0,5 + 7,5), isto é,

$$y(t) = 8 \Rightarrow 2^{t-1} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow t - 1 = 3 \Leftrightarrow t = 4$$

.

Portanto, o tempo entre a plantação e o corte é de 4 anos.

Resposta: alternativa b)

No próximo capítulo faço algumas considerações sobre a experiência de realizar este trabalho e o que espero do mesmo.

Capítulo 8

Considerações Finais

Dois anos se passaram, parece que foi ontem, a prova do acesso, o resultado, a matrícula, o primeiro dia de aula. Que primeiro dia, hem!!! A qualificação, meu Deus a qualificação! E o resultado da qualificação que insistiu em sair num dia muito triste pra mim e pra minha família. Mas sei papai, que o senhor está muito feliz no plano espiritual, com essa minha conquista, e hoje, finalizo mais uma etapa de minha vida acadêmica.

Nestas considerações finais vou me prender especificamente no objeto deste trabalho, o primeiro parágrafo foi só um aperitivo para as lembranças surgirem cheias de nostalgia e esperança, jamais de tristeza.

Chegar ao ponto principal deste trabalho, ou seja, a proposta de ensino envolvendo os temas Juros Compostos, Função Exponencial e Progressão Geométrica, foram vários meses entre idas e vindas para ter esse título.

A conversa com os professores, com os colegas de turma, as mudanças, os ajustes, faz, refaz, melhora aqui, mexe ali, mas enfim, está pronto.

Fazendo um paralelo com a frase: "quem acende uma vela é o primeiro a iluminar-se", digo que: quem elabora uma proposta de ensino é o primeiro a repensar sua prática docente.

Quantas vezes ensinei assuntos ou temas sem fazer referência com outros temas da própria matemática. Ou melhor, será que tinha essa preocupação ou conhecimento dessas relações? Na maioria das vezes, garanto que não, uma falha minha ou da minha formação.

Entretanto hoje, impossível continuar assim, pois este trabalho juntamente com as aulas do mestrado provocaram ou reacenderam em mim, a importância da pesquisa em minha prática docente, qualidade imprescindível para o bom professor.

Além das mudanças ocorridas comigo, espero que essa proposta também, proporcione mudanças naqueles professores que tomarem conhecimento dela, principalmente, no seu dia a dia em sala de aula.

É claro que essa proposta só terá sentido, falei sobre isso no capítulo 6, se o professor se dispor também, a elaborar a sua proposta de ensino envolvendo os temas juros simples, função afim e progressão aritmética, procurando a melhor maneira de explorar função quadrática.

Para além dessa mudança ocorrida na minha prática docente, esta proposta oportuniza um ganho de tempo significativo, pois os temas serão trabalhados de forma integrada, contribuindo sobremaneira para minorar a recorrente reclamação por parte dos professores, do pouco tempo para ensinar um grande número de conteúdo.

Por fim, pretendo ainda este ano, apresentar esta proposta para os meus colegas professores do município de Cametá, para que os mesmos juntamente comigo, possamos aplicá-la em sala de aula, e no futuro, não muito distante, publicar os resultados.

Referências Bibliográficas

[1] ARRUDA, Alexandre Goulart. **Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2013.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC, 2016.

[4] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & Aplicações, 2a. ed. São Paulo: Ática, 2013a. v.1.

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & Aplicações, 2a. ed. São Paulo: Ática, 2013b. v. 3.

[6] IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicações: ensino médio. 7a. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 1.

[7] IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicações: ensino médio. 7a. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 3.

[8] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat, 07).

[9] MORAES FILHO, Daniel Cordeiro de. **Manual de redação matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção do Professor de Matemática, 35).

[10] MORGADO, Augusto César. CARVALHO, Paulo César Pinto. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat, 12).

[11] PAIVA, Manoel. **Matemática** 2a. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 1.

[12] SOUZA, Jorge Raimundo da Trindade. **Orientações e Normas Para Elaboração de Trabalhos Acadêmicos**. Belém: EDUFPA, 2013.

Apêndice

Possíveis respostas das atividades proposta aos estudantes

Problema 6.1:

Comentário: O objetivo é o professor deixar os estudantes completarem a tabela do jeito deles e, depois solicitar a turma que raciocínio utilizaram para completá-la. Após a resposta dos estudantes o professor deve criar estratégias para que os mesmos raciocinem de forma semelhante ao realizado na construção da fómula do montante.

Tabela 6.1:

Ao final do:	Valor aplicado (R$)	Juros (R$)	Saldo (R$) (Valor aplicado + Juros)
1° mês	1 200,00	9,20	1 209,60
2° mês	1 209,60	9,68	1 219,28
3° mês	1 219,28	9,75	1 229,86
4° mês	1 229,03	9,83	1 238,86
5° mês	1 238,86	9,91	1 248,77
6° mês	1 248,77	9,99	1 258,76

Portando, Dona Filó terá na poupança para sua viaje de férias a importância de R$ 1.258,76.

Desafio 6.1:

Comentário: Resposta pessoal.

Problema 6.2: Tabela 6.2:

	Inicial	**1ª geração**	**2ª geração**	**3ª geração**	**4ª geração**	...
Números de bactérias	1	2	4	8	16	...

Note que a linha onde se registra o número de bactérias apresenta as potências $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ...$ Assim, o número y de indivíduos gerados por uma bactéria será, na geração x, expresso pela função:

$$y = 2^x$$

Problema 6.3:

Comentário: Na hora da comparação, o professor deve comentar com os alunos que, no início, este gráfico parece uma reta, mas que a partir de certo número de meses seu crescimento se acentua exponencialmente. Aproveite para relacionar isso, com o problema 6.4.

Elementos: $C = 10000$; $n = 4m$; $i = 0,05a.m.$
$M_n = C \cdot (1+i)^n \Rightarrow M_4 = 10000 \cdot (1+0,05)^4 = 10000 \cdot (1,05)^4 \cong 12155,06$

Figura 6.3:

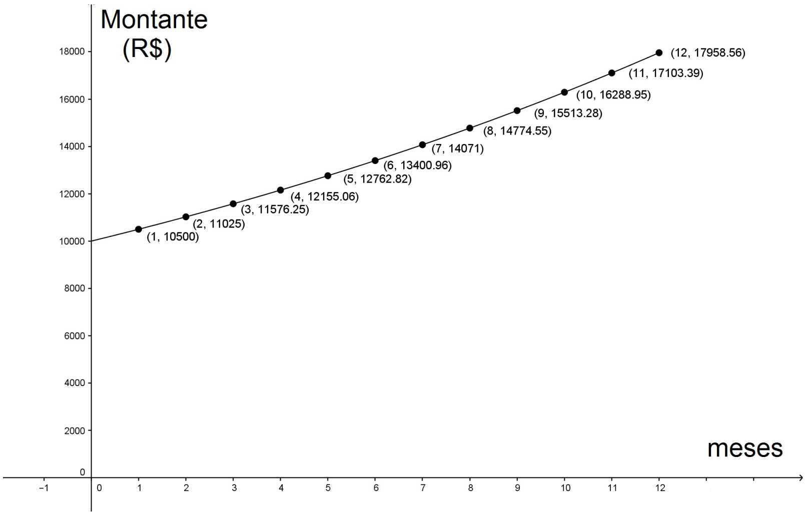
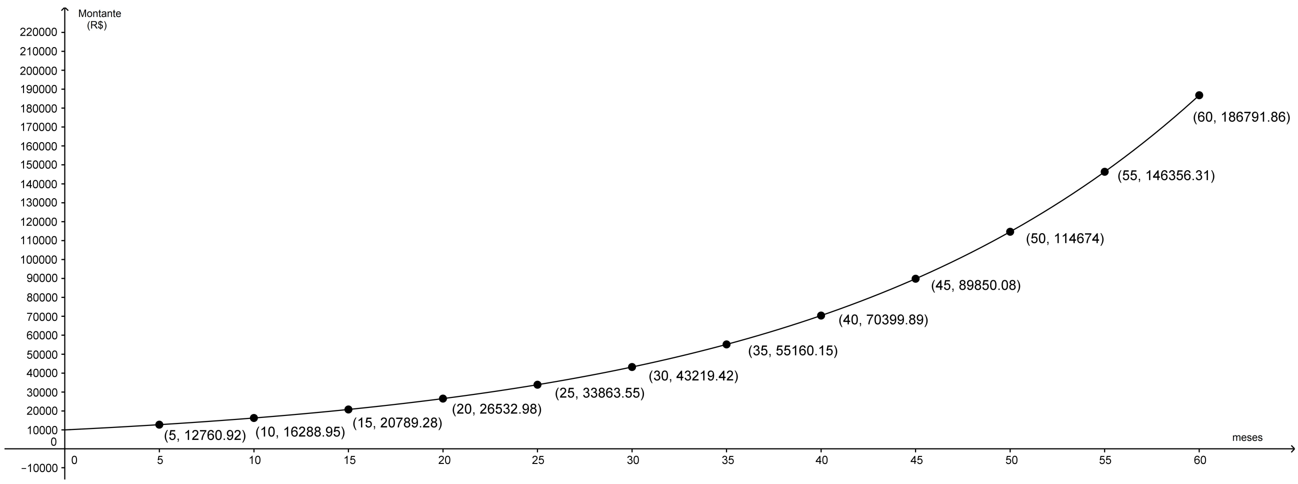


Figura 6.4:



1. O gráfico ilustrado na Figura 6.3 parece uma reta, já o gráfico ilustrado na Figura 6.4 é uma curva;
2. Domínio de ambos os gráfico: $\mathbb{R}_+$

Problema 6.4:

Tabela 6.3:

Daqui a:	**Área atual**	**Aumento**	**Nova área**
1 ano	4 000	0,75 . 4 000	1,75 . 4 000
2 anos	1,75 . 4 000	0,75 . 1,75 . 4 000	$(1,75)^2$. 4 000
3 anos	$(1,75)^2$. 4 000	0,75 . $(1,75)^2$. 4 000	$(1,75)^3$. 4 000
4 anos	$(1,75)^3$. 4 000	0,75 . $(1,75)^3$. 4 000	$(1,75)^4$. 4 000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x anos	....	...	$(1,75)^x$. 4 000

$$\boxed{y = (1,75)^x \cdot 4000}$$

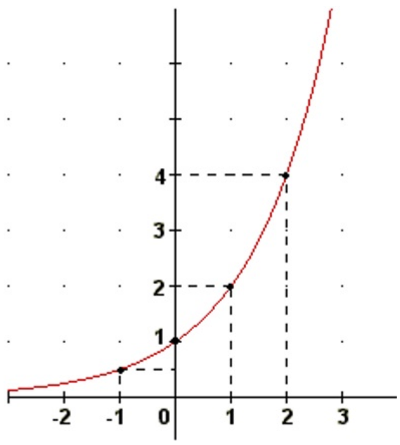
Observe que a variável x se encontra no expoente.

Gráfico da função exponencial

a) $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$, ou seja, $a > 1$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

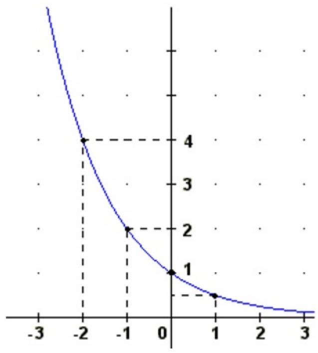
Figura 6.5:



b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ ou $y = (\frac{1}{2})^x$, ou seja, $0 < a < 1$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$(\frac{1}{2})^x$	$(\frac{1}{2})^{-3}$	$(\frac{1}{2})^{-2}$	$(\frac{1}{2})^{-1}$	$(\frac{1}{2})^0$	$(\frac{1}{2})^1$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Figura 6.6:



Propriedades:

- O gráfico é uma curva chamada exponencial, que passa pelo ponto (0, 1);
- O gráfico não intersecta o eixo x, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor zero (não existe x real tal que $f(x) = 0$);
- Quando $a > 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um crescimento lento enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acentuado;
- Quando $0 < a < 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um decrescimento acentuado enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o decrescimento de y se torna cada vez mais lento;
- $D(f) = \mathbb{R}, CD(f) = \mathbb{R}_+^*, Im(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- Para $a > 1$, a função é crescente $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$;
- Para $0 < a < 1$, a função é decrescente $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$;
- A função exponencial é bijetiva, logo, admite função inversa;
- A função exponencial é ilimitada superiormente.

Que relação (ou relações) você pode estabelecer entre o gráfico função exponencial definida por $f(x) = a^x$, com $a > 1$, ilustrado na Figura 6.1 e o gráfico dado pela fórmula do montante $M_n = 10000 \cdot (1 + 0,05)^n$, construído anteriormente, ilustrado na Figura 6.4?

1. Ambos os gráficos representam funções exponenciais, sendo que o gráfico referente ao montante, ilustrado na Figura 6.4, tem domínio restrito aos números reais não negativos, ou seja, $n \in \mathbb{R}_+$ e o gráfico da função exponencial, ilustrado na Figura 6.1, tem domínio pertence aos reais.

Tabela 6.4:

Valor inicial	Após 1º mês	Após 2º mês	Após 3º mês	Após 4º mês
10 000	10 500	11 025	11 576,25	12 155,06

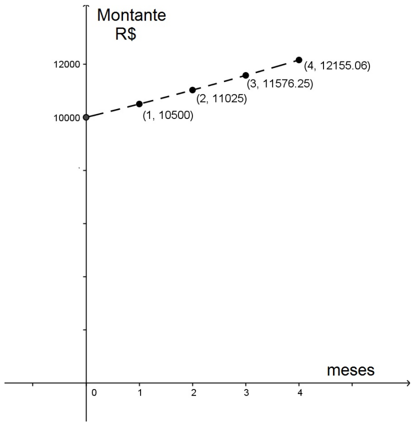
Nessas condições, o valor da dívida, nesse período, será representado pela sequência (10000, 10 500, 11 025, 11 576,25, 12 155,06).

Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo (no caso, 1,05).

Sequências com esse tipo de lei de formação são chamadas **progressões geométricas**. Nesse exemplo, o valor 1,05 é chamado **razão** da progressão geométrica e indicado por q (no exemplo $q = 1,05$).

Gráfico da função $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Figura 6.7:



Problema 6.7:

Tabela 6.6:

Quadrado (Q)	Área do quadrado (mm^2)	Quociente entre áreas de quadrados consecutivos	Taxa de variação entre áreas de quadrados consecutivos (%)
Original	10^2	...	...
1º Quadrado	2 x 10^2	2	100%
2º Quadrado	2^2 x 10^2	2	100%
3º Quadrado	2^3 x 10^2	2	100%
4º Quadrado	2^4 x 10^2	2	100%

Tabela 6.7:

Dias decorridos	Tamanho da planta (em mm)	Quociente entre tamanho da planta em dias consecutivos	Taxa de variação entre tamanho das plantas em dias consecutivos (%)
0	$100 = 10^2$	...	...
1	200 = 2 x 10^2	2	100%
2	400 = 2^2 x 10^2	2	100%
3	800 = 2^3 x 10^2	2	100%
4	1 600 = 2^4 x 10^2	2	100%

Tabela 6.8:

Dias decorridos	Montante em reais	Quociente entre montantes consecutivos	Taxa de variação entre montantes consecutivos (%)
0	$100 = 10^2$	...	...
1	2 x 100 = 2 x 10^2	2	100%
2	2 x 2 x 100 = 2^2 x 10^2	2	100%
3	2 x 2^2 x 100 = 2^3 x 10^2	2	100%
4	2 x 2^3 x 100 = 2^4 x 10^2	2	100%

Pelas tabelas construídas, temos:

- Os quadrados terão tamanho: 100, 200, 400, 800, 1 600 mm^2
- As plantas terão a cada dia tamanho: 100, 200, 400, 800, 1 600 mm
- São necessários 5 dias.

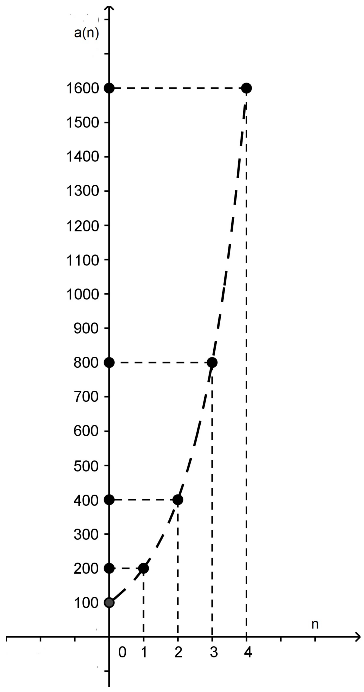
A)

São sequências numéricas iguais. Todas possuem os seguintes valores (100, 200, 400, 800, 1 600).

B)

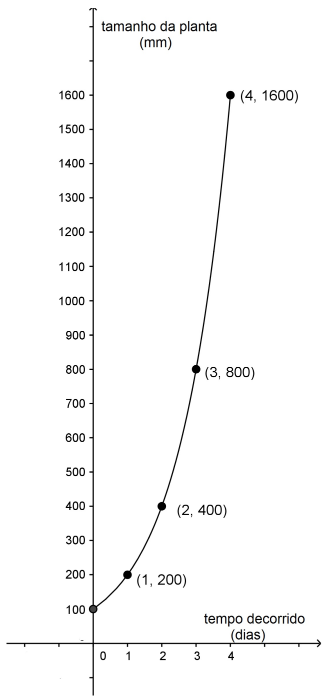
1º caso: $a_n = 2^n \cdot 10^2 = 100 \cdot 2^n$; n: n-ésimo termo da sequência.

Gráfico:



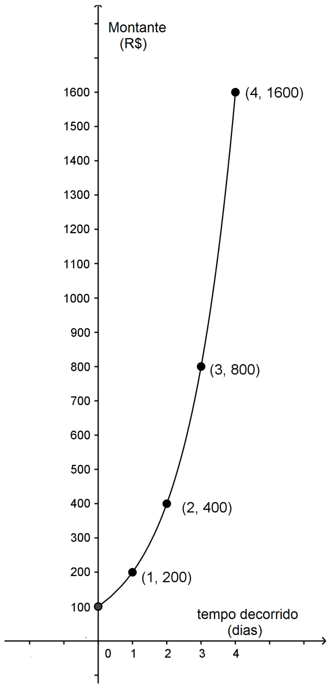
2º caso: $f(x) = 10^2 \cdot 2^x = 100 \cdot 2^x$; x número de dias.

Gráfico:



3º caso: $M_n = 10^2 \cdot (1+1)^n = 100 \cdot 2^n$; n: tempo decorrido

Gráfico:



C)

As três situações são muito semelhantes, pois nas três é possível perceber o mesmo padrão. Isto é, o valor sempre dobra a partir do anterior. Há portanto, um aumento de 100% em relação ao valor que antecede.

Podemos afirmar que numericamente as três situações são iguais, mas do ponto de vista matemático elas são distintas.

A primeira situação acontece no campo do domínio dos conjuntos naturais não nulos $\mathbb{N}^*$. Já a segunda e terceira situações acontecem no campo de domínio do conjunto do números reais não negativos $\mathbb{R}_+$.