



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ALAN MACHADO PIZZO

**O CONCEITO MODERNO DE SIMETRIA:
UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO**

LONDRINA
2017

ALAN MACHADO PIZZO

**O CONCEITO MODERNO DE SIMETRIA:
UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Regina Célia Guapo Pasquini

Londrina
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Pizzo, Alan Machado.

O Conceito Moderno de Simetria: uma proposta de abordagem para o Ensino Médio / Alan Machado Pizzo. – Londrina, 2017.
94 f.

Orientador: Regina Célia Guapo Pasquini.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2017.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Tese. 2. Conceito Moderno de Simetria – Tese. I. Pasquini, Regina Célia Guapo. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

ALAN MACHADO PIZZO

**O CONCEITO MODERNO DE SIMETRIA:
UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO.**

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Eliane Maria de Oliveira Araman
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.^a Dr.^a Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Prof.^a Dr.^a Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 07 de Fevereiro de 2017.

A Deus, que tem permitido que os meus sonhos sejam possíveis; à Lígia, que sempre esteve ao meu lado me encorajando.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Lígia e aos meus filhos Isabela e Samuel por compreenderem minhas ausências nestes longos períodos de estudo e por seu amor e carinho durante todos estes dias.

À minha orientadora Prof.^a Dr.^a Regina Célia por seus valiosos ensinamentos, sua disposição em ajudar e sua amizade.

Aos colegas de mestrado que me ajudaram, me incentivaram e contribuíram para o meu crescimento acadêmico e como pessoa.

Ao meu pai João que sempre me incentivou a ir além nos meus estudos.

Aos docentes do PROFMAT que muito contribuíram para meu crescimento acadêmico e profissional

Gostaria também de agradecer a Deus que tem renovado as minhas forças todos os dias para alcançar meus objetivos.

"Insanidade é continuar fazendo sempre as mesmas coisas e esperar resultados diferentes".

Albert Einstein

PIZZO, Alan Machado. **O Conceito Moderno de Simetria**: uma proposta de abordagem para o Ensino Médio. 2017. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

O presente trabalho trata do conceito moderno de *simetria*, desenvolvido a partir da sua definição, na qual utiliza três pilares: transformação, isometria e invariância. O objetivo é apresentar uma proposta de abordagem de *simetria* para o Ensino Médio, seguindo estes pilares. Para isso, pesquisamos como a palavra foi empregada em diferentes períodos até sua gênese no século XVIII com Adrien-Marie Legendre. Também verificamos como os documentos oficiais que estabelecem os currículos de Matemática tratam de *simetria*, assim como os livros didáticos do Ensino Médio, adotados nas maiores escolas de Londrina. As reflexões sobre nossos estudos nos permitiram elaborar uma proposta com atividades que se alinham com o conceito moderno de *simetria*. Nossa proposta é direcionada para os professores do Ensino Médio, para que eles tenham condições de utilizá-la em suas aulas, assim como elaborar suas próprias abordagens à luz do conceito moderno de *simetria* e, com o auxílio da geometria dinâmica, por meio do software *GeoGebra*.

Palavras-chave: Simetria. Ensino Médio. História da Simetria. GeoGebra.

PIZZO, Alan Machado. **The Modern Concept of Symmetry**:: A proposal for an approach to High School. 2017. 94 f. Dissertation (Professional Masters in Mathematics) – State University of Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

The current work deals with the modern concept of symmetry, developed from its definition, in which it uses three pillars: transformation, isometry and invariance. The goal is to present a symmetry approach proposal for High School, following these pillars. For this, we investigated how the word was used in different periods until its genesis in the Eighteenth Century with Adrien-Marie Legendre. We have also verified how the official documents that have established the Mathematics curriculum have dealt with symmetry, as well as the High School textbooks, adopted in the largest schools in Londrina. The reflections on our research allowed us to elaborate a proposal with activities that align with the modern concept of symmetry. Our proposal is aimed to the High School teachers to enable them to use it in class, as well as to elaborate their own approach in the light of the modern concept of symmetry with dynamic geometry help through Geogebra software.

Key words: Symmetry. High School. History of Symmetry. Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Rotação de um ângulo em torno de seu vértice	21
Figura 2 - Rotação de um segmento em torno de um ponto sob um ângulo α	21
Figura 3 - Rotação do segmento AB em torno do ponto O	22
Figura 4 - Reflexão de um ponto em relação a uma reta	23
Figura 5 - Reflexão do segmento XY em relação à reta r	23
Figura 6 - Reflexão do pentágono $ABCDE$ em relação à reta r	24
Figura 7 - Segmento AB trasladado pelo vetor v	25
Figura 8 - Triângulos ACE e BDF trasladados pelo vetor v	26
Figura 9 - Rotação do segmento XY em torno da reta r no espaço	28
Figura 10 - Tetraedro $ABCD$ rotacionado sob um ângulo 90° em relação a r	28
Figura 11- Reflexão de um ponto em relação a um plano.....	29
Figura 12 - Um ponto e sua imagem por reflexão em relação a um plano.....	30
Figura 13 - Reflexão de um segmento em relação a um plano.....	30
Figura 14 - Reflexão do tetraedro $ABCD$ em relação a um plano	31
Figura 15 - Translação de um cubo no espaço por um vetor.....	33
Figura 16 - Rotação de $ABCD$ em torno do ponto O sob um ângulo α	35
Figura 17 - Simétrico de um número real.....	37
Figura 18 - Extremos de arcos no ciclo trigonométrico	38
Figura 19 - Elemento simétrico de um número inteiro.....	47
Figura 20 - Eixo de simetria da parábola.....	48
Figura 21 - Gráficos de uma função exponencial e uma logarítmica de mesma base.....	49
Figura 22 - Gráfico de uma função real e sua inversa	50
Figura 23 - Gráfico de uma função real f	51
Figura 24 - Gráfico de $ f $ utilizando reflexão em relação ao eixo Ox dos pontos que estão abaixo deste eixo	51
Figura 25 - Ciclo trigonométrico e extremos de arcos P, Q, R e S	52
Figura 26 - Gráficos das funções $fx = \text{sen } x$ e $gx = \text{cos } x$	53
Figura 27 - Translação horizontal de uma senóide.....	53
Figura 28 - Simetria em relação à origem do gráfico de $f(x) = \text{sen } x$	54
Figura 29 - Parábola e seu eixo de simetria.....	56
Figura 30 - Tela inicial GeoGebra.....	59
Figura 31 - Tela GeoGebra com menu de transformações.....	59
Figura 32 - Tela GeoGebra - Quadrado $ABCD$ e seu centro E	60
Figura 33 - Tela GeoGebra - Caixa de diálogo "Rotação em Torno de Ponto"	61
Figura 34 - Tela GeoGebra - Quadrado $ABCD$ e seu simétrico por rotação $A'B'C'D'$	61
Figura 35 - Tela GeoGebra - Menu "Exibir"	62
Figura 36 - Tela GeoGebra - Janela de Visualização 3D aberta	63
Figura 37 - Tela GeoGebra - Pontos $A(0,0,-1)$ e $B(2,0,-1)$ plotados	63
Figura 38 - Tela GeoGebra - Menu para plotar prismas e pirâmides	64
Figura 39 - Tela GeoGebra - Cubo $ABDCDEFGH$ plotado	65
Figura 40 - Tela GeoGebra - Menu de transformações no espaço	65
Figura 41 - Tela GeoGebra - Os Cubos $ABDCDEFGH$ e $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sua imagem por reflexão em relação ao plano OX	66
Figura 42 - Pontos A e B no espaço.....	67
Figura 43 - Menu com opções relacionadas a reta, segmento, semirreta e vetor	67
Figura 44 - Vetor AB no espaço	68
Figura 45 - Tetraedro $CDEF$ e vetor AB no espaço	69

Figura 46 – Menu com algumas transformações no espaço	69
Figura 47 - Tetraedro $CDEF$ trasladado por AB no espaço.....	70
Figura 48 - Segmento AB e ponto O representados no plano cartesiano	72
Figura 49 - Resultado do passo (b) - circunferência Π de centro O e raio medindo OA	73
Figura 50 - Passo (c) - semirreta OA , reta r e ponto C	73
Figura 51 - Passo (d) - segmento AC , reta s e A' (imagem transformada de A pela rotação) ..	74
Figura 52 - Passo (e) – Circunferência Γ , medida AB transportada pelo compasso e B' (imagem rotacionada de B)	75
Figura 53 - Segmento AB e sua imagem $A'B'$ transformada por rotação de 45° no sentido anti- horário.....	76
Figura 54 - Segmento orientado DE e triângulo isósceles ABC	77
Figura 55 - Passo (b) - Ponto C trasladado pelo segmento DE	78
Figura 56 - Triângulo ABC trasladado pelo segmento orientado DE	78
Figura 57 - Quadrado $ABCD$ e reta r	79
Figura 58 - Passo (b) - reta s e ponto O	80
Figura 59 - Passo (c) - Circunferência Γ e A'	80
Figura 60 - $A'B'C'D'$ reflexão de $ABCD$ em relação a r	81
Figura 61 - Translação horizontal do gráfico de $f(x) = \cos(x)$	82
Figura 62 - Gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $f(x) = b \cos(cx + a)$	83
Figura 63 - Eixos de Simetria de Rotação no Tetraedro de Platão.....	84
Figura 64 - Tetraedro de Platão rotacionado em torno da reta a sob um ângulo de 180°	86
Figura 65 - Cubo rotacionado em torno do eixo Ox sob um ângulo de 90°	89

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
SIMETRIA: ASPECTOS HISTÓRICOS	16
CONCEITO MODERNO DE SIMETRIA	20
A PRIMEIRA CONDIÇÃO: ISOMETRIA	20
Isometria no plano	20
Isometria no espaço	27
A SEGUNDA CONDIÇÃO: INVARIÂNCIA	34
SIMETRIA NO CONTEXTO DOS DOCUMENTOS OFICIAIS: UM RECORTE	36
SIMETRIA NO CONTEXTO DOS LIVROS DIDÁTICOS	42
DESCRIÇÃO	43
A Coleção “Matemática Paiva”	43
A coleção “Matemática: Contexto & Aplicações”	44
A coleção “Novo Olhar Matemática”	45
A coleção “Matemática: Ciências e aplicações”	45
DISCUSSÃO	46
Números Inteiros	47
Parábola (Função quadrática)	48
Gráfico da função logarítmica	49
Gráfico da função inversa	50
Gráfico da função modular	50
Extremos de arcos no ciclo trigonométrico	52
Gráfico de funções trigonométricas	53
Matrizes e transformações geométricas	55
Parábola (Cônica)	55
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	56
SIMETRIA: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM	57
COMO UTILIZAR OS RECURSOS PARA O ESTUDO DE SIMETRIA NO GEOGEBRA	58
ATIVIDADES	71
Atividade 1	71
Atividade 2	81
Atividade 3	82

Atividade 4	84
Atividade 5	87
CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
REFERÊNCIAS.....	94

INTRODUÇÃO

“A simetria é o conceito de que certos objetos podem passar por uma série de transformações – girar, se dobrar, se refletir, se mover pelo tempo – e, ao final de todas elas, permanecerem inalterados. Ela está em todo o universo, da configuração do quark ao arranjo das galáxias no Cosmos”.

Stephen Ornes¹

Simetria é um conceito que foi desenvolvido ao longo de séculos e possui diversas aplicações que vão além da Matemática. Existem aplicações em campos científicos da Física, da Química, da Cristalografia e das Artes. Atualmente, diversos pesquisadores se dedicam a estudar *simetria* com diferentes objetivos, entre eles podemos citar Mainzer (1988), Yaglom (1988), Brading e Castellani (2003), Darvas (2007), Hon e Goldstein (2008), Stewart (2012) e, Pasquini e Bortolossi (2015).

Nosso interesse com este trabalho é voltado para fins educacionais. Como estudante do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina (UEL) e professor da Educação Básica Pública, ministrando aulas no Ensino Médio há 10 anos.

Nesta experiência obtida demonstramos nosso interesse em contribuir para o tratamento de conteúdos que pudessem refletir efetivamente em nossa prática docente. Ao desenvolvermos estudos preliminares que pudessem direcionar nosso trabalho chamou-nos a atenção as ponderações presentes na obra, “Simetria: História de um conceito e suas implicações no contexto escolar” (PASQUINI; BORTOLOSSI,

¹ ORNES, S. *O resgate do Teorema Enorme*. Scientific American Brasil, agosto, 2015. p. 59-65.

2015) onde os autores trazem um contraponto entre o desenvolvimento histórico de *simetria*, ainda que apresentado brevemente, com o contexto escolar enfatizando o conceito moderno de *simetria*.

Realizamos nossos estudos nesta direção que pudessem contemplar o mesmo assunto, mas que promovesse ecos na Educação Básica, mais particularmente, no Ensino Médio.

Para isso, sentimos a necessidade de aprofundar nossos estudos a fim de conhecer a forma como *simetria* é tratada ao longo da história. Este estudo nos trouxe informações relevantes para que pudéssemos direcionar nosso trabalho.

Além disso, buscamos os documentos que estabelecem os currículos das escolas que contemplam este conteúdo no Ensino Médio; ainda nesta linha, realizamos uma busca por livros didáticos que tratassem do tema. Os livros didáticos possuem grande influência na atividade docente e constituem-se uma rica fonte de estudo e tomada de decisões para pesquisadores que se preocupam com o ensino de um determinado assunto ou conteúdo.

Observamos que para *simetria*, no Ensino Médio, é dado um papel secundário, não condizente com sua importância ao longo da história e com suas diferentes aplicações. E ainda, pelos diferentes usos desta palavra em diferentes contextos.

Com os resultados obtidos, nosso objetivo central é apresentar neste trabalho uma proposta que possa orientar professores do Ensino Médio para o ensino de *simetria*. Esta proposta é apresentada por meio de atividades de ensino que estejam alinhadas com o conceito moderno de *simetria*, cuja gênese pertence ao Século XVIII com o matemático francês Adrien-Marie Legendre.

Apresentamos nosso texto em cinco capítulos. O primeiro, intitulado *SIMETRIA – ASPECTOS HISTÓRICOS*, apresenta como a palavra *simetria* foi utilizada ao longo da história, desde a Grécia Antiga até a gênese do conceito moderno de *simetria* com Adrien-Marie Legendre. O segundo capítulo, *CONCEITO MODERNO DE SIMETRIA*, traz a fundamentação teórica apoiada na tríade função (transformação), isometria e invariância. O terceiro capítulo, denominado *SIMETRIA NO CONTEXTO DOS DOCUMENTOS OFICIAIS: UM RECORTE* é uma descrição de como *simetria* está presente nos documentos oficiais que definem o currículo do Ensino Médio. *SIMETRIA NO CONTEXTO DOS LIVROS DIDÁTICOS* é o quarto capítulo, no qual fazemos uma descrição de como os autores de livros didáticos abordam o assunto e trazemos algumas reflexões a respeito do tema. O quinto capítulo, intitulado

SIMETRIA: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM, apresenta a proposta para desenvolvermos o conteúdo de simetria no ensino de matemática do Ensino Médio, de acordo com os resultados de nossa pesquisa e, com o auxílio de um software de geometria dinâmica. Além de algumas considerações finais que fazem algumas inferências sobre os resultados obtidos e alguns apontamentos sobre possíveis desdobramentos desta pesquisa.

CAPÍTULO I

SIMETRIA: ASPECTOS HISTÓRICOS

Ao longo da história da humanidade a palavra *simetria* foi, e ainda é utilizada em diversas áreas, em diferentes períodos e sob diferentes contextos. Como apontam os estudos de Weyl (1952), Mainzer (1988), Branding e Castellani (2003), Livio (2006), Darvas (2007), Hon e Goldstein (2008) e Stewart (2012). Isso nos remete a uma investigação sobre tais épocas e contextos, já que na Matemática, *simetria* tem sua devida importância. E frente ao resultado de nossa investigação observamos a necessidade de um cuidado ao servirmo-nos da mesma. Neste texto em particular, apresentamos como referência principal os estudos de Giora Hon e Bernard R. Goldstein apresentado na obra “From Summetria to Simmetry: The Making of a Revolutionary Scientific Concept” (HON; GOLDSTEIN, 2008).

Na Grécia Antiga a palavra que mais se aproxima de *simetria* é a expressão grega *summetra* empregada por Euclides (300 a.C.) em sua obra *Os Elementos*, no Livro X, entretanto, não possui o mesmo sentido do conceito moderno de *simetria* como hoje conhecemos em Matemática, mas sim um sentido de comensurável, ou seja, relacionado a duas quantidades que tem uma unidade de medida em comum (HON; GOLDSTEIN, 2008, p.71).

O conceito moderno de *simetria* tem sua gênese ligada à comparação de sólidos. E, embora Euclides tenha explorado amplamente a questão da congruência de figuras, não se pode atribuir a ele a reflexão sobre sólidos hoje considerados simétricos, mas que não podem ser sobrepostos.

Assim como Euclides, Arquimedes (287-212 a.C) faz uso da palavra em sua obra *On The Equilibrium of Planes* e também se atém ao sentido de comensurabilidade para *simetria*, Hon e Goldstein (2008, p.75, tradução nossa) destacam:

Como Arquimedes destaca em seu prefácio para o Livro 1 desta obra, ele prova, entre outras coisas, que a superfície de uma esfera é quatro vezes maior que a da circunferência, e que o volume de um cone é um terço o volume de um cilindro com a mesma base e a mesma altura. Em outras palavras, as definições destas entidades geométricas implicam magnitudes geométricas que são comensuráveis – elas têm uma medida em comum.

E para isso, trazem as proposições 6 e 7 da obra de Arquimedes:

[6] Magnitudes comensuráveis [*summetra*] estão em equilíbrio [*isorropeonti*] em distâncias reciprocamente proporcionais aos pesos.

[7] Entretanto, mesmo se as magnitudes são incomensuráveis [*asummetra*], elas estarão em equilíbrio [*isorropêsounti*] em distâncias reciprocamente proporcionais às magnitudes (DIJKSTERHUIS, 1956 apud HON; GOLDSTEIN, 2008, p.75, tradução nossa)

Já em relação a Platão (427 a.C – 347 a.C.), Hon e Goldstein (2008, p.96) destacam que a expressão grega empregada *summetros* tem um sentido não matemático, senão estético, de proporção adequada ou bem proporcionado.

Já na obra de Ptolomeu (90 d.C. – 168 d.C), o *Almagesto*, segundo Hon e Goldstein (2008, p.98) a expressão *summetrias* tem o sentido de aparência adequada ou proporcionalidade.

No período medieval Hon e Goldstein (2008, p.77) identificam traduções do termo *simetria* para o latim com o sentido de comensurável.

Já no início da era moderna Hon e Goldstein (2008, p.55, tradução nossa) argumentam:

Ambos Copérnico e Galileo fazem uso do termo, *simetria*; seu uso é consistente com a tradição Vitruviana. Kepler e Leibniz apresentam um caso diferente. Para o melhor de nosso conhecimento, eles quase nunca usaram o termo, de fato, nós não estamos cientes de qualquer ocorrência de *simetria* em *Oeuvres* de Kepler, e a uma instância nos escritos de Leibniz é inconsequente. Esta descoberta está em grande contraste com sua fascinação com o conceito de harmonia o qual eles consideraram fundamental na ciência e metafísica, respectivamente.

Hon e Goldstein (2008, p.206) ainda observam que mesmo que os problemas abordados por Euler e Kant, em período imediatamente anterior a Legendre, pudessem levar a criação do conceito moderno de *simetria*, isto não ocorreu. Não que isto seja algum demérito para estes dois grandes matemáticos, apenas reforça o fato de que o conceito moderno de *simetria* não estava disponível, pois caso estivesse, possivelmente seria aplicado por Euler e Kant.

Hon e Goldstein (2008, p.259, tradução nossa) destacam a mudança do conceito de *simetria* a partir da publicação em 1794 de *Éléments de géométrie* de Legendre:

O uso de simetria de Legendre é a primeira ocorrência que nós temos deste termo com um conceito científico moderno com uma definição apropriada. Para ser correto, simetria, foi invocado antes de Legendre na era moderna em alguns contextos científicos (ver Cap.5-7): Nos séculos XVI e XVII com sentido antigo de comensurabilidade, proporcionalidade, e moderação; e no século XVII, especialmente em história natural, com novo sentido relacionado a regularidade, mas sem uma definição explícita. Com Legendre a história é inteiramente distinta, ele formulou uma definição precisa e então a aplicou para solucionar questões pendentes em geometria espacial (HON; GOLDSTEIN, p. 259, 2008)

A história da origem deste novo conceito científico destaca como personagem principal Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e somente este novo conceito é capaz de superar a abordagem Euclidiana a fim de relacionar dois sólidos que não podem ser sobrepostos, mas que são ditos iguais por *simetria*.

A definição dada por Legendre para *simetria* foi inovadora, *simetria* passou a ser uma relação entre dois sólidos independente de suas posições no espaço. Assim, as partes não dependiam mais do todo, o que permitiu que resultados anteriores em geometria espacial que antes eram dependentes de sobreposição de sólidos, pudessem ser então demonstrados (HON; GOLDSTEIN, 2008, p. 260).

A contribuição de Legendre em relação ao conceito moderno de *simetria*, foi demasiada inovadora e obteve reconhecimento imediato, sendo referenciada segundo Hon e Goldstein (2008, p. 253) por matemáticos como Sylvestre François Lacroix (1765-1843) e Jean-Guillaume Garnier (1766-1840) pouco tempo após sua publicação. Tanto que no curto período entre 1794 e 1813 foram publicadas dez edições dos *Éléments de Géométrie*.

Embora neste capítulo estejam presentes alguns apontamentos sobre *simetria* nas suas diferentes acepções, vamos nos concentrar no conceito moderno de *simetria*, o conceito utilizado pelas ciências aplicadas e pela Matemática. Poderíamos aqui, trazer mais apontamentos que pudessem explicitar a via estética, o conceito de *simetria* aplicado à arte e arquitetura em tempos passados. Entretanto, fugiríamos dos objetivos deste trabalho.

Ressaltamos que nossa apresentação refere-se à gênese do conceito de *simetria*, que continuou em evolução após Legendre. Suas ideias foram inovadoras, entretanto, o conceito moderno de *simetria*, após algumas adaptações, passou a ser definido como uma função ou, uma transformação. E embora, para Legendre fosse necessário romper com a ideia de que as “partes” devessem estar relacionadas com o “todo” para uma relação entre dois sólidos, não podemos mais olhar para uma figura e pensar ainda como na concepção do conceito moderno de *simetria*. *Simetria* como definiremos no capítulo seguinte deve ser entendida como uma relação intrínseca do objeto.

CAPÍTULO II CONCEITO MODERNO DE *SIMETRIA*

Uma vez que compreendemos o sentido científico que queremos abordar *simetria*, utilizaremos aqui a definição dada por Pasquini e Bortolossi (2015).

Seja X um subconjunto não vazio do plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Dizemos que uma função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma *simetria* do conjunto X se F satisfaz as duas condições seguintes.

1. F é uma *isometria*, isto é, F preserva distâncias. Mais precisamente, quaisquer que sejam os pontos P e Q em \mathbb{R}^2 , a distância de P a Q (no domínio de F) é sempre igual à distância de $F(P)$ a $F(Q)$ (No contradomínio de F).
2. $F(X) = X$, isto é, X é invariante por F (a imagem do conjunto X pela função F é igual ao próprio conjunto X).

A PRIMEIRA CONDIÇÃO: ISOMETRIA

Assim como os autores organizam seu trabalho, para apresentarmos as ideias que nos interessam neste texto, dividiremos nossa exposição em duas partes, a primeira em que trataremos de transformações isométricas no plano e a segunda em que trataremos de isometrias no espaço. Vale destacar que utilizaremos a terminologia transformação ao invés de função.

ISOMETRIA NO PLANO

Para o caso de isometria no plano, apresentamos a definição dada por Lima (1996):

Uma isometria entre os planos Π e Π' é uma função $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \Pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$.

Vejamos agora algumas transformações no plano que são isométricas:

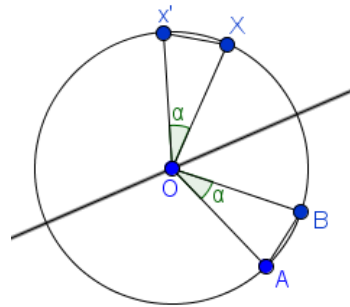
Rotação

Para demonstrar que a rotação é uma transformação isométrica definimos assim como Lima (1996), a *rotação* de um ângulo α , dado um ponto no plano Π e $\alpha =$

\widehat{AOB} um ângulo de vértice O , em torno do ponto O como a função $\rho_{O,\alpha}: \Pi \rightarrow \Pi$ em que $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e para todo $X \neq O$ em Π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que $d(X, O) = d(X', O)$ e $\widehat{XOX'} = \alpha$ (o sentido de rotação de A para B é o mesmo de X para X').

Geometricamente, verifica-se que $\rho_{O,\alpha}$ é uma transformação isométrica, pois os triângulos ABO e $XX'O$ são congruentes (LAL) e conseqüentemente $d(A, B) = d(X, X')$. Além disso, observando os triângulos isósceles $AX'O$ e BXO verificamos que os ângulos de vértice O destes dois triângulos têm a mesma bissetriz, como ilustrado na Figura 1.

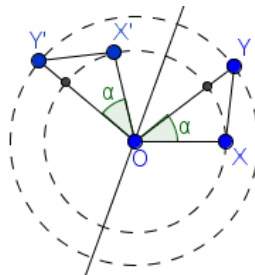
Figura 1 - Rotação de um ângulo em torno de seu vértice



Fonte: Adaptada de Lima (1996, p.22).

Assim, Lima (1996) conclui a demonstração tomando dois pontos $X, Y \in \Pi$, distintos de O , com X' e Y' suas imagens pela rotação $\rho_{O,\alpha}$. E, fazendo uso do resultado anterior tem-se que \widehat{XOY} e $\widehat{X'OY'}$ possuem a mesma bissetriz o que nos leva a concluir que $\widehat{XOY} = \widehat{X'OY'} = \alpha$. Como $d(O, X) = d(O, X')$ e $d(O, Y) = d(O, Y')$ tem-se que $\triangle XOY$ e $\triangle X'OY'$ são triângulos congruentes e por conseqüência $d(X, Y) = d(X', Y')$, ou seja, $\rho_{O,\alpha}$ é uma isometria, cujo ponto fixo é O , como ilustrado na Figura 2.

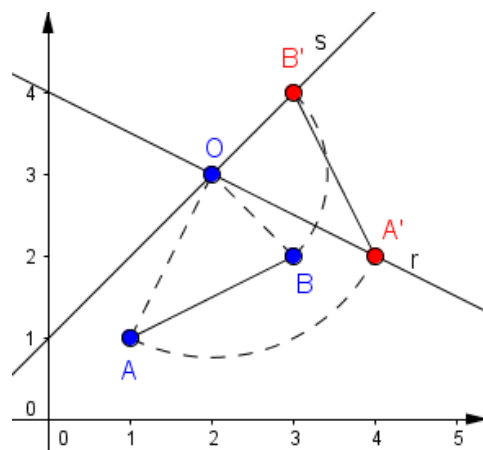
Figura 2 - Rotação de um segmento em torno de um ponto sob um ângulo α



Fonte: Adaptada de Lima (1996, p.22)

Nesta seção, no que segue, para cada definição apresentaremos algumas ilustrações, que obviamente, não vem com a intenção de demonstrar resultados inferidos, mas de elucidar cada definição. Iniciamos com a ilustração de uma rotação no plano onde: dados $A = (1,1)$, $B = (3,2)$ e $O = (2,3)$, queremos rotacionar o segmento AB em torno do ponto O sob um ângulo de 90° no sentido anti-horário. Para isso, tracemos as retas r e s respectivamente perpendiculares por O a AO e BO . Com a ponta seca do compasso em O e abertura medindo \overline{AO} marcamos o ponto A' sobre r . De forma análoga, agora com abertura do compasso medindo \overline{BO} marcamos o ponto B' sobre s , como representado na Figura 3. Verifiquemos que os pontos obtidos são $A' = (4,2)$ e $B' = (3,4)$.

Figura 3 - Rotação do segmento AB em torno do ponto O



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Para concluir temos

$$d(A,B) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

e

$$d(A',B') = \sqrt{(3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

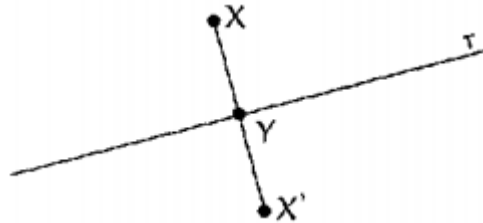
Assim, $d(A,B) = d(A',B')$.

Reflexão

Dada uma reta r no plano Π , assim como Lima (1996) definimos uma transformação de *reflexão em torno de uma reta r* como a função $R_r: \Pi \rightarrow \Pi$ tal que

$R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, $R_r(X) = X'$ para todo $X \notin r$, tal que r é a mediatriz de XX' , assim como na Figura 4.

Figura 4 - Reflexão de um ponto em relação a uma reta

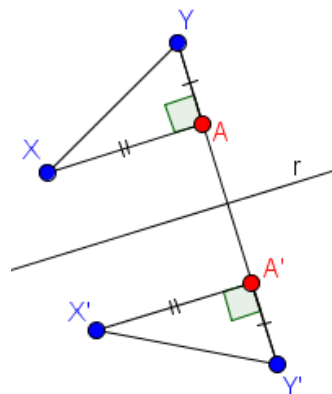


Fonte: Lima (1996, p.16).

A demonstração completa que R_r é uma transformação isométrica compreende dois casos, o primeiro em que X e Y estão em semiplanos distintos determinados por r e o segundo em que $X, Y \in \Pi$ estão no mesmo semiplano determinado por r . Faremos a demonstração da segunda parte, a outra é análoga.

Dados $X, Y \in \Pi$, pertencentes ao mesmo semiplano determinado por r , como ilustrado na Figura 5, sejam XA e $X'A'$ paralelos a r , tal que $A, A' \in YY'$. Assim, os triângulos retângulos XAY e $X'A'Y'$ são congruentes (LAL, $d(A, X) = d(A', X')$, ângulo reto, $d(A, Y) = d(A', Y')$). Consequentemente $d(X, Y) = d(X', Y')$, ou seja, a transformação R_r é isométrica.

Figura 5 - Reflexão do segmento XY em relação à reta r

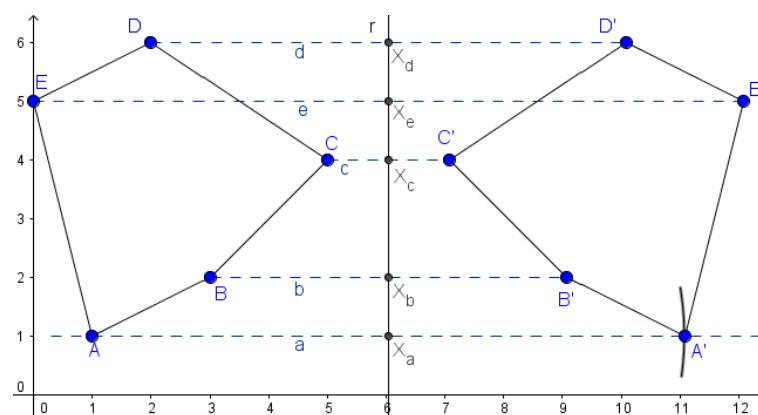


Fonte: Adaptada de Lima (1996, p.17).

A título de ilustração, vamos considerar um pentágono $ABCDE$ de vértices $A = (1,1)$, $B = (3,2)$, $C = (5,4)$, $D = (2,6)$ e $E = (0,5)$ e a reta r dada por $x = 7$. Queremos refletir

$ABCDE$ em relação a r . Vamos considerar alguns pontos para isto, traçaremos retas a, b, c, d e e perpendiculares a r que passem respectivamente por A, B, C, D e E . As retas a, b, c, d e e interceptam r respectivamente por X_a, X_b, X_c, X_d e X_e . Com a ponta seca do compasso em X_a e abertura medindo $\overline{AX_a}$ traçamos o ponto A' sobre a . E, de modo análogo, repetimos o processo e obtemos os pontos $A' = (11,1), B' = (9,2), C' = (7,4), D' = (10,6)$ e $E' = (12,5)$ todos vértices do pentágono $A'B'C'D'E'$ que é a imagem pela reflexão do pentágono $ABCDE$ em relação a r .

Figura 6 - Reflexão do pentágono $ABCDE$ em relação à reta r



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Assim, temos

$$d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} = \sqrt{(9-11)^2 + (2-1)^2} = d(A', B')$$

$$d(B, C) = \sqrt{(5-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = \sqrt{(7-9)^2 + (4-2)^2} = d(B', C')$$

$$d(C, D) = \sqrt{(2-5)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{13} = \sqrt{(10-7)^2 + (6-4)^2} = d(C', D')$$

$$d(D, E) = \sqrt{(0-2)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{5} = \sqrt{(12-10)^2 + (5-6)^2} = d(D', E')$$

$$d(E, A) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{17} = \sqrt{(11-12)^2 + (5-1)^2} = d(E', A')$$

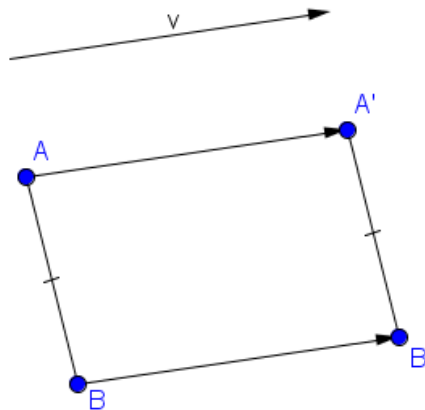
Verificamos neste exemplo que esta transformação é isométrica quando comparamos as distâncias entre os vértices consecutivos. Além disso, podemos comparar as diagonais e verificar que há isometria quando refletidas.

Translação

Dado um segmento orientado AB e o ponto P no plano Π , existe um único ponto $Q \in \Pi$ tal que os segmentos orientados AB e PQ são equipolentes, isto é $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = v$. Q é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e BP como lados. Escreve-se $Q = P + v$ e diz-se que o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ transportou o ponto P para a posição Q . $Q = T_{AB}(P) = T_v(P)$ (LIMA, p. 18, 1996)

Seja AB um segmento em Π e v um vetor, consideraremos aqui $v \neq 0$ a fim de simplificar (o caso em que $v = 0$ tem-se a transformação identidade $T: \Pi \rightarrow \Pi$, $T(AB) = AB$), a transformação $T_v: \Pi \rightarrow \Pi$ é tal que, transporta o segmento AB pelo vetor v . Com efeito, $A'B' = T_v(AB)$. Temos $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = v$, de tal modo que $A'B'$ forma o quarto lado do paralelogramo de lados AB , AA' e BB' , como podemos ver na Figura 7. Como AB e $A'B'$ são lados opostos de um paralelogramo, segue que $d(A, B) = d(A', B')$, isto é, T_v é isométrica.

Figura 7 - Segmento AB transladado pelo vetor v

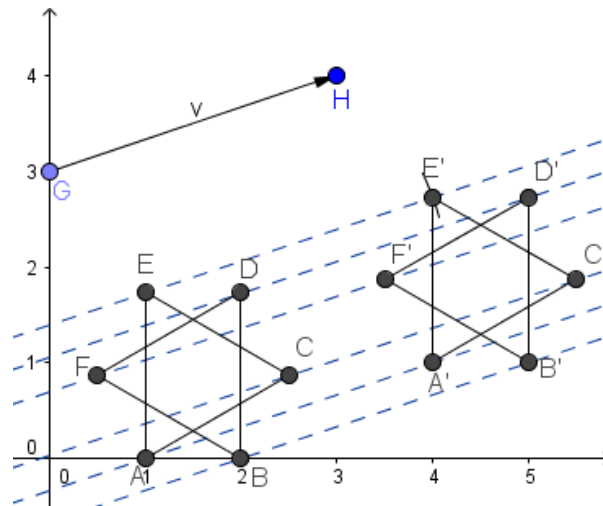


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Como um exemplo de translação, consideremos os triângulos equiláteros ACE e BDF posicionados de modo que se forme uma estrela de seis pontas, em que $A = (1,0)$, $B = (2,0)$, $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D = (2, \sqrt{3})$, $E = (1, \sqrt{3})$ e $F = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Além disso, vamos considerar o vetor $v = (3,1)$ representado pelo segmento orientado \overrightarrow{GH} , em que $G = (0,3)$ e $H = (3,4)$. Queremos transladar ACE e BDF por v . Para mostrarmos que esta transformação é uma isometria, traçaremos por A, B, C, D, E e F retas paralelas a GH . Com a ponta seca do compasso em E e abertura medindo \overrightarrow{GH}

marcamos o ponto E' à direita de E . Analogamente, obtemos $A' = (4,1)$, $B' = (5,1)$, $C' = \left(\frac{11}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$, $D' = (5, \sqrt{3} + 1)$, $E' = (4, \sqrt{3} + 1)$ e $F' = \left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$, como representado na Figura 8.

Figura 8 - Triângulos ACE e BDF trasladados pelo vetor v



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Ao observarmos as medidas dos lados dos triângulos obtemos

$$d(A, E) = \sqrt{(1-1)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{3} = \sqrt{(4-4)^2 + (\sqrt{3}+1-1)^2} = d(A', E')$$

$$\begin{aligned} d(E, C) &= \sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} = \sqrt{\left(4-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2} \\ &= d(E', C') \end{aligned}$$

$$d(C, A) = \sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} = \sqrt{\left(4-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2} = d(A'C')$$

Assim, podemos observar que o triângulo ACE foi transportado por v , resultando no triângulo $A'C'E'$ como imagem pela transformação, e, esta transformação preservou a distância entre os vértices. De forma análoga, podemos verificar que o triângulo BDF também preserva distâncias quando transportado por v , resultando no triângulo $B'D'F'$.

ISOMETRIA NO ESPAÇO

Vamos agora realizar um estudo análogo, mas que se estende ao apresentado por Pasquini e Bortolossi (2015). Vamos considerar as transformações definidas no espaço.

Vejamos a definição dada por Lima (p.52, 1996):

Uma função $T: E \rightarrow E$ chama-se uma isometria, quando ela preserva a distância entre pontos de E , isto é, quando $d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in E$.

Vejamos agora algumas situações que resultam em isometrias.

Rotação

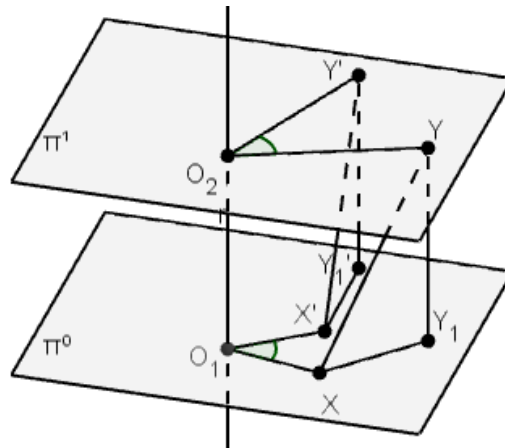
LIMA (1996) define a *rotação de um ângulo α em torno da reta r* como a função $\rho = \rho_{r,\alpha}: E \rightarrow E$ que faz corresponder a cada ponto X o ponto $X' = \rho_{r,\alpha}(X)$ determinado pelas seguintes condições:

- 1) X' pertence ao plano Π que passa por X e é perpendicular a r ;
- 2) Se O é o ponto de interseção desse plano Π com r , tem-se $\overline{OX} = \overline{OX'}$;
- 3) O ângulo orientado $X\hat{O}X'$ é igual α .

Dados $X, Y \in E$, com $\rho_{r,\alpha}(X) = X'$ e $\rho_{r,\alpha}(Y) = Y'$ queremos demonstrar que $\rho_{r,\alpha}$ é isométrica, isto é $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$.

Sejam X e Y pertencentes aos planos Π^0 e Π^1 , respectivamente, e perpendiculares a r . Sejam Y_1 e Y_1' as projeções ortogonais de Y e Y' respectivamente. Como Π^1 e Π^0 são paralelos e perpendiculares a r decorre que $\overline{YY_1} = \overline{Y'Y_1'}$. Além disso, como demonstramos anteriormente, temos $\overline{XY_1} = \overline{X'Y_1'}$ uma rotação sob um ângulo α em torno do ponto $O_1 = r \cap \Pi^0$ no plano Π^0 . Como $X\hat{Y}_1Y = X'\hat{Y}_1'Y' = 90^\circ$. Assim, os triângulos XY_1Y e $X'Y_1'Y'$ pelo caso *LAL* são congruentes e, em particular, $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$, portanto $\rho_{r,\alpha}$ é uma transformação isométrica, como ilustrado na Figura 9.

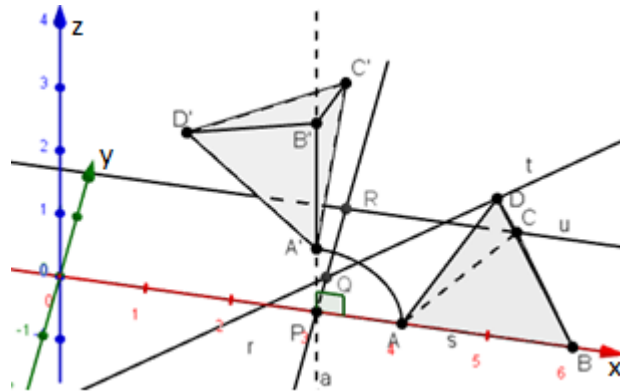
Figura 9 - Rotação do segmento XY em torno da reta r no espaço



Fonte: Adaptada de Lima (1996, p.58).

Para ilustrarmos uma rotação no espaço vamos rotacionar no sentido anti-horário, sob um ângulo de 90° o tetraedro $ABCD$ em relação à reta r , dada por $x = 3$. Os vértices de $ABCD$ são dados por $A = (4,0,0)$, $B = (6,0,0)$, $C = (5, \sqrt{3}, 0)$ e $D = (5, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$. Para isso, traçamos as retas s, u e t perpendiculares à reta r por A, C e D respectivamente. Notemos que $B \in s$. Seja $r \cap s = P = (3,0,0)$. Traçamos agora uma reta a perpendicular a r, s passando pelo ponto P . Com a ponta seca do compasso em P e abertura AP marcamos o ponto $A' = (3,0,1)$ sobre a . De forma análoga obtemos $B' = (3,0,3)$, $C' = (3, \sqrt{3}, 2)$ e $D' = (3 - \frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 2)$, assim como representado na Figura 10.

Figura 10 - Tetraedro $ABCD$ rotacionado sob um ângulo 90° em relação a r



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Quando comparamos as distâncias entre os vértices, obtemos o seguinte:

$$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} = 2 = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = d(A', B')$$

$$d(A, C) = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2 = \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = d(A', C')$$

$$d(B, C) = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2 = \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = d(B', C')$$

$$d(A, D) = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 2 = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2} = d(A', D')$$

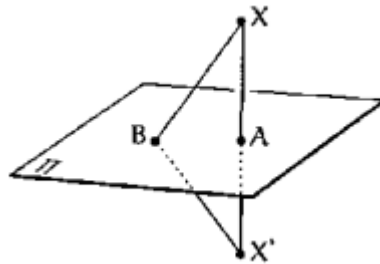
$$d(B, D) = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 2 = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2} = d(B', D')$$

$$d(C, D) = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2 = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 0^2} = d(C', D')$$

Reflexão

Dado um plano $\Pi \subset E$, assim como Lima (1996) definimos a *reflexão em torno de Π* como a função $R_{\Pi}: E \rightarrow E$ que associa a cada ponto $X \in E$ o ponto $X' = R_{\Pi}(X)$ tal que Π é o plano mediador de XX' , como ilustrado na Figura 11

Figura 11- Reflexão de um ponto em relação a um plano

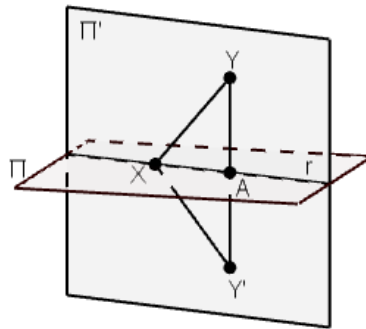


Fonte: Lima (1996, p.56).

Assim $XX' \perp \Pi$. Seja $A = XX' \cap \Pi$, como Π é o plano mediador de XX' decorre que $\overline{AX} = \overline{AX'}$. Além disso, se tomarmos $B \in \Pi$, teremos $\overline{BX} = \overline{BX'}$. Para a demonstração que a reflexão é uma isometria do espaço, tomemos $X, Y \in E$, com $X' =$

$R_{\Pi}(X)$ e $Y' = R_{\Pi}(Y)$. Se $X, Y \in \Pi$ é imediato que $X' = X$ e $Y' = Y$ e que $d(X, Y) = d(X', Y')$. Se um desses pontos não estiver em Π , sem perda de generalidade digamos que seja Y , neste caso, teremos X, Y e Y' contidos em um mesmo plano Π' perpendicular a Π , considere ainda $r = \Pi \cap \Pi'$. Assim, como representado na Figura 12, temos um caso de reflexão de um segmento em relação a uma reta, que já demonstramos ser uma transformação isométrica.

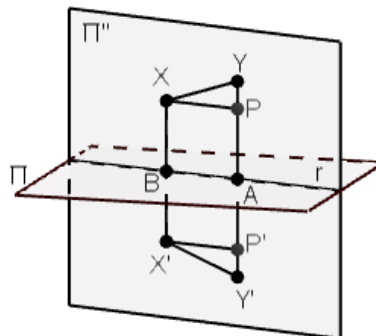
Figura 12 - Um ponto e sua imagem por reflexão em relação a um plano



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Na situação em que ambos, X e Y não pertencem a Π , também teremos X, X', Y e Y' pertencentes a um mesmo plano Π'' perpendicular a Π e podemos verificar que a demonstração também fica restrita à reflexão de X e Y em relação a uma reta s que intersecta Π e Π'' , como podemos ver na Figura 13, e, como já foi demonstrado anteriormente, trata-se de uma transformação isométrica.

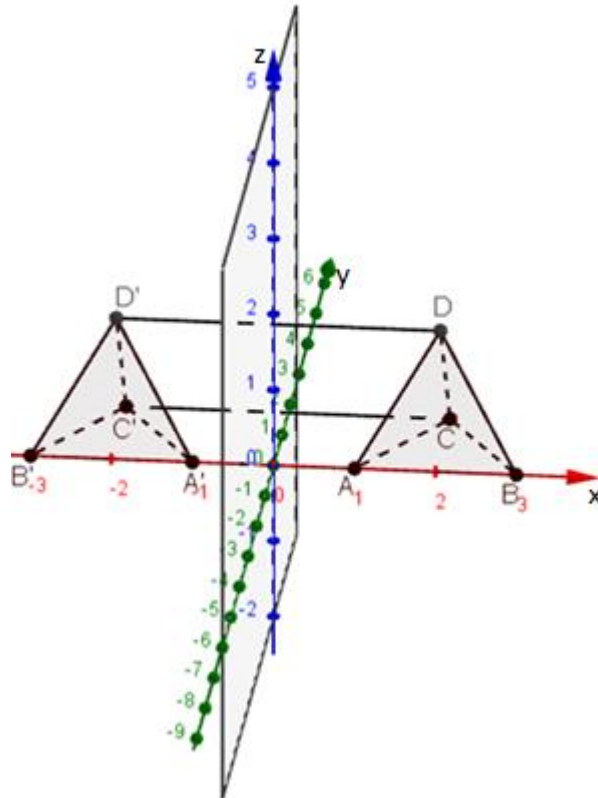
Figura 13 - Reflexão de um segmento em relação a um plano



Fonte: Adaptada de Lima (1996, p.56).

Para ilustrar este caso consideremos o tetraedro regular $ABCD$ de vértices $A = (1,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (2, \sqrt{3}, 0)$ e $D = (2, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$. Queremos obter a reflexão de $ABCD$ em relação ao plano Π , dado por $x = 0$, com efeito, vamos traçar as retas r, s, t perpendiculares a Π respectivamente por B, C e D , note que $A \in r$. Seja $K_r = r \cap \Pi$, com a ponta seca do compasso em K_r e abertura do compasso medindo $\overline{AK_r}$ traçamos $A' = (-1,0,0)$ sobre r . Repetindo o mesmo processo, obtemos $B'(-3,0,0)$, $C' = (-2, \sqrt{3}, 0)$ e $D' = (-2, \sqrt{3}/3, 2\sqrt{6}/3)$, como ilustrado na Figura 14.

Figura 14 - Reflexão do tetraedro $ABCD$ em relação a um plano



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

O Cálculo das distâncias entre os vértices:

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - 1)^2 + 0^2 + 0^2} = 2 = \sqrt{(-3 + 1)^2 + 0^2 + 0^2} = d(A', B')$$

$$d(A, C) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2 = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} = d(A', C')$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2 = \sqrt{(-2 + 3)^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} = d(B', C')$$

$$d(A, D) = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 2 = \sqrt{(-2+1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} \\ = d(A', D')$$

$$d(B, D) = \sqrt{(2-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 2 = \sqrt{(2-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} \\ = d(B', D')$$

$$d(C, D) = \sqrt{(2-2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = 2 \\ = \sqrt{(-2+2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = d(C', D')$$

Assim, observando os pontos considerados a distância permanece alterada.

Translação

Sejam A, B pontos distintos do espaço, assim como Lima (1996) definiremos a *translação* $T_{AB}: E \rightarrow E$ como a função que faz corresponder a cada ponto $X \in E$ o ponto X' tal que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, ou seja, XX' é paralelo a AB , o sentido de X para X' coincide com o sentido de A para B , e $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$.

Decorre da definição que AB e CD são equipolentes, isto é $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $T_{AB} = T_{CD}$. Se denotarmos $\overrightarrow{AB} = v$, podemos utilizar $T_v = T_{AB}$ como notação.

Por fim, podemos concluir que dados os pontos X, Y , com $X' = T_v(X)$, $Y' = T_v(Y)$, para $v = \overrightarrow{AB}$, temos $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{YY'}$, logo XX' e YY' são equipolentes, decorre daí que seus pontos médios de XY' e $X'Y$ coincidem. Concluimos ainda que XY e $X'Y'$ são equipolentes e em particular que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$. Portanto, toda translação é uma transformação isométrica (LIMA, p. 60, 1996).

Para ilustrar este caso, desejamos transportar pelo vetor $v = \overrightarrow{PQ} = (3,0,1)$ o cubo $ABCDEFGH$ de vértices $A = (-2,0,0), B = (-1,0,0), C = (-1,1,0), D = (-2,1,0), E = (-2,0,1), F = (-1,0,1), G = (-1,1,1)$ e $H = (-2,1,1)$.

Resolveremos este exemplo de forma algébrica. Assim

$$A' = A + v = (1,0,1)$$

$$B' = B + v = (2,0,1)$$

$$C' = C + v = (2,1,1)$$

$$D' = D + v = (1,1,1)$$

$$E' = E + v = (1,0,2)$$

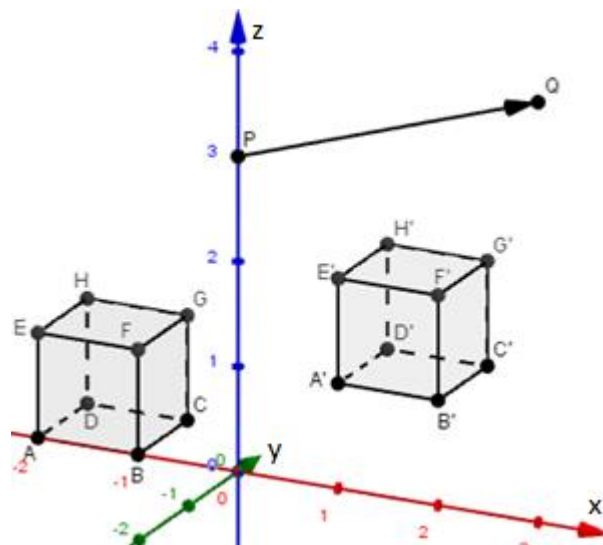
$$F' = F + v = (2,0,2)$$

$$G' = G + v = (2,1,2)$$

$$H' = H + v = (1,1,2)$$

Como podemos ver na Figura 15:

Figura 15 - Translação de um cubo no espaço por um vetor



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Verificaremos as distâncias entre os vértices das diagonais do cubo de $ABCDEFGH$ e $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Podemos verificar ainda que as distâncias entre os vértices adjacentes são preservadas pela transformação. Assim,

$$d(A, G) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = d(A', G')$$

$$d(B, H) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = d(B', H')$$

$$d(C, E) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = d(C', E')$$

$$d(D, F) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = d(D', F')$$

Assim, verificamos que as distâncias entre estes pontos se mantêm constante.

A SEGUNDA CONDIÇÃO: INVARIÂNCIA

A fim de nos apropriarmos do conceito de invariância, inicialmente vamos retomar esta condição na definição de *simetria*:

Seja X um subconjunto não vazio do plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Dizemos que uma função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma *simetria* do conjunto X se F satisfaz as duas condições seguintes.

1. F é uma *isometria*, isto é, F preserva distâncias. Mais precisamente, quaisquer que sejam os pontos P e Q em \mathbb{R}^2 , a distância de P a Q (no domínio de F) é sempre igual à distância de $F(P)$ a $F(Q)$ (No contradomínio de F).

2. $F(X) = X$, isto é, X é invariante por F (a imagem do conjunto X pela função F é igual ao próprio conjunto X).

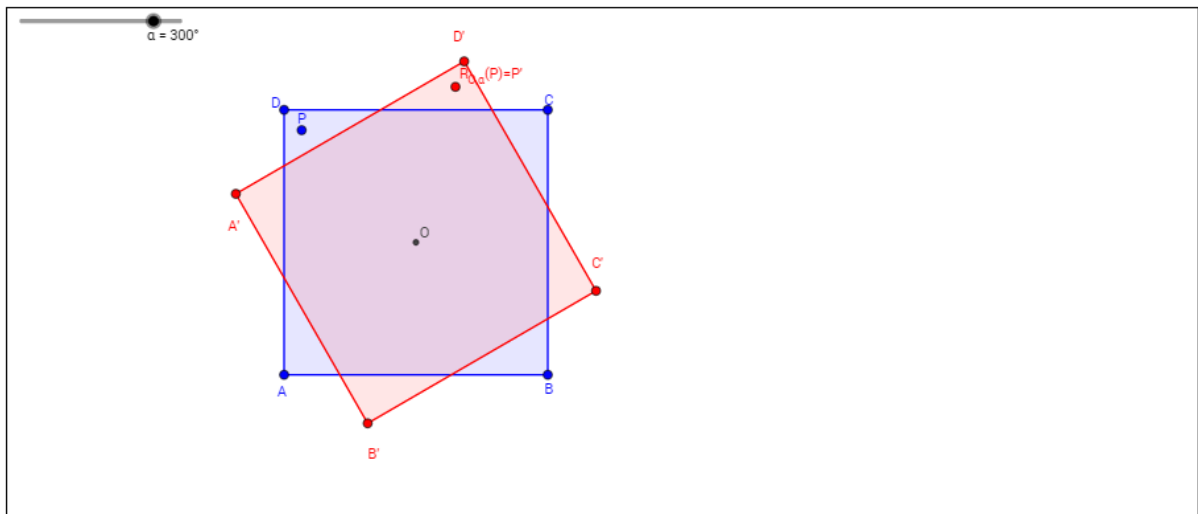
Qual o significado da igualdade " $F(X) = X$ " ? Vamos observar que a igualdade apresentada trata-se de uma igualdade de conjuntos, ou seja, dois conjuntos são iguais quando todo elemento do conjunto $F(X)$ pertence ao conjunto X , e reciprocamente, todo elemento do conjunto X pertence ao conjunto $F(X)$. Nestas condições, para que a imagem do conjunto X seja invariante pela transformação F é necessário que esta igualdade seja satisfeita.

A fim de explorarmos esta condição, trazemos o exemplo a seguir, em que utilizaremos a construção interativa do *GeoGebra* disponível em:

<https://ggbm.at/gZG8ZdVE>

Esta construção realiza a transformação $R_{O,\alpha}$, no plano em relação ao centro O do quadrado $ABCD$ sob um ângulo α no sentido anti-horário. Nesta construção, X é o conjunto formado pelos pontos do quadrado azul e, $R_{O,\alpha}(X)$ é a imagem de X pela transformação $R_{O,\alpha}$, ou seja, o conjunto formado pelos pontos do quadrado vermelho obtido após a transformação aplicada, como ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Rotação de $ABCD$ em torno do ponto O sob um ângulo α



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Segundo a condição acima, a transformação $R_{O,\alpha}$ será invariante apenas se $X = R_{O,\alpha}(X)$. Assim, verificamos que $R_{O,\alpha}$ é invariante somente para os ângulos de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. Nestes casos podemos afirmar que $R_{O,\alpha}$ é uma *simetria*, pois além da invariância observada, a rotação é sempre uma isometria. Já para os demais ângulos, como o ângulo de 300° representado na Figura 16, apesar de a transformação $R_{O,\alpha}$ ser isométrica, ela não é invariante. Consequentemente não há *simetria*.

CAPÍTULO III

SIMETRIA NO CONTEXTO DOS DOCUMENTOS OFICIAIS: UM RECORTE

No contexto de nosso trabalho julgamos importante verificar o modo pelo qual os documentos que norteiam a prática docente do professor da escola básica tratam de *simetria*. Para isto, escolhemos os documentos base, em nível nacional, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) elaborado pelo Ministério da Educação - Secretaria de Educação Fundamental. Este foi o único documento em que nos atemos para realizar nossa análise no que tange ao Ensino Fundamental. Em relação ao nosso objetivo principal do trabalho focamos nossa atenção nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e o documento Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). E ainda, mais especificamente, a fim de trazermos mais elementos para esta discussão e apresentarmos resultados mais consistentes sobre nossas convicções optamos por fazer um recorte em duas regiões do país, escolhendo para isto verificar os documentos dos Estados das regiões Sul e Sudeste do Brasil.

Quanto aos PCN o conceito de *simetria* é contemplado em dois momentos, nos estudos de geometria de modo sutil ao apresentar:

Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não etc. (BRASIL, 1998, p.51, grifo nosso)

Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções. (BRASIL, 1998, p.56, grifo nosso)

Podemos destacar que os PCN deixam explícita a necessidade de se estudar *simetria* em figuras tridimensionais:

Espera-se que o aluno identifique características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, percebendo semelhanças e diferenças entre elas (superfícies planas e arredondadas, formas das faces, simetrias) e reconhecendo elementos que as compõem (faces, arestas, vértices, lados, ângulos). (BRASIL, 1998, p.64, grifo nosso)

No entanto, quando visitamos os PCNEM e PCN+ verificamos que não há recomendações explícitas para o ensino de *simetria*, o que contradiz nossas expectativas em relação aos objetivos do Ensino Médio, já que os conteúdos estudados no Ensino Fundamental devem ser aprofundados no Ensino Médio, além de outros estudos.

Em relação ao documento que estabelece o currículo no Rio Grande do Sul, intitulado: “Lições do Rio Grande” (RIO GRANDE DO SUL, 2009), cujos objetivos:

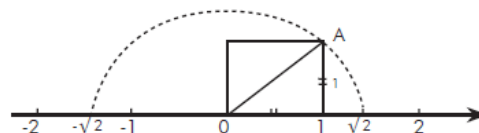
“(...) são formulados a partir de habilidades e competências, dos modos de pensar da Matemática e dos conceitos considerados estruturantes desta disciplina, tendo em vista conteúdos mínimos que, em conexão com os blocos de conteúdos, são trabalhados em níveis crescentes de complexidade, ao longo dos três anos do ensino médio”.

Neste documento, no volume destinado ao Ensino Médio, podemos encontrar algumas referências ao estudo da *simetria* quando sugere explorar a *simetria* entre os gráficos das funções logarítmicas e exponenciais:

(...) o estudo das funções está associado ao estudo de gráficos, a exemplo das funções logarítmicas cujo gráfico, por simetria, é explorado a partir do gráfico das funções exponenciais (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p.198, grifo nosso)

Ainda com relação a este documento, há uma referência à palavra *simetria* quando se prevê o estudo dos simétricos de números reais em relação à origem na reta real, conforme figura a seguir.

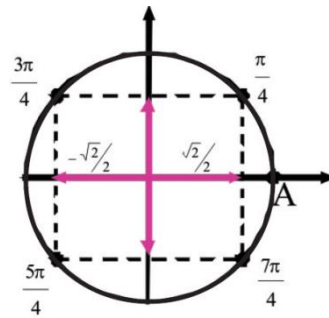
Figura 17 - Simétrico de um número real



Fonte: Lições do Rio Grande

A proposta curricular do Rio Grande do Sul também sugere que no estudo da trigonometria se considere a *simetria* dos extremos de arcos em relação à origem e aos eixos coordenados, como mostra a Figura 18:

Figura 18 - Extremos de arcos no ciclo trigonométrico



Fonte: Lições do Rio Grande (Adaptado de Smole (2003), p. 316).

O Referencial Curricular “Lições do Rio Grande” ainda aborda a translação, mesmo sem fazer uma relação direta entre translação e *simetria*:

O estudo das translações de polígonos, realizado a seguir, é preparatório para o estudo das translações dos gráficos das funções seno e cosseno. Este estudo pode ser aprofundado, a fim de generalizar as translações em gráficos de funções quaisquer. (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p. 307)

Não encontramos referência alguma à palavra ou ao conceito de *simetria* relacionado ao Ensino Médio na “Proposta Curricular de Santa Catarina” de 2014, e no “Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro”, publicado em 2012.

Em nosso Estado, o Paraná, o documento que é referência para os professores atuarem em sala de aula intitula-se “Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática”, e este documento faz referência à expressão *assimetria* no estudo da estatística “Essa formação permite observar, por exemplo, que medidas estatísticas – distribuição de frequências, medidas de posições, dispersão, assimetria e curtose” (PARANÁ, 2008, p.61, grifo nosso).

Outro documento paranaense que faz parte do conjunto de Diretrizes, publicado posteriormente é o “Caderno de Expectativas de Aprendizagem”. Este documento foi publicado em 2012 e foi elaborado ao longo de 2011 por professores da rede pública de ensino e técnicos pedagógicos que atuavam nos Núcleos Regionais de Educação, sob a coordenação da Secretaria da Educação do Paraná. Neste texto, em relação à nossa investigação, nenhuma menção é feita a respeito de *simetria* na disciplina de Matemática. Entretanto, nas disciplinas de Artes e Física

encontramos a palavra *simetria* em nossas buscas. Assim como Pasquini e Bortolossi (2005) chamam atenção, é na disciplina de Artes, no Ensino Médio, que a palavra *simetria* aparece, mais precisamente, o conteúdo *simetria* pertence aos elementos formais: ponto, linha, textura, forma, superfície, volume, cor e luz, cuja composição pode ser bidimensional, figurativa, geométrica e *simetria*, e, envolve uma variedade de movimentos e períodos históricos. Entretanto, estas informações se limitam a apenas estas colocações, não nos permitindo inferir sob o modo como este conceito deve ser abordado e deixando de revelar se de fato o conceito moderno de *simetria* estaria presente nestas abordagens.

Em São Paulo, verificamos o documento “Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas tecnologias” (SÃO PAULO, 2012), com objetivo de “(...) apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos” (SÃO PAULO, 2012, p.7). No que se refere ao Ensino Médio, o documento coloca o seguinte: “Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões)” (SÃO PAULO, 2012, p.69, grifo nosso).

Em Minas Gerais, analisamos o documento “Conteúdo Básico Comum” (CBC) – Matemática (MINAS GERAIS, 2005), de autoria de Mário Jorge Dias Carneiro, Michel Spira e Jorge Sabatucci. Este documento fundamenta-se nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e nas orientações complementares aos PCN e tem como objetivo “[...] tornar operacionais alguns princípios esboçados naquele documento (PCN) especificando e detalhando mais as unidades temáticas e sugerindo estratégias de ensino” (MINAS GERAIS, 2005, p.31).

A parte destinada ao Ensino Médio do CBC, dividida em temas, sugere que seja abordado *simetrias* no plano cartesiano no Tema 8: Geometria Analítica (MINAS GERAIS, 2005, p. 48). Ainda em Geometria Analítica, o documento mineiro sugere “Explorar a simetria de figuras no plano cartesiano” (MINAS GERAIS, 2005, p.71, grifo nosso).

Assim como nos PCN, o CBC prevê o estudo da *simetria* em figuras tridimensionais. O documento sugere o estudo de *simetria* no Tema Geometria de Posição no Espaço: “Reconhecer seções planas obtidas paralelas ou perpendiculares aos eixos de simetria de um prisma, de um cilindro, de uma pirâmide, de um cone e de uma esfera” (MINAS GERAIS, 2005, p.60, grifo nosso). Também, é sugerido pelo

CBC “Identificar simetrias nos sólidos platônicos, que podem ser confeccionados pelos alunos ou pelo professor” (MINAS GERAIS, 2005, p.74, grifo nosso).

O CBC também sugere o uso da *simetria* para generalizar problemas de análise combinatória “(...) Pode-se estimular a listagem de situações pequenas de modo atraente, enfatizando aspectos de simetria e boa diagramação” (MINAS GERAIS, 2005, p.61, grifo nosso).

A *simetria* nos números complexos também é sugerida pelo documento mineiro: “Representar geometricamente, no plano complexo, as operações de adição e multiplicação, bem como a conjugação, relacionando-as com simetrias, rotações e semelhanças” (MINAS GERAIS, 2005, grifo nosso).

Por fim, verificamos a proposta curricular do estado do Espírito Santo. O documento intitulado “Currículo Básico – Escola Estadual – Área de Ciências da Natureza - Matemática” (ESPÍRITO SANTO, 2009), elaborado pela Secretaria de Educação do Espírito Santo (SEDU), que pretende uma educação:

(...) comprometida com a construção de uma cidadania consciente e ativa, que ofereça aos alunos conhecimentos que lhes possibilitem compreender e posicionar-se frente às transformações da sociedade, participando da vida produtiva; que possam relacionar-se com a natureza, produzir e distribuir bens e serviços, convivendo com o mundo contemporâneo (Espírito Santo, 2009, p.6).

Este documento prevê que no estudo da geometria se estude “Simetria de reflexão, translação e rotação” (ESPÍRITO SANTO, 2009, p.94, grifo nosso).

Além de reconhecermos a importância de *simetria* na história e de sua relevância para a própria área de Matemática, bem como de outras ciências, em relação aos documentos estudados, estes determinam que o conteúdo *simetria* seja ensinado em todos os anos do Ensino Médio. Esse estudo deve ser desenvolvido em diferentes áreas da Matemática tais como: números, geometria, análise combinatória; além de sua relação e aplicação em outras disciplinas como Arte, Física e Química.

Embora, busquem orientar a prática docente dos professores da Educação Básica, estes documentos não indicam com detalhes como *simetria* deve ser abordada pelo professor do Ensino Médio. Por isso não encontramos elementos suficientes que nos possibilitem inferir se, ao considerarmos tais documentos, em termos de tratamento do conteúdo em si, a proposição se alinha ou não com a discussão apresentada neste trabalho. Ou seja, uma abordagem capaz de envolver

elementos que subsidiem um trabalho com direção à construção do conceito moderno de *simetria*, ainda que em um nível superior de ensino.

Em termos gerais, nos diferentes documentos analisados encontramos vários apontamentos que, quando reunidos, trazem informações importantes para a prática do professor, na mesma linha do trabalho que desenvolvemos, concatenando com nossas ideias aqui apresentadas. Entretanto, isso se apresenta de forma fragmentada nos diferentes textos.

Desta forma, entendemos que é necessário ampliarmos os estudos sobre o ensino de *simetria* na Educação Básica, revisando o modo pelo qual o conteúdo é apresentado. É essencial uma discussão sobre a importância deste conteúdo (*simetria*) na elaboração do currículo de Matemática do Ensino Médio. Estes documentos norteiam a prática docente dos professores de um modo geral. Além disso, são fonte de consulta para autores de livros didáticos em nível nacional e que culminam na forma como, enfim, o conteúdo será abordado na sala de aula.

No capítulo seguinte estendemos esta discussão, apresentando uma análise a partir de livros didáticos. Mais especificamente, veremos como os autores de livros didáticos abordam *simetria* nos livros do Ensino Médio.

CAPÍTULO IV

SIMETRIA NO CONTEXTO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Não há dúvida que o livro didático tem ocupado um espaço significativo na prática docente dos professores da Educação Básica. Incentivados pelo Governo Federal, a partir dos programas do livro didático, atualmente Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o governo oferece o livro didático de forma gratuita para todos os alunos da Educação Básica, seja do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Somente com o Ensino Médio, em 2016 o PNLD beneficiou quase 7,5 milhões de alunos e foram gastos 350 milhões de reais entre aquisição e distribuição de livros². Assim, há uma pressão para os professores utilizá-los, o que de certo modo os influenciará diretamente sobre o modo de agir. Já que o investimento nesta direção é de altíssimo valor por parte do governo, o professor, consciente ou não, e por vezes sem perceber fica atrelado a, por exemplo, abordar um conteúdo que está no livro, trabalhar com os problemas ou exercícios do livro e deixa de escolher o próprio conteúdo em si, já que os documentos oficiais que norteiam a sua prática não explicitam exatamente o que se deve ensinar. *Simetria* serve-nos como exemplo dessa afirmação.

A partir do papel que o livro didático ocupa na escola e para que pudéssemos nortear o desenvolvimento da proposta a que este trabalho tem por objetivo principal, decidimos investigar o modo pelo qual *simetria* está presente nos livros didáticos. Em uma verificação preliminar, optamos por descartar o estudo dos livros didáticos do Ensino Fundamental, por entender que a forma como *simetria* é abordada apresenta-se adequada ao nível de ensino, salvo algumas considerações que já foram feitas por Mendes (2013), inclusive, vários livros contêm capítulos que tratam apenas de *simetria*. Já no Ensino Médio a situação é diferente, e acreditamos que podemos contribuir com uma proposta de ensino.

Nosso estudo limitou-se a olhar para as escolas de Londrina, cidade em que residimos.

A fim de que nossa discussão atinja uma parcela significativa dos livros que são utilizados por professores e alunos de nossa cidade, fizemos um levantamento em todas as escolas com mais de mil alunos, para assim verificar entre os mais diversos

² (<http://www.fn.de.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>).

livros, aqueles que são adotados por estas escolas. Por orientação do Núcleo Regional de Ensino, na pessoa da coordenadora da área de Matemática, consultamos o site da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná (SEED)³ para tomar essa conduta e identificar estas escolas. De acordo com a consulta feita em 08/02/2016, às 11:49 a este site, há 18 escolas com mais de mil alunos matriculados em Londrina. O levantamento feito diretamente nas escolas apontou que os livros adotados por elas são os seguintes: “Novo Olhar Matemática”, “Matemática Paiva”, “Matemática: Contexto & Aplicações” e “Matemática: Ciências e Aplicações”. No texto que segue, apresentamos uma breve descrição sobre o que encontramos em cada um deste livros, assim como a descrição de cada obra analisada. Não é nossa intenção concluir resultados que sugerem inferências sobre a análise a priori. Mais adiante, faremos uma seção que tem esse objetivo.

DESCRIÇÃO

A COLEÇÃO “MATEMÁTICA PAIVA”

A coleção – Matemática Paiva (PAIVA, 2013) – composta de três volumes, com um volume para cada ano do Ensino Médio, é da autoria de Manoel Paiva e está em sua 2ª edição, pela Editora Moderna. Esta coleção foi adotada em duas das dezoito escolas de nossa pesquisa e dedica-se exclusivamente ao Ensino Médio. Embora não tenha nenhum capítulo específico sobre *simetria*, o livro trata do assunto, mesmo que indiretamente, em seus três volumes.

No volume 1, na página 172, quando trata da parábola, o autor usa as expressões “dois ramos simétricos” e “eixo de simetria”. Já na página 241 é tratada a questão da *simetria* dos gráficos das funções logarítmica e exponencial em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

No volume 2, na página 28, há uma seção intitulada “Simetrias” no capítulo “Circunferência trigonométrica: seno e cosseno” em que o autor relaciona “medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano” (PAIVA, 2013). Já na página 107, o

³ <http://www.consultaescolas.pr.gov.br/consultaescolas/f/f/fcls/municipio/visao?cid=28&cid=28>

autor não relaciona *simetria* à transformações geométricas, mas apresenta uma translação e uma rotação por meio de matrizes, sem mencionar algo sobre *simetria*.

No volume 3, na página 126, o autor novamente utiliza a expressão “eixo de simetria”, a mesma mencionada no volume 1 no estudo do gráfico das funções quadráticas, mas agora no estudo da parábola, quando gerada por meio de uma secção de um cone (cônica).

A COLEÇÃO “MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES”

A obra – Matemática: Contexto & Aplicações (DANTE, 2013) – do autor Luiz Roberto Dante, apresenta-se na 2ª edição, da Editora Ática. Trata-se de uma coleção de três volumes direcionado para o Ensino Médio. O livro de Dante foi adotado por 6 das 18 escolas pesquisadas em Londrina. De todo seu conteúdo, não há nenhum capítulo que se dedique especificamente à *simetria*. Entretanto, há indícios da palavra nos 3 volumes da coleção.

No Volume 1 da obra, na página 96, é abordada a reflexão em torno do eixo Ox para se construir gráficos de funções modulares, porém não é feita nenhuma relação com *simetria*. Enquanto que, na página 97, quando trata de funções modulares, mesmo que o autor apresente, ainda que sem detalhes, algumas transformações (rotação, translação e reflexão), não há menção à palavra *simetria* no contexto da apresentação. Já entre as páginas 113 e 115, ao tratar do gráfico da função quadrática o autor discute *simetria* em relação ao eixo Oy da função, e aponta a possibilidade da reflexão de uma parábola em relação ao eixo horizontal, quando comenta “o gráfico das funções quadráticas $f(x) = ax^2$ e $f(x) = a'x^2$, em que a e a' são simétricos em relação ao eixo x ” (DANTE, 2013, p.114). Mais adiante, na página 187, trata do gráfico da função inversa e o autor aborda a *simetria* em relação à reta $y = x$ de uma função real f e sua inversa $g = f^{-1}$, enquanto que particulariza essa discussão quando trata da *simetria* em relação à reta $y = x$, das funções exponencial e logarítmica de mesma base na página 191.

No Volume 2 da coleção, na página 48, o autor afirma que com a translação em $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita da senóide (gráfico de $g(x) = \sin x$) é possível a obtenção da cossenóide (gráfico de $f(x) = \cos x$). Já entre as páginas 98 e 104, quando está tratando de matrizes, o autor apresenta algumas transformações

geométricas, entre elas a rotação, a translação e a reflexão, sem, no entanto, promover alguma discussão que leve a alguma relação com *simetria*.

A COLEÇÃO “NOVO OLHAR MATEMÁTICA”

O livro – Novo Olhar Matemática (SOUZA, 2013) – de autoria de Joamir Souza, 2ª edição, da Editora FTD foi escolhido por 1/3 das 18 escolas pesquisadas. Esta coleção dedica-se aos estudos dos conteúdos do Ensino Médio. Curiosamente o autor é ex-aluno de graduação desta Instituição de Ensino Superior (UEL) e Mestre pelo PROFMAT/UEL. Esta coleção também não apresenta nenhum capítulo específico sobre *simetria*, embora o tema esteja presente nos 3 volumes.

No volume 1, na página 72, o autor trata da *simetria* nos gráficos das funções inversas. Para isso, ele apresenta *simetria* como uma qualidade entre o gráfico da função real f e o gráfico de sua inversa f^{-1} em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano. Entre as páginas 119 e 148, o autor apresenta diversas propriedades das funções quadráticas e seu gráfico (parábola) e por várias vezes se refere ao “eixo de simetria da parábola” (SOUZA, 2013). Na página 185, o livro explora a *simetria* dos gráficos das funções exponencial e logarítmica, de mesma base, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

No volume 2, na página 21, são exploradas as *simetrias* da extremidade dos arcos no ciclo trigonométrico em relação aos eixos x e y e à origem. Na página 28, o gráfico da função cosseno é tratado como uma translação do gráfico da função seno, entretanto, o conceito de *simetria* não é explorado.

No volume 3, na página 218, o autor fala sobre o eixo de *simetria* da parábola quando faz uma abordagem de seções cônicas semelhante à forma como abordou no gráfico da função quadrática.

A COLEÇÃO “MATEMÁTICA: CIÊNCIAS E APLICAÇÕES”

O livro intitulado – Matemática: Ciências e aplicações (IEZZI et al, 2013) – cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, 7ª edição, editora Saraiva, foi adotado por duas das dezoito escolas pesquisadas em Londrina.

No volume 1, na página 23, quando os autores discutem sobre números inteiros, é usado o termo simétrico para tratar da relação entre número inteiro e seu oposto na reta real: “(...) dizemos que o oposto, ou **simétrico**, de a é $-a$, e vice-versa” (IEZZI et al, 2013). Na página 98, é apresentado o eixo de *simetria* do gráfico de uma função quadrática, assunto que também é tratado em um apêndice do capítulo do livro na página 120. Já na página 129, quando trata do gráfico da função modular não é mencionada reflexão ou mesmo se refere à *simetria*. Entre as páginas 176 e 178, os autores tratam da *simetria* dos gráficos das funções logarítmica e exponencial de mesma base em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares: “(...) Notamos que eles são simétricos em relação à reta correspondente à função linear dada por $y = x$ ” (IEZZI et al, 2013). Na página 194, a questão da *simetria* em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares é ampliada:

“(...) se f é inversível e um par (a, b) pertence à função f , então o par (b, a) pertence a f^{-1} . Consequentemente, cada ponto (b, a) do gráfico de f^{-1} é simétrico de um ponto (a, b) do gráfico de f em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano”. (IEZZI, et al, 2013, p.194)

No volume 2, página 18, os autores apresentam as *simetrias* entre os extremos de arcos no ciclo trigonométrico em relação aos eixos Ox Oy e em relação à origem. Já entre as páginas 99 e 101, são tratadas as transformações como translação e rotação no estudo de matrizes, porém sem fazer relação com *simetria*.

No volume 3, na página 108, é estudado o eixo de *simetria* da parábola (reta perpendicular à diretriz e que passa pelo foco).

DISCUSSÃO

Ao assumirmos neste trabalho a importância de tratarmos do conceito de *simetria*, segundo o conceito moderno, que matematicamente é o conceito correto, nos parágrafos a seguir tecemos algumas considerações a respeito de nossa visita aos livros didáticos de acordo com essa concepção.

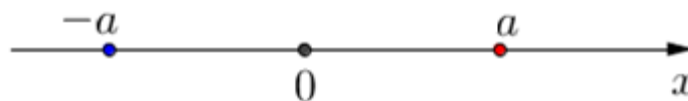
De modo geral, podemos observar, na investigação realizada, que em todos os livros apresentados acima, a palavra *simetria* e seus derivados estão presentes nas obras analisadas. Entretanto, podemos considerar que, em algumas situações, ela está sendo utilizada em desacordo com o conceito moderno de *simetria*. A esta palavra são atribuídos vários significados e em diferentes contextos. Chamamos a

atenção para a forma segmentada na qual *simetria* é apresentada nos diversos textos matemáticos, muitas vezes sem a apresentação de uma definição, como se, cientificamente, a ela não houvesse um conceito matemático associado. Não estamos afirmando com isso que em nível de Ensino Médio devemos apresentar a definição de *simetria* com o devido rigor, tal como na página 20 deste trabalho. Entretanto, acreditamos que a forma como abordamos um conceito matemático em qualquer nível de ensino deve seguir critérios que, apesar de não trazer elementos que estabeleçam o rigor, sustentem uma definição que futuramente estará por vir, em um nível maior, de ensino superior a este. Na exposição que segue traremos uma discussão que tem a intenção de mostrar os diferentes segmentos, da forma como a palavra *simetria* foi trazida ao longo das obras analisadas. Tentaremos fazer com que o leitor conheça como o tema é abordado pelos autores dos livros, destacando as distintas abordagens apresentadas e algumas inferências sobre isso.

NÚMEROS INTEIROS

Indícios da palavra *simetria* surgem nos textos para introduzir números inteiros, ou seja, ao definir o elemento simétrico de um número a como $-a$ e vice-versa. Na figura a seguir, ilustramos o elemento simétrico de um número a representando-o na reta numérica, assim como os livros o fazem.

Figura 19 - Elemento simétrico de um número inteiro



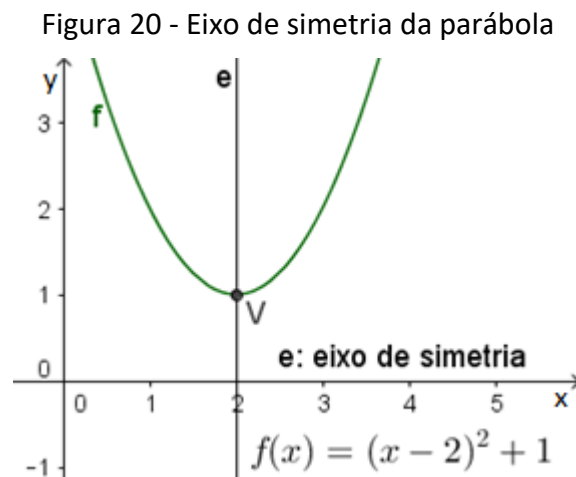
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Podemos considerar que a questão da reciprocidade pesa a favor desta forma de abordagem do conceito de elemento simétrico, já que há uma transformação do conjunto dos números inteiros nele mesmo, representado aqui como a reta numérica real. Essa transformação é uma reflexão em torno de um ponto, conforme Lima (1996). Neste caso, o ponto O é a origem da reta, conforme ilustrado acima. Assim, esta transformação é uma isometria e é invariante. Portanto, embora quando explícito no

texto, não faça menção a esta abordagem, podemos dizer que o emprego do termo *simétrico* não contradiz o conceito moderno de *simetria*.

PARÁBOLA (FUNÇÃO QUADRÁTICA)

Em todas as coleções estudadas neste trabalho, a palavra *simetria* está presente no estudo do gráfico da função quadrática. Os autores apresentam, alguns elementos da parábola e entre estes elementos está o eixo de *simetria*. Assim como aparece nos livros representamos estes elementos na Figura 20.



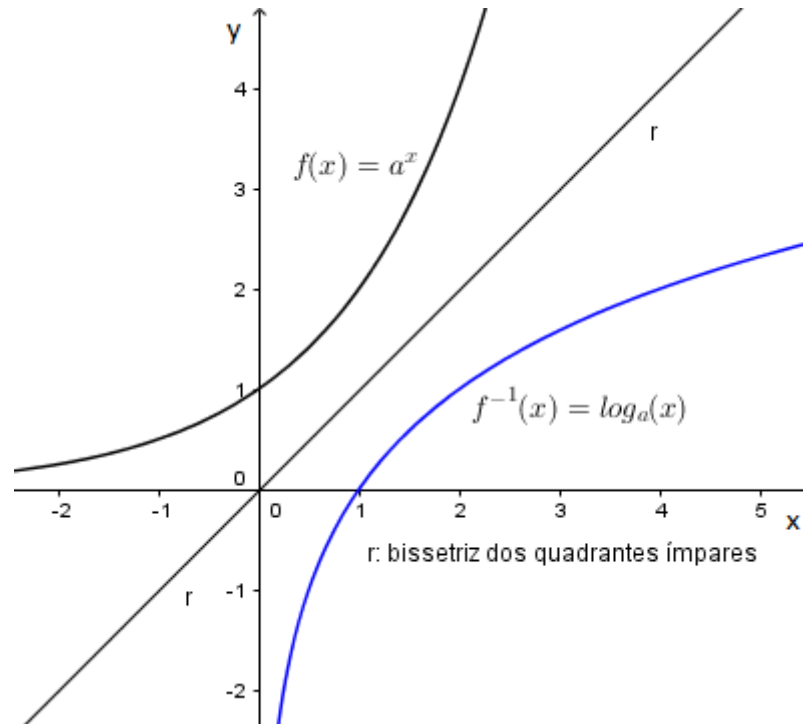
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Em geral, nestes livros o “eixo de simetria” é definido como a reta perpendicular ao eixo Ox e que passa pelo “vértice V ”. É frequente o uso da expressão “ramos simétricos” nas abordagens em que caracterizam o gráfico da função quadrática como uma parábola. Entretanto, usar esta referência pode levar-nos a incutir a ideia de que a partir de um “ramo” (domínio) seja possível obter por meio de uma transformação o outro “ramo” (imagem), o que contradiz a condição de invariância necessária para que houvesse uma *simetria* segundo o conceito moderno. Tal ideia considera *simetria* como um sinônimo de reflexão, em oposição ao conceito moderno de *simetria*. Seria apropriado que os autores dos livros didáticos escrevessem algo como “há *simetria* no gráfico da função f em relação à reta (ou ao eixo de *simetria*) e ”.

GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Quando os livros analisados tratam do gráfico da função logarítmica fazem menção à *simetria* em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, dos gráficos das funções $y = \log_a x$ e $y = a^x$, como ilustra a Figura 21.

Figura 21 - Gráficos de uma função exponencial e uma logarítmica de mesma base



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

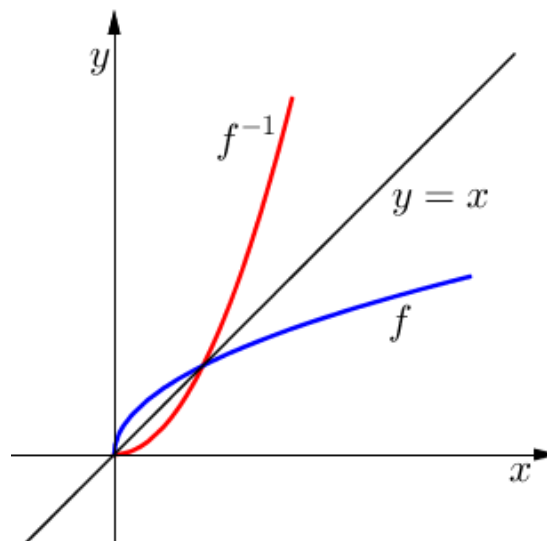
Conforme estudamos nos capítulos anteriores deste trabalho, *simetria* é tratada como uma propriedade intrínseca do objeto, ainda que não esteja explícita esta intenção, podemos dizer que autores trazem a ideia de *simetria* no conjunto de pontos formado pelos gráficos de f e f^{-1} , já que ao trazer esta abordagem eles sempre consideram os gráficos conjuntamente, no mesmo sistema de eixos, entendemos assim que o conjunto no qual estamos analisando a condição de *simetria* é formado pela reunião dos dois gráficos. Embora a abordagem nos diferentes livros analisados possa ser apresentada em linguagem matemática mais rigorosa ou menos rigorosa, dependendo do livro, sabemos que a construção dos gráficos é independente, no sentido de podermos construir um sem ao menos referenciar o outro, entretanto, não

nos sentimos à vontade de afirmar que esta abordagem sugere inconsistências em relação ao conceito moderno. Assim, não vemos problemas com este tratamento.

GRÁFICO DA FUNÇÃO INVERSA

Da mesma forma como no gráfico da função logarítmica, a apresentação do gráfico da função inversa é realizada no volume 1 destas coleções. Em cada um dos livros, os autores abordam “*simetria* em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares” (ou da reta $y = x$) dos gráficos de uma função real f invertível e sua inversa f^{-1} , como na Figura 22.

Figura 22 - Gráfico de uma função real e sua inversa



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

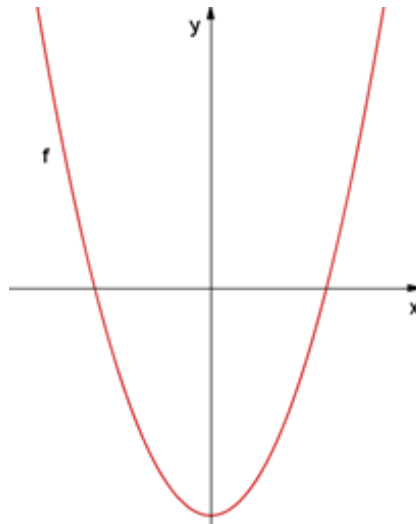
Assim, ao considerarmos os dois gráficos das funções no mesmo sistema de eixos faz sentido tratar a simetria do conjunto formado pelos gráficos de uma função com sua inversa em relação a reta $y = x$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

De um modo geral os autores dos livros didáticos aqui estudados não se preocupam com a questão da *simetria* quando abordam o gráfico das funções modulares. Há um estudo sobre algumas transformações como translação e reflexão na mesma seção em que tratam de função modular. Quando é citada a palavra *simetria*, os autores causam dúvidas em relação à apresentação e aos objetivos de

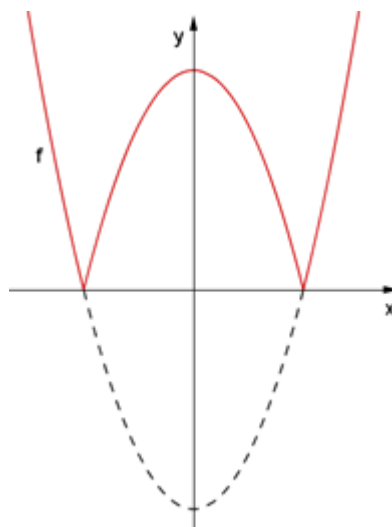
nossa análise. Pois, dizer que o gráfico de uma função g é simétrico ao gráfico de uma função $-g$, contradiz a condição de invariância. Tal abordagem considera *simetria* como um sinônimo de reflexão. Voltamos nossa discussão do conceito moderno de *simetria* que nos impõe esta característica como intrínseca do objeto. As figuras 23 e 24 ilustram a forma de abordagem do gráfico do módulo de uma função nos livros estudados, ainda que com pouca ênfase para uma função qualquer, restringindo-se a considerar a função modular na sua apresentação mais simples: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ e algumas pequenas variações desta.

Figura 23 - Gráfico de uma função real f



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 24 - Gráfico de $|f|$ utilizando reflexão em relação ao eixo Ox dos pontos que estão abaixo deste eixo

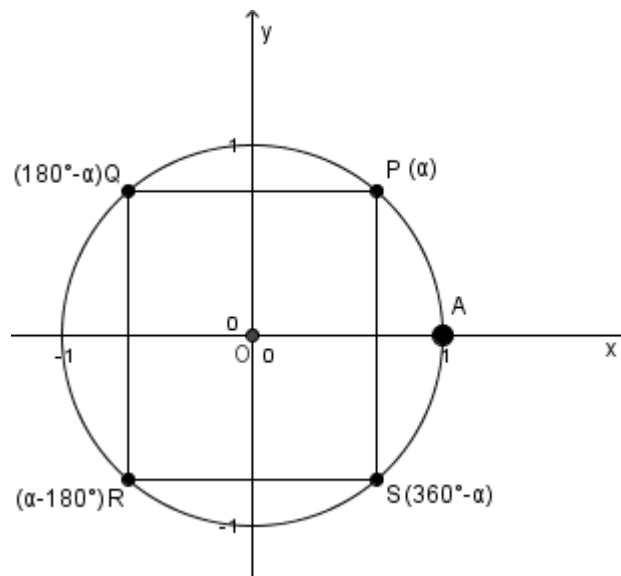


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

EXTREMOS DE ARCOS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

As quatro coleções trazem a palavra *simetria* ao se referir a “simetria dos extremos de arcos de quadrantes diferentes”. Chamam a atenção que este tipo de característica é importante para o estudo da trigonometria. O conceito de *simetria* é explorado sob duas formas, ambas como uma relação entre objetos, a saber, os extremos de arcos no I, II, III e IV quadrantes, como ilustra a Figura 25.

Figura 25 - Ciclo trigonométrico e extremos de arcos P, Q, R e S



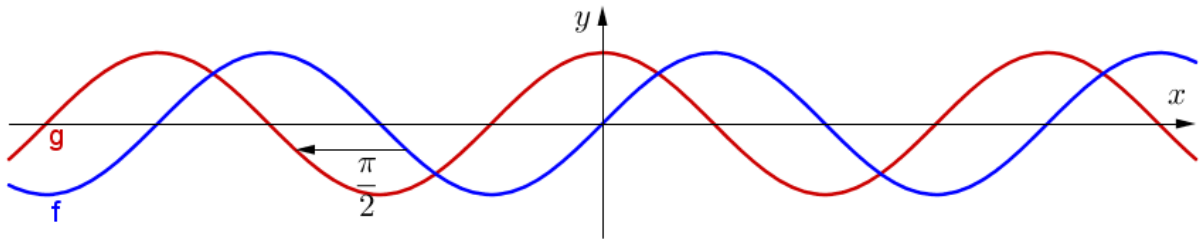
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

E em uma das abordagens os autores remetem no desenvolver do assunto à “simetria dos pontos da circunferência” de acordo com a ideia do conceito moderno. Já em outros textos, é falho afirmar que o conceito moderno está presente na forma como foi abordado. Está em jogo o domínio a ser considerado, domínios distintos implicam em transformações distintas, e esta sutileza pode determinar se uma transformação é simétrica ou não. Se uma transformação tem como domínio os pontos do primeiro quadrante, e os leva nos pontos do segundo quadrante, segundo uma rotação de 90° no sentido anti-horário, tal transformação não é invariante, e conseqüentemente também não é simétrica. Esta abordagem novamente confunde os conceitos de *simetria* e de reflexão. Há *simetria* na Figura 25, desde que considerados os pontos do ciclo trigonométrico como um todo.

GRÁFICO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O segundo volume das quatro coleções aqui estudadas tratam do gráfico da função $g(x) = \cos x$ como o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ trasladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, como ilustrado na figura 26.

Figura 26 - Gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$



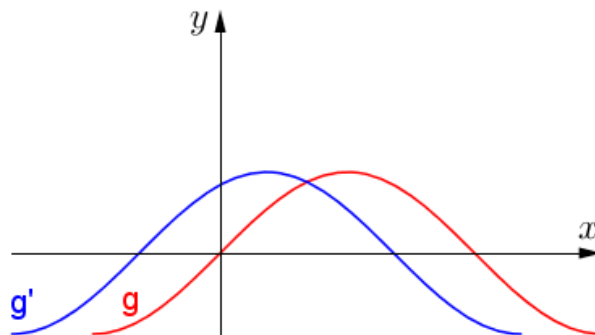
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

As coleções não relacionam *simetria* à translação. O que podemos encontrar é uma demonstração algébrica da igualdade entre $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $\cos x$ por meio da soma de arcos do seno:

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \text{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos x = \text{sen } x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Também no volume 2, os livros tratam da translação dos gráficos das funções seno e cosseno, $f'(x) = \cos(x - a)$ é a translação de $f(x) = \cos x$ "a" unidades à direita. O mesmo ocorre com $g' = \text{sen}(x - a)$ e $g(x) = \text{sen } x$, como representado na Figura 27.

Figura 27 - Translação horizontal de uma senóide



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

No tocante à translação horizontal de uma senóide, acreditamos que os autores perdem aqui uma oportunidade de discutir a *simetria* por translações. Além da identidade, a *simetria* por translação ocorre sob condições especiais, que fazem com que a figura transladada coincida com a figura original, como por exemplo, $f(x) = \text{sen } x$ deslocada horizontalmente de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) unidades. Essa discussão é levantada por Pasquini e Bortolossi (2015) ao considerar que translações aplicadas a conjuntos de pontos podem gerar *simetrias*, desde que tais conjuntos não sejam limitados:

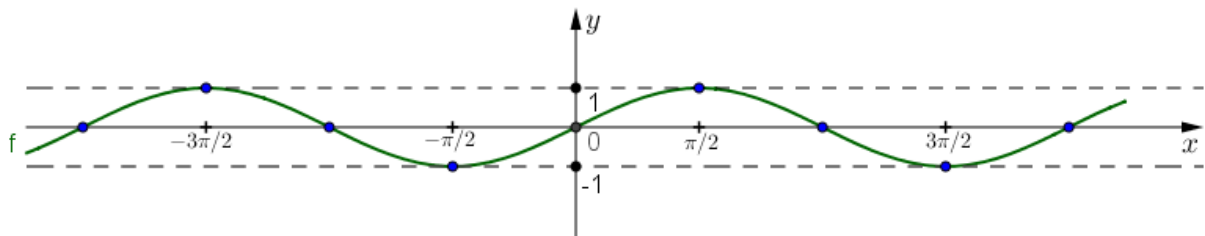
Dizemos que um subconjunto X não vazio do plano no \mathbb{R}^2 é um conjunto limitado se existe um número real $r > 0$ tal que X está contido no disco de centro na origem $(0,0)$ e raio r .

Além disso, os autores propõem uma tarefa que explora um caso análogo ao que tratamos aqui (Tarefa 14) (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015, p. 42)

No caso do gráfico de $f(x) = \text{sen } x$ *simetrias* por translação só são possíveis porque o gráfico de f não é limitado horizontalmente.

Ainda tratando dos gráficos de funções trigonométricas, um dos autores observa que o gráfico de $f(x) = \text{sen } x$ é simétrico em relação à origem e ilustra esta *simetria* com o auxílio de um gráfico, como na Figura 28.

Figura 28 - *Simetria* em relação à origem do gráfico de $f(x) = \text{sen } x$



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Neste caso, consideramos que a abordagem condiz com os objetivos deste trabalho.

MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

As quatro coleções, no volume 3, quando apresentam o conteúdo matrizes não usam a palavra *simetria*, entretanto, tratam de transformações por meio de matrizes. Em todos os livros vemos referências quanto à rotação e a translação por meio de matrizes. Também é apresentada a possibilidade de reflexão por meio de matrizes.

A rotação é definida por meio de matriz de rotação como a que segue, em que é possível rotacionar em torno da origem O no sentido anti-horário sob um determinado ângulo α uma figura. Basta aplicar os valores das coordenadas ponto a ponto para realizar a rotação

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Já para se trasladar um ponto $P(x, y)$ de a unidades na direção horizontal e b unidades na direção vertical, basta realizar a adição das matrizes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Quanto à reflexão, pode ser obtida também de um produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \end{pmatrix}$$

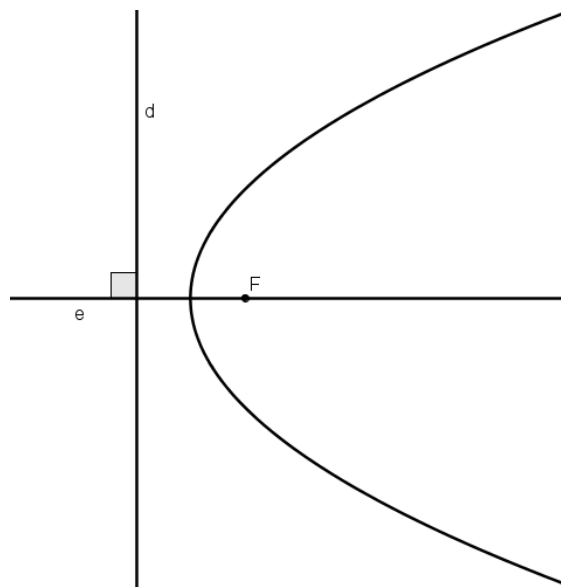
Não há qualquer tipo de discussão sobre a relação entre *simetria* e estas transformações.

PARÁBOLA (CÔNICA)

No volume 3, ao estudar as secções cônicas, as coleções contemplam o estudo de parábolas e, ao definir os elementos de uma parábola, os autores definem o eixo de *simetria* como a reta que é perpendicular à reta diretriz por F (foco da parábola), como na Figura 29.

Desse modo, a abordagem e os comentários de nossa parte são análogos ao que fizemos ao trazer a análise da parábola como um gráfico da função quadrática.

Figura 29 - Parábola e seu eixo de simetria



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Ao se estudar a forma como a *simetria* é abordada nos livros didáticos do Ensino Médio, observamos que as atividades propostas pelos autores dos livros analisados limitam-se ao plano. De um modo geral, nos casos em que a palavra *simetria*, ou algum derivado da mesma, aparece, a abordagem concorda com conceito moderno de *simetria*, embora a forma como os conteúdos são apresentados possa deixar alguma dúvida quanto à condição de invariância. Mas, existem vários pontos em que *simetria* é utilizada como sinônimo de reflexão sem revelar a condição de invariância. Vale lembrar que ao conceito moderno de *simetria* temos atrelados três conceitos: o de função (transformação), o de invariância e o de isometria. Sem considerarmos estes três pilares não há como tratarmos do conceito moderno de *simetria*.

Com intuito de contribuir para a ampliação da abordagem do conceito moderno de *simetria* em sala de aula, trazemos no capítulo seguinte algumas atividades, conforme explicitamos nos objetivos anunciados no início deste trabalho.

CAPÍTULO V

SIMETRIA: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM

Apresentamos nos capítulos anteriores o resultado de nossos estudos sobre *simetria*. Nossa análise a partir dos documentos oficiais, que trazem as propostas curriculares e, que norteiam o trabalho docente do professor da Educação Básica apresenta o que deve ser ensinado sobre *simetria*, o que comparado com o que está presente nos livros didáticos, mostra-nos uma lacuna. Os livros didáticos, apesar de contemplarem muito do que é estabelecido pelos documentos oficiais, não tratam da questão da *simetria* no espaço e nem da *simetria* por translações no plano, além de outros quesitos descritos no capítulo que trata desta análise.

Sabemos da dificuldade de realizar um tratamento envolvendo *simetria* no espaço com o simples uso de quadro e giz, entretanto, essa ausência e falta de profundidade nos estudos em nível básico que foi revelada, provavelmente possui outras explicações. Representar uma figura espacial na lousa nem sempre é uma tarefa fácil e representar a mesma figura trasladada, rotacionada ou refletida sem dúvida, é ainda mais complicado. Não nos cabe afirmar ou tecer considerações a esse respeito, sobre este *gap*, já que não é o objetivo de nosso trabalho. Atualmente, com as possibilidades que o uso das tecnologias, os computadores com softwares gráficos, nos trazem, podemos mudar este cenário.

Existem vários softwares disponíveis no campo educacional. E para realizar este trabalho elegemos o software *GeoGebra*, um software livre de geometria dinâmica, com uma interface amigável e que se ajusta bem às necessidades da prática docente do professor em sala de aula.

Nossa proposta dedica-se a abordar o conceito moderno de *simetria* por meio do *GeoGebra* para alunos do Ensino Médio.

Para considerarmos o conceito moderno de *simetria* são necessários três pilares: o de função (transformação), o de invariância e o de isometria.

Entendemos que em relação à condição isometria, nossa vivência mostra que os alunos não possuem dificuldade de observar, ainda que intuitivamente esta condição. Inclusive, quando tratamos de distância podemos fazer referência ao mesmo. O aluno possui familiaridade com esta condição. Basta que o professor esteja atento a isto e o faça nos momentos em que isso é possível, quando trabalhamos

distância entre pontos em Geometria Analítica, por exemplo. Caso contrário, basta chamar a atenção para tal, utilizando as mesmas atividades que são apresentadas a seguir.

Desta forma, cabe-nos tratar dos outros dois pilares, a noção de transformação (função) e invariância.

Para que possamos tratar destas noções sentimos a necessidade de apresentarmos um tutorial que pudesse tornar os recursos do *GeoGebra* familiares ao professor (caso necessário) e que podem ser estendidos aos alunos. Considerando que nem todos os professores ou alunos possuem conhecimento necessário deste software, apresentaremos a seguir alguns parágrafos que se destinam a habilitar o professor a utilizar as tarefas que anunciamos junto ao software, sem maiores problemas. E mais ainda, que ele possa a partir do exposto desenvolver outras atividades semelhantes.

Na sequência introduzimos a Atividade 1 que introduz as transformações de rotação, translação e reflexão necessárias para o estudo de *simetria*.

Salientamos que inicialmente esta atividade será desenvolvida no plano, para evitar dificuldades de visualização e tornar o exposto mais simples.

Como trata-se de um trabalho direcionado ao professor, sua redação foi organizada para tal.

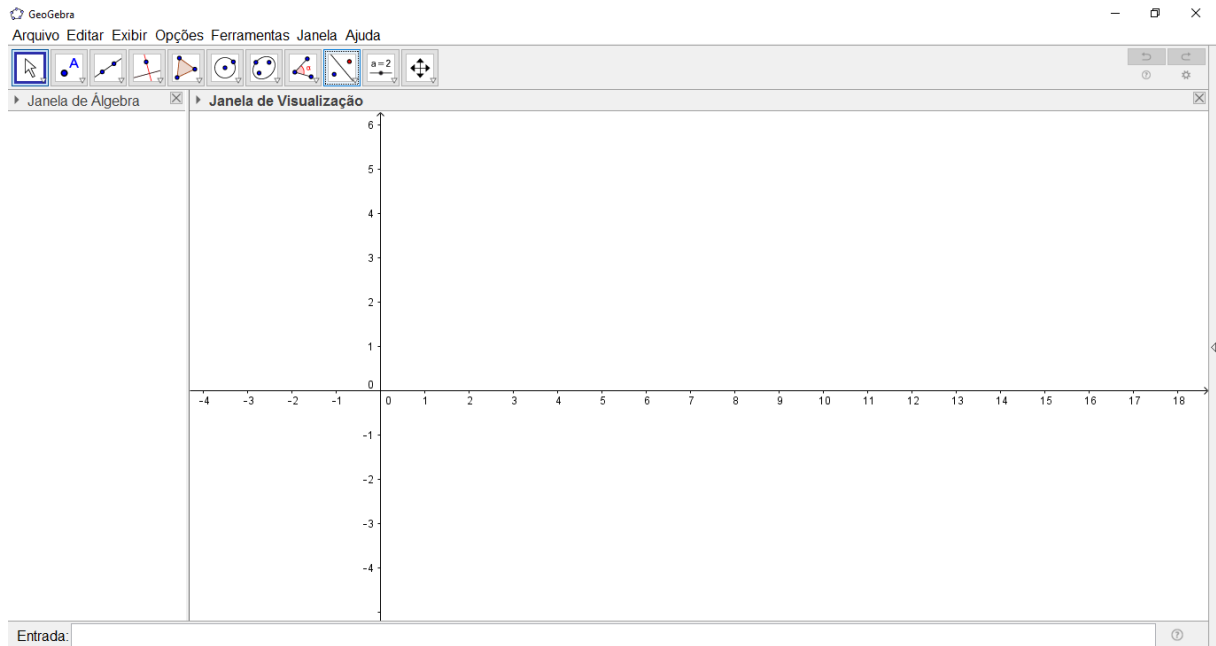
COMO UTILIZAR OS RECURSOS PARA O ESTUDO DE SIMETRIA NO GEOGEBRA

Usaremos alguns *prints* de telas para que esta seção seja um guia prático para uso do *software*. Informamos que todas as telas foram criadas a partir da versão 5.0.307.0-3D do *GeoGebra*⁴.

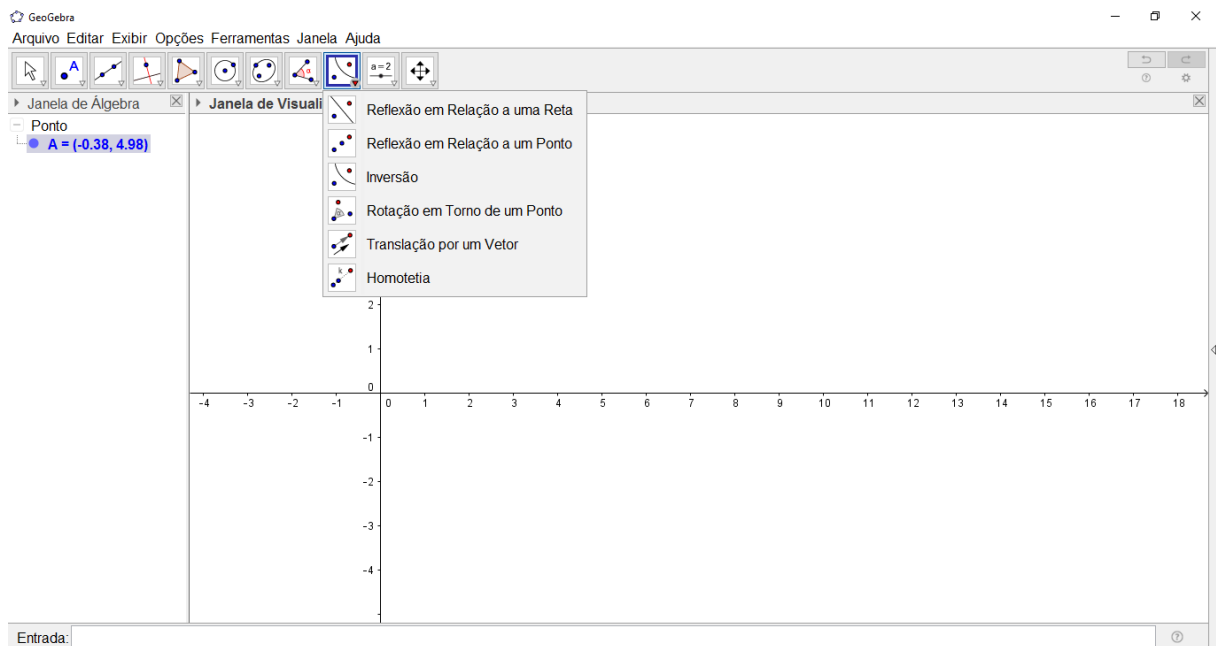
A Figura 30 representa a interface do *software*.

Já, as funções ligadas às transformações estão localizadas nos botões que ficam logo abaixo do menu. Mais especificamente, elas aparecem quando clicamos no nono botão da esquerda para a direita, como ilustrado na Figura 31.

⁴ Disponível em www.geogebra.org.

Figura 30 - Tela inicial *GeoGebra*

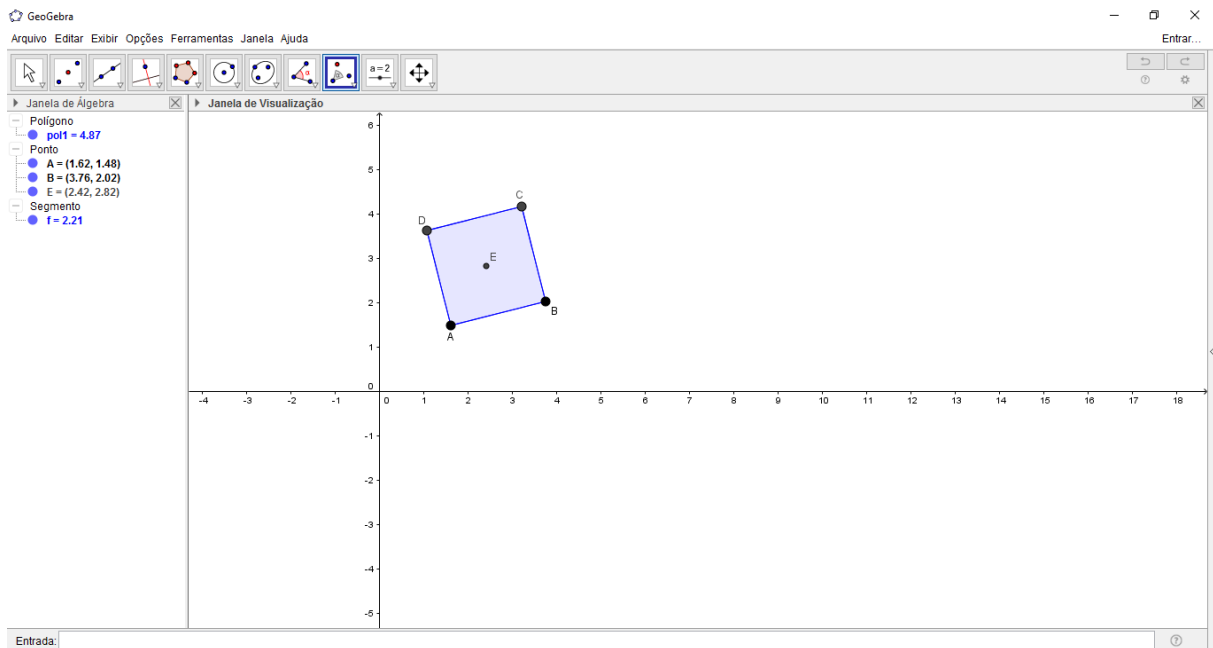
Fonte: Print screen da aplicação no sistema operacional Windows 10.

Figura 31 - Tela *GeoGebra* com menu de transformações

Fonte: Print screen da aplicação no sistema operacional Windows 10.

Para iniciarmos, vamos introduzir algumas funções do software. Vamos começar com uma rotação de um quadrado no plano. Para isso, construiremos um quadrado ABCD e o ponto E centro do quadrado (ponto médio das diagonais), na janela de visualização do *GeoGebra*, conforme Figura 32.

Figura 32 - Tela *GeoGebra* - Quadrado ABCD e seu centro E

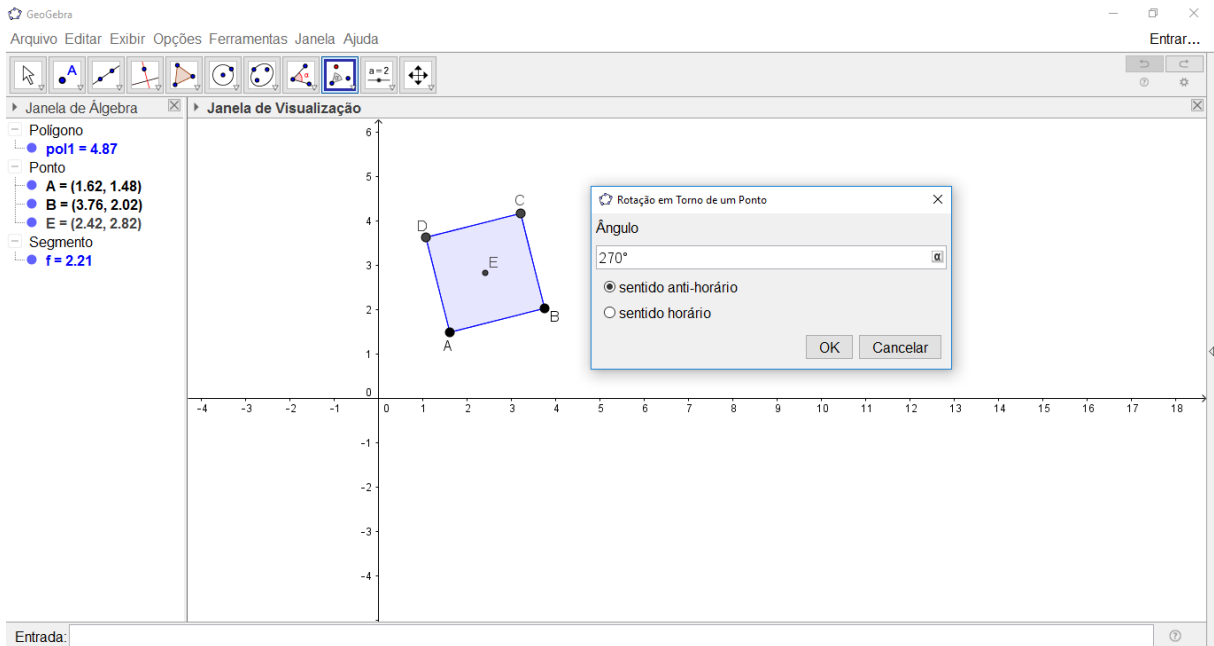


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Para dar continuidade à rotação devemos clicar no canto inferior direito no nono botão e selecionar a quarta opção de cima para baixo ("Rotação em Torno de um Ponto"), depois é necessário clicar sobre o quadrado ABCD e depois sobre o ponto E, então o programa abrirá uma caixa de diálogo como a da Figura 33.

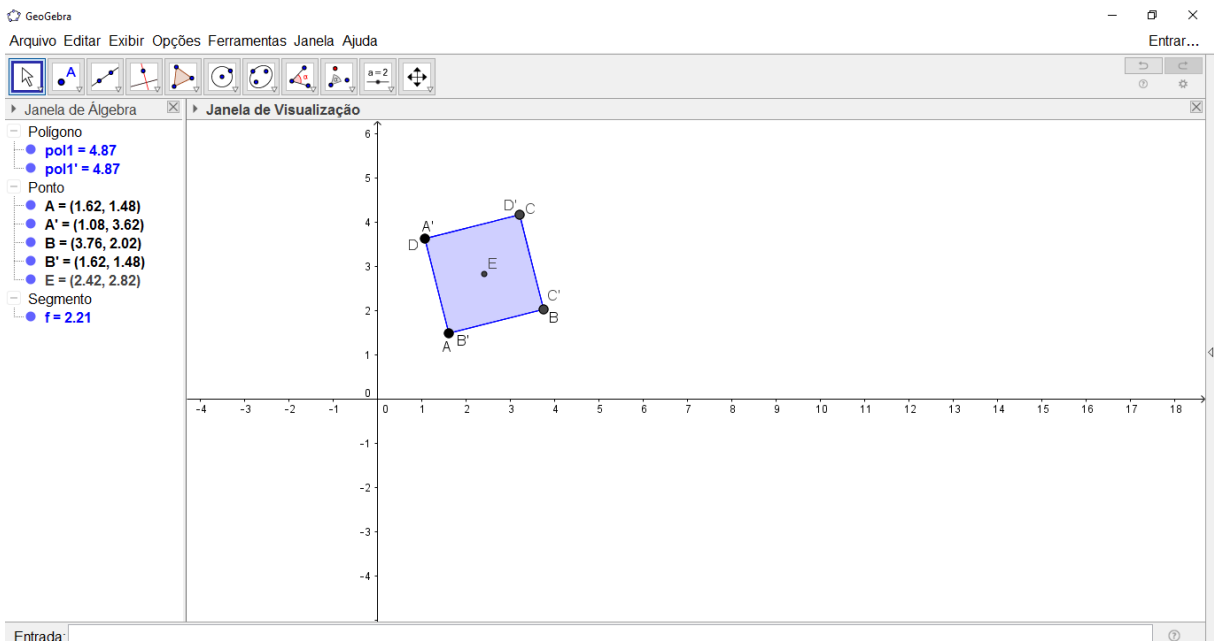
Nesta caixa de diálogo, definimos o ângulo de rotação e o sentido, se anti-horário ou horário, em seguida, basta clicar no botão "OK" e o software irá plotar o novo quadrado A'B'C'D' pela transformação de rotação em torno do ponto E com um ângulo de 270° , como representado na Figura 34.

Figura 33 - Tela *GeoGebra* - Caixa de diálogo "Rotação em Torno de Ponto"



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 34 - Tela *GeoGebra* - Quadrado $ABCD$ e seu simétrico por rotação $A'B'C'D'$



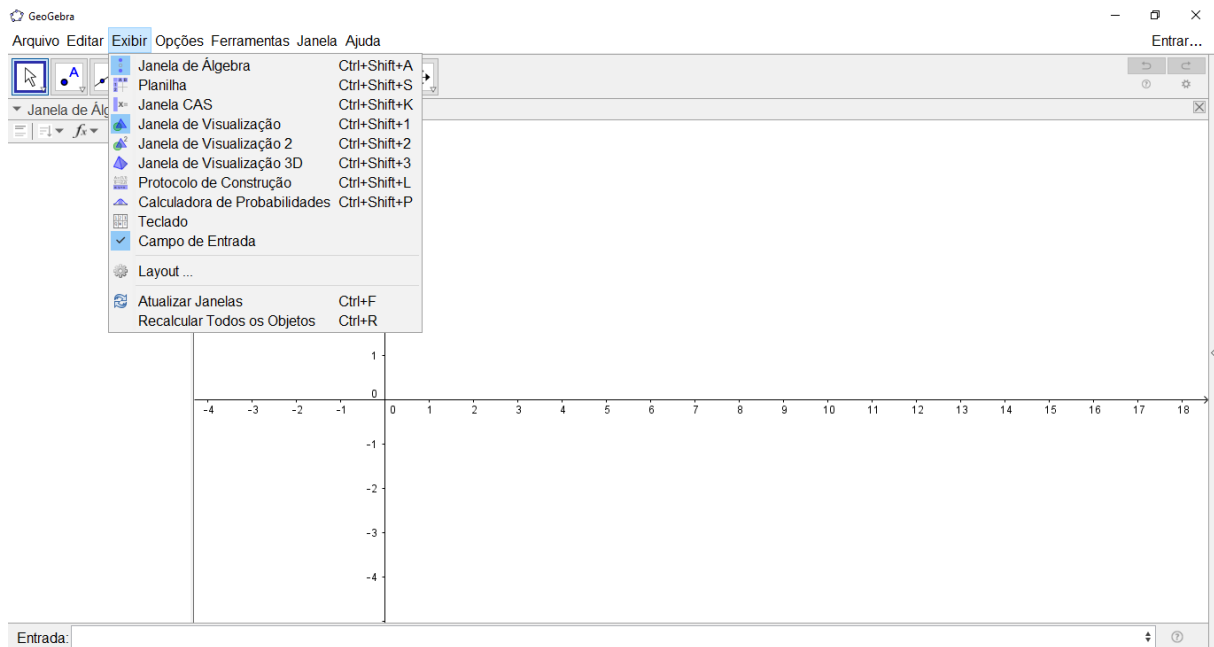
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Podemos dizer que este quadrado é simétrico a $ABCD$, pois além da isometria, já garantida pelas demonstrações anteriores, temos também cumprida a segunda

condição, já que sua imagem por esta transformação $A'B'C'D'$ possui o mesmo conjunto de pontos.

Uma vez apresentadas as funções de *simetria* do *GeoGebra*, vamos realizar uma reflexão no espaço. Para isto clicaremos em “Exibir” no menu principal. Notaremos que se abrirá uma janela com algumas opções, como ilustrado na Figura 35.

Figura 35 - Tela *GeoGebra* - Menu "Exibir"

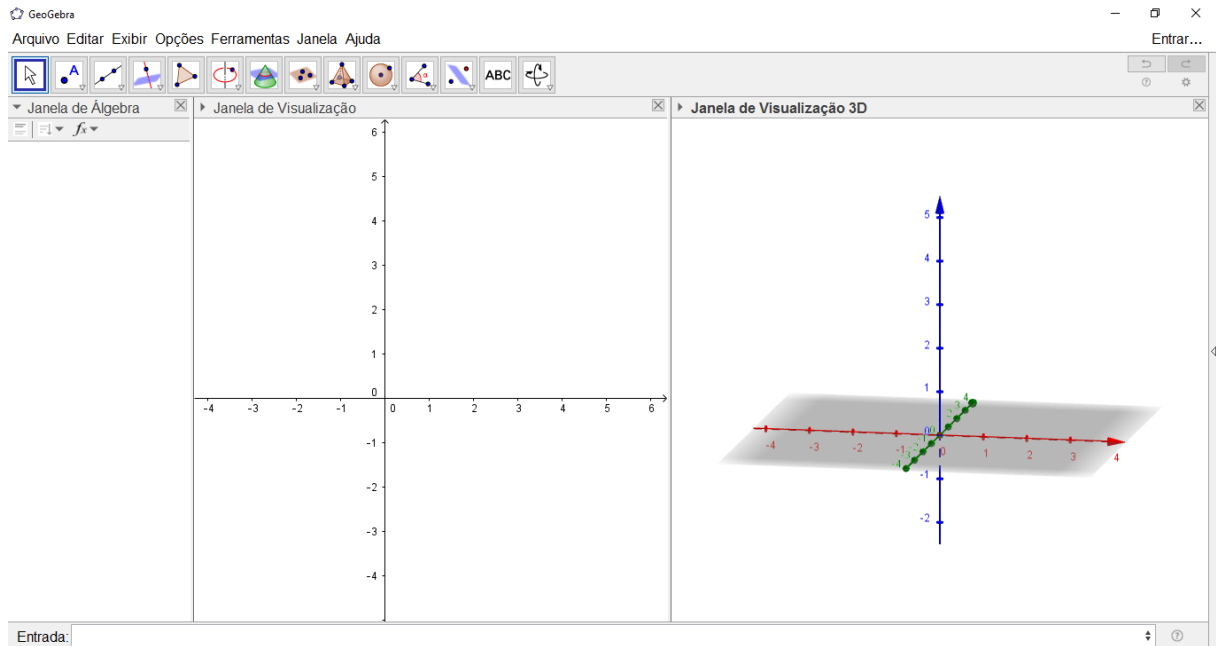


Fonte: Print screen da aplicação no sistema operacional Windows 10.

Ao seleccionar a sexta opção “Janela de Visualização 3D” o software ficará como na Figura 36.

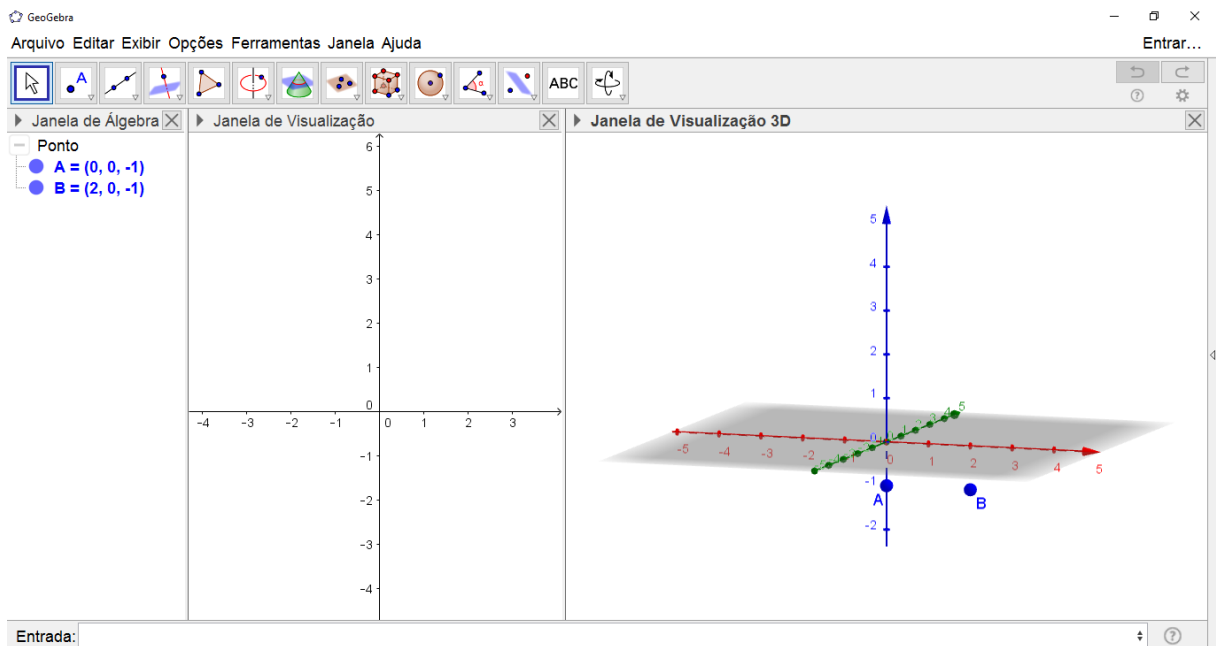
Em seguida iremos inserir um ponto na barra “Entrada” que na parte inferior da tela. Digitaremos “ $A=(0,0,-1)$ ” e em seguida pressionaremos a tecla “Enter” do teclado. De maneira análoga utilizaremos a barra “Entrada” para inserir o ponto $B(2,0,-1)$. Como ilustrado na Figura 37.

Figura 36 - Tela *GeoGebra* - Janela de Visualização 3D aberta



Fonte: Print screen da aplicação no sistema operacional Windows 10.

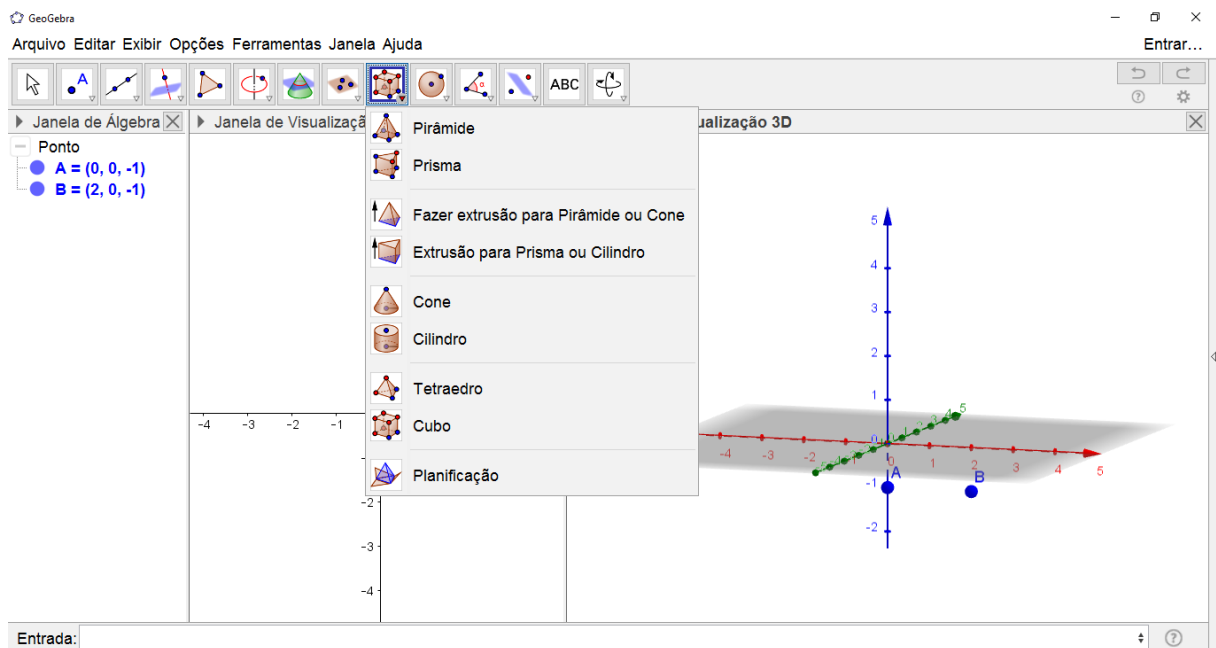
Figura 37 - Tela *GeoGebra* - Pontos $A(0, 0, -1)$ e $B(2, 0, -1)$ plotados



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Note que, quando clicamos na Janela de Visualização 3D os botões abaixo do menu se alteram. O nono botão agora apresenta opções como construir prismas, pirâmides ou cubos. Vamos fazer os passos de como se plotar um cubo. Clicando no canto inferior direito do botão, e assim se abrirá uma janela de opções como representado na Figura 38.

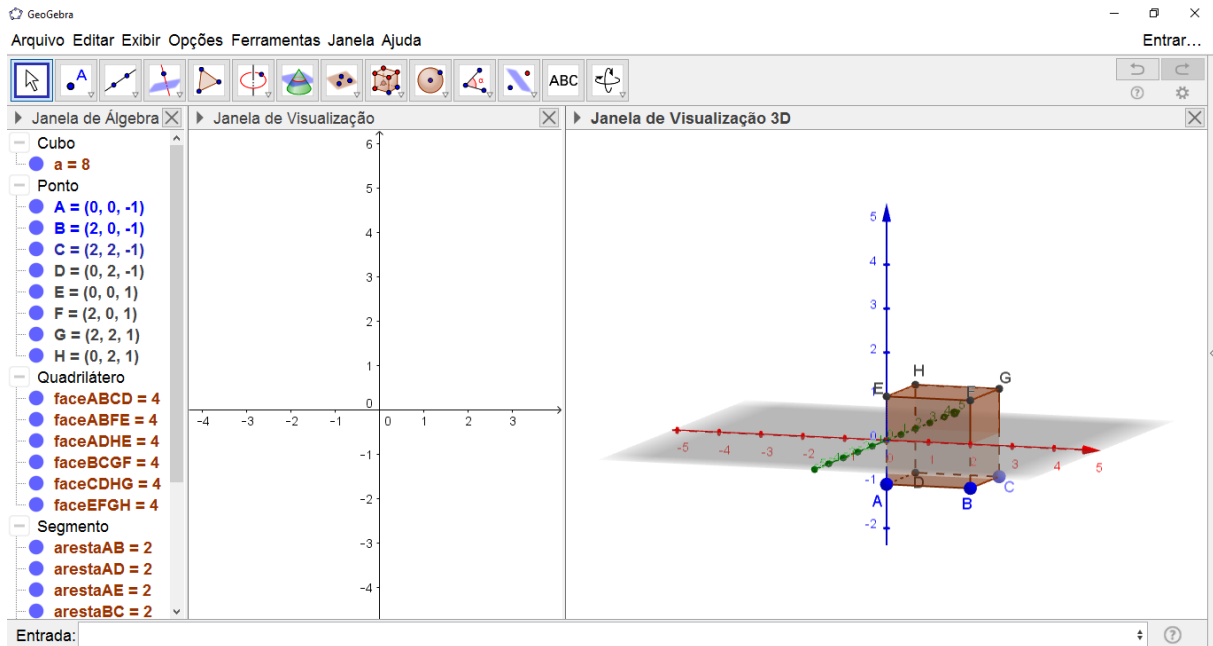
Figura 38 - Tela *GeoGebra* - Menu para plotar prismas e pirâmides



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

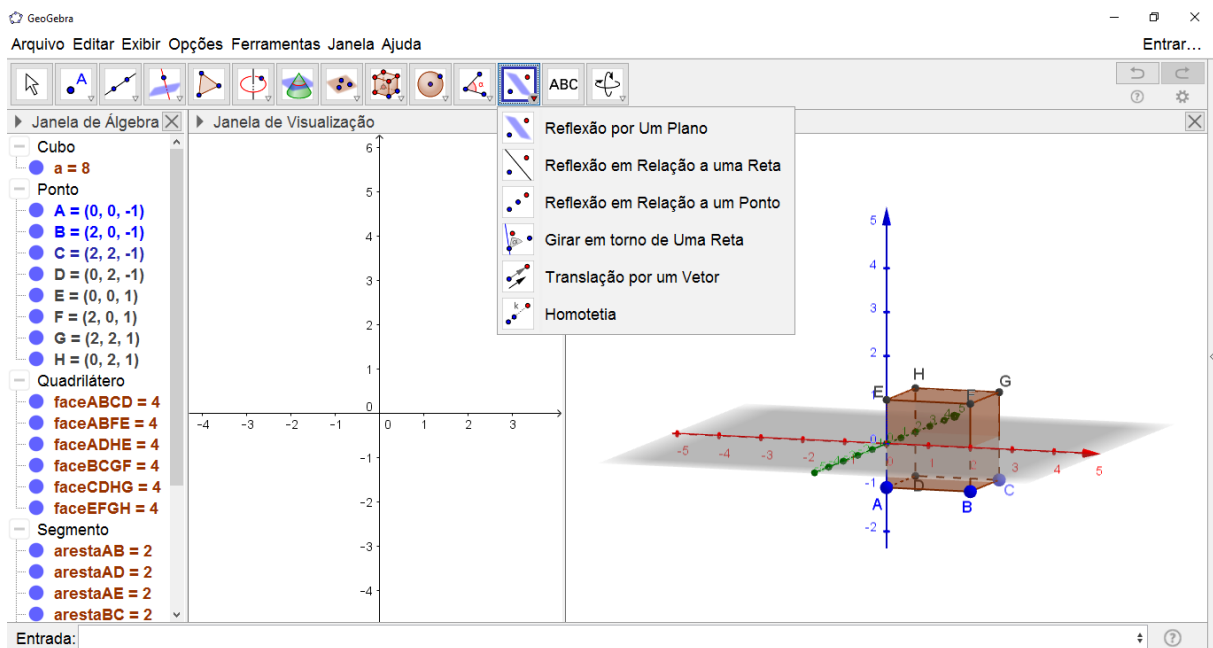
Em seguida, devemos clicar na oitava opção: “Cubo”. Uma vez que clicamos em “Cubo” precisamos clicar em dois pontos para que o software construa um cubo, e clicaremos nos pontos A e B, como ilustrado na Figura 39.

Com o objetivo de visualizarmos uma *simetria* em relação ao plano XY do cubo, utilizaremos os recursos de transformações do software para gerar um novo cubo $A'B'C'D'E'F'G'H'$, que será a imagem do cubo anteriormente gerado, pela transformação de reflexão em relação ao plano citado, o plano XY . Para isso, acionaremos o décimo segundo botão da esquerda para a direita abaixo do menu principal, clicando no canto inferior direito do botão, e assim se abrirá uma nova janela de opções, como representado na Figura 40.

Figura 39 - Tela GeoGebra - Cubo $ABDCDEFGH$ plotado

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

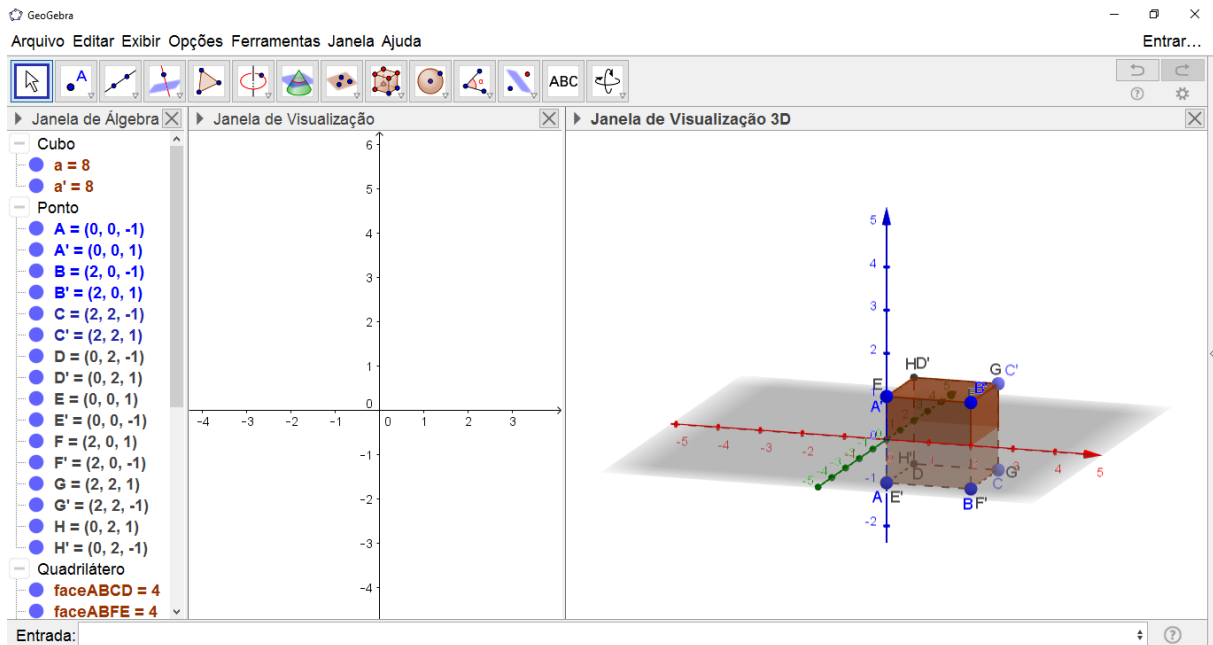
Figura 40 - Tela GeoGebra - Menu de transformações no espaço



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Clicaremos na primeira opção “Reflexão por Um Plano”. Para que se complete a execução do comando é necessário selecionar um objeto no espaço, que será o cubo $ABCDEFGH$ e, um plano. Utilizaremos o plano XY que já aparece automaticamente quando abrimos a Janela de Visualização 3D, como na Figura 41.

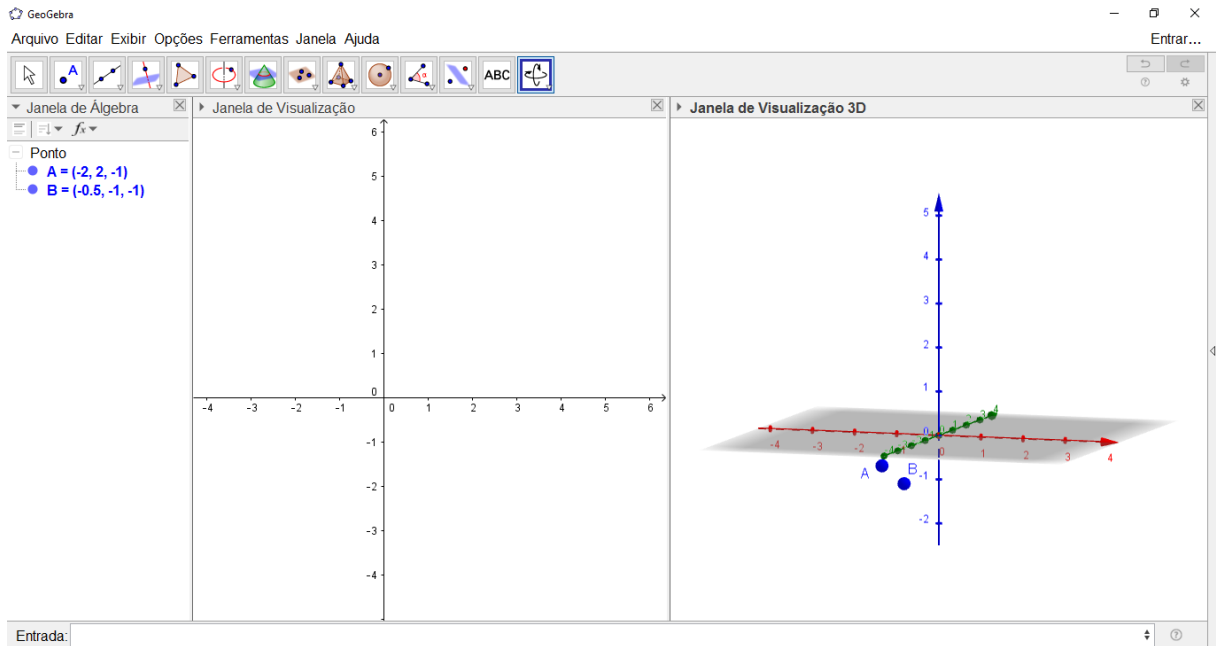
Figura 41 - Tela *GeoGebra* - Os Cubos $ABCDEFGH$ e $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sua imagem por reflexão em relação ao plano OX



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

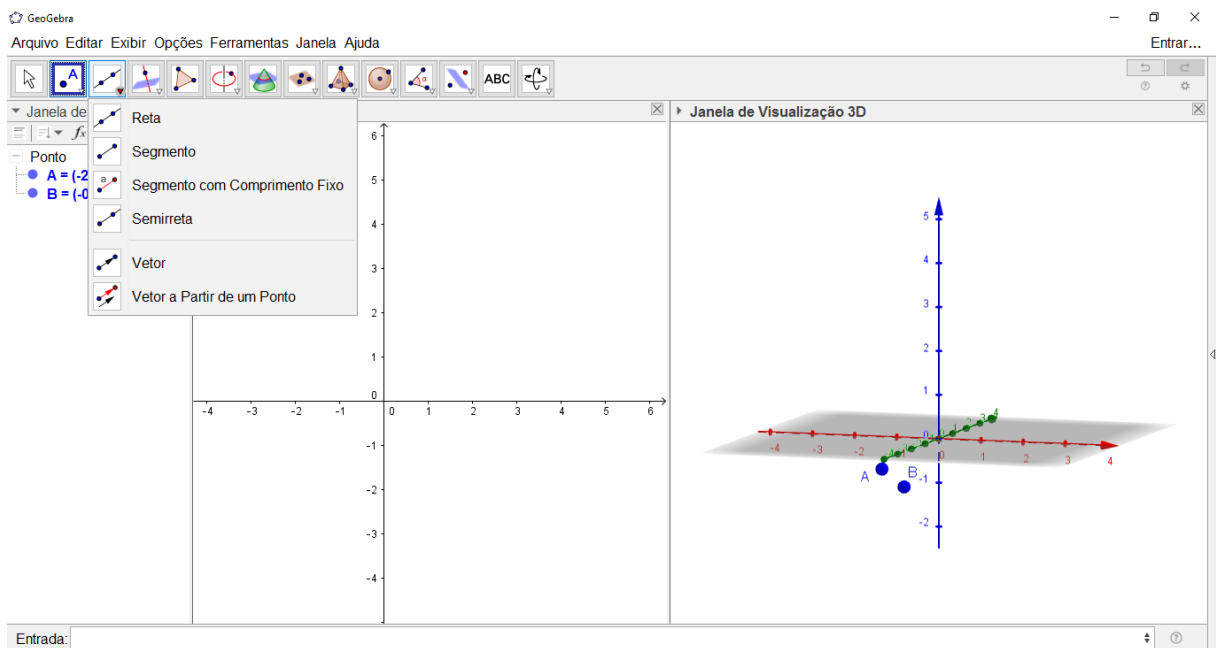
Faremos agora uma translação. Em um arquivo novo, faça dois pontos A e B na Janela de Visualização 3D, como representado na figura 42.

Em seguida clicaremos no terceiro botão abaixo do menu principal. Quando clicamos se abrirá uma janela de opções, como na Figura 43.

Figura 42 - Pontos A e B no espaço

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

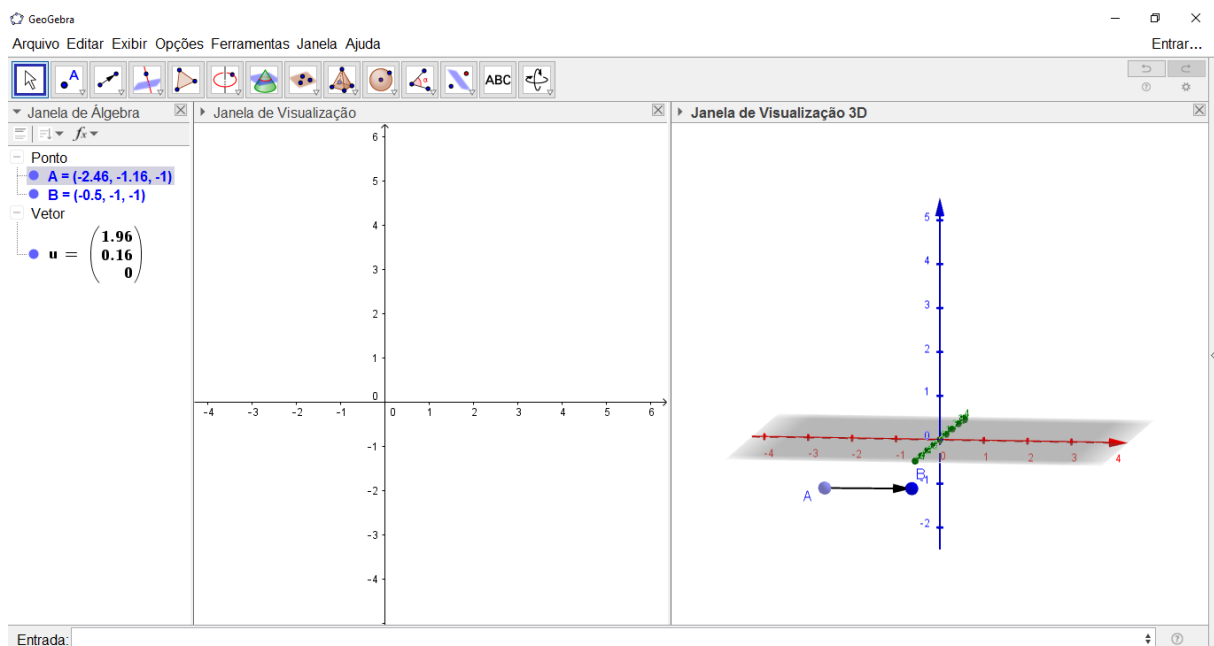
Figura 43 - Menu com opções relacionadas a reta, segmento, semirreta e vetor



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Devemos selecionar a quinta opção: “Vetor”. Para a conclusão do comando devemos selecionar dois pontos, neste caso, os pontos A e B que criamos previamente. Como na Figura 44.

Figura 44 - Vetor \overrightarrow{AB} no espaço

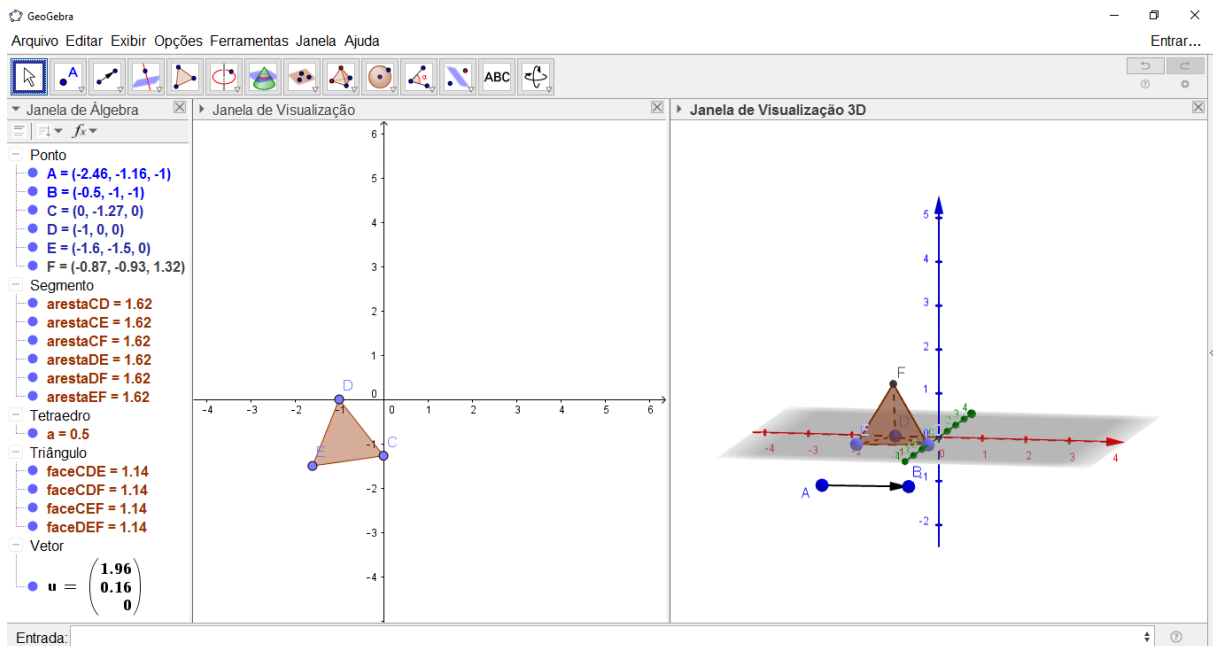


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Agora que já criamos o vetor \overrightarrow{AB} , criaremos um objeto no espaço utilizando o nono ou o décimo botão. Neste exemplo construiremos um tetraedro regular, como na Figura 45.

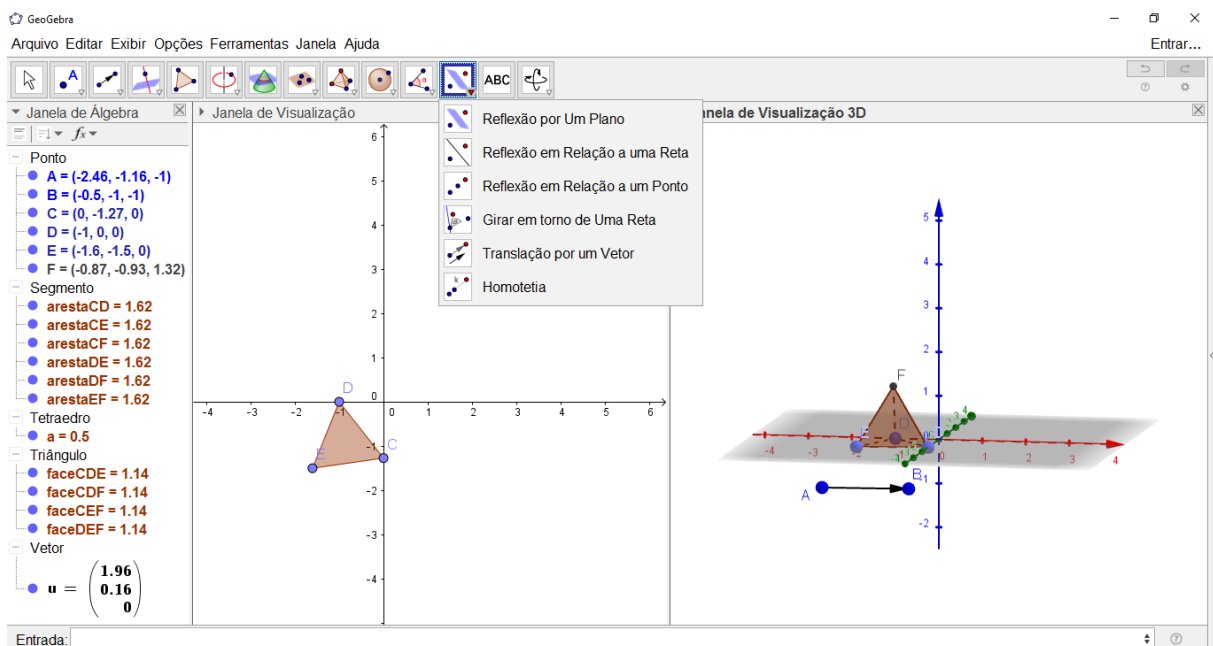
Por fim, faremos a translação. Clicaremos no décimo segundo botão, abaixo do menu, no canto inferior direito, então se abrirá uma caixa de opções como na Figura 46.

Figura 45 - Tetraedro CDEF e vetor \overrightarrow{AB} no espaço



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

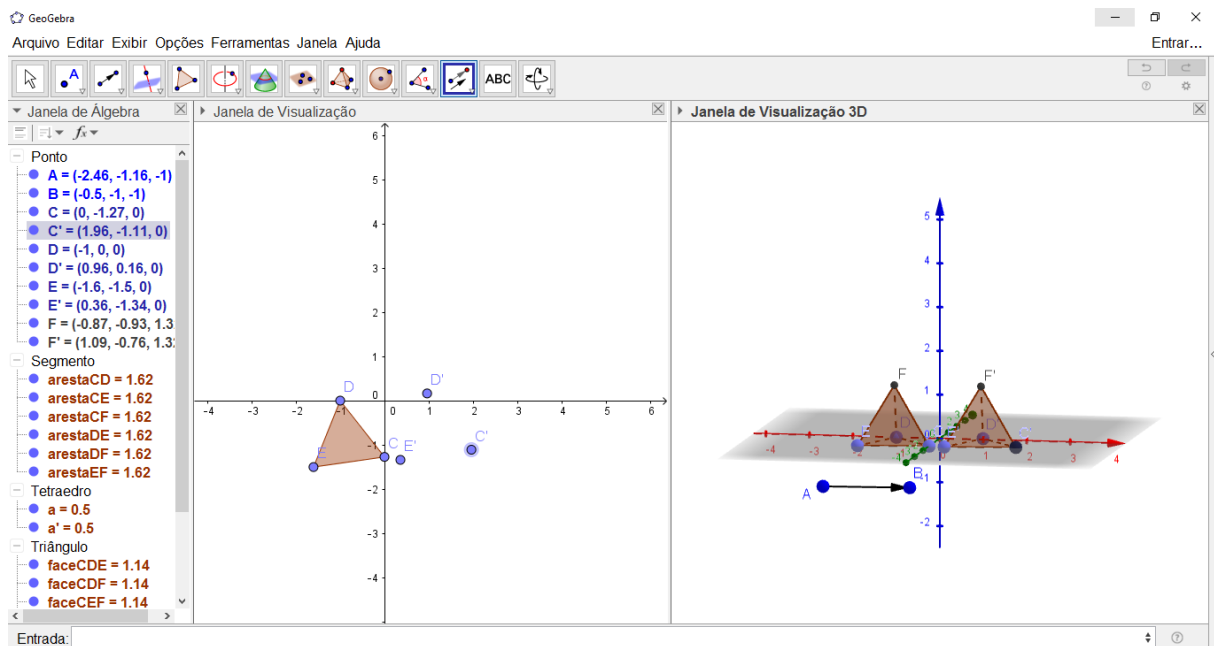
Figura 46 – Menu com algumas transformações no espaço



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Em seguida, selecionaremos a quinta opção “Translação por um Vetor”. E, para concluir o comando basta clicar no objeto criado (neste exemplo o tetraedro regular) e no vetor \overrightarrow{AB} , assim como representado na Figura 47.

Figura 47 - Tetraedro $CDEF$ trasladado por \overrightarrow{AB} no espaço



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Assim, obtivemos a translação do nosso tetraedro por um vetor \overrightarrow{AB} , e neste caso não há *simetria*, pois, o conjunto domínio $X = \{\text{pontos do tetraedro } CDEF\}$ é distinto do conjunto imagem $F(X) = \{\text{pontos do tetraedro } C'D'E'F'\}$.

A tecnologia pode ser uma aliada no ensino da Matemática, e acreditamos que ela se torna mais efetiva, quando utilizada de forma dinâmica. Um cuidado que devemos tomar, é de não reproduzir as mesmas práticas, por meio de mídias diferentes e acreditar que só isto basta para que promovamos o aprendizado de nosso aluno de forma eficiente.

Apenas mostrar uma imagem de uma pirâmide trasladada, pode não ter muita diferença se representada no quadro (mesmo que o professor possua certas habilidades de desenho), ou exibida por meio de um retroprojetor ou projetada de um computador. Exibir um vídeo em um videocassete, DVD player, Blue-Ray player ou projetar um vídeo de um computador talvez não apresente resultados tão diferentes.

Pois não revela a interatividade que consideramos necessária para o estudo de *simetria*.

Acreditamos que a tecnologia em sala de aula pode fazer a diferença, quando utilizamos recursos dinâmicos. Assim, agora que conhecemos um pouco sobre os recursos de transformações do software *GeoGebra*, vamos propor que eles sejam explorados de forma dinâmica com os alunos, com algumas atividades. Em outras palavras, nas próximas páginas apresentamos algumas atividades que utilizam o *GeoGebra* e pretendem abordar o conceito moderno de *simetria*.

ATIVIDADES

ATIVIDADE 1

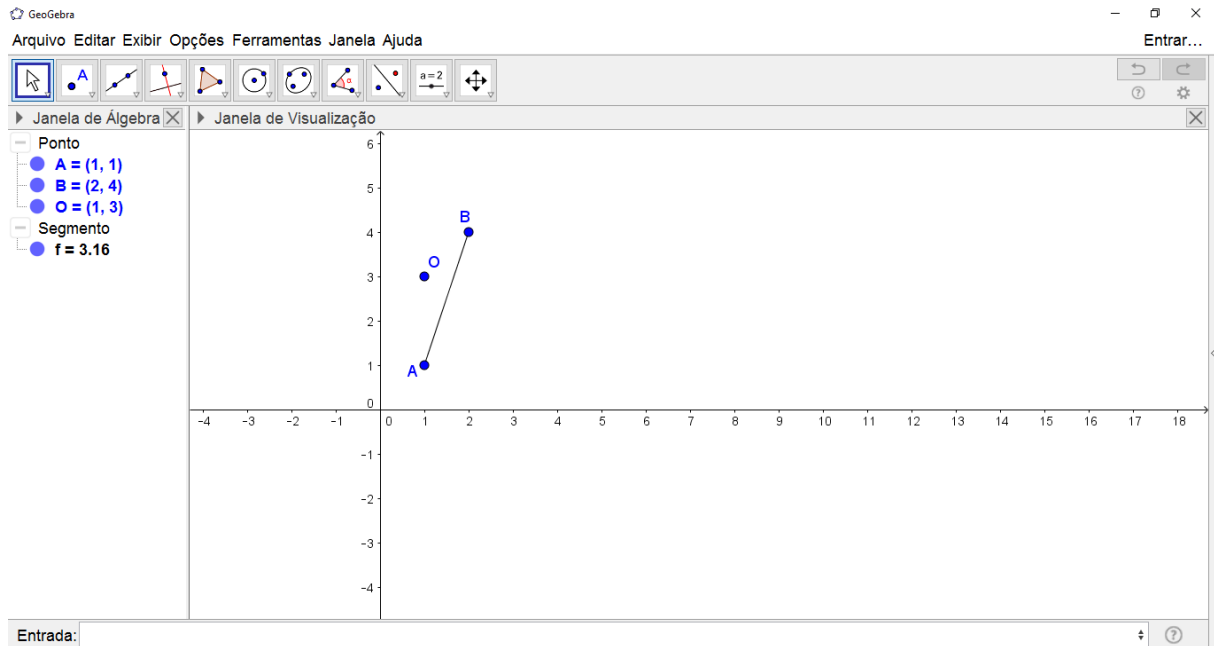
Realizar transformações no *GeoGebra*: o uso da régua e compasso

Comentário: Essa atividade tem por objetivo possibilitar que o aluno compreenda o que é uma rotação, uma reflexão ou uma translação ao realizar efetivamente o processo, destacando elementos da Matemática por trás destas transformações e não apenas observando representações prontas. Embora não seja o objetivo, no decorrer do que é proposto, vamos introduzir, ainda que intuitivamente, os conceitos de função, invariância e isometria, necessários para abordarmos *simetria*. Para esta atividade é necessário que o aluno tenha acesso ao software em algum dispositivo como computador, *laptop*, *tablet* ou celular. A seguir apresentamos a atividade dividida em três partes:

(i) Considere o segmento AB definido pelos pontos $A(1,1)$ e $B(2,4)$. Rotacione este segmento em torno do ponto $O(1,3)$ sob um ângulo de 45° no sentido anti-horário.

Solução: Para realizar esta atividade o aluno pode seguir os seguintes passos:

a) Plotar o segmento A e B no plano e o ponto O , como na Figura 48.

Figura 48 - Segmento AB e ponto O representados no plano cartesiano

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

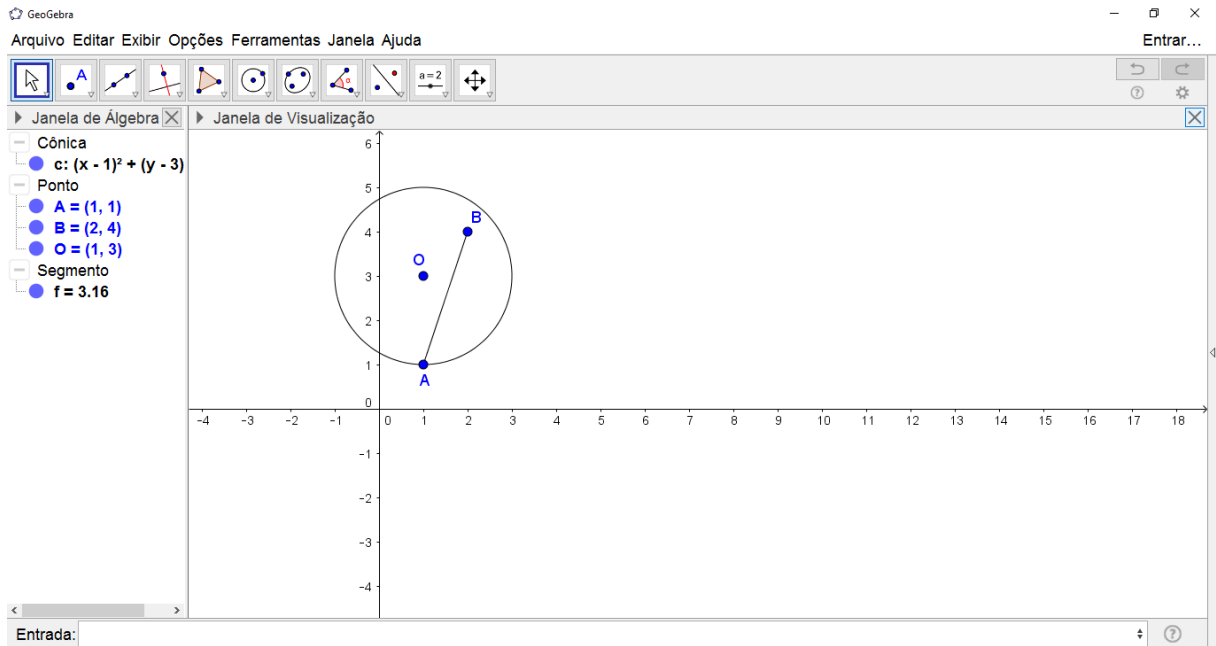
b) traçar uma circunferência Π com centro em O e raio medindo \overline{OA} .

Solução: Escolha o sexto botão abaixo do menu principal, assim abrirá uma janela com algumas opções escolha a primeira opção “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”. Em seguida clique nos pontos O e A . O resultado deverá ser como na Figura 49.

c) Traçar a semirreta \overrightarrow{OA} e a reta r perpendicular a \overrightarrow{OA} por O .

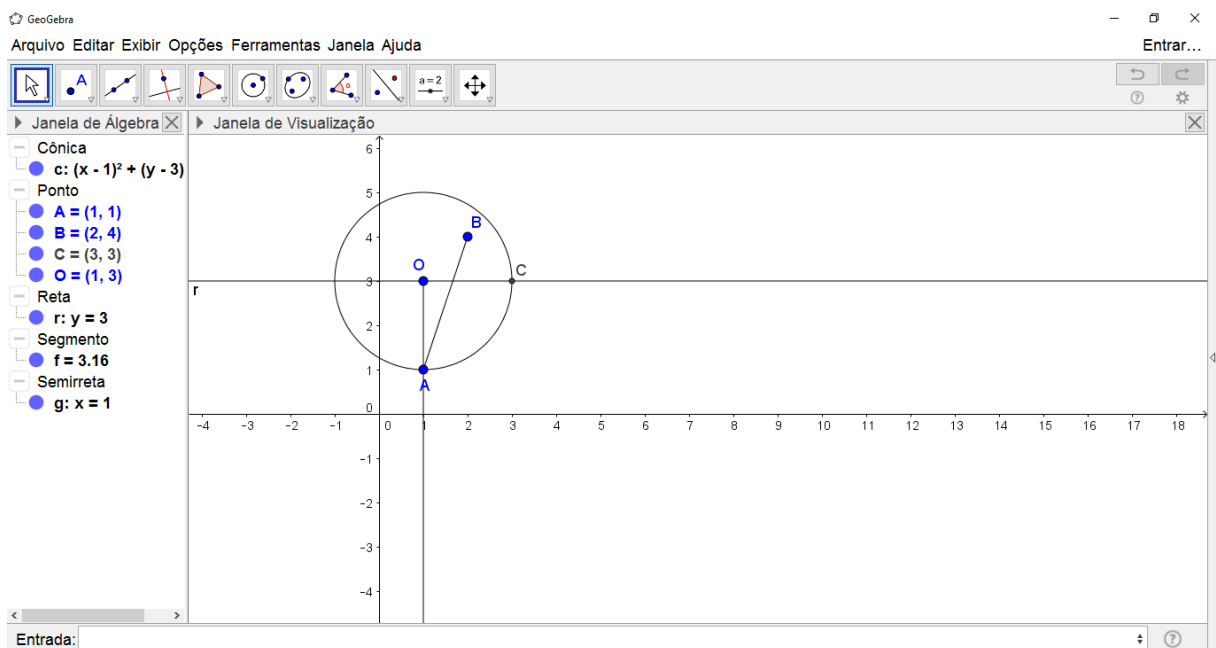
Solução: Primeiro traçaremos a semirreta \overrightarrow{OA} clicando no terceiro botão abaixo do menu principal e escolhendo a quarta opção “Semirreta”. Então basta clicar respectivamente nos pontos O e A e será plotada a semirreta \overrightarrow{OA} . Em seguida clicamos no quarto botão abaixo do menu principal e escolhemos a primeira opção “Reta Perpendicular”. Na sequência clicamos na semirreta \overrightarrow{OA} e no ponto O e obteremos $r \perp \overrightarrow{OA}$ por O , podemos ainda traçar o ponto C , tal que $C = \Pi \cap r$, como na Figura 50.

Figura 49 - Resultado do passo (b) - circunferência Π de centro O e raio medindo \overline{OA}



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 50 - Passo (c) - semirreta \overrightarrow{OA} , reta r e ponto C

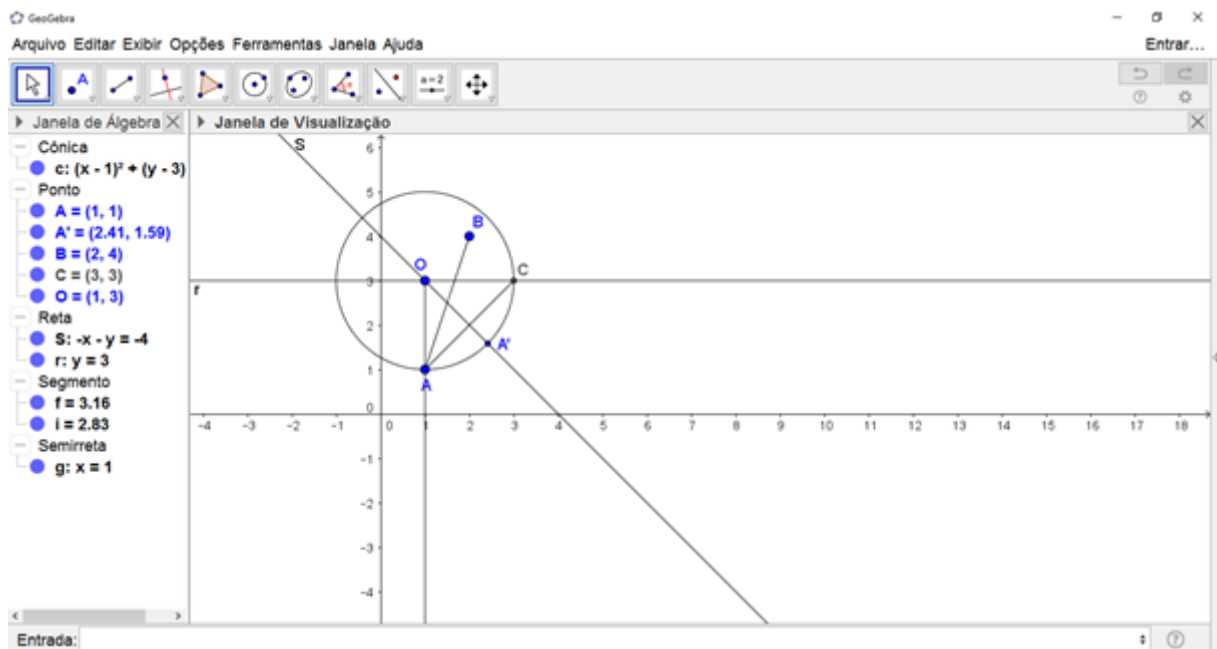


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

d) traçar o segmento AC e a reta s perpendicular a AC por O .

Solução: Primeiro trace o segmento AC e em seguida no menu principal escolha o quarto botão e a primeira opção: “Reta Perpendicular”. Em seguida selecione o segmento AC e o ponto O e será plotada a reta s , tal que $s \perp AC$ por O . Ainda é possível marcar o ponto A' , tal que $A' = s \cap \Pi$ (no arco menor AC). Como ilustra a Figura 51.

Figura 51 - Passo (d) - segmento AC , reta s e A' (imagem transformada de A pela rotação)

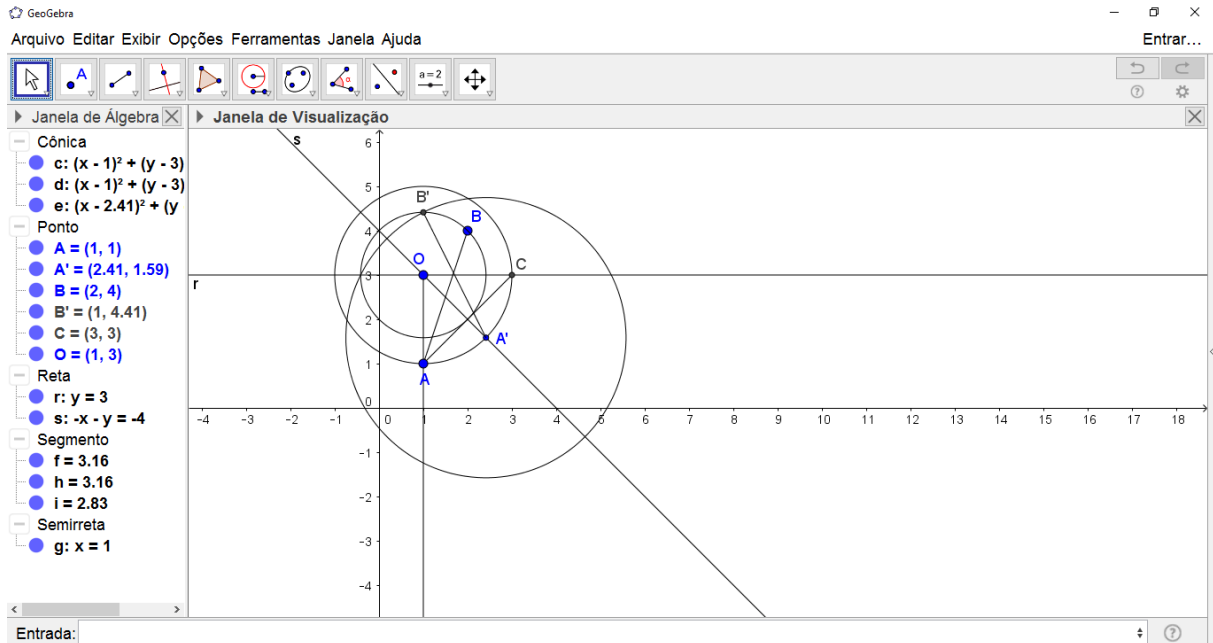


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

e) Traçar a circunferência Γ tal que O seja o centro e o raio tenha a medida \overline{OB} .

Solução: Repita os passos utilizados para construir a circunferência Π e construa a circunferência Γ de centro O e raio medindo \overline{OB} . Em seguida acesse o sexto botão abaixo do menu principal e selecione a terceira opção “Compasso”. Em seguida clique sobre os pontos A e B . Para que o *GeoGebra* saiba qual medida você quer transportar, e em seguida clique no ponto A' . A circunferência do compasso e Γ vão se interceptar em dois pontos, marque o ponto a direita do eixo coordenado Ox como B' (aqui usamos a isometria) e assim basta traçar o segmento $A'B'$ para completar a transformação desejada, como na Figura 52.

Figura 52 - Passo (e) – Circunferência Γ , medida \overline{AB} transportada pelo compasso e B' (imagem rotacionada de B)



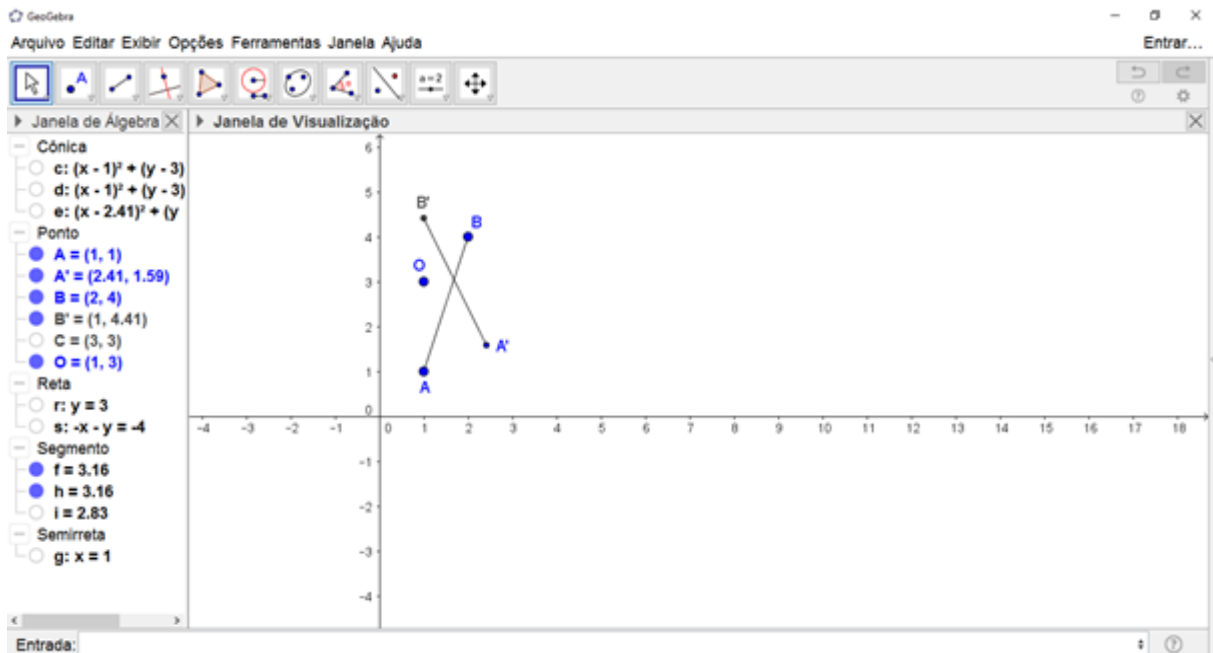
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Para justificar a construção utilizamos a bissetriz do triângulo isósceles OAC relativa ao vértice O , e assim, obtivemos um ângulo de 45° .

As figuras utilizadas para se chegar à rotação de AB em torno de O sob um ângulo de 45° podem ser omitidas e, assim, temos uma imagem na Figura 53 que apresenta os elementos necessários para visualizar a rotação desejada.

Comentário: Vamos observar que o “novo segmento” construído é o resultado de uma transformação aplicada ao segmento AB , a rotação em torno de um ponto. Observamos que a transformação em questão é isométrica, ou seja, preserva distâncias. Entretanto, não há *simetria* (Figura 53), pois, ao observarmos o segmento rotacionado percebemos que o resultado pela transformação aplicada gera outro segmento, exibindo a não invariância da transformação. Vale salientar que, matematicamente, ao tratarmos do segmento em questão estamos lidando com um conjunto de pontos do plano, e é em relação a este conjunto de pontos que estamos nos referindo quando chamamos a atenção para a invariância. Se considerarmos os segmentos, cada um deles, apenas como uma “linha”, não existirá diferença entre ambos, podendo nos levar à confusão de que os segmentos são invariantes pela transformação.

Figura 53 - Segmento AB e sua imagem $A'B'$ transformada por rotação de 45° no sentido anti-horário



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

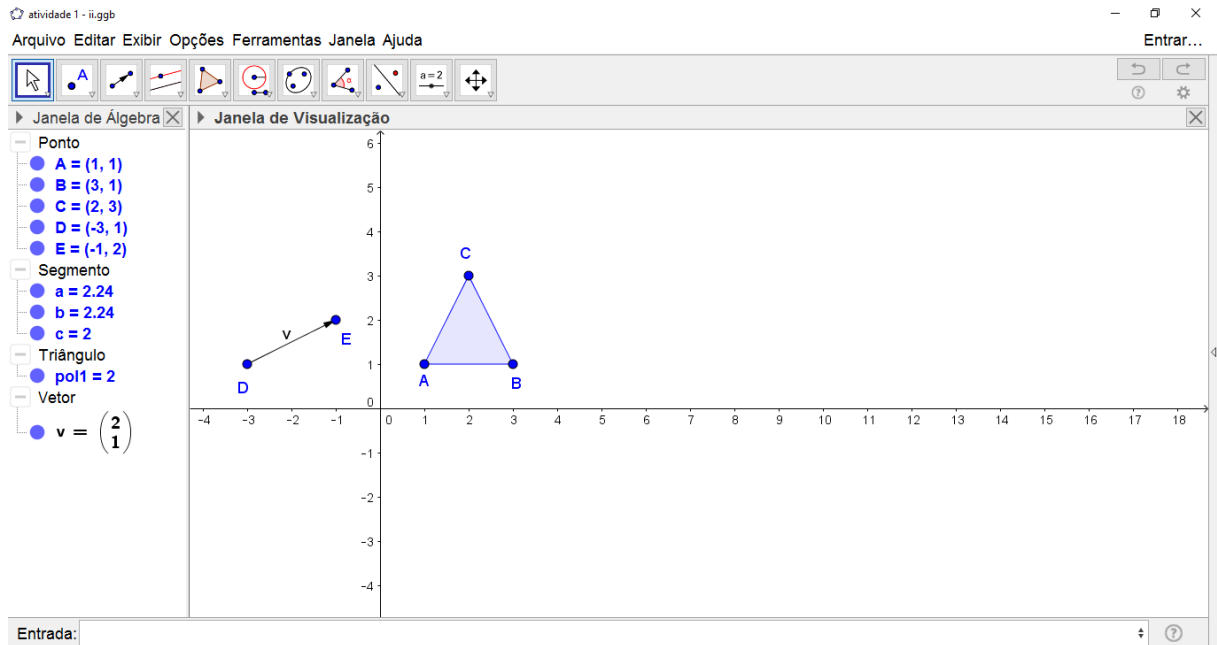
Mas, nosso estudo científico se refere a objetos matemáticos, neste caso, reforçamos: um conjunto de pontos do plano. Estas observações devem ser realizadas pelo professor para que ele possa ao final tratar de *simetria*. Pois, assim podemos nos referir a esta condição. Se o professor considerar possível, frente ao nível da turma de alunos, ele poderá explorar o caso em que o segmento torna-se invariante pela transformação de rotação, ou seja, realizada somente com um ângulo de 360° , que faça o segmento $A'B'$ coincidir com o segmento AB .

O próximo item trata da translação de um triângulo isósceles, segundo a direção de um segmento orientado dado que a determina, além do módulo (quantas unidades na direção imposta), e o sentido da translação. A intenção é desenvolvermos a capacidade do aluno de realizar uma translação verificando seus elementos. E ao final, explorarmos a ideia de não invariância.

ii) Dado o triângulo ABC , cujos vértices são $A(1,1)$, $B(3,1)$ e $C(2,3)$ e o segmento orientado \overrightarrow{DE} tal que $D(-3,1)$ e $E(-1,2)$. Transladar ABC por \overrightarrow{DE} .

Solução: Para resolver esta atividade, sugerimos os seguintes passos:

a) Construa o triângulo ABC e o segmento orientado \overrightarrow{DE} , como na Figura 54.

Figura 54 - Segmento orientado \overrightarrow{DE} e triângulo isósceles ABC

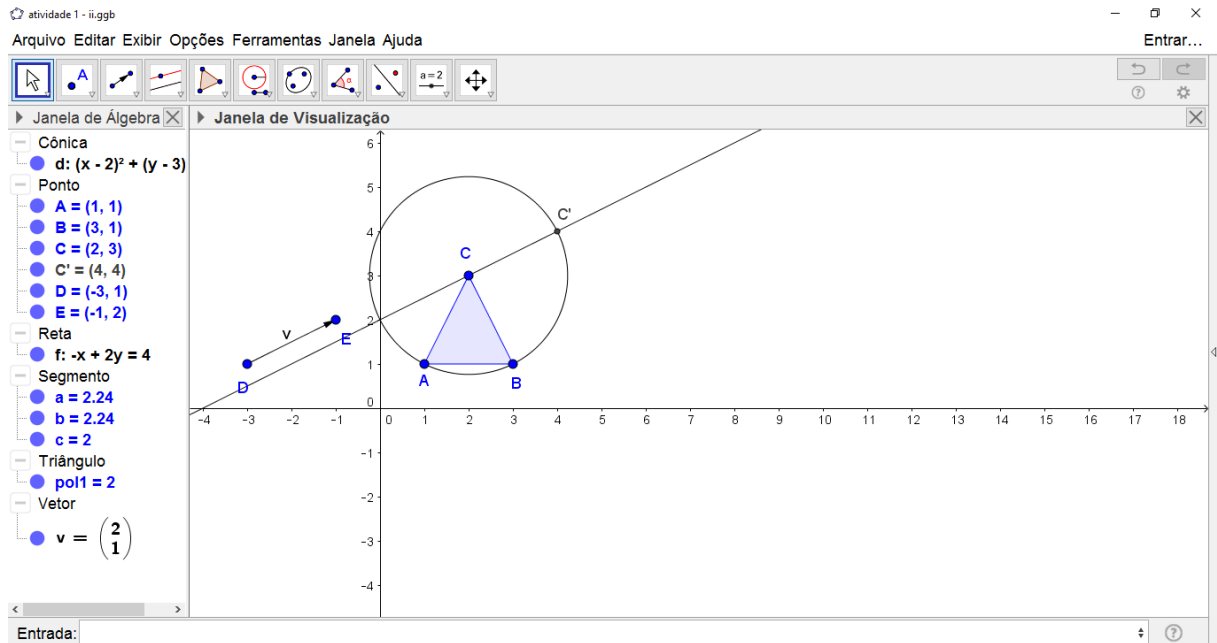
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

b) Trace por C uma reta paralela a \overline{DE} e usando o compasso transporte a medida DE a partir do ponto C .

Solução: Para isso, clique no quarto botão abaixo do menu principal e em seguida escolha a segunda opção "Reta Paralela". Depois clique no segmento orientado DE e em seguida no ponto C . Assim, será criada a reta r paralela a \overline{DE} por C . Para finalizar este passo clique no sexto botão do menu principal e em seguida escolha a terceira opção "compasso". Será necessário clicar nos pontos D e E para transportar a medida \overline{DE} pelo compasso. Em seguida, basta clicar sobre o ponto C e marcar o ponto em que a circunferência do compasso intercepta a reta r à direita de C . Assim, estará criado o ponto C' que é imagem de C trasladada pelo vetor $v = \overrightarrow{DE}$. Como ilustrado na Figura 55.

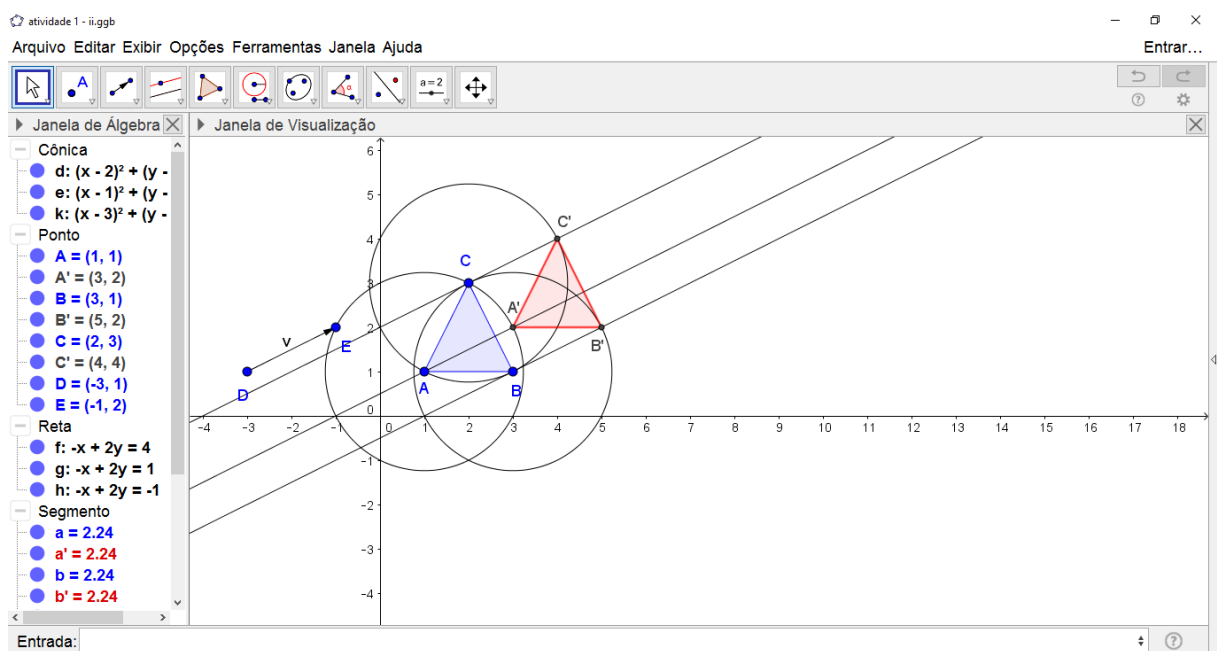
c) Repita o passo (b) para os pontos A e B e trace o triângulo $A'B'C'$. Como representado na Figura 56.

Figura 55 - Passo (b) - Ponto C trasladado pelo segmento \overrightarrow{DE}



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 56 - Triângulo ABC trasladado pelo segmento orientado \overrightarrow{DE}



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Comentário: Também neste caso a transformação é isométrica e não é invariante. A explicação é análoga ao caso anterior.

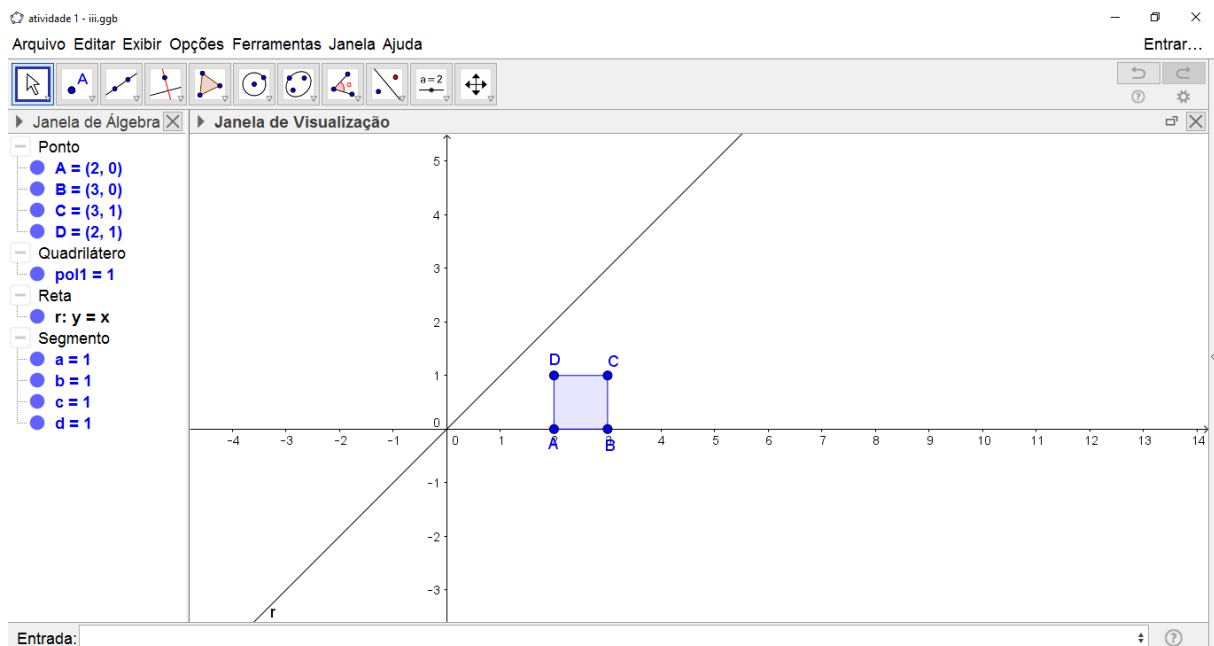
O caso seguinte explora uma reflexão de um quadrado com relação a uma reta dada.

iii) Dado o quadrado $ABCD$, em que $A(2,0)$, $B(3,0)$, $C(3,1)$ e $D(2,1)$ e a reta $r: y = x$, construa o quadrado $A'B'C'D'$ que é a imagem de $ABCD$ refletido em relação a r .

Solução: Sugerimos que a resolução seja feita pelos seguintes passos:

a) Plotar $ABCD$ e a reta r , como na Figura 57.

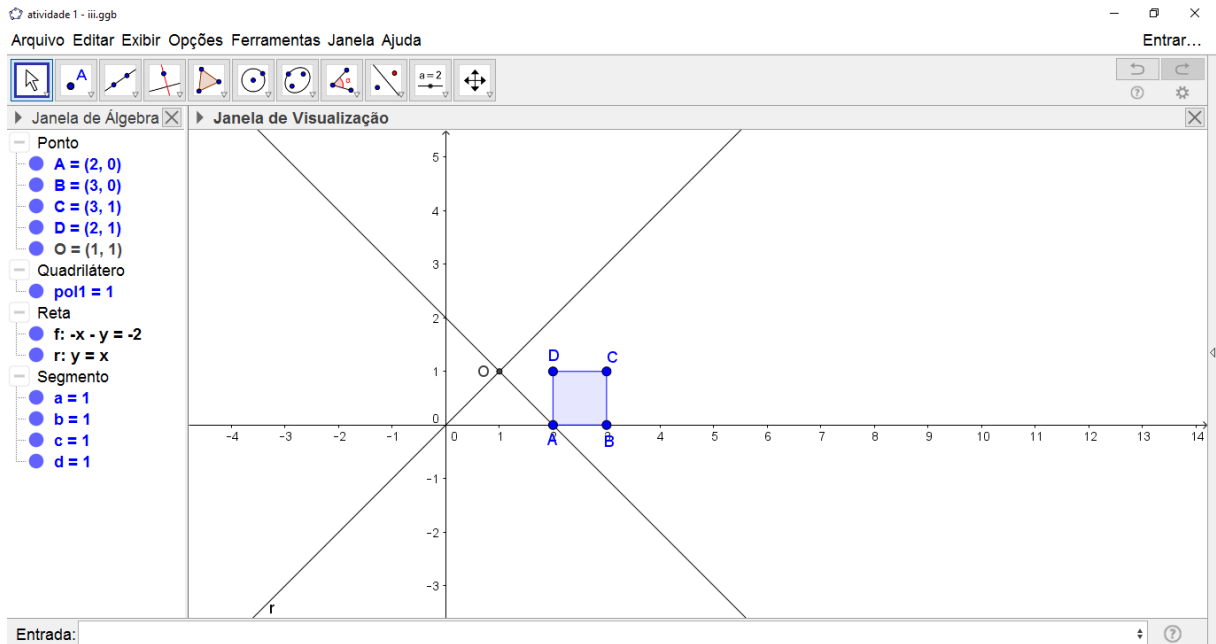
Figura 57 - Quadrado $ABCD$ e reta r



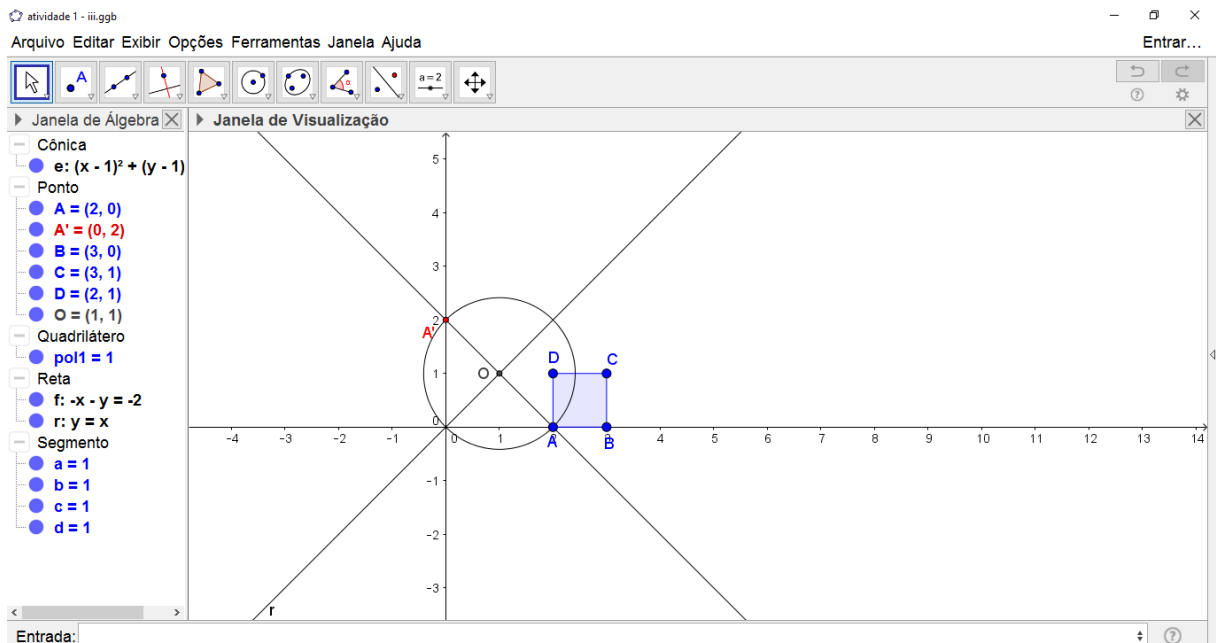
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

b) Traçar por A a reta s perpendicular a r e marcar o ponto O em que as retas r e s se interceptam, como na Figura 58.

c) Trace a circunferência Γ de centro O e raio medindo \overline{OA} . Marque o ponto A' , sabendo que $\Gamma \cap s = \{A, A'\}$, como na Figura 59.

Figura 58 - Passo (b) - reta s e ponto O 

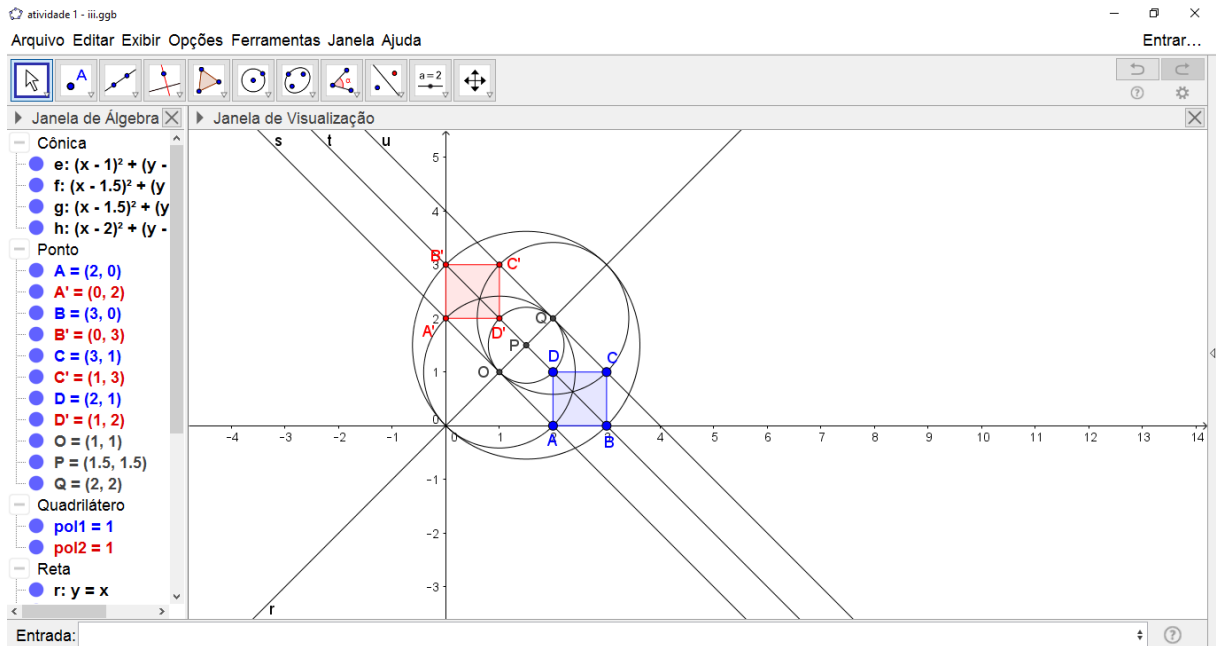
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 59 - Passo (c) - Circunferência Γ e A' 

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

d) Repita os (b) e (c) para os pontos B, C e D e obtenha B', C' e D' e, trace o quadrado $A'B'C'D'$, como representado na Figura 60.

Figura 60 - A'B'C'D' reflexão de ABCD em relação a r



Comentário: Esta transformação também não cumpre a condição de invariância. Logo, não é simétrica. Reforçamos que nossa intenção com estas três tarefas (i), (ii), e (iii) não é tratar de *simetria* diretamente, mas de uma das condições necessárias para que a transformação aplicada seja ou não uma *simetria*.

A atividade 2 apresenta outro objetivo, dinamizar a translação com a possibilidade de variar o parâmetro (coeficiente determinado pelo comprimento do segmento orientado no qual realizamos a translação). A direção é ao longo do eixo X.

ATIVIDADE 2

Translação e invariância do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$.

Comentário: Esta atividade tem por objetivo trabalhar a condição de invariância a partir da translação do gráfico da função definida acima, tal translação é uma senoíde. Para facilitar a realização da atividade sugerimos que o aluno por meio de um dispositivo acesse o endereço a seguir, pois neste caso, a construção já está pronta e disponível para ser utilizada.

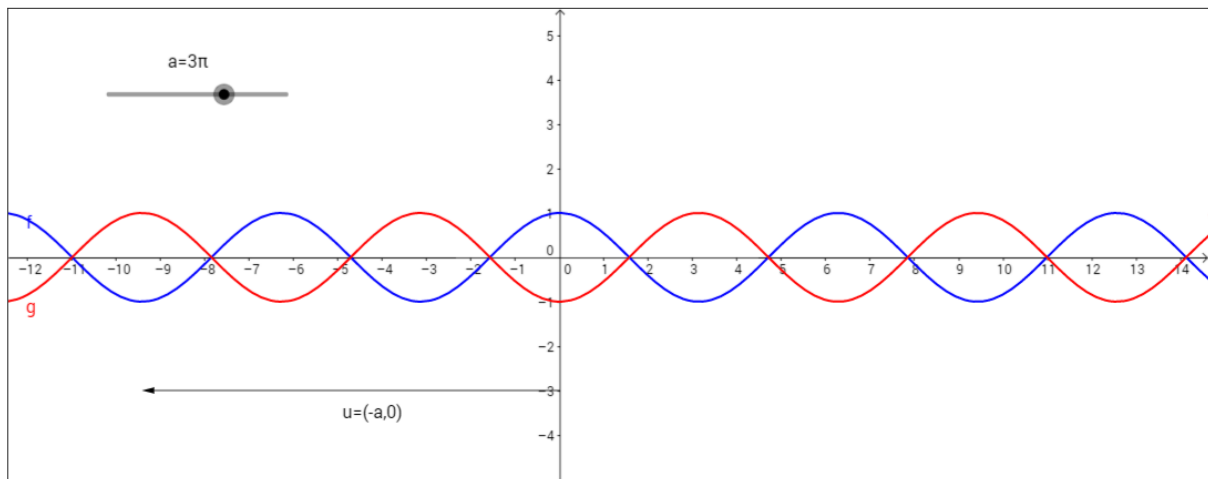
<https://ggbm.at/AWXYw4tU>

Acessando o endereço o aluno poderá, por meio dos controles deslizantes, simular situações em que o gráfico trasladado permanece invariante sobre os movimentos realizados (transformação de translação). Ao acessar o endereço não é necessário que o *GeoGebra* esteja instalado no dispositivo, o processo pode ser todo feito de um navegador de internet como mostra a Figura 61.

Figura 61 - Translação horizontal do gráfico de $f(x) = \cos(x)$

Translação horizontal do gráfico de $f(x)=\cos(x)$

Use o controle deslizante para trasladar o gráfico a unidades horizontalmente.



Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Comentário: O aluno pode utilizar o controle deslizante e anotar para que valores de a , há invariância na transformação obtida, ou seja, para quais valores de a os gráficos azul e vermelho coincidem. Notemos que deslocar o gráfico em a unidades horizontalmente é o mesmo que trasladá-lo por um vetor $u = (-a, 0)$.

ATIVIDADE 3

Translação e isometria do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = b \cos(cx + a).$$

Comentário: Esta atividade tem por objetivo trabalhar a condição de isometria no gráfico da função definida acima. Para facilitar a realização da atividade sugerimos que o aluno por meio de um dispositivo acesse o endereço a seguir, pois já há uma

construção pronta e disponível para ser utilizada em que ele deverá variar os coeficientes a , b e c da função.

<https://ggbm.at/HwfTVUQr>

Nesta construção podemos explorar a isometria ou não da transformação. Basta considerarmos três coeficientes variáveis na função, obtendo:

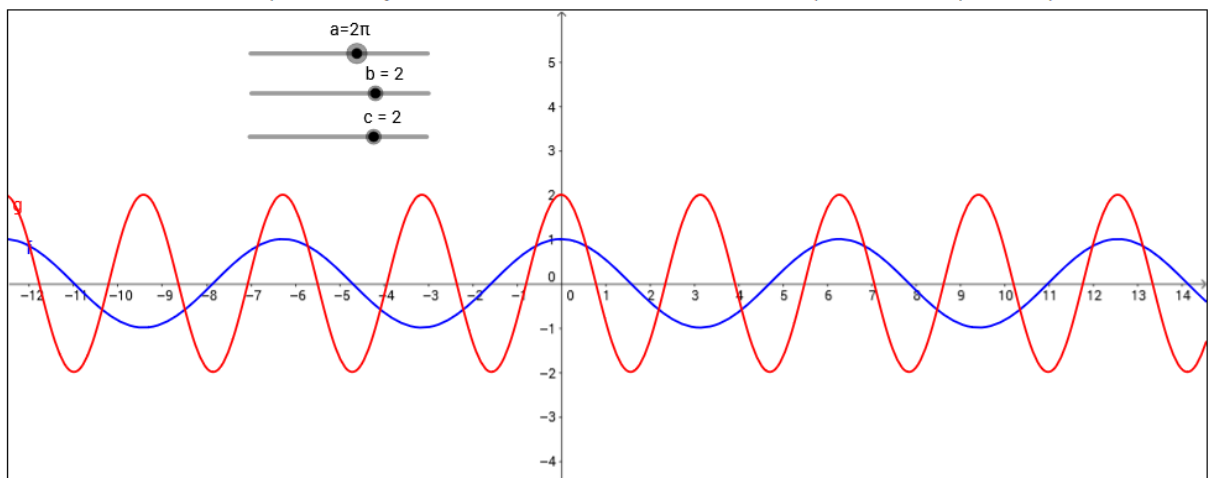
$$f(x) = b \cos(cx + a)$$

Podemos perceber que o gráfico se alonga ou comprime, verticalmente se $b \neq 1$ e horizontalmente se $c \neq 1$. Estes coeficientes determinam amplitude e período da função trigonométrica, respectivamente, como ilustramos na Figura 62.

Figura 62 - Gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $f(x) = b \cos(cx + a)$

Gráficos das funções $g(x)=\cos$ e $f(x)=b \cos(cx+a)$

Use o controle deslizante a para translação horizontal e os controles deslizante b e c para alterar amplitude e período.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Comentário: O professor pode sugerir que o aluno observe as distâncias dos pontos de máximo ou de mínimo, assim, o aluno poderá perceber que não há isometria para $b, c \neq 1$ e para $b, c \neq -1$.

As três atividades anteriores exploram, ainda que separadamente, os conceitos de transformação, invariância e isometria necessários para que possamos falar em *simetria*. Por meio atividades desenvolvidas com os alunos podemos partir para o objetivo principal deste trabalho que é, ainda que intuitivamente, propormos uma

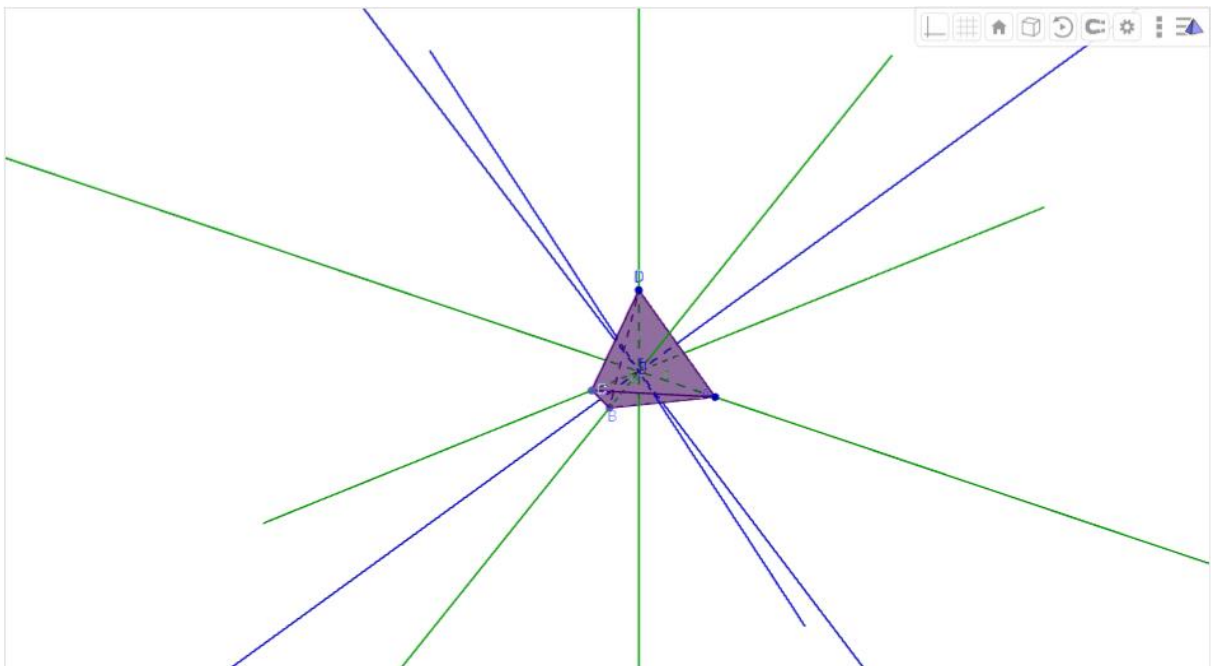
abordagem para trabalharmos o conceito moderno de *simetria*. Nossa sugestão é que este fechamento seja realizado por meio de observações e levantamento de questões por parte do professor, observando o que foi realizado nas atividades anteriores. Enfim, apresentamos a seguir duas atividades que irão explorar as condições necessárias para que uma transformação possa ser aplicada em um conjunto de pontos de modo a gerar *simetrias* neste conjunto.

ATIVIDADE 4

Simetrias de rotação do tetraedro.

Comentário: Na Figura 63 estão representados sete eixos de rotação de um tetraedro regular. Estes eixos foram escolhidos por serem aqueles que geram *simetria* quando rotacionamos o tetraedro em torno de cada um deles.

Figura 63 - Eixos de Simetria de Rotação no Tetraedro de Platão



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Esta imagem pode ser rotacionada para melhor visualização no endereço:

<https://ggbm.at/h5yW2RRv>

Podemos dividir os eixos de *simetria* do tetraedro em dois grupos nas cores verde e azul da Figura 63. O primeiro grupo A, em verde, são eixos que passam por um vértice e o centro de sua face oposta. O segundo grupo B, em azul, são eixos que passam pelo ponto médio de uma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta. De acordo com Lima (2011), além da identidade, cada eixo do grupo A gera duas *simetrias* por rotações e, cada eixo do grupo B gera uma *simetria* por rotação no tetraedro regular. Esta atividade tem por objetivo permitir que o aluno visualize e calcule as *simetrias* de rotação do tetraedro regular no espaço e para realizá-la sugerimos que o estudante acesse por algum dispositivo (computador, celular ou *tablet*) o endereço:

<https://ggbm.at/m9ZDr78y>

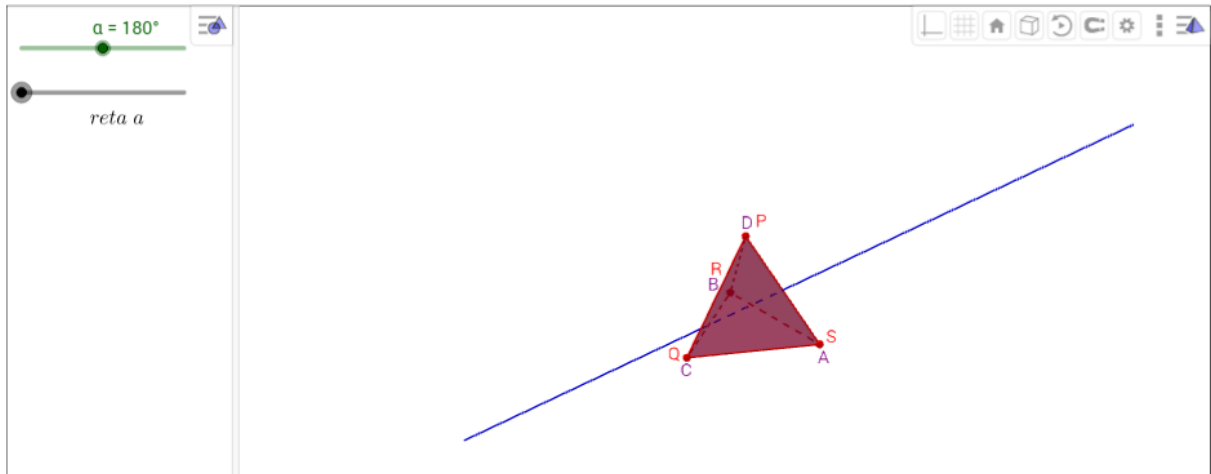
Embasado no que foi estudado nas atividades anteriores, o professor deve chamar atenção sobre a ação no tetraedro pela transformação, e, que, ao variarmos o ângulo α estamos considerando outra transformação. A questão a ser levantada é: em que medida esta transformação é isométrica e invariante?

Após as diversas situações simuladas pelos alunos, eles poderão responder ao questionado. Com isso, o conceito de *simetria* fica evidente. Cabe ao professor chamar a atenção para as *simetrias* encontradas, reforçando quais Transformações geram *simetrias* no tetraedro e quais não geram. A fim de organizar os dados obtidos e facilitar esta contagem, o aluno deverá preencher o quadro a seguir e indicar como os vértices do tetraedro da imagem (vermelho) P, Q, R e S são permutados (exibindo a *simetria*). Como exemplo preencheremos a rotação em 180° em torno da reta a , que para simplificar representaremos por $R_{180^\circ, a}$. As informações foram coletadas acessando o *applet*⁵ sugerido, como na Figura 64. Vale observar que o sólido em

⁵ Applets são pequenos programas em linguagem JAVA™ e que podem ser acessados por navegadores de internet. (DEITEL, H.; DEITEL, P., 2002)

estudo trata-se de um sólido de Platão, que possivelmente já fora estudado em Geometria Espacial.

Figura 64 - Tetraedro de Platão rotacionado em torno da reta a sob um ângulo de 180°



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Preenchemos a tabela com as informações da Figura 64.

<i>Simetrias</i> de um tetraedro de Platão	Antes		Depois
Identidade	$PQRS$	\rightarrow	$PQRS$
$R_{180^\circ, a}$	$PQRS$	\rightarrow	$SRQP$
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	
	$PQRS$	\rightarrow	

Existem outras *simetrias* geradas por outras transformações no tetraedro, a saber, por reflexões a partir de planos devidamente posicionados. Para isso,

precisaríamos além dos 7 eixos apresentados, explorar também os 6 planos de *simetria* do tetraedro regular.

ATIVIDADE 5

Rotação do cubo em torno do eixo Ox

Comentário: Esta atividade tem por objetivo utilizar a *simetria* para demonstrar uma aplicação para multiplicação de matrizes e geometria analítica na computação gráfica. Dividiremos a atividade em duas etapas. Na primeira etapa propomos ao aluno que realize os cálculos detalhadamente e, na segunda etapa por meio de um *applet* produzido antecipadamente, o aluno poderá verificar quais os efeitos produzidos pela matriz de rotação a partir de um ângulo previamente escolhido.

i) Considere a matriz de rotação⁶ em torno do eixo Ox , que será utilizada no que segue:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

A matriz rotaciona ponto a ponto figuras no espaço no sentido horário em relação ao eixo Ox segundo um ângulo θ .

Etapa 1: Dado $ABCDEFGH$ um cubo de vértices $A = (0, -1, -1)$, $B = (2, -1, -1)$, $C = (2, 1, -1)$, $D = (0, 1, -1)$, $E = (0, -1, 1)$, $F = (2, -1, 1)$, $G = (2, 1, 1)$ e $H = (0, 1, 1)$. Quais as coordenadas dos vértices do cubo $A'B'C'D'E'F'G'H'$ se ele é a imagem transformada por rotação de $ABCDEFGH$ segundo um ângulo de 90° em relação ao eixo Ox ?

Para obtermos o desejado, na matriz acima devemos considerar $\theta = 90^\circ$ logo, $\operatorname{sen} \theta =$

1 e $\cos \theta = 0$. Assim, a matriz de rotação será dada por: $R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para obter as coordenadas do vértice A' é necessário realizar o produto da matriz linha M_A das coordenadas de A , a saber $M_A = (0 \quad -1 \quad -1)$, por R_x , assim

⁶ O site <http://www.mat.ufpb.br/lenimar/cgraf/aplic.htm> apresenta os cálculos para a obtenção desta matriz.

$$M_{A'} = M_A \times R_x = (0 \quad -1 \quad -1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad -1 \quad 1)$$

Logo, $A' = (0, -1, 1)$.

Analogamente, para os outros pontos temos:

$$M_B = (2 \quad -1 \quad -1)$$

$$M_C = (2 \quad 1 \quad -1)$$

$$M_D = (0 \quad 1 \quad -1)$$

$$M_E = (0 \quad -1 \quad 1)$$

$$M_F = (2 \quad -1 \quad 1)$$

$$M_G = (2 \quad 1 \quad 1)$$

$$M_H = (0 \quad 1 \quad 1)$$

Realizando os produtos destas matrizes por R_x temos

$$M_{B'} = M_B \times R_x = (2 \quad -1 \quad -1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad -1 \quad 1)$$

$$M_{C'} = M_C \times R_x = (2 \quad 1 \quad -1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad -1 \quad -1)$$

$$M_{D'} = M_D \times R_x = (0 \quad 1 \quad -1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad -1 \quad -1)$$

$$M_{E'} = M_E \times R_x = (0 \quad -1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 1 \quad 1)$$

$$M_{F'} = M_F \times R_x = (2 \quad -1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 1 \quad 1)$$

$$M_{G'} = M_G \times R_x = (2 \quad 1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 1 \quad -1)$$

$$M_{H'} = M_H \times R_x = (0 \quad 1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 1 \quad -1)$$

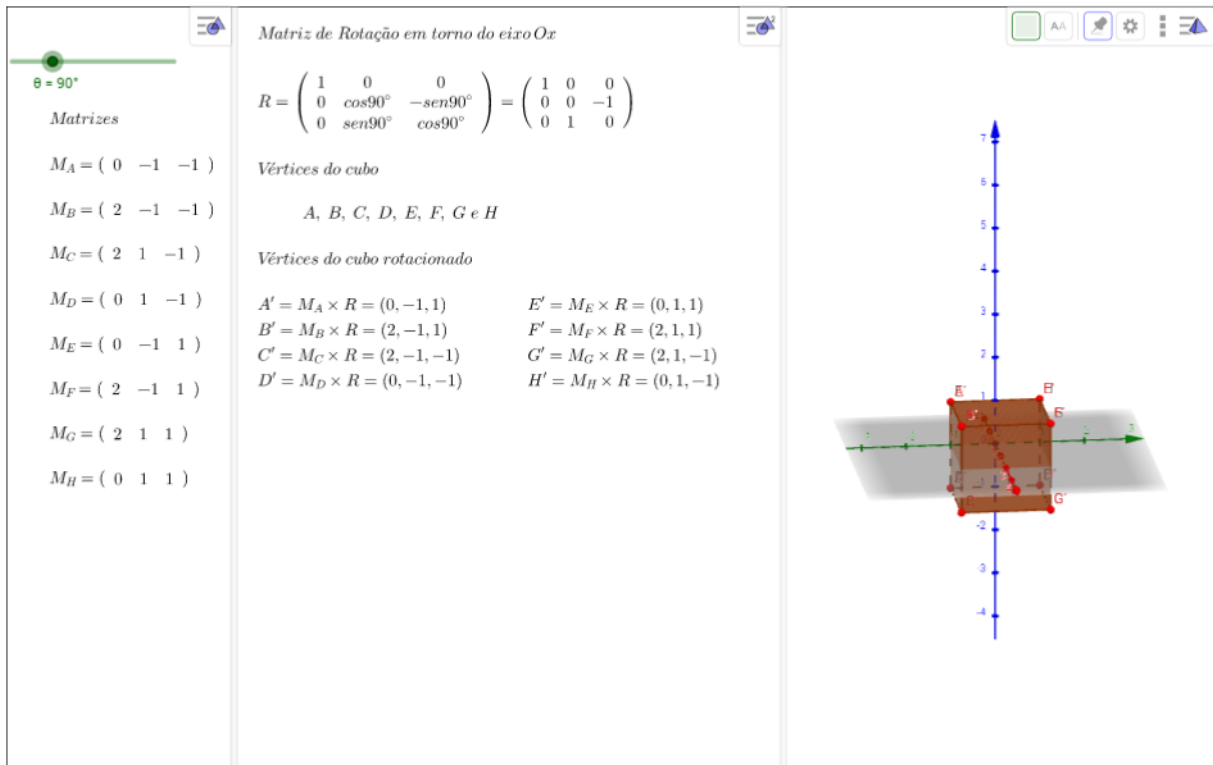
Assim, concluímos que as coordenadas dos vértices de $A'B'C'D'E'F'G'H'$ são $A' = (0, -1, 1)$, $B' = (2, -1, 1)$, $C' = (2, -1, -1)$, $D' = (0, -1, -1)$, $E' = (0, 1, 1)$, $F' = (2, 1, 1)$, $G' = (2, 1, -1)$ e $H' = (0, 1, -1)$.

Segunda parte: Posterior ao momento em que o aluno realizou todos os cálculos de modo detalhado e, para um ângulo em particular de 90° utilizaremos o *applet* para dinamizar a atividade utilizando outros ângulos. Para a realização desta etapa o aluno deve acessar *applet* hospedado no seguinte endereço:

<https://ggbm.at/SFhwqtGH>

Para alterar o ângulo de rotação, deve ser utilizado o controle deslizante θ . A Figura 68 representa a situação descrita na primeira parte a rotação de um cubo sob um ângulo de 90° .

Figura 65 - Cubo rotacionado em torno do eixo Ox sob um ângulo de 90°



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Nesta atividade o aluno poderá perceber como os valores da matriz de rotação variam de acordo com o ângulo escolhido. Podemos observar que a rotação na qual o aluno realizou por meio dos cálculos, com o ângulo de 90° trata-se de uma *simetria*. Podemos perguntar para o aluno para quais ângulos a rotação é uma *simetria*. Podemos ainda pedir para que o aluno preencha um quadro com as *simetrias* do cubo como na atividade 3. Nesta linha de raciocínio podemos explorar outras possibilidades para abordarmos *simetrias* quando trabalhamos com aplicativos de geometria dinâmica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Simetria é uma palavra utilizada por diferentes pessoas, em tempos históricos distintos e com diferentes significados. Sua presença ultrapassa o sentido estético mais comumente lembrado na sociedade em geral. Além da Matemática, *simetria* é um conceito que está presente em áreas como Física, Química, Cristalografia e Artes. E estas aplicações utilizam o conceito moderno de *simetria* cuja gênese está na obra *Éléments de Géométrie* de Adrian-Marie Legendre publicada em 1794 e que difere circunstancialmente do sentido estético.

Durante o trabalho desenvolvido buscamos construir um texto que pudesse subsidiar o professor da Educação Básica para realizar um tratamento deste assunto com base nos pilares que sustentam o conceito moderno de *simetria*: a transformação, a invariância e a isometria. As reflexões presentes neste texto devem cooperar com o professor de Ensino Médio na tarefa de construção do conceito moderno de *simetria*. Diferentemente do que percebemos nas obras consultadas que tratam do assunto neste nível de ensino.

Realizamos alguns estudos para sustentar nossa proposta e fundamentar as inferências que fazemos ao longo do texto. Visitamos os documentos oficiais dos Estados das Regiões Sul e Sudeste do Brasil, que norteiam a prática docente do professor de Matemática do Ensino Médio da Educação Básica. No contexto de nosso trabalho mostramos que, embora os documentos façam menção sobre a importância de trabalharmos com *simetria* neste nível de ensino, não revelam estratégias de como devem ser feitas este trabalho. Não discutimos aqui a necessidade desta direção, mas especificamente com *simetria*, esta ausência torna o tema passível de ser apresentado em diferentes significados pelo professor na sua prática, podendo até distanciar-se do conceito moderno. Em relação ao Ensino Fundamental Mendes (2014) mostra um estudo capaz de atender às expectativas deste nível de ensino, já no Ensino Médio, mostramos que existe uma lacuna no tratamento de simetria. Ressaltamos que no Ensino Médio o aprendizado de Matemática, assim como outras áreas, deve encontrar complementação e aprofundamento em relação ao que foi iniciado no Ensino Fundamental.

Nessa nova etapa (Ensino Médio), em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos

da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos (BRASIL, 2000).

Acreditamos que as questões levantadas relativas aos documentos oficiais possam chamar atenção dos profissionais da educação, sobretudo da matemática, para que reflitam sobre a importância de estudos constantes e possíveis mudanças no currículo em geral. Nesta direção, esperamos que o professor possa compreender a importância de *simetria* no currículo de Matemática do Ensino Médio.

Realizamos ainda, estudos a partir dos livros didáticos, que trouxeram diferentes resultados a partir da análise apresentada. Conclusivamente, acreditamos que devido à relevância do assunto, seria interessante que os autores tratassem *simetria* em capítulos específicos sobre tal. A forma segmentada como *simetria* é abordada pelos livros didáticos apenas contribui para que este conteúdo passe despercebido pelo professor em sua prática docente. Além do que, por vezes, possa ser tratado omitindo as ideias que envolvem o conceito moderno de *simetria* neste nível de ensino.

As conclusões que observamos e trazemos no decorrer deste trabalho devem-se sobretudo à dedicação que tivemos a um estudo detalhado dos aspectos históricos sobre *simetria*, o que demonstra a importância de resgatarmos a história da Matemática para o tratamento das ideias ou conceitos de um modo geral. Ainda que explicitamente não tenhamos construído uma proposta por meio da história da *simetria*, ela reflete a forma como a palavra foi utilizada ao longo dos tempos.

Todas estas considerações podem contribuir para um processo vicioso em que o aluno em geral, mesmo quando estuda *simetria* no Ensino Médio, não consegue romper com o senso comum, que mistura o científico a usos não científicos da palavra como ao sentido estético atribuído à mesma.

Evidentemente nossa proposta não encerra as possibilidades para o ensino de *simetria* no Ensino Médio, mas, contempla algumas questões até então ignoradas pelos livros didáticos que comumente adotamos nas escolas de Londrina e que são reconhecidos nacionalmente.

O caminho para chegar a esta proposta de ensino foi riquíssimo, e aprendemos muito com este processo e, que tem modificado as práticas docentes deste autor. Esperamos que nosso trabalho possa contribuir com outros colegas não somente com a prática docente, mas demonstrando a importância das fontes e dos procedimentos

que seguimos trazendo a história da Matemática como uma aliada ao tratamento dos conceitos matemáticos.

Os resultados conduziram-nos às discussões que se dedicam a Matemática do Ensino Médio, onde o assunto ainda não estava esgotado. Mas, devido a sua importância histórica e suas aplicações em outras ciências é interessante que, além da breve aplicação em computação gráfica que apresentamos, possa agora extrapolar a barreira disciplinar e se relacionar de forma interdisciplinar. O pesquisador que se interessar poderá trabalhar questões como a conservação de energia e seu relacionamento com *simetria* em Física, ou como conceito moderno de *simetria* pode ser aplicado à química orgânica, como por exemplo a relação entre a polaridade de uma molécula e a disposição simétrica ou não de seus átomos. É vasto o campo de aplicações deste conceito, basta investigarmos e estabelecermos as devidas conexões explicitando o modo como *simetria* está presente em diferentes campos científicos.

REFERÊNCIAS

- BRASIL, *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.
- BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: Ministério da Educação, 1997.
- BRADING, Katherine; CASTELLANI, Elena. (Eds). *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto & Aplicações*. vol.1,2,3 – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013.
- DARVAS, György. *Symmetry: Cultural and Ontological Aspects of Science-Arts Relations*. Tradução: David Robert Evans. Basel, Switzerland: Birkhäuser. Verlag AG, 2007.
- DEITEL, Harvey M.; DEITEL Paul J. *JAVA™ How to Program*. 4 ed. Prentice Hall, Inc. 2002
- ESPÍRITO SANTO. *Currículo Básico Escola Estadual*. Vitória: SEDU, 2009.
- HON, Giora; GOLDSTEIN, Bernard R. *From Summetria to Symmetry: The Making of A Revolutionary Scientific Concept*. Archimedes: New Studies in The History of Science and Technology, New York: Springer-Verlag, 2008.
- IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilze de. *Matemática: Ciências e aplicações, volume 1,2,3: ensino – 7. ed.* – São Paulo: Saraiva, 2013.
- LEGENDRE, Adrien-Marie. *Éléments de Géométrie, avec des Notes*. Paris. Firmin Didot, 1794.
- LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.
- LIMA, Lucas Fabiano. *Grupos de Simetria I*. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2011. 78f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.
- LIVIO, Mario. *The Equation That Couldn't be Solved. How Mathematical Genius Discovered the Language of Symmetry*. New York: Simon & Schuster, 2006.

MAINZER, Klaus. *Symmetries of Nature: A Handbook for Philosophy of Nature and Science*. Tradução: Barbara H. Mohr. Boston: Walter de Gruyter & Co., 1988.

MENDES, Carlos Octávio de Abreu e Silva. *O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Uma Análise*. Niterói: UFF, 2014. 48 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. *Conteúdo Básico Comum: CBC Matemática*. Belo Horizonte: SEE, 2005. 80 p.

PAIVA, Manoel. *Matemática: Paiva*. vol.1,2,3 – 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2013.

PARANÁ. *Caderno de expectativas de aprendizagem*. Curitiba: SEED, 2012.

PARANÁ. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática*. Paraná,PR: Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2008.

PASQUINI, Regina Célia Guapo. BORTOLOSSI, Humberto José. *Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. – (Série história da matemática para o ensino; v.9)

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação. *Currículo Mínimo 2012. Matemática*. Rio de Janeiro, 2012.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. (Org). *Lições do Rio Grande: Referencias Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e Suas Tecnologias*. Vol.2. 1 ed. Porto Alegre: SE/DP, 2009.

SANTA CATARINA. Governo do Estado. Secretaria de Estado da Educação. *Proposta curricular de Santa Catarina: formação integral na educação básica*. / Estado de Santa Catarina – [S.I.]:[S.N.], 2014.

SÃO PAULO. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias* / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. 1 ed. Atual. – São Paulo : SE, 2012. 72 p.

SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo Olhar Matemática*. Volume 1,2,3 – 2 ed. – São Paulo: FTD, 2013.

STEWART, Ian. *Uma História da Simetria na Matemática*. Tradução: Claudio Carina. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2012.

WEYL, Hermann, *Symmetry*. Princeton University Press, 1952.

YAGLOM, Isaac Moiseevich. *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea os Symmetry in the Nineteenth Century*. Tradução: Sergei Sossinsky. Harrisonburg: Birkhiuser Boston, 1988.