Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí

Coordenação de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Henrique Bernardes da Silva

CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS E O PROCESSO DE SIGNIFICAÇÃO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Jatai-GO

2016

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: **Henrique Bernardes da Silva**

Título do trabalho: **Construção dos Conjuntos Numéricos e o Processo de Significação das Operações Aritméticas**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Henrique Bernardes da Silva

Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 16 / 01 /2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

Henrique Bernardes da Silva

CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS E O PROCESSO DE SIGNIFICAÇÃO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática do Ensino Básico. Orientador: Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa

Jatai-GO

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Henrique Bernardes da
Construção dos Conjuntos Numéricos e o Processo de Significação das Operações Aritméticas [manuscrito] / Henrique Bernardes da Silva. - 2016.
90 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí, 2016.
Bibliografia. Anexos.
Inclui tabelas, lista de figuras.

1. Conjuntos numéricos. 2. Sentidos das operações aritméticas. 3. Aplicativos no ensino de Matemática. 4. Significação. I. Costa, Esdras Teixeira, orient. II. Título.

CDU 51

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Henrique Bernardes da Silva – Aos seis dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezesseis (06/12/2016), às 15:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa– Orientador, Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva e Prof. Dr. Marcos Wagner Souza Ribeiro, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Centro de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – CEPEM da Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS E O PROCESSO DE SIGNIFICAÇÃO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS",** em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:30 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Dáfnis Franco Luz, secretário do PROFMAT/UFG, polo Jataí, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Esdras Teixeira Costa

Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Coordenação de Matemática-UFG/Reg. Jataí
Presidente da Banca

Gecirlei Francisco da Silva

Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva
Coordenação de Matemática-UFG/Reg. Jataí
Membro interno

Prof. Dr. Marcos Wagner Souza Ribeiro
Coordenação de Ciências da Computação
Membro externo

Henrique Bernardes da Silva licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás Campus Jataí.

Jatai-GO

2015

Dedicatória

A todos os meus professores, alunos e familiares com os quais pude aprender incontáveis lições e que direta ou indiretamente incentivaram minha perseverança e a realização deste trabalho.

Agradecimentos

Aos professores desta instituição que participaram da minha vida acadêmica, me apoiaram e incentivaram o meu sucesso.

Ao meu orientador, por acreditar na concretização deste trabalho.

E em especial, à minha esposa Camila Caroline, pela compreensão e apoio incondicional.

Muito obrigado!

Resumo

O significado dado às definições e propriedades aritméticas necessárias ao processo de construção dos conjuntos numéricos estão relacionados à compreensão deste processo, pelo professor, e às situações propostas ao aluno. Neste sentido, priorizando os conjuntos dos números naturais e inteiros, este texto propõe uma construção dos conjuntos numéricos e destaca, considerando disseminação dos recursos tecnológicos que podem ser utilizados em sala de aula, como os significados dos números e operações estão presentes em situações com uso de aplicativos. O texto apresentado neste trabalho está dividido em três partes. A primeira delas é dedicada a construção dos conjuntos numérico com base nas suas características aritméticas. Em um segundo momento são apresentados alguns aplicativos com potencial para o ensino de Matemática e por fim uma proposta de utilização de *software* para realização de atividades voltadas à significação. O objetivo deste trabalho é, portanto, oferecer aos professores subsídios teóricos para a fundamentação matemática, construindo uma base teórica simplificada da aritmética abordada na educação básica e, além disto, apresentar sugestões de aplicativos para o trabalho de significação matemática destacando suas potencialidades e uma situação didática envolvendo um deles.

Palavras-Chave: Conjuntos numéricos. Sentidos das operações aritméticas. Aplicativos no ensino de Matemática**.** Significação.

Abstract

The meaning given to the definitions and arithmetical properties necessary to the process of constructing the numerical sets are related to the understanding of this process by the teacher and to the situations proposed to the student. In this sense, prioritizing the sets of natural and integers, this text proposes a construction of the numerical sets and highlights, considering the dissemination of technological resources that can be used in the classroom, how the meanings of numbers and operations are present in situations with use software. The text presented in this paper is divided into three parts. The first one is dedicated to the construction of the numerical sets based on their arithmetic characteristics. In a second moment some softwares with potential for the teaching of Mathematics are presented and finally a proposal of use of software to carry out activities directed to the signification. The objective of this work is, therefore, to offer teachers theoretical subsidies for mathematical reasoning, constructing a simplified theoretical basis of arithmetic addressed in basic education and, besides, to present suggestions of software for the work of mathematical significance highlighting their potentialities and a didactic situation involving one of them.

Keywords. Numerical sets. Meaning of arithmetic operations. Software in mathematics teaching.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Atualmente os currículos de Matemática do Ensino Médio no Brasil são elaborados com o objetivo de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos nas etapas de ensino anteriores e desenvolver aptidão para o trabalho, exercício da cidadania além da compreensão da matemática cotidiana e o desenvolvimento da autonomia intelectual (BRASIL, 2000). No entanto, já no Ensino Médio, a Matemática ainda é tratada com estranheza por parte dos alunos, repúdia ou ainda considerada algo absurdo, em algumas abordagens, devido principalmente à não compreensão dos conceitos básicos inerentes ao conteúdo apresentado a eles nesta fase escolar. Sob esta perspectiva é necessário observar o sentido proposto para as propriedades aritméticas em diversas situações didáticas. Além da estrutura curricular proposta ao ensino básico de Matemática, podemos ressaltar alguns outros fatores que influenciam no desenvolvimento escolar dos alunos como, método de avaliação, base teórica ou prática e recursos utilizados pelo professor.

Cada conteúdo inserido no currículo tem como objetivo desenvolver determinadas habilidades. Dentre estas, as desenvolvidas a partir do nono ano do Ensino Fundamental, em relação a aritmética, pode-se destacar a habilidade de criar e resolver situações problema que envolvem números reais ampliando e consolidando os significados das operações adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (GOIAS, 2012). Estes são pré requisitos para os outros conteúdos em aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, como resolução de situações problema simples, resolução de equações e problemas envolvendo formas geométricas por exemplo. Não dominar tais habilidades básicas limita a capacidade de progresso do aluno em relação aos demais conteúdos que serão apresentados a ele nos anos seguintes.

Segundo os últimos dados fornecidos pela Secretaria de Estado de Educação, Cultura e Esporte de Goiás, em 2014 os alunos de escolas públicas do nono ano do ensino fundamental e da terceira série do ensino médio em escolas públicas obtiveram apenas 47% e 37,7% de acertos, respectivamente na prova do SAEGO (Sistema de Avaliação do Estado de Goiás) na área de Matemática. Os alunos das mesmas séries em escolas particulares obtiveram 55,9% e 45,5% de acertos na prova de matemática para os mesmos períodos. Vários índices estão abaixo de 30%. No entanto a taxas de aprovações em 2013 para estas séries foram de 91,9% e 96,2% para as escolas públicas e particulares respectivamente. Neste ano as notas médias obtidas em Matemática na avaliação do Sistema de Avaliação da Educação Básica nacional (Saeb) em Goiás foram de 4,6% e 6,08% para escolas públicas e particulares, nesta ordem. A análise somente destes dados nos dá informações superficiais sobre a situação do desempenho matemático dos alunos no estado, porém, reflete a situação atual na qual os alunos não possuem habilidades matemáticas esperadas para cursarem a série seguinte e mesmo assim são aprovados.

Apesar de muitos alunos não dominarem as habilidades matemáticas esperadas para os anos anteriores ao qual está cursando o professor se encontra em uma posição delicada na qual deve escolher sanar as dificuldades acumuladas dos alunos em turmas, obviamente, heterogêneas em inúmeros aspectos como por exemplo idade e habilidades matemáticas dominadas ou optar por executar a ementa proposta pela equipe pedagógica e administrativa para aquele ano forçando o aluno a aprender uma nova linguagem, novos conceitos e propriedades sem ao menos dominar o básico esperado. Como resultado disto temos a situação descrita anteriormente, vários alunos em uma série sem ter correspondido às expectativas de aprendizagem do ano anterior. Diante desta situação o professor deve recorrer a uma variedade de metodologias de ensino e incentivo de forma que possa executar o plano de ensino proposto pela secretaria de educação para uma determinada série e ainda preencher as lacunas no desenvolvimento matemático do aluno.

Uma fundamentação matemática teórica sólida é fundamental, pois, além de dominar várias metodologias de ensino é necessário que se tenha total domínio dos fundamentos matemáticos relativos aos conteúdos abordados em sala de aula. Neste trabalho serão apresentadas as principais definições e propriedades aritméticas dos conjuntos numéricos bem como a construção dos mesmos a partir de axiomas e teoremas com o objetivo de se construir uma base teórica simplificada da aritmética abordada na educação básica tendo como principal referência o conteúdo da disciplina Aritmética do PROFMAT, além de alguns recursos relativos a Análise Real e Álgebra. Além disto será apresentada também uma proposta metodológica relacionada a tecnologia de fácil acesso.

As ferramentas utilizadas pelo professor de matemática devem contemplar os conteúdos básicos e ao mesmo tempo desenvolver habilidades avançadas específicas, como por exemplo a resolução de equações de grau um ou dois por meio de operações básicas como multiplicação, divisão e adição de números inteiros. Dentre as várias possibilidades destacam-se atualmente as relacionadas a tecnologias que não necessitam de equipamentos sofisticados ou ambientes adaptados.

O alcance das expectativas de aprendizagem dependem do envolvimento do aluno, dos recursos disponíveis e do preparo do professor para utilização destes recursos, também por isso a necessidade da certeza e conhecimento profundo do que se ensina, mesmo que seja apenas o básico (que quando estudado a fundo pode ser extremamente complicado), pois, caso contrário o que se pensa ser o ato de ensinar torna-se mera repetição na maioria das vezes sem sentido para o professor e consequentemente para o aluno. O envolvimento do aluno está diretamente relacionado à sua compreensão do tema abordado, não é possível exigir de um aluno a resolução de uma equação por métodos algébricos se ele não domina as operações básicas com números inteiros por exemplo ou não conhece a simbologia necessária. Torna-se uma experiência tão cansativa e monótona como ler um texto em uma língua nunca vista antes. Atribuir significado aos conceitos, símbolos, resultados e métodos matemáticos é necessário para o desenvolvimento de habilidades matemáticas básicas ou não.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é mostrar detalhadamente a construção dos conjuntos numéricos mais elementares e ao mesmo tempo produzir subsídios para seleção de temas e conteúdos específicos que possam ser trabalhados por meio de um *software* para potencializar o ensino-aprendizagem da aritmética no ensino básico dando significado às operações matemáticas.

O PROFMAT é um programa com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para atuação docente. Desta forma, vale ressaltar que não houve aplicação das propostas apresentadas neste trabalho, o intuito é a construção de uma fundamentação teórica matemática sólida que possibilite ao professor compreender e utilizar com segurança propriedades, definições relativas a conjuntos numéricos e os vários sentidos atribuídos aos números e operações matemáticas pelos alunos. Ainda assim, o conteúdo deste trabalho pode ser útil para a criação de aplicativos e situações didáticas com ênfase na aritmética do ensino básico.

Além disto, será abordada a necessidade de ferramentas que auxiliem o desenvolvimento do aluno em aspectos básicos que tornem possível a compreensão e utilização da matemática, em particular a aritmética, de forma plena em atividades cotidianas de trabalho, tarefas diárias e possivelmente na vida acadêmica.

Nos capítulos a seguir serão apresentadas construções dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, nesta ordem, com ênfase nas propriedades aritméticas de cada um. A seguir, serão apresentados alguns que envolvem aritmética destacando que tornam a utilização dos mesmos em sala de aula relevante, ou seja, como os aplicativos descritos podem contribuir para o desenvolvimento da teoria apresentada nos capítulos iniciais. Por fim, são realizadas considerações acerca da relevância da compreensão dos conceitos e propriedades matemáticas pelo aluno e pelo professor para a significação matemática correta, tendo aplicativos como recursos didáticos.

Capítulo 2

Conjunto dos Números Naturais

As definições e propriedades deste capítulo utilizam a mesma notação apresentada por Machado (2014, p. 14-29) em sua descrição dos conjuntos numéricos. A construção deste conjunto pode ser feita a partir dos axiomas de Peano[1], ou seja, todos os demais resultados verdadeiros envolvendo os elementos deste conjunto são obtidos a partir destas afirmações. Originalmente os axiomas de Peano, publicados na obra *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Os princípios da aritmética apresentados por um novo método), foram expostos em nove afirmativas conforme Anexo I, mas, de acordo com a linguagem matemática atual utilizaremos apenas três conforme LIMA (2006). É possível encontrar, de acordo com a necessidade, alguns casos nos quais o 0 (zero) é definido como o menor dos elementos do conjunto dos números naturais, no entanto, a construção descrita neste texto adotará o número 1 (um). Isto é suficiente para a definição e construção desse conjunto abordando as demais definições, propriedades e operações necessárias para a formulação de uma fundamentação dos conteúdos ensinados no ensino básico. Como ressalta LIMA (2006b, p. 150) "incluir ou não o número 0 no conjunto N dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência."

Utilizaremos o símbolo $\mathbb{N}$ para representar o conjuntos dos números naturais caracterizado pelos seguintes axiomas[2]: (seus elementos continuarão sendo denominados números

[1] Giuseppe Peano (1858 - 1932) é considerado o maior matemático italiano de sua época, lembrado pelos seus axiomas dos quais dependem tantas construções rigorosas de álgebra e análise. Deu importantes contribuições teóricas nas áreas de análise matemática, lógica, teoria dos conjuntos, equações diferenciais e análise vetorial. Autor de inúmeros livros e artigos, expôs suas idéias em cerca de duas centenas de trabalhos. (http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/GiusPean.html)

[2] Os axiomas são enunciados de acordo com a notação adota por Lima (2006, p. 1)

naturais e os símbolos para as operações entre seus elementos são os mesmos utilizados no ensino básico)

Axioma 1. *Existe uma função injetiva* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *A imagem* $s(n)$ *de cada número natural* $n \in \mathbb{N}$ *chama-se sucessor de* n.

Axioma 2. *Existe um único número natural* $1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \neq s(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Axioma 3. *Se um conjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é tal que* $1 \in X$ *e* $s(X) \subset X$ *então* $X = \mathbb{N}$.

Em outras palavras pode-se afirmar que:

1. Cada número natural n possui um único sucessor pertencente a $\mathbb{N}$ e números naturais com sucessores diferentes são necessariamente diferentes.

2. O número $1 \in \mathbb{N}$ não é sucessor de nenhum outro natural. Esse número é o único com esta propriedade.

3. Se um conjunto contém o número 1 e todos os seus sucessores então este conjunto contém todos os números naturais.

Esta última propriedade também recebe o nome de Axioma de Indução. Estas três propriedades, por mais simples que pareçam, são a base da aritmética dos números naturais. Está implícito neste conjunto de axiomas que nenhum número natural é sucessor de si mesmo, isto é para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $n \neq s(n)$, conforme a **Proposição 1** a seguir

Proposição 1. *Seja* $n \in \mathbb{N}$, *então* $n \neq s(n)$.

Demonstração. Para verificar este fato considere o subconjunto de $\mathbb{N}$, $\mathbb{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq s(n)\}$. Do **Axioma 2** temos que $1 \in \mathbb{A}$, pois $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $n \in \mathbb{A}$ qualquer, isto é $n \neq s(n)$. Como pelo **Axioma 1,** s é injetiva, temos que o sucessor de n é diferente do sucessor de $s(n) \in \mathbb{N}$, ou seja $s(n) \neq s(s(n))$. Portanto $s(n) \in \mathbb{A}$. Pelo **Axioma 3** temos então que $\mathbb{A} = \mathbb{N}$. □

Vejamos a seguir as operações básicas definidas no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

2.1 Adição no Conjunto dos Números Naturais

A operação de adição no conjunto dos números naturais, representada pelo símbolo $+$ é caracterizada por meio das igualdades apresentadas abaixo.

Definição 1. Dados m, $n \in \mathbb{N}$ define-se

1. $m + 1 = s(m)$, ou seja, $m + 1$ é o sucessor de m.

2. $s(m + n) = m + s(n)$

Notemos que o item 2 da definição afirma que conhecendo o valor de $m + n$ sabe-se como obter o valor de seu sucessor $s(m + n) = (m + n) + 1 = m + (n + 1) = m + s(n)$. Percebe-se que a própria definição propõe a ideia de associatividade na adição dos números naturais, como ressalta Lima (2004, p. 35)

Lembrando que o símbolo $\circ$ será representa a composição de funções de acordo com a **definição 34** (página 88), utilizaremos a definição a seguir para caracterizar a soma entre dois números naturais.

Definição 2. Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. A cada $n \in \mathbb{N}$ podemos, de modo único, associar uma função $f^n : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ de forma que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$. Chamaremos a função f^n de **n-ésima iterada de f** , ou ainda dizemos que f foi iterada n vezes.

Proposição 2. *Dados m, $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, então $m + n = s^n(m)$. Ou seja somar m a n significa partir de m e tomar o sucessor n vezes.*

Demonstração. Seja $S_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n = s^n(m)\}$ para um m natural fixo qualquer. Verificaremos que $S_m = \mathbb{N}$ utilizando o princípio de indução.

$1 \in S_m$, pois, conforme a **definição 1** $m + 1 = s(m) = s^1(m)$.

Dado um $k \in S_m$ qualquer, temos que

$$\begin{aligned} m + s(k) &= s(m+k) \\ &= s\left(s^k(m)\right) \\ &= s \circ s^k(m) \\ &= s^{k+1}(m) \\ &= s^{s(k)}(m) \end{aligned}$$

ou seja $m + s(k) = s^{s(k)}(m)$, portanto, $s(k) \in S_m$. Como m fixado é por hipótese qualquer natural, temos que $S_m = \mathbb{N}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Se fizermos $\mathbb{N} = \{1,\ s(1),\ s(2),\ s(3),\ s(4),\ s(5)\ldots\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots\}$ teremos, por exemplo:

$$3 + 3 = s^3(3) = s\left(s^2(3)\right) = s(s(s(3))) = s(s(4)) = s(5) = 6 \Rightarrow 3 + 3 = 6.$$

Temos na **Proposição 2** a base para os argumentos utilizados nas operações com números naturais, pergunta-se então como criar situações que possibilitem a compreensão deste sentido da adição com materiais manipuláveis, ou por meio de *software.*

2.2 Propriedades da Adição nos Naturais

Proposição 3. *Dados $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$ quaisquer, são verdadeiras as seguintes propriedades:*

AN1 *Associatividade:* $m + (n + p) = (m + n) + p$.

AN2 *Comutatividade*: $m + n = n + m$.

AN3 *Lei do Corte:* $n + p = m + p \Rightarrow n = m.$

Demonstração. As demonstrações destas propriedades podem ser feitas por indução. Construiremos alguns conjuntos com as propriedades desejadas e provaremos que tais conjuntos coincidem com o conjunto dos números naturais, segundo o Axioma 3 (página

20) .Para isto, considere os conjuntos $\mathbb{A} = \{a \in \mathbb{N} \mid m + (p + a) = (m + p) + a\}$, $\mathbb{B} = \{b \in \mathbb{N} \mid m + b = b + m\}$ e $\mathbb{D} = \{d \in \mathbb{N} \mid n + d = m + d \Rightarrow n = m\}$, com m, n, p fixos quaisquer.

Para verificar a propriedade **AN1**, mostraremos que $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$ contém todos os naturais. O número 1 pertence a $\mathbb{A}$, pois,

$$\begin{aligned} m + (p + 1) &= m + s(p) \\ &= s(m + p) \\ &= (m + p) + 1 \end{aligned}$$

Seja então $a \in \mathbb{A}$, utilizando a definição 1, vejamos que

$$\begin{aligned} m + (p + s(a)) &= m + s(p + a) \\ &= s(m + (p + a)) \\ &\overset{a \in \mathbb{A}}{=} s((m + p) + a) \\ &= (m + p) + s(a) \end{aligned}$$

ou seja, se $a \in \mathbb{A}$ então $s(a) \in \mathbb{A}$. Como m e p foram fixados arbitrariamente temos, pelo axioma de indução, que $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

Antes de demonstrar as demais propriedades vejamos que dado $m \in \mathbb{N}$ qualquer, então $m + 1 = 1 + m$.

Seja $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N} \mid m + 1 = 1 + m\}$ um subconjunto do conjunto dos números naturais. Verificaremos por indução que $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$ e consequentemente, segundo o axioma de indução, $\mathbb{N} = \mathbb{M}$.

Para verificar a validade da proposição para 1, tome $m = 1$, nota-se que

$$m + 1 = 1 + 1 = s(1) \text{ e } 1 + m = 1 + 1 = s(1)$$

isto é, $1 \in \mathbb{M}$.

Tomando agora m qualquer em $\mathbb{M}$. Temos

$$\begin{aligned} s(m)+1 &= (m+1)+1 \\ &\overset{m\in\mathbb{M}}{=} (1+m)+1 \\ &\overset{A1}{=} 1+(m+1) \\ &= 1+s(m) \end{aligned}$$

ou seja, $m \in \mathbb{M} \Rightarrow s(m) \in \mathbb{M}$. Como m foi tomado aleatoriamente, temos, pelo Axioma 3, que a propriedade enunciada é válida para todo o conjunto dos números naturais.

Repetindo o mesmo argumento utilizado para o número 1, podemos verificar a propriedade **AN2.** Como foi visto nos parágrafos acima, $1 \in \mathbb{B}$. Escolhendo-se um $b \in \mathbb{B}$ qualquer, utilizando também a propriedade **AN1**, temos

$$\begin{aligned} m+s(b) &= m+(b+1) \\ &\overset{1\in\mathbb{B}}{=} m+(1+b) \\ &\overset{A1}{=} (m+1)+b \\ &\overset{b\in\mathbb{B}}{=} b+(m+1) \\ &\overset{1\in\mathbb{B}}{=} b+(1+m) \\ &\overset{A1}{=} (b+1)+m \\ &= s(b)+m \end{aligned}$$

como a propriedade **AN2** é válida para 1 e se vale para $b \in B$ qualquer também vale para $s(b)$ pelo axioma de indução temos que $\mathbb{B} = \mathbb{N}$.

Seguindo o argumento utilizado para demonstrar as propriedades anteriores consideraremos o conjunto $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}$ e verificaremos por indução que $\mathbb{N} = \mathbb{D}$. $1 \in \mathbb{D}$, porque

$n+1 = s(n)$ e $m+1 = s(m)$. Como s é por definição injetiva se $s(n) = s(m)$ temos obrigatoriamente $n = m$.

Dado, $d \in \mathbb{D}$ e m, n naturais fixos quaisquer temos que

$$n + s(d) = m + s(d) \Rightarrow s(n + d) = s(m + d)$$

novamente da injetividade de $n + d = m + d$, como $d \in \mathbb{D}$, $n = m$. Ou seja, $n + s(d) = m + s(d) \Rightarrow n = m$. Portanto pelo axioma de indução $\mathbb{D} = \mathbb{N}$. □

As propriedades demonstradas acima nos garantem que, no conjunto dos números naturais:

a) A ordem das parcelas em uma adição não altera o valor da soma.

b) Ao somar mais de dois números naturais as diferentes associações dos elementos tomados dois a dois não altera o valor da soma.

c) Se ao adicionar um número $x \in \mathbb{N}$ a outros dois números separadamente e obtivermos um mesmo valor para cada uma das somas, então tais números são iguais.

Vejamos alguns exemplos das aplicações das propriedades, AN1, AN2 e AN3.

1. $10 = 3 + 7 = 3 + (2 + 5) \overset{AN1}{=} (3 + 2) + 5 = 5 + 5 = 10$, esta propriedade nos dá a possibilidade de escrever de várias formas a mesma soma.

2. $10 = 3 + 7 \overset{AN2}{=} 7 + 3 = 10$, a ordem das parcelas não altera a soma.

3. se $a + 3 = b + 3 \Rightarrow a = b$, ou ainda se $x + 3 = 10 \Rightarrow x + 3 = 7 + 3 \Rightarrow x = 7$.

2.3 Multiplicação no Conjunto dos Números Naturais

A multiplicação no conjunto dos naturais pode ser definida a partir da definição de soma apresentada na seção 2.1.

Os números naturais diferentes de 1 podem ser escritos como $s(n)$ para um único natural n (já que s é injetiva), definiremos então a multiplicação de m por $p = s(n)$, representado por $m \cdot p$ ou mp, da seguinte forma:

$m \cdot 1 = m$

$m \cdot 2 = m \cdot s(1) = m \cdot (1+1) = \overbrace{m}^{uma\,parcela} + m$

$m \cdot 3 = m \cdot s^2(1) = m \cdot s(2) = m \cdot (2+1) = m \cdot (1+1+1) = \overbrace{m+m}^{duas\,parcelas} + m$

$m \cdot 4 = m \cdot s^3(1) = m \cdot s(3) = m \cdot (3+1) = m \cdot (1+1+1+1) = \overbrace{m+m+m}^{três\,parcelas} + m,$

assim por diante, obtendo

$m \cdot p = m \cdot s(n) = m \cdot (n+1) = \overbrace{m+m+m+\ldots+m}^{n\,parcelas} + m = m \cdot n + m$

Note que, definida desta forma, a multiplicação possui propriedade distributiva em relação a adição. Em resumo temos a definição a seguir.

Definição 3. Definiremos a **multiplicação em** $\mathbb{N}$, da forma

1. $m \cdot 1 = m$

2. $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$

Vejamos alguns exemplos de multiplicações em $\mathbb{N}$:

a) $5 \cdot 1 = 5$

b) $3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3$

De acordo com a **definição 3** a multiplicação de dois números naturais está bem definida, isto é, a multiplicação de dois números naturais ainda é um único número natural. Basta observar que dado m natural qualquer, $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$ e para um n natural qualquer tal que $m \cdot n \in \mathbb{N}$, temos que $m \cdot s(n) = m(n+1) = m \cdot n + m$. Como a primeira parcela desta última igualdade pertence aos naturais, da seção 1 e do axioma de indução, a soma de dois naturais ainda é um natural, podemos concluir que $m \cdot s(n)$ é natural, como m e n são quaisquer, o produto de dois números naturais também é um número natural. A unicidade é consequência direta do argumento utilizado para elaboração da definição de multiplicação em $\mathbb{N}$.

Assim como a adição em $\mathbb{N}$, a multiplicação também é caracterizada por algumas propriedades descritas e demonstradas na seção a seguir.

2.4 Propriedades da Multiplicação nos Naturais

A partir desta seção omitiremos o sinal de multiplicação entre dois números, assim $a \cdot b = ab$, por exemplo. As exceções serão destacadas. A seguinte proposição descreve as principais propriedades da multiplicação no conjunto dos números naturais.

Proposição 4. *Dados m, n, $p \in \mathbb{N}$ quaisquer, são verdadeiras as seguintes propriedades:*

M1 *Associatividade:* $m\,(np) = (mn)\,p$.

M2 *Comutatividade*: $mp = pm$.

M3 *Lei do Corte:* $mp = np \Rightarrow m = n$

M4 *Distributividade:*$m\,(n+p) = mn + mp$

Demonstração.

M1 Assim como foi feito para as propriedades de adição, as demonstrações para as propriedades da multiplicação serão feitas por indução. Para verificar M1, considere o conjunto $\mathbb{M}_1 = \{p \in \mathbb{N} \mid m\,(np) = (mn)\,p\}$ para m, $n \in \mathbb{N}$ fixados arbitrariamente. $1 \in \mathbb{M}_1$, pois $m\,(n1) = mn$ e $(mn)\,1 = mn$. Considere um p qualquer em $\mathbb{M}_1$, temos que

$$m\,(n \cdot s\,(p)) = m\,(n\,(p+1)) = m\,(np+n) = m\,(np)+mn = (mn)\,p+mn = (mn)\,(p+1) = (mn)\,s\,(p)$$

Nas igualdades acima foram utilizados o item 2 da definição 3 e o fato de $p \in \mathbb{M}_1$. Como m e n foram tomados arbitrariamente temos, segundo o Axioma 3 (página 20) que $\mathbb{M}_1 = \mathbb{N}$.

M2 Considere agora o conjunto $\mathbb{M}_2 = \{p \in \mathbb{N} \mid mp = pm\}$, provaremos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}_2$ e consequentemente $\mathbb{N} = \mathbb{M}_2$. Claramente $1 \in \mathbb{M}_2$, porque $m1 = m$, por definição. Para algum $x \in \mathbb{N}$ temos que $m = s\,(x)$. Sabendo disto vejamos que $1m = \overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{x\,parcelas}+1 = s^x\,(1) = s\,(x) = m$. Dado $p \in \mathbb{M}_2$ qualquer e algum m natural, temos

$$s\,(p)\,m = (p+1)\,m = \overbrace{(p+1)+(p+1)+\cdots+(p+1)}^{m\,parcelas}$$

Das propriedades associatividade e comutatividade da adição podemos organizar a expressão da forma

$$s(p)\cdot m = \overbrace{p+p+\cdots+p}^{m\,parcelas} + \overbrace{1+1+\cdots+1}^{m\,parcelas}$$

Utilizando a definição de multiplicação temos então que

$$s(p)\cdot m = \overbrace{p+p+\cdots+p}^{m\,parcelas} + \overbrace{1+1+\cdots+1}^{m\,parcelas} = pm + 1m$$

Como a propriedade comutativa vale para m e para 1 temos

$$s(p)\cdot m = \overbrace{p+p+\cdots+p}^{m\,parcelas} + \overbrace{1+1+\cdots+1}^{m\,parcelas} = mp + m = m\,(p+1) = m\cdot s\,(p)$$

as duas últimas igualdades são justificadas pela definição de multiplicação. Portanto, segundo o axioma de indução a propriedade **M2** é válida para todos os naturais.

M3 Seja $\mathbb{M}_3 = \{p \in \mathbb{N} \mid mp = np \Rightarrow m = n\}$ para m e n naturais fixos quaisquer, temos que se

$$m\cdot s(p) = n\cdot s(p) \Rightarrow mp + m = np + n$$

como por hipótese $mp = np$, utilizando a lei do corte para a adição (propriedade 3) temos que

$$m\cdot s(p) = n\cdot s(p) \Rightarrow mp + m = np + n \Longrightarrow m = n$$

Como m e n são dois naturais quaisquer, temos, novamente pelo princípio de indução, que $\mathbb{P} = \mathbb{N}$.

M4 Seja $\mathbb{M}_4 = \{p \in \mathbb{N} \mid m\,(n+p) = mn + mp\}$ para quaisquer m e n naturais. Para verificar que $\mathbb{M}_4 = \mathbb{N}$ utilizando o axioma de indução notemos que $1 \in \mathbb{M}_4$, pois, $m(n+1) = mn + n1 = mn + n$ por definição. Tomemos então $p \in \mathbb{M}_4$. Vejamos que

$$\begin{aligned} m(n+s(p)) &= m(n+(p+1)) \\ &= m((n+p)+1) \\ &= m(n+p)+m1 \\ &= (mn+mp)+m \\ &= mn+(mp+m) \\ &= mn+m(p+1) \\ &= mn+m\cdot s(p). \end{aligned}$$

Nas igualdades acima foram utilizados o fato de $p \in \mathbb{M}_4$, a definição de multiplicação e a associatividade da adição. Portanto, como nas demonstrações anteriores, podemos concluir que $\mathbb{M}_4 = \mathbb{N}$ $\square$

Da comutatividade temos que $m(n+p) = (n+p)m$, como $m(n+p) = mn+mp = nm+pm$, então $(n+p)m = nm+pm$. Ou seja, a propriedade distributiva é válida à esquerda e à direita.

A partir da **definição 3** é possível concluir que o produto entre dois números naturais é único, mesmo assim, as proposições 3 e 4 permitem concluir que existem várias formas para se escrever um mesmo produto. Por exemplo

$$4\cdot(7+3) = 8\cdot 5 = 5\cdot 8 = 2\cdot 20 = 4\cdot 10 = 40$$

Para verificar as igualdades, é suficiente notar que as operações em todos os membros resultam em 40 unidades.

2.5 Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Uma outra característica dos números naturais é a relação de ordem. Utilizaremos a enunciado destacado por Carvalho e Morgado (2013) a seguir para definir esta relação.

Definição 4. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, diz-se que ***m* é menor do que *n***, e escreve-se $m < n$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta definição, que tem por base a definição de adição de números naturais, nos diz que se dois números m e n obedecem a relação $m < n$ então n é obtido a partir de m somando-se p. Como foi visto na seção 2.1 isto significa que obtemos n a partir de m tomando o sucessor deste p vezes. Temos ainda desta definição que $1 < p$ para todo p natural.

A relação $m < n$ apresentada acima, possui as propriedades enunciadas na proposição a seguir. A notação $m \leq n$ significa que m é menor que ou igual a n.

Proposição 5. *Dados $m, n, p \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$, a relação $<$ possui as seguintes propriedades*

O1 *Transitividade: se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.*

O2 *Tricotomia: dados m e n naturais, somente uma das alternativas pode ocorrer*

(i) $m = n$

(ii) $m < n$

(iii) $n < m$

O3 *Monotonicidade da adição: se $m < n$, então, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se $m+p < n+p$.*

O4 *Monotonicidade da multiplicação: se $m < n$, então, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se $mp < np$.*

Demonstração. As demonstrações das propriedades da relação $<$, serão feitas utilizando as propriedades algébricas da adição e multiplicação apresentadas nas seções anteriores.

O1 Para verificar a primeira propriedade basta notar que se $m < n$ e $n < p$, então por definição temos que existem $x, y \in \mathbb{N}$tais que $m = n + x$ e $n = p + y$. Temos então que

$m = (p + y) + x \Rightarrow m = p + (y + x)$, ou seja $m < p$.

O2 Por definição não podemos ter (i) e (ii) ao mesmo tempo. O mesmo vale para (i) e (iii). Suponhamos que (ii) e (iii) sejam válidas para algum m e n naturais, existiriam então x e y naturais tais que $m = n + x$ e $n = m + y$. Substituindo o valor de n na primeira igualdade temos $m = (m + y) + x = m + (y + x)$, ou seja $m < m$ o que é absurdo, pois, (i) e (ii) não podem ocorrer simultaneamente. Substituindo o valor de m em $n = m+y$ chegaríamos a conclusão de que $n < n$, outro absurdo. Sendo assim, ocorre somente (ii) ou (iii), caso contrário somente (i).

O3 Se $m < n$ então existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + y$. Notemos então que $n + p = (m + y) + p$. Utilizando as propriedades da adição temos $n + p = (m + p) + y$ ou seja $m + p < n + p$.

O4 Se $m < n$ então $n = m+x$ para algum x natural. Temos então que $np = (m+x)p = mp + xp$ dos extremos temos que $mp < np$. $\square$

Definição 5. Diremos que um número natural ***n* é maior que outro *m*** se $m < n$. Representaremos esta relação por $n > m$.

De forma análoga a relação menor que, as propriedades da proposição 5 são válidas para a relação maior que. Se um número m for maior que ou igual a outro n representaremos esta relação por $m \geq n$.

É possível definir as operações de subtração e divisão no conjunto dos números naturais, no entanto, existem muitas restrições. Vejamos estas definições a seguir.

Definição 6. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$ definiremos a **subtração de n por m**, representado por $n - m$ (n menos m) a operação com a seguinte característica: $n - m = p$ tal que $n = m + p$ para algum p natural.

Vejamos alguns exemplos:

(a) $8 - 5 = 3$, pois, $8 = 5 + 3$

(b) $3 - 9$ não está definido nos naturais, pois, $3 < 9$.

Definição 7. Dados dois números naturais m e n tais que $n > m$, definiremos (se existir) **quociente entre n e m**, representado por $n : m$ ou $\frac{n}{m}$ o número p tal que $n = mp$.

Temos por exemplo, que $8 : 2 = 4$, pois, $8 = 2 \cdot 4$. Porém a divisão $5 : 2$ não é definida no conjunto dos números naturais, apesar de 5 ser maior que 2, pois não existe um natural p tal que $2p = 5$.

Temos a partir de agora uma forma de comparar dois ou mais números naturais não somente como diferentes ou iguais e estabelecer uma ordem única entre eles ou entre os elementos de algum de seus subconjuntos.

As operações de subtração e divisão no conjunto dos naturais possuem muitas restrições, por isso, daremos maior destaque a estas operações nos capítulos referentes ao conjunto dos números racionais e reais. Vejamos que não estão definidas as operações $5:2$, $7-8$, ou $23-23$ no conjunto dos naturais.

Capítulo 3

Conjunto dos Números Inteiros

Podemos encontrar várias referências nas quais a construção do conjunto dos números inteiros é feita a partir dos conceitos de relação de equivalência e classes de equivalência. No entanto, o foco deste trabalho não são as estruturas algébricas dos conjuntos e as relações que definem tipos especiais de conjuntos. Faremos a construção do conjunto dos números inteiros por meio de expansão do conjunto dos números naturais, definindo seus elementos, destacando as operações cabíveis a este conjunto e as propriedades aritméticas básicas de seus elementos, atribuindo significado as operações aritméticas ensinadas no ensino básico. Consideraremos todos os axiomas relativos aos números naturais como verdades para os números inteiros.

As notações, definições e propriedades enunciadas neste e no próximo capítulo estão de acordo com a descrição proposta por Sodré (2003). Vejamos então a definição de número inteiro que será adotada neste trabalho.

Definição 8. O conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$, será definido por

$$\mathbb{Z} = \{m - n \mid m,\, n \in \mathbb{N}\}$$

Se $m = n$ então definiremos $m - n = 0$.

Note que desta forma os números inteiros são construídos a partir de números naturais. Dados dois números naturais conseguimos um inteiro. A definição acima, apesar de ter uma notação simples, já está carregada com todas as definições e propriedades operativas relativas ao conjunto dos números naturais. Além disto é possível notar que o conjunto dos naturais está contido no conjunto dos inteiros.

Vejamos que $(s\,(1){-}1) = 1 \in \mathbb{Z}$. Temos ainda que se $n \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$ então $s\,(n+1) \in \mathbb{Z}$. Como vimos que a soma de dois naturais ainda é um natural, basta escrever $s\,(n+1) = (s\,(n+1)+1) - 1)$ para verificarmos, segundo o axioma de indução que todo natural é também um número inteiro.

Utilizando a notação da definição 8, é possível notar que um número natural pode ser escrito de diversas formas. De acordo com a definição 6 temos por exemplo a igualdade $(7-3) = (9-5)$, até que se indique o contrário utilizaremos a notação $(a-b)$ para representar de forma genérica todos os números naturais a' que associados aos naturais b' na forma $(a'-b')$ resultam em $(a-b)$.

Proposição 6. *Os números inteiros $a-b$ e $c-d$ são iguais se, e somente se, $a+d = b+c$.*

Demonstração. Admitamos que $a-b = c-d$, isto é, as soluções de $x+b = a$ e $y+d = c$ sejam iguais. Vejamos então que somando d aos dois membros da equação $x+b = a$ obtemos

$$x+b+d = a+d \ (*)$$

e somando b aos dois membros da equação $y+d = c$ obtemos

$$y+d+b = c+b \ (**)$$

o que não altera as soluções. Como $x = y$ devemos ter $a+d = b+c$.

Por outro lado, se considerarmos $a+d = b+c$, escrevendo $a+d = x+b+d$ e $c+b = y+d+b$ como em $(*)$ e $(**)$ percebemos que estas duas equações são idênticas, exceto pela representação da incógnita, mas $x = y$. Ora, estas igualdades só ocorrem se $x = a-b$ e $y = c-d$. $\square$

Vejamos agora uma outra proposição que facilitará a representação dos números inteiros.

Proposição 7. *Sejam m, $n \in N$.*

Se $m > n$ então $m - n$ e $(m - n) - (n - n) = (m - n) - 0$ são iguais;

Se $m < n$ então $m - n$ e $(m - m) - (n - m) = 0 - (n - m)$ são iguais.

Demonstração. Para verificar estes fatos, basta notar que, segundo a proposição 6, se $m > n$, $m - n = (m - n) - 0$ porque $m + 0 = n + (m - n)$.

Segundo a mesma proposição, se $m < n$, $m - n = 0 - (n - m)$ porque $m + (n - m) = n + 0$. □

As duas proposições anteriores possibilitam escrever os números inteiros de uma forma mais simples. Por exemplo, da proposição 6, temos que $8 - 4 = 13 - 9$, pois, $8 + 9 = 4 + 13$. Temos, então várias maneiras de representar o mesmo número. Para facilitar esta representação podemos recorrer à proposição 7. Desta forma o número $8 - 4 = (8 - 4) - 0 = 4 - 0$, pois, $8 > 4$ e o número $3 - 5 = 0 - (5 - 3) = 0 - 2$, pois, $3 < 5$. Denotaremos os números inteiros da forma $a - 0$, apenas por a e os números inteiros da forma $0 - a$, apenas por $-a$. Sendo assim nestes exemplos anteriores $8 - 4 = 4$ e $3 - 5 = -2$.

Os argumentos apresentados nas proposições 6 e 7 justificam algebricamente (obviamente existem outras justificativas) os resultados obtidos na operação de subtração entre números inteiros de sinais diferentes utilizadas no ensino básico. Para adicionar um valor a outro de sinal diferente devemos considerar o maior valor em módulo e subtrair deste o menor valor em módulo, o sinal do maior valor em módulo prevalecerá. Ainda não definimos a ordem nos números inteiros, mas, considerando a ideia utilizada no ensino básico, a soma de dois números negativos pode ser obtida por meio da adição dos módulos dos dois valores, o número encontrado será o resultado, porém, negativo.

Para formalizar estas ideias, veremos nas subseções seguintes as definições de adição e multiplicação no conjunto dos números inteiros.

3.1 A Adição no Conjunto dos Inteiros

A adição entre dois números inteiros pode ser definida da seguinte forma:

Definição 9. Dados dois números inteiros $(a-b)$ e $(c-d)$, definiremos a adição deste dois números da forma

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$$

Definição 10. Assim como nos números naturais, definiremos $m-m=0$. Desta forma 0 é o elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}$, ou seja $m+0=m$.

Proposição 8. *Dados m, n, $p \in \mathbb{Z}$ quaisquer, são verdadeiras as seguintes propriedades:*

AZ1 *Associatividade:* $m+(n+p)=(m+n)+p$.

AZ2 *Comutatividade:* $m+n=n+m$.

AZ3 *Lei do Corte:* $m+p=n+p \Rightarrow m=n$.

Demonstração. Nas demonstrações das propriedades acima teremos $m=a-b$, $n=c-d$, e $p=e-f$ com a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{N}$.

AZ1 Utilizando as definições e propriedades demonstradas nas seções anteriores temos

$$\begin{aligned}
m+(n+p) &= (a-b)+[(c-d)+(e-f)] \\
&= (a-b)+[(c+e)-(d+f)] \\
&= [a+(c+e)]-[b+(d+f)] \\
&= [(a+c)+e]-[(b+d)+f] \\
&= [(a+c)-(b+d)]+(e-f) \\
&= [(a-b)+(c-d)]+(e-f)] \\
&= (m+n)+p
\end{aligned}$$

AZ2 Utilizando a propriedade da comutatividade para números naturais repetidas vezes é possível obter as igualdades

$$\begin{aligned} m+n &= (a-b)+(c-d) \\ &= (a+c)-(b+d) \\ &= (c+a)-(d+b) \\ &= (c-d)+(a-b) \\ &= n+m \end{aligned}$$

AZ3 A partir da igualdade $m+p=n+p$ temos

$$\begin{aligned} m+p &= n+p \\ (a-b)+(e-f) &= (c-d)+(e-f) \\ (a+e)-(b+f) &= (c+e)-(d+f) \end{aligned}$$

Como os termos entre parênteses são números naturais podemos utilizar a lei do corte para a última igualdade obtendo

$$\begin{aligned} (a+e)+(d+f) &= (c+e)+(b+f) \\ a+d &= c+b \\ a-b &= c-d \\ m &= n \end{aligned}$$

Ou seja, $m+p=n+p \Rightarrow m=n$. $\square$

A definição e as propriedades sobre a adição de números inteiros possibilitam dar significado a uma variedade maior de problemas e situações matemáticas apresentadas na educação básica.

A partir das definições a seguir pode-se diferenciar números positivos e negativos. É fundamental que o professor tenha total compreensão das definições operatórias dos números inteiros e das propriedades consequentes para justificar para si e para os alunos de forma adequada os resultados obtidos em diversas situações. Um exemplo simples e inevitável é justificar que a soma de dois números inteiros pode ser um número negativo e a subtração entre dois números negativos podem ser um número positivo.

3.2 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

A relação de ordem no conjunto dos números inteiros é semelhante a mesma relação considerando o conjunto dos números naturais. Para dizer qual número inteiro é maior utilizaremos a seguinte definição:

Definição 11. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Diremos que $m < n$ se, e somente se $(n-m) \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}$".

Por meio desta e das outras definições apresentadas nesta seção podemos utilizar a representação dos números inteiros apresentadas em vários livros dos ensino básico. Pode-se dizer que $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, escrevendo seus elementos em ordem crescente.

A definição 11 permite estabelecer as propriedades apresentadas na proposição a seguir.

Proposição 9. *Para todo $m, n, p, r \in \mathbb{Z}$ relação de ordem $<$ em $\mathbb{Z}$ possui as seguintes propriedades:*

OZ1 Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

OZ2 Se $m < n$ e $n < m$ então $m = n$.

OZ3 Se $m < n$ então $m + p < n + p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

OZ4 Se $m < n$ e $p > 0$ então $mp < np$.

OZ5 Se $m < n$ e $p < r$ então $m + p < n + r$.

OZ6 Se $0 < m < n$ e $0 < p < r$ então $mp < nr$.

Estas propriedades resumem, para o conjunto dos números inteiros, como é possível comparar dois números inteiros, destacando as operações que podem ser feitas sem alterar as desigualdades.

3.3 Multiplicação e Divisão em $\mathbb{Z}$

As duas definições a seguir caracterizam a operação de multiplicação e os quocientes existentes em $\mathbb{Z}$.

Definição 12. A multiplicação no conjunto dos números naturais é definida pela relação

$$(m-n)(p-q) = (mp+nq) - (np+mq).$$

Definição 13. A notação $\frac{m}{n}$ indica o quociente de m por n. Escrito desta forma, temos a fração $\frac{m}{n}$ de numerador m e denominador n.

Definição 14. Se a equação $nx = m$ (x é a incógnita) tem solução em $\mathbb{Z}$, a mesma será indicada pelo quociente $\frac{m}{n} = p \in \mathbb{Z}$.

Temos então, por exemplo, que

$$8 \cdot (-2) = (8-0)(0-2) = (8 \cdot 0 + 0 \cdot 2) - (0 \cdot 0 + 8 \cdot 2) = 0 - 16 = -16$$

e $\frac{10}{2} = 5$, pois, $2 \cdot 5 = 10$.

A partir destas definições é possível construir regras para os sinais das operações entre números inteiros.

Sobre a divisão no conjunto dos números inteiros podemos destacar as propriedades abaixo.

Proposição 10. *Se* $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, *então*

DZ1 O denominador da fração $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ nunca é zero.

DZ2 As frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{km}{kn}$ são soluções da mesma equação $nx = m$.

DZ3 $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{(mq+np)}{nq}$

DZ4 $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$

A definição de quociente no conjunto dos números inteiros possibilita perceber que este conjunto é insuficiente para contemplar a amplitude das situações matemáticas vivenciadas pelos alunos ainda na educação básica. Vejamos que a equação $3x = 2$ não possui solução inteira, por exemplo. Utilizando as definições e propriedades apresentadas, neste e nos capítulos anteriores, podemos ampliar o conceitos e propriedades aritméticas dos conjuntos numéricos citados a fim de construir o conjunto dos números racionais.

Capítulo 4

Números Racionais e Números Reais

Neste capítulo serão abordados os conjuntos dos números racionais e dos números reais. Assim como foi apresentado nos capítulos anteriores, cada um dos conjuntos será definido, destacando suas principais propriedades aritméticas. No entanto, as demonstrações serão omitidas a fim de tornar o texto mais conciso tendo em vista que os principais objetos de estudos deste trabalho são os números naturais e os número inteiros.

Assim como o conjunto dos números naturais se mostrou insuficiente para representar as diversas situações práticas ou puramente matemáticas, os números inteiros também necessitam de um complemento que torne possível indicar partes de uma unidade. As definições e propriedades a seguir caracterizam os conjunto dos números racionais, destacando aspectos aritméticos fundamentais deste conjunto, essenciais ao estudo de matemática no ensino básico.

4.1 Números Racionais

O conjunto dos números racionais pode ser definido conforme a definição abaixo.

Definição 15. O conjunto dos números racionais denotado por $\mathbb{Q}$ é constituído de todas as frações $\frac{m}{n}$ tais que m, $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Ou seja

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{ \frac{m}{n} \mid m,\, n \in \mathbb{Z}\, e\, n \neq 0 \right\}$$

As frações $\frac{3}{2}$, $-\frac{7}{2}$ e 12 são exemplos de números racionais. No caso dos números inteiros o denominador 1 é omitido. Temos que $12 = \frac{12}{1}$, por exemplo.

A definição acima é a representação matemática da afirmação: *os números racionais são os números que podem ser representados na forma de fação com numerador e denominador inteiros, com o denominador diferente de zero.*

Definição 16. A adição entre números racionais $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ é dada por

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{(mq + np)}{nq}$$

Exemplo. $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} = \left(\frac{4\cdot 2 + 3\cdot 5}{3\cdot 2}\right) = \frac{23}{6}$.

As definições 15 e 16 tornam possível relacionar os números racionais com partições de um todo, por exemplo, a fração $\frac{1}{3}$ corresponde a uma parte de um inteiro que foi dividido em 3 partes iguais, assim como a fração $\frac{2}{5}$ representa duas partes de um inteiro que foi dividido em 5 partes iguais.

Já a fração $\frac{12}{5}$ representa a soma de 12 partes da divisão de um inteiro em 5. Neste caso a fração representa mais que uma unidade inteira, temos a soma

$$\frac{12}{5} = \frac{2 + 10}{5} = \frac{2}{5} + \frac{10}{5} = \frac{2}{5} + 2$$

Ou seja a fração $\frac{12}{5}$ é equivalente a soma de duas unidades e duas partes desta unidade que foi dividida em cinco partes iguais. Esta interpretação motiva a utilização de materiais manipuláveis ou *software* para manuseio de elementos que possam facilitar a compreensão do significado e das operações com frações.

Definição 17. Definiremos a multiplicação entre dois números racionais $\frac{m}{n}$e $\frac{p}{q}$ por

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

Exemplo. $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{6}$.

Definição 18. A divisão no conjunto dos números racionais é definida de acordo com a relação abaixo

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$$

Na igualdade anterior o termo $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$ será denominado inverso de $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Exemplo. $\frac{4}{3} : \frac{5}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$.

De acordo com a definição 16 a operação de adição no conjunto dos números racionais possui as seguintes propriedades.

Proposição 11. *Em relação a adição no conjunto dos números racionais, pode-se destacar as seguintes propriedades*

AQ1 (Associatividade) Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{Q}$ tem-se que $(m+n)+p = m+(n+p)$

AQ2 (Comutatividade) Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{Q}$ tem-se que $m + n = n + m$

AQ3 (Existência do elemento neutro) Para todo m, $n \in \mathbb{Q}$ tem-se que $m + 0 = m$.

Além disto temos que $0 + m = m$ para todo m racional. Como no conjunto dos números inteiros temos $m + (-m) = 0$

Proposição 12. *Sobre a multiplicação em $\mathbb{Q}$, destacam-se as seguintes propriedades*

MQ1 (Associatividade) Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{Q}$ tem-se que $m(np) = (mn)p$

MQ2 (Comutatividade) Para quaisquer m, $n \in \mathbb{Q}$ tem-se que $mn = nm$

MQ3 (Elemento neutro) Para todo $m \in \mathbb{Q}$, com $m \neq 0$ tem-se que $m \cdot m^{-1} = 1$

MQ4 (Distributividade) Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{Q}$ tem-se $m(b + c) = mb + mc$

A seguir a definição da relação de ordem no conjunto dos números racionais.

Definição 19. Dados dois números racionais m e n diremos que $m < n$ se existir um número $p \in \mathbb{Q}$ tal que $n = m + p$.

A relação da definição anterior possui as mesmas propriedades enunciadas na **proposição 9** para os números racionais.

4.2 Conjunto dos Números Reais

O estudo cada vez mais profundo sobre funções e outras relações entre os elementos dos conjuntos numéricos tornou necessária a caracterização dos números reais de forma que a teoria construída fosse necessária e suficiente para a fundamentação de estudos sobre conjuntos e números reais.

Existem várias formas de se definir um número real e construir a teoria a respeito dos conjuntos formados por estes elementos. Adotaremos a definição proposta por Julius Wihelm Richard Dedekind (1831 - 1916). Tal definição de número real é construída a partir das propriedades dos números racionais. Por meio da definição de cortes pode-se definir as operações usuais entre números reais e as propriedades básicas deste conjunto e de seus subconjuntos.

A seguir são apresentadas algumas definições relativas aos números reais, assim como propriedades relacionadas a adição, multiplicação e ordem destes elementos. Uma descrição completa do conjunto dos números reais, incluindo as demonstrações aqui omitidas, pode ser encontrada em MACHADO (2014).

Definição 20. Um corte é um conjunto α de números racionais tal que

1. $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

2. Dado $q \in \mathbb{Q}$, se $p \in \alpha$ e $q < p$ então $q \in \alpha$.

3. Se $p \in \alpha$ então $p < r$, para algum $r \in \alpha$.

O item 1 da definição anterior afirma que um corte α possui pelo menos um elemento e α não contém todos os números racionais. Do item 2 temos que um corte definido por um número q racional qualquer contém todos os números menores que q. Já do terceiro item podemos concluir que um corte não possui valor máximo.

De acordo com a **definição 20** temos que todo número racional q determina um corte α formado por todos os números racionais menores do que q.

Existem cortes que não estão associados a números racionais, por exemplo, sejam

$\mathbb{Q}_+ = \{a \in \mathbb{Q} \, | a \geq 0\}$ e $\mathbb{Q}_- = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0\}$. O conjunto $\alpha = \mathbb{Q}_- \cup \{a \in \mathbb{Q}_+ \mid a \cdot a < 2\}$ é um corte[1]. Neste caso diremos que α é um corte irracional.

Definição 21. O conjunto dos número reais, $\mathbb{R}$, é formado por todos os cortes racionais ou irracionais.

Segundo a definição anterior podemos considerar que um corte é um número real. Vejamos algumas definições importantes ao estudo dos números reais.

Definição 22. Sejam α, β dois cortes . Dizemos que α é menor do que β e escrevemos $\alpha < \beta$ se existe um racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$.

Definição 23. A todo corte α associamos um corte $|\alpha|$ chamado de valor absoluto de α (ou módulo de α) definido por

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ se } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \text{ se } \alpha \ < 0 \end{cases}$$

A soma e a multiplicação no conjunto dos números reais obedecem as definições a seguir.

Definição 24. Sejam α, β dois cortes a adição entre α e β é definida por

$$\gamma = \alpha + \beta = \{a + b \mid a \in \alpha \, e \, b \in \beta\}$$

Da forma como foi definida a adição em $\mathbb{R}$ obedece as mesmas regras enunciadas na **proposição 8** e possui $0 = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0\}$ (zero) como elemento neutro .

Proposição 13. *Dado α um corte, existe um único corte β tal que $\alpha + \beta = 0$. Como nos casos dos inteiros e racionais, tal β denota-se por $-\alpha$ e se chama simétrico (ou oposto) de α.*

A multiplicação entre números reais é estabelecida segundo a definição a seguir.

[1] Ver MASSAD (2014)

Definição 25. Dados dois números reais α e β o produto entre estes dois números, denotado por $\alpha \cdot \beta$ é dado por

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} |\alpha| \cdot |\beta| & se\, \alpha \geq 0\, e\, \beta \geq 0\, ou\, \alpha \leq 0\, e\, \beta \leq 0 \\ -\left(|\alpha| \cdot |\beta|\right) & se\, \alpha > 0\, e\, \beta \leq 0\, ou\, \alpha \leq 0\, e\, \beta > 0 \end{cases}$$

Como consequência destas definições temos que se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha = -(-\alpha)$.

Dado um número real α existe um número α^{-1} tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

A multiplicação entre números reais também obedece as propriedades enunciadas na **proposição 12**.

Definição 26. Dados dois números reais $\alpha \neq 0$ e β a divisão de β por α é dada por

$$\frac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \alpha^{-1}$$

A relação de ordem no conjunto dos Reais pode ser definida como na **definição 19** e possuem as mesmas propriedades enunciadas na **proposição 9** para os números reais.

Capítulo 5

Aritmética em Aplicativos

O termo *aplicativo* será utilizado para designar *software* de aplicação, ou seja, programas de computador que permitem realização de várias tarefas como, por exemplo, edição de texto e imagem, assistir vídeos, jogar e fazer cálculos, muitas vezes sem necessidade de conhecimentos avançados em informática.

É evidente a crescente inserção de ferramentas tecnológicas no cotidiano dos alunos, principalmente por meio da utilização de dispositivos móveis. Dados apresentados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2013)[1], ainda em 2011, indicavam que $69,1\%$ dos brasileiros com dez anos ou mais tinham telefone móvel para uso pessoal. De acordo com a Epresa Brasil de Comunicação (EBC) o celular era um bem pessoal para 93,4% dos estudantes da rede privada de ensino e para 66,8% dos da rede pública, que representavam 74,3% dos estudantes brasileiros em 2014. (VILELA, 2016)

Segundo a Fundação Getúlio Vargas de São Paulo (FGV-SP), o Brasil chegou a 168 milhões de *smartphones* em 2016 e a previsão é de 236 milhões para os próximos dois anos. Para Fernando Meirelles, professor da FGV-SP responsável pelo estudo, os usuários jovens tem sido os principais motivadores desse mercado. (FGV, 2016). No entanto, a utilização destes recursos ainda é limitada a alguns poucos recursos disponíveis nos aparelhos. O mesmo ocorre no uso de computadores domésticos. Grande parte dos estudantes utiliza seu aparelho somente para acessar redes sociais, jogar ou assistir vídeos, é necessário que

[1]Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios. Acesso à Internet e Posse de Telefone Móvel para Uso Pessoal.Disponível em: http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv63999.pdf

estes recursos sejam utilizados a favor da aprendizagem no ambiente escolar.

Apesar da facilidade de acesso a tecnologia por partes dos alunos ainda existem alguns fatores que dificultam a implementação de recursos computacionais nas aulas de matemática. O primeiro que pode-se destacar é a insistência por parte de muitos professores em acreditar que métodos de ensino utilizados há anos ainda podem ser eficazes com os alunos da atualidade.

É possível notar que

> os alunos de hoje não são mais as pessoas para as quais o nosso sistema educacional foi projetado para ensinar; alguns professores supõem que os alunos são os mesmos de sempre, e que os mesmos métodos que funcionaram para os professores quando estes eram alunos irão funcionar para os seus alunos hoje. Muitos professores mantêm o mesmo método de ensino durante toda a carreira, e sustentam-se em discursos antiquados e inadequados ao contexto dos alunos de hoje. (ALDA, 2012, p. 3)

Os estudantes de hoje estão imersos em ambientes com uma quantidade imensa de informações de fácil acesso (mesmo que não saibam selecioná-las ou processá-las de forma adequada), com ferramentas tecnológicas que utilizam com naturalidade. As formas de comunicação são diferentes do que há uma década por exemplo. Ignorar todos estes fatos e tentar somente métodos antigos para o ensino de matemática é se opor a interação com os alunos, a receptividade, ao ensino-aprendizagem.

É importante ressaltar que a utilização de aplicativos nas aulas de matemática devem proporcionar aos alunos situações nas quais a Matemática é apresentada de forma dinâmica, interativa e que, indispensavelmente, possibilite a significação dos conceitos e propriedades trabalhados além da identificação dos erros e acertos cometidos.

Nesta perspectiva

> Pedagogicamente falando, a utilização de ambientes informatizados, empregando-se softwares educativos avaliados previamente pelo professor, acompanhados de uma didática construtiva e evolutiva, pode ser uma solução

> interessante para os diversos problemas de aprendizagem em diferentes níveis. (MAGEDANZ, 2004. p.6)

É crescente a preocupação da utilização de recursos computacionais como ferramenta educacional, autores como PERSICANO (2013), relatam sobre a importância do uso de software, neste caso Geogebra, no ensino aprendizagem apresentando metodologias de trabalho com o aplicativo e seus aspectos potencializadores nas aulas de Matemática ressaltando a importância da capacitação dos professores em relação aos recursos computacionais.

No intuito de "produzir um material que possa servir de referência ara professores que almejam incrementar suas aulas presenciais com recursos computacionais", JÚNIOR (2013) também destaca os recursos computacionais como ferramentas de apoio ao ensino.

Em SOUZA (2014) são abordados apenas softwares livres de matemática enfatizando que "que atividades mediadas por software devem ser fundamentada com argumentos matemáticos.Além disso, o professor deve dominar e conhecer todas as ferramentas e limitações do software matemático, antes de desenvolver qualquer atividade em sala de aula."

Obviamente não se deve abandonar as formas de ensino mais tradicionais e adotar somente a utilização de recursos tecnológicos, pois, isto pode não ser eficaz para o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno. É necessário mesclar os dois métodos, após analisar as propostas educacionais caso a caso.

Pode-se destacar, também, como fatores negativos em relação a utilização de recursos digitais em sala de aula a limitação ao acesso a laboratórios de informática, a dificuldade na utilização de aplicativos pelos professores, encontrar programas que realmente se adéquam a situação didática proposta, a limitação dos aplicativos em português e o fato de muitos aplicativos serem pagos. Todos estes aspectos tem influência direta na utilização de recursos computacionais em sala de aula. Porém, destes fatores, a ênfase dada neste texto está relacionada a adequação do recurso computacional às tarefas em sala e suas principais características referentes as operações, principalmente, com números inteiros.

No item a seguir serão apresentados uma breve descrição de alguns recursos computacionais e aplicativos para dispositivos móveis destacando suas potencialidades para o ensino de aritmética e os aspectos limitadores para o uso nas aulas de matemática.

Além da possibilidade de dar significados aos conceitos aritméticos descritos nos capítulos anteriores a seleção dos aplicativos descritos a seguir também baseou-se em outros dois fatores. O primeiro, motivacional como ressalta Pacheco e Barros (2013, p. 8)

> Os softwares matemáticos surgem como alternativa que amplia os conceitos teóricos dos conteúdos em sala de aula e de recurso dinâmico que pode atrair o interesse e a intuição dos alunos e incentivar o estudo dos conceitos de forma inovadora.

O segundo é a importância da correção do erro, algo fundamental em um aplicativo

> É importante salientar que os softwares educativos precisam fornecer para o aprendiz um processo em que corrija o erro, pois, a partir da correção do mesmo, o aluno aprende um determinado conceito envolvendo situações problemas ou sobre estratégias de soluções problemas. (SANTOS, 2012, p. 58)

5.1 Aplicativos para o ensino de aritmética

Os aplicativos listados aqui servem de exemplos de recursos que podem ser utilizados para dar sentido às operações matemáticas, ou auxiliar em trabalhos deste tipo em sala de aula. Atualmente existem vários aplicativos matemáticos, estes destacados aqui servem para mostrar as principais características comuns a maioria deles indicando as principais definições e propriedades aritméticas enunciadas nos capítulos iniciais.

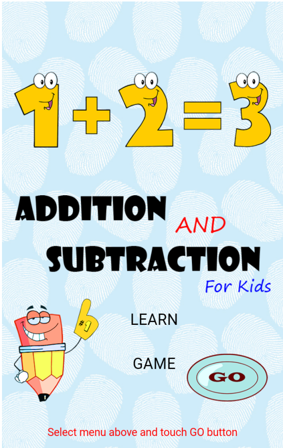
Como um dos objetivos deste trabalho é fornecer recursos de fácil acesso para o trabalho em sala de aula a escolha dos aplicativos listados a seguir baseou-se em duas etapas. A primeira foi busca aleatória por aplicativos relacionados à matemática na *Internet.* A segunda etapa considerou as propriedades e definições matemáticas apresentadas nos capítulos iniciais relativos à construção dos conjuntos numéricos. Os aplicativos selecionados deveriam ter algumas das características:

- Funcionar em dispositivos móveis mais baratos.
- Possibilitar a relação entre o aplicativo e o uso de materiais concretos.
- Possibilitar a construção de situações problema envolvendo o aplicativo e a significação matemática.
- Evidenciar propriedades operatórias e seus significados.
- Mostrar erros e acertos.
- Adição
- Subtração
- Multiplicação
- Divisão
- Contém operações com frações
- Equações
- Operações com números negativos
- Dicas para correção dos erros
- Instruções nas soluções dos problemas
- Em português
- Métodos alternativos para operações apresentadas

Considerando estes fatores, são destacados alguns aplicativos a seguir.

5.1.1 Addition and subtraction for kids

Figura 1: Addition and subtraction for kids

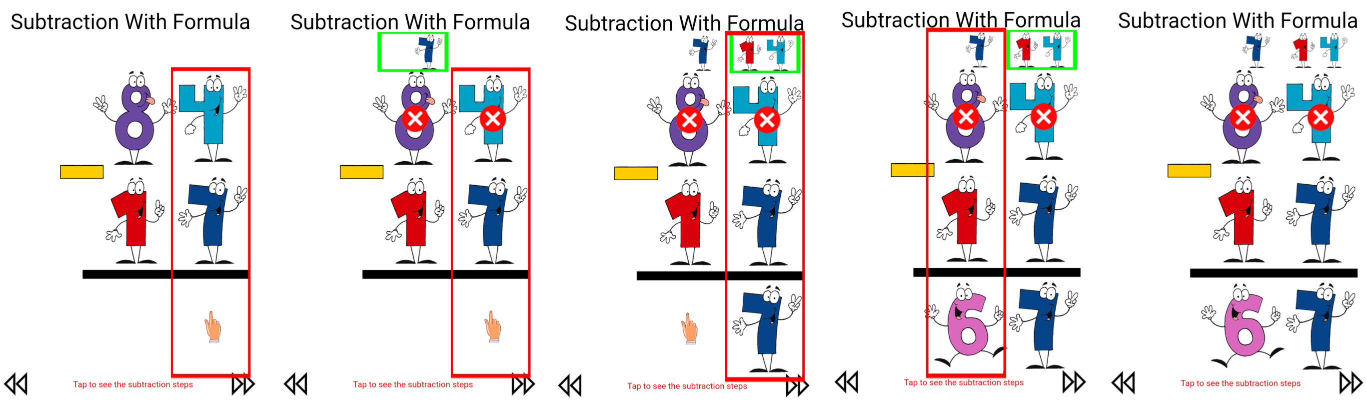


Fonte: captura de tela do aplicativo Addition and subtraction for kids.

Este é um aplicativo para iniciantes[2] que reforça um algoritmo para a adição e subtração com números naturais, destacando o recurso à classe de maior ordem. Existem dois modos no aplicativo, *aprender* e *jogar*. Para cada modo existem quatro categorias: *adição e subtração com fórmula* e *adição e subtração com figuras.*

No modo aprender para, as operações com fórmulas por exemplo, são apresentadas operações com números naturais destacando passo a passo o processo de subtração e recurso nas classes superiores, como no caso a seguir.

Figura 2: Etapas da subtração

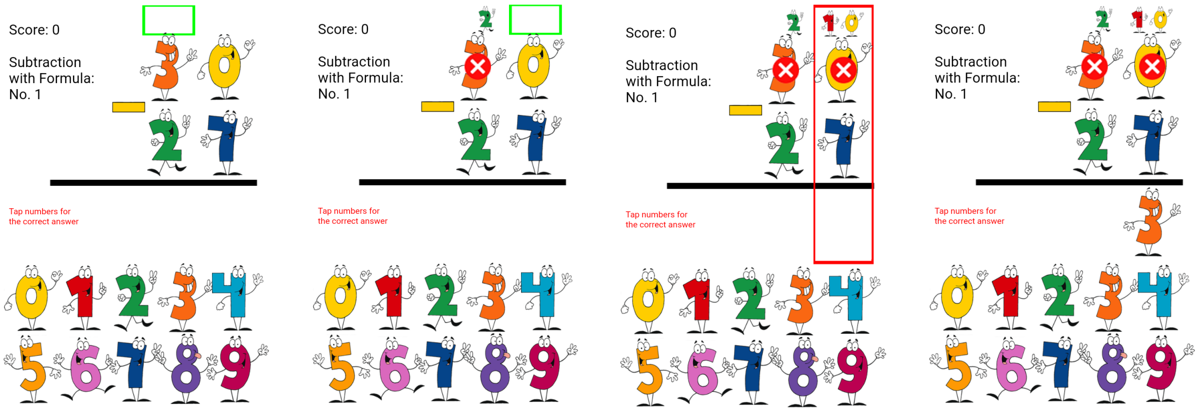


Fonte: captura de tela do aplicativo Addition and subtraction for kids.

[2]Addition and subtraction for kids recebe o nome em Português: Adição e Subtração Crianças. Aplicativo para *dispositivo móvel* com sistema operacional Android. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.munmunstudio.additionandsubtractionforkids&hl=pt_BR

No modo *jogar,* o usuário deve repetir os passos apresentados no modo aprender para realizar a subtração ou adição corretamente escolhendo o valor que completa o retângulo em destaque.

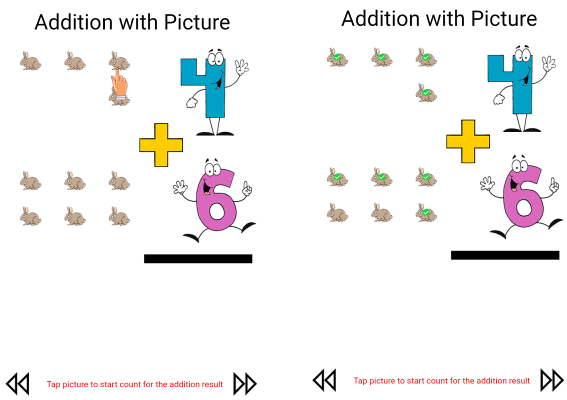
Figura 3: Subtração no modo *jogar*



Fonte: captura de tela do aplicativo Addition and subtraction for kids.

Há ainda os modos de adição e subtração com figuras. Nestes casos o usuário deve simplesmente contar as unidades relativas a operação indicada também por uma fórmula matemática e preencher o campo de resposta com um dos valores disponíveis.

Figura 4: Subtração no modo *jogar*

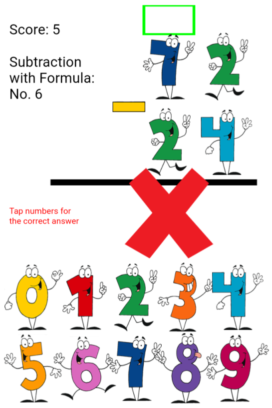


Fonte: captura de tela do aplicativo Addition and subtraction for kids.

Nota-se aí que a interpretação das operações está relacionada a **proposição 2** na qual a adição está relacionada a contagem, pois, para determinar o total de elementos é necessário tomar repetidas vezes o sucessor de um número inicial. Apesar de estar em inglês é bem intuitivo e de fácil utilização para os alunos da faixa etária recomendada.

Não existem dicas ou correções a respeito dos erros cometidos pelo usuário, apenas um alerta de que sua resposta está errada aparece na tela.

Figura 5: Resposta incorreta



Fonte: captura de tela do aplicativo Addition and subtraction for kids.

Mesmo destacando os passos para utilização do algoritmo de adição e subtração entre números inteiros, este aplicativo possibilita somente a compreensão dos sentidos de acrescentar ou retirar, não realiza operações com números inteiros negativos, não explora relações de ordem e baseia-se na memorização de somas e subtrações de números com um algarismo. A utilização deste aplicativo limita-se associação de um número a quantidades de objetos.

Em relação a significação dos conceitos e propriedades matemáticas apresentados nos capítulos anteriores, este aplicativo é limitado, pois, não destaca a **proposição 3**, por exemplo, ou seja, não é possível relacionar as várias fomas de somar ou subtrair dois números inteiros.

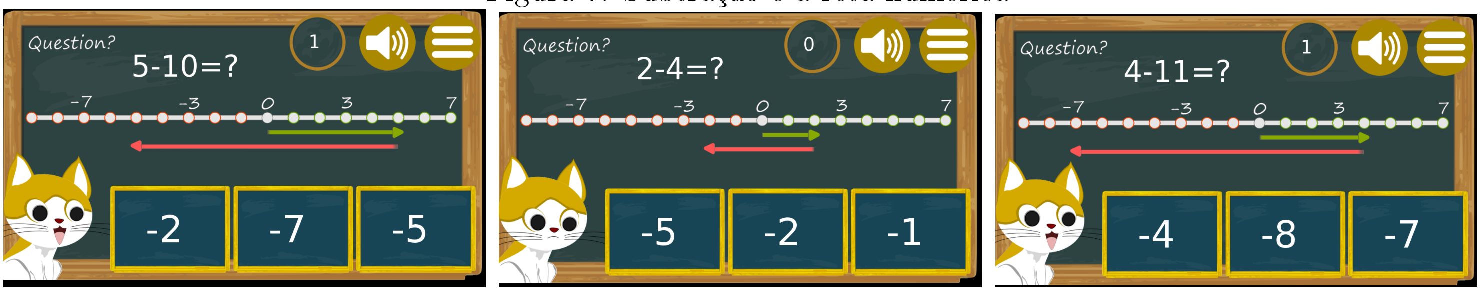
5.1.2 The Number Adventures of Oscar

Figura 6: The Number Adventures of Oscar

Fonte: captura de tela do aplicativo *The number adventures of Oscar*

Disponível para *download* com o nome *Os números de Oscar*[3], o aplicativo *The number adventures of Oscar*, também em inglês, oferece recursos geométricos para orientação nas operações com números inteiros. A subtração é ilustrada com a representação na reta numérica, o deslocamento a partir do número inicial no sentido correto permite determinar a solução facilmente. Há três opções de resposta na tela, se a resposta dada for incorreta não se marca pontos e a próxima questão aparece na tela sem indicação da resposta correta ou outra orientação, além da reta numérica, para conseguir chegar a solução correta.

Figura 7: Subtração e a reta numérica



Fonte: captura de tela do aplicativo *The number adventures of Oscar.*

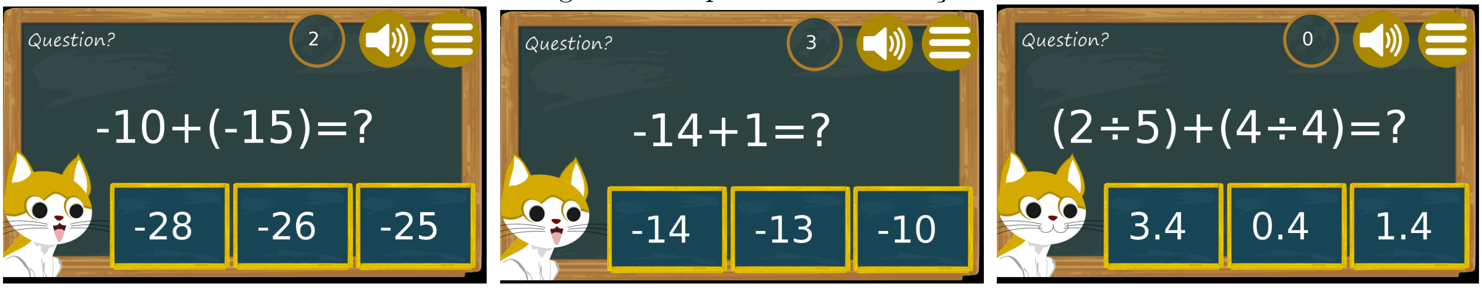
Evidenciam-se nas operações propostas por este aplicativo a **definição** 11 e as propriedades apresentadas na **proposição 5**, pois, as noções de maior ou menor podem ser abordados neste caso, além do significado para números opostos e suas representações apresentadas na **proposição 7.**

Para as expressões numéricas com adição não há indicações geométricas das soluções.

[3]Aplicativo para *dispositivo móvel* com sistema operacional Android. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.anteia.tnaoo&hl=pt_BR

Neste caso o usuário deve indicar a resposta correta, caso erre, não é apresentada a solução da questão nem indicações para se encontrar o resultado esperado.

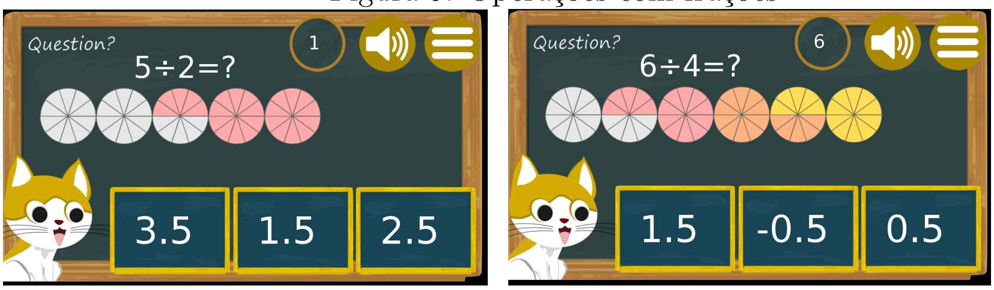
Figura 8: Expressões com adição



Fonte: captura de tela do aplicativo *The number adventures of Oscar*.

O ponto forte deste aplicativo são as divisões, pois, o usuário pode comparar unidades divididas em partes correspondentes aos denominadores presentes nas operações, ou construir frações equivalentes e relacionar a representação gráfica à representação numérica. Deste modo, mesmo para divisões fora do conjunto dos números inteiros, o aluno pode atribuir significados às operações que realiza com devida orientação do professor. Alguns exemplos baixo.

Figura 9: Operações com frações



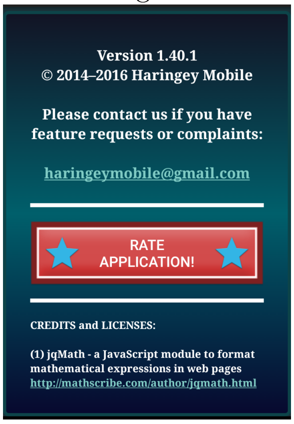
Fonte: captura de tela do aplicativo *The number adventures of Oscar*.

Como no exemplo anterior, o resultado da divisão enunciada aparece como partes de uma ou mais figuras divididas em 10 partes iguais, desta forma é possível, por meio da **proposição 10**, visualizar relações entre frações equivalentes e também entre frações e a representação decimal de números racionais. A compreensão desta proposição facilita a resolução de operações entre frações sabendo que elas podem ser escritas de diversas formas, além disto, a simples representação apresentada pelo aplicativo possibilita dar sentido para as propriedades **DN1, DN2, DN3** e **DN4**, da **proposição 10.**

Apesar de se destacar na representação fracionária e decimal de quocientes este aplicativo possui limitações acerca da multiplicação, pois, não ressalta propriedades importantes como a comutatividade (que não ocorre na divisão), e a propriedade distributiva da multiplicação.

5.1.3 Math Negative Numbers Practice

Figura 10: Negative Numbers

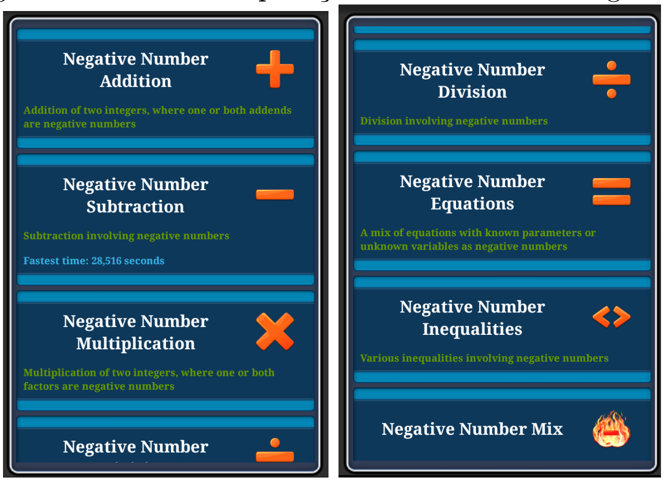


Fonte: captura de tela do aplicativo *Negative Numbers*

Este aplicativo [4] (em inglês), assim como a maioria dos aplicativos matemáticos encontrados, funciona basicamente como um teste com perguntas sobre operações com números inteiros em diferentes categorias: adição, subtração, multiplicação, divisão, equações, inequações. Há ainda uma opção para perguntas aleatórias dentre as categorias citadas. No caso deste aplicativo, as definições e propriedades enunciadas nos capítulos inicias evidenciam-se no processo de correção das respostas dadas às perguntas dos testes.

[4] Aplicativo para *dispositivo móvel* com sistema operacional Android. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.haringeymobile.mathpracticenegativenumbers&hl=pt_BR

Figura 11: menu de operações com números negativos



Fonte: captura de tela do aplicativo *Negative Numbers*

A proposta deste aplicativo é testar a compreensão das propriedades aritméticas envolvendo números negativos, não há indicação geométrica ou qualquer outra indicação na forma de figuras que possibilite a relacionar a operação proposta às diversas formas de representá-las. As operações propostas obedecem as relações apresentadas no **capítulo 3**, com destaque novamente para a **proposição 7** e para a **proposição 10** no caso das resoluções das equações propostas, como na figura 13.

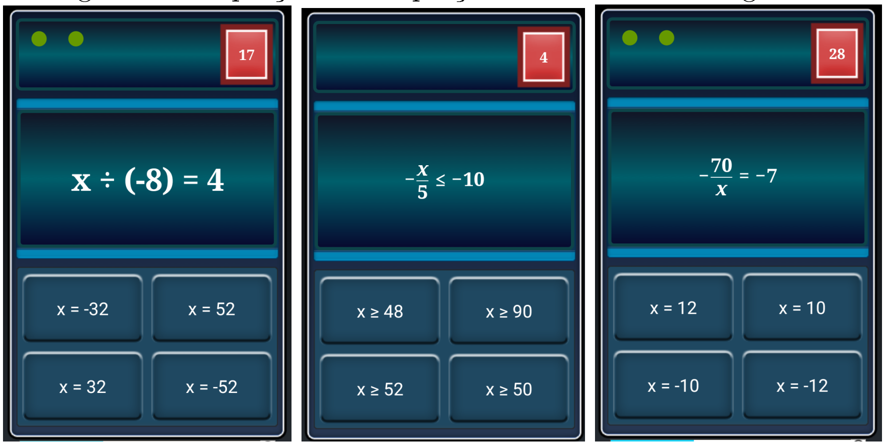
O diferencial deste aplicativo em relação aos outros do tipo perguntas e respostas rápidas é seu enfoque nas operações com números negativos e apresentação das respostas das questões que foram respondidas incorretamente ao final do questionário. Algumas situações são apresentadas nas imagens a seguir.

Figura 12: Operações com números negativos

Fonte: captura de tela do aplicativo *Negative Numbers*

Há também equações e inequações simples, conforme os exemplos abaixo.

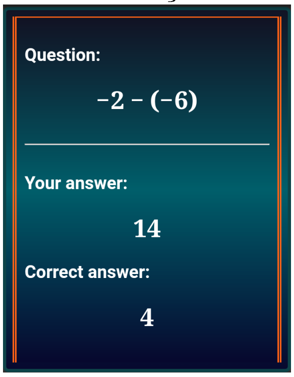
Figura 13: Equações e inequações com números negativos



Fonte: captura de tela do aplicativo *Negative Numbers*

Para todas as respostas incorretas são apresentados as respostas corretas assim como no exemplo da figura 14.

Figura 14: correções e acertos



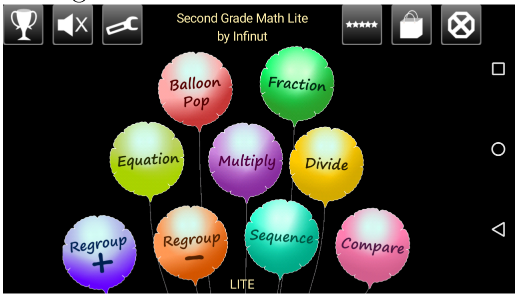
Fonte: captura de tela do aplicativo *Negative Numbers*

Este aplicativo pode ser uma alternativa para o trabalho com erros e acertos. Após identificar os erros pode-se explorar a solução correta e as possíveis formas de se encontrá-la. Neste caso a significação pode ser reafirmada após a utilização do programa com base nos erros e acertos cometidos pelos alunos. Os caminhos realizados para conseguir corrigir os possíveis erros no processo de resolução envolvem a compreensão das propriedades apresentadas no capítulo 3, portanto, dar sentido a tais operações é essencial para conclusão correta de exercícios como os propostos no aplicativo.

Apesar de suas potencialidades, sem devida orientação este aplicativo torna-se um mero teste rápido para os alunos, portanto, sua utilização limita-se a trabalhos com orientações específicas com foco em poucas propriedades aritméticas.

5.1.4 Second Grade Math Lite

Figura 15: *Second Grade Math*



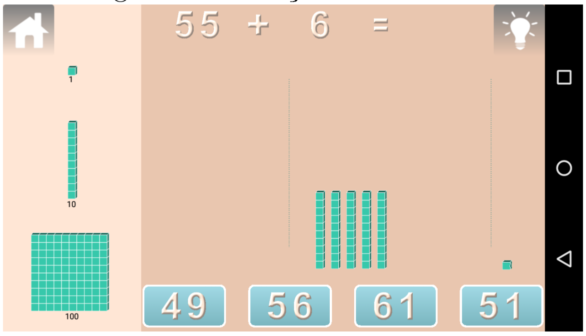
Fonte: captura de tela do aplicativo *Second Grade Math.*

Second Grade Math[5] parece ter sido projetado para que os usuários pudessem dar sentidos as operações matemáticas. Neste aplicativo é possível realizar operações de adição, subtração, multiplicação, resolução de equações simples, comparação entre frações. Apesar do nome que pode ser traduzido como *Matemática da segunda série,* este aplicativo pode ser utilizado em diversas situações que reforçam alguns dos sentidos das operações matemáticas.

Começando pela adição, para resolver as situações propostas o usuário deve indicar o número de unidades, dezenas e centenas resultantes por meio de blocos de diferentes tamanhos. Para todas situações há instruções por meio de áudio, infelizmente em inglês. Para realizar a operação a seguir, por exemplo, devem ser movidos os blocos de forma adequada. Se os blocos não forem agrupados corretamente não é possível escolher nenhuma das respostas.

[5] Aplicativo para *dispositivo móvel* com sistema operacional Android. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.munmunstudio.additionandsubtractionforkids&hl=pt_BR

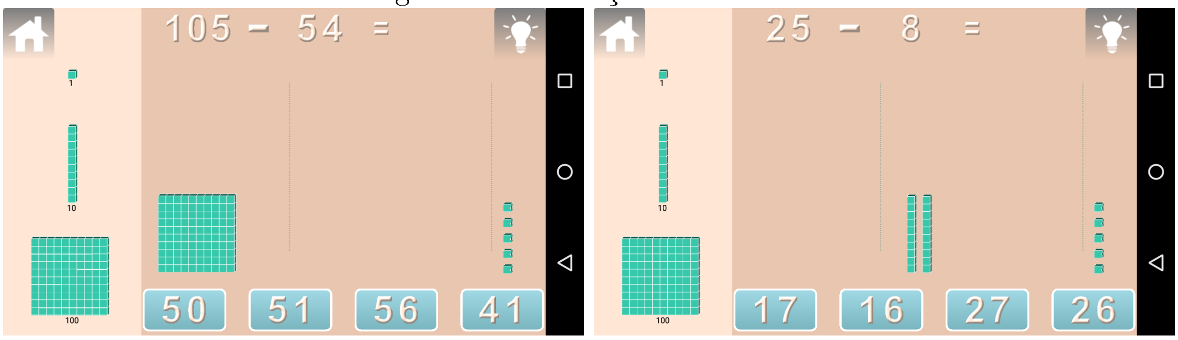
Figura 16: Adição com blocos



Fonte: captura de tela do aplicativo *Second Grade Math*.

A subtração é realizada de forma semelhante a adição. De uma quantidade inicial de blocos devem ser retirados blocos suficientes para encontrar a solução correta. As instruções para a operação aparecem por escrito e na forma de áudio.

Figura 17: subtração com blocos

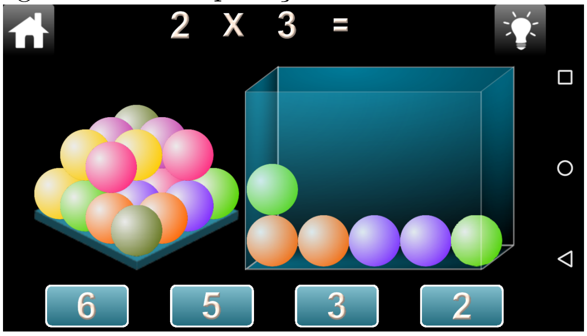


Fonte: captura de tela do aplicativo *Second Grade Math*.

As operações de adição e subtração neste aplicativo possibilitam trabalhar os sentidos de juntar e retirar, além da decomposição dos números em dezenas, centenas e unidades. Infelizmente não há exemplos com números negativos, no entanto, aparece aqui de forma explícita a ideia apresentada na **proposição 2**, ou seja, é possível relacionar de forma única cada objeto à uma unidade de modo que somar ou subtrair resuma-se a contar. Esta é uma ideia básica da adição e subtração, mas, compreendê-la é fundamental para o desenvolvimento das propriedades mais complexas. As propriedades da adição e subtração com números naturais, na **proposição 3** também estão incluídas no processo de resolução das questões propostas neste aplicativo, em especial as propriedade associativa que possibilita escrever a soma de números naturais de diversas formas.

A multiplicação neste aplicativo aparece destacando o sentido aditivo. Assim como foi definida nos capítulos iniciais a multiplicação é compreendida como a soma de parcelas iguais. Para realizar este tipo de operações são apresentadas instruções e algumas bolas fora de uma caixa transparente. As bolas devem ser agrupadas dentro da caixa para indicar corretamente o produto. Os grupos de bolas colocados dentro da caixa são destacados com a mesma cor. Por exemplo na multiplicação $2 \cdot 3$ são formados três grupos com duas bolas cada, cada grupo com uma cor diferente.

Figura 18: multiplicação com sentido aditivo

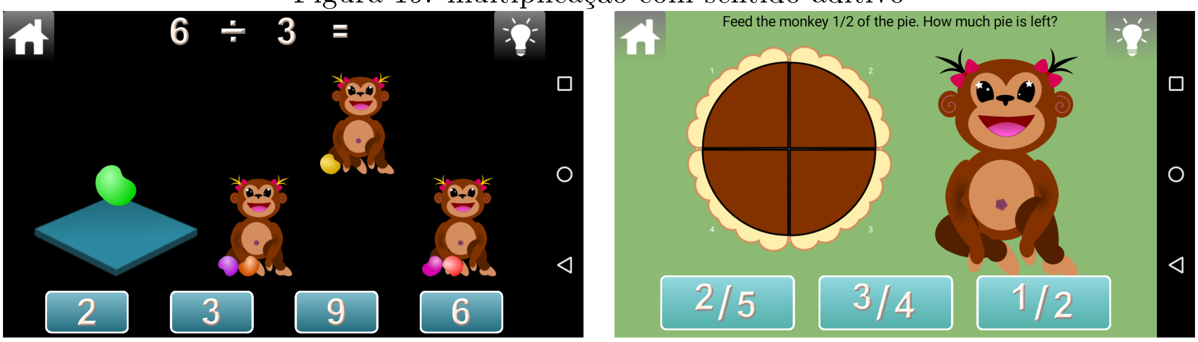


Fonte: captura de tela do aplicativo *Second Grade Math*.

No sentido que é proposta a multiplicação neste aplicativo a propriedade matemática que evidencia-se nos problemas de multiplicação é a ideia apresentada na construção da **definição 3**, ou seja, a soma de parcelas iguais pode ser entendida como multiplicação.

A divisão e a representação fracionária possuem sentido de partilha, ou seja, o todo deve ser dividido em partes iguais e para isto é utilizado um pequeno macaco que recebe partes de um todo. Assim como nas outras operações não é possível escolher nenhuma das respostas se a divisão utilizando as figuras não for feita corretamente.

Figura 19: multiplicação com sentido aditivo

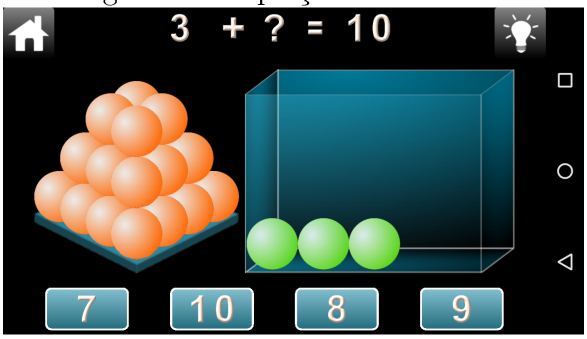


Fonte: captura de tela do aplicativo *Second Grade Math*.

Como na **definição 7**, a divisão neste aplicativo é compreendida como operação inversa da multiplicação. Comparando como devem ser elaboradas as soluções dos problemas de multiplicação e divisão é possível notar o ideia de operações inversas.

Há ainda dois modos que merecem destaque neste aplicativo a comparação entre frações e o modo de equações. As equações envolvem adição e subtração e são apresentadas em forma aritmética e na forma de caixas com bolas. O objetivo é colocar ou retirar bolas da caixa para encontrar o resultado pedido.

Figura 20: Equações com caixas

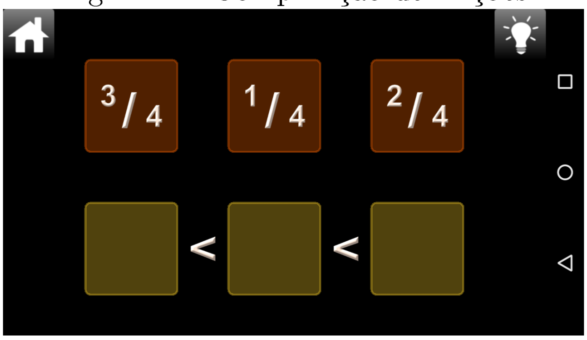


Fonte: captura de tela do aplicativo *Second Grade Math*.

Apresentadas desta forma, as equações neste aplicativo ressaltam as ideias de operações opostas entre adição e subtração e também a propriedade **AZ3** da **proposição 8** chamada *lei do corte*. Comparar frações na resolução de exercícios neste aplicativo reforça as ideias propostas para frações equivalentes na **proposição 10**.

Para as comparações são apresentadas três frações que devem ser colocadas em ordem crescente ou decrescente.

Figura 21: Comparação de frações



Fonte: captura de tela do aplicativo *Second Grade Math*.

Diferente do aplicativo apresentado na seção anterior, este traz inúmeras possibilidades para o trabalho de significação das operações com números inteiros e frações já relacionados às situações propostas no *software*. A diversidade de situações apresentadas e o fato de que todas elas podem ser reproduzidas utilizando materiais concretos tornam este programa uma ótima ferramenta introdutória. O trabalho com os erros e avaliação dos métodos utilizados para se encontrar as soluções corretas podem também ser abordados em sala.

5.1.5 Photomath

Figura 22: Photomath

Fonte: captura de tela do aplicativo *Photomath.*

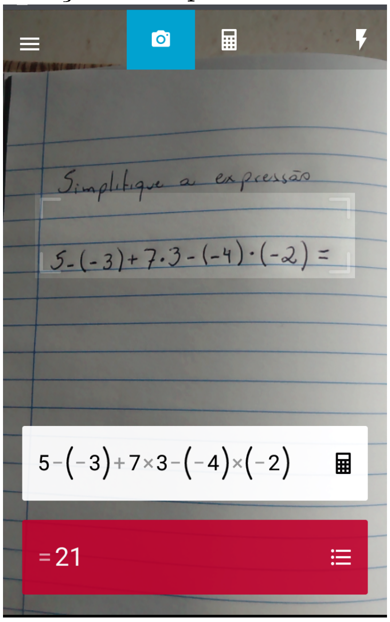
O Photomat[6] é um aplicativo, em português, incrível. Basicamente é uma calculadora, porém, a forma de introdução dos problemas a serem resolvidos faz a diferença, pois, além de dar a opção de digitar a questão, este aplicativo utiliza a câmera do dispositivo móvel para capturar expressões matemáticas e resolvê-las. As soluções propostas são completas com uma descrição de cada passo utilizado para encontrar a resposta correta. No exemplo a seguir é apresentada a simplificação da expressão

$$5 - (-3) + 7 \cdot 3 - (-4) \cdot (-2)$$

[6] Aplicativo para *dispositivo móvel* com sistema operacional Android ou iOS. Disponível em: https://photomath.net/en/

obtida a partir da foto de um caderno utilizando a câmera do dispositivo móvel.

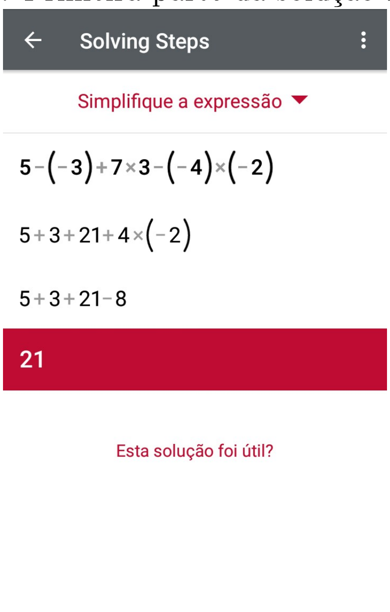
Figura 23: Simplificação de expressão utilizando o *Photomath*



Fonte: captura de tela do aplicativo *Photomath*.

Após capturar a imagem, o aplicativo apresentou a solução a seguir.

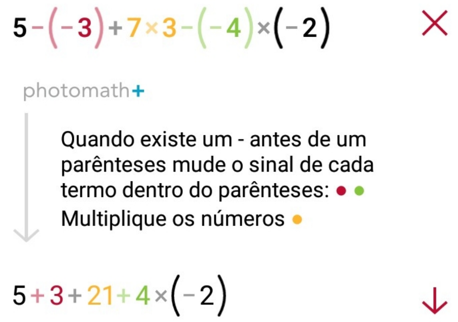
Figura 24: Primeira parte da solução *Photomat*



Fonte: captura de tela do aplicativo *Photomath*.

Tocando em cada uma das linhas é possível obter explicações sobre os passos da resolução. Na **figura 25** aparecem detalhes sobre a primeira linha

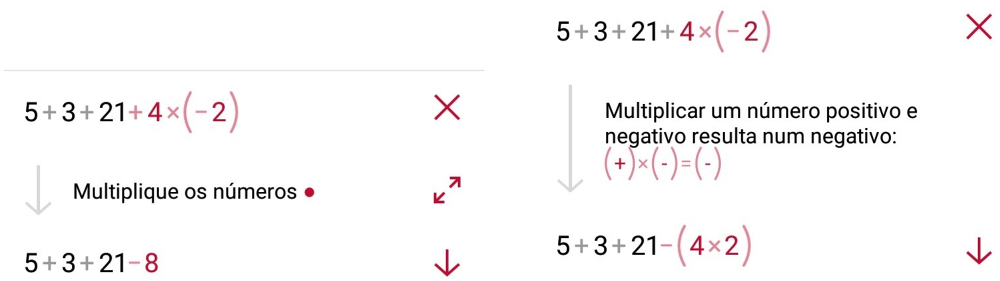
Figura 25: Segunda parte da solução *Photomat*



Fonte: captura de tela do aplicativo *Photomath.*

As instruções da linha seguinte aparece na **figura 26**

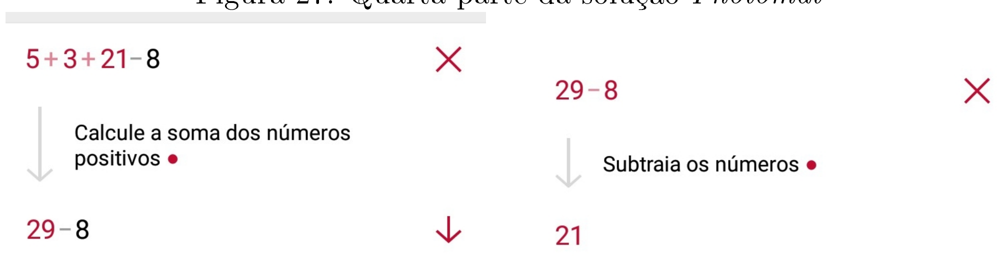
Figura 26: Terceira parte da solução *Photomat*



Fonte: captura de tela do aplicativo *Photomath.*

Os últimos passos estão em destaque na **figura 27**

Figura 27: Quarta parte da solução *Photomat*



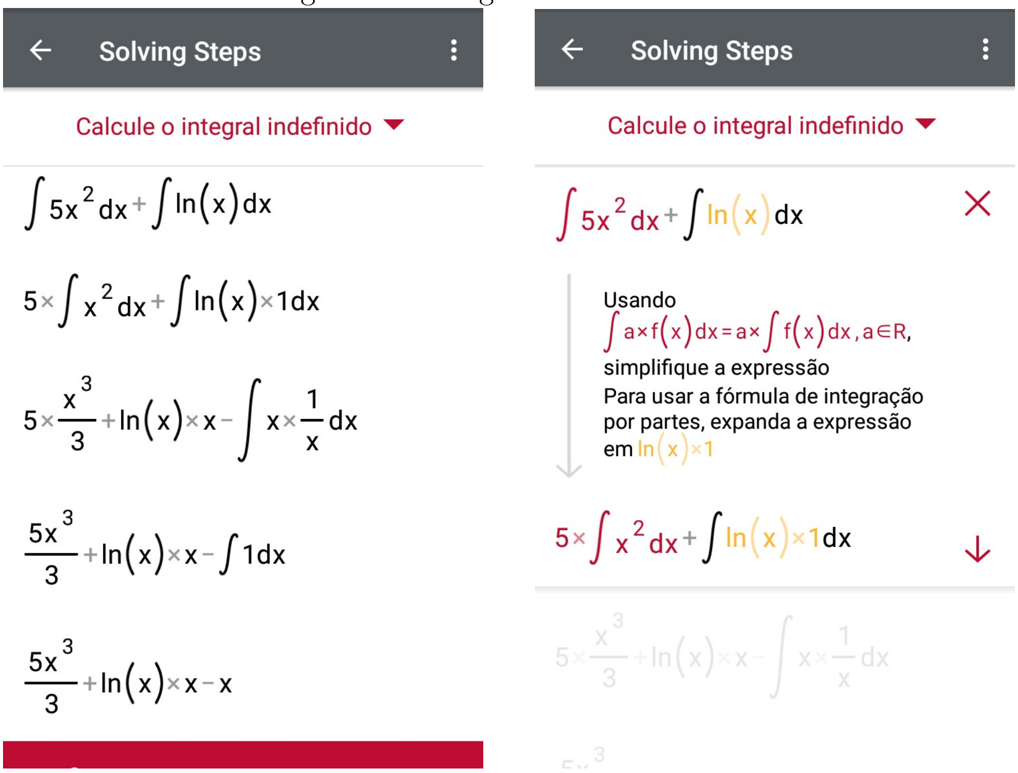
Fonte: captura de tela do aplicativo *Photomath.*

Por meio deste aplicativo é possível destacar o sentido algébrico das operações com números inteiros apresentados no capítulo 3. Acompanhando as etapas da resolução o professor pode intervir ressaltando as definições e propriedades implícitas em cada comando dando sentido às operações realizadas. As soluções funcionam como tutoriais para encontrar as respostas dos problemas registrados no aplicativo indicando corretamente a ordem das operações, a associatividade e a distributividade da multiplicação dadas pelas **propoições 10** e **12.**

O *Photomath*, apesar de potente, é um aplicativo para séries mais avançadas, pois exige interpretação cuidadosa das resoluções propostas, caso contrário torna-se apenas uma calculadora.

Além de problemas envolvendo operações com números reais este aplicativo soluciona equações, calcula derivadas e até integrais como no exemplo da **figura 28.**

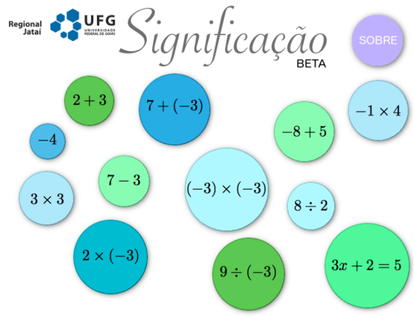
Figura 28: Integrais no *Photomath*



Fonte: captura de tela do aplicativo *Photomath*.

5.1.6 Significação

Figura 29: *Software* Significação



Fonte: http://www.matematicajatai.com/significacao/

Diferente dos outros programas apresentados anteriormente, este é um *software*, em fase de testes, elaborado por professores de matemática da Universidade Federal de Goiás com o objetivo de dar significado às operações matemáticas[7]. Portanto, este não é um aplicativo que sirva simplesmente de passatempo ou teste de conhecimento aritméticos. Um de seus objetivos é fornecer ao professor ferramentas para fazer compreender as relações entre números inteiros a partir dos sentidos aritméticos dados para cada operação.

A página do programa na internet possui uma breve descrição do *software*

> Livre acesso ao Significação, um software gratuito e sem necessidade de instalação, que ajuda a dar significado a contas que fazermos de maneira automática, sem pensar no seu significado; Este software é uma versão digital da Matemática de tabuleiro, e uma versão online para testes já está disponível em www.matematicajatai.com/significacao. Esta é uma versão preliminar que será totalmente refeita em breve, e então estará disponível para download em computadores, tablets e celulares. (Disponível em http://www.matematicajatai.com/LEIS, acesso 10/16)

É essencial que se tenha uma ferramenta capaz de traduzir as ideias matemáticas básicas para a significação correta dos conceitos e propriedades da aritmética, nesta perspectiva o *Significação* está sendo desenvolvido. Começando pela definição de números naturais

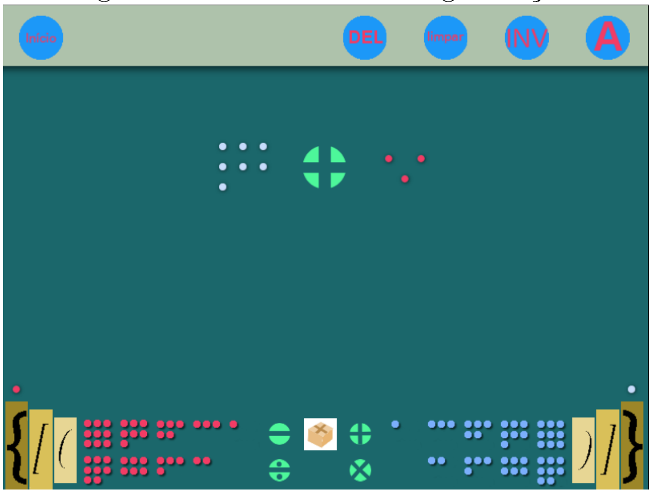
[7]Aplicativo em Html5 disponível acessível em sistemas operacionais Linux, Windows e Mac Os, para computadores e Android e iOs para *dispositivo móvel.* Disponível em: www.matematicajatai.com/significacao

dada por meio dos axiomas 1, 2 e 3 (página 20), nota-se que é possível relacionar cada unidade do conjunto dos números naturais a um único objeto e ainda notar que obter sucessores nada mais é do que acrescentar um elemento unitário ao conjunto inicial. O *software* apresentado neste tópico propõe a associação de unidades representadas por fichas coloridas à unidade do conjunto dos números naturais. Introduzindo outra cor para as fichas é possível relacionar cada unidade com seu oposto e consequentemente cada número resultante da soma de unidades também. As operações com números inteiros são construídas a partir desta associação no aplicativo, desta forma verifica-se facilmente a **proposição 2** na construção de adições por meio de fichas.

Atribuindo corretamente significados à definição e às operações de adição e subtração com números inteiros é possível também explorar os conceitos relativos a relação de ordem dos números inteiros, pois, como foi feito na **definição 11**, a relação de ordem pode ser definida a partir do resultado da subtração entre eles, assim como as propriedades desta relação em destaque na **proposição 9** podem ser exemplificadas com facilidade por meio do aplicativo.

Este aplicativo possui duas funções básicas. Como foi dito anteriormente uma delas é ser utilizado como uma versão virtual da Matemática de tabuleiro um material didático sobre operações com números inteiros (descrito na próxima seção). A outra é ser utilizado (nesta versão preliminar) como tutorial para operações com números inteiros. Os exemplos são relacionados a animações destacando os sentidos das operações e a relação entre números positivos e negativos. Não são apresentados algoritmos para as operações, estas são feitas por meio de representações de fichas circulares que se anulam, juntam ou combinam em grupos como nos exemplos a seguir. Além disso, para representar diversas expressões numéricas, estão disponíveis sinais operatórios e sinais associativos, além de caixas para representar incógnitas como na figura abaixo.

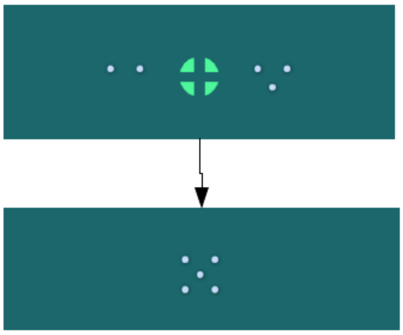
Figura 30: Elementos do Significação



Fonte: http://www.matematicajatai.com/significacao/

A adição e subtração entre números inteiros neste *software* destacam o significado de juntar ou retirar, ressaltando o sentido de número negativo definido no capítulo 3 e a adição e subtração como operações inversas. Duas etapas da soma 2+3 estão representadas na **figura 31**.

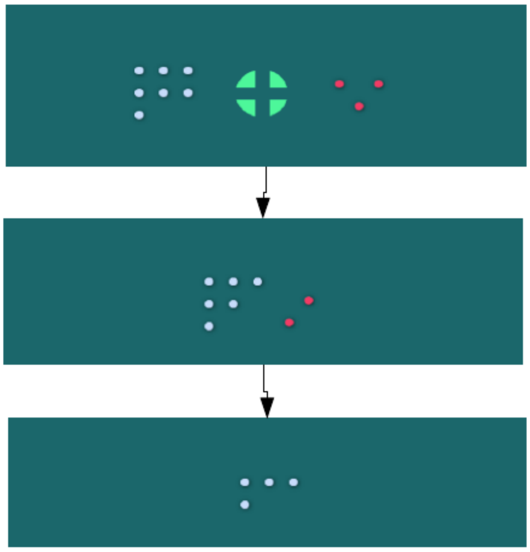
Figura 31: Adição de naturais no Significação



Fonte: http://www.matematicajatai.com/significacao/

A adição entre um número negativo e um positivo aparece na **figura 32**. A operação animada é $7+(-3)$. Por meio deste exemplo é possível verificar que na adição ou subtração com números inteiros cada unidade positiva anula uma negativa.

Figura 32: Adição de inteiros no Significação



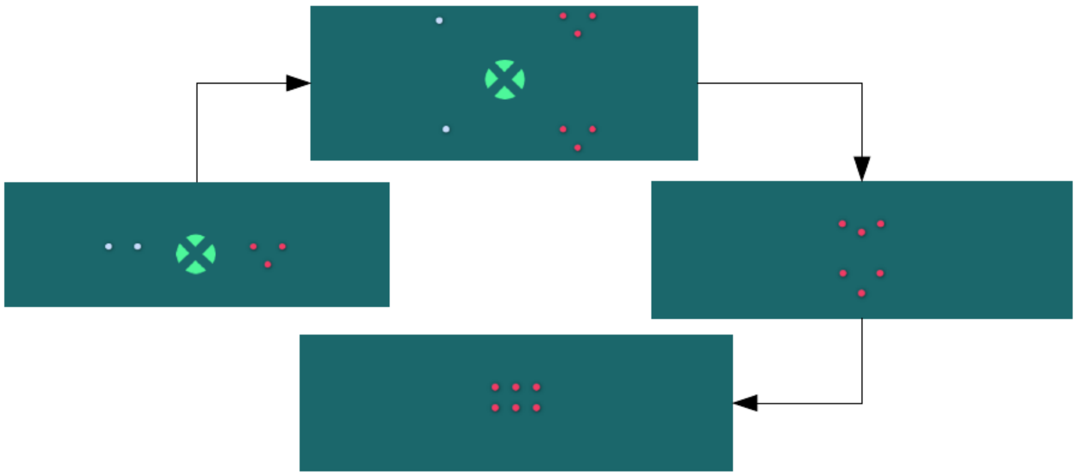
Fonte: http://www.matematicajatai.com/significacao/

As propriedades descritas nas **proposições 3** e **8** são facilmente verificáveis por meio do *software*, pois, a representação por fichas permite agrupar de diferentes formas um conjunto com várias unidades. No caso da **propriedade 8** são utilizadas fichas de cores diferentes para diferenciar números negativos e números positivos.

Durante o processo de adição, fichas de cores diferentes se anulam o que ressalta a noção de números opostos e sua representação destacada na **proposição 7**.

Este *software* também destaca na multiplicação a ideia apresentada na construção da **definição 3**, ou seja, a soma de parcelas iguais para representar a multiplicação. A atribuição deste sentido à multiplicação por meio deste aplicativo pode ser feita de forma clara e objetiva, pois, durante a resolução de multiplicações são evidenciados o número de parcelas e a quantidade de elementos em cada uma delas de acordo com os fatores presentes na multiplicação. Como exemplo de multiplicação com sentido aditivo, incluindo parcelas com de números negativos temos a multiplicação $2 \cdot (-3)$ cuja animação está resumida na **figura 33**.

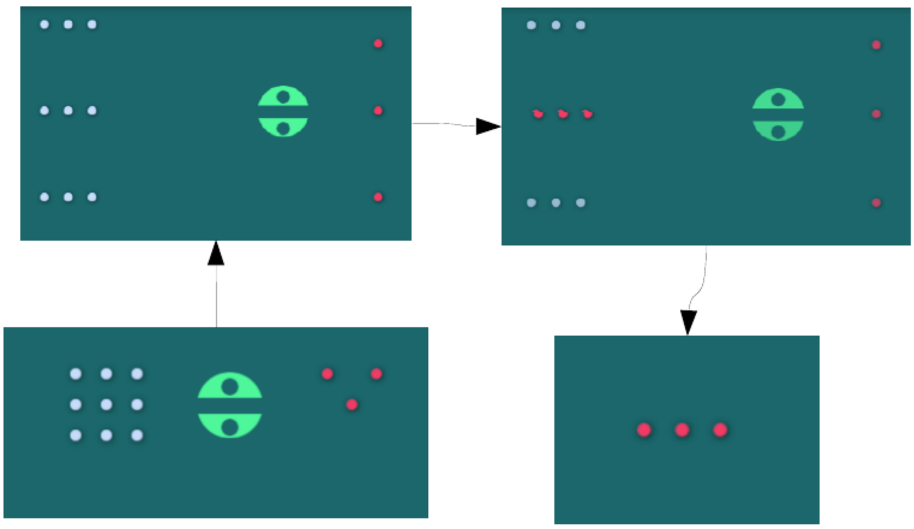
Figura 33: Multiplicação no Significação



Fonte: http://www.matematicajatai.com/significacao/

A divisão no significação é apresentada no sentido de repartir, para números negativos ou positivos. No exemplo a seguir é realizada a divisão $9 : (-3)$. Primeiramente o nove é repartido em 3 grupos com quantidades iguais e em seguida, como o divisor é negativo e o dividendo positivo, é alterado o sinal do quociente.

Figura 34: Multiplicação no Significação



Fonte: http://www.matematicajatai.com/significacao/

Nota-se no exemplo anterior a ideia de operação inversa em relação a multiplicação e também a possibilidade de dar sentido para as propriedades **DN1, DN2, DN3** e **DN4**, da **proposição 10.**

Tabela 1: Comparação entre aplicativos

Características/Aplicativos	1	2	3	4	5	6
Adição	χ	χ	χ	χ	χ	χ
Contém operações com frações			χ	χ	χ	χ
Dicas para correção dos erros			χ			
Divisão		χ	χ	χ	χ	χ
Em português					χ	χ
Equações			χ	χ	χ	
Evidencia propriedades operatórias e seus significados		χ		χ		χ
Funciona em dispositivos móveis mais baratos	χ	χ	χ	χ	χ	χ
Instruções nas soluções dos problemas	χ				χ	
Métodos alternativos para operações apresentadas		χ				χ
Mostra erros e acertos			χ			
Multiplicação		χ	χ	χ	χ	χ
Operações com números negativos		χ	χ	χ	χ	χ
Relação entre o aplicativo e o uso de materiais concretos		χ		χ		χ
Subtração	χ	χ	χ	χ	χ	χ

1. Addition and subtraction for kids
2. The Number Adventures of Oscar
3. Math Negative Numbers Practice
4. Second Grade Math Lite
5. Photomath
6. Significação

Ainda não existem representações fracionárias para o *Significação,* nem animações para todos os tipos de expressões aritméticas, no entanto, o trabalho com a sua versão física torna-se um grande facilitador para a compreensão dos conceitos enunciados nos primeiros capítulos.

Cada um dos aplicativos aqui apresentado servem de exemplos para as categorias mais comuns dos aplicativos sobre aritmética de fácil acesso. Para cada um deles é possível identificar o significado dos números e operações relativas aos problemas propostos. A tabela a seguir destaca as principais características matemáticas encontradas em cada um dos aplicativos apresentados.

Na seção a seguir será apresentado o modelo físico do aplicativos Significação e uma proposta de utilização deste *software* em sala de aula.

5.2 Proposta de utilização para o *software* Significação

A finalidade desta seção é apresentar uma proposta de utilização do aplicativo Significação em sala de aula de forma que o professor possa transmitir os conceitos e propriedades apresentados na construção dos conjuntos numéricos, criar uma situação didática na qual possam ser superados obstáculos didáticos específicos e, sobretudo, que o aluno possa dar significado as operações realizadas.

O objetivo da proposta aqui descrita é, por meio de atividades envolvendo expressões algébricas, representadas por *software* ou por material concreto, apresentar sentido aritmético e prático para operações com números inteiros possibilitando a significação das mesmas. Na seção anterior foram destacadas as potencialidades do *software Significação* em relação às definições e propriedades enunciadas nos capítulos iniciais e é com ênfase em tais características que as atividades descritas a seguir devem ser desenvolvidas.

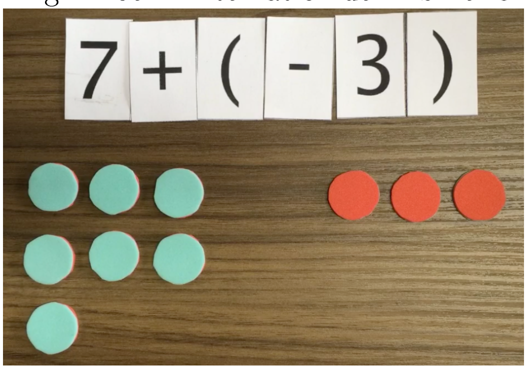
Para o desenvolvimento da proposta é necessário disponibilidade de um laboratório de informática ou dispositivo móvel para utilização do aplicativo, material para registro escrito e jogos da versão concreta do Significação.

Em um primeiro momento os alunos podem ser divididos em duplas e apresentados ao aplicativo Significação, tendo alguns minutos para familiarização com os recursos do programa. A seguir o professor deve fazer a primeira intervenção explicando o funcionamento do *software* e orientando os alunos para que vejam os exemplos iniciais e utilizem a ferramenta para representação de expressões algébricas específicas para a aula. O professor pode apresentá-las na forma algébrica e pedir a representação geométrica, ou apresentar a representação geométrica e solicitar o registro das expressões algébricas correspondentes. As expressões devem ser registradas por escrito em um caderno por exemplo. Os registros podem ser feitos em duplas ou individualmente. Neste momento o professor pode ressaltar a utilização correta dos sinais operatórios com ênfase na **definição** 11, por exemplo, e os sinais associativos destacando sua importância destacado na **proposição 8** e na **definição 12**, além de destacar propriedades relativas a igualdade. Os registros podem ser utilizados, juntamente com o desempenho durante a tarefa, para avaliação do primeiro momento.

Finalizado o primeiro momento os alunos devem agora utilizar o material concreto Matemática de Tabuleiro (figura 35) para representar e resolver situações problema que envolvam operações aritméticas com números inteiros. O professor deve atuar como mediador, questionando os métodos utilizados, destacando propriedades importantes para a solução, orientando a significação dos conceitos trabalhados.Uma das propriedades que merecem destaque neste momento é o *jogo de sinal.* As fichas do material possuem duas faces com cores distintas, o que possibilita trabalhar com operações entre números opostos alternando entre estas cores.

Novamente devem ser feitos registros sobre a atividade, nestes os alunos devem também destacar o sentido das operações com números inteiros em cada situação. As soluções devem ser discutidas em sala apresentando os diversos pontos de vistas dos alunos, apontando erros, acertos e realizando correções conceituais e relativas às propriedades aritméticas utilizadas.

Figura 35: Matemática de Tabuleiro



Fonte: http://www.matematicajatai.com/LEIS

Em um outro momento o trabalho deve ser voltado para solução de problemas envolvendo situações concretas. Os problemas propostos devem destacar situações que podem realmente acontecer e envolver os diversos sentidos dados às operações matemáticas. Os registros e discussões também são importantes nesta etapa.

A avaliação do aluno é feita por meio dos registros, discussões e desempenho nas atividades em duplas observando os a utilização correta dos conceitos matemáticos.

Existem ainda um conjunto de vídeos sobre o Matemática no Tabuleiro[8] e as operações aritméticas que podem ser sugeridos como atividade complementar. Nestes vídeos as operações também são trabalhadas de forma a dar sentido as propriedades matemáticas.

Aspectos relativos a importância do conhecimento e utilização correta dos conceitos e propriedades apresentadas nos capítulos iniciais nas situações didáticas são apresentados no capítulo a seguir.

---

[8]disponível em *https://www.youtube.com/channel/UCb-AnqG_ Az0dLcyb5y-_2Rg*

Capítulo 6

Considerações Finais

Exige-se rigor matemático por parte dos professores em relação a definições, construções e propriedades matemáticas, para que possa se extrair o máximo no processo de transposição didática. É necessário que o professor possua embasamento teórico suficiente para criar situações didáticas que possibilitem a aprendizagem dos elementos matemáticos de forma objetiva. Nota-se que este é um dos propósitos do PROFMAT, pois, é um programa que oferece disciplinas relacionadas ao ensino básico como funções, álgebra linear, geometria plana e espacial, matemática financeira, estatística, probabilidade entre outras. Em cada uma destas disciplinas é proposta a fundamentação teórica dos elementos matemáticos estudados no ensino básico, assim como o estudo aprofundado das relações e propriedades referentes a tais elementos e diversas aplicações.

Pode parecer exagero o embasamento teórico para conceitos simples, contudo, conhecer a fundo o que se ensina é fundamental para o esclarecimento de dúvidas, reconhecer qual sentido o aluno atribui aos conceitos apresentados e prever o que será necessário para aprender os conceitos futuros.

Este texto foi elaborado nesta perspectiva, oferecendo aos professores de matemática embasamento teórico sobre aritmética, considerações a respeito do ensino dos conceitos e propriedades aplicados e uma opção de recurso didático, considerando suas principais potencialidades.

Mesmo após um planejamento detalhado o professor de matemática se depara com diversas situações durante as aulas e deve estar preparado para maioria delas. Tanto para o momento de planejamento como para o de execução devem estar bem claros os processos de definição, estudo das propriedades, significação e possíveis aplicações dos conteúdos relacionados para as aulas. A compreensão dos processo de construção e caracterização dos conjuntos numéricos torna-se, portanto, essencial para o bom desempenho do professor de matemática.

Os tópicos apresentados nos capítulos anteriores apresentam recursos para que o professor note de que forma são utilizados os conhecimentos relativos aos conjuntos numéricos no uso de aplicativos de matemática em sala de aula e quais os sentidos dados às operações por meio deste aplicativos.

Para se chegar ao compreendimento abstrato, quando necessário puramente aritmético, é preciso dar significado aos números e operações matemáticas. Este processo envolve superação de obstáculos didáticos relativos às situações propostas ou inerentes ao conteúdo trabalhado. Para para superá-los é necessário criar situações didáticas na qual o aluno seja o principal ator. Estas situações devem explicitar, por meio da intervenção do professor, os sentidos das operações envolvidas e possibilitem a significação matemática.

Nesse contexto a utilização de aplicativos em sala torna-se uma opção relevante, tendo em vista a atual facilidade de acesso a tecnologia por parte dos alunos e a relação deste tipo de ferramenta com seu cotidiano. Mesmo conhecimento matemático fundamentado, objetivos específicos para o trabalho com aplicativos em sala de aula e condições para utilização de recursos didáticos variados ainda existem fatores que dificultam a utilização de aplicativos para o trabalho de significação em sala de aula.

O primeiro fator que pode-se destacar é o despreparo dos professores em relação as novas tecnologias. Utilizar um projetor ou uma lousa digital como um simples quadro negro é retrocesso. Ainda falta capacitação por parte dos professores para o trabalho com novos recursos. É inegável que a prática por meio de exercícios e problemas é fundamental para a aprendizagem em matemática, porém, é necessário que o aluno atribua sentido a este processo e se considere útil, protagonista, interagindo de formas variadas com o conhecimento matemático, pensando ou aplicando em áreas de seu interesse.

Outro fator é a inexperiência por parte dos alunos. Como professor pude notar que muitos alunos que utilizam dispositivos móveis durante grande parte do seu dia ainda limitam-se às redes sociais, jogos e vídeos. Para as escolas particulares por exemplo são disponibilizados inúmeros recursos, com base no sistema de ensino adotado, como acompanhamento da rotina de estudos, agendas das atividades escolares, correções comentadas de exercícios do material utilizado em sala e dos simulados realizados, videoaulas, jogos educacionais, materiais de pesquisa, entre outros; porém, muitos alunos não aproveitam o potencial destes recursos por apresentarem dificuldades na utilização dos aplicativos educacionais.

Os recursos existem e são inúmeros, mas, os alunos ainda são alunos, precisam de orientação e para isto os professores precisam se adequar a realidade de cada escola e aos recursos disponíveis.

Para uso adequado de ferramentas tecnológicas em sala de aula é necessário restringir o uso dos dispositivos com acesso a *Internet* a *sites* e aplicativos específicos, direcionados ao tema da aula, pois, as inúmeras e tentadoras possibilidades do uso de dispositivos móveis torna fácil a dispersão dos alunos acessando conteúdos não relacionados as atividades propostas pelo professor.

Um outro fator limitador é a existência de aplicativos específicos para o trabalho de matemática, em linguagem acessível aos alunos e que possa dar sentido ao conteúdo trabalhado. Como foi apresentado na seção anterior, a maioria dos aplicativos disponíveis são feitos meramente para treino de cálculos ou têm um nível extremamente básico. Diante da necessidade da utilização de novas tecnologias acessíveis em sala de aula é preciso criar recursos condizentes a situação atual.

Tais fatores não descartam a relevância e a necessidade da inserção de *software* no ensino de matemática, a intervenção adequada do professor criando situações didáticas com objetivos específicos para dar significados corretos aos números, incluindo o sentido puramente aritmético, e para as operações matemáticas, além da noção prática de juntar, completar, repartir ou somar parcelas iguais torna-se um grande potencializador do ensino.

Apesar das limitações dos aplicativos de fácil acesso, é possível por meio da utilização de aplicativos compreender as propriedades e definições apresentadas nos capítulos iniciais durante a construção dos conjuntos numéricos. Como foi exemplificado no capítulo anterior, cada aplicativo possui características diferentes que podem ilustrar propriedades aritméticas e os conceitos utilizados na construção dos conjuntos de diversas formas facilitando a atribuição de sentido às operações matemáticas.

A utilização de materiais concretos relacionados aos aplicativos em situações didáticas facilitam a compreensão do que foi trabalhado de forma virtual, tendo sempre o professor como mediador, cria-se possibilidades para compreender as relações entre números entendidos com elementos de conjuntos que possuem propriedades em comuns e quais as consequências destas propriedades.

A impossibilidade de dar sentido aos números e operações pode tornar a matemática puramente mecânica, como ressalta Bezerra (2008, p.38)

> Na prática escolar, verificam-se, em grande parte dos alunos, e até mesmo em alguns professores, as dificuldades quanto ao domínio pleno dos algoritmos, que são utilizados de maneira mecânica e sem significado. Muitos professores empregam técnicas diversas de cálculo, mas não compreendem o porquê de cada procedimento, e os alunos repetem um modelo ao qual não atribuíram sentido lógico ou prático.

A discussão acerca da significação foi baseada no conjunto dos números inteiros e naturais. Obviamente a Matemática escolar não se resume a operações com números naturais ou inteiros, mas, esta é a base para os algoritmos de todas as operações com números reais, por exemplo, além de ser a base da significação das operações básicas e os alunos devem compreender o significado das operações matemáticas durante a resolução dos problemas.

O *software* Significação ainda está em fase de desenvolvimento, mas, pode ser um dos primeiros recursos elaborados por professores com o objetivo de dar sentido para as operações matemáticas. Apesar de a situação proposta no capítulo anterior envolvendo este *software* não ter sido aplicada, cria-se a partir de tal ferramenta inúmeros recursos para trabalhos significativos em sala de aula.

A existência de inúmeras ferramentas matemáticas não substitui a peça fundamental no processo de ensino-aprendizagem: o professor. Mesmo com recursos didáticos sofisticados, formação matemática consistente e ambientes adequados ao ensino os limites da aprendizagem e da significação eficaz em matemática dependem da atuação coerente do professor. Os itens apresentados nas seções anteriores buscam colaborar para a formação dos mesmos.

Referências

ALDA, Lucía Silveira. Novas tecnologias, novos alunos, novos professores? Refletindo sobre o papel do professor na contemporaneidade. Seminário Internacional em Letras. Centro Universitário Franciscano. 2012.

BEZERRA, Maria da Conceição Alves. As quatro operações básicas: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos. 2008. 138 f. Dissertação (Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, RN, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A. C. Matemática discreta. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT)

CEBOLA, G. Do número ao sentido do número. In Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores (pp. 223-239). Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. Secção de Educação Matemática.

Escola Superior de Educação. Sentidos das operações: Adição, subtracção e multiplicação. Instituto Politécnico de Setúbal, 2011.

_________. O sentido da divisão e os vários tipos de problemas. Instituto Politécnico de Leria. Leria, 2006.

GIRALDO, V.; MATTOS, F.;CAETANO. P. Recursos computacionais no ensino da matemática . SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

GOIÁS, Secretaria de Estado de Educação, Cultura e Esporte. Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás, 2012.

HEFEZ, A. Aritmética . SBM, 2014 (Coleção PROFMAT)

Instituto Brasileiro de Geometria e Estatística. Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios: Acesso à Internet e Posse de telefone Móvel Celular para Uso Pessoal. 2011. Disponível em http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv63999.pdf

JÚNIOR, Anselmo de Albuquerque Guerra. Uma abordagem sobre o uso de recursos computacionais como ferramentas de apoio ao ensino da Matemática. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013.

LIMA, E. L. Análise Real volume 1. Funções de uma variável. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA,2006.

_________. Números e funções reais. SBM, 2014 (Coleção PROFMAT)

_________. Meu Professor de Matemática e outras histórias. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

_________. Curso de Análise, vol. 1, 12a. edição, Projeto Euclides, IMPA, 2004.

LOUREIRO, Cristina. Em defesa da utilização da calculadora: Algoritmos com sentido numérico. Educação e Matemática , nº 77, pp. 22 - 29. APM, Lisboa, 2004.

MACHADO, Gabriela Maria. A construção dos números. Dissertação. Universidade Federal de São Carlos. Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia. Departamento de Matemática . Março de 2014.

MAGEDANZ, Adriana. Computador : Ferramenta de trabalho no Ensino (de Matemática). 2004. 14f. C urso de Pós - Graduação L ato Sensu. E specialização em ensino de Matemática - UNIVATES – Centro Universitário, Lajeado, 2004. Disponível em http://ensino.univates.br/~ magedanza/pos/artigo_final_adriana_magedanz.pdf (acesso em 04/2016)

MARTINS, José Afonso dos Reis. O SENTIDO DAS OPERAÇÕES NOS ALUNOS DO ENSINO BÁSICO. Dissertação. Universidade do Algarve. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Faro, 2011.

MASSAD, Ricardo Cesar . A construção dos números reais. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. 2014.

Números inteiros e números racionais. Disponível em http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/algebra/inteiros1.htm#htoc1(18-02-2016)

PACHECO, José Adson D. BARROS, Janaina V. O Uso de Softwares Educativos no Ensino de Matemática. DIÁLOGOS – Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade – N.° 8. ISSN: 2236-1499. UPE/Faceteg - Garanhuns - PE - Brasil,2013.

PERSIANO, Hélio Evangelista. A importancia do uso das novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem: aplicação do software Geogebra no ensino das funções trigonométricas. 68f. Dissertaçao. 2013, IME -UFG.

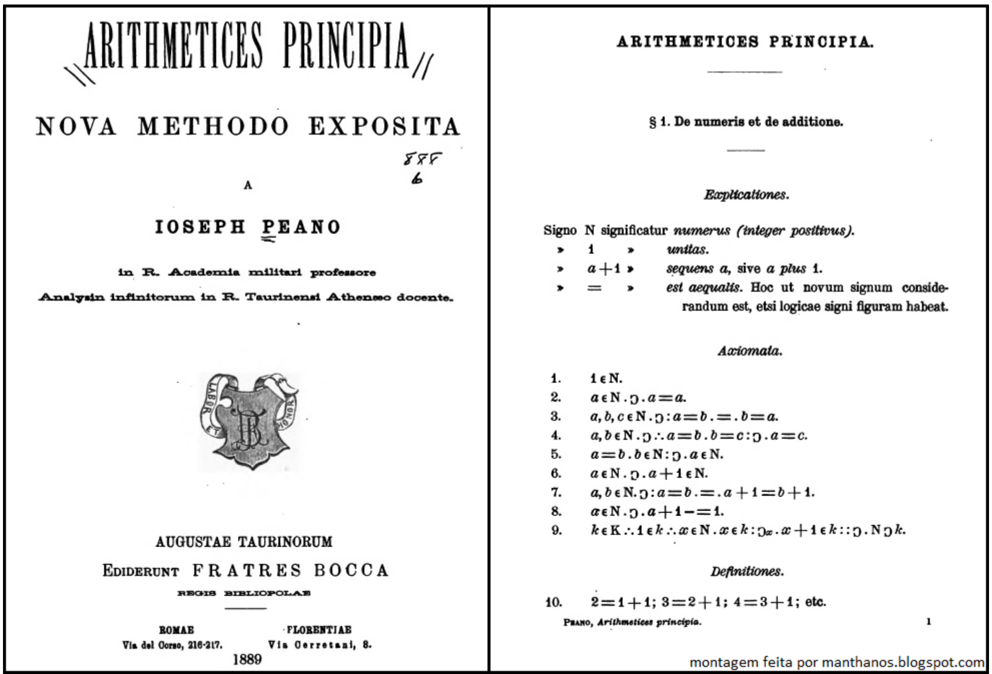
SANTOS, Dilce de Melo. O software e sua aplicabilidade como recurso pedagógico na escola. Rios Eletrônica - Revista Científica da FASETE, 2012.

SODRÉ, U. Matemática Essencial. 2003. Disponível em: *http://www.uel.br/projetos/matessencial/*

SOUZA, Murany de Fátima Botelho. Softwares Livres de Matemática, um Novo Paradigma Computacional e Educacional. Universidade Federal de Goiás Instituto de Matemática e Estatística. Goiânia, 2014.

VILELA, Flávia. Celular é principal meio de acesso à internet no Brasil, mostra IBGE. Disponível em: http://agenciabrasil.ebc.com.br/ economia/noticia/2016-04/celular-e-principal-meio-de-acesso-internet-na-maioria-dos-lares

ANEXO I



ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

888
6

A

IOSEPH PEANO

in R. Academia militari professore
Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenaeo docente.

AUGUSTAE TAURINORUM
EDIDERUNT FRATRES BOCCA
REGIS BIBLIOPOLAE

ROMAE
Via del Corso, 216-217.

FLORENTIAE
Via Cerretani, 8.

1889

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a*, sive *a plus* 1.
» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \epsilon N.$
2. $a \epsilon N . \supset . a=a.$
3. $a, b, c \epsilon N . \supset : a=b . = . b=a.$
4. $a, b \epsilon N . \supset \therefore a=b . b=c : \supset . a=c.$
5. $a=b . b \epsilon N : \supset . a \epsilon N.$
6. $a \epsilon N . \supset . a+1 \epsilon N.$
7. $a, b \epsilon N . \supset : a=b . = . a+1=b+1.$
8. $a \epsilon N . \supset . a+1 -= 1.$
9. $k \epsilon K \therefore 1 \epsilon k \therefore x \epsilon N . x \epsilon k : \supset_x . x+1 \epsilon k :: \supset . N \supset k.$

Definitiones.

10. $2=1+1$; $3=2+1$; $4=3+1$; etc.

PEANO, *Arithmetices principia.* 1

montagem feita por manthanos.blogspot.com

Folha de rosto do livro de Peano | Página contendo os axiomas de Peano enunciados

ANEXO II

A Aritmética no Profmat e Noções Básicas de Funções

Neste capítulo falaremos brevemente sobre a abordagem da Aritmética nas disciplinas iniciais do PROFMAT, a seguir apresentaremos algumas noções sobre funções que serão úteis

Números e Funções Reais, Matemática Discreta e Aritmética são as disciplinas que abordam diretamente a aritmética no Programa de Mestrado Profissional em Matemática nos períodos iniciais do curso. A primeira destas disciplinas trata da noção de conjunto, operações e relações entre conjuntos, funções e gráficos de funções. A apresentação da teoria dos conjunto é feita de forma genérica sem detalhes sobre a construção dos conjuntos abordados durante o curso. É apresentada, no entanto, uma descrição formal do conjunto dos números reais a partir das propriedades de seus elementos.

A disciplina Matemática Discreta aborda inicialmente os conjuntos numéricos de forma mais minuciosa destacando a construção axiomática dos números naturais, a definição das operações de soma e multiplicação e as relações de ordem dos elementos deste conjunto dando ênfase ao princípio de indução matemática. A seguir pode-se destacar o estudo de recorrências, progressões, tópicos de matemática financeira, análise combinatória e probabilidade.

A terceira disciplina, Aritmética, trata inicialmente de resultados e problemas relativos à divisibilidade. Porém, por ser uma disciplina ofertada após a Matemática Discreta, não são retomadas as definições e propriedades elementares dos conjuntos dos números naturais e inteiros, assume-se que estes são dois conjuntos rigorosamente definidos e com propriedades a serem utilizadas para a construção de novos conceitos e demonstração de novas propriedades. Após o estudo da divisibilidade é apresentado conteúdos relativos a máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, o Teorema Fundamental da Aritmética, congruência e seus principais resultados como o Pequeno Teorema de Fermat, os teoremas de Euler e Wilson por exemplo.

Trataremos nos itens a seguir da construção e caracterização de conjuntos numéricos. Conjunto é um conceito primitivo, sendo assim, não possui uma definição formal. Porém, é possível elaborar um significado adequado ao contexto deste trabalho. Consideraremos um conjunto todo agrupamento de objetos com propriedades em comuns ou não, mas que seus elementos possam ser identificados. Além de uma noção prévia sobre conjuntos a construção axiomática dos números naturais necessita de alguns conceitos e simbologia específica. No tópico a seguir será definido o que é uma função e os principais conceitos e propriedades relativos a esta definição.

Noções Básicas de Funções

Vejamos algumas definições e exemplos sobre funções.

Definição 27. Dados A e B dois conjuntos quaisquer uma **função** é uma relação $f : A \to B$ (*lê-se f de A em B*) que associa cada elemento de x pertencente a A $(x \in A)$a um, e somente um, elemento y em B $(y \in B)$.

Em relação aos conjuntos A e B e seus elementos x e y, respectivamente, podemos considerar as definições abaixo.

Definição 28. Dados dois conjuntos A e B e uma função $f : A \to B$, chamaremos de **domínio** e **contradomínio** de f os conjuntos A e B, respectivamente.

Definição 29. O subconjunto de B que contém todos os elementos y que possuem algum elemento x em A associado a eles é chamado de **imagem da função** f. Ou seja a imagem da função f é o conjunto $f(A) = \{y \in B / \exists\, x \in A,\ f(x) = y\}$.

Definição 30. Dado $x \in A$, o único elemento $y = f(x) \in B$ correspondente é chamado **imagem** de$x$.

Considerando ainda os conjuntos A, B e $f : A \to B$, temos as seguintes definições.

Definição 31. f é **sobrejetiva** se para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;

Definição 32. f é **injetiva** se $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 33. f é **bijetiva** se é sobrejetiva e injetiva.

Definição 34. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Definiremos a **função composta** $g \circ f : A \to C$, que consiste em aplicar f e depois g. Ou seja, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Para esta última definição vale ressaltar que dadas $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ aplica-se a lei associativa $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : A \to D$. Basta notar que para todo $x \in A$, temos:

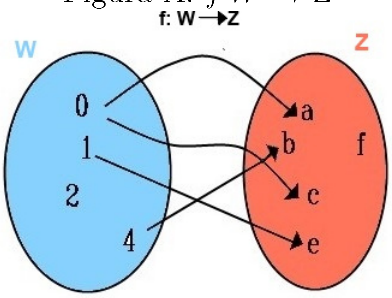
$$((h \circ g)) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Definido desta forma, é possível utilizar a notação

De acordo com as figuras a seguir podemos apresentar alguns exemplos que envolvem as definições acima.

Da **Figura A**, temos que a relação **f** não é uma função de W em Z, pois, nem todos os elementos de W possuem um correspondente em Z. Não existe $f(2)$. Além disto temos outro fator que descumpre uma das exigências apresentadas na **Definição 27** , para

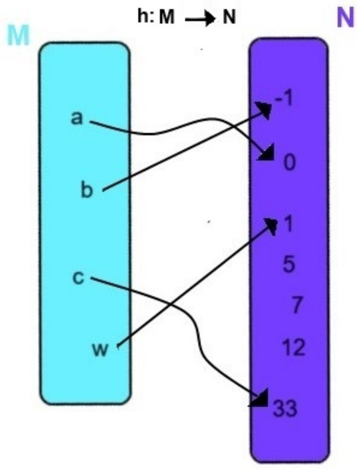
Figura A: $f\, W \to Z$



Fonte: o autor (2016)

Figura A $\quad f\, W \to Z$:

Figura B:$h:\ M \to N$



Fonte: o autor (2016)

Figura B $\quad h:\ M \to N$:

$0 \in W$ temos $f(0) = a$ e $f(0) = c$ com $a \neq c$. Para que **f** fosse considerada uma função cada elemento do conjunto W deveria ter um, e somente um, elemento correspondente em Z.

A relação $h : M \to N$, da **Figura B** , por outro, lado é uma função pois não descumpre nenhuma das exigências da **Definição 27**. Neste segundo exemplo temos ainda que a função $h : M \to N$ é injetiva, porém, não é sobrejetiva.

O conceito de função é necessário para caracterização axiomática do conjunto dos números naturais adotada neste texto, utilizando uma linguagem matemática atual, bem como para a demonstração de resultados apresentados nos capítulos sobre conjuntos numéricos.