

Jânio Alves dos Santos Júnior

Grafos e suas Aplicações

Jataí-GO

2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

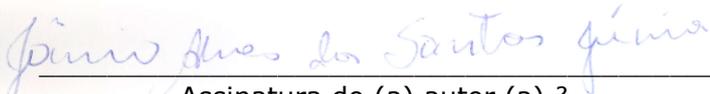
Nome completo do autor: Jânio Alves dos Santos Júnior

Título do trabalho: Grafos e suas Aplicações

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 25 / 01 / 2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

Jânio Alves dos Santos Júnior

Grafos e suas Aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática da Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de Goiás - UFG Jataí e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre

Universidade Federal de Goiás - UFG

Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith

Jataí-GO

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Alves dos Santos Júnior, Jânio
Grafos e suas aplicações [manuscrito] / Jânio Alves dos Santos Júnior. - 2016.
lxxxii, 81 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva; co-orientador Dr. Ole Peter Smith.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí, 2016.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Grafos. 2. Matrizes. 3. Autovalor. 4. Autovetor. 5. Polinômio característico. I. Francisco da Silva, Gecirlei, orient. II. Título.

CDU 51



Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Campus Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 www.jatai.ufg.br/matematica



Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Jânio Alves dos Santos Júnior – Aos quatorze dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezesseis (14/12/2016), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva – Orientador, Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa e Prof. Dr. Paulo Freitas Gomes, além da presença do professor co-orientador do trabalho, o Dr. Ole Peter Smith. Sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Centro de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – CEPEM da Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **“GRAFOS E SUAS APLICAÇÕES”**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Dáfnis Franco Luz, secretário do PROFMAT/UFG, polo Jataí, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva
Coordenação de Matemática-UFG/Reg. Jataí
Presidente da Banca

Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Coordenação de Matemática-UFG/Reg. Jataí
Membro interno

Prof. Dr. Paulo Freitas Gomes
Coordenação de Física
Membro externo

Dedico este trabalho a toda minha família, colegas e amigos.

Agradecimentos

Aos meus colegas que começaram no PROFMAT que não conseguiram concluir o curso.

A toda minha família em especial, minha mãe Solange meu padastro Reginaldo, minha irmã Tatiane e cunhado Cleiton, que com muito incentivo e apoio, que ajudou a chegar até este momento.

A minha esposa Alessandra, minha sogra Conceição que em alguns momentos me ajudam com a falta de tempo.

Ao meu filho Heitor Miguel, que em especial me dá suporte para me tornar um homem melhor.

Aos meus amigos de viagem, Saulo, Cláudio, Uender, Carlos, Marco Aurélio, Lucas, Amarildo, que dividiram vários momentos de alegria, diversão, contratempos e superação.

À meu amigo e coorientador Ole Peter Smith, que me instruiu com conhecimento e momentos de muita aprendizagem.

Ao meu orientador Gecirlei Francisco da Silva que teve muita paciência e compreensão nos momentos decisivos.

Em especial, ao meu grande amigo Lucas, que me apoiou e me ajudou em várias momentos do curso e na construção deste trabalho.

*Feliz o homem que persevera na sabedoria,
que se exercita na prática da justiça,
e que, em seu coração, pensa no olhar de Deus que tudo vê;
(Bíblia Sagrada, Eclesiástico 14, 22)*

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar alguns tópicos da teoria de grafos com o intuito de resolver alguns problemas. Para complementar, abordamos um leve estudo de matrizes, autovalores e autovetores. O primeiro problema é conhecido como o *Problema da Ponte de Königsberg*, onde tal, foi considerado o problema que deu origem ao estudo sobre grafos. *O Problema das Casas* que é uma brincadeira, que nos mostra várias proposições sobre grafos planares e bipartidos. Alguns modelos que podemos relacionar grafos, tais como veremos no problema dos canibais e no jogo de xadrez. Por fim, trabalharemos com aplicações na matriz de adjacência como no problema do *Condomínio de Chácaras* e no *Número de Caminhos Possíveis em um Grafo*, onde trabalharemos com figuras geométricas, resolvendo aparentemente um problema de contagem, utilizando autovalores e grafos. Como suporte metodológico será abordado Álgebra Linear.

Palavras-chave: Grafos, Matrizes, Autovalor, autovetor e Polinômio característico.

Abstract

This work aims to study some topics of graph theory in order to solve some problems. In order to complement, we approached a light study of matrices, eigenvalues and eigenvectors. The first problem is known as *Königsberg Bridge Problem*, where this was considered the problem that gave rise to the study on graphs. *The House Problem* is a joke, which shows us several propositions about planar and bipartite graphs. Some models we can relate graphs, such as we can observe in the problem of cannibals and in the game of chess. Finally, we will work with applications in the adjacency matrix as in the Problem of the *Condominium of Farms* and in the *Number of Possible Paths in a graph*, where we will work with geometric figures, apparently resolving a counting problem using eigenvalues and graph. As a methodological support will be approached Linear Algebra.

Keywords: Graphs, Linear Algebra, eigenvalue, eigenvector and characteristic polynomial.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Laço, arestas múltiplas	23
Figura 1.2 – Representação geométrica de um grafo G	24
Figura 1.3 – Caminho simples	25
Figura 1.4 – Circuito	25
Figura 1.5 – Quadrado	25
Figura 1.6 – Grafo G e G' subgrafo de G	26
Figura 1.7 – Grafo k_5	26
Figura 1.8 – Grafo 3-regular	26
Figura 1.9 – Grafo desconexo	27
Figura 1.10–Grafo de uma floresta com duas árvores	27
Figura 1.11–Grafo $K_{3,3}$	27
Figura 1.12–Um grafo completo K_4 e seu grafo $l(K_4)$	28
Figura 1.13–Um grafo e seu complementar	28
Figura 1.14– $2K_5$	28
Figura 1.15–Grafo planar à esquerda e grafo não planar à direita.	28
Figura 1.16–Grafo G	29
Figura 1.17–Grafos de figuras isomorfas	30
Figura 2.1 – Representação do vetor e autovetor	39
Figura 2.2 – Representação do vetor u e sua projeção sobre o eixo Oy	40
Figura 2.3 – Representação do vetor u e sua projeção sobre o eixo Oy	41
Figura 3.1 – Cidade de Königsberg em 1736	51
Figura 3.2 – Problema das Pontes de Königsberg	52
Figura 3.3 – Margem esquerda, dois canibais e dois vegetarianos	53
Figura 3.4 – ME: um canibal e um vegetariano, MD: barco, um canibal e um vegetariano	54
Figura 3.5 – Modelo usando grafos canibais e vegetarianos	54
Figura 3.6 – Grafo de canibais e vegetarianos	54
Figura 3.7 – Grafo do cavalo	55
Figura 3.8 – Representação isomorfa	55
Figura 3.9 – Grafo $k_{1,8}$ do cavalo	55
Figura 3.10–Modelo das casas	57
Figura 3.11–Grafo das casas	59
Figura 3.12–Grafo G	60
Figura 3.13–Grafo de Petersen	62
Figura 3.14–Grafo do cubo	62
Figura 3.15–Grafo cubo	63
Figura 3.16–Grafo bipartido cubo	63

Figura 3.17–Cubo no sistema cartesiano	63
Figura 3.18–Grafo tetraedro	65
Figura 3.19–Rotações sobre o cubo	67
Figura 3.20–Vetor equatorial	68

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Número de inversões	31
--	----

Sumário

1	CONCEITOS INTRODUTÓRIOS	23
1.1	Definições e Notações	23
1.2	Definições	25
1.2.1	Alguns parâmetros sobre grafos	29
1.3	Isomorfismo	30
2	NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR	31
2.1	Permutações	31
2.2	Determinantes	32
2.2.1	Métodos práticos para determinantes de ordem $n \leq 3$	33
2.2.2	Propriedades dos Determinantes	34
2.2.3	Desenvolvimento de Laplace	36
2.2.4	Autovalor e autovetores	37
2.2.5	Polinômio Característico	42
2.3	Diagonalização	46
3	EXEMPLOS DE GRAFOS	51
3.1	Um pouco de História	51
3.2	Canibais e Vegetarianos	53
3.3	Grafo no Jogo de Xadrez	54
3.4	O Problema das Casas	56
3.5	Matriz de adjacência	60
	REFERÊNCIAS	73
.1	Matrizes	75
.1.1	Matriz linha	75
.1.2	Matriz coluna	75
.1.3	Matriz nula	76
.1.4	Matriz diagonal	76
.1.5	Matriz identidade	76
.1.6	Matriz transposta	76
.1.7	Operação com matrizes	76

Introdução

Atualmente há vários estudos sobre grafos em diversas áreas de conhecimento, na Física com aplicação em resistores, na Química com o interesse em moléculas de hidrocarbonetos e níveis de energia, na Biologia com foco na cadeia alimentar, na Economia com métodos para crescimento populacional, rotas de tráfego aéreo, modelos de menor caminho percorrido, modelos de contagem.

No primeiro capítulo serão introduzidos as principais definições e propriedades sobre grafos com exemplos, tendo o intuito de facilitar a compreensão do terceiro capítulo.

No segundo capítulo, apresentaremos alguns tópicos de Álgebra Linear, com foco em operações com matrizes, o estudo de determinantes, autovalores e autovetores com aplicação na geometria e diagonalização, para aplicar em modelo de contagem.

No terceiro capítulo, mostraremos alguns problemas clássicos, tais como a ideia associada para o estudo inicial sobre grafos, com o problema solucionado por Euler. Uma brincadeira envolvendo Casas e serviços básicos. Aplicaremos os conceitos vistos em Álgebra Linear relacionando à grafos, com a matriz de adjacência, mostrando alguns teoremas e um modelo de contagem utilizando grafos de sólidos geométricos.

1 Conceitos Introdutórios

Neste capítulo, será introduzido alguns conceitos básicos da Teoria de Grafos¹, suas principais características, algumas aplicações, assim como notações com o intuito de facilitar o entendimento dos capítulos posteriores.

Desde já, deixaremos bem claro, que nosso objetivo é o estudo de grafos finitos, onde escreveremos apenas grafos. Neste capítulo utilizamos o livro de [1] como principal referência.

1.1 Definições e Notações

Um grafo G é constituído por um par (V, A) , determinado por um conjunto não vazio e finito V , onde os elementos são denominados *vértices*, e A um conjunto de elementos, denominados de *arestas*, onde cada aresta é um subconjunto de V , contendo 1 ou 2 vértices. Dada uma aresta $\{u, w\} \in A$, os vértices u e w são as *extremidades* da aresta, ou seja, dizemos que as arestas *incidem em* u e w . Quando temos uma aresta unitária, isto é, sendo ligada a um mesmo vértice u , esta é denominada de *laço*.

Os grafos que iremos estudar neste trabalho não serão incluídos grafos com laços, arestas múltiplas, ou seja, várias arestas incidindo no mesmo par de vértices.

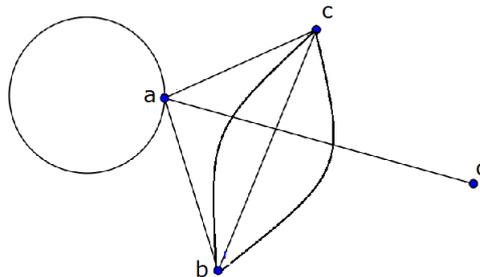


Figura 1.1 – Laço, arestas múltiplas

Na figura 1.1, temos no vértice a um laço e nos vértices b e c arestas múltiplas, no caso, três arestas incidindo em dois vértices.

Indicamos o número de vértices e o número de aresta de G , respectivamente por $|V|$ e $|A|$. O grau de um vértice é determinado pelo número de arestas que incidem neste, seja um vértice u , representamos o *grau do vértice* u por $d(u)$, ou seja, o grau de um vértice é sua cardinalidade.

¹ A palavra “grafo” é um neologismo da palavra *graph* em inglês.

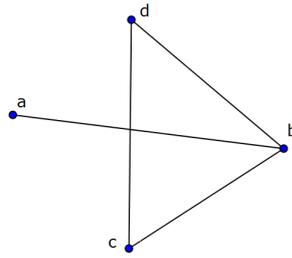


Figura 1.2 – Representação geométrica de um grafo G

Na figura 1.2, vemos a representação de um grafo $G = (u, w)$, onde temos o conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d\}$ e conjunto de arestas $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$. Também pela figura, verificamos que dois vértices são ditos *adjacentes* ou *vizinhos*, quando são extremidades de uma aresta. Os graus dos vértices de G são respectivamente dados por $d(a) = 1$, $d(b) = 3$, $d(c) = 2$ e $d(d) = 2$.

Proposição 1. *Em qualquer grafo, a soma dos graus de seus vértices é igual ao dobro do número de arestas, onde satisfaz a seguinte identidade.*

$$\sum d(u) = 2 | A |$$

Demonstração. Seja uma aresta com os vértices a e b , ela contribui uma unidade a cada um dos graus de $d(a)$ e $d(b)$, logo cada aresta contribui com duas unidades para o somatório dos graus. \square

Corolário 1. *Como consequência imediata da proposição acima, temos o seguinte teorema.*

Teorema 1. *Todo grafo G tem um número par de vértices ímpares.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que o grafo G tenha um número ímpar de vértices ímpares, tal que seus graus sejam da forma $2k_1 + 1, 2k_2 + 1, \dots, 2k_{2n+1} + 1$, para todo k_i , com $n \in \mathbb{N}$. Logo, a soma dos seus graus é dada por

$$\begin{aligned} (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \dots + (2k_{2n+1} + 1) &= \sum_{i=1}^{2n+1} (2k_i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} (2k_i) + 2n + 1 \\ &= 2 \left(n + \sum_{i=1}^{2n+1} k_i \right) + 1 \end{aligned}$$

que é um número ímpar, um absurdo, pois pela proposição anterior, temos que a soma dos graus de seus vértices é um número par. \square

1.2 Definições

Um *caminho* é uma sequência de vértices de modo que sempre existe uma aresta ligando o vértice anterior com o seguinte. Dado um grafo $G = (V, A)$ e o conjunto de vértices formados por $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$, para $1 \leq i \leq n - 1$. Se $i = 1$, temos um caminho unitário.

O caminho é dito *simples* quando nenhum dos vértices se repetem, ou seja, vértices distintos, vide figura 1.3. O *comprimento de um caminho* é o número de arestas percorridas, assim o seu comprimento é dado por $n - 1$. Uma *trilha* de G é um caminho, onde $v_i v_{i+1} \neq v_j v_{j+1}$, com $1 \leq i, j \leq n - 1$, com exceção de $v_1 = v_n$.

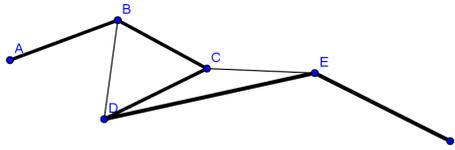


Figura 1.3 – Caminho simples

Um *ciclo* é o caminho que começa e termina no mesmo vértice. Uma trilha que começa e termina no mesmo vértice é denominado de *circuito*, vide a figura 1.4. Como neste trabalho não será utilizado laço, então o ciclo será maior ou igual a 3. Quando um grafo não possui ciclo simples, este é denominado *acíclico*.

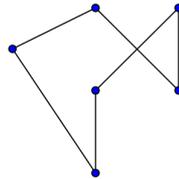


Figura 1.4 – Circuito

O *ciclo hamiltoniano* será um caminho simples que possui todos os vértices de um grafo. Dado um grafo G , com n vértices, representamos caminho por P_n e o ciclo por C_n . Um triângulo, quadrado, pentágono são o mesmo que um ciclo de comprimento 3, 4 e 5 respectivamente. Pela figura 1.5 temos o ciclo C_4 , podendo ser representado por (a, b, c, d) que é chamado de *quadrado*.

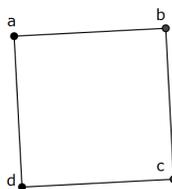


Figura 1.5 – Quadrado

Seja um grafo $G' = (V', A')$, será um *subgrafo* do grafo $G = (V, A)$ se, e somente se, $V' \subset V$, $A' \subset A$. Dizemos que G' é *subgrafo induzido* de G se, e somente se, dois vértices adjacentes em G' , também são adjacentes em G . Um subgrafo é dito *próprio*, quando dado um subgrafo H de G , temos $V(H) \neq V(G)$, ou $A(H) \neq A(G)$.

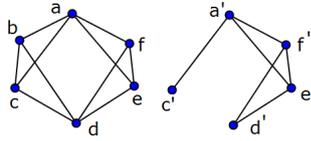


Figura 1.6 – Grafo G e G' subgrafo de G

Pela figura 1.6 vemos a esquerda o grafo G e a direita um subgrafo G' de G que não é induzido.

No intuito de facilitar a compreensão dos capítulos posteriores apresentaremos alguns tipos especiais de grafos.

Denominamos de *grafo completo* o grafo que dados dois vértices distintos, eles serão sempre adjacentes. Seja um grafo completo com n vértices, definiremos este por k_n .

Para todo grafo completo temos o seguinte resultado $|A_{MAX}| = \frac{|V| \cdot |V-1|}{2}$. Pela figura 1.7 temos $|V| = 5$, efetuando os cálculos obtemos:

$$|A_{MAX}| = \frac{|V| \cdot |V-1|}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

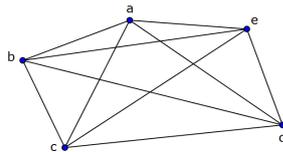


Figura 1.7 – Grafo k_5

Quando em um grafo todos os vértices possuem o mesmo grau, este é denominado *grafo regular de grau k* ou mais conhecido por grafo k - *regular*, onde k é o número de arestas que incide em cada vértice. Observe o grafo da figura 1.8, onde este também é um grafo completo.

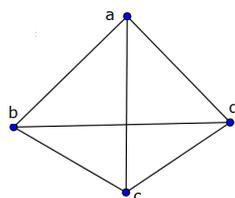


Figura 1.8 – Grafo 3-regular

Definimos G sendo um *grafo conexo*, quando sempre existe um caminho ligando cada par de seus vértices. Mas, se existir pelo menos um vértice em G onde não existe uma aresta ligando aos demais, ou seja, não há um caminho passando por tal vértice, este é denominado *grafo desconexo*. Um grafo G desconexo pode possuir uma *componente conexa*, se existir um subgrafo $G' \subset G$ tal que G' é um grafo conexo e não existir um grafo $F \subset G$ e $G' \neq F$.

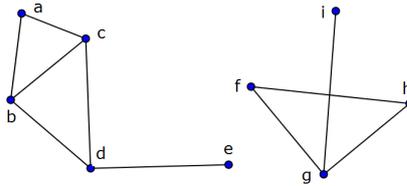


Figura 1.9 – Grafo desconexo

O grafo da figura 1.9 é desconexo, mas possui duas componentes conexas.

Uma *árvore* é um grafo G conexo e sem ciclos, mas se o grafo for desconexo e acíclico, este será denominado de *floresta*.

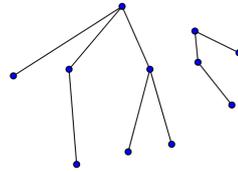


Figura 1.10 – Grafo de uma floresta com duas árvores

Dado um grafo $G(V, A)$ é chamado k - *partido* quando seu conjunto de vértices é seccionado em k partes, formando subconjuntos não vazios e todos disjuntos dois a dois, ou seja, $V = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, para $X_i \cup X_j = \emptyset$, com $i \neq j$, com as arestas de G da forma $\{a, b\}$, para a em X_i e b em X_j . Para determinada situação não existe vértices adjacentes em um mesmo subconjunto seccionado. Um dos grafos k -partido que falaremos em capítulos posteriores será o *grafo bipartido completo* definido por $G = K_{r,s}$, onde $A = V_1 \times V_2$ com $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$, Na figura 1.11, temos o grafo $k_{3,3}$.

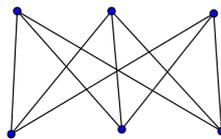


Figura 1.11 – Grafo $K_{3,3}$

Definimos como *grafo-linha* e representamos por $l(G)$ o grafo derivado de um grafo G onde as arestas de G serão os vértices de $l(G)$ e as arestas deste, são as arestas de G que

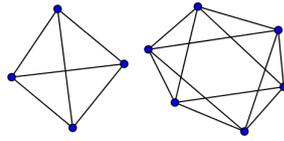


Figura 1.12 – Um grafo completo K_4 e seu grafo $l(K_4)$

possuir um vértice em comum. Logo para um grafo k -regular, o seu $l(G)$ será um grafo regular de grau $2k - 2$, vide a figura 1.12.

O *complemento* de um grafo $G(V, A)$ é o grafo $\bar{G}(\bar{V}, \bar{A})$, tal que $V = \bar{V}$, onde $\{v_i, v_j\} \notin A$ e $\{v_i, v_j\} \in \bar{A}$. Em outras palavras, o complemento de um grafo é o que falta para o grafo completo.

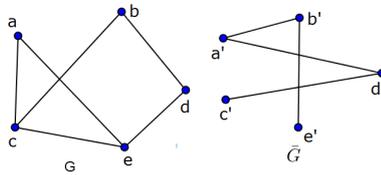


Figura 1.13 – Um grafo e seu complementar

A *união de grafos* é uma das operações que tem o intuito de facilitar o trabalho com grafos, pois em muitos casos é interessante trabalhar com grafos menores. Seja $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$ dois grafos, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, a união de $G_1 \cup G_2$ é o conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e o conjunto de arestas $A_1 \cup A_2$. Representamos por kG a união das k cópias de um grafo conexo G . A figura 1.14 mostra a união de duas cópias de um grafo completo K_5 .

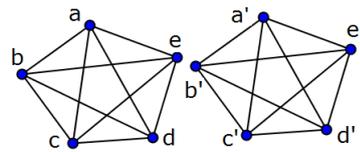


Figura 1.14 – $2K_5$

Um grafo é dito *planar* quando duas arestas quaisquer não se interceptam. Caso contrário ele é denominado grafo *não - planar*.

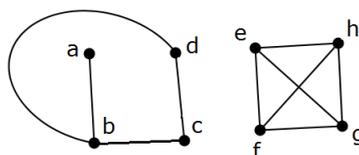


Figura 1.15 – Grafo planar à esquerda e grafo não planar à direita.

1.2.1 Alguns parâmetros sobre grafos

Dado um grafo $G(V, A)$ definimos como *grau mínimo de G* , o número

$$\delta = \min\{d(v) : v \in V\}.$$

Denotamos o *grau máximo de G* pelo número

$$\Delta = \max\{d(v) : v \in V\}.$$

E o *grau médio de G* é representado pelo número

$$\bar{d} = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v).$$

Temos que pelas definições apresentadas, é verificada de imediato, as seguintes relações:

$$\delta \leq \bar{d} \leq \Delta \quad \text{e} \quad \bar{d} = \frac{2|A|}{|V|}.$$

No exemplo abaixo temos que $\delta = 1$, $\Delta = 3$ e $\bar{d} = 2$.

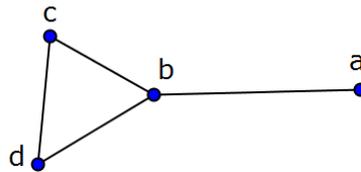


Figura 1.16 – Grafo G

Dado um grafo $G(V, A)$ conexo, com vértices v_i e v_j , definimos como *distância de v_i a v_j* e representamos por $d(v_i, v_j)$, o menor comprimento dos caminhos que conectam v_i a v_j . Enquanto o máximo das distâncias entre dois vértices quaisquer de G é denominado de *diâmetro de G* e é representado por $diam(G)$. Para todo grafo desconexo, temos que $diam(G) = \infty$.

Proposição 2. *O número máximo de vértices que pode assumir um grafo G com $diam(G) = D$ é igual a*

$$1 + \Delta + \Delta(\Delta + 1) + \Delta(\Delta + 1)^2 + \cdots + \Delta(\Delta + 1)^{D-1}.$$

Demonstração. Seja um vértice v_1 do grafo G , temos que v_1 está no máximo ligado a Δ outros vértices. Agora cada um desses vértices pode estar ligado no máximo a $\Delta - 1$ vértices, pois já estão ligados a v_1 , logo acrescentando no máximo $\Delta(\Delta - 1)$, podemos prosseguir desta maneira por $D - 1$ vezes, ao qual obteremos o resultado esperado

$$|V| \leq 1 + \Delta + \Delta(\Delta + 1) + \Delta(\Delta + 1)^2 + \cdots + \Delta(\Delta + 1)^{D-1}.$$

□

1.3 Isomorfismo

Dado dois grafos G e T um *isomorfismo* será uma bijeção f de $G(V)$ em $T(V)$, tal que dois vértices quaisquer v e u são adjacentes em G se, e somente se, $f(v)$ e $f(u)$ são adjacentes em T . Logo dois grafos serão isomorfos se for possível alterar os nomes de um deles de modo que os dois grafos fiquem iguais.

Para verificar se dois grafos G e T são isomorfos, basta analisar todas as bijeções de $G(V)$ em $T(V)$. O algoritmo existente não é muito eficiente para grafos com um número muito grande de arestas, pois se cada um dos grafos possui n vértices, o algoritmo leva aproximadamente um tempo proporcional a $n!$ ².

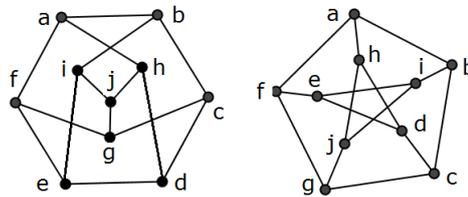


Figura 1.17 – Grafos de figuras isomorfas

² Recomendo a leitura de [10]

2 Noções de Álgebra Linear

Neste capítulo abordaremos algumas propriedades dos determinantes, apresentaremos os principais métodos para encontrar o determinante, além do estudo de autovalores e autovetores, com métodos para determinar o polinômio característico. Como suporte, utilizamos os livros [2] e [3].

2.1 Permutações

Dados n objetos distintos, tais que, a_1, a_2, \dots, a_n , define-se *permutação simples* dos n objetos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n objetos.

O número de permutações dos n elementos é dada por $n!$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definição 1. *Dada uma permutação dos inteiros $1, 2, 3, \dots, n$, há uma inversão quando um inteiro precede outro menor que ele.*

Exemplo 1. *Determine as permutações dos números 1, 2 e 3 e o número de inversões:*

Primeiramente consideremos todas as permutações de $\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \right|$, como $n = 3$, então o número de permutações é dado por $3! = 6$.

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right|$$

Agora basta analisar cada permutação para determinar o número de transposição:

Permutações	Inversões
$\left \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right $	0
$\left \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right $	1
$\left \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right $	2
$\left \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right $	1
$\left \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right $	2
$\left \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right $	3

Tabela 2.1 – Número de inversões

Observe o determinante de uma matriz A quadrada de ordem 3:

$$A = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Note que aparece todos os produtos da forma $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, onde $|j_1 j_2 j_3|$ são as permutações de 1, 2 e 3. Temos também que o sinal dos produtos é definido pela quantidade de inversões, ou seja, se a permutação tem um número *par* (*ímpar*) de inversão o sinal será *positivo* (*negativo*). Logo, generalizando para uma matriz $W = (w_{ij})_{n \times n}$, temos:

Definição 2. $\det W = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, onde $J = J|j_1 \cdots j_n|$ será o número de inversões da permutação $|j_1 \cdots j_n|$ e ρ indica a soma de todas as permutações de n .

Pode observar que para cada termo do somatório, há apenas uma única entrada de cada linha e uma única entrada de cada coluna da matriz.

2.2 Determinantes

A ideia associada a determinantes, tem na história o objetivo de resolver e aprofundar o estudo de sistemas lineares. Os registros históricos apontam que o estudo de determinantes deu-se por volta de 250 anos a.C., no livro chinês chamado de *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, que trazia exemplos sobre a resolução de sistemas lineares com o uso de matrizes.

A partir do século XVII que surgiu alguns trabalhos de expressão no ocidente. G. W. Leibniz (1646-1716) determinou uma condição de compatibilidade de um sistema linear de três equações com duas incógnitas, isto em função de um determinante de ordem três, onde tal determinante deveria ser zero, ou seja, nulo.

Outro matemático que contribuiu para o estudo de determinantes foi G. Cramer (1704-1752), com a conhecida Regra de Cramer, que determina a solução de um sistema de n equações e n incógnitas. Em 1748 foi publicado um trabalho chamado *Um Tratado sobre Álgebra em Três Partes*, escrito por Colin Maclaurin, nascido na Escócia (1698-1746). Neste trabalho foi apresentado o que ele chamou de *Teorema Geral*, um resultado que resolvia sistemas lineares com $n \times n$ com $n \leq 4$.

Em um trabalho publicado em 1812, de A. L. Cauchy (1789-1857), o estudo de determinantes ganhou sistematicamente o sentido atual, onde ele simplificou o estudo de determinantes, melhorou a notação e demonstrou o teorema da multiplicação de determinantes. Outro matemático com muita expressão no estudo de determinantes foi o alemão G. J. Jacobi (1804-1851), que apresentou uma forma bem simplificada da teoria dos determinantes, utilizada atualmente.

O determinante tem papel fundamental em várias áreas da matemática, diferentemente do que se acreditava ser apenas um método para resolução de sistemas. Como exemplos, podemos citar, critérios de invertibilidade de matrizes, cálculo de matriz inversa,

caso a matriz seja invertível, noção de polinômio característico de uma matriz, área de um paralelogramo, volume de paralelepípedo, Teorema da Função Inversa, Teorema da Função Implícita, Teorema de mudança de Variáveis, além de fornecer fórmulas explícitas para as soluções de um sistema de equações lineares.

Definição 3. *Determinante será uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar, ou seja, ela transforma essa matriz em um número real.*

2.2.1 Métodos práticos para determinantes de ordem $n \leq 3$

- Para uma matriz de ordem $n = 1$, segue que o determinante será a própria entrada da matriz. Assim seja $A = |a_{11}|_{1 \times 1}$, logo $\det A = a_{11}$.
- Quando uma matriz é de ordem $n = 2$, o determinante desta matriz será o produto dos elementos da diagonal principal subtraído pelo produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \text{Área do paralelogramo}$$

- Se temos uma matriz quadrada de ordem $n = 3$, temos o procedimento conhecido como *Regra de Sarrus*.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{volume do paralelepípedo}$$

Logo,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Para um estudo mais aprofundado sobre área do paralelogramo e volume do paralelepípedo, recomendamos [3, p. 118].

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right] \\ - \quad - \quad - \end{array} \quad (2.1)$$

O método 2.1 é bastante utilizado no ensino médio, onde seguem alguns procedimentos de fácil memorização.

Exemplo 2. Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, calcule o determinante pela Regra de Sarrus.

Demonstração. 1º passo: Copia-se as duas primeiras colunas após a matriz:

$$\begin{array}{cccccc} & + & + & + & & \\ & 1 & 2 & 3 & | & 1 & 2 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ & 1 & 2 & -1 & | & 1 & 2 \\ & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & 0 & 5 & 4 & | & 0 & 5 \\ & - & - & - & & & \end{array}$$

2º Passo: determinamos os produtos com sinal positivo \oplus das entradas da diagonal principal e, das duas filas na mesma direção da diagonal principal à sua direita.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 5$$

3º Passo: multiplicam-se as entradas da diagonal secundária precedidos de sinal negativo \ominus e, na mesma direção da diagonal secundária à sua direita.

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = -3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot 4$$

4º Passo: efetuamos as operações e obtemos o determinante da matriz.

$$\det B = 6 - 0 + 15 - 0 + 5 - 8 = 18$$

□

2.2.2 Propriedades dos Determinantes

Dada uma matriz $A \in M_{(nn)}$ ou quando não houver risco de dúvida $M(n)$, será o espaço das matrizes quadradas nos \mathbb{R} ou se necessário nos \mathbb{C} , com $n \geq 2$ e natural, é a seguinte função:

$$D: \begin{array}{l} M(n) \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto D(A) \end{array}$$

Propriedade 1. (i) D é linear como função em cada linha.

$$A = \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ - & - & L_2 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix}$$

Onde L_1, L_2, \dots, L_n , será os vetores linha . Logo, nossa função é $D_i = M(n) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$D \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_i + \lambda P_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix} + \lambda D \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & P_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix}$$

Propriedade 2. (ii) Se duas linhas adjacentes L_i e L_{i+1} são iguais, logo $D(A) = 0$.

Propriedade 3. (iii) Se I_n é a matriz identidade $D(I_n) = 1$.

Se D e D' satisfazem *i*, *ii* e *iii*, então $D = D'$. Logo D é denominado função determinante, ou simplesmente de determinante.

Propriedade 4. Se a matriz A tem uma linha (coluna) nula, $\det A = 0$.

Demonstração. De fato, pelo cálculo do determinante, em cada termo existe um dos elementos da linha (coluna) nula, logo, todos os termos do somatório se anulam, tornando o determinante nulo.

□

Propriedade 5. Se aplicarmos a transformação elementar $L_i \leftrightarrow L_j$, para $i \neq j$, $\det(A) = -\det(A)$

Demonstração. Ao trocar duas linhas de uma matriz, alteramos a paridade do número de inversões dos índices, logo, trocamos o sinal dos termos, ou seja, adicionamos uma transposição.

□

Propriedade 6. Se multiplicarmos uma linha desta matriz por uma constante, o determinante da matriz fica multiplicado pela constante.

Demonstração. Seja A a matriz que terá uma linha multiplicada por uma constante $k \in \mathbb{R}$ e B a matriz obtida após a multiplicação. Ao efetuar o cálculo do determinante da matriz B , temos em cada termo o elemento que foi multiplicado pela constante k . Assim se colocarmos k em evidência, obtemos o determinante da matriz A .

$$\det \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & kL_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix} = k \det \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix}$$

□

Propriedade 7. Se aplicarmos a transformação elementar de linhas $T : L_i \longleftrightarrow L_i + k \cdot L_j$, $i \neq j$ e seja B a nova matriz obtida de A por T . Então $\det(B) = \det(A)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $i < j$, dadas as matrizes

$$A = \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_i & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_j & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_i + kL_j & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_j & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix}$$

pela propriedade (i), temos

$$D(B) = D(A) + kD(C)$$

onde

$$C = \begin{vmatrix} - & - & L_1 & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_j & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_j & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & L_n & - & - \end{vmatrix}$$

como a matriz C tem duas linhas iguais, logo $D(C) = 0$, assim $D(B) = D(A)$.

□

Propriedade 8. Seja A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem, então $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

A demonstração pode ser encontrada em [2].

2.2.3 Desenvolvimento de Laplace

Seja $A = [a_{ij}] \in M(n)$. Considere A_{ij} a submatriz de A onde i -ésima e j -ésima coluna são descartadas. Então

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Na fórmula dada acima o determinante foi desenvolvido escolhendo a i -ésima linha, de forma análoga a fórmula é válida para colunas.

Essa demonstração pode ser encontrada em [3].

Exemplo 3. *Determine o determinante da matriz $A =$*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Escolhendo a primeira coluna, temos que

$$\det A = 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1) \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Calculando os determinantes das matrizes 3×3 , obtemos $\det A = -16$.

Proposição 3. *O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante de sua transposta.*

Demonstração. É fácil ver que se tratando de determinantes de matriz quadrada, o que vale para suas linhas, vale também para as colunas. Logo, utilizando o desenvolvimento de Laplace, segundo os elementos de uma coluna, temos

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

□

2.2.4 Autovalor e autovetores

Neste tópico será pressuposto que o leitor seja familiarizado com transformações lineares e operadores adjuntos.

Definição 4. *Dada uma transformação $T : V \rightarrow V$. Dizemos que o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T , se existe um vetor não nulo $\vec{v} \in V$, tal que*

$$T\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

E o vetor \vec{v} associado a λ é denominado de autovetor.

Demonstração. Seja $A = [T]$ e $I = [I_v]$, temos que

$$\begin{aligned} T\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ T\vec{v} &= \lambda I\vec{v} \\ T\vec{v} - \lambda I\vec{v} &= 0 \\ (T - \lambda I)\vec{v} &= 0 \\ (A - \lambda I)\vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

□

Corolário 2. *Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ não-vazio. W é subespaço de V se, e somente se, $u + \alpha v \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in W$.*

Propriedade 9. *Se \vec{u} e \vec{v} são autovetores associados a um mesmo autovalor λ , então $\vec{u} + \vec{v}$ também é um autovetor associado a λ .*

Demonstração.

$$\begin{aligned} T\vec{u} &= \lambda\vec{u} \\ T\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ T\vec{u} + T\vec{v} &= \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \\ T(\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda(\vec{u} + \vec{v}) \end{aligned}$$

□

Propriedade 10. *Se \vec{u} é um autovetor associado a um autovalor λ , então $\beta\vec{u}$ também é um autovetor associado a λ .*

Demonstração.

$$T\beta\vec{u} = \beta T\vec{u} = \beta\lambda\vec{u} = \lambda\beta\vec{u}$$

□

Quando não houver risco de confusão denotaremos o autovetor \vec{v} por v .

Exemplo 4. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (2x + y, 4x - y)$, determine $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, não nulo, tais que $T(x, y) = \lambda(x, y)$.*

Considere o sistema a seguir

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ 4x - y = \lambda y \end{cases} \quad (2.2)$$

Da primeira equação do sistema 2.2, temos $y = -2x + \lambda x$, substituindo y na segunda equação do sistema, obtemos

$$x(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0 \quad (2.3)$$

Logo a equação 2.3 é satisfeita com $x = 0$ ou $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, mas se $x = 0$, temos $y = 0$, obtendo o vetor v nulo, o que contradiz a definição de autovetores. Assim, segue de 2.3 que $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. O que nos fornece $\lambda = 3$ e $\lambda = -2$, que são os autovalores de T . Determinaremos os autovalores associados a $\lambda = 3$. De 2.2 temos

$$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ 4x - y = 3y \end{cases}$$

obtendo a equação $x = y$, cujo o conjunto solução é dado por $\{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ com $x \neq 0$.

Para $\lambda = -2$, segue de 2.2

$$\begin{cases} 2x + y = -2x \\ 4x - y = -2y \end{cases}$$

que equivale resolver a equação $y = -4x$, logo o conjunto solução é dado por $\{(x, -4x); x \in \mathbb{R}\}$, $x \neq 0$, ou por $\{(-\frac{y}{4}, y); y \in \mathbb{R}\}$, com $y \neq 0$.

Exemplo 5.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto 3v \end{aligned}$$

Para este exemplo, temos que 3 é um autovalor de T , se $(x, y) \neq (0, 0)$ será um autovetor de T associado ao autovalor 3. Geometricamente, representado por:

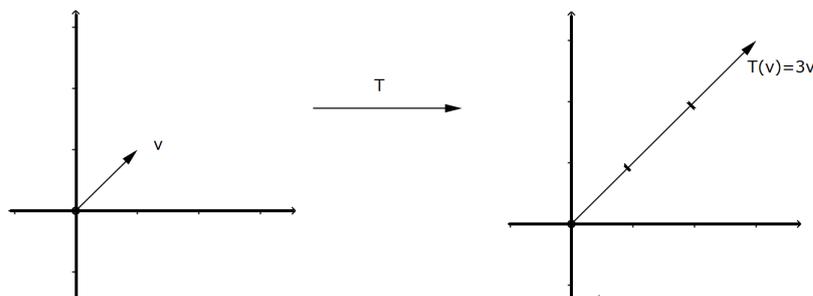


Figura 2.1 – Representação do vetor e autovetor

Logo, podemos generalizar toda transformação do tipo

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \mapsto \beta v$$

Seendo β um autovalor, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor associado. Note que $T(v)$ tem sempre a mesma direção do vetor v e ainda podemos obter pelos valores correspondentes a β .

1. $\beta < 0$, temos que T inverte o sentido do vetor v ;
2. $|\beta| > 1$, T faz uma dilatação no vetor v ;
3. $|\beta| < 1$, temos que T contrai o vetor v ;
4. $\beta = 1$, logo T é identidade.

Exemplo 6. Dado o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva cada vetor $u \in \mathbb{R}^2$ em sua projeção ortogonal sobre o eixo Oy .

Geometricamente, temos

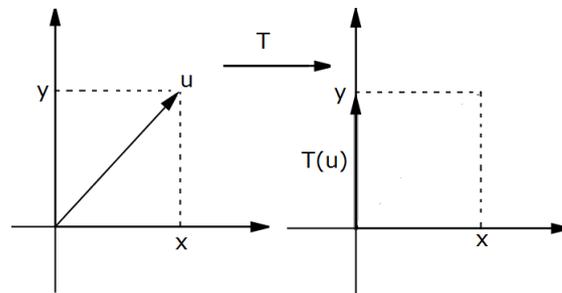


Figura 2.2 – Representação do vetor u e sua projeção sobre o eixo Oy

Pela figura 2.2, se escrevemos $u = T(u) = (u_1, u_2)$, nos fornece as seguintes equações

$$u_1 = 0 = 0x + 0y, u_2 = y = 0x + 1y.$$

Seja β a base canônica do \mathbb{R}^2 , temos

$$[T(v)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [v]_{\beta}$$

Exemplo 7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que toma um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ e faz uma rotação por um ângulo fixo θ em \mathbb{R}^2 .

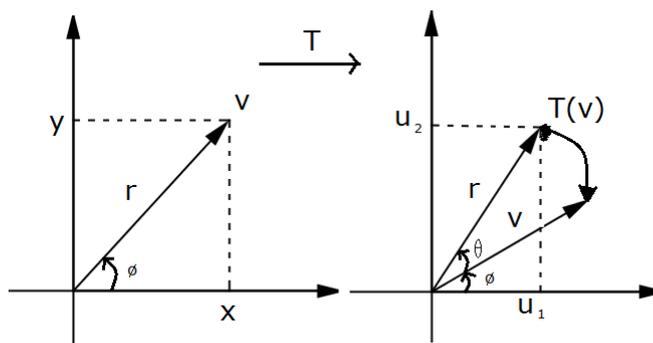


Figura 2.3 – Representação do vetor u e sua projeção sobre o eixo Oy

Seja $u = T(v) = (u_1, u_2)$, pela trigonometria temos

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \quad (2.4)$$

$$u_1 = r \cos(\theta + \phi), \quad u_2 = r \operatorname{sen}(\theta + \phi) \quad (2.5)$$

onde ϕ é o ângulo compreendido entre v e o eixo Ox positivo e no sentido anti-horário e r representa o comprimento de v . Aplicando as identidades trigonométricas em 2.5, obtemos

$$\begin{cases} u_1 = r \cos \theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ u_2 = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi. \end{cases} \quad (2.6)$$

Substituindo 2.4 nas expressões 2.6, temos

$$\begin{cases} u_1 = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\ u_2 = x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta. \end{cases} \quad (2.7)$$

Logo, se β é a base canônica de \mathbb{R}^2 , a matriz rotação é dada por

$$[T(v)]_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} [v]_{\beta} \quad (2.8)$$

Exemplo 8. Considere o caso de $\theta = \frac{\pi}{4}$ determine a rotação sobre o vetor $\vec{v} = (2, 2)$.

Para $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ considerando o vetor na base canônica e substituindo na equação 2.8, temos que a matriz rotação é dada por

$$T(2, 2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz coordenadas é dada por

$$T(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Onde encontramos sua projeção sobre o eixo Oy , dada pela coordenada $(0, 2\sqrt{2})$.

Exemplo 9. Considere um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, tal que $\vec{v} = (4, 1)$ que faz uma rotação por um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e depois por outro ângulo $\phi = \frac{\pi}{6}$, com θ, ϕ fixo em \mathbb{R}^2 . Determine a matriz rotação.

Logo, queremos determinar $R_{\theta+\phi}$, onde R é a transformação dada pela matriz 2.8, para encontrar $R_{\theta+\phi}$ basta determinar $R_{\theta+\phi} = R_{\theta} \circ R_{\phi}$.

$$T_{\theta+\phi}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} (\vec{v}) \quad (2.9)$$

$$T_{\theta+\phi}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \text{sen}\theta\text{sen}\phi & -\cos\theta\text{sen}\phi - \text{sen}\theta\cos\phi \\ \text{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\text{sen}\phi & -\text{sen}\theta\text{sen}\phi + \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} (\vec{v}) \quad (2.10)$$

Temos que, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\phi = \frac{1}{2}$. Logo, após substituir na matriz 2.10, obtemos:

$$T_{\theta+\phi}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4} \\ \frac{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Assim, após as duas rotações, a coordenada do vetor \vec{v} é $(\frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4})$.

2.2.5 Polinômio Característico

Dada uma matriz A de ordem n e λ uma incógnita, a matriz $A - \lambda I_n$ é denominada de *matriz característica de A*. O determinante dessa matriz será uma polinômio em λ chamado de *polinômio característico* e representada por $P_A(\lambda)$.

Exemplo 10. Pela matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, determine o polinômio característico.

Determinando a matriz característica de A .

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

logo o polinômio característico é

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 7$$

O próximo resultado irá nos mostrar uma grande relação envolvendo polinômio característico e autovalores.

Teorema 2. *Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ será um autovalor de A se, e somente se, λ é raiz do polinômio característico de A , ou seja, $P_A(\lambda) = 0$.*

Demonstração. Considere A uma matriz quadrada de ordem n . Os autovalores e autovetores associados a matriz A são aqueles que satisfazem as equações da definição 4, ou seja,

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \text{ ou } A\vec{v} = \lambda I\vec{v} \text{ ou } A - \lambda I\vec{v} = 0$$

Escrevendo esta última equação, temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sem perder de generalidade, chamemos a matriz dos coeficientes de B . Logo, se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, sabemos que o sistema tem apenas uma única solução que é a trivial nula, ou seja, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, temos que $\vec{v} = 0$, mas como queremos $\vec{v} \neq 0$, pois a definição de autovetor exclui o vetor nulo, então para que o sistema homogêneo $(A - \lambda I) = 0$ tenha solução não trivial, logo a matriz $B = A - \lambda I$, deve ser não invertível, tal que a matriz $B = A - \lambda I$ não é linha equivalente à identidade, assim queremos ter $\det(A - \lambda I) = 0$.

□

Generalizando para o caso de $n = 2$, segue

$$P_A(\lambda) = (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Como queremos $P_A(\lambda) = 0$, obtemos uma equação do segundo grau, onde seu discriminante é dado por

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (2.11)$$

Suponha que $\Delta > 0$, as raízes serão dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4(a_{12}a_{21})}}{2} \quad (2.12)$$

Note que se a matriz A for simétrica, neste caso, tal que $a_{12} = a_{21}$, esta possui dois autovalores reais, pois o discriminante é da forma

$$\Delta = ((a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2) > 0. \quad (2.13)$$

Definição 5. Para toda matriz simétrica de ordem n é válido os seguintes itens:

1. Há n autovalores reais, tal que, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$;
2. Autovetores de autovalores diferentes são ortogonais;
3. Se λ possui multiplicidade ϕ em $P(\lambda)$, logo há ϕ autovetores linearmente independentes;
4. Há uma base ortonormal de autovetores.

Exemplo 11. Determine se existir os autovalores e autovetores associados a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Logo queremos encontrar

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 \\ &\lambda^2 - 6\lambda + 9 = P(\lambda) \end{aligned}$$

Pelo teorema 2 acima precisamos ter $P(\lambda) = 0$, $(3 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$, assim encontraremos $\lambda = 3$. Então os autovalores da matriz A é 3 com multiplicidade igual a 2.

Agora iremos encontrar os autovetores associados aos autovalores obtidos pela matriz A .

Para $\lambda = 3$, temos

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 0x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3x_1 \\ 3x_2 = 3x_2 \end{cases} .$$

Temos $x_2 = 0$

Portanto os autovetores associados a $\lambda = 3$ são da forma $v = (x_1, 0)$, com $x_1 \neq 0$.

Segundo [2] a multiplicidade geométrica de um autovalor λ é a dimensão do subespaço V_λ de autovetores associados a λ .

Teorema 3. (Cayley-Hamilton) *Seja $A \in M(n)$ e seja $P_A(\lambda)$ o polinômio característico de A . Então $P_A(A) = 0$, onde 0 é a matriz nula de $M(n)$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3].

Um fato importante sobre o teorema acima é que a potência A^n , de uma matriz $M(n)$, pode ser escrita como combinação linear das potências de A com expoentes menores que n . Assim este teorema nos fornece um meio para o cálculo de tal potência, mas ainda assim é um processo muito trabalhoso.

Exemplo 12. *Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.*

Temos que o polinômio característico da matriz A é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton $P_A(A) = \det(A - \lambda I) = 0$

Iremos "provar" o resultado, fazendo $P_A(A) = A^2 - 7I_2 = 0$, temos

$$\begin{aligned} P_A(A) &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2.3 Diagonalização

Definição 6. Sejam $A, B \in M(n)$, dizemos que A e B são similares se, e somente se, existir uma matriz $P \in M(n)$ e invertível, tal que $A = P^{-1}BP$.

Como consequência imediata da definição 6, temos

1. Se A e B são similares, então, $\det A = \det B$;
2. Sejam A, B e $C \in M(n)$, se $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Exemplo 13. Verifique se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -7 & -43 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, são similares.

Para verificar se as matrizes A e B são similares, devemos encontrar uma matriz P invertível, tal que $PA = BP$. Sem perda de generalidade, considere P sendo uma matriz de segunda ordem

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -43 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y & 3x - 2y \\ z - t & 3z - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x - 43z & -7y - 43y \\ x + 6z & y + 6t \end{pmatrix}$$

o que é equivalente ao sistema homogêneo

$$\begin{cases} 8x - y + 43z = 0 \\ -y + 3z - 8t = 0 \\ 3x + 5y + 43t = 0 \\ -x - 5z - t = 0 \end{cases}.$$

Que admite solução $(-5z - t, 3z - 8t, z, t)$, logo para $z = y = 1$ temos a solução não trivial, $(-6, -5, 1, 1)$. Assim obtemos a matriz invertível

$$P = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que satisfaz $A = P^{-1}BP$.

Teorema 4. *Se um operador linear $T : V \rightarrow V$ admitir uma base β na qual a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$, será diagonal se, e somente se, β for formada por autovetores.*

Demonstração. Suponha que $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, seja uma base de V formada por autovetores de T . Logo, existem números reais a_1, a_2, \dots, a_n , tais que, para cada $1 \leq i \leq n$, $T(v_i) = a_i v_i$. Assim pela definição de $[T]_{\beta}^{\beta}$, temos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Necessariamente não precisamos ter os a_i 's todos distintos, um autovalor aparecerá na diagonal quantas vezes forem os vetores linearmente independentes.

Suponhamos que pela transformação $T : V \rightarrow V$, temos uma base $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ formada por autovalores de tal modo que seja diagonal, logo

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

como, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$T(u_i) = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + b_i u_i + 0u_{i+1} + \cdots + 0u_n = b_i u_i,$$

onde b_i será um autovalor de T e u_i é um autovetor de T associado ao autovalor. Assim β será uma base formada por autovetores. \square

Teorema 5. *Seja uma matriz $A \in M(n)$, esta será diagonalizável se, e somente se, existir uma matriz P invertível de ordem n , tal que, $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.*

Demonstração. Tome $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e seja α a base canônica do \mathbb{R}^n , pela definição de matrizes similares, temos

$$[T_A]_{\beta}^{\beta} = [I_{\mathbb{R}^n}]_{\beta}^{\alpha} [T_A]_{\alpha}^{\alpha} [I_{\mathbb{R}^n}]_{\alpha}^{\beta}.$$

Onde $I_{\mathbb{R}^n} = P$ que é equivalente a

$$[T_A]_{\beta}^{\beta} = P^{-1}AP.$$

Como a matriz $P^{-1}AP$ é diagonal, temos que T_A , também é uma matriz diagonal. Logo T_A e A são diagonalizáveis. \square

Definimos a matriz P como a *matriz que diagonaliza A* .

Exemplo 14. *Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizável, encontre a matriz P que diagonaliza A e determine $P^{-1}AP$.*

Seja α a base canônica do \mathbb{R}^2 , logo iremos calcular os autovalores e autovetores pelo polinômio característico

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

assim obtemos $\lambda = 5$ e $\lambda = -2$.

Para $\lambda = 5$, temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

encontrando o conjunto $\{(\frac{4}{3}y, y); y \in \mathbb{R}\}$.

Para $\lambda = -2$, temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

obtendo o conjunto $\{(-y, y); y \in \mathbb{R}\}$.

Logo a matriz P que diagonaliza A é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E uma representação para a matriz $B = P^{-1}AP$ diagonal é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Proposição 4. *Seja $A \in M(n)$ e diagonal e $P \in M(n)$ e invertível, então*

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

Demonstração. De fato, se A é diagonalizável, $B = P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, assim

$$B^n = P^{-1}A^nP$$

que é equivalente a

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

□

O que torna o cálculo de A^n , bem mais fácil se soubermos que A é uma matriz diagonalizável, pois efetuamos apenas com dois produtos de matrizes.

Exemplo 15. *Determine a matriz A^{50} , onde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.*

Encontraremos uma matriz P que diagonaliza A , então

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 8 \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)^2$$

logo, se anula para $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$ que são os autovalores, assim determinando os autovetores associados aos autovalores.

Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

determinando o conjunto $\{(x, 0, 0), (0, 4z, z); x, z \in \mathbb{R}\}$, e para $\lambda = -1$, segue

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

encontramos o seguinte conjunto $\{(x, x + 4z, z); x, z \in \mathbb{R}\}$.

Sem perda de generalidade, tomemos $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 4, 1)$ e $v_3 = (1, 5, 1)$, para os respectivos autovalores $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, assim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como

$$B^{50} = I_3$$

temos

$$A^{50} = PB^{50}P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3.$$

3 Exemplos de grafos

Neste capítulo trabalharemos alguns exemplos sobre grafos, tais como, a ideia ligada à sua origem, aplicação em jogos e situações mais complexas, envolvendo autovalores associados a grafos.

3.1 Um pouco de História

Como na maioria dos casos, a busca pelo estudo de certos assuntos da Matemática se dá na tentativa de solucionar ou facilitar o trabalho do ser humano. Registros históricos, relatam que o estudo de grafos deu-se na tentativa de resolver um problema na cidade de Königsberg, atualmente conhecida como Calinindrado, localizada na região da Rússia. A cidade de Königsberg é banhada pelo rio Preguel, que possui duas ilhas que fazem parte da cidade, e que na época, para ter acesso as ilhas, havia sete pontes que fazia esta ligação. Vide a figura 3.1:

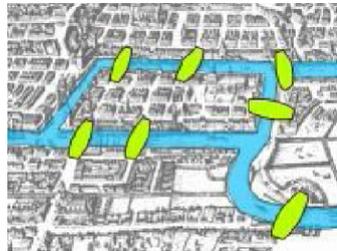


Figura 3.1 – Cidade de Königsberg em 1736

Logo, na cidade começou um questionamento pelos moradores, que era o seguinte: *Será que é possível, sair de casa e atravessar as sete pontes cada uma delas, uma única vez e retornar para casa?*

O problema levantado pelos moradores ficou conhecido como o *Problema das Pontes de Königsberg*, que chamou a atenção do matemático Leonard Euler (1707-1783), que modelou o problema para a Matemática e provavelmente, foi o primeiro matemático a estudar tal teoria e escrever sobre o assunto.

O problema pode ser modelado pelo grafo da figura 3.2.

Note que os vértices A, B, C e D são as margens do rio e as ilhas, e as arestas correspondem às pontes.

Assim Leonard Euler estabeleceu um teorema que mostra em que condições é possível percorrer cada aresta uma única vez e retornar ao ponto de partida.

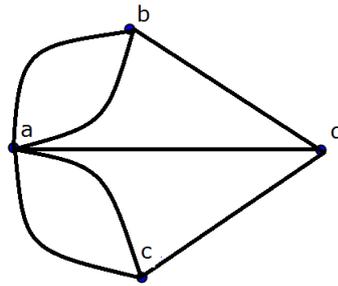


Figura 3.2 – Problema das Pontes de Königsberg

Antes de tal resultado, precisamos ressaltar que uma *Trilha Euleriana* é uma trilha que contém todas as arestas de um grafo G . De modo análogo, um circuito que contém todas as arestas de um grafo G é dita de *Circuito Euleriano*. Logo G será um *grafo Euleriano* se possuir um circuito Euleriano.

Lema 1. *Dado um grafo G onde o grau de cada vértice é pelo menos dois, então o grafo G contém um ciclo.*

Demonstração. Para o caso de um grafo G possuir arestas múltiplas ou laço, já se verifica o resultado.

Agora, seja G um grafo simples, tomemos $v \in V$, para construir um ciclo recursivo, escolhamos sem perda de generalidade, v_1 adjacente a v , logo para cada $i > 1$, escolhamos $v_{i+1} \neq v_{i-1}$ adjacente a v_i . Assim a existência de tais vértices é garantida pela hipótese de cada vértice ter pelo menos duas arestas adjacentes a este, como G tem um número finito de vértices, em algum momento teremos que escolher um vértice que já foi escolhido. Assim, obtemos o ciclo esperado.

□

Teorema 6. *Dado G um grafo conexo, G será Euleriano se, e somente se, cada vértice de G for par.*

Demonstração. De fato, suponha que K seja um circuito do grafo G . Logo, se K passa por um vértice qualquer v , temos que K contribuir com duas arestas para o grau do vértice G . Como K é um circuito, ou seja, cada aresta do grafo G ocorre apenas uma única vez. Assim cada vértice de G é par.

Agora provaremos por indução o número de arestas.

Se G é um grafo conexo com apenas uma aresta, possui todos os vértices pares se, e somente se, esta aresta é um laço.

Para G conexo, temos que o grau de cada vértice é no mínimo dois. Assim, G pelo lema 1, contém um ciclo C , se o ciclo C conter todo o grafo G , a demonstração

está completa. Se não, removeremos de G as arestas de C formando um novo grafo F (provavelmente desconexo), com cada vértice par. Como $F \subset G$, logo F tem menos arestas que G e pela hipótese de indução, F tem um circuito Euleriano. Assim, cada componente de F tem um ponto em comum com C . Obtemos então um circuito Euleriano em G . Fazendo as arestas sair de C , até um vértice não isolado de F , traçando um circuito Euleriano em F , que contém este vértice e continuando ao longo das arestas de C , até encontrarmos outra componente de F . Repetimos o processo continuamente, até encontrarmos o vértice inicial.

□

Pelos resultados demonstrados acima, podemos resolver o *Problema das Pontes de Königsberg*. Note que pela figura 3.2, é impossível obter um circuito Euleriano, pois o grafo que representa as pontes possui todos os vértices ímpares e, pela definição, um circuito será Euleriano se, e somente se, possuir todos os vértices pares. Logo, não é possível sair de casa e passar pelas sete pontes uma única vez e retornar para a casa.

3.2 Canibais e Vegetarianos

Considere uma região formada por canibais e vegetarianos. Em um determinado ponto, encontram-se na margem esquerda ME de um rio dois canibais e dois vegetarianos, tais que estes necessitam atravessar para a margem direita MD do rio. Após determinado tempo de caminhada, o grupo encontra uma canoa, onde esta pode atravessar apenas dois indivíduos por viagem e ela não atravessa o rio sozinha. O problema consiste em atravessar o grupo de canibais e vegetarianos de modo, que em nenhum momento, o número de canibais numa margem do rio possa ser maior que o número de vegetarianos.

Vamos representar uma possível solução para o problema em forma de um grafo, onde o vértice será um cenário válido e a aresta será transição de cenário para outro. Como notação, usaremos $c1$ e $c2$ para canibais e $v1$ e $v2$ para vegetarianos, o barco será representado por $\setminus B$, uma representação seria: $c1 c2 v1 v2 \setminus B \rightarrow ME$: dois canibais, dois vegetarianos e o barco; MD , vide figura 3.3.

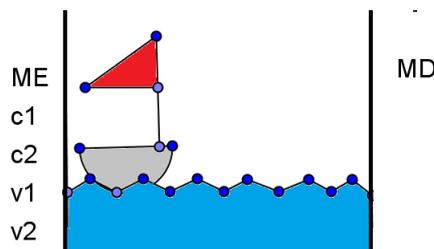


Figura 3.3 – Margem esquerda, dois canibais e dois vegetarianos

Outra representação seria: $c1 v1 \setminus B c2 v2 \rightarrow ME$: um canibal e um vegetariano; MD barco um canibal e um vegetariano, representado pela figura 3.4.

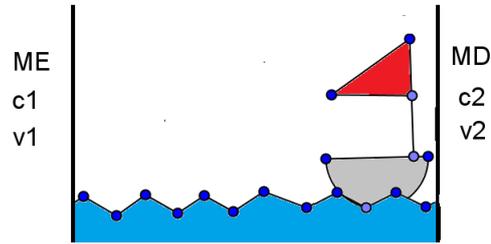


Figura 3.4 – ME: um canibal e um vegetariano, MD: barco, um canibal e um vegetariano

Uma possível sequência de senários válidos é dada pela figura 3.5.

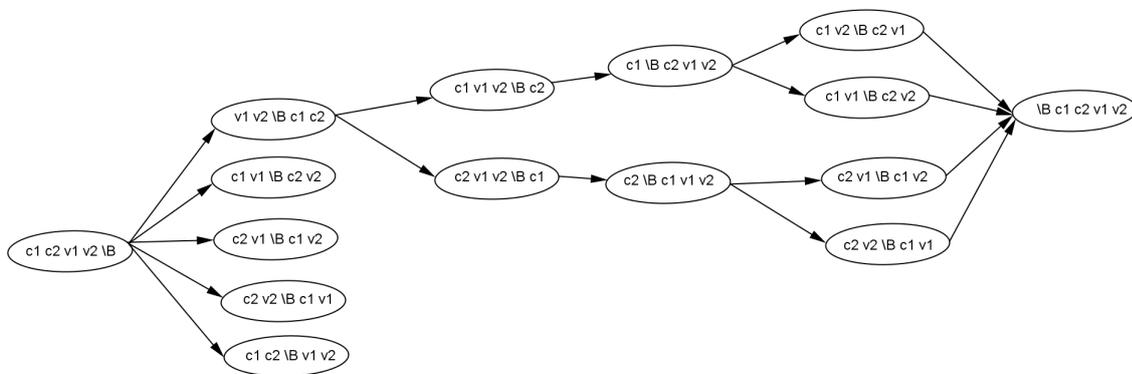


Figura 3.5 – Modelo usando grafos canibais e vegetarianos

Representando por meio de um grafo, a sequência de senários da figura 3.5, obtemos a representação da figura 3.6.

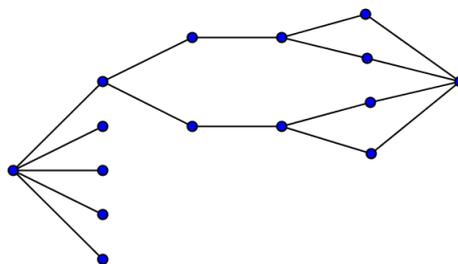


Figura 3.6 – Grafo de canibais e vegetarianos

3.3 Grafo no Jogo de Xadrez

Seja um tabuleiro generalizado de xadrez, contendo p linhas e p colunas ¹, logo os vértices do grafo serão as casas do tabuleiro de xadrez. Temos que, dois vértices são

¹ O tabuleiro usual possui oito linhas e oito colunas

ditos adjacentes se, e somente se, o *cavalo* do jogo de xadrez pode saltar com apenas um único movimento de um vértice para o outro. Assim, denominamos este por *grafo dos movimentos do cavalo*, ou por *grafo do cavalo*.

A figura 3.7 mostra todos os vizinhos do vértice no grafo do cavalo.

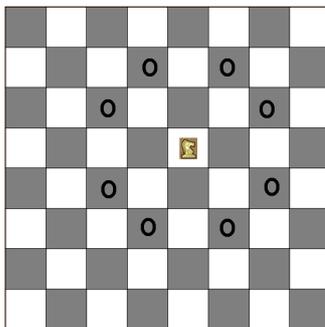


Figura 3.7 – Grafo do cavalo

Uma representação por meio de um grafo da figura 3.7 é dada pela figura 3.8.

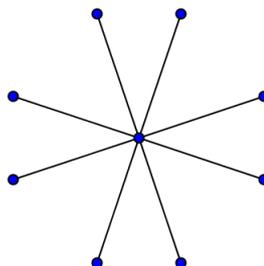


Figura 3.8 – Representação isomorfa

Uma representação isomorfa do grafo 3.8, obtemos um grafo bipartido $k_{1,8}$, representado pela figura 3.9.

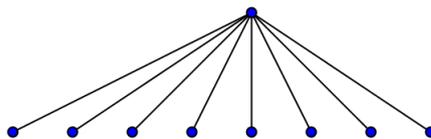


Figura 3.9 – Grafo $k_{1,8}$ do cavalo

Pelo exemplo da figura 3.7, definimos, o *grafo do bispo*, da *torre*, da *dama* e o *rei* $p \times p$.

3.4 O Problema das Casas

Antes de mostrar o problema das casas, mostraremos alguns resultados, com o intuito de solucionar tal problema.

Demonstraremos uns dos mais famosos resultados da matemática, conhecida como *relação de Euler*.

Teorema 7. *Se um poliedro convexo possui V vértices, A arestas e F faces, então*

$$V - A + F = 2$$

Demonstração. Considere um poliedro convexo com número finito de faces, sobre um plano α . Agora, considere uma reta r perpendicular ao plano α de tal modo que r não seja paralela a nenhuma aresta do poliedro. Considere todas as retas paralelas a r , em especial as que tocam as arestas do poliedro, estas dividiram o poliedro em três partes, que são: a que é tocada pelas retas paralelas a r , que forma o contorno aparente do poliedro, as retas que tocam o poliedro em dois pontos (pois o poliedro é convexo) irá formar as duas outras partes, a parte acima do contorno aparente e a parte abaixo do contorno aparente. A projeção das arestas do contorno aparente formam sobre o plano α um polígono.

Vamos determinar a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro. Seja n_i o número de lados da face i , com $1 \leq i \leq F$.

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2)$$

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + \cdots + 2)]$$

temos

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_F = 2A \text{ e a soma } 2 + 2 + \cdots + 2 = 2F$$

assim

$$S = 2\pi(A - F) \tag{3.1}$$

Dividindo o poliedro em dois, sobre o contorno aparente. Agora considere a projeção do contorno aparente e das arestas acima do contorno sobre o plano α . Ao projetar as faces do poliedro sobre o plano a soma dos ângulos internos das faces do poliedro não se altera.

Seja v_0 o número de vértices do contorno aparente e v_1 o número de vértices da parte acima do contorno aparente. Calculando a soma dos ângulos internos da projeção,

temos que o polígono do contorno aparente tem v_0 vértices, logo tem v_0 lados e os vértices da parte de cima, ao ser projetados sobre o plano α o ângulo de cada vértice é 360 graus.

$$S_1 = \pi(v_0 - 2) + 2\pi v_1 \quad (3.2)$$

Considere agora a projeção do contorno aparente e das arestas da parte abaixo deste. Seja v_2 o número de vértices da parte abaixo do contorno aparente. De modo análogo a soma da parte acima, temos

$$S_2 = \pi(v_0 - 2) + 2\pi v_2 \quad (3.3)$$

Logo, temos a igualdade

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ S &= 2\pi(v_0 - 2 + v_1 + v_2) \\ S &= 2\pi(v - 2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Juntando 3.1 e 3.4, obtemos

$$\begin{aligned} A - F &= V - 2 \\ V - A + F &= 2 \end{aligned}$$

□

A fórmula acima também é válida para grafos planares.

Eis que o problema das casas é o seguinte:

Em um pequeno condomínio há três casas, onde precisam ser levados para estas, redes de água, luz e telefone, de tal modo, que as redes não se interceptem (cruzem). Será que é possível fazer tal ligação, satisfazendo a condição de não se interceptar?

O problema acima pode ser modelado para um desenho. Veja uma representação de tal modelo pela figura 3.10.

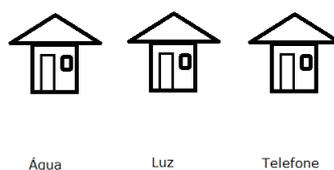


Figura 3.10 – Modelo das casas

Proposição 5. *Se G é um grafo planar simples com V vértices e A arestas, então $A \leq 3V - 6$. Sendo válida a igualdade, então toda face é limitada por três arestas.*

Demonstração. Em um grafo como cada aresta pode contribuir no máximo com duas faces, temos

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots \quad (3.5)$$

Seja a soma de todas as faces dada por

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots \quad (3.6)$$

Seja $C = \sum_F g(F)$ a soma dos graus de todas as faces, logo $C \leq 2A$, mas como cada face é limitada por no mínimo três arestas, então $C \geq 3F$. De (1) segue

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots \\ &= (3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \dots) + (F_4 + 2F_5 + \dots) + \dots \\ &= 3F + (F_4 + 2F_5 + \dots) \\ &\geq 3F \end{aligned}$$

logo

$$3F \leq 2A$$

Analogamente $3V \leq 2A$.

Da relação de Euler $V - A + F = 2$ vem

$$A + 2 = V + F.$$

Multiplicando por 3 temos:

$$3A + 6 = 3V + 3F,$$

mas como

$$3V \leq 2A,$$

temos

$$3A + 6 \leq 2A + 3F,$$

logo

$$A + 6 \leq 3F.$$

Então

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A.$$

Se as igualdades forem válidas, temos $2A = C = 3F$, se o grau de uma face for estritamente maior que três, a soma dos graus será maior que $3F$. Logo, toda face é limitada por três arestas.

□

Lema 2. O grafo bipartido completo $k_{3,3}$ não é planar, vide a figura 1.11 na página 27.

Demonstração. Pela relação de Euler segue que, $V = 6$, $A = 9$, logo $F = 5$.

Por $C = \sum_F g(F) \leq 2A = 18$. Outro fato é que não há triângulos em grafos bipartidos, pois cada face de $k_{3,3}$, tem no mínimo quatro arestas, nos fornecendo $C \geq 4F = 20$.

Em nota, teríamos que para o grafo $k_{3,3}$ ser planar, $C \leq 18$ e $C \geq 20$, o que é um absurdo.

□

Note que em nosso problema das casas, o grafo associado a figura 3.10 é dado por

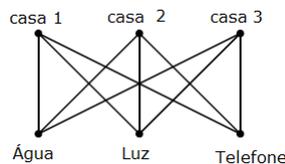


Figura 3.11 – Grafo das casas

Pelo lema anunciado acima temos que nosso problema não tem solução. Mesmo se adotarmos o Teorema da Curva de Jordan, para uma leitura mais aprofundada, recomendamos [4], não há como levar água, luz e telefone para as três casas, de modo que os serviços não se intercepte.

3.5 Matriz de adjacência

Definição 7. *Seja um grafo $G = (V, A)$, com n vértices. Denominamos de matriz de adjacência de G , representada por $A(G)$, a matriz quadrada de ordem n , onde as entradas é dada por*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in A \text{ com } v_i, v_j \in V \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

Logo, como podemos representar um grafo por meio de uma matriz especial (matriz de adjacência), utilizaremos alguns resultados envolvendo matrizes, em especial, o polinômio característico e sua ligação com autovalores e autovetores. Onde este será de suma importância no estudo de grafos, como veremos a seguir.

Definição 8. *Se a matriz de adjacência $A(G)$ possui autovalores distintos $\lambda_1 > \dots > \lambda_t$ com multiplicidades iguais, tais que, $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_t)$, o **espectro do grafo** G , representado por $\text{spect}(G)$, é a matriz $2 \times t$, onde a primeira linha é definida pelos autovalores distintos de $A(G)$ colocados em ordem decrescente e a segunda linha, é constituída pelas suas respectivas multiplicidades algébricas. Temos também, que o maior autovalor de G é denominado por **índice de G** e representado por $\text{ind}(G)$.*

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_t \\ m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 16. *Dado o grafo $G = (V, A)$ abaixo, determine a matriz matriz de adjacência, o espectro e o índice.*

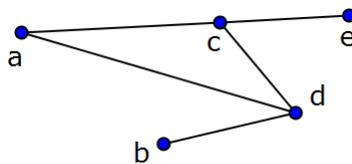


Figura 3.12 – Grafo G

Sua matriz de adjacência é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é $P_G(\lambda) = -\lambda^5 + 4\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda$ e seu espectro é dado por

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 & -1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o $\text{ind}(G) = 2$.

Estudos recentes envolvendo hidrocarbonetos insaturados, tendo sua estrutura molecular sendo representada por grafos, ao se determinar os autovalores deste grafo, pela teoria de Hückel [9], tais valores equivalem os níveis de energia dos elétrons π . Logo ao se determinar o espectro de um grafo molecular, estamos na verdade encontrando o nível de energia orbital molecular. Lembramos que a determinação do espectro de um grafo não é algo fácil de se obter.

A proposição abaixo nos oferece um resultado muito importante para a determinação de autovalores associados a uma matriz de adjacência.

Proposição 6. *Seja G um grafo com n vértices e k arestas e seja seu polinômio característico dado por*

$$P_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Logo os coeficientes de $P_G(\lambda)$ satisfazem:

- i) $a_1 = 0$;*
- ii) $a_2 = -k$*
- iii) $a_3 = -2t$, onde t é o número de triângulos no grafo.*

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em [1].

Proposição 7. *Se G é um grafo regular de grau n , logo n é um autovalor.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $\mathbf{1}$ sendo o vetor coluna, tal que, $[\mathbf{1} \ \mathbf{1} \ \cdots \ \mathbf{1}]^T$. Segue que a soma de cada entrada da matriz de adjacência de G é n , $A = A(G)$. Onde n é o grau da cada vértice. Assim, $A\mathbf{v} = n\mathbf{v}$, ou seja, n é um autovalor.

□

Exemplo 17. *Um grafo em particular, muito utilizado como contraexemplos, é o grafo de Petersen. Pela figura abaixo, determine sua matriz de adjacência, seu índice, os coeficientes a_2 e a_3 do seu polinômio característico sem efetuar os cálculos.*

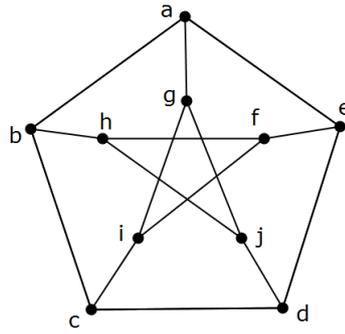


Figura 3.13 – Grafo de Petersen

Sua matriz de adjacência é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seu índice é $\text{ind}(G) = 3$. Já os coeficientes $a_2 = -15$, pois é o número de arestas e $a_3 = 0$, pois não há triângulos no grafo de Petersen.

Exemplo 18. Prove que o grafo do cubo da figura abaixo é bipartido.

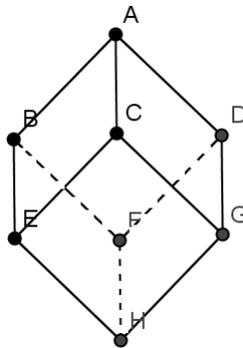


Figura 3.14 – Grafo do cubo

Basta notar que o grafo do cubo possui várias representações isomorfas. Uma delas é dada por:

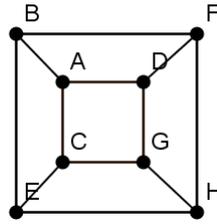


Figura 3.15 – Grafo cubo

Se escolhermos um vértice qualquer e, a partir deste, escolhermos outro vértice, tal que, não seja adjacente, assim temos dois conjuntos de vértices. O conjunto $V = \{B, H, C, D\}$ e $W = \{A, G, E, F\}$, onde por outro isomorfismo, obtemos:

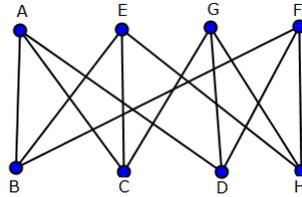


Figura 3.16 – Grafo bipartido cubo

ou seja, um grafo bipartido.

Para facilitar a visualização do isomorfismo entre o cubo e sua representação no grafo bipartido, outro modo é desenhar o cubo em um sistema cartesiano, onde um dos seus vértices se encontre na origem, vide a figura 3.17.

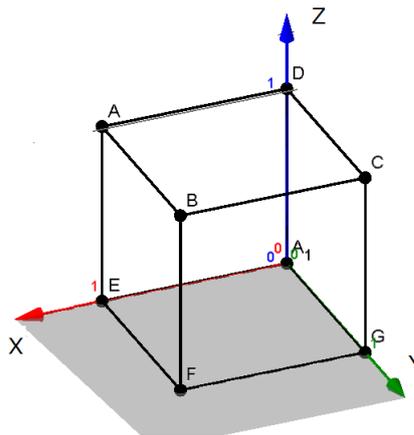


Figura 3.17 – Cubo no sistema cartesiano

Veja que cada vértice possui uma coordenada no sistema cartesiano, basta somar o valor de cada coordenada e os que possuírem soma par (ímpar) pertencerão a um conjunto de vértices da partição. Assim fica fácil de montar outra representação para o cubo como da figura 3.16.

O próximo resultado irá mostrar uma relação entre a matriz de adjacência de um grafo e o número de caminhos possíveis associados a este grafo.

Teorema 8. *Seja um grafo $G(V, A)$ com n vértices e conexo, considere $A = (a_{ij})$ sendo a matriz de adjacência relacionada ao grafo G . O número de caminhos do vértice i ao vértice j de comprimento k será a entrada da posição a_{ij}^k da matriz A^k .*

Demonstração. A demonstração deste teorema será feita por indução finita.

i) Para $k = 1$, temos $A^1 = A$, logo o resultado é válido.

ii) Agora suponha que o resultado seja válido para $k = h$, assim queremos provar que o resultado também é válido para $h + 1$.

Seja A_{ij}^h o número de caminhos possíveis para ir do vértice i a j , de comprimento h . Logo $[A^h].[A^1] = [A_{ij}^{h+1}]_{n \times n}$, note que se fixamos a linha i e a coluna j , temos

$$a_{ij}^{h+1} = a_{i1}^h \cdot a_{1j} + \cdots + a_{in}^h \cdot a_{nj}$$

Pela hipótese de indução, segue que a entrada a_{is}^k é o número de caminhos para ir do vértice i ao vértice s , assim obtemos duas condições, que são:

1ª condição: Se a entrada a_{sj} for nula, ou seja, zero, logo não temos um caminho que passe por s do vértice i ao vértice j .

2ª condição: Mas, se o valor numérico da entrada a_{sj} for um, então o número de caminhos ligando o vértice i ao vértice j , passando por s é dado pelo produto $[a_{is}^k].[a_{sj}]$. Logo, quando variamos s de 1 a n , temos a_{ij}^{h+1} .

□

Exemplo 19. *Considere o problema de construir um condomínio de chácaras em uma grande propriedade rural. Logo, é escolhido n pontos para serem as sedes das chácaras, tal que, v_1, v_2, \dots, v_n . Este condomínio pode ser representado por um grafo, onde os vértices são as sedes e as arestas indicam as estradas que ligam os respectivos pontos. A questão proposta é: Escolhendo duas sedes quaisquer, existe um caminho que as ligue? Temos que para a solução do problema, o grafo deve ser estritamente conexo. Considere A a matriz de adjacência do grafo, pelo teorema 8, basta que $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$, não possua nenhuma entrada nula.*

Seja $n = 8$, por exemplo, e a matriz do grafo que representa o condomínio é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $A + A^2 + \dots + A^7$ é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 31 & 21 & 88 & 36 & 80 & 44 & 44 \\ 31 & 9 & 21 & 21 & 36 & 15 & 44 & 8 \\ 20 & 21 & 13 & 67 & 29 & 65 & 36 & 36 \\ 88 & 21 & 16 & 66 & 132 & 65 & 168 & 36 \\ 27 & 28 & 22 & 96 & 45 & 103 & 57 & 57 \\ 7 & 7 & 29 & 29 & 67 & 37 & 88 & 21 \\ 8 & 8 & 7 & 36 & 21 & 52 & 30 & 31 \\ 8 & 1 & 7 & 7 & 21 & 14 & 31 & 9 \end{bmatrix}$$

mostrando que o grafo é conexo, pois todas as entradas são diferentes de zero.

Exemplo 20. Dado o grafo do tetraedro, determine quantos caminhos de tamanho três há ligando o vértice A ao vértice D .

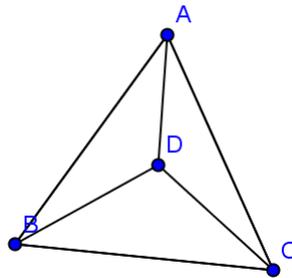


Figura 3.18 – Grafo tetraedro

Pelo teorema acima, basta determinar o cubo da matriz de adjacência e observar o valor da entrada correspondente a ligação do vértice A ao vértice D .

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ a matriz de adjacência, logo } A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

que analisar a entrada a_{14} que corresponde a aresta $\{A, D\}$. Assim a quantidade de caminhos de tamanho três, saindo do vértice A e chegando ao vértice D é 7.

Note que esse procedimento não é tal eficaz para grafos com um número muito elevado de vértices, mostraremos no próximo exemplo um método utilizando autovalores, para facilitar o cálculo de caminhos de comprimento muito grande.

Exemplo 21. *Considere novamente o grafo de um cubo, calcule o número de caminhos fechados² de comprimento 1000 há nesse grafo.*

Antes de resolvermos este exemplo, mostraremos um processo de calcular funções $f(A)$ de uma matriz A . Para uma leitura mais abrangente, recomendamos [8].

Proposição 8. *Se A é uma matriz diagonalizável, o polinômio da matriz A é dado por $f(A) = Pf(B)P^{-1}$.*

Demonstração. Considere o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, o polinômio de A é dado por

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_nA^n$$

Como a matriz A é diagonalizável, temos que

$$I_n = PI_nP^{-1}$$

$$A = PBP^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

Assim

$$f(A) = a_0PI_nP^{-1} + a_1PBP^{-1} + \dots + a_nPB^nP^{-1}$$

$$f(A) = P(a_0I_n + a_1B + \dots + a_nB^n)P^{-1}$$

$$f(A) = Pf(B)P^{-1}$$

□

Como B é uma matriz diagonal, basta aplicar f em cada posição da diagonal de B . Assim é mais fácil calcular $f(B)$ do que $f(A)$.

Note que para o procedimento que estamos interessados em calcular, não é necessário obter os autovetores da matriz de adjacência A . Pois, como a matriz A é diagonalizável, obteremos os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sendo todos distintos (quando houver autovalores com multiplicidade maior que um, eliminaremos os repetidos, de tal modo, que não há autovalores repetidos) e procuraremos um polinômio p que seja da forma

² São os caminhos que começa e termina no mesmo vértice.

$$p(\lambda_1) = f(\lambda_1), \dots, p(\lambda_k) = f(\lambda_k).$$

Voltando para o exemplo, temos que a matriz de adjacência do cubo é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que o cálculo do polinômio característico de uma matriz quadrada de ordem 8, não é um procedimento tão fácil de se realizar. Como estamos trabalhando com um sólido geométrico, utilizaremos um truque para determinar os autovalores, reduzindo a matriz de adjacência.

Considere uma rotação de 90 graus em torno de um eixo do cubo, determinaremos esta rotação por R . Seja um autovetor v sobre os eixos do cubo, quando aplicamos uma rotação R sobre o cubo, de tal modo que os números sobre os vértices acompanhem essa rotação, encontramos uma outra disposição representada pelo vetor Rv em \mathbb{R}^8 , que será um outro autovetor associado ao mesmo autovalor λ . As propriedades que definem um autovetor são listadas em termos de adjacências de vértices, logo, elas não se modificam por uma rotação. Pela figura 3.19 temos a disposição de um vetor v que produziu outros dois vetores por meio de rotações sucessivas.

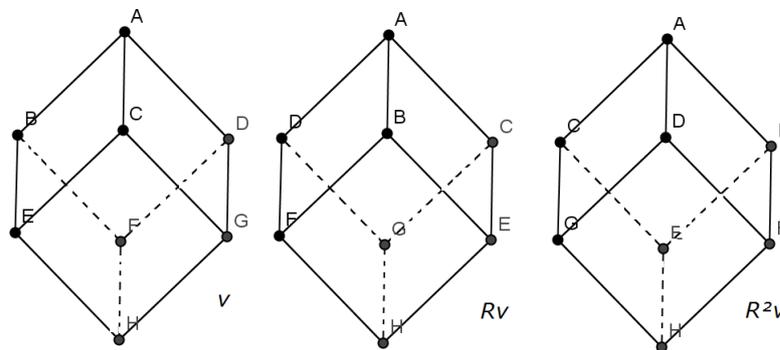


Figura 3.19 – Rotações sobre o cubo

Assim, o conjunto de autovetores associados a um mesmo autovalor fixo é um subespaço. Logo, quando temos um vetor v , onde a coordenada A seja não nula, pois todo vetor tem uma coordenada não nula, seja a soma $\frac{(v + Rv + R^2v)}{3}$. Então, essa nova

disposição irá nos fornecer um outro autovetor, que está associado ao mesmo autovalor de v , Rv e R^2v .

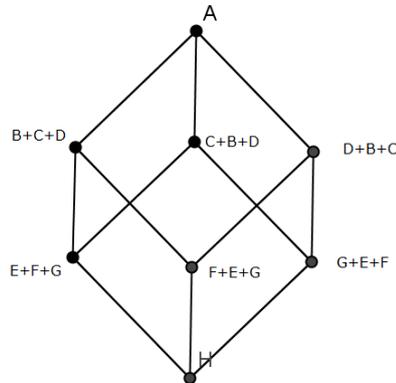


Figura 3.20 – Vetor equatorial

Observe que nos vértices mais baixo e mais alto, continuamos tendo A e H , mas nos seis vértices centrais, que denominamos de "vértices equatoriais", encontramos outros dois números, que são $J = \frac{B+C+D}{3}$ e $K = \frac{E+F+G}{3}$, assim todo autovalor de A possui um vetor equatorial da forma $u = (A, J, J, J, K, K, K, H)$. Logo, o subespaço formado pelos vetores equatoriais irá formar um subespaço invariante. Temos que $Au = (3J, A+2K, A+2K, A+2K, H+2J, H+2J, H+2J, 3K)$, que também é um vetor equatorial. O truque é compactar este vetor do \mathbb{R}^8 , para um vetor do \mathbb{R}^4 da forma (x, y, z, w) que irá guardar os os quatro números relevantes do vetor equatorial e é levado para o vetor $(3y, x + 2y, w + 2y, 3z)$, assim a matriz A tem os mesmos autovalores que a matriz

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pode parecer pouco comum, pois a matriz A possui oito autovalores enquanto a matriz \tilde{A} possui apenas quatro, acontece que as multiplicidades dos autovalores abaixam. Pelo teorema espectral de matrizes, a matriz A possui oito autovetores independentes, enquanto a matriz \tilde{A} tem apenas os autovetores equatoriais da matriz A , encontrar autovetores com essa característica é bem incomum.

Com esse truque, o polinômio característico de \tilde{A} tem grau quatro, que é bem menor que o grau do polinômio característico da matriz A . Temos que o polinômio característico de \tilde{A} é dado por $P_{\tilde{A}} = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9$, onde os autovalores é dado por $\lambda = -1$, $\lambda = 1$, $\lambda = -3$ e $\lambda = 3$. Logo queremos encontrar um polinômio que satisfaz

$$\begin{aligned}
p(-1) &= f(-1) = (-1)^n \\
p(1) &= f(1) = (1)^n \\
p(-3) &= f(-3) = (-3)^n \\
p(3) &= f(3) = (3)^n
\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de interpolação de Lagrange, obtemos:

$$\begin{aligned}
P^n(x) &= \frac{(-1)^n(x-1)(x+3)(x-3)}{(-1-1)(-1+3)(-1-3)} + \frac{(1)^n(x+1)(x+3)(x-3)}{(1+1)(1+3)(1-3)} + \frac{(-3)^n(x+1)(x-1)(x-3)}{(-3+1)(-3-1)(-3-3)} + \frac{(3)^n(x+1)(x-1)(x+3)}{(3+1)(3-1)(3+3)} \\
P^n(x) &= \frac{(-1)^n(x-1)(x^2-9)}{(-2)(2)(-4)} + \frac{(1)^n(x+1)(x^2-9)}{(2)(4)(-2)} + \frac{(-3)^n(x-3)(x^2-1)}{(-2)(-4)(-6)} + \frac{(3)^n(x-+3)(x^2-1)}{(4)(2)(6)} \\
P^n(x) &= \frac{(-1)^n(x^3-9x-x^2+9)}{16} + \frac{(1)^n(x^3-9x+x^2-9)}{-16} + \frac{(-3)^n(x^3-x-3x^2+3)}{-48} + \frac{(3)^n(x^3-x+3x^2-3)}{48} \\
P^n(x) &= \left(\frac{3 \cdot (-1)^n - 3 \cdot (1)^n - (-3)^n + (3)^n}{48} \right) x^3 + \left(\frac{-3 \cdot (-1)^n - 3 \cdot (1)^n + (-3)^n + (3)^n}{48} \right) x^2 + \\
&\quad + \left(\frac{-27 \cdot (-1)^n + 27 \cdot (1)^n + (-3)^n - (3)^n}{48} \right) x + \left(\frac{27 \cdot (-1)^n + 27 \cdot (1)^n - (-3)^n - (3)^n}{48} \right)
\end{aligned}$$

Agora o problema se resume em dois casos, conforme n par ou ímpar.

Se n par, temos

$$\begin{aligned}
P^n(x) &= \left(\frac{-6 + 6 \cdot 3^n}{48} \right) x^2 + \left(\frac{54 - 6 \cdot 3^n}{48} \right) I \\
P^n(x) &= \left(\frac{3^n - 1}{8} \right) x^2 + \left(\frac{9 - 3^n}{8} \right) I.
\end{aligned}$$

Se n ímpar, segue

$$\begin{aligned}
P^n(x) &= \left(\frac{-6 + 2 \cdot 3^n}{48} \right) x^3 + \left(\frac{-2 \cdot 3^n + 54}{48} \right) x \\
P^n(x) &= \left(\frac{3^n - 3}{24} \right) x^3 + \left(\frac{27 - 3^n}{24} \right) x.
\end{aligned}$$

Como queremos quantos caminhos de comprimento 1000 e por ser um número par, utilizaremos a primeira fórmula. Agora para resolver o problema basta efetuar

$$A^{1000} = \left(\frac{3^{1000} - 1}{8} \right) A^2 + \frac{9 - 3^{1000}}{8} I.$$

Logo, o problema se resume em uma multiplicação de matriz onde o trabalho é fazer A^2 .

Considerações Finais

Neste trabalho foi desenvolvido um texto que pode ser utilizado para alunos de iniciação científica, professores do ensino fundamental e médio, tendo em mente o estudo da teoria de grafos e aplicação de alguns exemplos. Tentamos ao máximo realizar uma linguagem que pudesse facilitar a compreensão, principalmente nas demonstrações.

Fizemos no primeiro capítulo um apanhado das principais definições, notações e conceitos sobre grafos, com várias ilustrações, com o intuito de facilitar o entendimento.

Realizamos o estudo de alguns tópicos sobre Álgebra Linear, onde tais definições, proposições e teoremas ajudou compreender a matriz de adjacência e seu espectro.

Foi mostrado que O Problema das Pontes de Königsberg, que deu origem ao estudo sobre grafos por Euler, não possui solução. Vimos outras duas aplicações envolvendo diretamente a representação de grafos, nos exemplos dos canibais e no jogo de xadrez. Levantamos a questão do Condomínio de Chácaras, onde tal foi resolvido, com operações de matrizes na matriz de adjacência do problema. No Problema das Casas, após levantar uma série de proposições, determinamos que o problema não possui solução. Nos problemas de Contagem sobre quantidade de caminhos possíveis em sólido geométrico, foi mostrado um método utilizando autovalores e autovetores, onde os resultados relacionados a tal, foram bem satisfatórios.

Acreditamos que o leitor pode seguir o estudo de grafos aplicados a outras áreas do conhecimento, como aplicação em jogos virtuais, sites de busca, problemas de tráfego aéreo, entre outras aplicações de uso diário.

Referências

- 1 ABREU, Nair Maria Maia de, *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*, São Carlos, SP: SBMAC, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 61.
- 2 BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear*, 3ª edição, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 31, 36, 45 e 80.
- 3 HEFEZ, Abramo, FERNANDEZ, Cecília de Souza, *Introdução à Álgebra Linear*, Coleção PROFMAT, SBM, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 31, 33, 37 e 45.
- 4 CARMO, M. P. do., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. Citado na página 59.
- 5 DOLCE, Osvaldo, POMPEO, J. N., *Fundamentos da Matemática Elementar, 9: Geometria Plana*. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1993. Nenhuma citação no texto.
- 6 BOAVENTURA NETO, Paulo Osvaldo/ JURKIEWICZ, Samuel, *Grafos: Introdução e Prática*. São Paulo: Blucher, 2009. Nenhuma citação no texto.
- 7 MARKENZON, Lilian, *Representações Computacionais de Grafos*. São Carlos, SP: SBMAC, 2006. Nenhuma citação no texto.
- 8 BUENO, Hamilton, *Funções de Matrizes*, I Bienal da SBM. Outubro 2003. Citado na página 66.
- 9 E.Hückel, *Quantentheoretische Beiträge Zum Benzolproblem*, Z. Phys., 70 204-286,(1931). Citado na página 61.
- 10 M.R. Garey and D.S. Jonhson. *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, 1979. Citado na página 30.

Apêndices

.1 Matrizes

Definimos \mathbb{N} como o conjunto dos números naturais, neste trabalho este conjunto tem a ideia de contagem, logo não será incluído o algarismo 0 (zero). Temos que, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Seja m e n em \mathbb{N} , define-se *matriz* $m \times n$ (lemos: m por n) uma tabela com $m \cdot n$ elementos de \mathbb{R} , onde estes elementos são denominados *entradas* da matriz, que estão dispostos em m linhas e n colunas. Indicamos as entradas de uma matriz qualquer A por a_{ij} , onde os índices representa, nessa ordem, a linha e a coluna onde o elemento se encontra.

Representamos uma matriz A por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Genericamente temos que a matriz acima é dada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Temos que $M_{(mn)}$ é o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$. Quando $m = n$, dizemos que a matriz é *quadrada*. Na matriz quadrada de ordem n , $A = (a_{ij})$, as entradas a_{ii} , com $1 \leq i \leq n$, formam a *diagonal principal*.

Apresentaremos alguns tipos especiais de matrizes:

.1.1 Matriz linha

É a matriz que possui apenas uma única linha.

Exemplo 22. $(a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n})_{1 \times n}$

.1.2 Matriz coluna

Possui apenas uma coluna.

Exemplo 23. $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m \times 1}$

.1.3 Matriz nula

É a matriz em que todas as entradas são nulas.

Exemplo 24.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

.1.4 Matriz diagonal

É a matriz quadrada que contém elementos apenas na diagonal principal.

Exemplo 25.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

.1.5 Matriz identidade

É um tipo especial de matriz diagonal, cuja as entradas da diagonal principal são iguais ao número real 1. Usualmente representamos a *matriz identidade de ordem n* por I_n , em alguns casos, quando não gerar confusão, representaremos apenas por I .

Exemplo 26.
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

.1.6 Matriz transposta

De uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, podemos obter uma matriz $A^t = (b_{ij})_{n \times m}$, onde as linhas de A será as colunas de A^t , ou seja, $(b_{ij}) = (a_{ji})$. Dizemos que A^t é a *transposta* de A .

Exemplo 27.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad e \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} .$$

.1.7 Operação com matrizes

Sejam duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, de mesma ordem, então $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Dado duas matrizes A e B , de mesma ordem, a *soma* representada por $A + B$, será a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $\forall 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Proposição 9. Se A , B e C são três matrizes de mesma ordem, temos:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associativa)
2. $A + B = B + A$ (Comutativa)
3. $A + 0 = A$, 0 representa a matriz nula $m \times n$ (Existência do elemento neutro)
4. $A + (-A) = 0$

Demonstração. Utilizando a associatividade da adição de números reais. □

Provando 1: $A + (B + C) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) + (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (A + B) + C$.

Provando 2: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij})) = ((b_{ij} + a_{ij})) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$

Provando 3: $A + 0 = a_{ij} + 0 = a_{ij} = A$

Provando 4: $A + (-A) = (a_{ij}) + (-(a_{ij})) = (a_{ij} - (a_{ij})) = 0$

Outra operação muito utilizada na álgebra linear é a *multiplicação de uma matriz por um escalar*. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, definimos como o *produto de A pelo número real k*, tendo $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$.

Proposição 10. Dadas duas matrizes A e $B \in M(mn)$, e $k, k' \in \mathbb{R}$, temos:

1. $k(A + B) = kA + kB$;
2. $(k + k')A = kA + k'A$;
3. $k(k'A) = (kk')A$;
4. $1A = A$.

Demonstração. Usaremos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais.

Provando 1: $k(A + B) = k(a_{ij} + b_{ij}) = (k(a_{ij} + b_{ij})) = (ka_{ij} + kb_{ij}) = (ka_{ij}) + (kb_{ij}) = k(a_{ij}) + k(b_{ij}) = kA + kB$;

Provando 2: $(k + k')A = (k + k')(a_{ij}) = ((ka_{ij} + k'a_{ij})) = (ka_{ij}) + (k'a_{ij}) = k(a_{ij}) + k'(a_{ij}) = kA + k'A$;

Provando 3: $k(k'A) = k(k'(a_{ij})) = (k(k'a_{ij})) = ((kk'a_{ij})) = (kk')(a_{ij}) = (kk')A$;

Provando 4: $1A = 1(a_{ij}) = (1a_{ij}) = (a_{ij}) = A$.

□

Agora mostraremos algumas propriedades da multiplicação de matrizes.

Proposição 11. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, definimos o produto AB de A por B , representado por AB , a nova matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, tal que $c_{ij} = \sum_n^{k=1} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

Vale lembrar que pela definição, que a multiplicação das matrizes A e B , apenas acontece se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas da matriz B , pois A é da ordem $m \times n$ e B é $n \times p$. Logo o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B .

Demonstração. Queremos obter uma entrada c_{ij} da matriz $C = AB$, para tal, seguiremos os seguintes passos:

1º passo: Toma-se a i -ésima linha da matriz A :

$$\begin{pmatrix} - & - & a_1 & - \\ - & - & a_2 & - \\ & & \vdots & \\ - & - & a_n & - \end{pmatrix} \text{ (n elementos)}$$

2º passo: Toma-se a k -ésima coluna da matriz B :

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \text{ (n elementos)}$$

3º passo: Calcula os n produtos dos elementos:

$$\begin{array}{c} a_{i1} \cdot b_{1j} \\ a_{i2} \cdot b_{2j} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nj} \end{array}$$

4º passo: Soma-se os n produtos, obtendo $c_{ij} = a_i \cdot b_j = a^T b$.

□

Exemplo 28. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, determinar o produto AB .

Como a matriz A tem ordem 3×3 e B sua ordem é 3×1 , podemos definir o produto AB que será uma matriz de ordem 3×1 .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.2 + 0.3 \\ 2.1 + 3.2 + (-1).3 \\ 1.1 + 0.2 + 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Proposição 12. *Desde que as operações sejam possíveis, com A, B e $C \in M(mn)$, temos:*

1. $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição);
2. $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação em relação a adição);
3. $(AB)C = A(BC)$ (Associatividade);
4. $AI = IA = A$ (existência do elemento identidade).

Demonstração. Provando 1. Seja $D = A.(B + C) = (d_{ik})_{m \times p}$, temos:

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} = AB + AC$$

Provando 2. Seja $E = (A + B).C = (e_{ik})_{m \times p}$, temos:

$$e_{ik} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij}c_{jk} + b_{ij}c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij}c_{jk} = AC + BC$$

Provando 3: Suponhamos que as matrizes A, B e C , sejam de ordens $n \times r$, $r \times s$ e $s \times m$, respectivamente. Temos que

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^s (AB)_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{l=1}^r a_{il}b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{l=1}^r a_{il} \left(\sum_{k=1}^s b_{lk}c_{kj} \right) = A.(BC)_{ij}$$

Provando 4: Sendo $I_n = (\sigma_{ij})_{n \times n}$, em que $\sigma_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\sigma_{ij} = 1$, se $i = j$, logo $B = AI_n = (b_{ij})_{m \times n}$, temos $b_{ij} = a_{i1}\sigma_{1j} + a_{i2}\sigma_{2j} + a_{ii}\sigma_{ii} + \dots + a_{in}\sigma_{nj} = a_{i1}.0 + a_{i2}.0 + \dots + a_{in}.0 = a_{ii}$, para todo i e j , então $AI_n = A$.

□

Uma matriz quadrada A de ordem n , definimos como *inversa* de A , a matriz B , de ordem n se o resultado abaixo for válido:

$$AB = BA = I_n$$

A demonstração de matriz inversa pode ser encontrada em [2]. Outro método de encontrar a inversa de uma matriz A , é por meio de operações elementares sobre as linhas da matriz A . Segue que se A é uma matriz regular, efetuamos do seguinte modo

$$(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$$

Proposição 13. *Sejam A uma matriz invertível e e_1, \dots, e_r uma sequência de transformações elementares de modo que $e_r(\dots(e_1(A))\dots) = I$, onde I é a matriz identidade. Logo esta mesma sequência de transformações aplicada a I nos fornece A^{-1} , ou seja, $e_r(\dots(e_1(I))\dots) = A^{-1}$.*

Demonstração. Para cada $1 \leq i \leq r$, considere E_i sendo a matriz elementar associada à transformação e_i . Logo

$$E_r \dots E_1 A = I.$$

Assim, como A é invertível

$$(E_r \dots E_1) A A^{-1} = I A^{-1},$$

Onde obtemos

$$E_r \dots E_1 I = A^{-1}.$$

□

Exemplo 29. *Determine a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$*

Para que a matriz A seja invertível, iremos aplicar uma sequência de transformações elementares até obtermos uma outra matriz, denominada de B , onde esta, estará na forma escalonada, ou seja, a matriz B deve ser da forma I_2 , tal que $B = I_2$, assim A será invertível.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 12 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow -1L_1 \\ L_2 \rightarrow \frac{L_2}{6}}} \sim (A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} \end{array} \right)$$

Uma matriz A é denominada *invertível* se possui uma matriz inversa. Representamos a inversa da matriz A por A^{-1} .

Logo, obtemos uma matriz na forma $(I_2|C)$, concluímos que A é invertível e que sua inversa é dada pela matriz C , onde $C = A^{-1}$. Assim,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposição 14. *Se uma matriz A possui uma inversa, esta inversa é única.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que B e C são duas inversas da matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Logo $AB = I_n$ e $AC = I_n$, temos:

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_n B = B.$$

□