UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

MARINA APARECIDA GAGLIOLI

DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO: UMA ABORDAGEM COM BASE NO CURRÍCULO DO ENSINO MÉDIO

CAMPINAS
2015

MARINA APARECIDA GAGLIOLI

DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO: UMA ABORDAGEM COM BASE NO CURRÍCULO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

ESTE ARQUIVO DIGITAL CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA MARINA APARECIDA GAGLIOLI, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. MARIA SUELI MARCONI ROVERSI.

Assinatura da Orientadora

MMRoversi
____

CAMPINAS
2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G121d

Gaglioli, Marina Aparecida, 1953-
Derivada como taxa de variação : uma abordagem com base no currículo do ensino médio / Marina Aparecida Gaglioli. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Maria Sueli Marconi Roversi.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Derivadas (Matemática) - Estudo e ensino (Ensino médio). I. Roversi, Maria Sueli Marconi,1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Derivative as a rate change : an approach based an high school curriculum
Palavras-chave em inglês:
Derivatives (Mathematics) - Study and teaching (High school)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Maria Sueli Marconi Roversi [Orientador]
Ary Orozimbo Chiacchio
Iara Andrea Alvares Fernandes
Data de defesa: 30-10-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 30 de outubro de 2015 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

Prof(a). Dr(a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Prof(a). Dr(a). IARA ANDREA ALVARES FERNANDES

Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu companheiro Jorge, a meu pai Angelo (in memoriam), a minha mãe Dusolina (in memoriam), a minha filha Ana Paula e ao meu neto Enrico.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por todas as dádivas que recebi até agora e por conseguir realizar um sonho, que é conclusão desse Mestrado.

Agradeço aos meus pais, Angelo e Dusolina (*in memoriam*), por sempre me apoiarem e me incentivarem e, com muito sacrifício, me proporcionarem uma boa educação tanto acadêmica quanto para a vida.

Agradeço ao meu companheiro Jorge, pelo carinho, incentivo e apoio que me deu, mesmo quando utilizava o meu tempo livre para estudar, em detrimento do nosso convívio familiar. Amo você.

À Profa.Dra. Maria Sueli Marconi Roversi (IMECC-UNICAMP), pela paciência, apoio, confiança, amizade e por sua orientação sempre correta e segura.

Aos meus colegas de trabalho da EsPCEx, principalmente aos amigos da Seção de Ciências Matemáticas, por me apoiarem e me ajudarem nesta empreitada; em especial ao professor e amigo Alex Sandro, pela imensa ajuda com o LaTex.

Aos meus colegas do mestrado pela ajuda nas horas difíceis de estudo e pelas palavras de incentivo.

Aos professores e funcionários do IMECC, principalmente aos integrantes da Secretaria da Pós-Graduação, pela ajuda, incentivo e profissionalismo.

À Profa. Dra. Iara Andrea Alvares Fernandes (USF) e ao Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC-UNICAMP) por terem aceito compor a banca examinadora, por avaliarem essa dissertação e pelas valiosas sugestões dadas que, com certeza, enriqueceram este trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse mestrado.

“ Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se vêem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê.”

Carta aos Hebreus 11:1-3, A Bíblia Sagrada.

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo apresentar uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio, usando um mínimo de terminologia especializada a quem não teve treinamento prévio no assunto e que atenda a diversas áreas do conhecimento.

Iniciamos com um pequeno relato histórico de como surgiu e foi desenvolvido o conceito de derivada. A seguir, apresentamos as ideias básicas, a partir da noção de taxa de variação de uma função e com uma sequência de exemplos e atividades, chegando à interpretação geométrica de derivada como sendo o coeficiente angular da reta tangente em um ponto da curva que representa o gráfico da função.

Algumas regras de derivação se tornaram necessárias para facilitar o desenvolvimento algébrico dos exemplos e exercícios usando derivadas, procurando dar ênfase aos problemas aplicados de máximos e de mínimos de funções em intervalos fechados. O procedimento consiste em usar uma equação principal que relacione as variáveis, obtendo uma função que forneça um modelo matemático para a situação prática e, então, usar as técnicas de derivação para solucionar o problema.

Palavras-chave: Derivada, Taxa de Variação, Reta Tangente, Máximos, Mínimos.

Abstract

This thesis aims to present a proposal for teaching the concept of derivative in high school, using a minimum of specialized terminology whom had no previous training in the subject and that meets the diverse areas of knowledge.

We begin with a short historical account of how the concept of derivative emerged and was developed. Going on, we present the basic ideas, from the notion of rate of change of a function and a series of examples and activities, until the geometric interpretation of derivative as the slope of the tangent line at a point of the curve: the function graph.

Some derivation rules became necessary to facilitate the development of algebraic examples and exercises using derivatives, in order to emphasize the applied problems of maximum and minimum functions on closed intervals. The procedure consists of using a master equation that relates the variables, obtaining a function that provides a mathematical model to the practical situation and then use the bypass techniques to solve the problem.

Keywords: Derivative, Rate of Change, Tangent Line, Maximum, Minimum.

Sumário

Introdução

Na etapa do Ensino Médio, seria importante dar maior enfoque à formação do aluno a partir das informações tratadas, dos procedimentos e métodos envolvidos e do desenvolvimento de habilidades. Um dos temas a ser considerado é o da variação de grandezas que surge naturalmente ao descrever determinados fenômenos, capacitando o aluno a interpretar e resolver questões internas e externas à matemática (relacionados a outras ciências). Neste contexto está inserido o estudo de funções e sua variação, elementos básicos para um dos conceitos fundamentais do Cálculo chamado derivada. Esse assunto envolve álgebra e geometria e compreende o estudo de taxas de variação de funções e da reta tangente a uma curva no plano.

Acreditamos que as funções podem ser estudadas não somente como entes estáticos, mas também através de um tratamento mais dinâmico, associado a taxas de variação e decorrente de problemas práticos que tratam da análise dessa variação. É importante ressaltar que a aplicação desta proposta exige uma conscientização dos professores, de modo que o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Neste contexto, o professor deve ordenar o seu programa conforme o desenvolvimento das disciplinas, encaminhando gradativamente o estudo dos conteúdos propostos neste trabalho, à medida que os novos conceitos tornam-se adequados naquele momento.

Nossa intenção é apresentar uma proposta de trabalho para o aluno do ensino médio, que esteja fundamentada em conceitos, sem tomar a definição formal de derivada como ponto de partida e sem preceder tal ensino de um estudo rigoroso sobre limites.

Dentre os fundamentos estão incluídos a investigação de taxa de variação média, crescimento e decaimento, a mensuração de variações instantâneas, a construção e interpretação de retas tangentes.

Como aplicação prática da derivada inclue-se a resolução de problemas de diversas áreas (juros, crescimento populacional, cálculo de velocidades, análise do processo de fotossíntese, pontos de nivelamento, lucros e prejuízos), de otimização; aqui é preciso transformar um problema prático em modelos matemáticos, organizar estratégias de resolução, utilizar técnicas e teorias apresentadas e, por fim, chegar de forma simples ao resultado. Outra aplicação importante consiste em desenvolver a habilidade de analisar e interpretar gráficos de funções.

No decorrer de cada capítulo, apresentamos exemplos e sugestões de atividades a serem trabalhadas com os alunos, no intuito de levá-los à compreensão dos conceitos introduzidos. Estas atividades foram colocadas em forma de planilhas, visando facilitar sua aplicação, e, sempre que possível, são apresentadas de forma a atrair a atenção e estimular a sua resolução.

Parte dos exemplos e atividades apresentadas foram adaptadas de alguns textos das referências bibliográficas.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos e um anexo, que descrevemos a seguir.

No primeiro capítulo, apresentamos uma pequena abordagem da história das derivadas, destacando a origem desta poderosa ferramenta matemática e ressaltando a contribuição de alguns matemáticos da época. O século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século. É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto, ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A idéia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, como uma espécie de operação inversa uma da outra.

No capítulo 2, procuramos desenvolver no aluno a idéia de variação de uma função, seguida dos conceitos de taxa de variação média, taxa de variação pontual ou instantânea e finalmente ao de derivada, de maneira intuitiva e usando a interpretação geométrica no plano. Para uma análise local, a ideia é que ao ampliar suficientemente uma parte da curva que representa o gráfico da função, esta parte teria o aspecto de uma reta, facilitando a análise do comportamento da função em um ponto da mesma. Sendo assim, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função neste ponto é dado pela variação pontual ou instantânea da função.

No capítulo 3, apresentamos alguns recursos algébricos que permitem simplificar o cálculo da derivada de algumas funções. Todas são consequências de certas manipulações das expressões algébricas da taxa de variação média das funções.

No capítulo 4, são apresentadas algumas aplicações na forma de problemas como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos. Um homem de negócios procura maximizar lucros e minimizar os custos. Um engenheiro ao projetar um novo automóvel deseja maximizar eficiência. Um piloto de corrida tenta minimizar o tempo e o consumo de combustível. Um fabricante de caixas de papelão determina as dimensões de cada caixa que requer a quantia mínima de material para um volume específico. Na resolução desses problemas práticos, o desafio maior está frequentemente em determinar a função que deve ser maximizada ou minimizada; em seguida, utilizando conceitos e métodos envolvendo derivada, determinar as respostas procuradas.

No capítulo 5, tecemos as considerações finais deste trabalho.

No anexo, colocamos endereços de páginas da Web onde encontramos *Applets*, pequenos programas desenvolvidos com o software GeoGebra, com alguma tarefa específica, que podem ser utilizados como ferramentas que auxiliem no entendimento de conceitos do cálculo diferencial, introduzidos nesta dissertação. Estes Applets tornam dinâmicas as páginas da Web, de maneira que o aluno pode interagir e, com isso, tenha a possibilidade de experimentar, visualizar, abstrair, conjecturar, explicar e generalizar. A disponibilidade de tecnologia não diminui a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores são muito úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos, principalmente pela possibilidade de visualização. Entretanto, nenhuma inovação tecnológica substitui o trabalho clássico nas aulas de matemática, centrado na resolução de problemas. Estratégias como cálculo mental, contas com algoritmos e criação de gráficos e de figuras geométricas com lápis, borracha, papel, régua, esquadro e compasso seguem sendo essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Capítulo 1

Um Pouco da História das Derivadas

O conceito de função que hoje pode parecer simples, é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade quando, por exemplo, os matemáticos Babilônios utilizaram tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas ou quando os Pitagóricos tentaram relacionar a altura do som, emitido por cordas submetidas à mesma tensão, com o seu comprimento. Nesta época o conceito de função não estava claramente definido: as relações entre as grandezas surgiam de forma implícita e eram descritas verbalmente ou por um gráfico.

Só no séc. XVII, quando Descartes e Pierre Fermat introduziram as coordenadas cartesianas, se tornou possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente funções. A Matemática recebe assim um grande impulso, nomeadamente na sua aplicabilidade a outras ciências - os cientistas passam, a partir de observações ou experiências realizadas, a procurar determinar a fórmula ou função que relaciona as variáveis em estudo.

Figura 1.1: Pierre de Fermat (1601-1665).

A partir daqui todo o estudo se desenvolve em torno das propriedades de tais funções. Por outro lado, a introdução de coordenadas, além de facilitar o estudo de curvas já conhecidas permitiu a "criação" de novas curvas, imagens geométricas de funções definidas por relações entre variáveis.

Foi enquanto se dedicava ao estudo de algumas destas funções que Fermat se deu conta das limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva no plano como sendo aquela que encontrava a curva num único ponto. Tornou-se assim importante reformular tal conceito e encontrar um processo para traçar uma tangente a um gráfico num dado ponto - esta dificuldade ficou conhecida na História da Matemática como o " Problema da Tangente".

Fermat resolveu esta dificuldade de uma maneira muito simples: para determinar uma tangente a uma curva num ponto P considerou outro ponto Q sobre a curva e a reta PQ secante à curva. Seguidamente fez deslizar Q ao longo da curva em direção a P, obtendo deste modo retas PQ que se aproximavam duma reta t a que Fermat chamou a reta tangente à curva no ponto P.

Fermat notou que para certas funções, nos pontos onde a curva assumia valores extremos, a tangente ao gráfico devia ser uma reta horizontal, já que ao comparar o valor assumido pela função num desses pontos $P(x, f(x))$ com o valor assumido no outro ponto $Q(x+\varepsilon, f(x+\varepsilon))$ próximo de P, a diferença entre $f(x+\varepsilon)$ e $f(x)$ era muito pequena, quase nula, quando comparada com o valor de ε, diferença entre abcissas de Q e P. Assim, o problema de determinar extremos e de determinar tangentes a curvas passam a estar intimamente relacionados.

Estas idéias, que estudaremos com mais detalhes na **Seção 2.9**, constituíram o embrião do conceito de DERIVADA o que levou Laplace [1] a considerar Fermat "o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial". Contudo, Fermat não dispunha de notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido.

Figura 1.2: Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).

Figura 1.3: Isaac Newton, Sir (1642-1727).

Assim, embora só no século XIX, Cauchy introduziria formalmente o conceito de limite e o conceito de derivada, foi a partir do séc. XVII, com Leibniz e Newton, que o Cálculo

[1] Pierre Simon de Laplace (1749-1827) foi um matemático e astrônomo francês tão famoso em seu tempo que ficou conhecido como o Newton da França.

Diferencial torna-se um instrumento cada vez mais indispensável pela sua aplicabilidade aos mais diversos campos da Ciência. Leibniz algebriza o Cálculo Infinitésimal, introduzindo os conceitos de variável, constante e parâmetro, bem como a notação dx e dy para designar "a menor possível das diferenças em x e em y". Desta notação surge o nome do ramo da Matemática conhecido hoje como **Cálculo Diferencial**.

O primeiro trabalho sobre Cálculo Diferencial foi publicado por Leibniz em 1684, sob o longo título *Nova methodus pro maximis et minimis, item que tangentibus, qua nec irrationales quantatitates moratur.* Nesse trabalho apareceram as fórmulas:

- Derivada do Produto: $d(xy) = xdy + ydx$
- Derivada do Quociente $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$
- $dx^n = nx^{n-1}$

Newton desenvolveu métodos analíticos unindo técnicas matemáticas já conhecidas, o que tornou possível a resolução de problemas de diversos tipos, como o de encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas, assim como máximos e mínimos de funções. Todas essas descobertas foram feitas anos antes de Leibniz, de forma independente. Newton recusou-se durante muito tempo a divulgar suas descobertas e, porisso foi Leibniz quem primeiro publicou. Isto gerou uma disputa muito grande entre os dois matemáticos, sobre quem teria realmente inventado o Cálculo. Mas, apesar de Newton ter desenvolvido a notação e a maneira de calcular derivadas antes de Leibniz, aquela que prevaleceu foi a de Leibniz que mostrou-se mais simples e conveniente.

O primeiro livro sobre cálculo diferencial foi *Analysis of Infinitely Small Quantities for the Understanding of Curved Lines* (Análise de quantidades infinitamente pequenas para o entendimento de curvas,1696) pelo Marquês de l'Hospital (1661–1704). Muito de seu trabalho foi realmente devido à Johann Bernoulli (1667–1748) e seguiu o tratamento de Leibniz para derivadas, máximos, mínimos e outras análises de curvas. Mas o método de l'Hospital para determinar o raio de curvatura era muito parecido com aquele de Newton. Jakob Bernoulli (1654-1705) e seu irmão mais novo Johann lideraram o caminho para espalhar o conhecimento do poder das fórmulas de cálculo de Leibniz, propondo e resolvendo problemas desafiadores (o problema da catenária e da braquistócrona são dois exemplos) para os quais o cálculo era necessário. Leibniz, Newton e Huygens também resolveram estes problemas. Este problemas e outros levaram ao desenvolvimento das equações diferenciais e do cálculo das variações, novos campos da matemática dependentes de cálculo.

Na Inglaterra, o novo *Treatise of Fluxions* (Tratado de Flúxions,1737) de Thomas Simpson (1710–1761) forneceu a primeira derivada da função seno. Em 1734, o Bispo George Berkeley (1685–1753) publicou *The Analyst* (O Analista), um ataque à falta de fundamentos rigorosos para seus flúxions. Berkeley reconheceu a precisão das fórmulas de Newton e a exatidão das suas aplicações abrangentes em física e astronomia, mas criticou as "quantidades infinitamente pequenas" e os "incrementos imperceptíveis" dos fundamentos das derivadas. Colin Maclaurin (1698–1746) tentou defender Newton no seu *Treatise of Fluxions* (Tratado de Flúxions) (1742), desenvolveu derivadas para funções logarítmicas e exponenciais e expandiu as fórmulas de Simpson para incluir as derivadas das funções tangente e secante.

Maria Gaetana Agnesi (1718–1799) seguiu Leibniz e L'Hospital no seu livro de cálculo *Analytical Institutions* (Instituições Analíticas,1748), onde trata da análise de quantidades finitas, dos problemas elementares de máximo e mínimo, tangentes e dos pontos de inflexão. Em um dos volumes, Maria Agnesi apresenta uma extensa discussão sobre a curva $\left(y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}\right)$, conhecida como "curva de Agnesi".

Considera-se um ponto O numa circunferência e seja M o ponto diametralmente oposto a O. De qualquer outro ponto A da circunferência, traça-se a secante OA. A intersecção entre a reta que contem OA e a reta tangente à circunferência no ponto M é o ponto N. Por A, traça-se uma reta paralela a MN, e por N uma reta paralela a OM. Seja P a intersecção entre essas duas retas. O lugar geométrico dos pontos P quando A percorre a circunferência é chamada Curva de Agnesi (Veja a **Figura1.5**).

Figura 1.4: Maria Gaetana Agnesi (1718-1799).

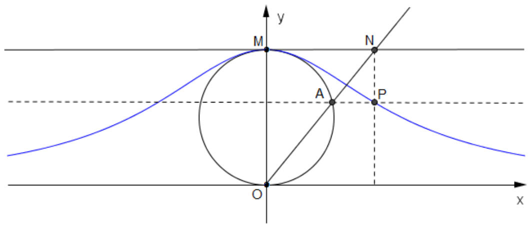


Figura 1.5: A Curva de Agnesi.

Por volta de 1750, Agnesi foi convidada para ocupar a cadeira de Matemática na Universidade de Bolonha, mas sua vida, em seguida, tomaria um rumo completamente diferente. Com a morte do pai, movida pelos seus sentimentos religiosos, deixou a docência e recolheu-se em um convento para se dedicar aos que sofriam de doenças graves. Quando a instituição *Pio Istituto Trivulzo* foi aberta, Maria ficou encarregada de sua direção. Esse Instituto era uma casa para enfermos, aos quais ela se dedicou inteiramente, doando toda a sua fortuna e trabalhando ali até a sua morte. Maria era uma pessoa delicada e muito tímida. Nunca teve ambição de se tornar uma matemática famosa a despeito de seu gênio brilhante. Alguns dizem que ela apenas se interessou por matemática para agradar ao pai. Não obstante, a sua inteligência e o seu talento tornaram possível integrar todo o conhecimento de mais alto nível sobre Cálculo da época de uma maneira muito clara. Maria Agnesi é reconhecida como a primeira mulher matemática a ter produzido textos de alta qualidade científica.

Leonhard Euler (1707–1783) deu um passo importante na direção de estabelecer uma fundamentação sólida para o cálculo no seu *Introduction to the Analysis of the Infinite* (Introdução à Análise do Infinito, 1748) quando introduziu funções (no lugar de curvas) como os objetos para os quais as derivadas e outras técnicas de cálculo seriam aplicadas.

Por função, Euler queria dizer algum tipo de "expressão analítica"; sua concepção não era tão abrangente como a nossa definição moderna. Na sua publicação, também introduziu o termo análise como um nome moderno para cálculo e a matemática avançada relacionada. No seu *Methods of Differential Calculus* (Métodos de Cálculo Diferencial,1755), Euler definiu a derivada como "o método para determinar as razões entre os incrementos imperceptíveis, as quais as funções recebem, e os incrementos imperceptíveis das quantidades variáveis, das quais elas são funções", que soa não muito científico hoje em dia. Mesmo assim, Euler trabalhou com vários casos especiais da regra da cadeia, introduziu equações diferenciais e tratou máximos e mínimos sem usar quaisquer diagramas ou gráficos. Em 1754, na famosa *Encyclopédie* francesa, Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) afirmou que a "definição mais precisa e elegante possível do cálculo diferencial" é que a derivada é o limite de certas razões quando os numeradores e denominadores se aproximam mais e mais de zero, e que este limite produz certas expressões algébricas que chamamos de derivada.

No final do século XVIII, Joseph Louis Lagrange (1736–1813) tentou reformar o cálculo e torná-lo mais rigoroso no seu *Theory of Analytic Functions* (Teoria das Funções Analíticas,1797). Lagrange pretendia dar uma forma puramente algébrica para a derivada, sem recorrer à intuição geométrica, a gráficos ou a diagramas e sem qualquer ajuda dos limites de d'Alembert. Lagrange desenvolveu a principal notação que usamos agora para derivadas e o desenvolvimento lógico de seu cálculo era admirável em outros aspectos, mas seu esforço em prover uma base sólida para o cálculo falhou porque sua concepção da derivada era baseada em certas propriedades de séries infinitas as quais, sabemos agora, não são verdadeiras.

Finalmente, no início do século XIX, a definição moderna de derivada foi dada por Augustin Louis Cauchy (1789–1857) em suas aulas para alunos de engenharia. Em seus livros *Cours d' analyse de l'École Polytechnique* (Curso de Análise da Escola Politécnica), escrito em 1821, *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (Resumo de lições sobre o Cálculo infinitesimal), de 1823 e *Leçons sur le calcul différentiel* (Lições sobre o Cálculo Diferencial), publicado em 1829, Cauchy apresentou uma fundamentação completa do Cálculo, estabelecendo o caráter que ele tem na atualidade. Para isso, tornou fundamental o conceito de limite de D'Alembert, caracterizando-o aritmeticamente:

"Chamamos quantidade variável aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade constante aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último é chamado o limite de todos os outros."

Dessa maneira, Cauchy associou o conceito de limite com o conceito de função através da importante interpretação que fez do termo infinitamente pequeno. Diferente de muitos outros matemáticos anteriores que pensavam em infinitésimo como um número fixo muito pequeno, ele definiu como uma variável dependente:

"Quando os valores numéricos sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores do que qualquer número dado, dizemos que a variável se torna infinitamente pequena ou uma quantidade infinitamente pequena. O limite de tal variável é zero."

Essa definição também possibilitou elaborar a noção de continuidade de uma função. Esses conceitos foram fundamentais para Cauchy poder definir a derivada como um limite:

"Se a função $y = f(x)$ for contínua entre dois limites dados pela variável x, então, para qualquer valor de x dentro dos limites, um aumento infinitamente pequeno da variável produzirá um aumento infinitamente pequeno da própria função. Portanto, se dissermos que $\Delta x = h$, os dois termos da razão das diferenças serão quantidades infinitamente pequenas.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Mas, enquanto que esses dois termos aproximar-se-ão indefinidamente de zero, sua razão pode convergir para algum outro limite positivo ou negativo. Esse limite, quando existir, tem um valor definido para cada valor específico de x, mas varia com x. Indicamos essa dependência chamando a nova função de **Função Derivada**, designando-a pelo uso de um apóstrofo na notação: y' ou $f'(x)$."

Cauchy prosseguiu para encontrar derivadas de todas as funções elementares, a Regra da Cadeia para as funções compostas e mostrou que o Teorema do Valor Médio para derivadas, que tinha aparecido no trabalho de Lagrange, era realmente a pedra fundamental para provar vários teoremas básicos do cálculo que foram assumidos como verdadeiros.

Atualmente, derivadas e o cálculo diferencial estão estabelecidos como uma parte rigorosa e moderna do cálculo, de fundamental importância nas ciências naturais e sociais.

Figura 1.6: Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Capítulo 2

A Derivada de uma Função

Problemas que relacionam diferentes grandezas permeiam nosso dia-a-dia mesmo que não tenhamos consciência disso. Por exemplo, o valor da conta de luz depende da quantidade de energia gasta, a dose de remédio que é dada a uma criança depende do seu peso, o valor para fazer cópias de um material depende do número de páginas copiadas. Há também aqueles em que se analisam o crescimento de bactérias, o movimento dos astros, a variação da temperatura da Terra, o lançamento de projéteis, a otimização de áreas e orçamentos domésticos, entre outros.

É também cada vez mais importante desenvolver a habilidade de analisar e interpretar gráficos, por sua aplicabilidade a outras ciências.

Para interpretar e resolver grande parte dos problemas, usamos um tipo específico de relação entre grandezas variáveis chamado função. Em particular, quando as grandezas são números reais e uma grandeza y está expressa em função de outra x escrevemos $y = f(x)$ para indicar tal relação.

O estudo da variabilidade de uma função proporciona maior visualização e torna mais significativo o conceito de derivada. O conceito de taxa de variação média está na base do estudo de funções e exprime a razão com que a função varia num dado intervalo do domínio.

2.1 Variação de Grandezas

A variação de uma grandeza é a diferença entre o valor final e o valor inicial desta grandeza, num determinado intervalo real.

Sejam y uma grandeza e Δy (lê-se: "delta y") a sua variação: $\Delta y = y_{final} - y_{inicial}$.

O sinal de Δy indica se y cresce ou se decresce, ou seja, y cresce quando $\Delta y > 0$ e y decresce quando $\Delta y < 0$.

A taxa de variação (TV) de uma grandeza y em relação a uma grandeza x é a razão entre a variação de y e a variação de x (Δx, que se lê "delta x"), ou seja,

$$TV = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Na prática, a taxa de variação representa o resultado da comparação entre as variações de y e de x, sendo mais esclarecedora do que a variação como informação isolada.

Exemplo 2.1.1. Suponha que a grandeza y em um primeiro momento variou de 30 até 50 e, em seguida, variou de 50 até 40. Conforme tabela a seguir, podemos dizer que y cresceu no primeiro momento e, logo a seguir, decresceu.

$y_{inicial}$	y_{final}	$y_{final} - y_{inicial}$	Δy	y
30	50	50 - 30	20	cresceu
50	40	40 - 50	-10	decresceu

Exemplo 2.1.2. A informação de que uma fábrica produziu 760 televisores em 10 meses, equivale a uma taxa de variação:

$$TV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{760}{10} = \frac{76}{1} = 76,$$

ou seja, essa fábrica produz 76 televisores por mês.

Exemplo 2.1.3. Um hospital maternidade só atende a parturientes de alto risco. Em um determinado mês, o hospital realizou 100 partos e 2 recém-nascidos morreram nesse período.

Essa informação equivale a uma taxa de variação:

$$TV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{100} = 0,02,$$

ou seja, nesse mês o índice de mortalidade de recém-nascidos na instituição foi de 2%.

2.2 Variação de uma Função

A variação de uma função está relacionada com o seu comportamento (crescimento, decrescimento ou estabilidade) quando a variável independente percorre um determinado intervalo do seu domínio.

Exemplo 2.2.1. Considere a função $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, que define a produção (em toneladas) de uma empresa, em função do número de horas trabalhadas (x). Temos a seguinte tabela:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36

Construindo o gráfico desta quadrática (Veja a **Figura 2.1**) é fácil observar que:

- No intervalo de 0 a 1 hora de trabalho a produção foi de $\Delta y = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$ tonelada. Dizemos que a taxa de variação média da produção nesse intervalo foi de 1 ton/h.

- No intervalo de 1 a 2 hora de trabalho a produção foi de $\Delta y = f(2) - f(1) = 4 - 1 = 3$ toneladas. Dizemos que a taxa de variação média da produção nesse intervalo foi de 3 ton/h.

- No intervalo de 2 a 3 horas de trabalho a produção foi de $f(3) - f(2) = 9 - 4 = 5$ toneladas. Dizemos que a taxa de variação média da produção nesse intervalo foi de 5 ton/h.

Concluimos que embora a produção cresça nos intervalos [0,1], [1,2], [2,3] e, assim por diante, o crescimento ocorre de forma diferenciada.

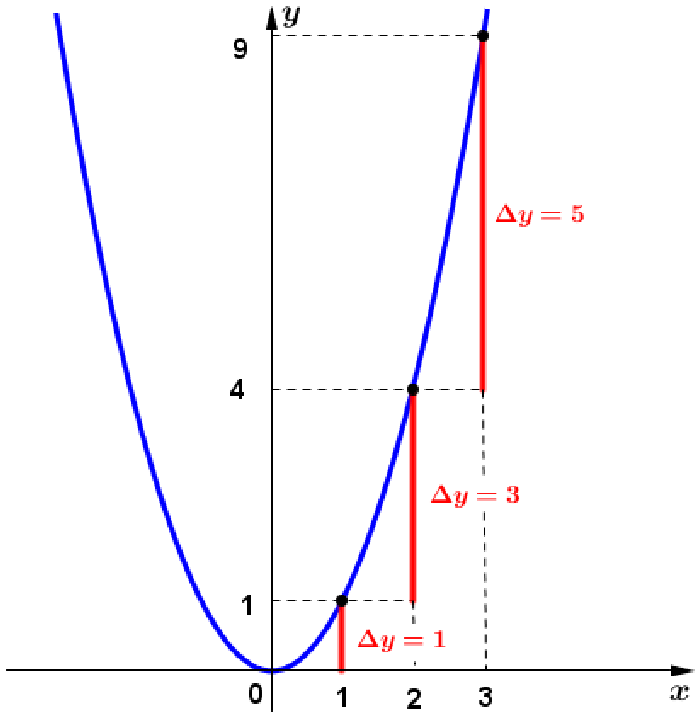


Figura 2.1: Analisando a taxa de variação da função $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, em intervalos de uma hora.

A taxa de variação média (TV_m) de uma função $y = f(x)$, num intervalo de seu domínio, é definida como o quociente entre a variação Δy de $f(x)$ e a variação Δx da variável x nesse intervalo e é dada por:

$$TV_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

É importante notar que da análise desta razão resulta como a função varia, sempre que Δx for bastante pequeno e que, quanto menor Δx, mais precisa é a informação. Se Δx for grande, não há um bom registro sobre a variação uma vez que, na média, esta informação se perde.

2.3 Interpretação Geométrica da Taxa de Variação Média

Considere uma função f definida no intervalo $[x_1, x_2]$ com $x_1 < x_2$. Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos pertencentes ao gráfico de $y = f(x)$. A reta r que passa pelos pontos A e B é chamada reta secante ao gráfico de $y = f(x)$. As abscissas dos pontos A e B são números reais distintos, e, quanto às suas ordenadas, pode ocorrer $y_1 < y_2$, $y_1 > y_2$ ou $y_1 = y_2$.

Então, a taxa de variação média da função f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o número real dado por:

$$TV_m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

que representa o coeficiente angular da reta secante passando pelos pontos extremos do gráfico, no intervalo $[x_1, x_2]$.

As situações citadas estão ilustradas na **Figura 2.2** a seguir.

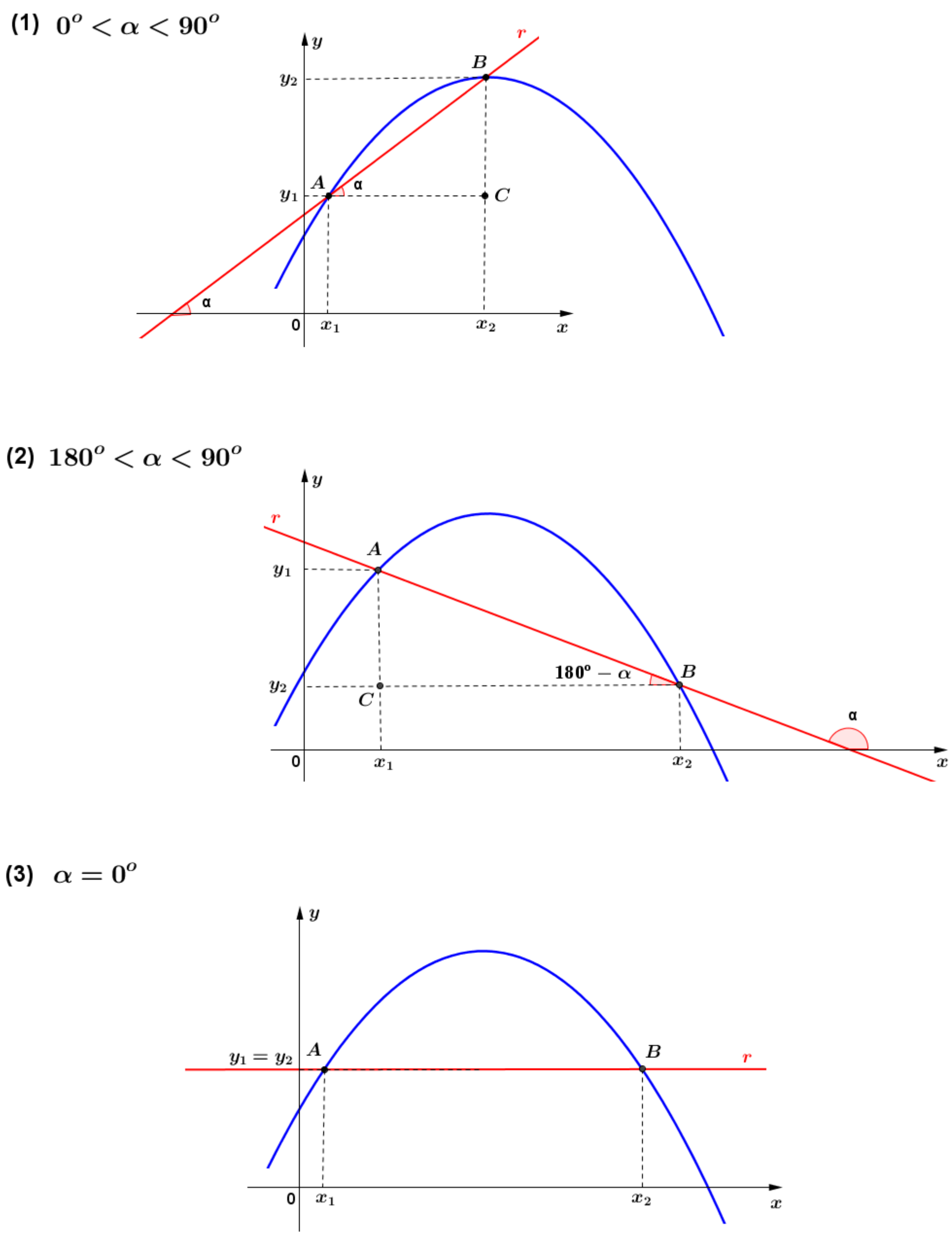


Figura 2.2: Coeficiente angular da secante ao gráfico de $y = f(x)$ como taxa de variação média.

Convém observar ainda que:

- na situação **(1)**, a taxa de variação média é positiva, pois $0 < \alpha < 90^o$ e $tg\ \alpha > 0$. Neste caso, ao deslocar do ponto $A = (x_1, y_1)$ para o ponto $B = (x_2, y_2)$, as variações de x e de y são positivas;
- na situação **(2)**, a taxa de variação média é negativa, pois $90^o < \alpha < 180^o$ e $tg\ \alpha < 0$. Neste caso, ao deslocar do ponto $A = (x_1, y_1)$ para o ponto $B = (x_2, y_2)$, a variação de x é positiva e a variação de y é negativa;

- na situação **(3)**, a taxa de variação média é nula, pois $\alpha = 0^o$ e $tg\ \alpha = 0$. Neste caso, ao deslocar do ponto $A = (x_1, y_1)$ para o ponto $B = (x_2, y_2)$, a variação de x é positiva e a variação de y é igual a zero.

Atividade 2.3.1. A tabela abaixo mostra a relação entre altura (em centímetros) e idade (em anos) de uma criança até os seus doze anos. Para facilitar a linguagem matemática, denotamos a altura por y e a idade por x.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	46	70	81	89	96	104	110	116	122	138	142	148	152

a) Qual a variação da altura dessa criança durante os seis primeiros anos de sua vida?

$\Delta y[0, 6] =$

b) Qual a variação da altura dessa criança no período de 6 a 12 anos?

$\Delta y[6, 12] =$

c) Qual a taxa de variação média da altura nos seis primeiros anos de vida dessa criança?

$TV_m[0, 6] =$

d) Qual a taxa de variação média da altura dessa criança entre 6 e 12 anos?

$TV_m[6, 12] =$

e) Em qual dos dois períodos essa criança cresceu mais rápido?

Atividade 2.3.2. Um corpo parte do repouso e se move de modo que as distâncias percorridas na unidade de tempo são dadas pela função horária $S(t) = 100 - 7t^2$, onde S é dado em quilômetros e t em horas. A *taxa de variação média de* S em relação a t entre dois instantes t_1 e t_2 é chamada *velocidade média* do corpo entre os instantes considerados. Temos então:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

a) Determine a distância percorrida pelo corpo nas duas primeiras horas.

$\Delta S[0, 2] =$

b) Determine a distância percorrida pelo corpo nas quatro primeiras horas.

$\Delta S[0,4] =$

c) Determine a velocidade média do corpo nas duas primeiras horas.

$V_m[0,2] =$

d) Determine a velocidade média do corpo nas quatro primeiras horas.

$V_m[0,4] =$

e) Nessas quatro primeiras horas, o corpo estava em um movimento acelerado?

2.4 Taxa de Variação Média da Função de 1^o Grau

Dada uma função de 1^o grau definida por $f(x) = ax + b$, onde a, b e x são reais, consideremos dois pontos quaisquer x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$.

Quando x varia de x_1 até x_2, $f(x)$ varia de $f(x_1) = ax_1 + b$ até $f(x_2) = ax_2 + b$, de modo que a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante, ou seja:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Esse número a é a *taxa de variação média* ou, simplesmente, *taxa de variação* de $f(x)$, que pode ser interpretada como uma forma de medir "quão rápido" $f(x)$ está variando à medida que a variável independente x muda.

Dizer que esta razão é constante, significa dizer que a acréscimos constantes em x, correspondem acréscimos constantes em y, isto é, a alteração que ocorre na função $f(x) = ax + b$, quando x varia de x_1 para $x_2 = x_1 + \Delta x$, não depende de x, mas sim do tamanho Δx do intervalo considerado (Na **Figura 2.3**, $\Delta x > 0$):

$$f(x_1 + \Delta x) = a(x_1 + \Delta x) + b = (ax_1 + b) + a\Delta x = f(x_1) + a\Delta x.$$

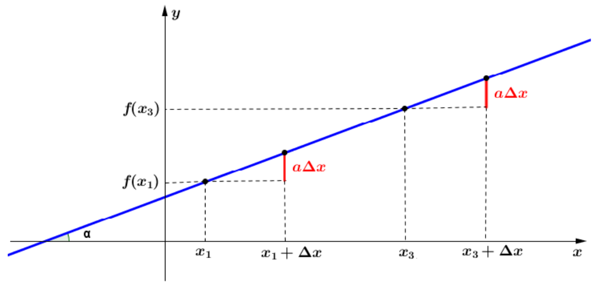


Figura 2.3: Ilustração da taxa de variação constante na função de 1^o grau.

É importante observar que esta taxa corresponde, geometricamente, ao coeficiente angular da reta $y = ax + b$. Assim, sendo α o ângulo que esta reta forma com o eixo x, vale a igualdade $tg(\alpha) = a$.

Se uma função de 1^o grau $f(x) = ax + b$ é crescente, isto é, se o seu gráfico é uma reta que "sobe" da esquerda para a direita, a razão

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

que fornece a declividade da reta, é positiva, pois $f(x)$ cresce, quando x cresce.

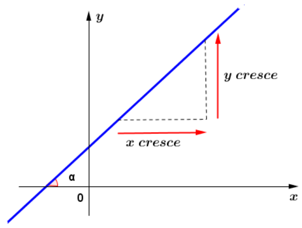


Figura 2.4: Função de 1^o grau crescente.

Se uma função de 1^o grau $f(x) = ax + b$ é decrescente, isto é, se o seu gráfico é uma reta que "desce" da esquerda para a direita, a razão

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

que fornece a declividade da reta, é negativa, pois $f(x)$ decresce, quando x cresce.

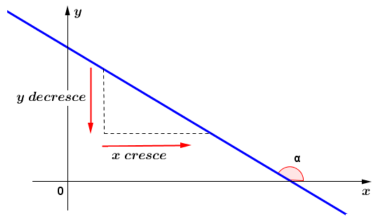


Figura 2.5: Função de 1^o grau decrescente.

Ressaltamos que a função de 1^o grau pode ser caracterizada pela propriedade de ter variação constante em qualquer intervalo do seu domínio.

Exemplo 2.4.1. A tabela dada relaciona o número x de quilômetros rodados o valor y (em reais) de uma corrida de táxi.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	3,00	4,70	6,40	8,10	9,80	11,50	13,20	14,90	16,60

Para duas linhas quaisquer da tabela, a taxa $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante e igual a 1,5. Esta taxa constante representa o valor adicional a ser pago (além da bandeirada), por quilômetro rodado.

Atividade 2.4.2. Numa viagem de automóvel de Campinas para uma cidade distante 180 km, foram gastos 15 litros de gasolina. A tabela a seguir, relaciona a distância D percorrida por este automóvel, dada em quilômetros, com o seu consumo c, dado em litros. Complete a tabela, supondo que as mesmas condições sejam mantidas durante toda a viagem.

$D(km)$		120	180		300
$c(l)$	5		15	20	

a) Que hipótese você fez para completar a tabela acima?

b) No contexto do problema apresentado, o que significa a taxa $\dfrac{\Delta D}{\Delta c}$?

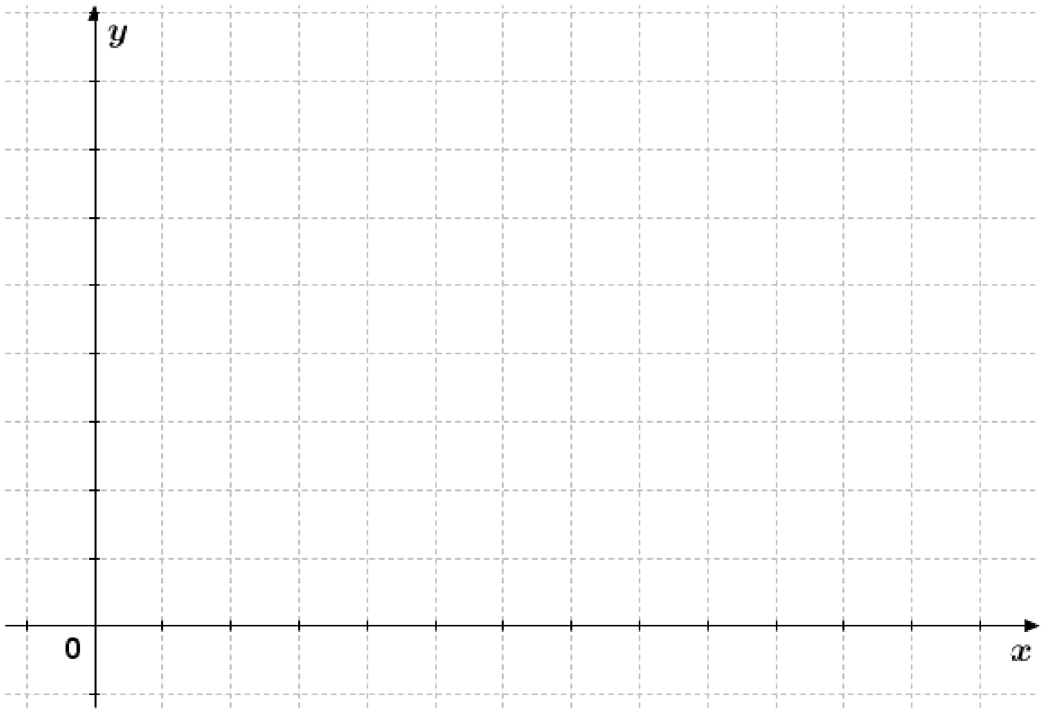
c) Determine a equação que permite determinar a distância percorrida em função do consumo de gasolina.

d) Como é possível determinar a taxa $\dfrac{\Delta D}{\Delta c}$ a partir da equação encontrada no item anterior?

e) Como é possível determinar a taxa $\dfrac{\Delta D}{\Delta c}$ a partir do gráfico da equação encontrada no item (c)?

Atividade 2.4.3. A massa m do oxigênio contido em um tanque varia com o tempo t de acordo com a expressão $m = 30 - 4t$ (m em kg, t em horas).

a) Construa o gráfico da função $m(t)$ no sistema cartesiano a seguir:



b) Determine a taxa de variação da massa em relação ao tempo. Qual o seu significado?

c) Em quanto tempo o tanque perde 10 kg de oxigênio?

2.5 Taxa de Variação Média de uma Função Qualquer

Considere uma função qualquer $y = f(x)$ definida no intervalo $[x_1, x_2]$ com $x_1 < x_2$. A razão $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ pode apresentar valores distintos para diferentes pares $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, ao contrário do que acontece no caso de uma função de 1^o grau (Veja o **Exemplo 2.2.1**). Embora a análise desta razão possa não ser tão simples para outros tipos de funções, ela fornece uma maneira de medir a variação ocorrida nos valores $f(x)$ quando x varia de x_1 até x_2.

Exemplo 2.5.1. (Este exemplo foi adaptado do livro [24], página171) Dada a função $y = f(x) = 3x^2$, para uma variação Δx a partir de x_1, a taxa de variação média entre x_1 e $x_2 = x_1 + \Delta x$ é:

$$TV_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1} = \frac{3(x_1 + \Delta x)^2 - 3x_1^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{3x_1^2 + 6x_1\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3x_1^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_1 + 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_1 + 3\Delta x.$$

Nesse caso, a taxa de variação média depende do ponto inicial considerado. Com a tabela abaixo, fica evidente que, quando o valor de x aumenta de uma unidade, a variação correspondente no valor da função não é mais constante.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-48	-27	-12	-3	0	3	12	27	48	75	108

- $TV_m[1,2] = \dfrac{12-3}{2-1} = 9$ ($f(x)$ aumenta de 9 unidades quando x varia de 1 a 2);
- $TV_m[2,3] = \dfrac{27-12}{3-2} = 15$ ($f(x)$ aumenta de 15 unidades quando x varia de 2 a 3);
- $TV_m[3,4] = \dfrac{48-27}{4-3} = 21$ ($f(x)$ aumenta de 21 unidades quando x varia de 3 a 4);
- $TV_m[1,4] = \dfrac{48-3}{4-1} = 15$ ($f(x)$ aumenta de 15 unidades quando x varia de 1 a 4).

Convém observar que, $TV_m[1,4] = 15$ representa a variação no valor da função por unidade de x em *média* entre 1 e 4.

Outra observação interessante é a taxa de variação média *negativa*, como por exemplo:

$TV_m[-4,-1] = \dfrac{3-48}{(-1)-(-4)} = -15$, ou seja, a função *decresce* 15 unidades por unidade que se acrescenta no valor de x, entre -4 e -1.

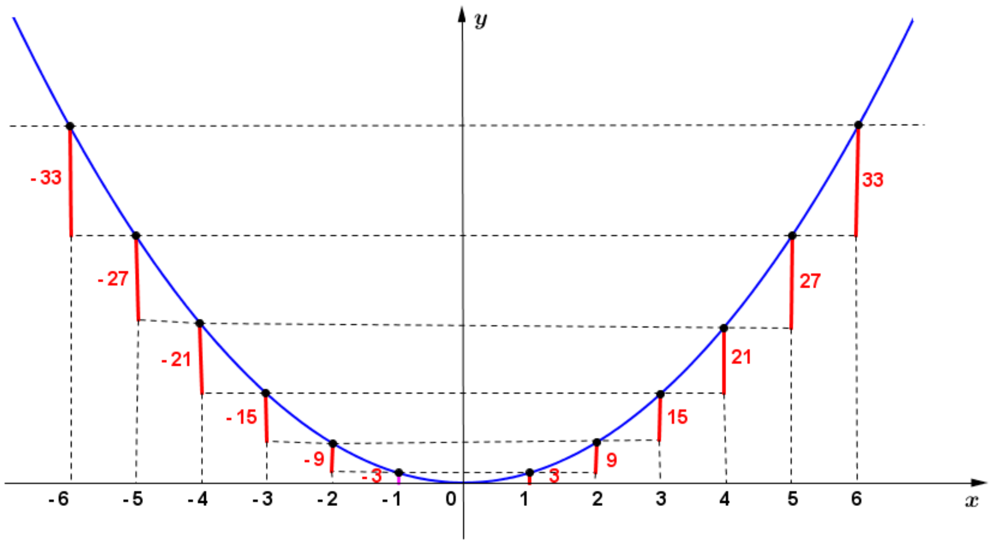


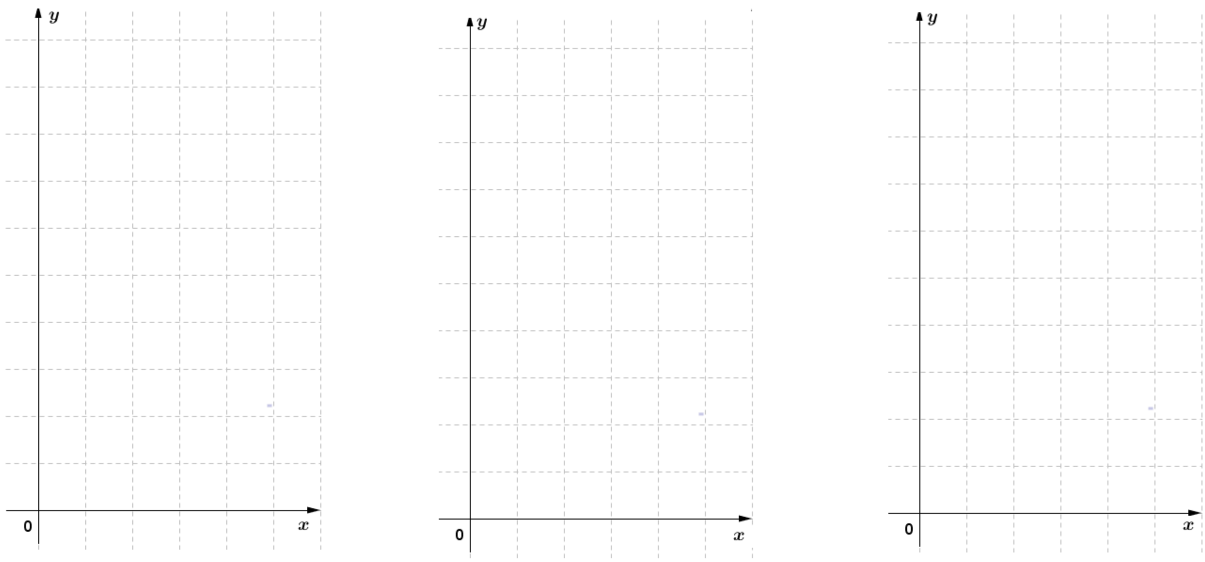
Figura 2.6: Ilustração da taxa de variação da função $f(x) = 3x^2$.

Atividade 2.5.2. Dadas as funções $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$:

a) Complete a tabela abaixo:

Intervalo	TV_m de $f(x) = 2x$	TV_m de $g(x) = x^2$	TV_m de $h(x) = 2^x$
[0,1]			
[1,2]			
[2,3]			
[3,4]			
[4,5]			

b) Construa no intervalo [0,5], o gráfico das funções f, g e h nos sistemas cartesianos a seguir:



c) Que conclusão você pode tirar com os dados dos itens (a) e (b)?

2.6 Taxa de Variação Pontual

O estudo da taxa de variação média de uma função $y = f(x)$ não fornece informações suficientes para poder analisar o comportamento da função em um ponto específico do domínio. Considerando a curva que representa o gráfico da função, esta análise seria facilitada se uma parte da curva contendo o ponto, pudesse ser altamente ampliada de modo que quando observada de muito perto, iria adquirir o aspecto de um "segmento de reta" . A análise seria feita através do comportamento do segmento de reta com o qual a curva se confunde na parte em questão.

Uma forma de alcançar esse objetivo consiste em analisar as retas secantes com base nas taxas de variação médias da função em intervalos do domínio, contendo o ponto, e de comprimento cada vez menor. Neste caso, o acréscimo Δx deverá aproximar-se de zero, o que será denotado por $\Delta x \longrightarrow 0$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.6.1. (Este exemplo foi adaptado do livro [24], página 175) Considerando a função $y = f(x) = 3x^2$, a taxa de variação média entre x_1 e $x_2 = x_1 + \Delta x$, com $\Delta x < 0$ ou $\Delta x > 0$, é:

$$TV_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1} = \frac{3(x_1 + \Delta x)^2 - 3x_1^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{3x_1^2 + 6x_1\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3x_1^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_1 + 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_1 + 3\Delta x, \text{ para } \Delta x \neq 0.$$

Geometricamente, esta taxa é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $y = f(x)$ nos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ (Veja **Figura 2.7**).

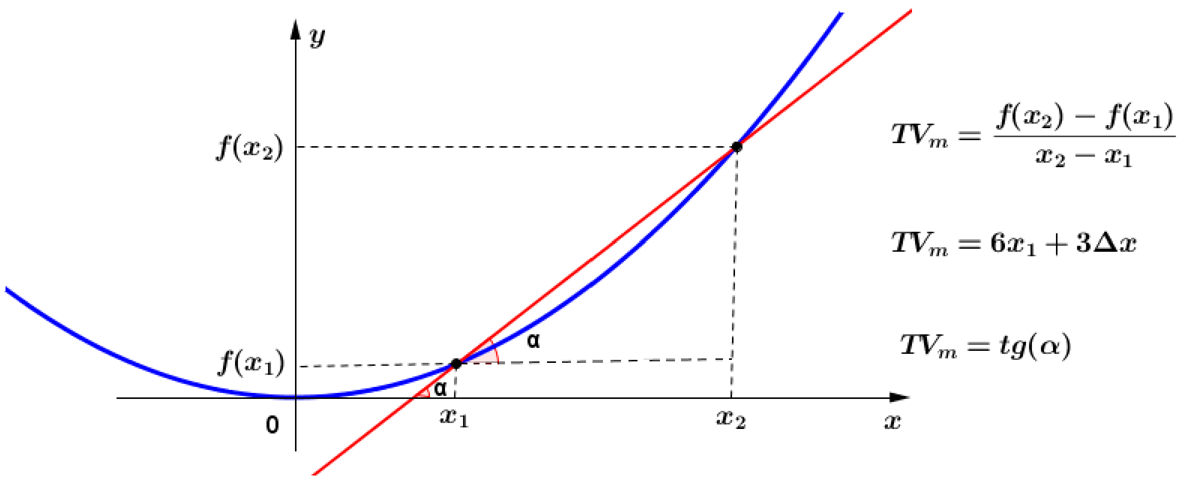


Figura 2.7: Reta secante ao gráfico de $f(x) = 3x^2$ nos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Analisando os valores obtidos ao fazer $\Delta x \longrightarrow 0$, porém sem se igualar a zero (Veja **Figura 2.8**), observamos a mudança que ocorre com as retas secantes em relação ao ponto $(x_1, f(x_1)) = (1, 3)$ comum a todas elas (**Figura 2.9**).

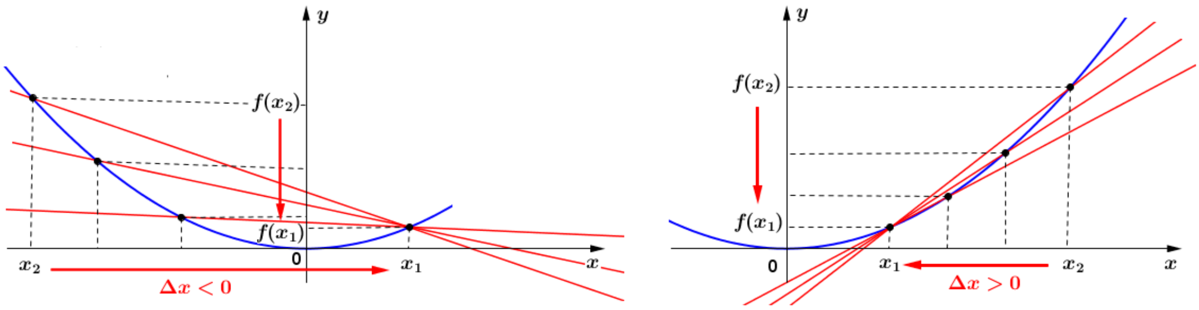


Figura 2.8: Δx aproxima de zero.

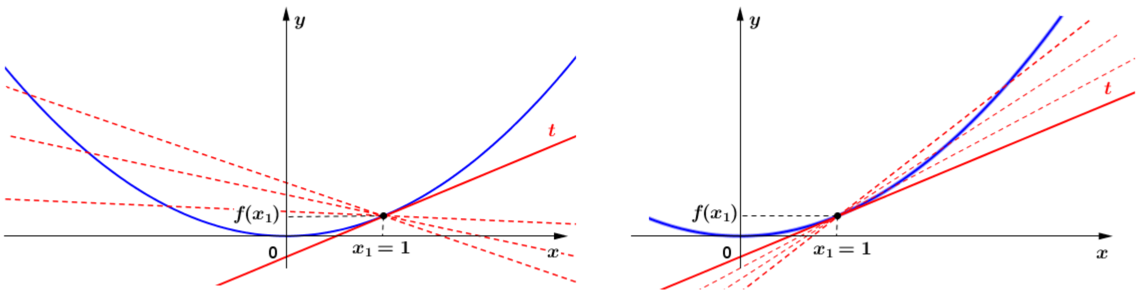


Figura 2.9: Reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$.

Ao mesmo tempo, observando os valores das tabelas que seguem:

$\Delta x > 0$	$TV_m = 6 + \Delta x$
0,1	6,3
0,01	6,03
0,001	6,003
0,0001	6,0003
0,00001	6,00003
...	...

$\Delta x < 0$	$TV_m = 6 + \Delta x$
-0,1	5,7
-0,01	5,97
-0,001	5,997
-0,0001	5,9997
-0,00001	5,99997
...	...

Observamos que à medida que Δx **se aproxima de zero**, os valores da taxa de variação média se aproximam mais e mais do valor 6, ou seja:

$$TV_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1} = 6 - 3\Delta x.$$

Quando $\Delta x \longrightarrow 0$ tem-se que $TV_m \longrightarrow 6$.

Na (**Figura 2.9**), à medida que x_2 se aproxima de x_1, tanto pela esquerda como pela direita, as retas secantes correspondentes se aproximam, cada vez mais, de uma reta t especial, que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1)) = (1, 3)$ e tem coeficiente angular igual a 6 (**Figura 2.10**).

Observe ainda que a curva e a reta t quase se confundem numa parte bem próxima do ponto $(1, 3)$.

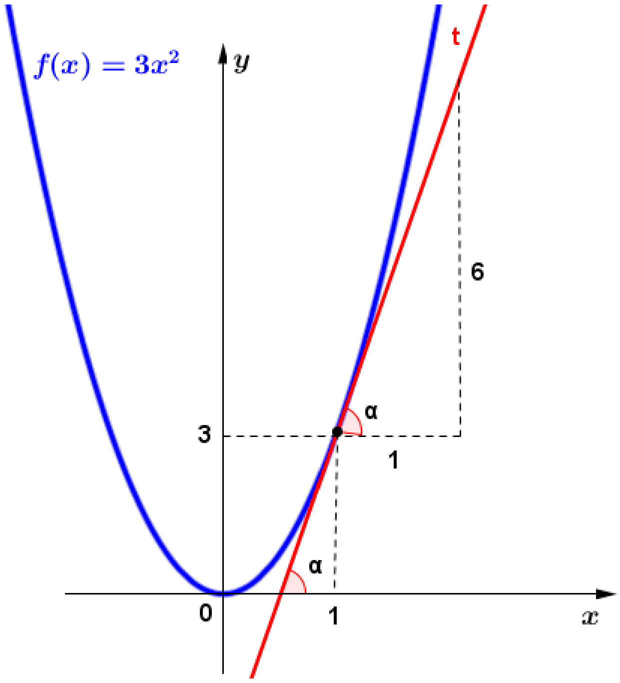


Figura 2.10: Interpretação geométrica da taxa de variação pontual da função $f(x) = 3x^2$ no ponto $x_1 = 1$.

Exemplo 2.6.2. A equação horária do movimento de um corpo é dada por $S(t) = t^2 + 5$ (S em metros; t em segundos), e desejamos saber a velocidade do corpo no instante $t = 2$ s.

Sendo $S(t) = t^2 + 5$, examinemos, em primeiro lugar, a velocidade média no intervalo de tempo $[2, 2 + \Delta t]$, com $\Delta t > 0$ ou $\Delta t < 0$. Temos:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(2+\Delta t) - S(2)}{(2+\Delta t) - 2} = \frac{[(2+\Delta t)^2 + 5] - (2^2 + 5)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{4 + 4\Delta t + (\Delta t)^2 + 5 - 9}{\Delta t} = \frac{\Delta t(4 + \Delta t)}{\Delta t} = 4 + \Delta t, \text{ para } \Delta t \neq 0.$$

Para achar a velocidade instantânea em $t = 2$, fazemos com que o acréscimo Δt se torne muito pequeno, tão pequeno quanto quisermos, ou seja, vamos fazer $\Delta t \longrightarrow 0$. Observemos nas tabelas seguintes o que ocorre, tomando alguns acréscimos positivos ($\Delta t > 0$) e alguns acréscimos negativos ($\Delta t < 0$):

$\Delta t > 0$	$V_m = 4 + \Delta t$
0,1	4,1
0,01	4,01
0,001	4,001
0,0001	4,0001
0,00001	4,00001
...	...

$\Delta t < 0$	$TV_m = 4 + \Delta t$
-0,1	3,9
-0,01	3,99
-0,001	3,999
-0,0001	3,9999
-0,00001	3,99999
...	...

Conforme Δt se aproxima de zero, tando pela direita como pela esquerda, o quociente $V_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ se aproxima de 4, ou seja, a taxa de variação instantânea $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ no instante $t = 2$ é igual a 4. Como o deslocamento está sendo medido em metros e o tempo em segundos, escrevemos $v(2) = 4\ m/s$.

Taxa de Variação Pontual: Se ao fazer Δx se aproximar de zero, as taxas de variação correspondentes (TV_m) se aproximarem de um número real, este número será chamado *taxa de variação pontual* ou *instantânea* da função no ponto x_1.

Atividade 2.6.3. Uma esfera parte do repouso e desce um plano inclinado. A distância d em metros, percorrida pela esfera, t segundos após ter sido largada, é dada por $d(t) = 2,1t^2 + 6,6t$.

a) Determine a velocidade média da esfera no primeiro segundo do movimento.

$v_m[0,1] =$

b) Considere um acréscimo Δt e determine a velocidade média da esfera no intervalo $[t, t + \Delta t]$.

$v_m[t, t + \Delta t]$=

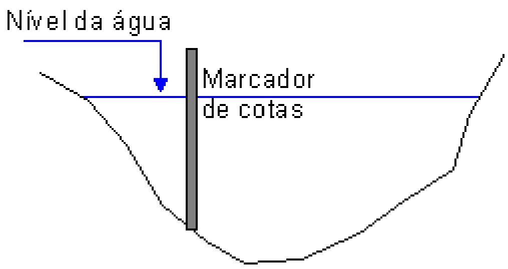
c) Para $t = 2$ segundos, complete a tabela ao lado:

Δt	$v_m[t, t + \Delta t]$
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	
0,00001	
0,000001	

d) Com os resultados obtidos nos itens (b) e (c), o que você pode afirmar quanto à velocidade da esfera no instante $t = 2$ segundos?

$v(2) =$

Atividade 2.6.4. Um reservatório de formato irregular armazena água. O volume de água armazenada varia em função da cota do nível da água, segundo a função $V(c) = 3c^2 + 5$, onde c é a cota em metros e V é o volume em $10^3\ m^3$.



a) Considere um acréscimo Δc e determine o volume médio da água armazenada no intervalo $[c, c + \Delta c]$.

$V_m[c, c + \Delta c]$=

b) Para $c = 10$ metros, complete a tabela abaixo:

Δc	$V_m[c, c + \Delta c]$
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	
0,00001	
0,000001	

c) Qual o volume da água armazenada quando o marcador de cotas indicar 10 metros?

$V(10) =$

2.7 Formalização do Conceito de Derivada de uma Função em um Ponto

Fixado um ponto qualquer $(x_1, f(x_1))$ do gráfico de uma função f, escolhemos pontos $x_1 + \Delta x$ do domínio, cada vez mais próximos de x_1, ou seja, com Δx muito pequeno, podendo ser positivo ou negativo. Calculamos a taxa de variação média

$$TV_m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

que representa o coeficiente angular da reta secante ao gráfico passando pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$.

Os valores assim calculados (dependentes de Δx) podem aproximar-se de um único número real, quando fazemos Δx se aproximar de zero ($\Delta x \longrightarrow 0$), o qual representará a taxa de variação instantânea da função no ponto dado. Neste caso, esse número será chamado *derivada* da função f no ponto x_1 e denotado por $f'(x_1)$ (lê-se: "f linha de x_1").

Geometricamente, este valor numérico representa o coeficiente angular da reta que contém o segmento com o qual o gráfico de $y = f(x)$ "se confunde" quando ampliado localmente. Esta será chamada *reta tangente* ao gráfico da função f no ponto $(x_1, f(x_1))$.

Um procedimento algébrico para obter $f'(x_1)$ pode ser sintetizado nos seguintes passos:

1. calculamos $f(x_1)$ e $f(x_1 + \Delta x)$ (sendo $\Delta x > 0$ ou $\Delta x < 0$);
2. calculamos a taxa de variação média dada pela razão (quociente):

$$TV_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x};$$

3. fazemos agora $\Delta x \longrightarrow 0$ (sem igualar a zero), e analisamos se os valores da taxa de variação média se aproximam de algum número real (que deve ser único).

No caso, em que não seja possível obter um número real nas condições acima, dizemos que a função f não admite derivada ou não é derivável no ponto x_1.

Atividade 2.7.1. Imagine que um vaso de flores caiu da janela de um prédio, isto é, temos um corpo em queda livre, cujo movimento iniciou-se de uma altura h. Da Física, sabe-se que a equação horária do movimento de um corpo em queda livre, com velocidade inicial nula, é dada por $s(t) = 4,9t^2$, sendo s medido em metros, de cima para baixo a partir da posição inicial, e t é medido em segundos.

a) Considere um acréscimo Δt e determine a velocidade média do vaso no intervalo $[1, 1 + \Delta t]$;

$v_m[1, 1 + \Delta t]$=

b) Determine a velocidade do vaso no instante $t = 1\ s$;

$v(1) = s'(1) =$

c) Considere um instante t qualquer e determine a velocidade média do vaso no intervalo $[t, t + \Delta t]$;

$v_m[t, t + \Delta t] =$

d) Determine a velocidade do vaso num instante t qualquer;

$v(t) = s'(t) =$

e) Intuitivamente, percebe-se que a velocidade aumenta em cada instante. Construa o gráfico, no intervalo [0,5], da função $v(t)$ obtida no item (d) e justifique que, de fato, a velocidade é crescente.

Atividade 2.7.2. Dada a função de 2^o grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

a) Determine a derivada de $f(x)$ em um ponto genérico x;

$f(x + \Delta x)$=

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$=

$f'(x)$=

b) Utilizando o resultado do item (a), complete a tabela abaixo.

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(-2)$	$f'(0)$	$f'(2)$
$5x^2 - 2x + 7$				
$-5x^2 + 2x + 7$				
$-5x^2 - 2x + 7$				
$5x^2 + 2x - 7$				
$-\frac{3}{2}x^2$				
$-\frac{3}{2}x^2 + x$				

Atividade 2.7.3. Mostre que a derivada da função de 1^o grau $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ em um ponto genérico x é igual a a, qualquer que seja o valor de x.

$f(x + \Delta x)$=

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$=

$f'(x)$=

Atividade 2.7.4. Mostre que a derivada da função constante $f(x) = c$ em um ponto genérico x é igual a zero, qualquer que seja o valor de x.

$f(x + \Delta x)$=

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$=

$f'(x)$=

Atividade 2.7.5. Mostre que a derivada da função $f(x) = ax^3$ $(a \neq 0)$ em um ponto genérico x é igual a $3ax^2$, qualquer que seja o valor de x.

$f(x + \Delta x)$=

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$=

$f'(x)$=

Atividade 2.7.6. Complete a tabela:

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(1)$
$7x^3$		
$-5x^3$		

Atividade 2.7.7. Suponha que uma bexiga está sendo inflada, produzindo uma esfera perfeita. Sabendo que o volume V da esfera pode ser escrito como uma função do raio r por $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$:

a) Mostre que a taxa de variação pontual do volume da esfera em relação ao seu raio é igual a área da superfície da esfera, ou seja, $V'(r) = 4\pi r^2$;

$V(r + \Delta r)$=

$\dfrac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r}$=

$V'(r)$=

b) Com que taxa varia o volume da esfera quando $r = 10$ cm?

$V'(10)$=

Atividade 2.7.8. Em Física, define-se densidade linear de uma barra, haste ou fio, como sendo a sua massa por unidade de comprimento. Além disso, uma barra, haste ou fio de um material qualquer é dito não homogêneo quando algumas de suas partes são mais pesadas, por unidade de comprimento, do que outras. Suponha que uma haste reta, não homogênea, de 1 m de comprimento , está disposta ao longo do eixo do x, de tal maneira que uma de suas extremidades coincide com a origem do sistema cartesiano, e, a sua massa (M) em cada pedaço do tipo $[0, x]$ é dada por $M(x) = 5x - 2x^2$.

a) Ache a densidade da haste em qualquer um dos seus pontos x;

$M(x + \Delta x)$=

$\dfrac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x}$=

$M'(x)$=

b) Qual das extremidades é mais densa, $x = 0$ ou $x = 1$?

$M'(0)$=

$M'(1)$=

2.8 Existência da Derivada

A definição de derivada nos leva ao seguinte problema: em que condição existirá a derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto x_1 pertencente ao seu domínio?

Do ponto de vista formal, basta verificar a existência de um único número real do qual a taxa de variação média se aproxima, para valores próximos de x_1, por aproximações feitas pela direita ou pela esquerda (veja o procedimento algébrico na **Seção 2.7**).

Do ponto de vista geométrico, a existência de derivada de uma função $y = f(x)$ em x_1, representa a possibilidade de “apoiar” uma única reta tangente ao gráfico da função f no ponto de coordenadas $(x_1, f(x_1))$.

Apresentaremos, em seguida, exemplos de funções que, por algumas ocorrências especiais, não possuem derivada nos pontos indicados. Em cada caso, vamos analisar as aproximações laterais em relação ao ponto considerado. Uma nova linguagem matemática será usada, da seguinte forma:

- Quando o incremento Δx é negativo ($\Delta x < 0$), estamos nos referindo a aproximações laterais pela esquerda em relação ao ponto considerado.

  Neste caso, escrevemos $\Delta x \longrightarrow 0^-$ e denotamos por $f'_-(x_1)$ ao valor do qual os m_{PQ} se aproximam, isto é, $m_{PQ} \longrightarrow f'_-(x_1)$.

- Quando o incremento Δx é positivo ($\Delta x > 0$), as aproximações laterais ocorrem pela direita em relação ao ponto considerado.

  Neste caso, escrevemos $\Delta x \longrightarrow 0^+$ e denotamos por $f'_+(x_1)$ ao valor do qual os m_{PQ} se aproximam, isto é, $m_{PQ} \longrightarrow f'_+(x_1)$.

Exemplo 2.8.1. Consideremos a função $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$, e vamos tentar obter a derivada de f no ponto $x_1 = 3$

Tomando $x_2 = x_1 + \Delta x = 3 + \Delta x$, com os resultados da tabela a seguir, notamos que:

	$f(x_1) = f(3)$	$f(x_2) = f(3+\Delta x)$	$TV_m = \dfrac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$
$\Delta x > 0$	$3 - 3 = 0$	$(3+\Delta x) - 3 = \Delta x$	$\dfrac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$
$\Delta x < 0$	$3 - 3 = 0$	$-(3+\Delta x) + 3 = -\Delta x$	$\dfrac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1$

- se x_2 assume valores próximos de 3, maiores que 3, a taxa de variação média se mantém igual a 1, ou seja,
$$f'_+(3) = 1;$$
- se x_2 assume valores próximos de 3, menores que 3, a taxa de variação média se mantem igual a -1, ou seja,
$$f'_-(3) = -1.$$

Portanto, quando x assume valores próximos de 3 **não se obtém** o mesmo valor real, se a aproximação é feita pela esquerda ou pela direita. Como tal valor deveria ser único, consideramos que f não é derivável em $x_1 = 3$, ou ainda, que não existe $f'(3)$.

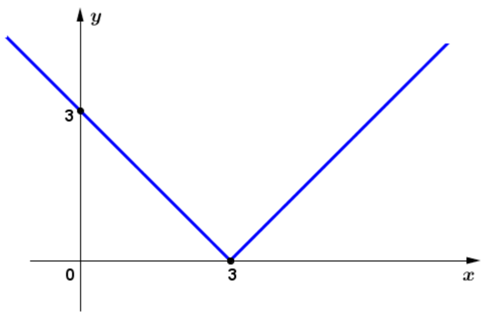


Figura 2.11: Gráfico da função $f(x)$ definida pelas sentenças $x - 3$ se $x \geq 3$ ou $-x + 3$ se $x < 3$.

Note que nenhuma reta que passa pelo ponto $(3, 0)$ assume valores próximos dos de $f(x)$, simultaneamente à direita e à esquerda de $x = 3$. Nesse ponto, o gráfico apresenta-se anguloso (**Figura 2.11**), havendo aí uma brusca alteração no modo como a função varia: à esquerda de $x = 3$, ela é decrescente a uma taxa constante igual a -1; à direita de $x = 3$, ela passa a ser crescente a uma taxa constante igual a 1.

Nas figuras a seguir, os gráficos ilustram o fato de que a existência da derivada em um ponto implica numa "suavidade" do gráfico, de modo a admitir uma reta tangente nesse ponto. Nessas figuras fica bem evidente a ideia de que a curva e a reta tangente tornam-se quase indistinguíveis próximo do ponto de tangência.

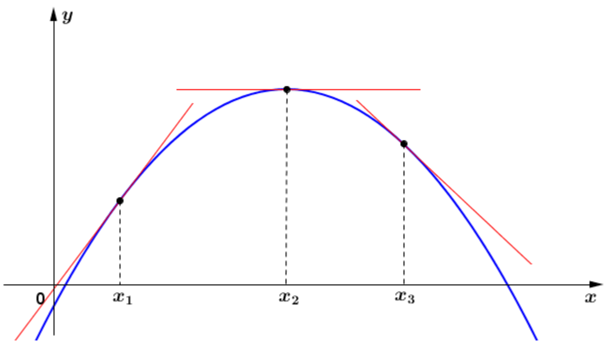


Figura 2.12: $\exists f'(x_1)$, $\exists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

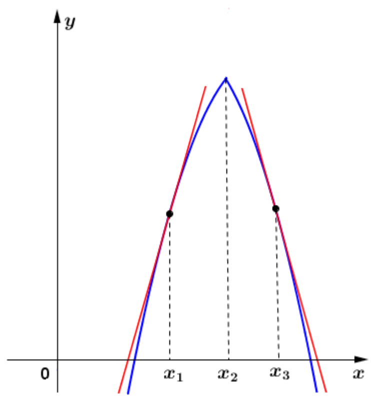


Figura 2.13: $\exists f'(x_1)$, $\nexists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

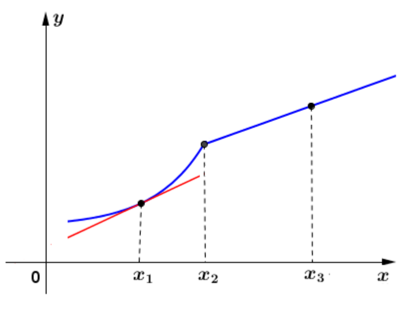


Figura 2.14: $\exists f'(x_1)$, $\nexists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

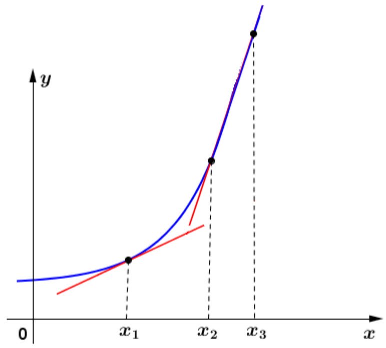


Figura 2.15: $\exists f'(x_1)$, $\nexists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

Exemplo 2.8.2. Considerando a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$, vamos procurar determinar a derivada da função f no ponto $x_1 = 0$, ou seja, $f'(0)$.

Tomando $x_2 = x_1 + \Delta x = 0 + \Delta x = \Delta x$ e observando os resultados obtidos nas tabelas que seguem, verificamos que:

	$f(x_1) = f(0)$	$f(x_2) = f(0 + \Delta x)$	$TV_m = \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$
$\Delta x > 0$	1	1	$\dfrac{1 - 1}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$
$\Delta x < 0$	1	$(\Delta x)^2 - 1$	$\dfrac{(\Delta x)^2 - 1 - 1}{\Delta x} = \dfrac{(\Delta x)^2 - 2}{\Delta x}$

$\Delta x < 0$	$TV_m = \dfrac{(\Delta x)^2 - 2}{\Delta x}$
-0,1	19,9
-0,01	199,99
-0,001	1999,999
-0,0001	19999,9999
-0,00001	199999,99999
...	...

- se x_2 assume valores próximos de zero, maiores do que zero, a taxa de variação média se mantém igual a zero, ou seja,

$$f'_+(0) = 0;$$

- porém, se x_2 assume valores próximos de zero, menores do que zero, a taxa de variação média assume valores cada vez maiores, ou seja, ela cresce ilimitadamente. Esse fato é traduzido em linguagem matemática da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow +\infty.$$

  Neste caso, dizemos que a função f não é derivável em $x_1 = 0$.

Notamos que o gráfico (**Figura 2.16**) dessa função f apresenta um "salto" ao passar pelo ponto $(x_1, f(x_1)) = (0, 1)$. Isto reflete a idéia de que ao percorrer a curva, não o fazemos de modo contínuo; há uma interrupção. Isto significa que a função f não é *contínua* em x_1.

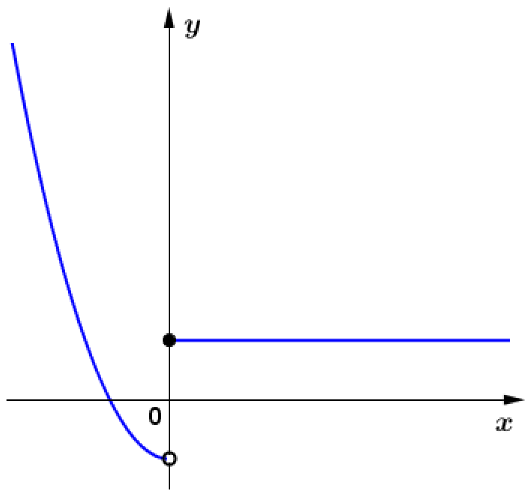


Figura 2.16: Gráfico da função$f(x)$ definida pelas sentenças $x^2 - 1$ se $x < 0$ ou 1 se $x \geq 0$.

Baseado na idéia intuitiva, o gráfico de uma função contínua em um ponto do domínio não apresenta furos ou rupturas ou saltos neste ponto. O significado de continuidade em um ponto x_1 é que quando x se aproxima de x_1, resulta que $f(x)$ se aproxima de $f(x_1)$. É importante observar que x_1 deve pertencer ao domínio de f.

$$f(x) \longrightarrow f(x_1) \text{ quando } x \longrightarrow x_1$$

No estudo de derivada, a noção de *continuidade* estará sempre presente. O fato de uma função $y = f(x)$ ter derivada e admitir uma reta tangente em um ponto considerado, implicará na continuidade de f nesse ponto. Neste texto, admitiremos que as funções polinomiais são contínuas em todo ponto.

Nas figuras que seguem, apresentamos gráficos de funções com alguns tipos característicos de descontinuidade.

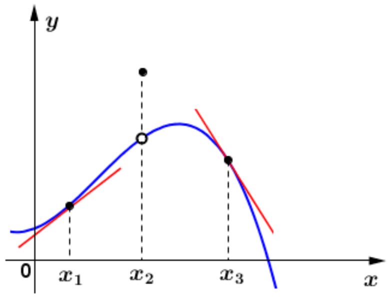


Figura 2.17: $\exists f'(x_1)$, $\nexists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

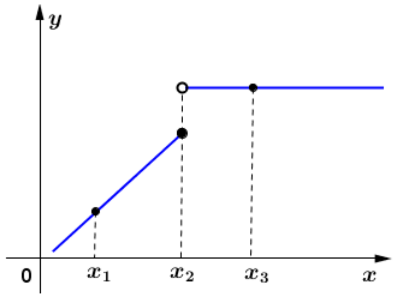


Figura 2.18: $\exists f'(x_1)$, $\nexists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

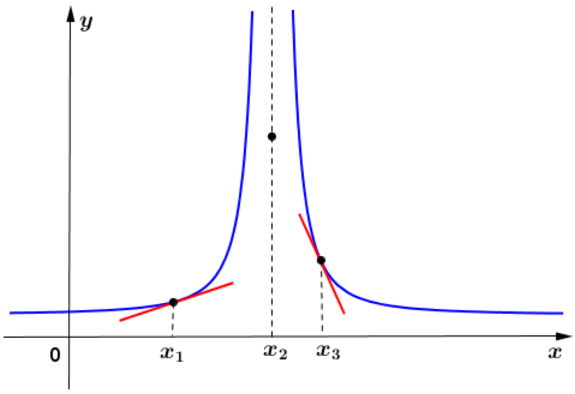


Figura 2.19: $\exists f'(x_1)$, $\nexists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

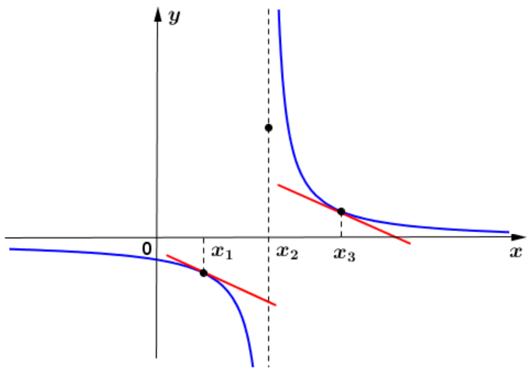


Figura 2.20: $\exists f'(x_1)$, $\nexists f'(x_2)$, $\exists f'(x_3)$.

Exemplo 2.8.3. Consideremos, agora, a função $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ e vamos procurar determinar a derivada da função f no ponto $x_1 = 1$, ou seja, $f'(1)$.

Tomando $x_2 = x_1 + \Delta x = 1 + \Delta x$ e observando os resultados obtidos nas tabelas que seguem, verificamos que:

$f(x_1) = f(1)$	$f(x_2) = f(1+\Delta x)$	$TV_m \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$
$\sqrt[3]{1-1} = \sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{1+\Delta x - 1} = \sqrt[3]{\Delta x}$	$\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$

Δx	$TV_m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$
$\pm 0,1$	100
$\pm 0,01$	10 000
$\pm 0,001$	1 000 000
$\pm 0,0001$	100 000 000
$\pm 0,00001$	10 000 000 000
...	...

- quando a aproximação é feita pela esquerda, a taxa de variação média cresce ilimitadamente. Esse fato é descrito na linguagem matemática da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow +\infty.$$

- quando a aproximação é feita pela pela direita do ponto $x_1 = 1$, a taxa de variação média também cresce ilimitadamente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow +\infty.$$

Do ponto de vista geométrico, as retas secantes que passam pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e por outro ponto próximo deste, com abscissa tanto à direita como à esquerda de x_1, tendem para a posição vertical (**Figura 2.21**).

Pode-se considerar que, neste caso, há uma reta tangente vertical, sem que a função f seja derivável em $x_1 = 1$.

Convém lembrar que, retas verticais são retas que interceptam o eixo x perpendicularmente (formam um ângulo de 90^o). Dessa forma, para essas retas não se define coeficiente angular.

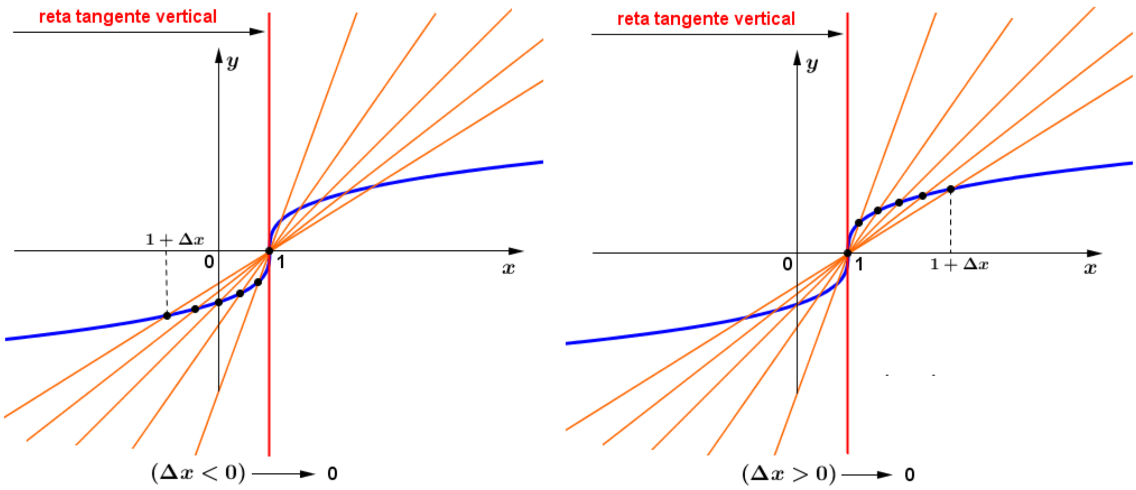


Figura 2.21: Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ com as retas secantes convergindo para a posição vertical quando x assume valores próximos de $x_1 = 1$.

Exemplo 2.8.4. Verificar se a função $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1-(x-2)^2} & \text{se} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$, admite derivada no ponto $x_1 = 1$.

Este exercício é de autoria do professor Alex Sandro [1].

Tomando $x_2 = x_1 + \Delta x = 1 + \Delta x$ e observando os resultados obtidos nas tabelas que seguem, notamos que:

- se x_2 assume valores cada vez mais próximos de 1, maiores que 1, a taxa de variação média assume valores cada vez maiores, ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow +\infty.$$

- se x_2 assume valores cada vez mais próximos de 1, menores que 1, a taxa de variação média assume valores cada vez menores, ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow -\infty.$$

	$f(x_1) = f(1)$	$f(x_2) = f(1+\Delta x)$	$\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$
$\Delta x > 0$	$\sqrt{1-1^2} = 0$	$\sqrt{1-(1+\Delta x - 2)^2} = \sqrt{-(\Delta x)^2 + 2\Delta x}$	$\dfrac{\sqrt{-(\Delta x)^2 + 2\Delta x}}{\Delta x}$
$\Delta x < 0$	$\sqrt{1-1^2} = 0$	$\sqrt{1-(1+\Delta x)^2} = \sqrt{-(\Delta x)^2 - 2\Delta x}$	$\dfrac{\sqrt{-(\Delta x)^2 - 2\Delta x}}{\Delta x}$

[1]Capitão do Quadro Complementar de Oficiais, Alex Sandro Faria Manuel é formado em Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), e, possui o Mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). É professor de matemática na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx) desde 2005.

$\Delta x > 0$	$TV_m = \dfrac{\sqrt{-(\Delta x)^2 + 2\Delta x}}{\Delta x}$
0,1	$\cong 4$
0,01	$\cong 14$
0,001	$\cong 44$
0,0001	$\cong 141$
0,00001	$\cong 447$
...	...

$\Delta x < 0$	$TV_m = \dfrac{\sqrt{-(\Delta x)^2 - 2\Delta x}}{\Delta x}$
-0,1	$\cong -4$
-0,01	$\cong -14$
-0,001	$\cong -44$
-0,0001	$\cong -141$
-0,00001	$\cong -447$
...	...

Logo, como x assume valores próximos de $x_1 = 1$, com a aproximação feita pela direita ou pela esquerda, mas não se obtem um mesmo valor para a taxa de variação média, significa que não haverá um valor único para representar a taxa de variação pontual (derivada). Neste caso, dizemos que a função f não é derivável em $x_1 = 1$, ou ainda, que não existe $f'(1)$.

Do ponto de vista geométrico, notamos que ao traçar retas secantes que passam pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e por outro ponto próximo deste, com abscissa tanto à direita como à esquerda de x_1, elas tendem para a posição vertical (**Figura 2.22**). Também neste caso, embora a função f não seja derivável em $x_1 = 1$, ela pode admitir uma reta tangente vertical nesse ponto.

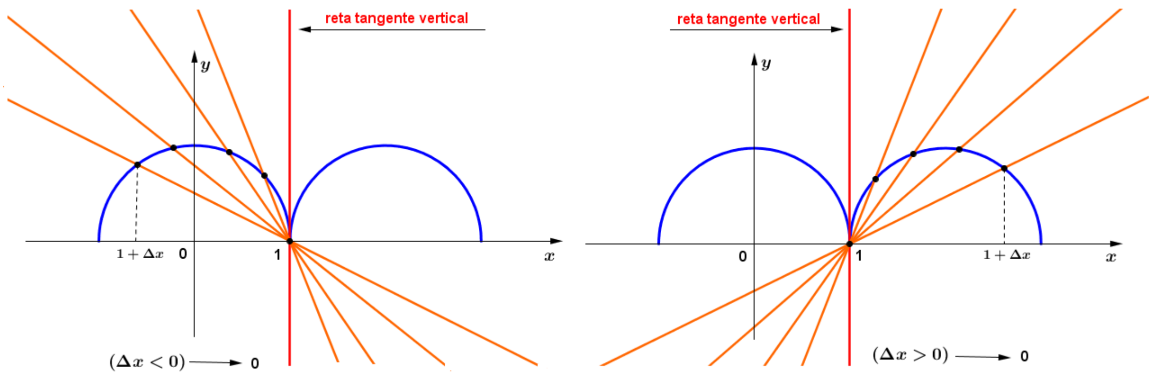


Figura 2.22: Gráfico da função $f(x)$ definidas pelas sentenças $\sqrt{1-x^2}$ se $-1 \leq x \leq 1$ ou $\sqrt{1-(x-2)^2}$ se $1 < x \leq 3$, com as retas secantes convergindo para a posição vertical quando x assume valores próximos de $x_1 = 1$.

2.9 A Reta Tangente ao Gráfico de uma Função

A noção de reta tangente que abordaremos aqui é mais ampla do que a vista na Geometria Plana. Para uma circunferência, sabemos que a reta tangente em um de seus pontos é a reta que tem com ela um único ponto comum, chamado *ponto de tangência*; as retas não tangentes ou interceptam a circunferência em dois pontos diferentes ou não a interceptam (**Figura 2.23**).

O conceito moderno de reta tangente originou-se com Fermat [2], em torno de 1630. O

[2] Newton reconheceu que Fermat foi o primeiro a chegar ao conceito moderno de reta tangente a uma dada curva em um dos seus pontos.

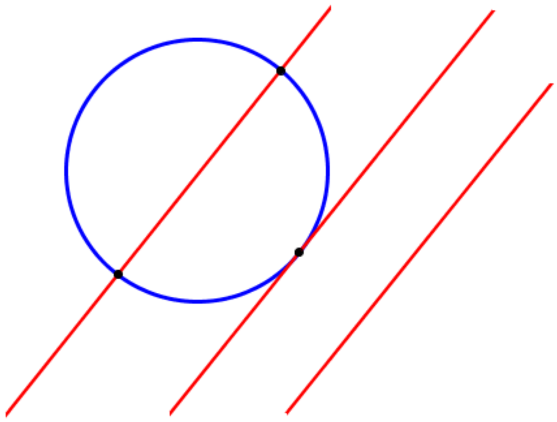


Figura 2.23: Posições relativas entre reta e circunferência.

termo tangência aplicado aqui se restringe ao que está ocorrendo nas proximidades de um ponto em questão, como ilustramos nas figuras seguintes:

- Na **Figura 2.24**, a reta tangente à curva no ponto A intercepta a curva em outro ponto B.

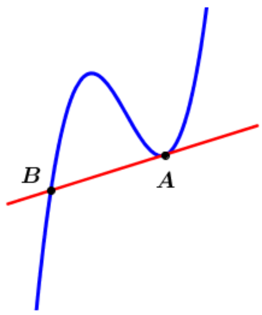


Figura 2.24: Reta tangente à curva no ponto A e cortando a curva no ponto B.

- Na **Figura 2.25**, a curva está muito "achatada" perto do ponto B e a reta tangente parece tocar a curva em mais do que um ponto, e, ao mesmo tempo, atravessar a curva.

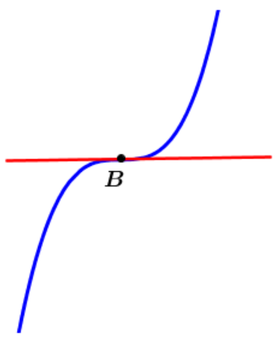


Figura 2.25: Reta tangente à curva no ponto B e ao mesmo tempo atravessando a curva.

- Na **Figura 2.26**, a mesma reta tangencia a curva nos pontos C e D.

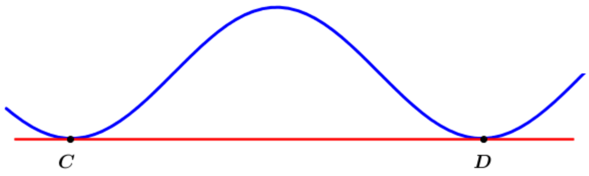


Figura 2.26: Reta tangente à curva nos pontos C e D.

Uma caracterização de reta tangente ao gráfico de uma função em um dos seus pontos, é baseada na ideia de aproximação linear local, no sentido de que tal reta contém o ponto e "melhor aproxima" o gráfico dessa função numa parte próxima deste ponto. Assim, os valores da reta tangente podem substituir, com erro muito pequeno, os valores da função nesta região. Para tanto, vamos detalhar a ideia de Fermat mencionada no **Capítulo 1** e definir a inclinação da reta tangente no ponto. Então, a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.

Consideremos uma função contínua f em um intervalo I e o ponto $P = (x_1, f(x_1))$ do gráfico de f, com $x_1 \in I$, onde se deseja traçar uma reta tangente (**Figura 2.27**).

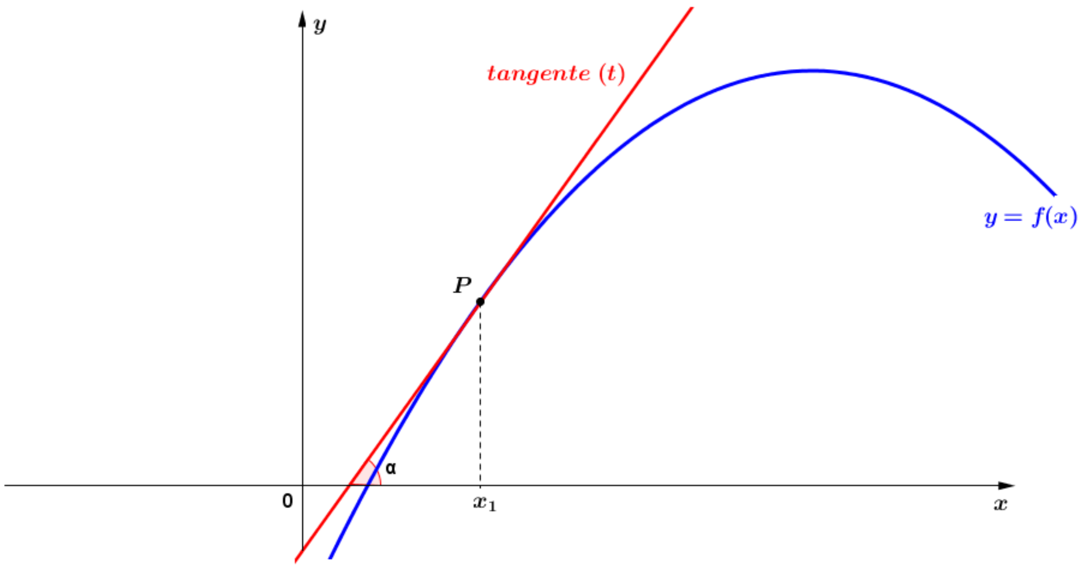


Figura 2.27: Reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P.

Consideremos, agora, outro ponto Q do gráfico de f, descrito por $(x_1+\Delta x, f(x_1+\Delta x))$, com $(x_1 + \Delta x) \in I$ onde Δx o deslocamento no eixo x, quando Q se desloca sobre a curva até P. A reta que passa por P e Q é secante à curva $y = f(x)$ (Ver **Figura 2.28**).

A inclinação ou coeficiente angular desta reta é dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

desde que a reta PQ não seja vertical.

Fixado o ponto P e considerando Q movendo-se ao longo da curva, aproximando-se de P, com posições sucessivas Q_1, Q_2, Q_3,..., construímos retas secantes por P e Q_i. A **Figura 2.29** mostra os pontos Q_1, Q_2, Q_3, ..., à direita de P, no entanto, esses pontos podem estar de qualquer lado de P.

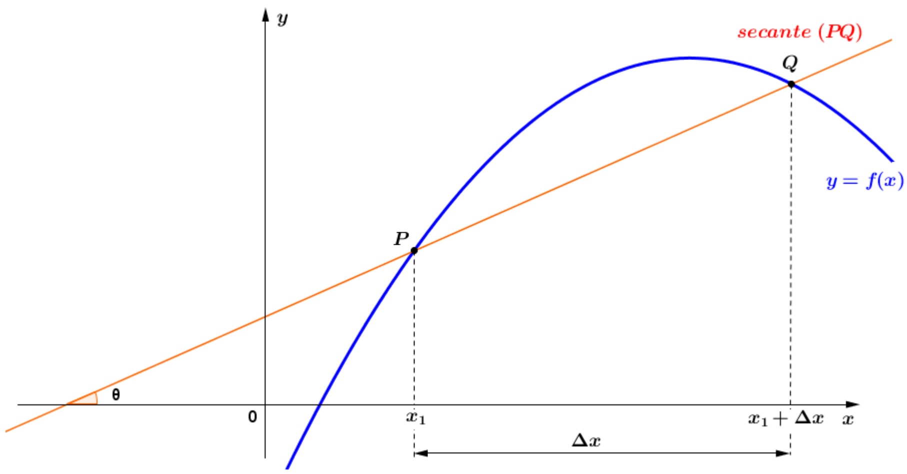


Figura 2.28: Reta secante à curva $y = f(x)$ nos pontos P e Q.

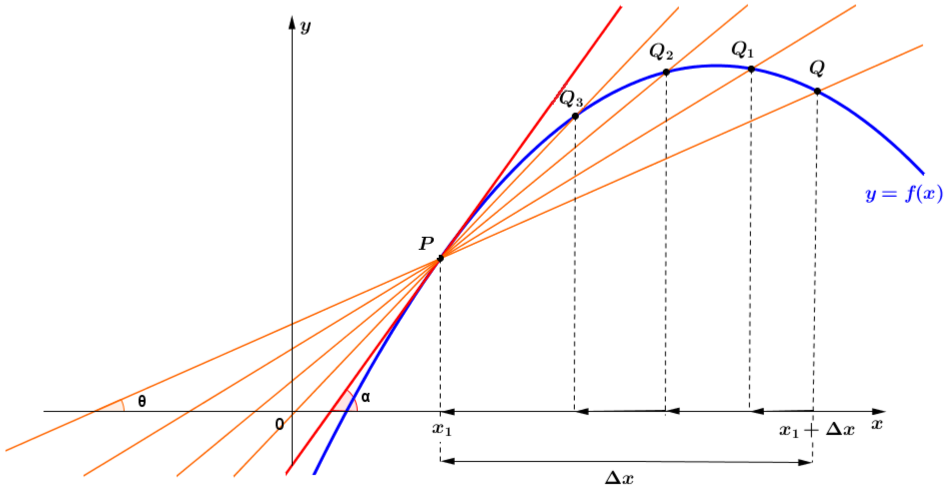


Figura 2.29: Ponto Q se aproximando de P à medida que Δx tende a zero.

Pode ocorrer:

1. $m_{PQ} \longrightarrow m$ quando $\Delta x \longrightarrow 0$. Neste caso, $m = f'(x_1)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em P;
2. $m_{PQ} \longrightarrow +\infty$ ou $m_{PQ} \longrightarrow -\infty$ quando $\Delta x \longrightarrow 0$. Neste caso, as retas secantes se aproximam de uma reta vertical passando por P.

Definição 2.9.1. Suponhamos que a função $y = f(x)$ seja contínua em um ponto x_1 do seu domínio. Definimos reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_1, f(x_1))$ à reta de equação:

(i) $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$, se $f'(x_1)$ existir;

(ii) $x = x_1$, se $m_{PQ} \longrightarrow +\infty$ ou $m_{PQ} \longrightarrow -\infty$ quando $\Delta x \longrightarrow 0$.

Observação 2.9.2. Da Geometria Analítica, sabemos que a equação da reta, de coeficiente angular m, passando pelo ponto $P = (x_1, y_1)$, é dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

A definição, a seguir, consta na página 142 do [16].

Definição 2.9.3. A **reta normal** a um gráfico em uma dado ponto é a reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.

Observação 2.9.4. Lembre-se que, se duas retas são perpendiculares, com coeficientes angulares m_1 e m_2, então:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Assim, se $f'(x_1) \neq 0$, a equação da reta r, normal à curva $y = f(x)$, no ponto $P = (x_1, f(x_1))$, é dada pela equação:

$$y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}\,(x - x_1)\,.$$

No caso de $f'(x_1) = 0$, a reta tangente é uma reta horizontal de equação $y - y_1 = 0$ e a reta normal correspondente uma reta vertical de equação $x - x_1 = 0$.

Exemplo 2.9.5. Consideremos a função $y = f(x) = x^2$ e o ponto $P = (-1, 1)$ no gráfico de f. Sejam t e r, respectivamente, as retas tangente e normal à parábola considerada (**Figura 2.30**).

- derivada da função f em um ponto genérico x: $f'(x) = 2x$ (Ver **Atividade2.7.2**);
- coeficiente angular da reta tangente: $m_t = f'(-1) = 2.(-1) = -2$;
- equação da reta tangente no ponto P: $y - 1 = -2(x - (-1))$, ou seja, $y = -2x - 1$;
- coeficiente angular da reta normal: $m_r = -\dfrac{1}{m_t} = \dfrac{1}{2}$;
- equação da reta normal no ponto P: $y - 1 = \dfrac{1}{2}\,(x + 1)$, ou seja, $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

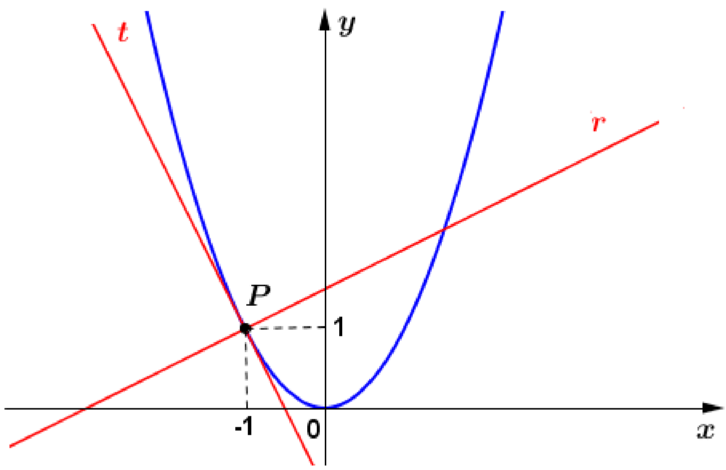


Figura 2.30: Retas tangente e normal à parábola $f(x) = x^2$ no ponto $P = (-1, 1)$.

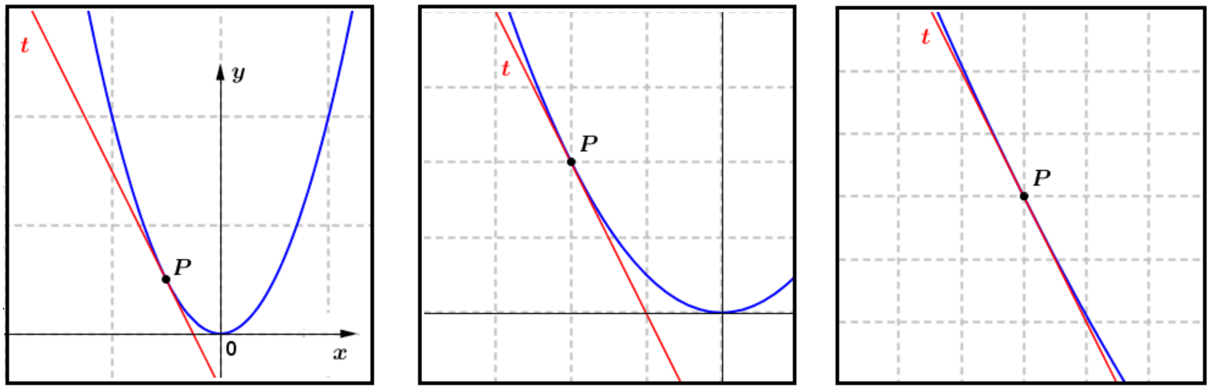


Figura 2.31: Um zoom cada vez maior da parábola $f(x) = x^2$ no ponto $(-1, 1)$.

Podemos interpretar a inclinação da reta tangente como **inclinação da curva** no ponto de tangência baseado na idéia de que uma parte da curva contendo esse ponto, ao ser suficientemente ampliada (*zoom*), parecerá uma reta. A **Figura 2.31** ilustra essa afirmação para a curva $f(x) = x^2$ do **Exemplo 2.9.5**. Quanto maior for o *zoom*, mais indistinguível da reta tangente será a parábola.

Atividade 2.9.6. Sem utilizar o conceito de derivada, determine a equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ no ponto de coordenadas $(-1, 1)$.

Sugestão: Chame de m o coeficiente angular da reta tangente, defina sua equação por $y - 1 = m(x - (-1))$ e use o fato de que uma reta tangente a uma parábola, em qualquer um de seus pontos, tem com ela um único ponto em comum.

Atividade 2.9.7. É dada a função $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 3$.

a) Calcule o coeficiente angular da reta t tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto onde $x = 5$;
Sugestão: utilize o resultado obtido no item (a) da **Atividade 2.7.2**.

$m_t = f'(5) =$

b) Determine a equação da reta tangente o item (a).

Atividade 2.9.8. Determine a equação da reta t tangente ao gráfico de $f(x) = -2x^3$ no ponto onde $x = 3$. Sugestão: utilize o resultado obtido na **Atividade 2.7.5**.

$m_t = f'(3) =$

Equação da reta t:

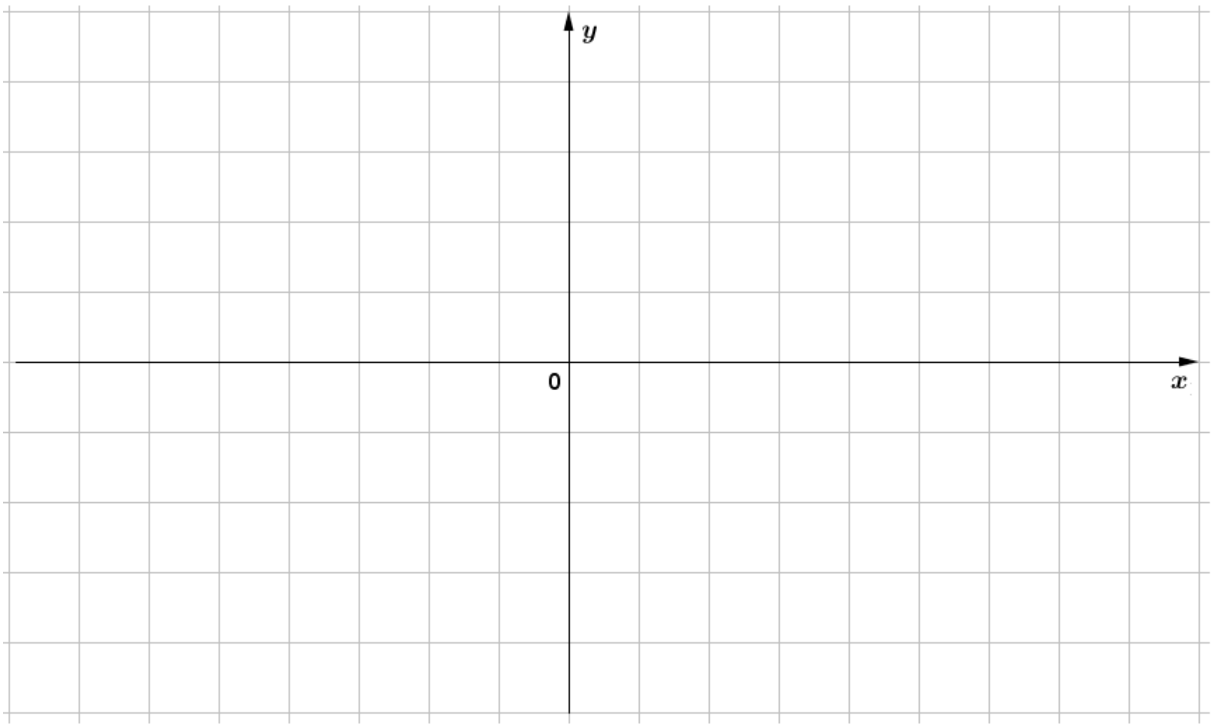
Atividade 2.9.9. Verificar, se existe, a derivada das funções que seguem para $x = 2$. A seguir, esboce em um sistema de coordenadas cartesianas o gráfico dessas funções.

a) $f(x) = |x|$

$f'_{-}(2) =$

$f'_{+}(2) =$

$f'(2) =$



b) $f(x) = |x - 2|$

$f'_{-}(2) =$

$f'_{+}(2) =$

$f'(2) =$

Atividade 2.9.10. Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ e no ponto $x = 4$.

$f'(4) =$

b) Use uma calculadora para completar as tabelas seguintes, e, certifique-se do resultado obtido no item (a).

$\Delta x < 0$	$f(4+\Delta x)$	$\dfrac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x}$	$\Delta x > 0$	$f(4+\Delta x)$	$\dfrac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x}$
-1			1		
-0,5			0,5		
-0,05			0,05		
-0,001			0,001		
-0,0001			0,0001		

c) Escreva a equação da reta t tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(4, 2)$.

$m_t = f'(4) =$

Equação da reta t:

d) Verifique algebricamente que a reta encontrada no item (c) intercepta o gráfico da função apenas no ponto $(4, 2)$.

Sugestão: resolva o sistema com as equações que definem a função e a reta tangente.

Atividade 2.9.11. (Esta atividade foi uma adaptação dos exercícios 44, 45 e 46, página 189, do livro [24]) Considere a função $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se} \quad 0 < x \leq 4 \\ \dfrac{x}{4} + 1 & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$.

a) Mostre que a derivada de f no ponto $x = a$ ($0 < a \leq 4$) é $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

$f'(a)$=

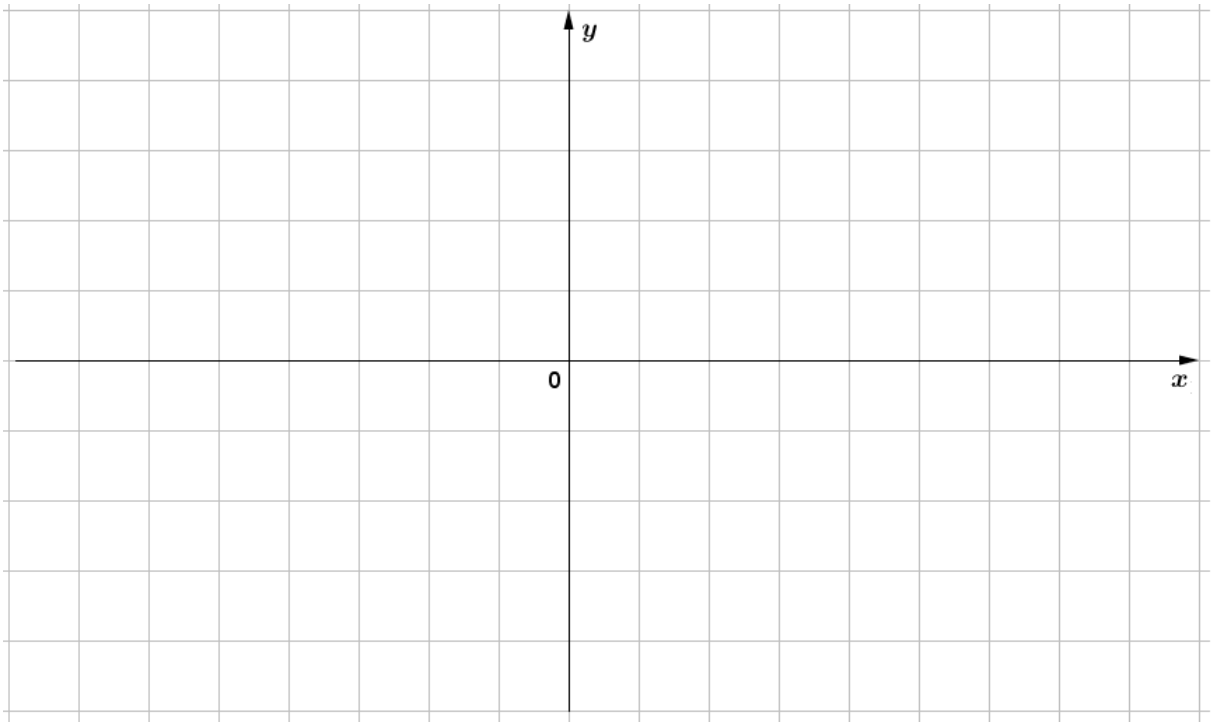
b) Mostre que a derivada de f no ponto $x = b$ ($b > 4$) é $f'(b) = \dfrac{1}{4}$.

$f'(b)$=

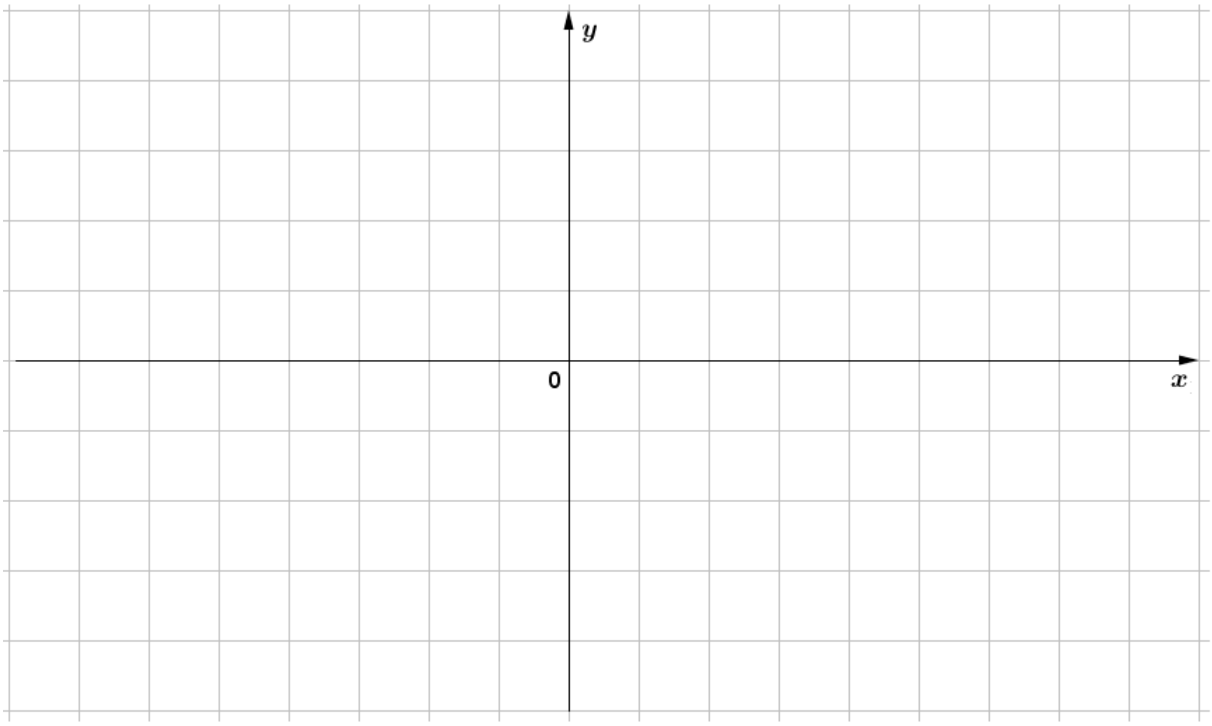
c) Verifique se existe $f'(4)$.

d) Existe reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 4$? Em caso afirmativo, determine sua equação.

e) No sistema de coordenadas cartesianas, a seguir, esboce o gráfico de f.



Atividade 2.9.12. Construa o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 2$, e verifique, a partir dele em quais pontos a função f não é derivável.



Resposta:

Atividade 2.9.13. Nesta atividade, será preciso utilizar a condição de paralelismo entre retas.

Duas retas do plano cartesiano são paralelas quando possuem a mesma inclinação: ou ambas são verticais, ou ambas possuem coeficientes angulares iguais.

De fato, se r e s não são verticais, então:

$r \mathbin{//} s$ (s é paralela à r) $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow tg\ \alpha_1 = tg\ \alpha_2 \Leftrightarrow m_r = m_s$ (Veja **Figura 2.32**).

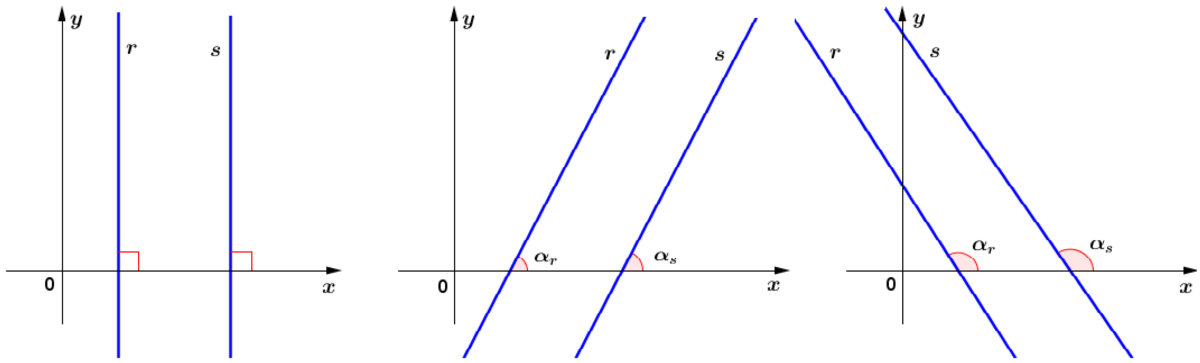


Figura 2.32: Retas paralelas no plano cartesiano.

Vamos considerar a curva definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e a reta r de equação $2x - y = 0$.

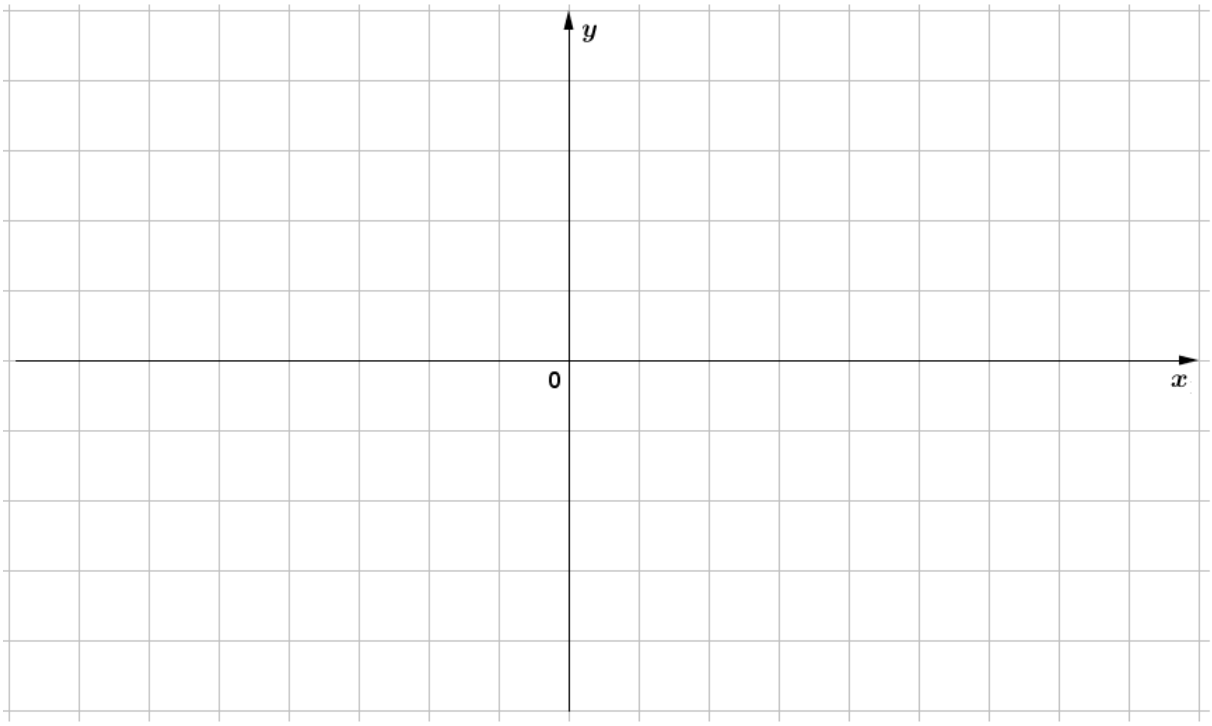
---

a) Ache uma equação da reta t tangente à curva que é paralela à reta r.

Sugestão: Chame a abscissa do ponto de tangência de a e parta da hipótese $f'(a) = m_t$.

b) Ache a equação da reta n normal à curva no ponto de tangência encontrado no item (a).

c) Trace, no sistema de coordenadas cartesianas abaixo, o gráfico da curva, da reta tangente e da reta normal.



Atividade 2.9.14. Dada a função $f(x) = x - x^2$, em que ponto do gráfico a tangente é horizontal?

Lembrete: Reta horizontal é paralela ao eixo x e seu coeficiente angular é nulo (Ver **Seção 2.3**).

2.10 Aproximação Linear

Considerando o gráfico de $y = f(x)$ e um ponto $(x_1, f(x_1))$ desse gráfico, uma reta t é tangente a esse gráfico em $(x_1, f(x_1))$, quando t passa por $(x_1, f(x_1))$ e, para valores de x muito próximos de x_1, os valores $t(x)$ distam cada vez menos dos valores $f(x)$, representando uma boa aproximação.

Essa observação constitui uma base para um método para estimar certos valores através de valores aproximados. A idéia é pensar que uma função derivável em um ponto do seu domínio, "comporta-se" como uma função polinomial do primeiro grau nas proximidades desse ponto.

Considere a função $y = f(x)$ derivável no ponto $x = a$. Uma forma de avaliar $f(a)$ é utilizar os valores correspondentes na reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para $f(x)$, quando x está próximo de a. Sendo a equação dessa reta tangente dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ a aproximação $f(x) \cong f(a) + f'(a)(x - a)$ é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** de f em a. A função afim $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ cujo gráfico é essa reta tangente é chamada **linearização** de f nas proximidades de a (Veja **Figura 2.33**).

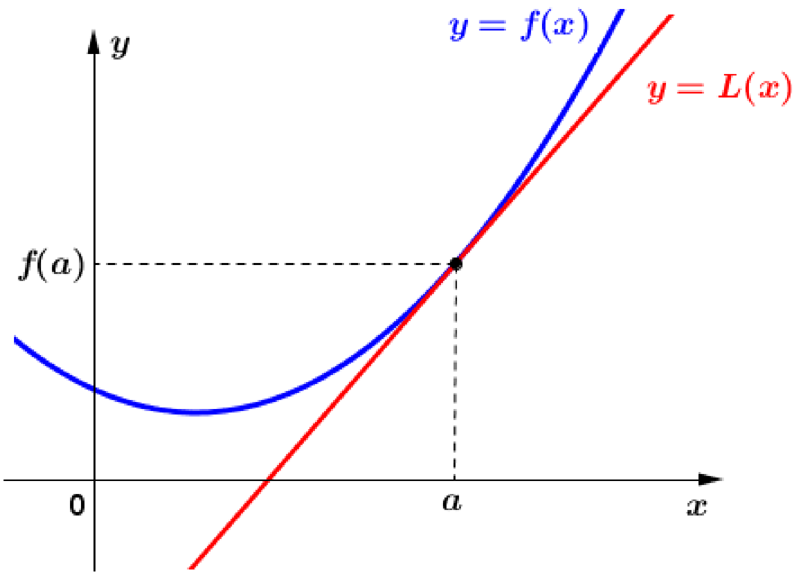


Figura 2.33: Linearização de f em a.

Exemplo 2.10.1. Calcular um valor aproximado para $\sqrt{100,04}$ usando aproximação pela reta tangente.

Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x}$ e o ponto $x = 100$. Temos:

- $f(100) = \sqrt{100} = 10$.
- $\dfrac{f(100 + \Delta x) - f(100)}{\Delta x} \longrightarrow 0,05$ quando $\Delta x \longrightarrow 0$, ou seja, $f'(100) = 0,05$.
- a linearização de $f(x)$ em x=100 é $L(x) = 10 + 0,05(x - 100)$.
- $\sqrt{100,04} \cong L(100,04) = 10 + 0,05(100,04 - 100) = 10,002$.

Exemplo 2.10.2. Calcular um valor aproximado para $(1,99)^3$ usando aproximação pela reta tangente.

Consideremos a função $f(x) = x^3$ e o ponto $x = 2$. Temos:

- $f(2) = 2^3 = 8$.
- $\dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \longrightarrow 12$ quando $\Delta x \longrightarrow 0$, ou seja, $f'(2) = 12$.
- a linearização de $f(x)$ em x=2 é $L(x) = 8 + 12(x-2)$.
- $(1,99)^3 \cong L(1,99) = 8 + 12(1,99 - 2) = 7,88$.

Capítulo 3

Regras de Derivação

O cálculo da taxa de variação instantânea em um ponto do domínio de uma função, usando a ideia de aproximação local, pode ser facilitado por alguns recursos algébricos. Neste capítulo desenvolveremos algumas regras que nos permitem calcular com relativa facilidade, a derivada de algumas funções elementares.

3.1 Derivada de uma Função Constante

Se $c \in \mathbb{R}$ e se $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. $TV_m = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0.$

Logo, a derivada de uma função constante é igual a zero em qualquer ponto. □

3.2 Regra da Potência: a derivada de $f(x) = x^n$

Em exercícios anteriores já foram calculadas derivadas de algumas potências de x, que relacionamos a seguir:

Função Inicial	Função Derivada
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Observe que o expoente de x na função inicial aparece como coeficiente de x na função derivada; ainda, o expoente de x na função derivada é uma unidade a menos do que na função primitiva. Na primeira linha esta regra também se mantém, basta reescrevê-la de forma conveniente:

$$\text{se } f(x) = x^1 \text{ então } f'(x) = 1.x^0 = 1.$$

Continuando essa regra, temos:

Função Inicial	Função Derivada
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$
$\vdots$	$\vdots$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Apresentaremos uma justificativa para funções com expoente natural n, utilizando o *Binômio de Newton*:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + ... + b^n$$

Calculemos, então, a derivada de $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Aplicando o desenvolvimento do *Binômio de Newton* para $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$:
$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n.$$
2. Determinando a taxa de variação média:
$$TV_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$
$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + ..._{(}\Delta x)^{n-1}.$$
3. Fazendo $\Delta x \longrightarrow 0$ o resultado será nx^{n-1}.

Essa regra vale para todas as funções potências com expoente real e a demonstração pode ser encontrada na página 249 do livro [24].

Exemplo 3.2.1. Vamos determinar a derivada das funções:

(a) $f(x) = x^8 \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 8x^7$;

(b) $f(x) = x^{2015} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 2015x^{2014}$;

(c) $f(x) = x^{-4} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = -4x^{-5}$;

(d) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

(e) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.3 Regra da Multiplicação por Constante

Considere $c \in \mathbb{R}$ e as funções g e f tais que $f(x) = c.g(x)$ para todo x. Se $g'(x)$ existir, então $f'(x) = c.g'(x)$.

Demonstração. $TV_m = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \dfrac{c.g(x_1 + \Delta x) - c.g(x_1)}{\Delta x} =$

$$= c.\frac{g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)}{\Delta x}.$$

Como $\dfrac{g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)}{\Delta x} \longrightarrow g'(x_1)$ quando $\Delta x \longrightarrow 0$,

então,

$$\frac{c.g(x_1 + \Delta x) - c.g(x_1)}{\Delta x} \longrightarrow c.g'(x)$$

Logo, a derivada do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela derivada da função, se essa derivada existir. □

3.4 Regra da Soma

Teorema 3.4.1. Considere as funções f, g e h tais que $h(x) = f(x) + g(x)$, para todo x. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Por hipótese, $h(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$.

Então,

$$\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Como

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \longrightarrow f'(x) \text{ e } \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \longrightarrow g'(x), \text{ quando } \Delta x \longrightarrow 0$$

tem-se que:

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} \longrightarrow f'(x)+g'(x), \text{ quando } \Delta x \longrightarrow 0.$$

Logo, a derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas, se ambas existirem.

Este resultado pode ser estendido para a soma de um número finito de funções, isto é, se

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x),$$

então

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x),$$

para todo x, se as derivadas de $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ existirem. □

Exemplo 3.4.2. A derivada da função $f(x) = 5x^7+3x^4+2x+1$ é $f'(x) = 35x^6+12x^3+2$.

3.5 Derivada da Função Polinomial

As regras anteriores podem ser combinadas com a Regra da Potência para calcular a derivada de qualquer função polinomial. Assim, se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

então,

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + ... + 2a_2x + a_1.$$

Exemplo 3.5.1. Encontrar as derivadas das funções:

(a) $f(x) = 3x^7 - 5x^4 + 2x^3 - 3x + 2 \implies f'(x) = 21x^6 - 20x^3 + 6x^2 - 3;$

(b) $f(x) = x^8 + x^6 - x^4 - x^2 \implies f'(x) = 8x^7 + 6x^5 - 4x^3 - 2x;$

(c) $f(x) = 1 - 2x - x^2 \implies f'(x) = -2 - 2x;$

(d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \implies f'(x) = x^3 - x;$

(e) $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x}{2} \implies f'(x) = x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2};$

(f) $f(x) = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1 \implies f'(x) = 18x - 6;$

(g) $f(x) = (x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3 \implies f'(x) = 2x + 2.$

(h) $f(x) = -2(3x-4) = -6x + 8 \implies f'(x) = -6.$

Exemplo 3.5.2. Encontrar as derivadas das funções:

(a) $f(x) = \frac{2}{x^2} + \sqrt[3]{x} = 2x^{-2} + x^{\frac{1}{3}} \implies f'(x) = -4x^{-3} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$

(b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = x^{-1} + x^{-3} \implies f'(x) = -x^{-2} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4};$

(c) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4x^4} = 2x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-4} \implies f'(x) = -4x^{-3} + x^{-5} = -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^5};$

(d) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = -x^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{2\sqrt{x}};$

(e) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{4}} \implies f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}};$

(f)$f(x) = 6x^{-10} - 3x^{-\frac{2}{3}} \implies f'(x) = -60x^{-11} + 2x^{-\frac{5}{3}};$

(g) $f(x) = \sqrt{x}(x-1) = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$

(h) $f(x) = -2(\frac{3}{x} - 4) = -6.x^{-1} + 8 \implies f'(x) = 6.x^{-2}.$

(i) $f(x) = \sqrt{2} \implies f'(x) = 0.$

Atividade 3.5.3. Complete a tabela, calculando a derivada em cada caso:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 5x^{-4} - \dfrac{7}{5}$	
$-\dfrac{2}{3}x^{-5} + \sqrt{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 7x + 8$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{5}{x^3} + 2x\sqrt{x} - x + 12$	
$5x^{-5} + 2x^{-2} - 3x^8 + \dfrac{1}{x^4} - 4x - 8$	

Atividade 3.5.4. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 7x^2 + 48x - 5$, determine:

(a) $f'(x) =$
(b) $f'(0) =$
(c) os valores de x para os quais $f'(x) = 0$.

Atividade 3.5.5. Dada a função $f(x) = x^3 - 3x + 2$, determine:

(a) a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa $x_0 = 0$;

(b) a equação da reta normal ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa $x_0 = 0$.

Atividade 3.5.6. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$.

(a) Determine:

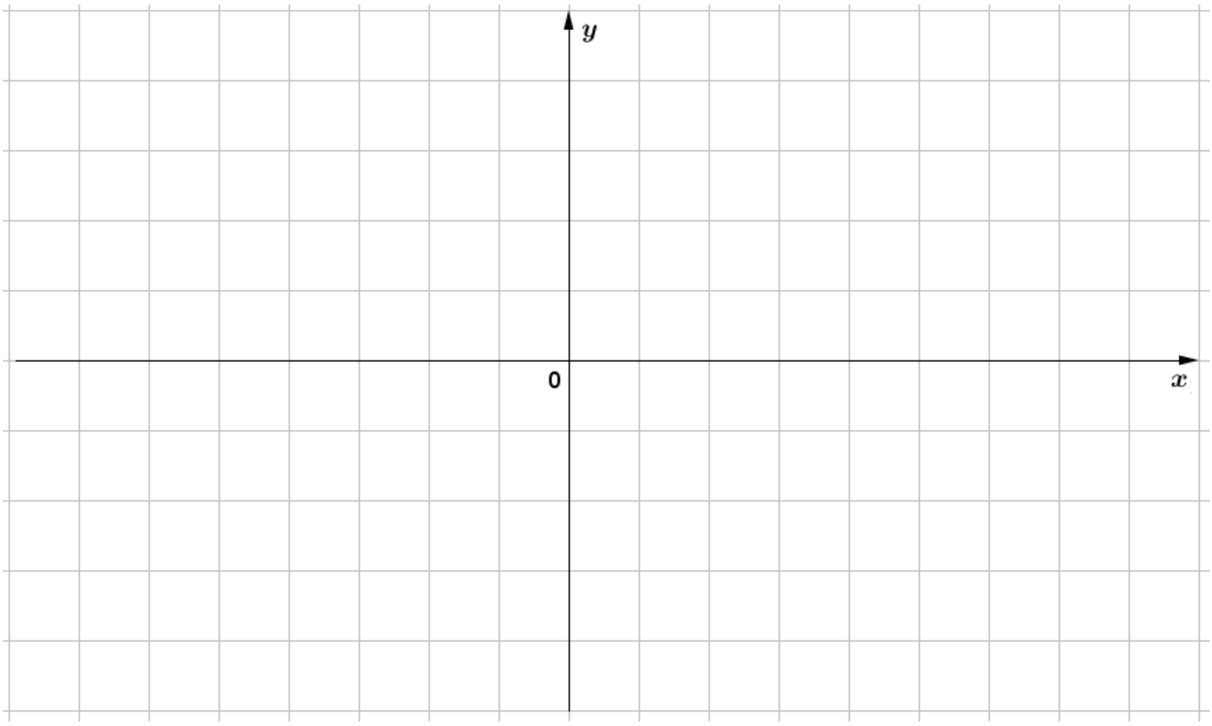
$f'(x) =$

$f'_-(-1) =$

$f'_+(-1) =$

(b) Essa função é derivável em $x = -1$? Justifique.

(c) No sistema de coordenadas cartesianas, a seguir, esboce o gráfico de f.



Atividade 3.5.7. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 2x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$.

(a) Determine:

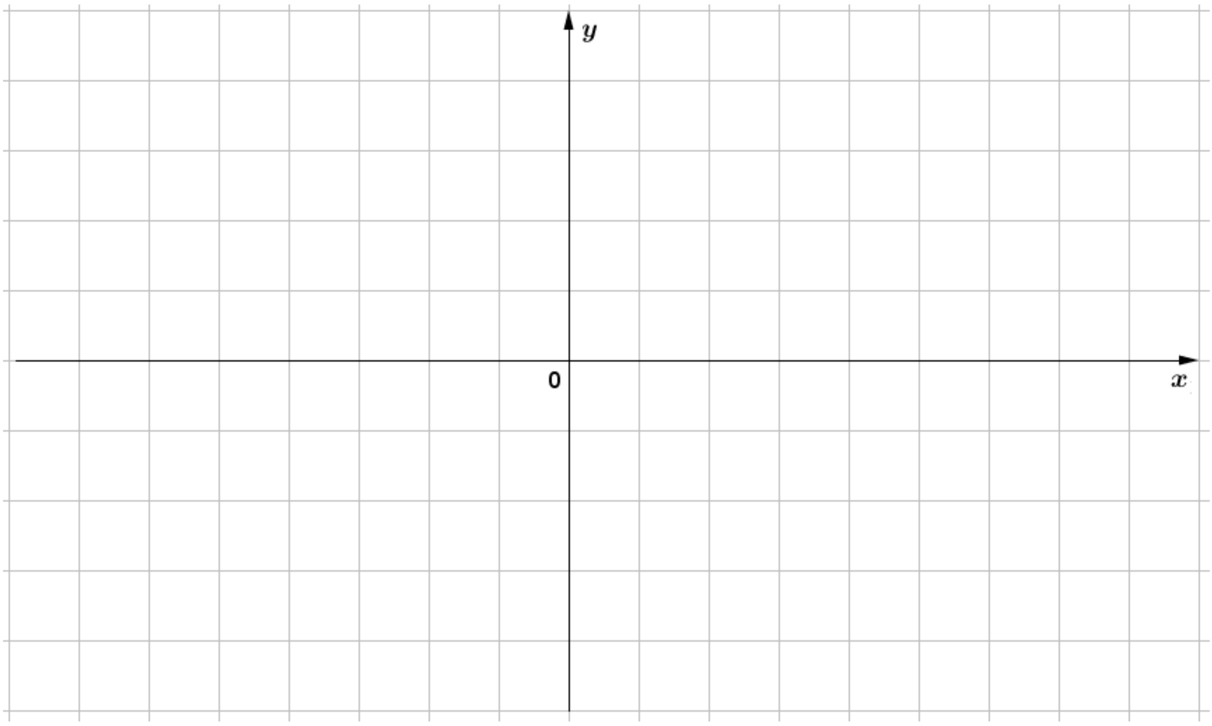
$f'(x) =$

$f'_-(1) =$

$f'_+(1) =$

(b) Essa função é derivável em $x = 1$? Justifique.

(c) No sistema de coordenadas cartesianas, a seguir, esboce o gráfico de f.



Atividade 3.5.8. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

(a) Determine:

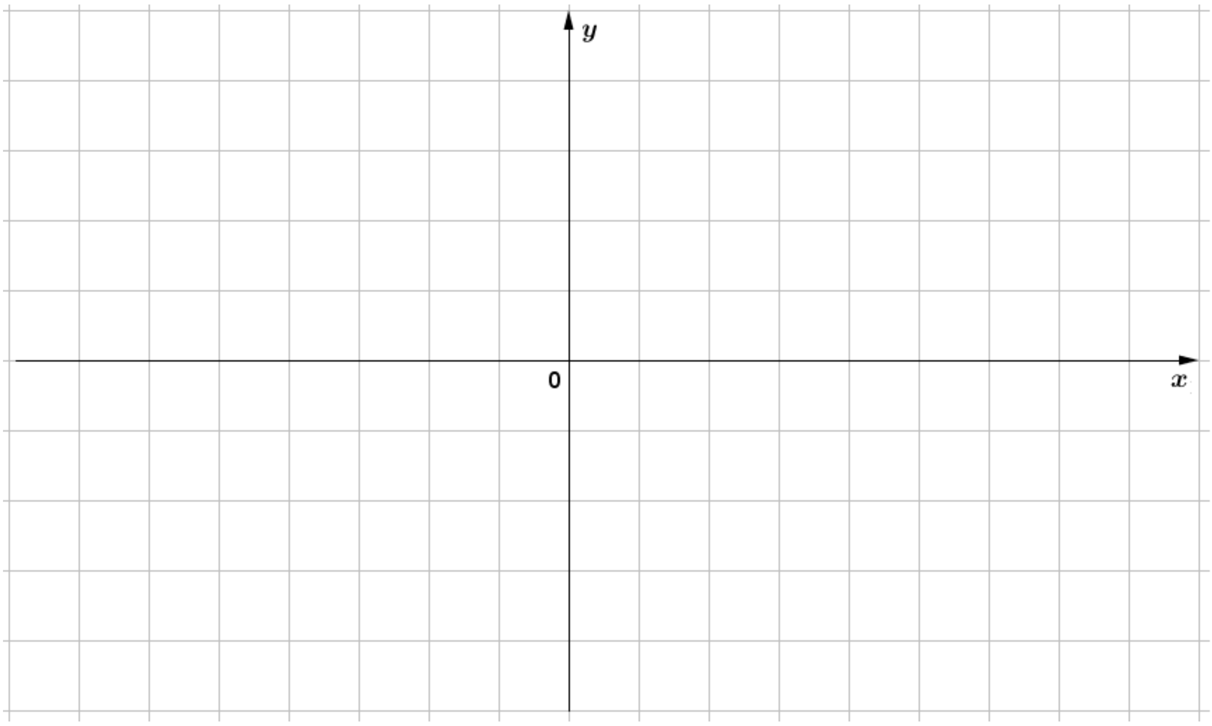
$f'(x) =$

$f'_-(1) =$

$f'_+(1) =$

(b) Essa função é derivável em $x = 1$? Justifique.

(c) No sistema de coordenadas cartesianas, a seguir, esboce o gráfico de f.



Atividade 3.5.9. Considere a função $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ -2x + 12 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$.

(a) Determine:

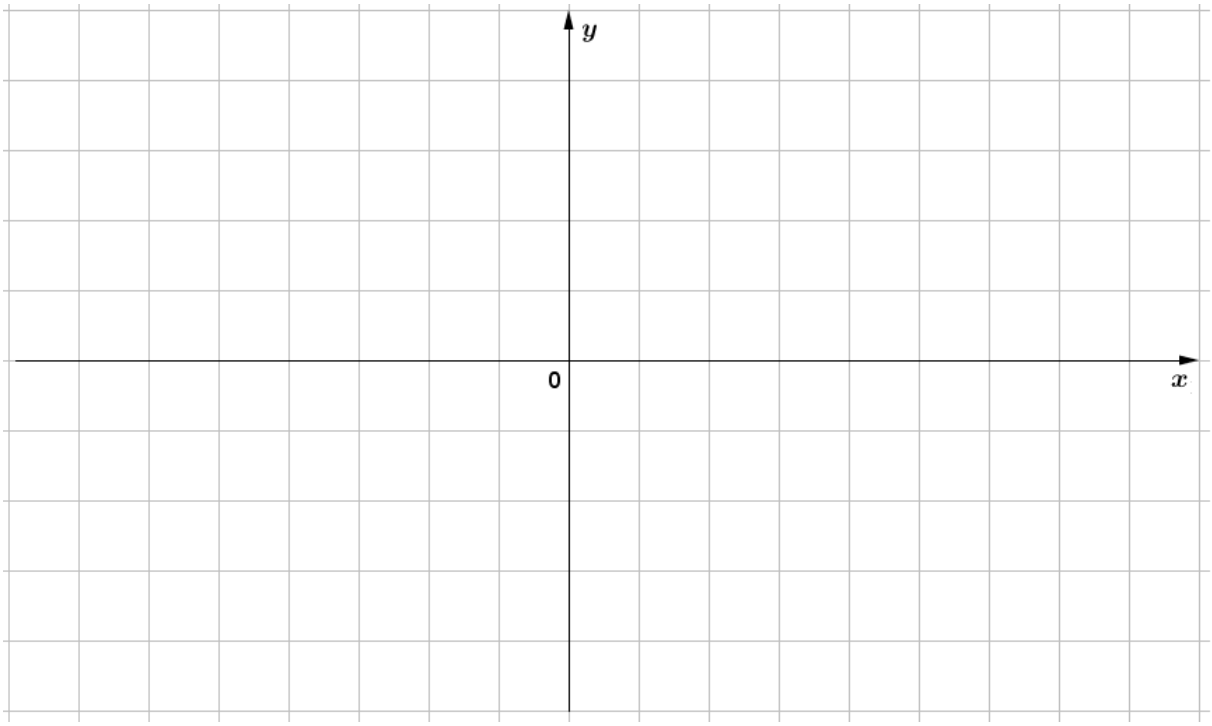
$f'(x) =$

$f'_-(2) =$

$f'_+(2) =$

(b) Essa função é derivável em $x = 2$? Justifique.

(c) No sistema de coordenadas cartesianas, a seguir, esboce o gráfico de f.



Atividade 3.5.10. Considere a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e o ponto $x = 64$. Calcular um valor aproximado para $\sqrt[3]{65,5}$ usando aproximação pela reta tangente.

$f(64) =$

$f'(x) =$

$f'(64) =$

$L(x) =$

$\sqrt[3]{65,5} \cong L(65,5) =$

Atividade 3.5.11. Considere a função $f(x) = \sqrt[4]{x}$ e o ponto $x = 16$. Calcular um valor aproximado para $\sqrt[4]{13}$ usando aproximação pela reta tangente.

$f(16) =$

$f'(x) =$

$f'(16) =$

$L(x) =$

$\sqrt[4]{13} \cong L(13) =$

Atividade 3.5.12. Considere a função $f(x) = x^5$ e o ponto $x = 2$. Calcular um valor aproximado para $(2,001)^5$ usando aproximação pela reta tangente.

$f(2) =$

$f'(x) =$

$f'(2) =$

$L(x) =$

$(2,001)^5 \cong L(2,001) =$

Atividade 3.5.13. Considere a função $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ e o ponto $x = 8$. Calcular um valor aproximado para $(8,06)^{\frac{2}{3}}$ usando aproximação pela reta tangente.

$f(8) =$

$f'(x) =$

$f'(8) =$

$L(x) =$

$(8,06)^{\frac{2}{3}} \cong L(8,06) =$

3.6 A Funçao Derivada e a Derivação Sucessiva

Seja f uma função derivável em todo x do seu domínio. Então existe $f'(x)$ para todo x no domínio de f e podemos considerar uma outra função definida por $y = f'(x)$, chamada *função derivada* da f.

Se f' for, por sua vez, derivável, diremos que sua derivada é a *derivada segunda* de f e a indicaremos por f'' (lemos f *duas linhas*).

Da mesma forma, a *derivada terceira* de f é definida como a derivada de f'', se ela existir e é denotada por $f'''(x)$ (lemos f *três linhas*).

A *derivada enésima* da função f, onde n é um número inteiro positivo maior que 1, é a derivada primeira da derivada $(n-1)$*ésima* de f, que denotamos por $f^{(n)}$.

Exemplo 3.6.1. Vamos achar todas as derivadas da função $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$.

$$\begin{array}{lcl} f'(x) & = & 12x^3 - 6x^2 + 10x - 4 \\ f''(x) & = & 36x^2 - 12x + 10 \\ f'''(x) & = & 72x - 12 \\ f^{(4)} & = & 72 \\ f^{(5)} & = & 0 \\ f^{(n)} & = & 0 \text{ para } n \geq 5. \end{array}$$

Em algumas situações essas derivadas possuem significados especiais, como na Física em que a derivada segunda do deslocamento em relação ao tempo é a *aceleração*.

Exemplo 3.6.2. Na **Atividade 2.7.1**, em que temos um movimento em queda livre, podemos também calcular a aceleração do corpo. Assim, os elementos principais envolvidos são:

Equação do movimento	Velocidade do corpo	Aceleração do corpo
$s(t) = 4,9t^2$	$v(t) = s'(t) = 9,8t\ m/s$	$a(t) = s''(t) = v'(t) = 9,8\ m/s^2$

Atividade 3.6.3. Um corpo se move em linha reta. Sua posição s (em metros) no instante t (em segundos) é dada pela função $s(t) = t^3 - 2t + 4$. Determine:

(a) a equação da velocidade do corpo e, a velocidade em $t = 2$ segundos;

$v(t) = s'(t) =$

$v(2) =$

(b) a equação da aceleração do corpo e, a aceleração em $t = 1$ segundo;

$a(t) = s''(t) = v'(t) =$

$a(1)=$

(c) em que instante a velocidade do corpo é 25 m/s.

Atividade 3.6.4. Complete a tabela abaixo, calculando as três primeiras derivadas das funções dadas:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
$10x - 7$			
$6x^2 + 5x - 4$			
$-x^3 - 10x^2 + 11x + 1$			
$2x^4 - 20x^3 + 6x^2 - 6x + 5$			
$x^{\frac{5}{2}}$			

Capítulo 4

Aplicações de Derivadas

Frequentemente deparamos com problemas de natureza prática em que devemos procurar o *maior*, o *menor*, o *máximo*, o *mínimo*, o *melhor* de alguma coisa. Funções constituem ferramentas importantes na resolução deste tipo de problema e, em particular, a derivada é um recurso facilitador e valioso por evidenciar as características de máximos e de mínimos de funções.

Com este objetivo apresentamos algumas definições, resultados e técnicas que possibilitam a resolução de tais questões.

As funções consideradas neste capítulo serão sempre contínuas em seus domínios.

Iniciamos este estudo com uma figura que ilustra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

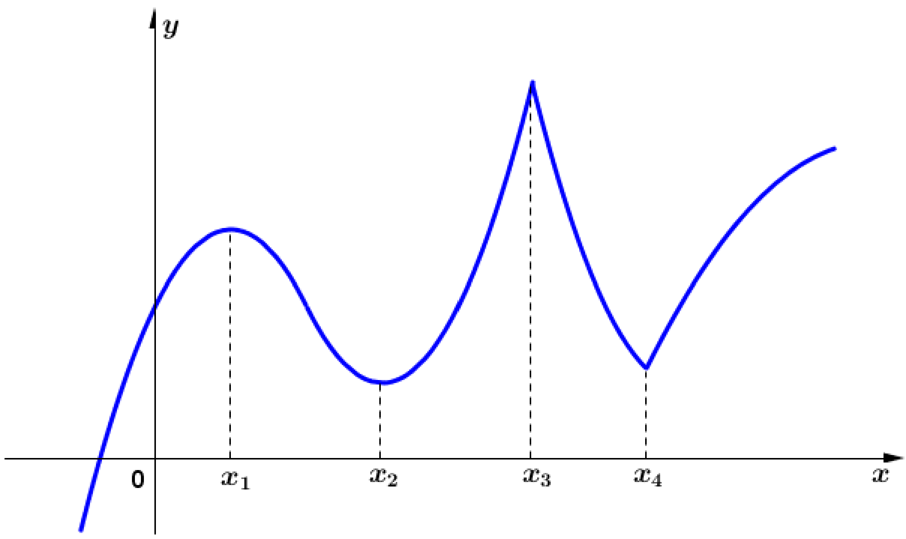


Figura 4.1: Pontos extremos de uma função $y = f(x)$.

Esses pontos são chamados **pontos extremos** da função. Os pontos x_1 e x_3 são **pontos de máximo relativos** (ou locais), enquanto que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são **valores máximos relativos**. Os pontos x_2 e x_4 são chamados **pontos de mínimo relativos** (ou locais), enquanto que $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os **valores mínimos relativos**.

A formalização destas definições é apresentada a seguir.

4.1 Extremos Relativos (ou Locais) e Números Críticos

Definição 4.1.1. Uma função f tem um máximo relativo em x_0, se existir um intervalo aberto I, contendo x_0, tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I \subset D(f)$. A notação $D(f)$ indica o domínio da função f (**Figura 4.2**).

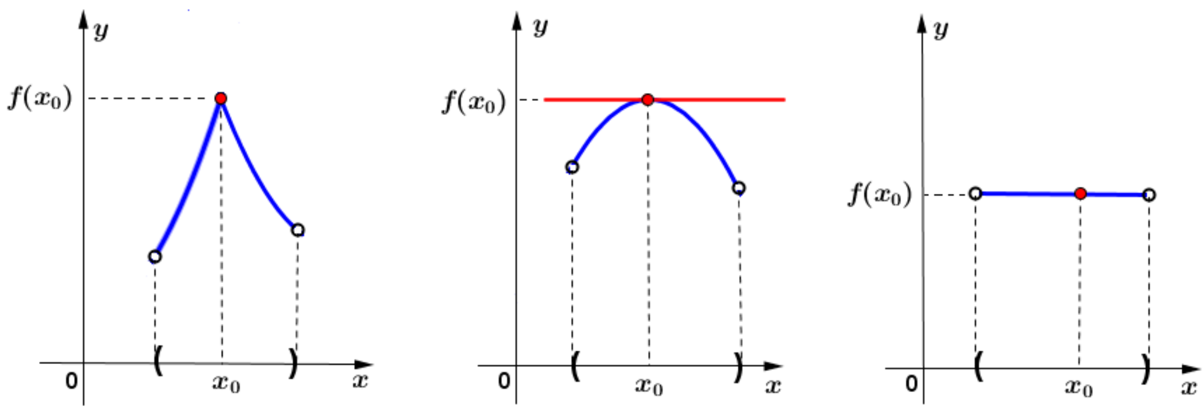


Figura 4.2: $f(x_0)$ é um valor máximo relativo.

Definição 4.1.2. Uma função f tem um mínimo relativo em x_0, se existir um intervalo aberto I, contendo x_0, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I \subset D(f)$ (**Figura 4.3**).

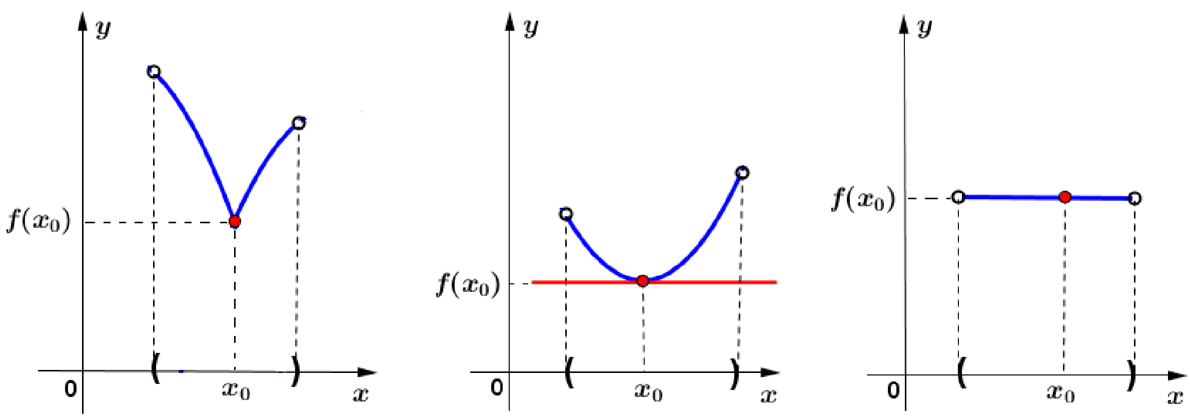


Figura 4.3: $f(x_0)$ é um valor mínimo relativo.

Definição 4.1.3. Uma função f tem um extremo relativo em x_0, se f tem um máximo relativo ou um mínimo relativo em x_0.

A proposição seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada na página 195 do livro [11], mostra que há uma relação entre extremos e reta tangente .

Proposição 4.1.4. Considere uma função f e seja (a, b) um intervalo aberto contido no domínio de f tal que f tem um extremo relativo em x_0, onde $a < x_0 < b$. Se f é derivável em x_0 então $f'(x_0) = 0$.

A interpretação geométrica da proposição é: se f tem um extremo relativo em x_0 e se existe $f'(x_0)$, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = x_0$.

É importante ressaltar que a condição $f'(x_0) = 0$ é necessária mas não é suficiente para que x_0 seja um extremo relativo, como ilustra o **Exemplo 4.1.5**.

Exemplo 4.1.5. Consideremos a função definida por $f(x) = (x-1)^3 + 2$. Então:

$f(x) = (x-1)^3 + 2 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \Longrightarrow f'(1) = 0$.

Um esboço do gráfico dessa função está na **Figura 4.4**.

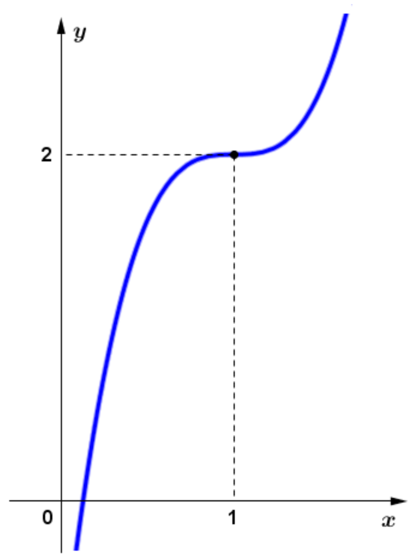


Figura 4.4: $f(1) = 2$ não é um valor extremo relativo da função f, pois em qualquer intervalo aberto que contém 1, a função assume valores maiores e valores menores do que $f(1)$.

Observamos que $f'(1) = 0$, mas $f(x) < 2$ se $x < 1$ e $f(x) > 2$ se $x > 1$. Assim, f não tem um extremo relativo em $x = 1$.

Vejamos agora, que uma função f pode ter um extremo relativo em um número x_0 mesmo que a derivada não exista nesse valor. A ilustração está no **Exemplo 4.1.6**.

Exemplo 4.1.6. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ 8-x & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$. Temos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ -1 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'_-(3) = 2 \neq f'_+(2) = -1 \Longrightarrow \nexists\ f'(3).$$

Um esboço do gráfico dessa função está na **Figura 4.5**, e observamos que, embora $f'(2)$ não exista, a função f tem um máximo relativo em 3.

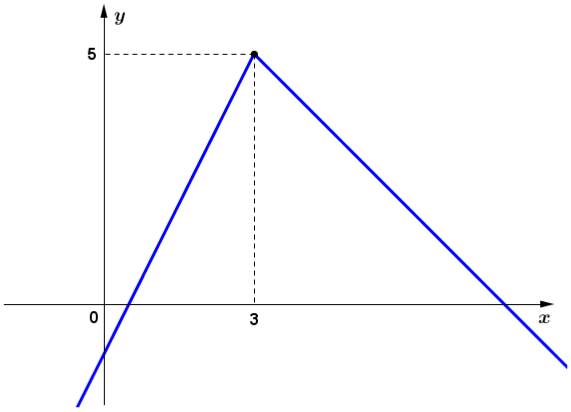


Figura 4.5: $f(3) = 5$ é um valor máximo relativo da função f, embora $f'(3)$ não exista.

A não existência da derivada em um ponto também não garante que f tem um extremo relativo nesse ponto, como ilustra o **Exemplo 4.1.7**.

Exemplo 4.1.7. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{se} \quad x < 2 \\ 4x - 7 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$. Temos:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x < 2 \\ 4 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases} \implies f'_{-}(2) = \frac{1}{2} \neq f'_{+}(2) = 4 \implies \nexists\ f'(2).$$

Um esboço do gráfico dessa função está na **Figura 4.6**.

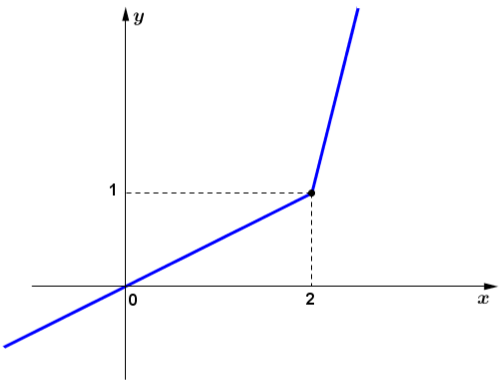


Figura 4.6: $f(2) = 1$ não é um valor extremo relativo da função f, pois em qualquer intervalo aberto que contém 2, a função assume valores maiores e valores menores do que $f(2)$.

Definição 4.1.8. Seja x_0 um número em um intervalo aberto I contido no domínio de uma função f. Dizemos que x_0 é um número crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.

Dessa definição, podemos concluir que os possíveis extremos relativos de uma função estão entre os valores que anulam a derivada ou aqueles nos quais a derivada não existe. Isto estabelece uma forma inicial de selecionar números que poderão ser extremos relativos.

Exemplo 4.1.9. Para determinar os números críticos da função $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4)$, vamos reescrevê-la de maneira conveniente e, a seguir, determinar sua derivada com as regras conhecidas:

- $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4) = x\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^4} + 4x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$;
- $f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1) = \dfrac{4(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}}$;
- para que $f'(x) = 0$ devemos ter $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$;
- não existe $f'(x)$ para $x = 0$;
- os números críticos da função f são $x = -1$ e $x = 0$ (Veja o gráfico da função na **Figura 4.7**.

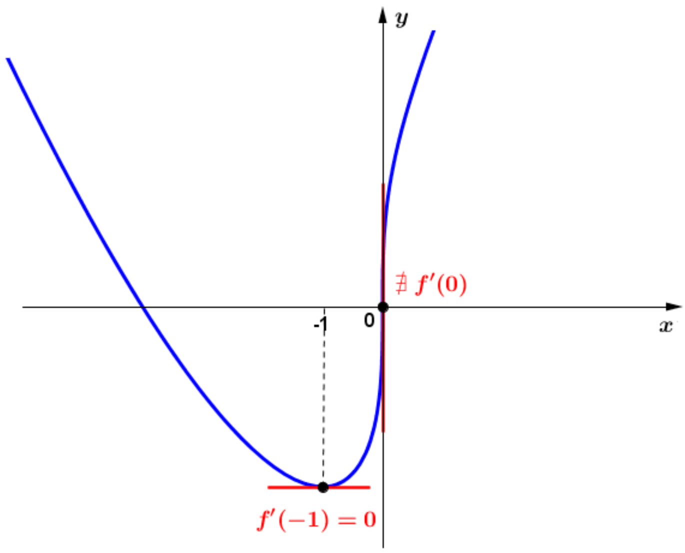


Figura 4.7: Números críticos da função $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4)$.

4.2 Extremos Absolutos

O estudo relacionado a pontos extremos depende sempre de intervalos nos quais a função está definida. Esse intervalo pode ser fechado, aberto ou fechado em uma extremidade e aberto na outra.

O maior valor que a função atinge em um intervalo é chamado *valor máximo absoluto* e o menor valor é chamado *valor mínimo absoluto*.

Definição 4.2.1. A função f tem um máximo absoluto em um ponto x_0 de um intervalo $I \subset D(f)$, se $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$. Neste caso, $f(x_0)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

Definição 4.2.2. A função f tem um mínimo absoluto em um ponto x_0 de um intervalo $I \subset D(f)$, se $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I$. Neste caso, $f(x_0)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

Um **extremo absoluto** de uma função em um intervalo é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto em um dado intervalo.

Exemplo 4.2.3. Considere a função f definida por $f(x) = 2x$. No intervalo $[1, 4)$ esta função f tem um valor mínimo absoluto igual a 2 em $x = 1$ (extremidade do intervalo), e não há valor máximo absoluto. Um esboço do gráfico de f neste intervalo está na **Figura 4.8**.

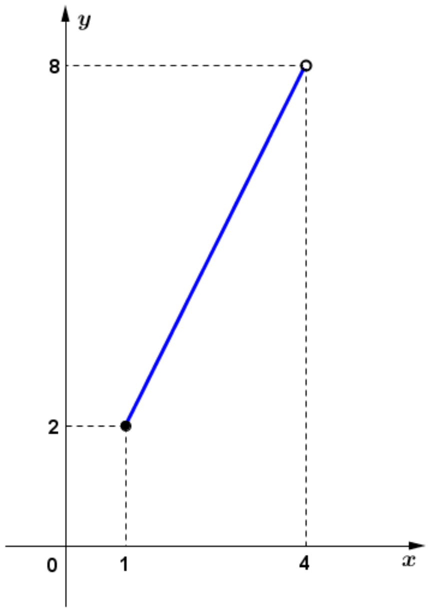


Figura 4.8: Gráfico da função $f(x) = 2x$ no intervalo $[1, 4)$.

Exemplo 4.2.4. Considere a função definida por $f(x) = -x^2$. No intervalo $(-1, 2]$ esta função f tem um valor máximo absoluto igual a 0 em $x = 0$, e um valor mínimo absoluto igual a -4 em $x = 2$ (extremidade do intervalo). Um esboço do gráfico de f neste intervalo está na **Figura 4.9**.

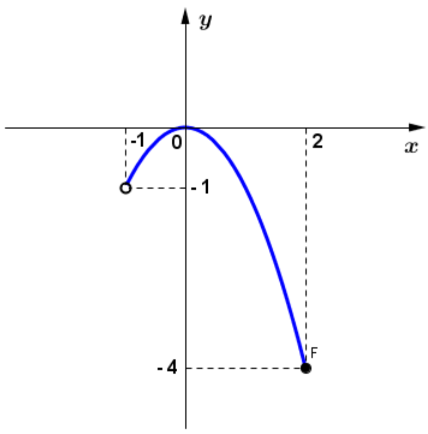


Figura 4.9: Gráfico da função $f(x) = -x^2$ no intervalo $(-1, 2]$.

Exemplo 4.2.5. A função definida por $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ não possui nem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto no intervalo $(-1,1)$.

Um esboço do gráfico de f no intervalo $(-1,1)$ está na **Figura 4.10**. Observe que para valores cada vez mais próximos de -1 pela direita, a função f decresce ilimitadamente, e, para valores cada vez mais próximos de 1 pela esquerda, a função f cresce ilimitadamente.

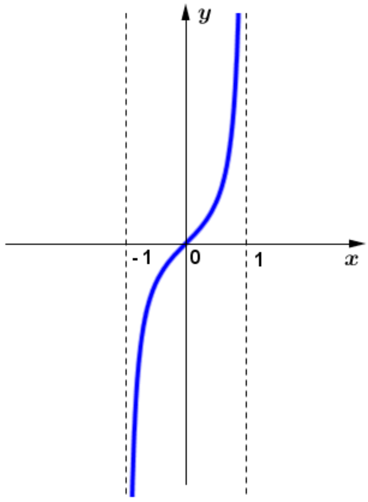


Figura 4.10: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ no intervalo $(-1,1)$.

Exemplo 4.2.6. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Pelo esboço do gráfico de f no intervalo $[-5,4]$ (**Figura 4.11**), o valor máximo absoluto de f é igual a 2 e ocorre em $x = 1$ e o valor mínimo absoluto de f é igual a -4 e ocorre em $x = -5$ (extremidade do intervalo). Note que 1 e 3 são números críticos de f, já que $f'(1)$ não existe e $f'(3) = 0$.

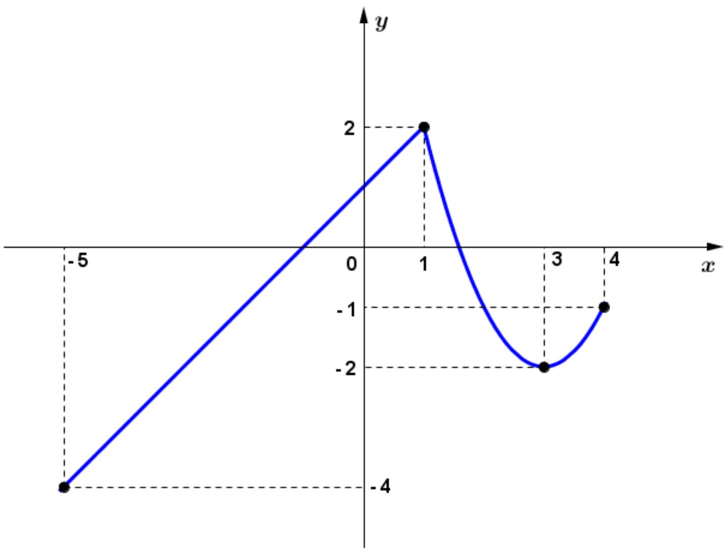


Figura 4.11: Gráfico da função $f(x)$ definida pelas sentenças $x+1$ se $-5 \leq x < 1$ e $x^2 - 6x + 7$ se $1 \leq x \leq 4$.

Exemplo 4.2.7. A função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ não possui nem valor máximo nem valor mínimo absolutos no intervalo $[1,5]$ (**Figura 4.12**). Observe que para valores cada vez mais próximos de 3 pela esquerda, a função f decresce ilimitadamente, e, para valores cada vez mais próximos de 3 pela direita, a função f cresce ilimitadamente.

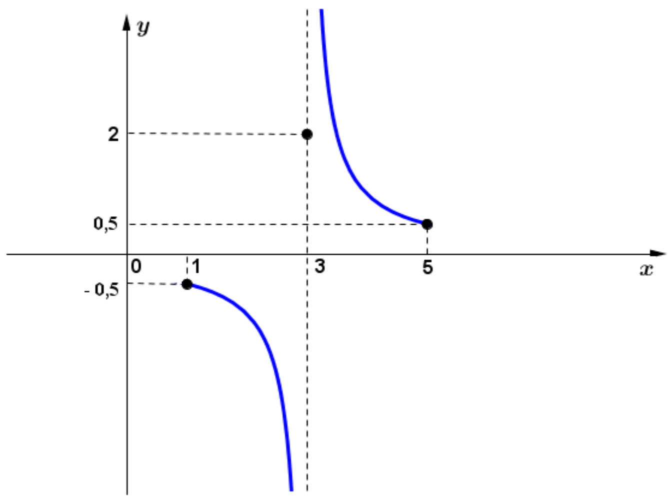


Figura 4.12: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ se $x \neq 3$ e $f(x) = 2$ se $x = 3$, no intervalo $[1,5]$.

Exemplo 4.2.8. Quando a função f é uma quadrática, o gráfico é uma parábola e o extremo absoluto será dado pelo vértice da parábola. Como exemplo, a função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 5$ (**Figura 4.13**) tem valor mínimo absoluto igual a 1 em $x = 2$ e não há valor máximo absoluto de f em todo o seu domínio.

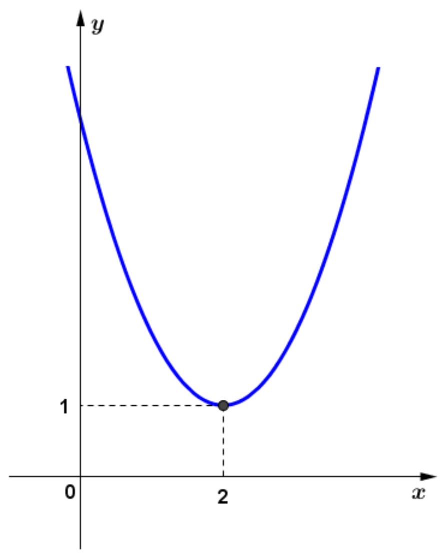


Figura 4.13: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Dentre os exemplos anteriores, o único caso no qual a função tem ambos os valores extremos absolutos é o **Exemplo 4.2.6**, onde a função é contínua no intervalo fechado $[-5, 4]$.

Segundo o teorema a seguir, cuja a demonstração pode ser encontrada no livro [2], uma função que seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ admite um mínimo e um máximo absoluto nesse intervalo.

Teorema 4.2.9. (**Teorema do valor extremo**) Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$. Ou seja, existem números s e t em $[a, b]$ tais $f(t) \leq f(x) \leq f(s)$, para qualquer x em $[a, b]$.

Nas ilustrações da **Figura 4.14**, observamos que uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ pode ter um extremo absoluto no interior do intervalo, e neste caso, um extremo relativo, ou em uma das extremidades do intervalo.

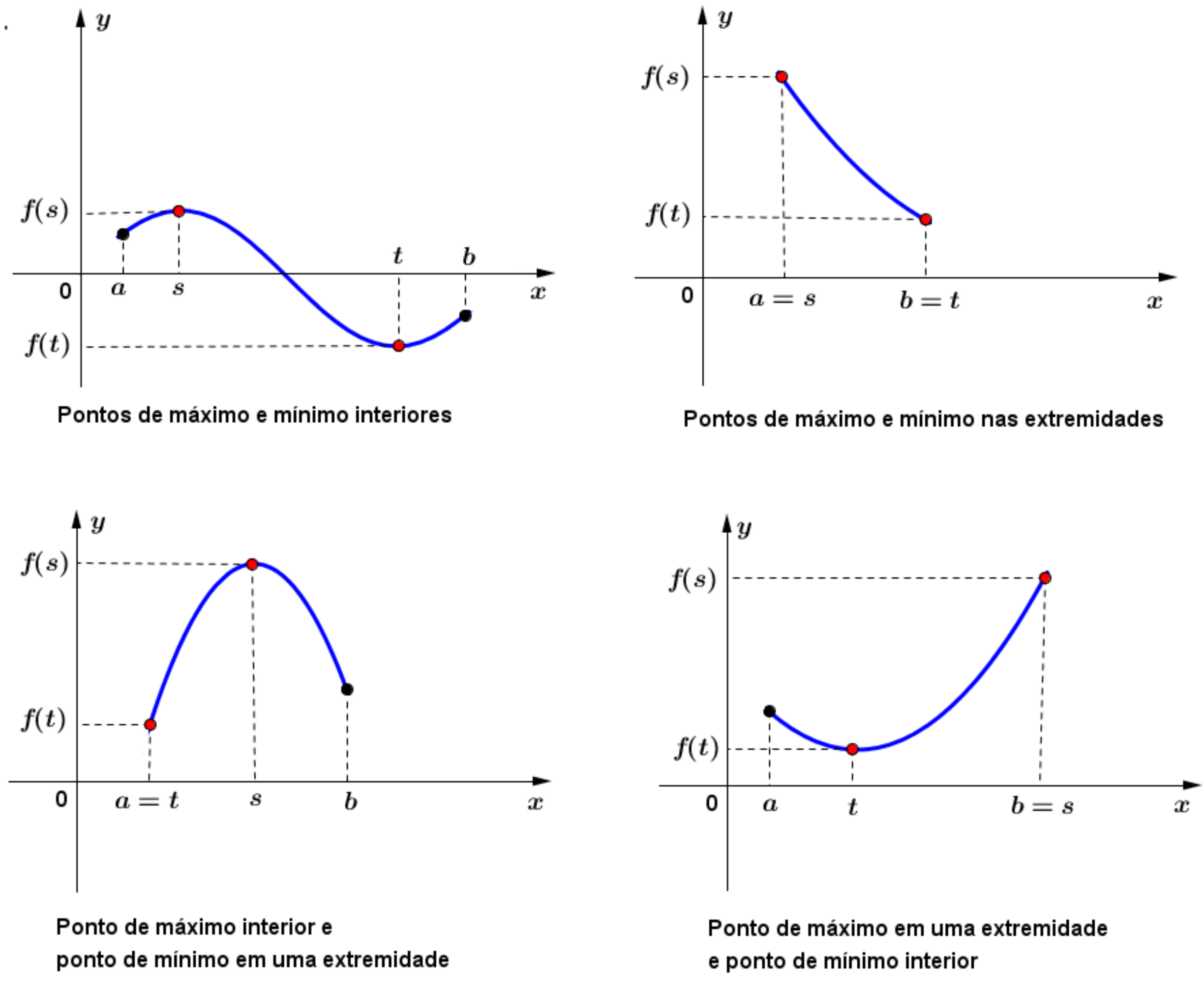


Figura 4.14: Algumas possibilidades para pontos de máximo e mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

Vamos analisar isto de modo mais geral, primeiramente para máximos.

Considere que nos pontos s_1, s_2, ..., s_m do intervalo (a, b), a derivada seja nula, ou seja, $f'(s_j) = 0$ para $j = 1, 2, ..., m$. Geometricamente, cada reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, no ponto $(s_j, f(s_j))$ é horizontal. Assim, os máximos relativos da função f estão todos entre os valores s_1, s_2, ..., s_m. Indicando por $f(s_k)$ o maior entre os valores $f(s_1)$, $f(s_2)$, ..., $f(s_m)$, como o valor máximo pode ocorrer nas extremidades do intervalo ou no seu interior, comparamos $f(a)$, $f(b)$ e $f(s_k)$, para obter esse máximo.

Supondo agora que existam t_1, t_2, ..., t_n em (a, b) nos quais a derivada da função f não existe, os máximos relativos dessa função também podem estar entre esses números. Se $f(t_j)$ denota o maior dos valores $f(t_1)$, $f(t_2)$, ..., $f(t_n)$, o máximo absoluto ocorrerá entre os valores $f(a)$, $f(b)$, $f(s_k)$ e $f(t_j)$.

Formalizando, se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então o máximo absoluto da f em $[a, b]$ é o maior valor entre os valores $f(a)$, $f(b)$, $f(c_1)$, $f(c_2)$, ..., $f(c_m)$, onde c_1, c_2, ..., c_m são os números críticos da função f no intervalo aberto (a, b). Para determinar o mínimo absoluto, o procedimento é análogo.

Exemplo 4.2.10. Vamos determinar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$ (**Figura 4.15**).

Como f é contínua no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado.

- $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$;
- para $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$, temos $x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{3}$;
- $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ existe para qualquer x no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$;
- pontos críticos de f: $x = -1$ e $x = \dfrac{1}{3}$;
- $f(-2) = -1$, $f(-1) = 2$, $f(\frac{1}{3}) = \dfrac{22}{27}$ e $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{7}{8}$
- valor máximo absoluto de f no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$: $f(-1) = 2$;
- valor mínimo absoluto de f no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$: $f(-2) = -1$.

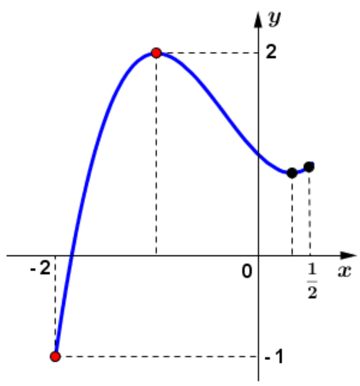


Figura 4.15: Gráfico da função $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$.

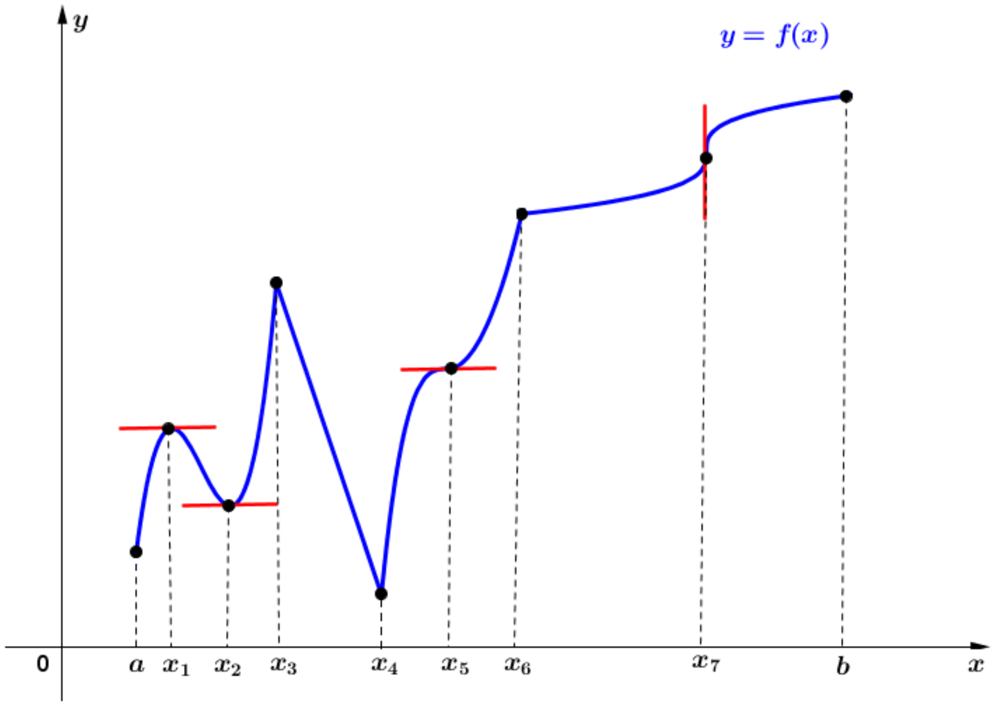


Figura 4.16: Gráfico de uma função f em um intervalo $[a, b]$.

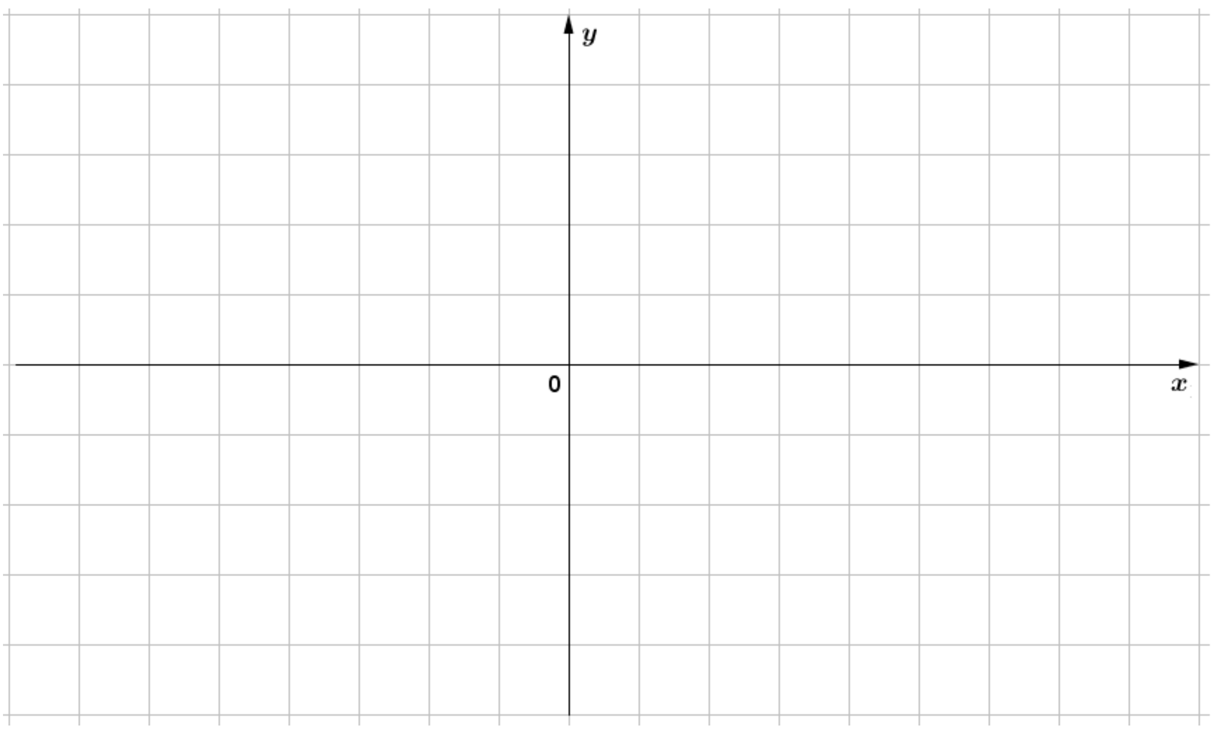
Exemplo 4.2.11. Usando o gráfico da **Figura 4.16** analisamos os números críticos, os valores extremos relativos e os absolutos da função f no intervalo $[a, b]$.

- Números críticos x_1, x_2, x_5 (a derivada é zero).
- Números críticos x_3, x_4, x_6, x_7 (não existe a derivada).
- Valores máximos relativos $f(x_1)$, $f(x_3)$, $f(x_6)$.
- Valores minimos relativos $f(x_2)$, $f(x_4)$.
- Valor máximo absoluto $f(b)$.
- Valor mínimo absoluto $f(x_4)$.

Atividade 4.2.12. Ache os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ no intervalo $[-4, 4]$. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

$f'(x)$=
Pontos críticos de f:

Valores da função nas extremidades do intervalo $[-4, 4]$:
Valores da função nos pontos críticos de f em $[-4, 4]$:
Valor mínimo absoluto de f:
Valor máximo absoluto de f:



4.3 Problemas de Maximização e Minimização

Algumas das aplicações mais importantes da técnica usando derivadas são os *problemas de maximização e minimização* ou *problemas de otimização*, em que aprendemos como relacionar e utilizar as teorias em problemas contextualizados.

Inicialmente é necessário destacar os vínculos entre as grandezas envolvidas no problema que possibilitem compreendê-lo e resolvê-lo. Neste contexto, a ideia é encontrar ou construir uma função que forneça um "modelo matemático" para o problema. Expressa assim a variável a ser analisada, a resolução poderá ser feita usando o recurso da derivada. Neste caso, passamos a tratar de máximos ou mínimos de funções e sua identificação. A solução procurada será obtida ao interpretar os resultados.

Os intervalos a serem considerados para analisar as funções estão associados às informações vinculadas aos problemas propostos.

Exemplo 4.3.1. De uma lâmina de zinco retangular de 30 *cm* de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centimetros devem ser dobrados de cada lado, de modo que a calha tenha capacidade máxima?

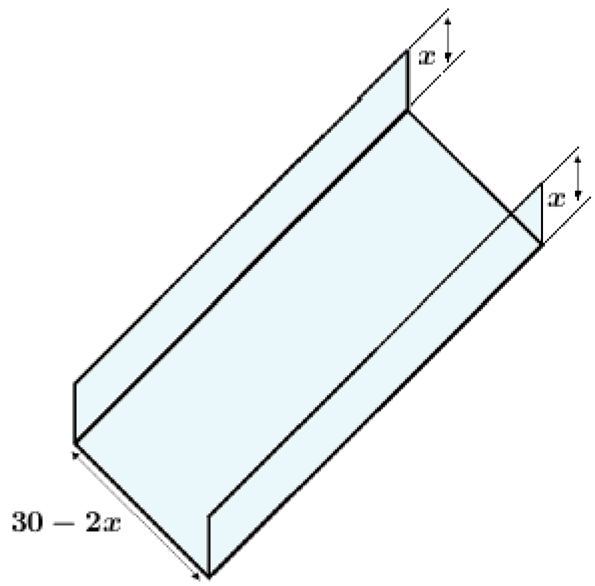


Figura 4.17: Calha.

A **Figura 4.17** ilustra o desenho da calha, x denota o número de centímetros a ser dobrado de cada lado. A largura da base da calha é $(30-2x)$ *cm*. A capacidade da calha será máxima quando a área do retângulo de lados $30-2x$ e x for máxima. Denotando a área por $A(x)$, temos:

$$A(x) = x(30-2x) = 30x - 2x^2$$

.

Como $0 \leq 2x \leq 30$, o domínio de A será o intervalo fechado $[0, 15]$. Sendo A uma função contínua em $[0, 15]$, segue do teorema do valor extremo, que A tem um valor máximo absoluto nesse intervalo. Sabemos também que esse valor máximo absoluto deve ocorrer em um número crítico de A ou em um extremo do intervalo.

Para encontrar os números críticos de A determinamos $A'(x)$ e, então, encontramos os valores de x para os quais $A'(x) = 0$ ou $A'(x)$ não existe.

$$A'(x) = 30 - 4x$$

.

$A'(x)$ existe para todos os valores de x, pois $A(x)$ é um polinômio.

Se $A'(x) = 0 \Longrightarrow 30 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 7,5$.

Assim, o único número crítico de A é $x = 7,5$, que pertence ao intervalo fechado $[0, 15]$. Como $A(0) = 0$ e $A(15) = 0$, enquanto que $A(7,5) = 82,5$, o valor máximo absoluto de A no intervalo $[0, 15]$ é 82,5, ocorrendo quando $x = 7,5$.

Logo, devem ser dobrados 7,5 *cm* de cada lado para obtermos a capacidade máxima.

Exemplo 4.3.2. Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços de papelão de 40 *cm* de largura por 52 *cm* de comprimento, cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determine o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com o maior volume possível.

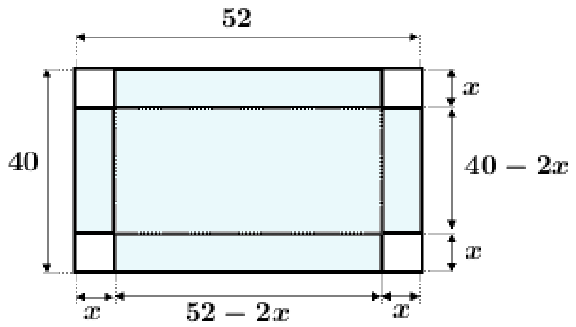


Figura 4.18: Pedaço de papelão.

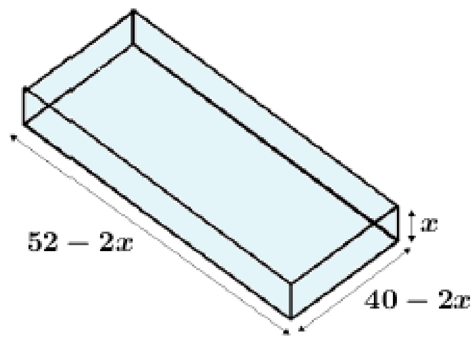


Figura 4.19: Caixa.

A **Figura 4.18** ilustra um pedaço do papelão e a **Figura 4.19** a caixa. Se x *cm* for o comprimento do lado do quadrado a ser cortado, as medidas em centímetros das dimensões da caixa são x, $(40 - 2x)$ e $(52 - 2x)$. O volume da caixa é o produto das três dimensões. Logo, se $V(x)$ cm^3 for o volume da caixa, então:

$$V(x) = x(40 - 2x)(52 - 2x) = 4x^3 - 184x^2 + 2080x$$

.

Das condições do problema, temos que x não pode ser negativo, nem maior do que 20. Assim, o domínio de V será o intervalo fechado $[0, 20]$. Como V é contínua em $[0, 20]$, segue do teorema do valor extremo que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo.

Como $V'(x) = 12x^2 - 368x + 2080$ existe para todo x, os pontos críticos de V são encontrados no equacionamento $V'(x) = 0$, ou seja:

$$12x^2 - 368x + 2080 = 0 \Longrightarrow x \cong 375,85 \text{ ou } x \cong 7,47.$$

O único ponto crítico de V que está no intervalo $[0, 20]$ é $x \cong 7,47$. Como $V(0) = 0$, $V(7,47) \cong 6937,56$ e $V(20) = 0$, o valor máximo absoluto de V em $[0, 20]$ é aproximadamente 6 937,56, ocorrendo quando $x \cong 7,47$.

Logo, o maior volume possível é de aproximadamente 6 937,56 cm^3, obtido quando o comprimento do lado do quadrado a ser cortado é de aproximadamente 7,47 *cm*.

Exemplo 4.3.3. Determinar o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio.

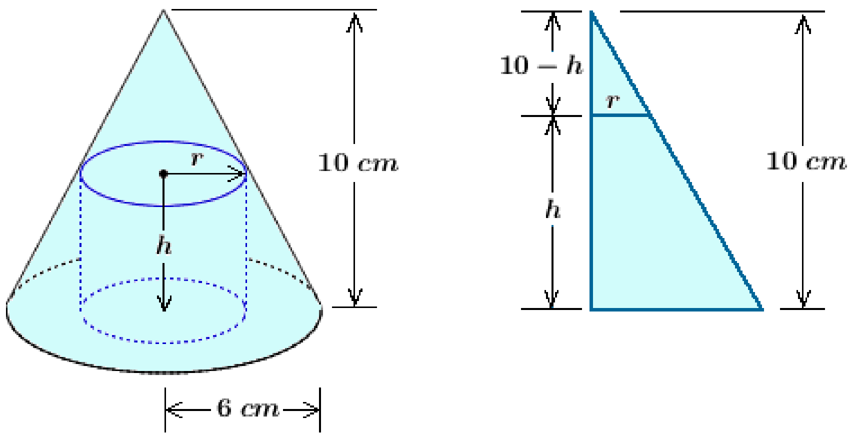


Figura 4.20: Cilindo inscrito em um cone.

Na **Figura 4.20**, r e h representam, respectivamente, o raio da base e a altura do cilindro inscrito no cone.

Aplicando semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{10-h}{r} = \frac{10}{6} \Longrightarrow h = 10 - \frac{5}{3}r$$

Se $V(r)$ for o volume do cilindro, então:

$$V(r) = \pi r^2 h \Longrightarrow V(r) = \pi r^2 \left(10 - \frac{5}{3}r\right) \Longrightarrow V(r) = 10\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3,$$

e o domínio de V será o intervalo fechado $[0, 6]$.

Sendo V contínua em $[0, 6]$, segue do teorema do valor extremo, que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo, podendo ocorrer em um ponto crítico, ou em uma das extremidades desse intervalo.

Como $V'(r) = 20\pi r - 5\pi r^2$ existe para todos os valores de r no intervalo $[0, 6]$, encontramos os números críticos de V em $V'(r) = 0$, ou seja:

$$20\pi r - 5\pi r^2 = 0 \Longrightarrow r = 0 \text{ ou } r = 4.$$

Valores de V nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo:

$$V(0) = 0,\ V(4) = 160\frac{\pi}{3} \text{ e } V(6) = 0.$$

Logo, o valor máximo da função V é $160\frac{\pi}{3}$ no ponto $r = 4$ e $h = 10 - \frac{5}{3}.4 = \frac{10}{3}$.

O cilindro inscrito com maior volume tem raio 4 cm e altura $\frac{10}{3}$ cm.

Exemplo 4.3.4. Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média nesse cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$ (km/h), onde t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?

Como $v(t)$ é contínua para qualquer valor de t, o objetivo é determinar o valor máximo e o valor mínimo absoluto da função $v(t)$ no intervalo $[1, 6]$. Temos:

- Pontos críticos de $v(t)$:

  $v'(t) = 0 \Longrightarrow 3t^2 - 21t + 30 = 0 \Longrightarrow t = 2$ ou $t = 5$, ambos pertencem ao intervalo $[1, 6]$.

- Valores de $v(t)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo:

$$v(1) = 40,5,\ v(2) = 46,\ v(5) = 32,5 \text{ e } v(6) = 38.$$

- Comparando os resultados, concluímos que $t = 2$ é o ponto de máximo absoluto e $t = 5$ é o ponto de mínimo absoluto de $v(t)$ no intervalo $[1, 6]$.

Logo, o trânsito é mais rápido às $14h$, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 46 km/h, e, o trânsito é mais lento às $17h$, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 32,5 km/h.

Exemplo 4.3.5. Quando uma pessoa tosse, o raio da traquéia diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Se r_0 é o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade v do ar e o raio r da traquéia é dada por uma função da forma $v(r) = ar^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva. Determine o raio para o qual a velocidade do ar é máxima.

O raio da traquéia contraída não pode ser negativo, nem maior que o raio normal, r_0. Como $v(r)$ é contínua para qualquer valor de r, o objetivo é encontrar o valor máximo absoluto de $v(r)$ no intervalo $[0, r_0]$. Temos:

- Pontos críticos de $v(r)$:

  $v'(r) = 0 \Longrightarrow ar_0r^2 - ar^3 = 0 \Longrightarrow r = 0$ ou $r = \frac{2}{3}r_0$, ambos pertencem ao intervalo $[0, r_0]$.

- Valores de $v(r)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo:

$$v(0) = 0,\ v\left(\frac{2}{3}r_0\right) = \frac{4a}{27}r_0^3 \text{ e } v(r_0) = 0.$$

- Comparando os resultados, concluímos que $r = \frac{2}{3}r_0$ é o ponto de máximo absoluto de $v(r)$ no intervalo $[0, r_0]$.

Logo, a velocidade do ar é máxima quando o raio da traquéia contraída é igual a $\frac{2}{3}$ do seu raio normal.

Exemplo 4.3.6. Uma mercadoria produzida por determinada empresa é vendida por R\$ $100,00$ a unidade. O custo total para a produção de x unidades é de $C(x) = 100.000 + 40x + 0,0025x^2$, e, a produção máxima mensal é de 20.000 unidades. Quantas unidades devem ser fabricadas e vendidas, no período de um mês, para obter lucro máximo?

A receita total é dada pelo produto da quantidade x de mercadorias vendidas pelo preço unitário de cada unidade, ou seja:

$$R(x) = 100x$$

.

O lucro obtido sobre x unidades será:

$$L(x) = R(x) - C(x) = (100x) - (100.000 + 40x + 0,0025x^2) = -100 + 60x + 0,0025x^2$$

.

Sendo a produção máxima mensal é de 20.000 unidades, o domínio da função $L(x)$ é o intervalo fechado $[0, 20.000]$. Como $L(x)$ é contínua para qualquer valor de x, o objetivo é encontrar o valor máximo absoluto de $L(x)$ em $[0, 20.000]$. Temos:

- Pontos críticos de $L(x)$:

  $$L'(x) = 0 \Longrightarrow 60 - 0,005x = 0 \Longrightarrow x = 12.000,$$

  é o único ponto crítico pertencente ao intervalo $[0, 20.000]$.

- Valores de $L(x)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo:

  $$L(0) = -100.000,\ L(12.000) = 260.000 \text{ e } L(20.000) = 100.000.$$

- Comparando os resultados, concluímos que $x = 12.000$ é o ponto de máximo absoluto de $L(x)$ no intervalo $[0, 20.000]$.

Logo, devem ser produzidas 12.000 unidades da mercadoria, para a empresa obter um lucro máximo mensal, que é de R\$ $260.000,00$.

Exemplo 4.3.7. O custo e a receita total com a produção e comercialização mensal de um produto são dados, respectivamente, por $C(q) = 600 + 2,2q$ e $R(q) = 10q - 0,006q^2$, sendo $200 \leq q \leq 1200$. Encontrar a quantidade q de unidades produzidas que minimiza o lucro.

O lucro obtido sobre q unidades será:

$$L(q) = R(q) - C(q) = 10q - 0,006q^2 - 600 - 2,2q = -0,006q^2 + 7,8q - 600$$

. Pelo enunciado, o domínio da função $L(q)$ é o intervalo fechado $[200, 1200]$ (Veja **Figura 4.21**).

Como $L(q)$ é contínua para qualquer valor de q, o objetivo é encontrar o valor mínimo absoluto de $L(q)$ em $[200, 1200]$. Temos:

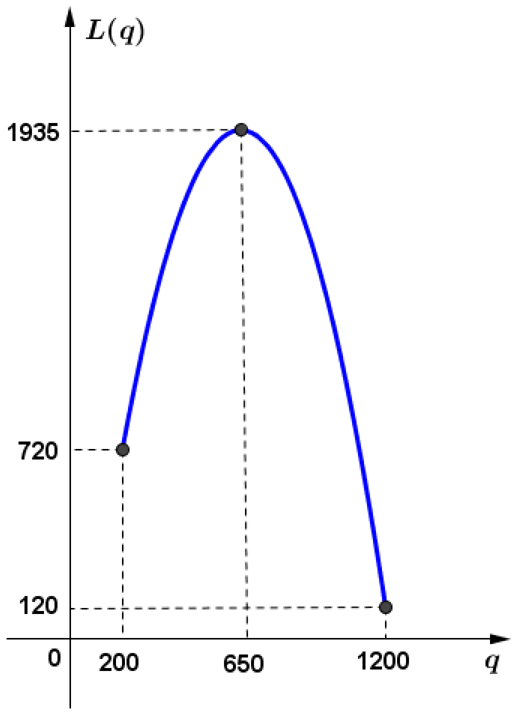


Figura 4.21: Gráfico da função $L(q) = -0,006q^2 + 7,8q - 600$ no intervalo $[200, 1200]$.

- Pontos críticos de $L(q)$:

$$L'(q) = 0 \Longrightarrow -0,012q + 7,8 = 0 \Longrightarrow q = 650,$$

  é o único ponto crítico pertencente ao intervalo $[200, 1200]$.

- Valores de $L(q)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo:

$$L(200) = 720,\ L(650) = 1935 \text{ e } L(1200) = 120.$$

- Comparando os resultados, concluímos que $q = 1200$ é o ponto de mínimo absoluto de $L(q)$ no intervalo $[200, 1200]$.

Portanto, o lucro mínimo ocorre quando a quantidade produzida é de 1200 unidades.

Atividade 4.3.8. Dado um cone de geratriz igual a 5 cm, determinar o raio da base e a sua altura de modo que se tenha o maior volume possível.

Na **Figura 4.22**, temos o esboço de um cone genérico de altura h, raio da base r e geratriz 5 cm. Utilize o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado, coloque r^2 em função de h^2, e, lembre-se que o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3}.Ab.h$$

.

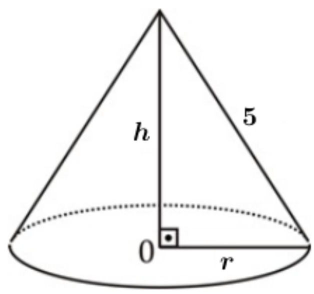


Figura 4.22: Cone.

$V(h) =$
Domínio de $V(h)$:
$V'(h) =$
Pontos críticos de $V(h)$:

Valores de $V(h)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo que define o seu domínio:

O cone que possui geratriz igual a 5 cm e que possui o maior volume é o de medidas:

Raio da base: $r =$

Altura: $h =$

Atividade 4.3.9. Para construir um galinheiro de forma retangular, um fazendeiro utiliza uma tela de 16 metros de comprimento. Sabendo que o fazendeiro vai usar um muro como fundo do galinheiro, determine as dimensões do mesmo para que sua área seja máxima.

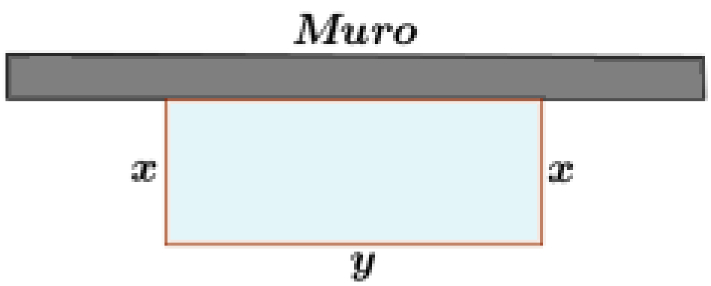


Figura 4.23: Galinheiro.

Chame de x e y as dimensões do galinheiro, conforme a **Figura 4.23** e observe que $2x + y = 16$.

Represente a área do galinheiro por $A(x)$, e, lembre-se que a área de um retângulo é igual ao produto de suas dimensões.

$A(x) =$
Domínio de $A(x)$:
$A'(x) =$
Pontos críticos de $A(x)$:
Valores de $A(x)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo que define o seu domínio:
O galinheiro de área máxima é o de dimensões: Comprimento: $y =$ Largura: $x =$
A área máxima do galinheiro é:

Atividade 4.3.10. Em um canteiro semicircular de 4 metros de raio são reservados, conforme **Figura 4.24**, dois outros canteiros, também semicirculares, destinados ao cultivo de flores, e a parte restante será destinada ao plantio de grama. Sabendo que os preços do metro quadrado da grama, das flores destinadas ao canteiro 1 e das flores destinadas ao canteiro 2 são, respectivamente, $R\$\ 5,00$, $R\$\ 20,00$ e $R\$\ 50,00$, determine as medidas dos raios dos canteiros das flores para que o custo do empreendimento seja mínimo.

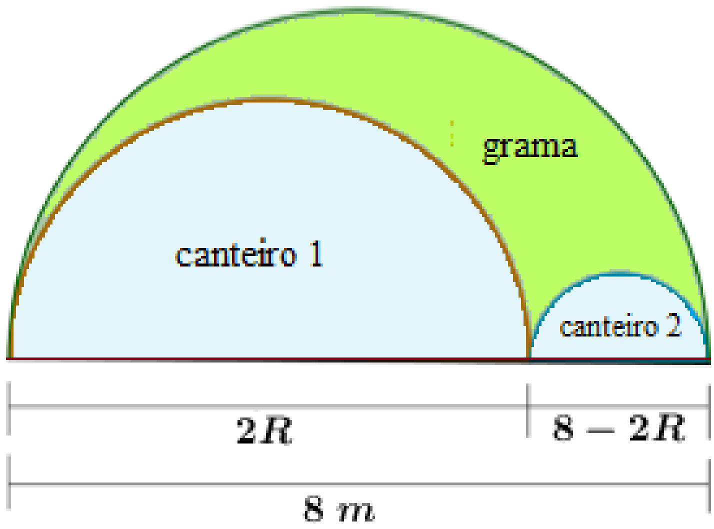


Figura 4.24: Canteiro.

Chame as áreas do canteiro 1, do canteiro 2 e a área da grama, respectivamente, por $A_1(R)$, $A_2(R)$ e $A_3(R)$.

Represente por $C(R)$ o custo do emprendimento, que é definido por $C(R) = 20.A_1(R) + 50.A_2(R) + 5.A_3(R)$.

$C(R) =$

Domínio de $C(R)$:

$C'(R) =$

Pontos críticos de $C(R)$:

Valores de $C(R)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo que define o seu domínio:

Os raios dos canteiros das flores para que o custo seja mínimo são:

Raio do canteiro 1: $R =$

Raio do canteiro 2: $\dfrac{8 - 2R}{2} =$

O custo mínimo do empreendimento é:

Atividade 4.3.11. Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

Sugestão: Chame de $P(n)$ o produto entre os números e represente-os por n e $(70-n)$.

$P(n) =$
Domínio de $P(n)$:
$P'(n) =$
Pontos críticos de $P(n)$:
Valores de $P(n)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo que define o seu domínio:
Os números reais positivos cuja soma é 70 e tal que o produto é o maior possível são: O maior produto é:

Atividade 4.3.12. Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões (raio da base e altura) que minimizarão o custo do metal utilizado para produzir a lata.

- Queremos encontrar as dimensões da lata que armazena 1 litro (V =1 litro = 1000 cm^3) que tenha a menor superfície (ou área S).
- A **Figura 4.25** mostra a planificação da lata.

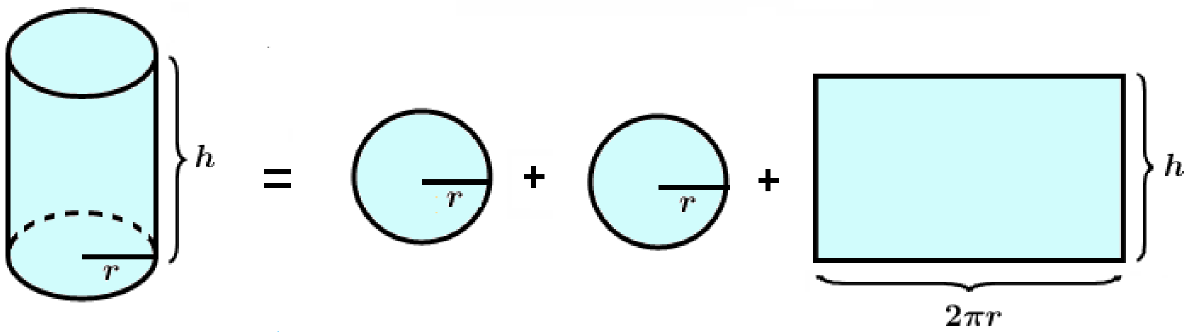


Figura 4.25: Lata cilíndrica.

- A área total da lata cilíndrica é: $S = A_{base} + A_{tampa} + A_{lateral}$.
- O volume é igual a 1000 cm^3, ou seja, $\pi r^2 h = 1000$.
- Encontre $S(r)$ e o seu ponto mínimo.

$S(r) =$
Domínio de $S(r)$:
$S'(r) =$

Pontos críticos de $S(r)$:
Valores de $S(r)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo que define o seu domínio:
A menor área é a produzida pelo cilindro de dimensões: Raio da base: $r =$ Altura: $h =$

Atividade 4.3.13. Um estudante, ao construir uma pipa, deparou-se com o seguinte problema: possuía uma vareta de miriti com 80 cm de comprimento que deveria ser dividida em três varetas menores, duas necessariamente com o mesmo comprimento x, que será a largura da pipa, e outra de comprimento y, que determinará a altura da pipa. A pipa deverá ter formato pentagonal, como na **Figura 4.26**, de modo que a altura da região retangular seja $\frac{1}{4}y$, enquanto a da triangular seja $\frac{3}{4}y$. Para garantir maior captação de vento, ele necessita que a área da superfície da pipa seja a maior possível. Determine a maior área da pipa que pode ser construída nessas condições.

- Área da pipa = (Área do retângulo) + (Área do triângulo) =

  = (base x altura) +($\frac{1}{2}$ x base x altura) =

  $= \frac{1}{4}xy + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)xy = \frac{5}{8}xy.$

- O comprimento da vareta a ser dividida é 80 cm, ou seja,

  $x + x + y = 80$

  $y = 80 - 2x.$

- Coloque a área da pipa em função de x e encontre o seu valor máximo.

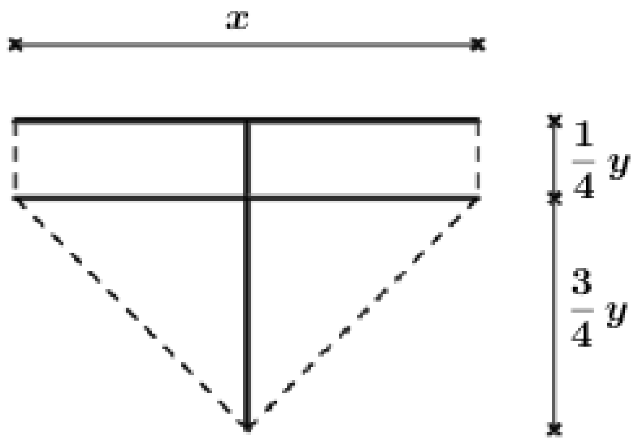


Figura 4.26: Pipa.

$A(x) =$

Domínio de $A(x)$:

$A'(x) =$

Pontos críticos de $A(x)$:

Valores de $A(x)$ nos pontos críticos e nas extremidades do intervalo que define o seu domínio:
A maior área da pipa é:

Conclusão

Um dos principais objetivos do programa de mestrado PROFMAT é proporcionar aos professores uma possibilidade de aperfeiçoamento e, através da dissertação, apresentar propostas que contribuam para o aprimoramento do ensino de matemática, visando uma formação mais abrangente, com foco no currículo do Ensino Médio.

Nesta dissertação apresentamos uma proposta para ensinar derivada, através de uma abordagem a partir de ideias simples como a de variação de uma função e direcionar gradativamente para conceitos mais elaborados como taxa de variação média e taxa de variação pontual, fazendo uso de tabelas e interpretações geométricas.

Através de uma sequência de exemplos e atividades, procuramos um enfoque que tornasse possível o desenvolvimento de uma maneira intuitiva, criando condições prévias adequadas para que a noção de derivada pudesse ser assimilada de forma consistente. Aqui os recursos algébricos e a interpretação em termos de reta tangente foram determinantes.

Finalizando, com as aplicações através de problemas de maximização e minimização, pretendemos mostrar que as ferramentas envolvendo função e derivada podem tornar o ensino da Matemática mais amplo.

Esperamos que este trabalho possa contribuir, de alguma forma, para o processo de ensino e aprendizagem de temas como derivadas no Ensino Médio, vindo a facilitar o entendimento da definição formal de limite e derivada de uma função num futuro curso de Cálculo.

Referências Bibliográficas

[1] Prof. E. Alexandre. *7 dicas de applets para o GeoGebra que todo professor de Matemática deveria usar.* www.prof-edigleyalexandre.com/2014/10/7-dicas-applets-geogebra-professor-matematica-deveria-usar.html, Acesso em 27.08.2015.

[2] P. Boulos. *Introdução ao Cálculo, Volume 1.* Editora Edgard Blucher Ltda., 3ª Edição, 1983.

[3] Ministério da Educação. *Parâmetrod Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).* http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211, Acesso em 22.06.2015.

[4] A. F. da Silva Munhoz *et al. Elementos de Matemática 3.* Editora Saraiva, 1ª Edição, 1983.

[5] L. R. Dante. *Matemática - Volume Único.* Editora Ática, 1ª Edição, 2008.

[6] INTEF Gobierno de Espana. *Descartes - Matemáticas Interactivas.* http://recursostic.educacion.es/descartes/web/, Acesso em 23.06.2015.

[7] R. L. Q. de Lima *et al. Cálculo Diferencial e Integral I.* www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/index.html, Acesso em 13.04.2015.

[8] SBM Sociedade Brasileira de Matemática. *Contribuição da SBM para a discussão sobre currículo de Matemática.* www.sbm.org.br/pt/noticias-destaque/372-proposta-curricular-da-sbm-para-o-ensino-médio, Acesso em 28.07.2015.

[9] UNESP Instituto de Química Araraquara SP. *Cálculo Diferencial e Integral 1 - Applets Geogebra.* www.calculo.iq.unesp.br/calculo1_applets-Geogebra.html, Acesso em 09.09.2015.

[10] R. C. Duclos. *Cálculo no Segundo Grau.* Revista do Professor de Matemática Número 20, páginas 26 a 30, 1992.

[11] D. M. Flemming e M. B. Gonçalves. *Cálculo A.* Pearson Education do Brasil, 6ª Edição, 2006.

[12] H. Eves. *Introdução à História da Matemática.* Editora Unicamp, 3ª Edição, 2008.

[13] IME-USP-SP. *Cálculo Diferencial e Integral.* http://ecalculo.if.usp.br/, Acesso em 05.03.2015.

[14] International GeoGebra Institute. *tube.geogebra.* `http://tube.geogebra.org`, Acesso em 02.09.2015.

[15] K. Kilhian. *O Baricentro da Mente.* `http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/03/aplicacao-de-derivada-para-determinacao.html`, Acesso em 10.04.2015.

[16] L. Leithold. *O Cálculo com Geometria Analítica.* Editora Harbra, 3ª Edição, 1994.

[17] E. L. Lima. *Matemática e Ensino - Coleção do Professor de Matemática.* SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 3ª Edição, 2007.

[18] R. R. Paterlini. *Técnicas de Máximos e Mínimos.* Revista do Professor de Matemática Número 35, páginas 34 a 38, 1997.

[19] M. Renault. *Calculus Applets using GeoGebra.* `http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/GeoGebraCalculusApplets.html`, Acesso em 02.09.2015.

[20] U. Sodré. *Ensino Superior.* `www.uel.br/projetos/matessencial/superior/superior.htm`, Acesso em 10.02.2015.

[21] J. Stewart. *Cálculo Volume 1.* Cengage Learning, 2010.

[22] E. L. Lima *et al.* *A Matemática do Ensino Médio - Volumes 1, 2, 3 e 4 - Coleção do Professor de Matemática.* SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 10ª Edição, 6ª Edição, 6ª Edição, 1ª Edição, 2012, 2006, 2006, 2007.

[23] G. Iezzi *et al.* *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 8.* Atual Editora, 3ª Edição, 1977.

[24] G. Iezzi *et al.* *Tópicos de Matemática.* Atual Editora, 2ª Edição, 1981.

[25] J. P. Carneiro *et al.* *Vale a Pena Estudar Cálculo?* Revista do Professor de Matemática Número 53, páginas 18 a 21, 2004.

[26] P. A. Morettin *et al.* *Cálculo Funções de Uma e Várias Variáveis.* Editora Saraiva, 1ª Edição, 2006.

[27] UFF. *Problemas de Otimização.* `www.uff.br/cdme/pot/pot-html/pot-br.html`, Acesso em 31.07.2015.

[28] G. Ávila. *O Ensino de Cálculo no Segundo Grau.* Revista do Professor de Matemática Número 18, páginas 1 a 9, 1991.

[29] G. Ávila. *Derivadas e Cinemática.* Revista do Professor de Matemática Número 61, páginas 25 a 30, 2006.

[30] G. Ávila. *Limites e Derivadas no Ensino Médio?* Revista do Professor de Matemática Número 60, página 30 a 38, 2006.

Apêndice A

Applets no GeoGebra

Applet é um software aplicativo que é executado no contexto de outro programa. Os applets podem ser manipulados online ou offline, através de tablets (Android, IPad e Windows Tablet) e desktops (IOS, Linux, Windows e outros). O termo foi introduzido pelo *Apple Script* em 1993 (`http://pt.wikipedia.org/wiiki/Applet`).

O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica e que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Ele permite que você faça applets, dispensando conhecimentos prévios de linguagens de programação. Em outras palavras, você fica responsável pelo conteúdo matemático, utiliza as ferramentas do programa GeoGebra para desenvolver o seu trabalho e, o GeoGebra traduz este trabalho em linguagem de programação, para poder ser executado em uma página da web.

A característica do applet de permitir a interação com o usuário, muda a posição do mesmo: de observador passa a ser agente ativo do processo. E isto, sem sombra de dúvida, facilita a aprendizagem.

Como todo trabalho, a construção de um applet no GeoGebra se desenvolve melhor com um planejamento prévio. O planejamento é individual, mas é fundamental que você utilize quatro etapas fundamentais:

1. Identificar os objetivos matemáticos a serem alcançados.

2. Elaborar os mecanismos matemáticos que permitem a interação do aluno usuário.

3. Construir o arquivo no GeoGebra utilizando as ferramentas desse programa.

4. Salvar o arquivo na terceira etapa em "Planilha Dinâmica como Página Web" (html), ou seja, um *applet*.

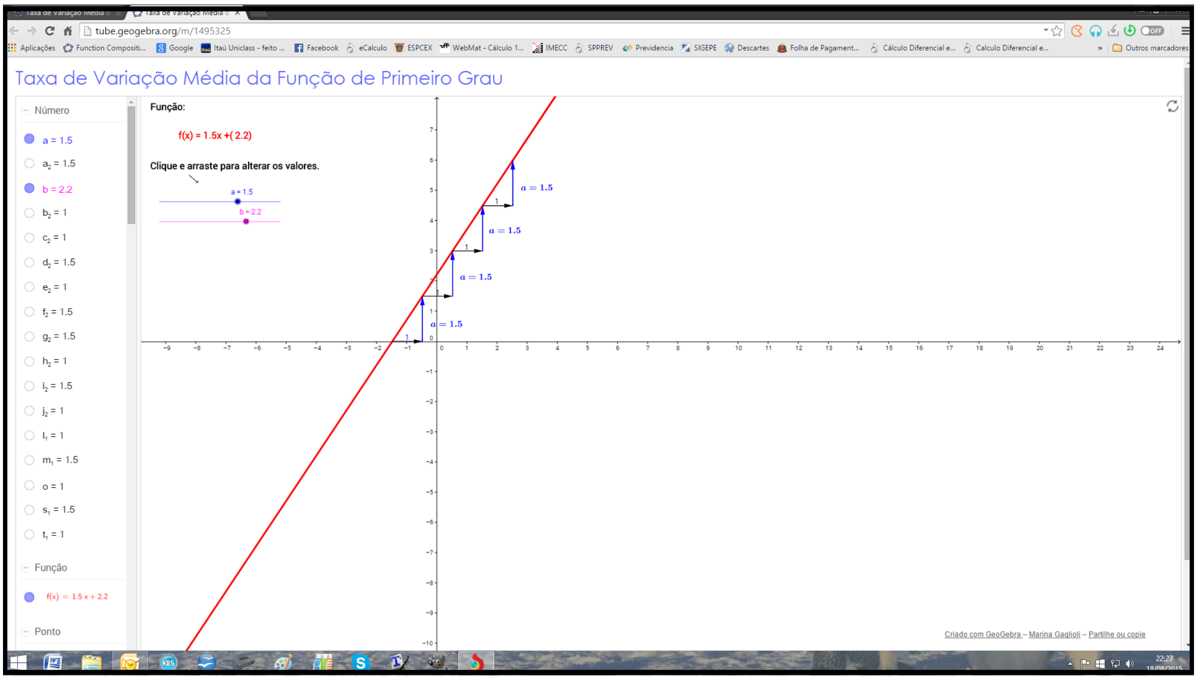
Nas páginas seguintes, todos os links para applets apontam para o **GeoGebra Tube** (`https://tube.geogebra.org/`), dando-lhe a opção de visualizar o applet online ou fazer download do arquivo **.ggb** para seu desktop ou dispositivo móvel.

Para a visualização dos applets não há necessidade de instalar o programa GeoGebra mas sua máquina deve ter a linguagem Java habilitada. Caso seja preciso baixe e instale o "Java Runtime Envorinment" (`https://www.java.com/pt_BR/download/`).

A.1 Applet 1

Taxa de variação média da função de 1^o **grau**.

Endereço Web : `http://tube.geogebra.org/m/1495325`



A.2 Applet 2

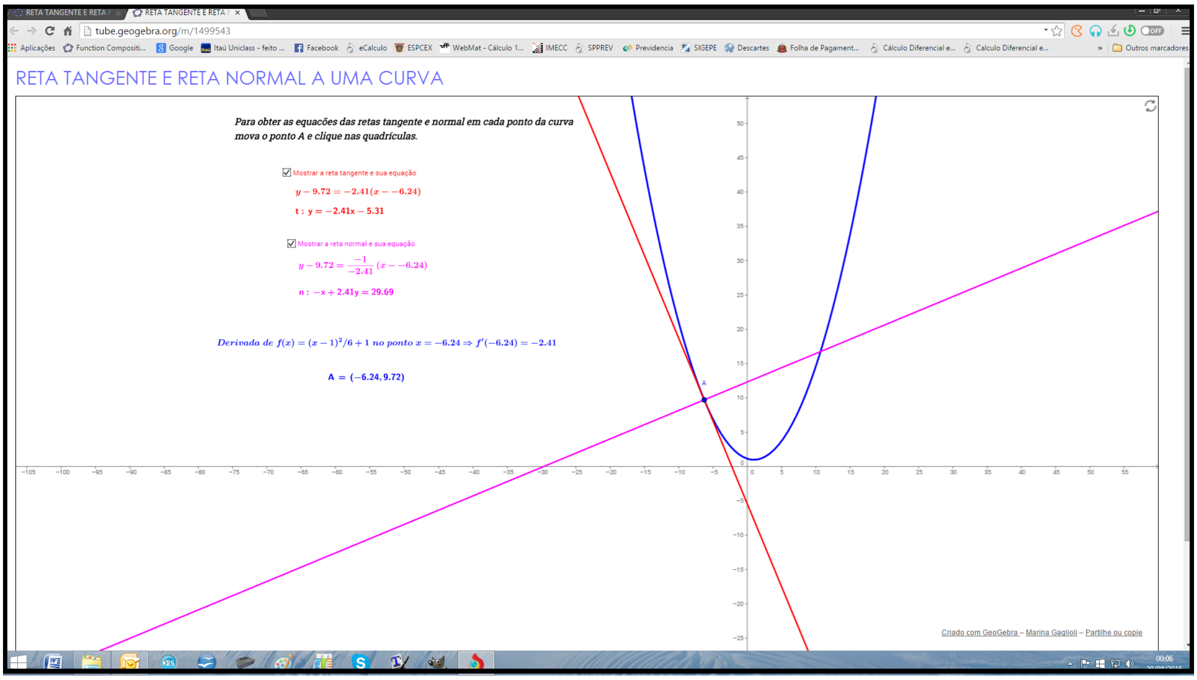
Interpretação geométrica da derivada da função $f(x) = -x^2 + 6x$ **no ponto** $x = 1$.

Endereço Web : `http://tube.geogebra.org/m/1474659`

A.3 Applet 3

Reta tangente e neta normal em cada ponto de uma curva.

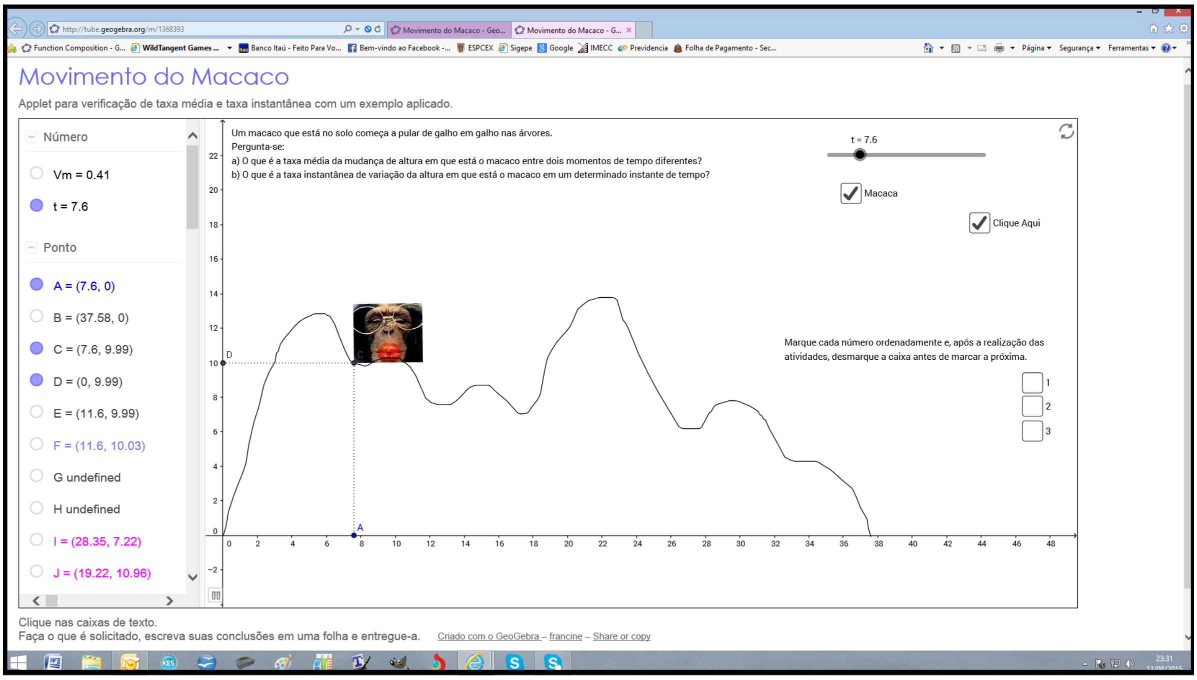
Endereço Web : `http://tube.geogebra.org/m/1499543`



A.4 Applet 4

Verificação de taxa média e taxa instantânea com um exemplo aplicado.

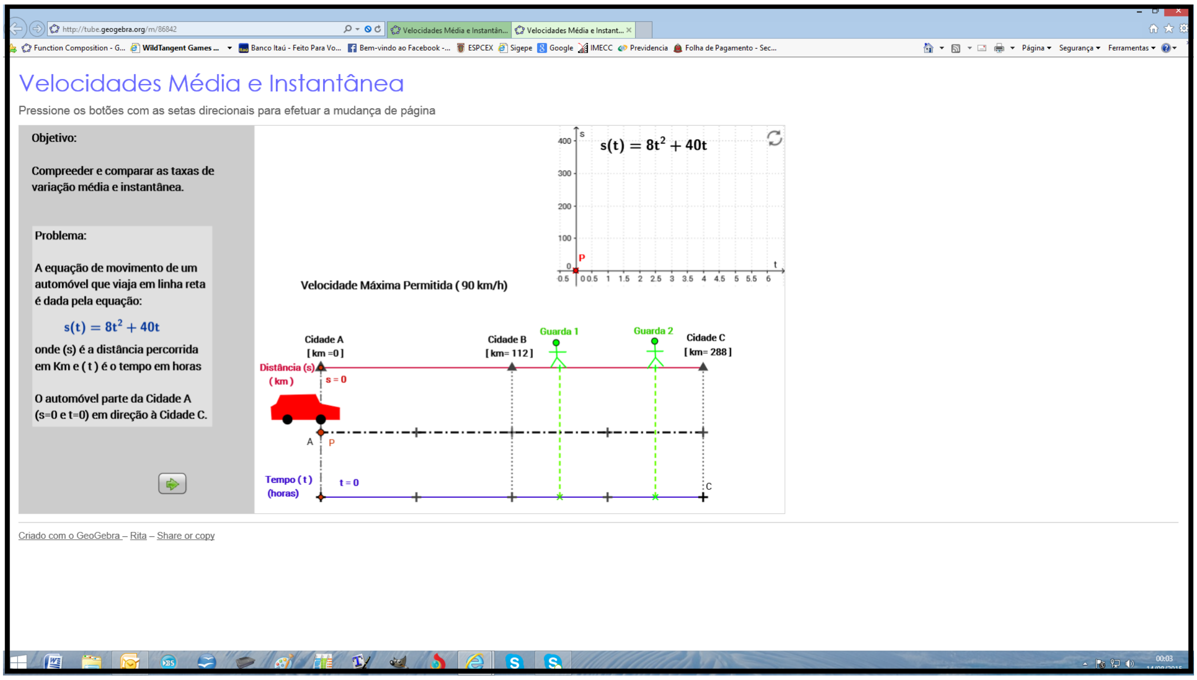
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1368393`



A.5 Applet 5

Utilização da equação de movimento para a análise das taxas de variação média e instantânea de uma função.

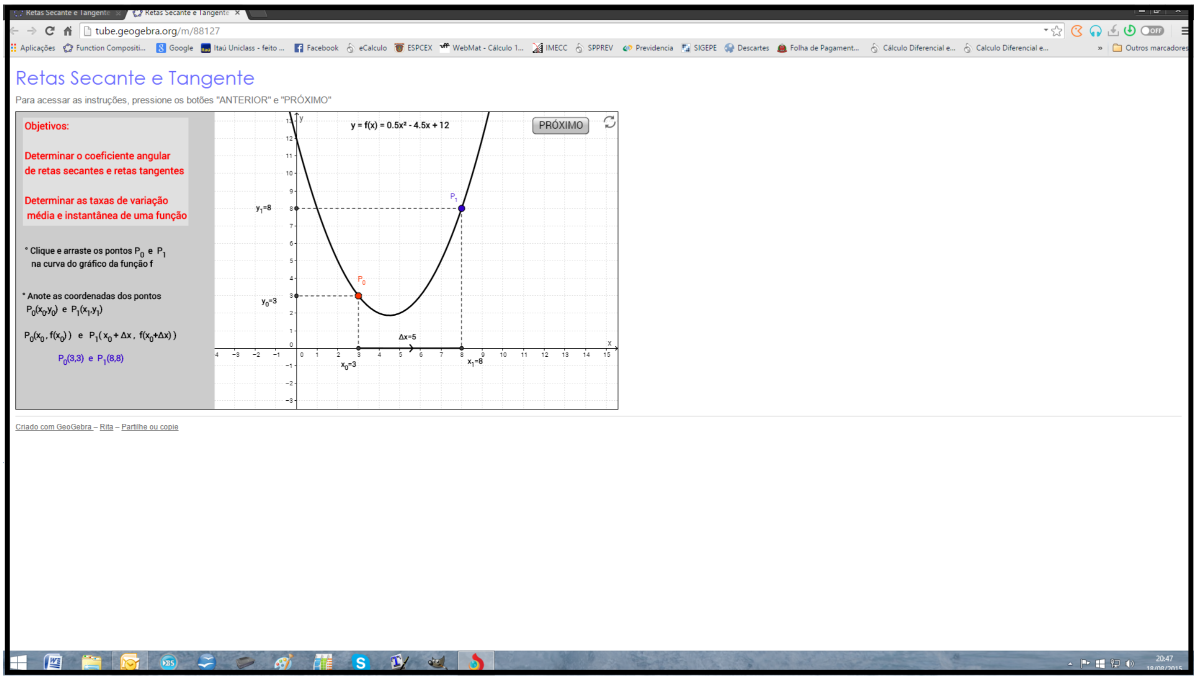
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/86842`



A.6 Applet 6

Relação entre coeficiente angular de retas secantes e retas tangentes - taxa de variação média e instantânea.

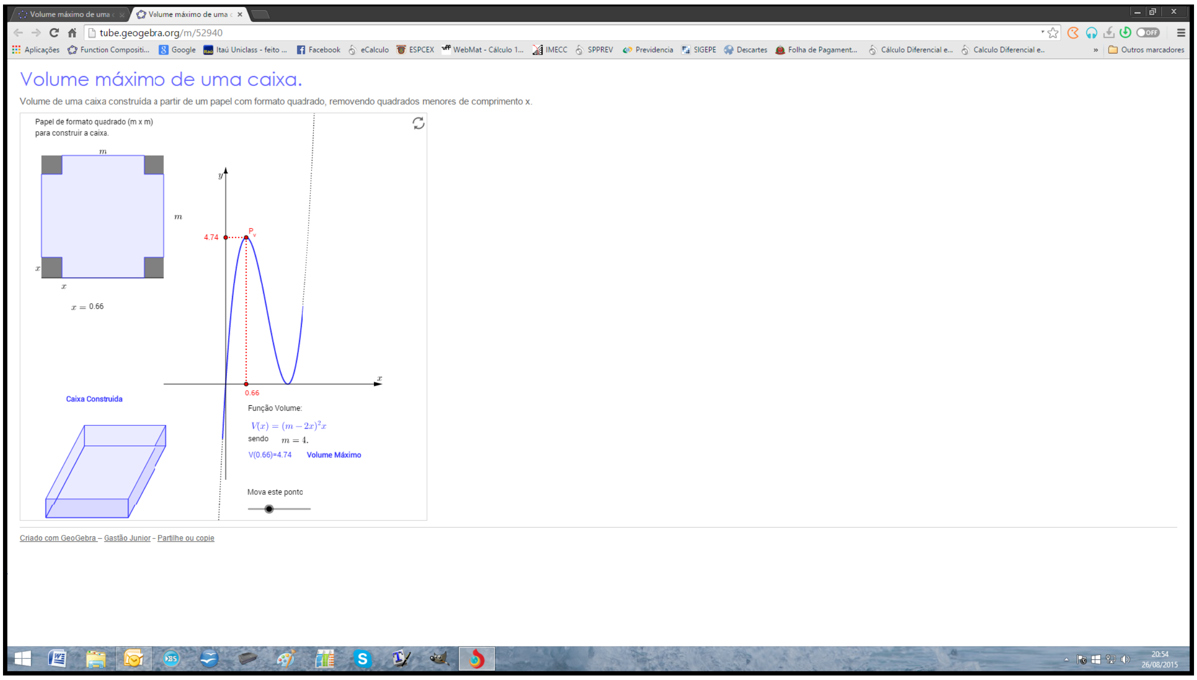
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/88127`



A.7 Applet 7

Volume máximo de uma caixa.

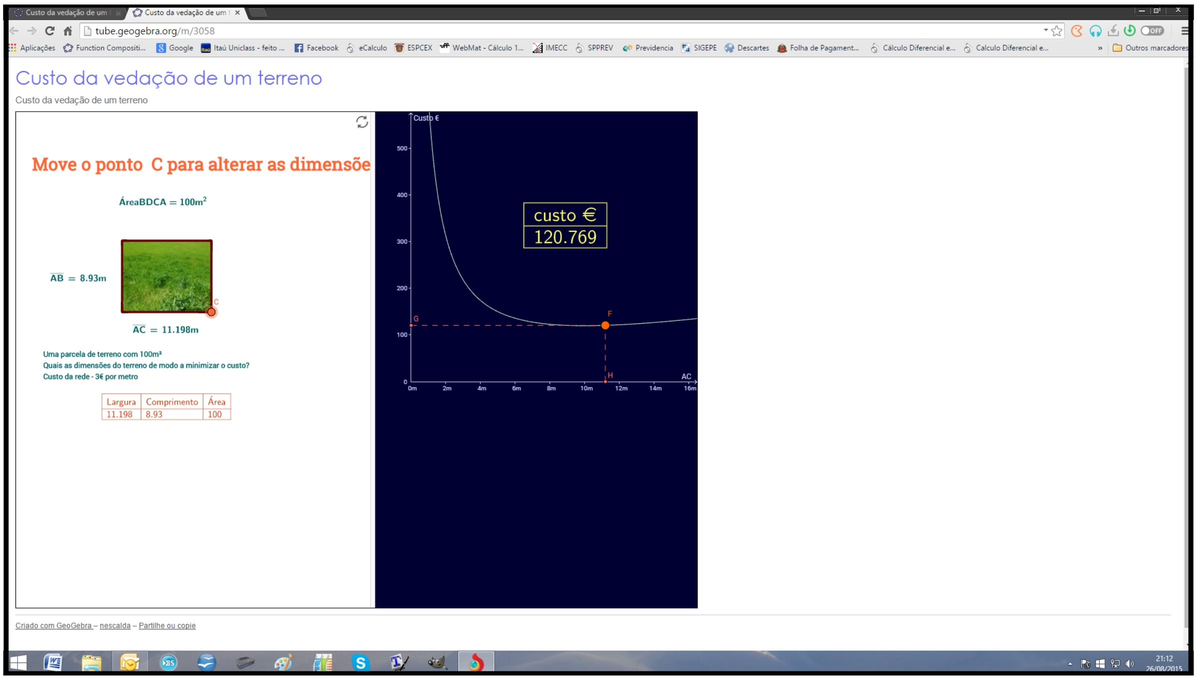
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/52940`



A.8 Applet 8

Problema de minimização de custo.

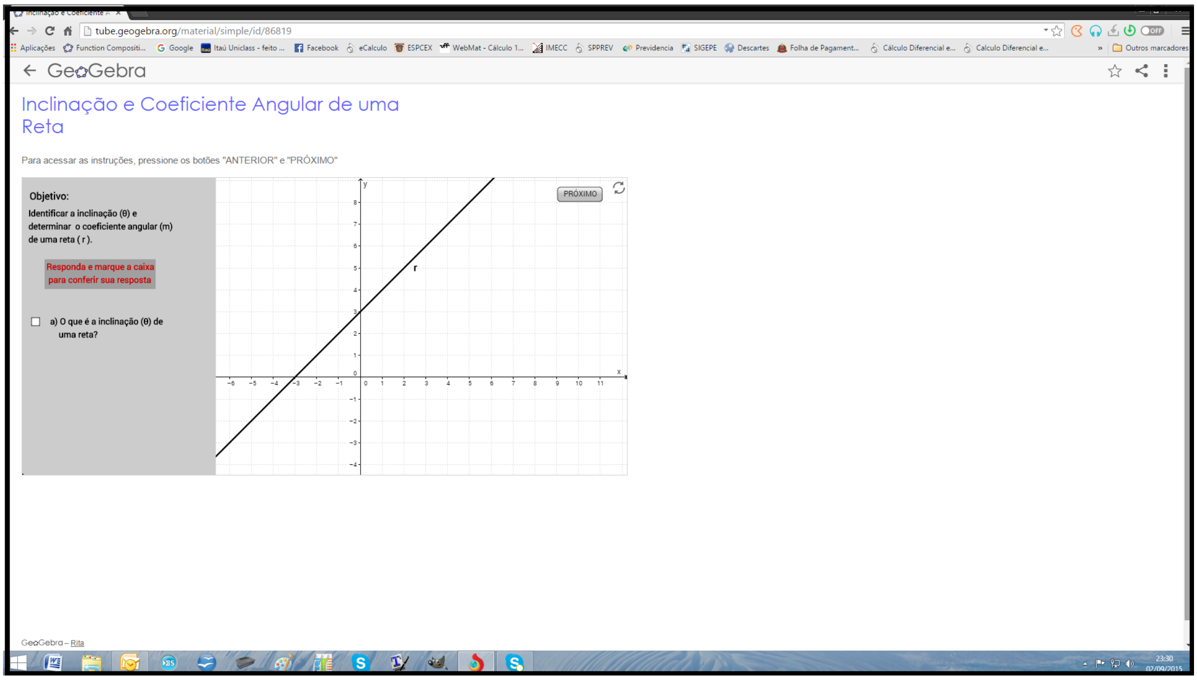
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/3058`



A.9 Applet 9

Inclinação e coeficiente angular de uma reta.

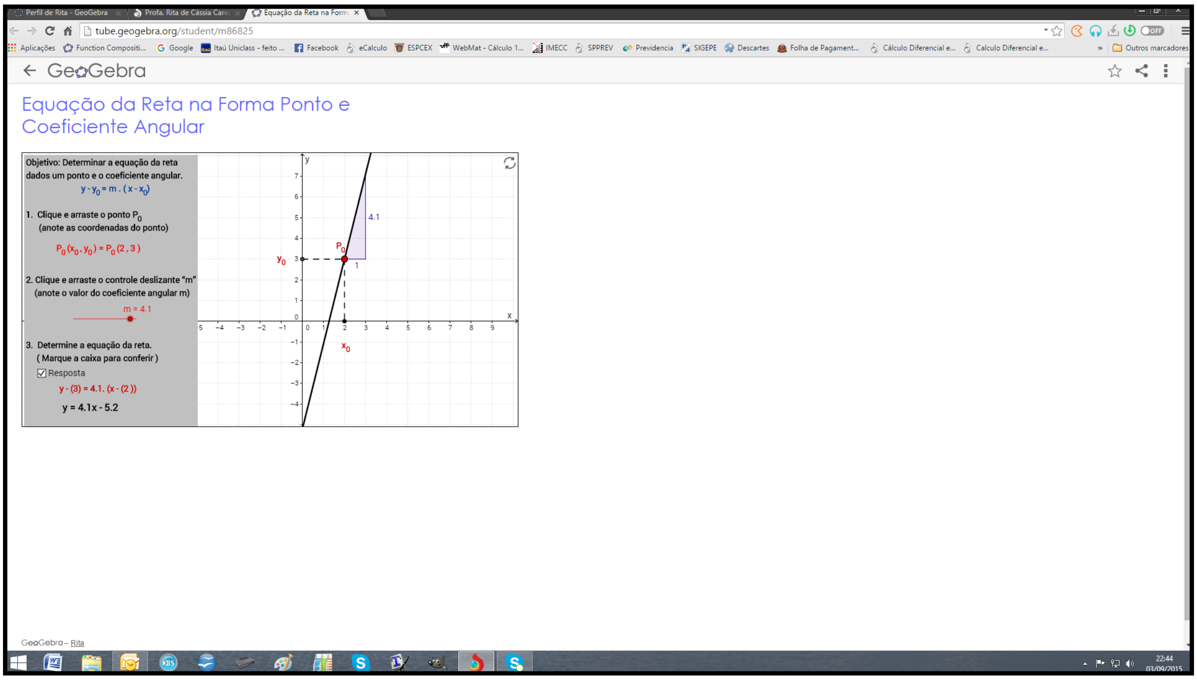
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/86819`



A.10 Applet 10

Equação da reta dados um ponto e o coeficiente angular.

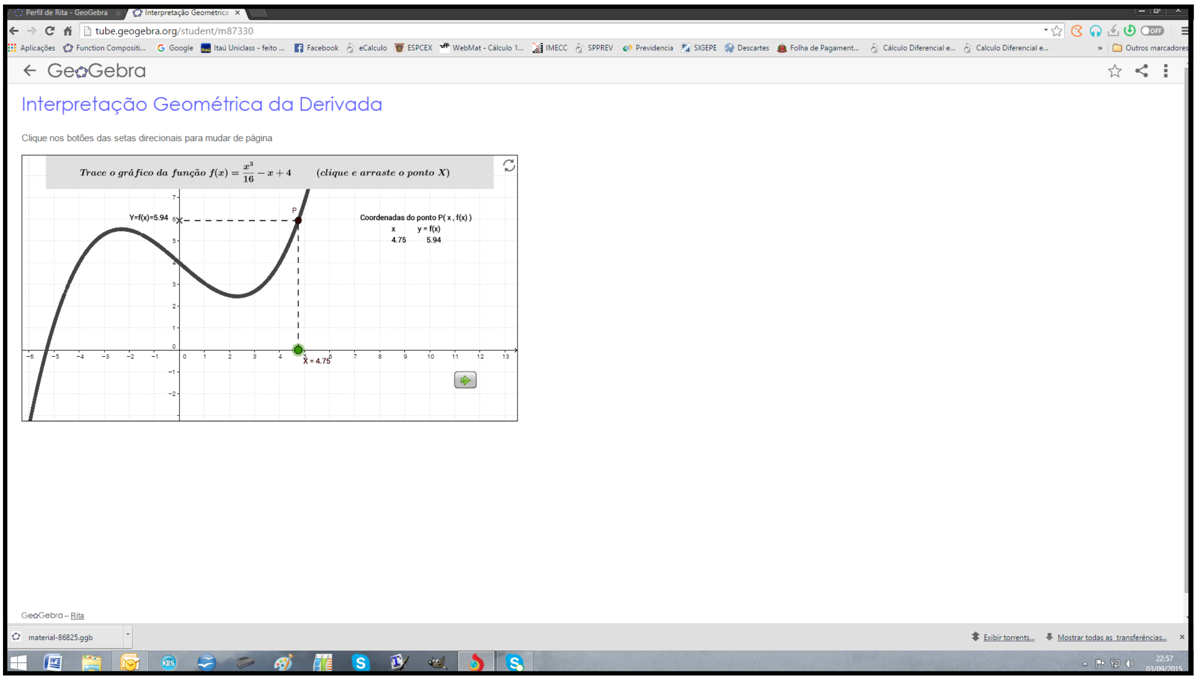
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/86825`



A.11 Applet 11

Interpretação geométrica da derivada.

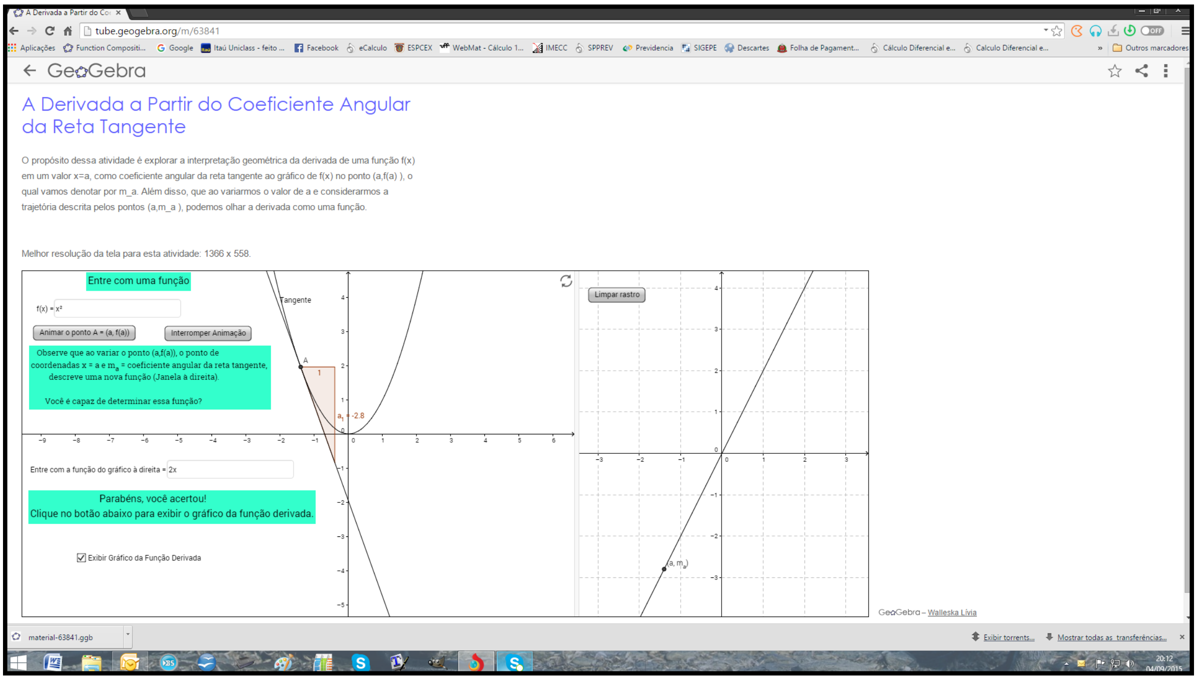
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/87330`



A.12 Applet 12

A derivada a partir do coeficiente angular da reta tangente.

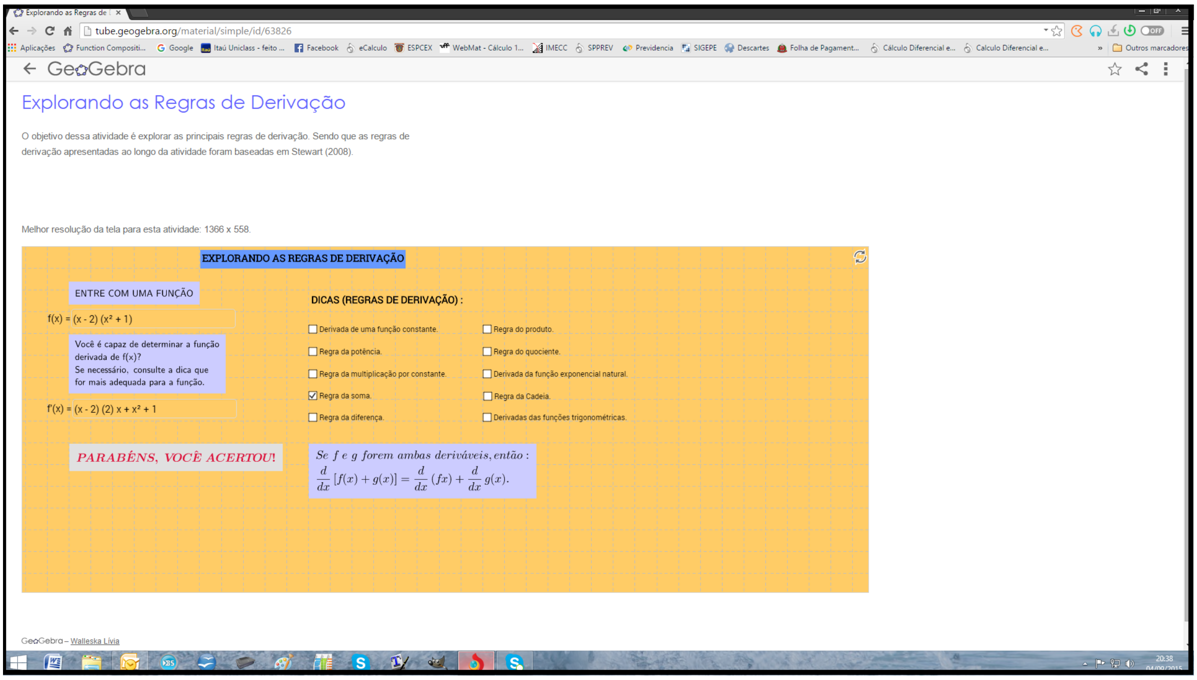
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/63841`



A.13 Applet 13

Explorando as regras de derivação.

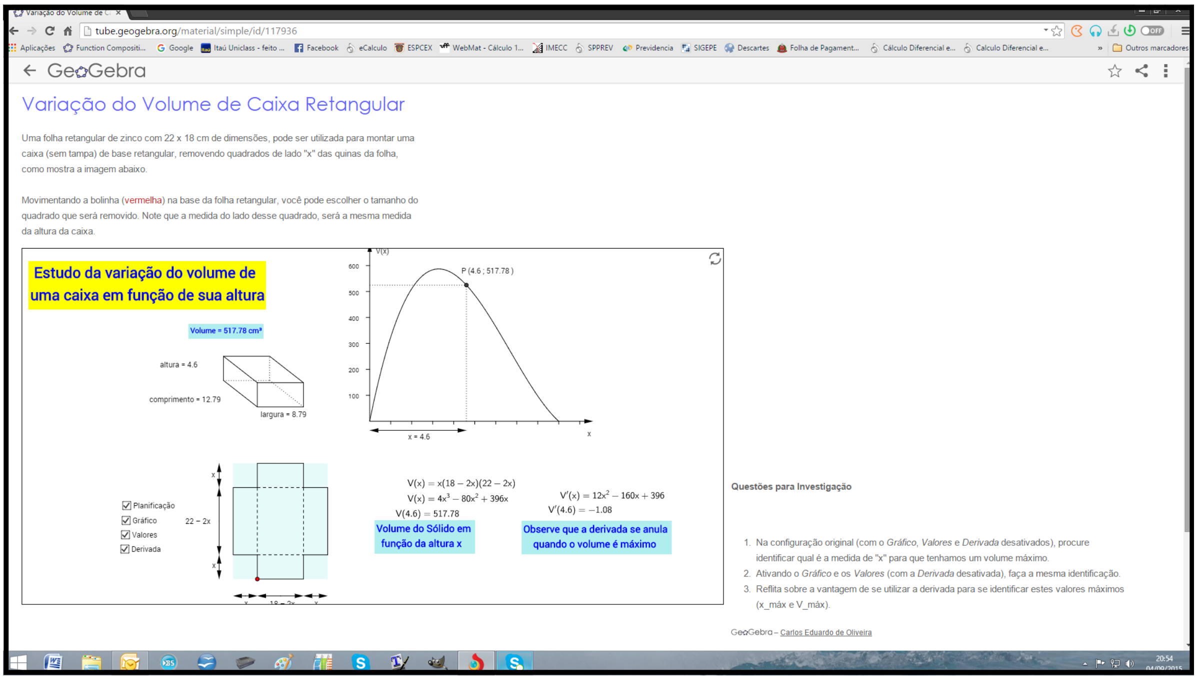
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/63826`



A.14 Applet 14

Estudo da variação do volume de uma caixa em função de sua altura.

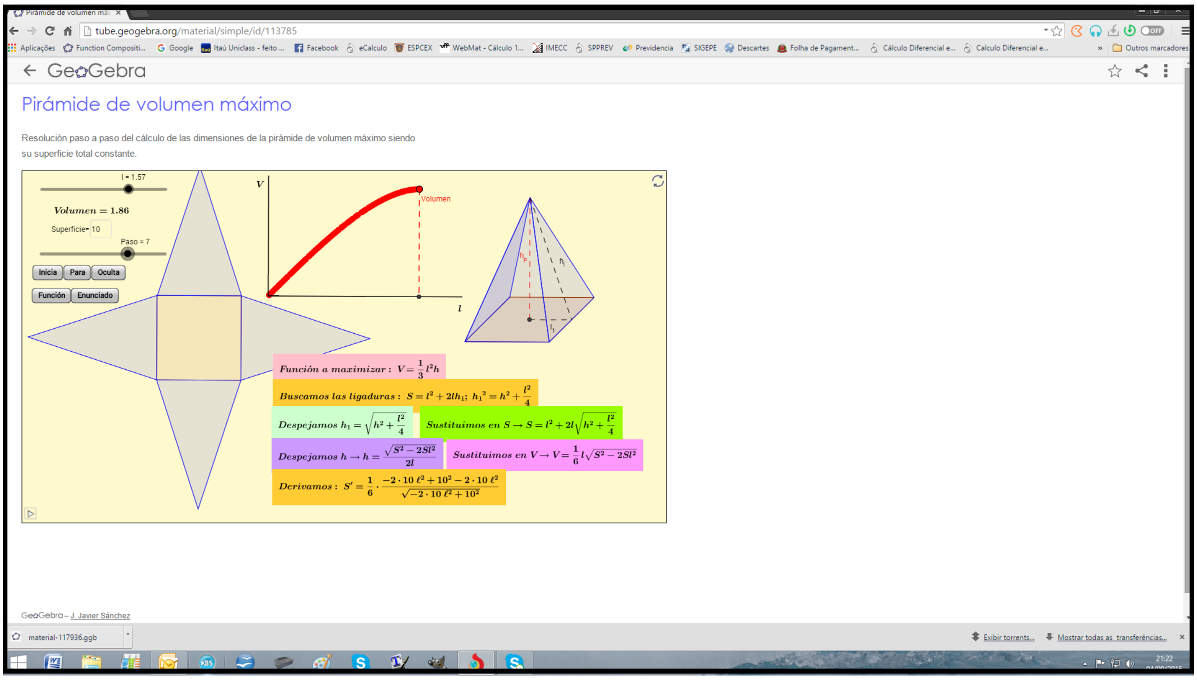
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/117936`



A.15 Applet 15

Pirâmide de volume máximo.

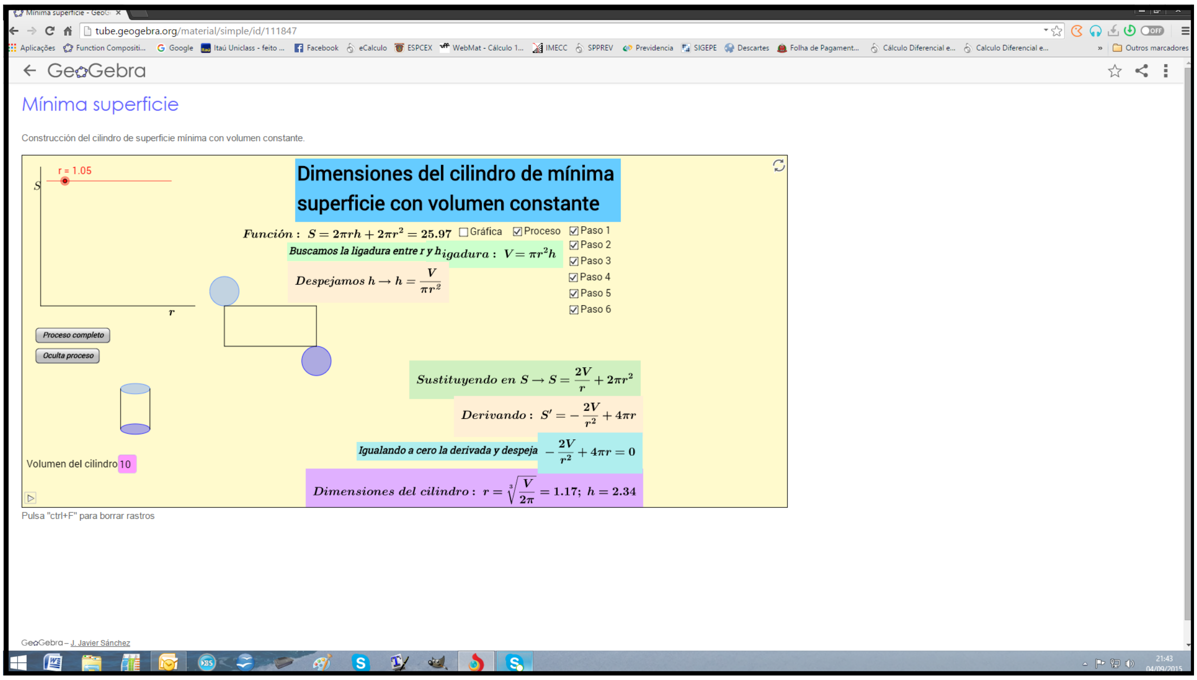
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/113785`



A.16 Applet 16

Construção de um cilindro de superfície mínima com volume constante.

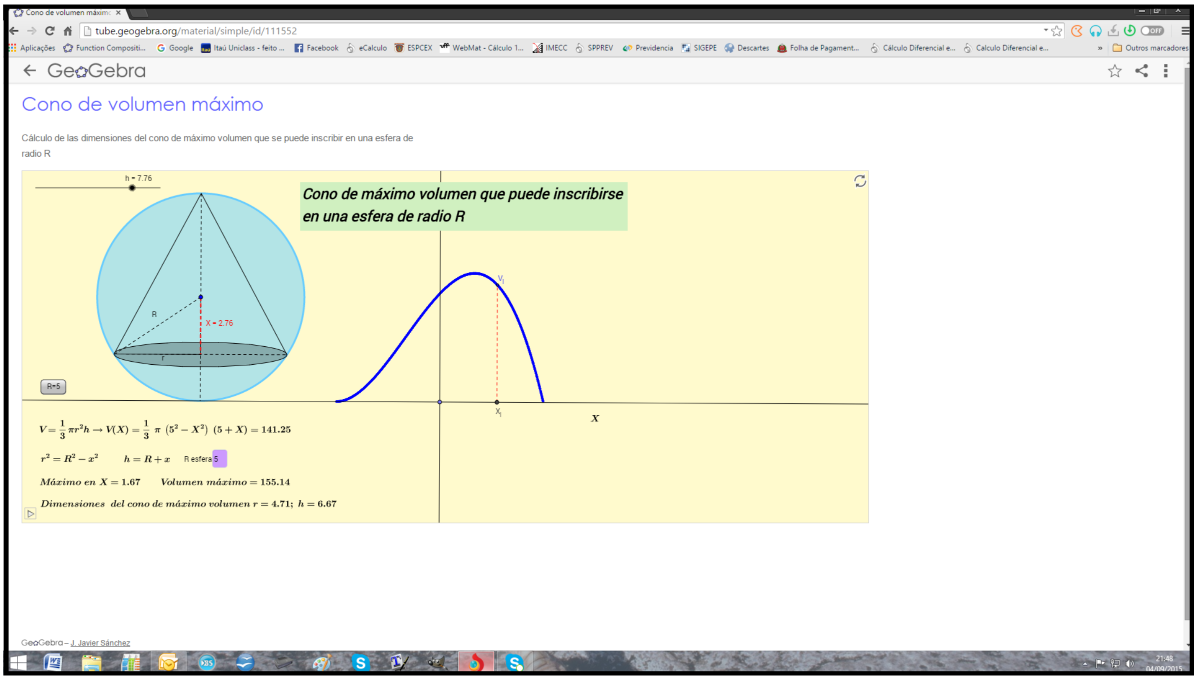
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/111847`



A.17 Applet 17

Cone de volume máximo inscrito em uma esfera de raio R.

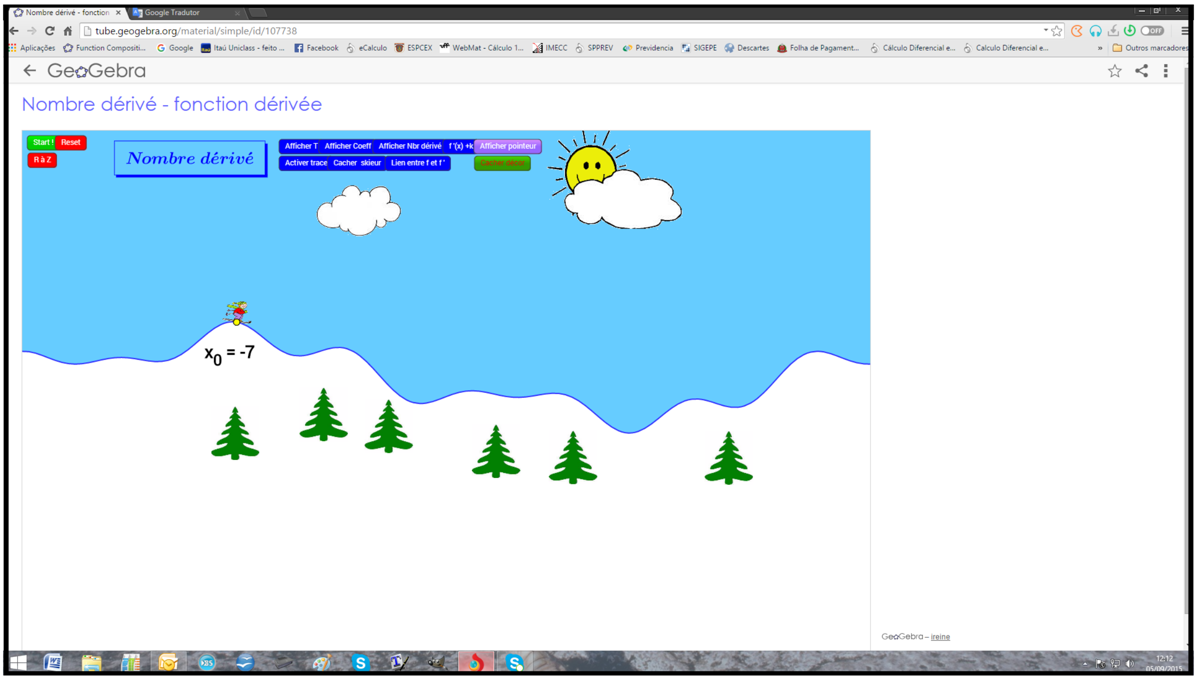
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/material/simple/id/111552`



A.18 Applet 18

Função derivada.

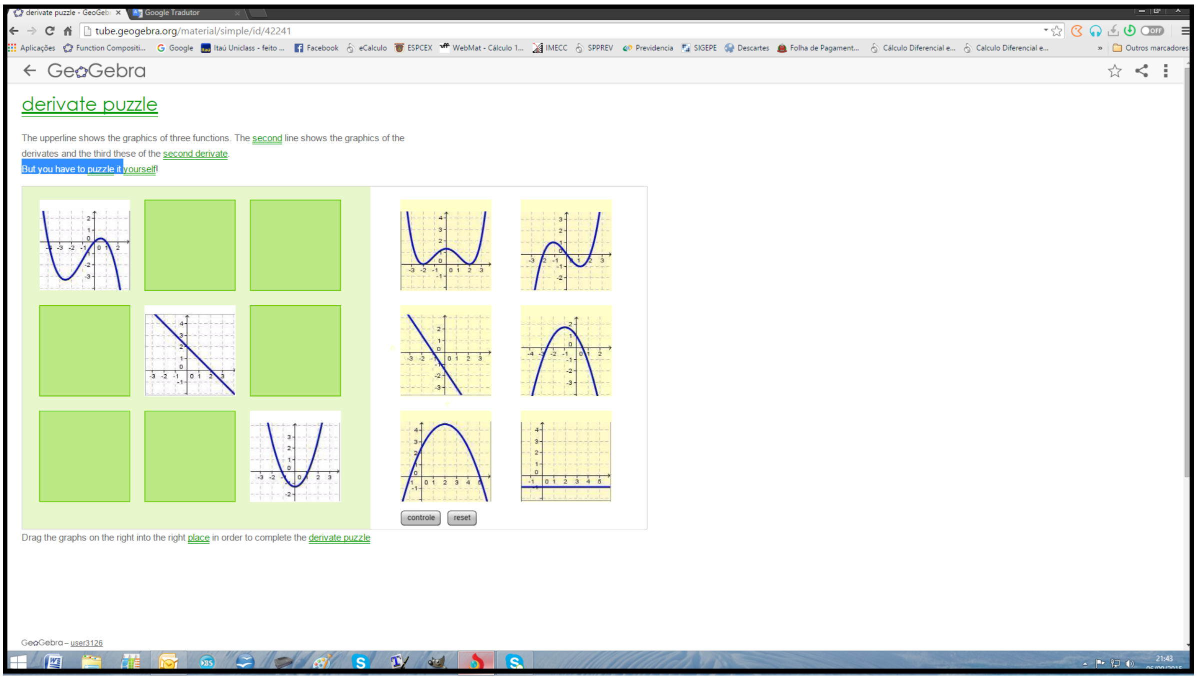
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/107738`



A.19 Applet 19

Quebra-cabeça com derivadas.

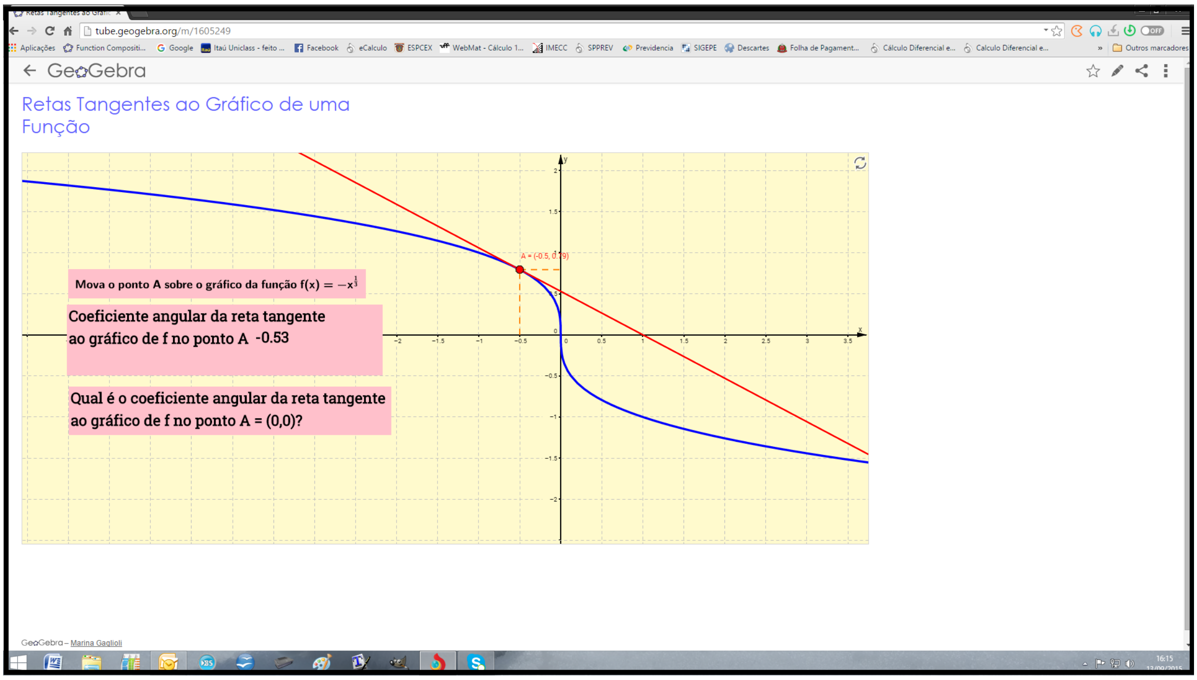
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/42241`



A.20 Applet 20

Retas tangentes ao gráfico de uma função.

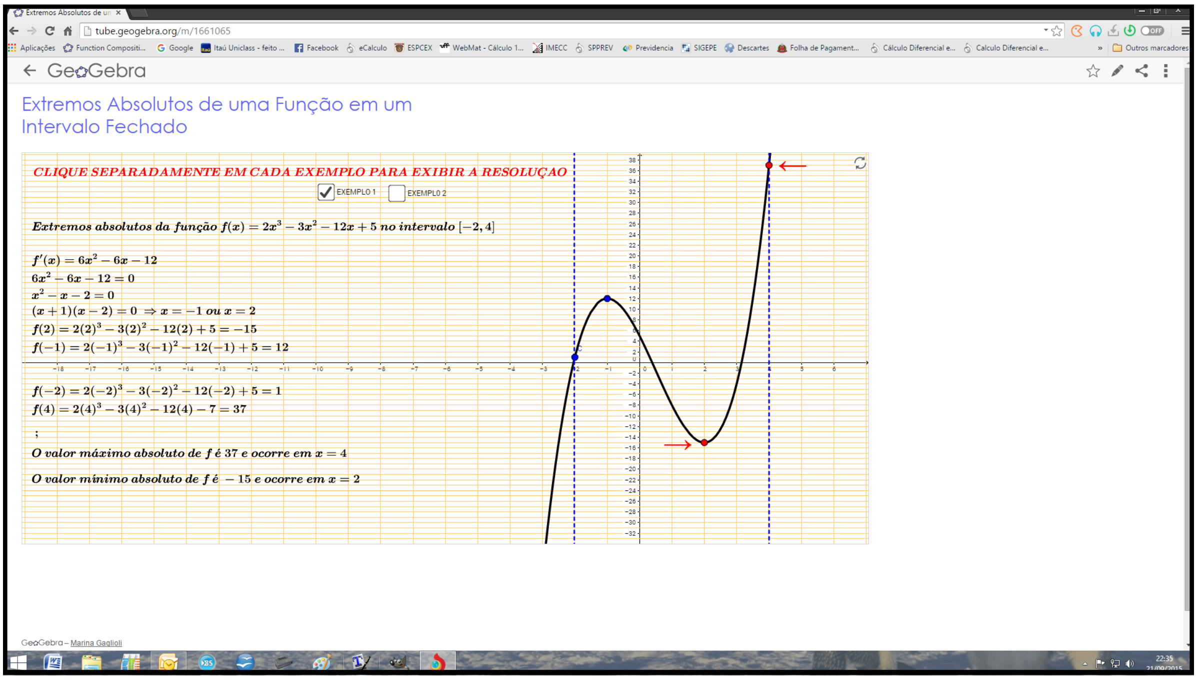
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1605323`



A.21 Applet 21

Extremos absolutos de uma função em um intervalo fechado.

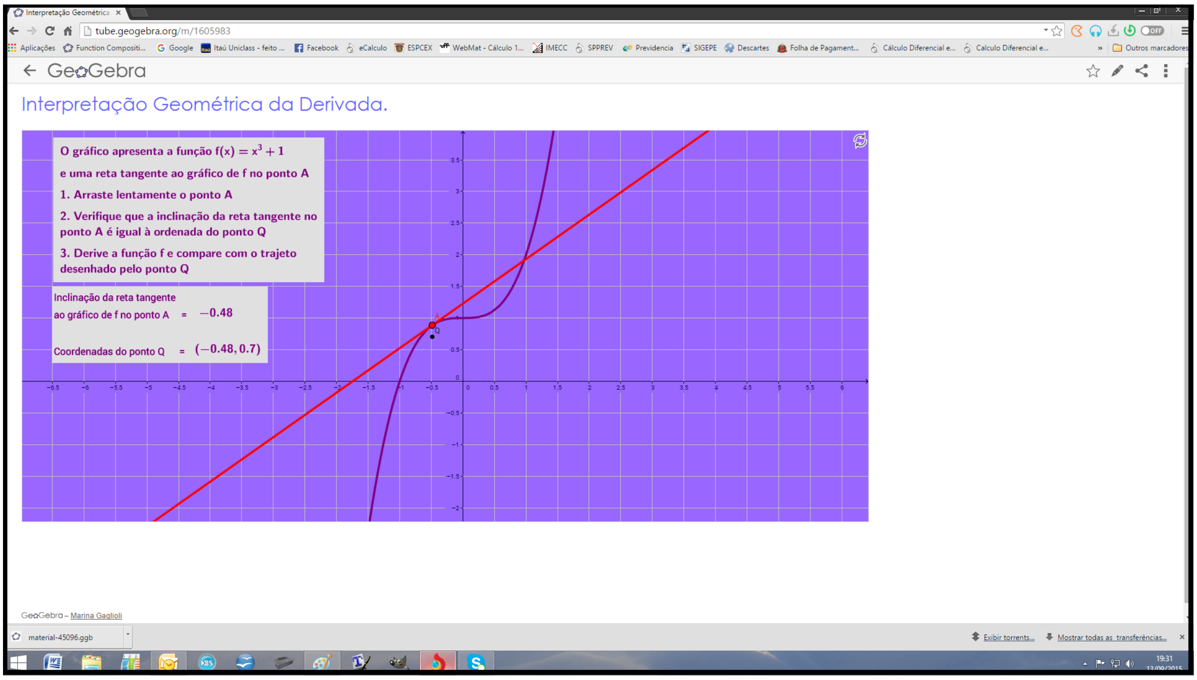
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1661065`



A.22 Applet 22

Interpretação geométrica da derivada.

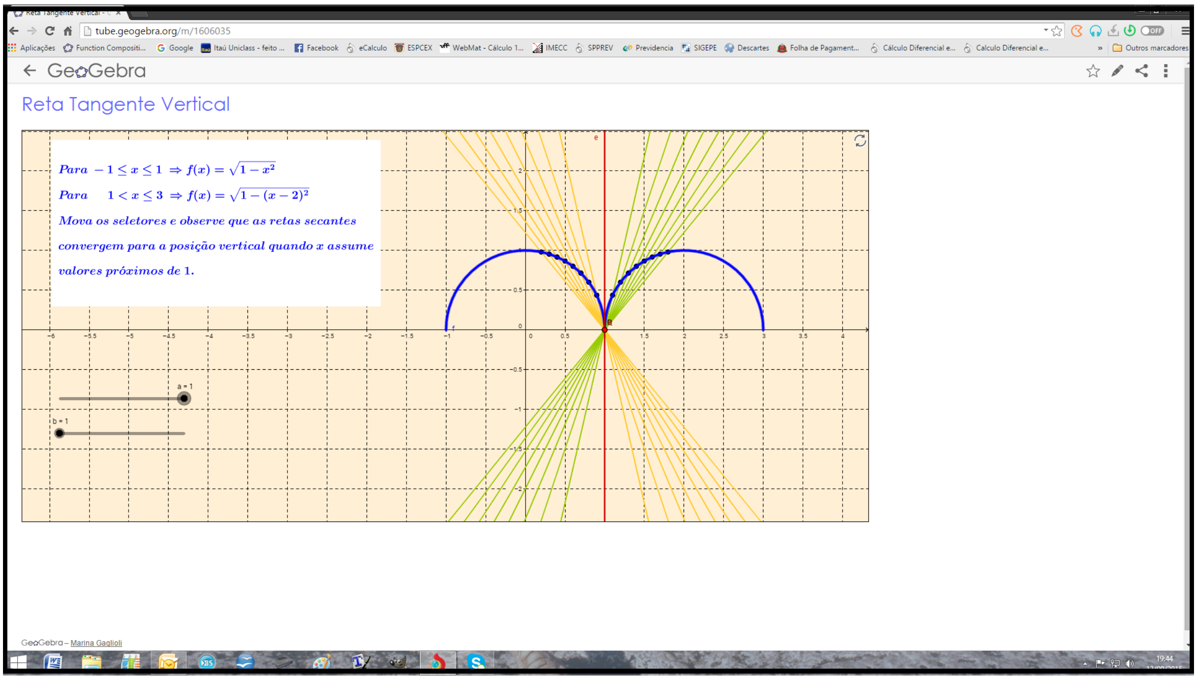
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1605983`



A.23 Applet 23

Reta tangente vertical.

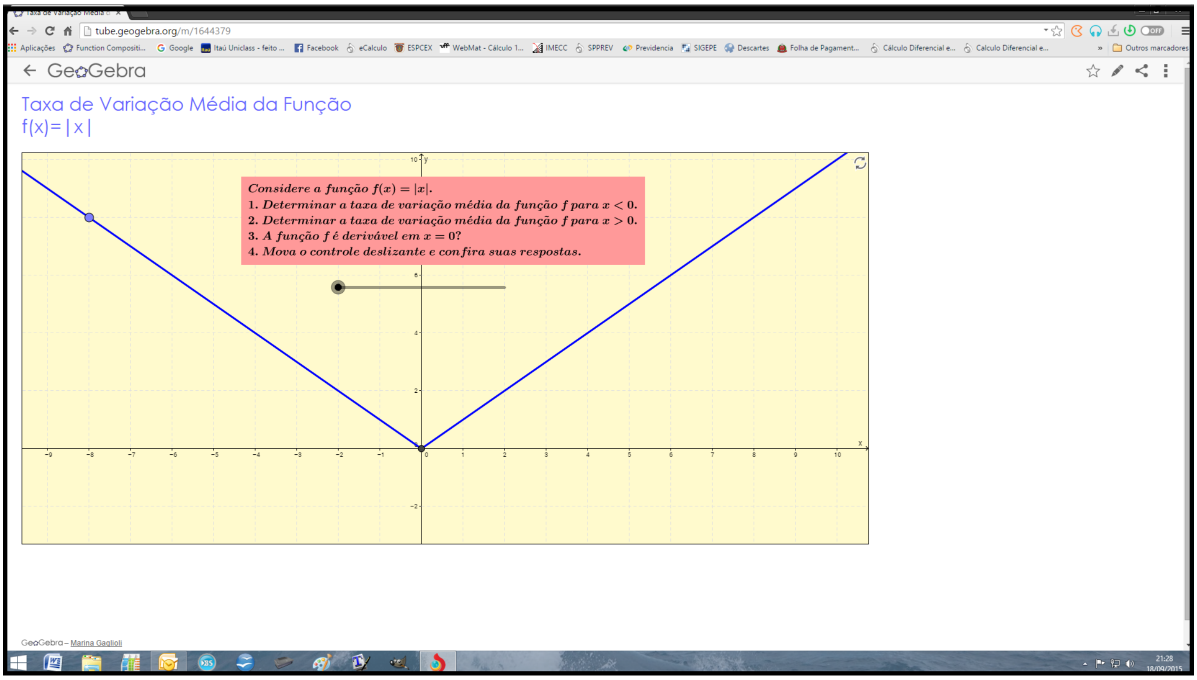
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1606069`



A.24 Applet 24

Taxa de variação média da função f(x)=|x|.

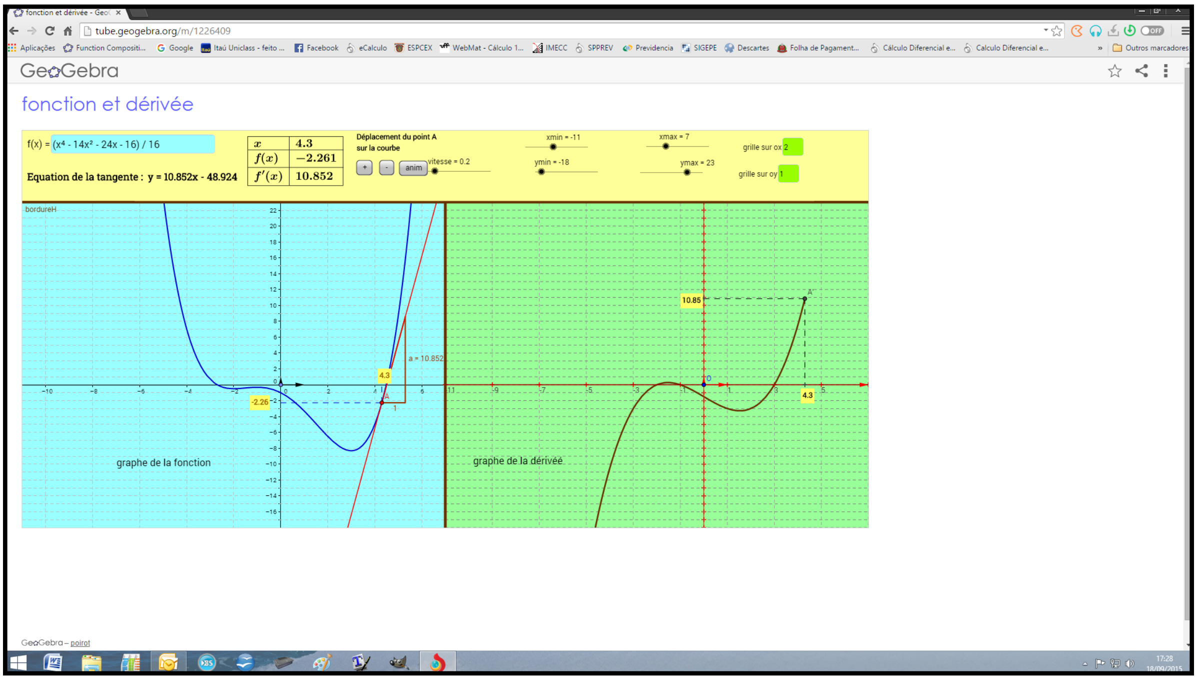
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1644379`



A.25 Applet 25

Funções e derivadas.

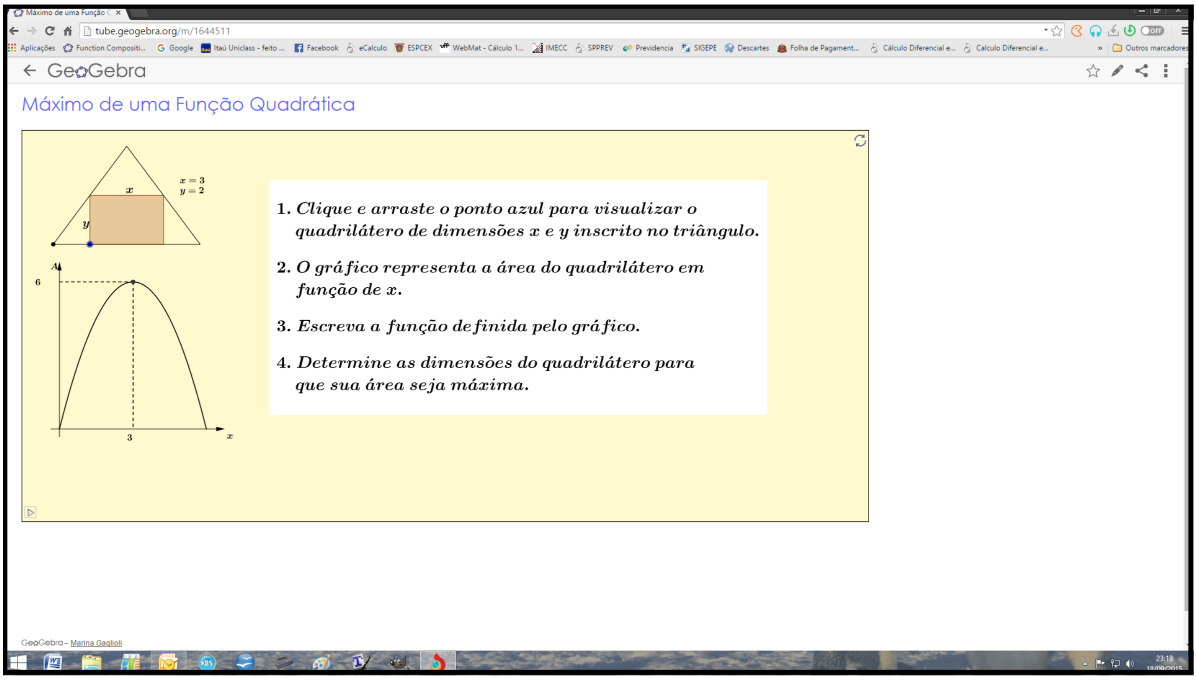
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1226409`



A.26 Applet 26

Máximo de uma função quadrática.

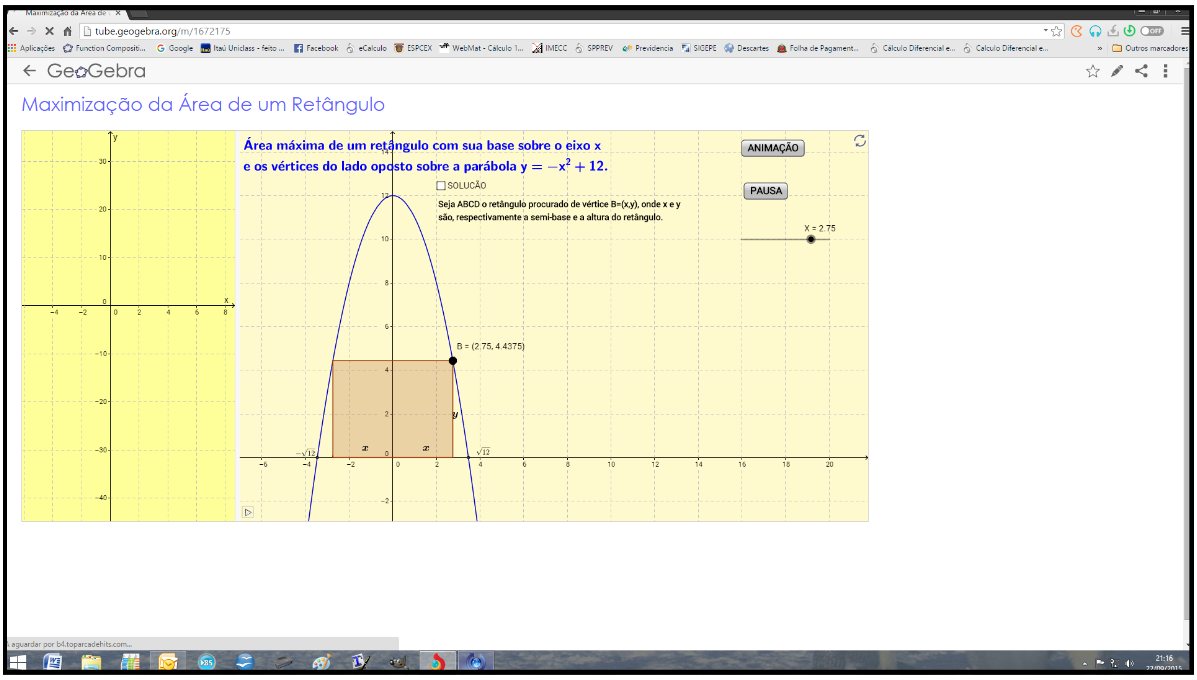
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1644511`



A.27 Applet 27

Maximização da área de um retângulo.

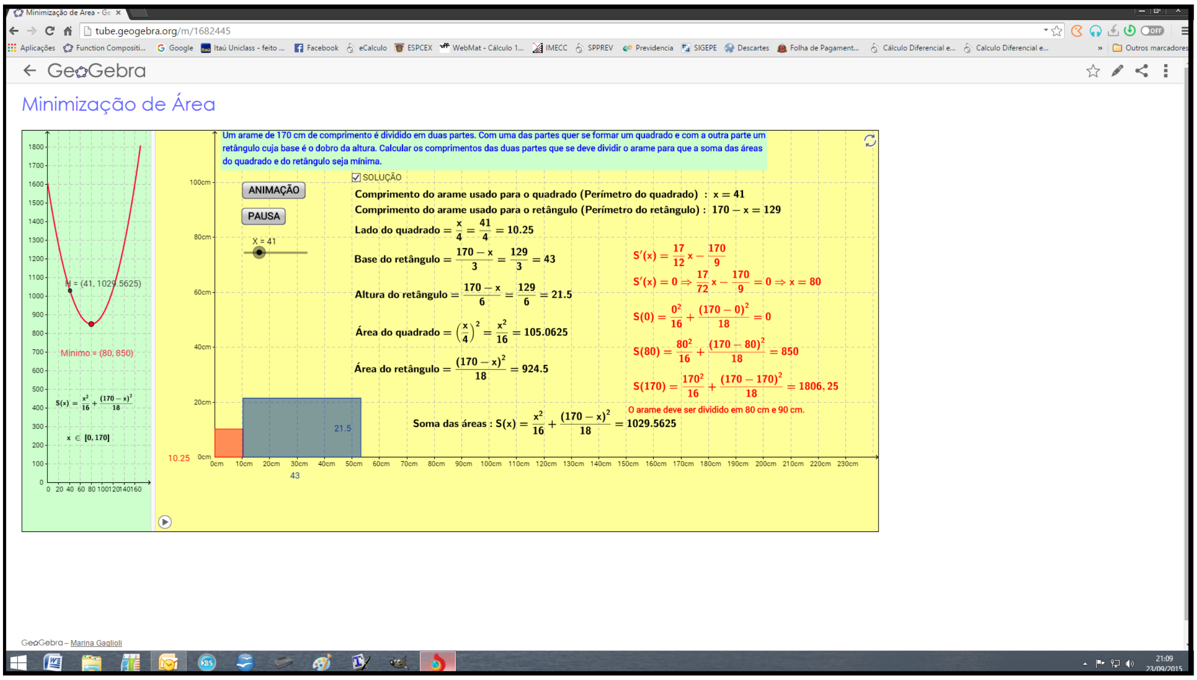
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1672175`



A.28 Applet 28

Minimização de área.

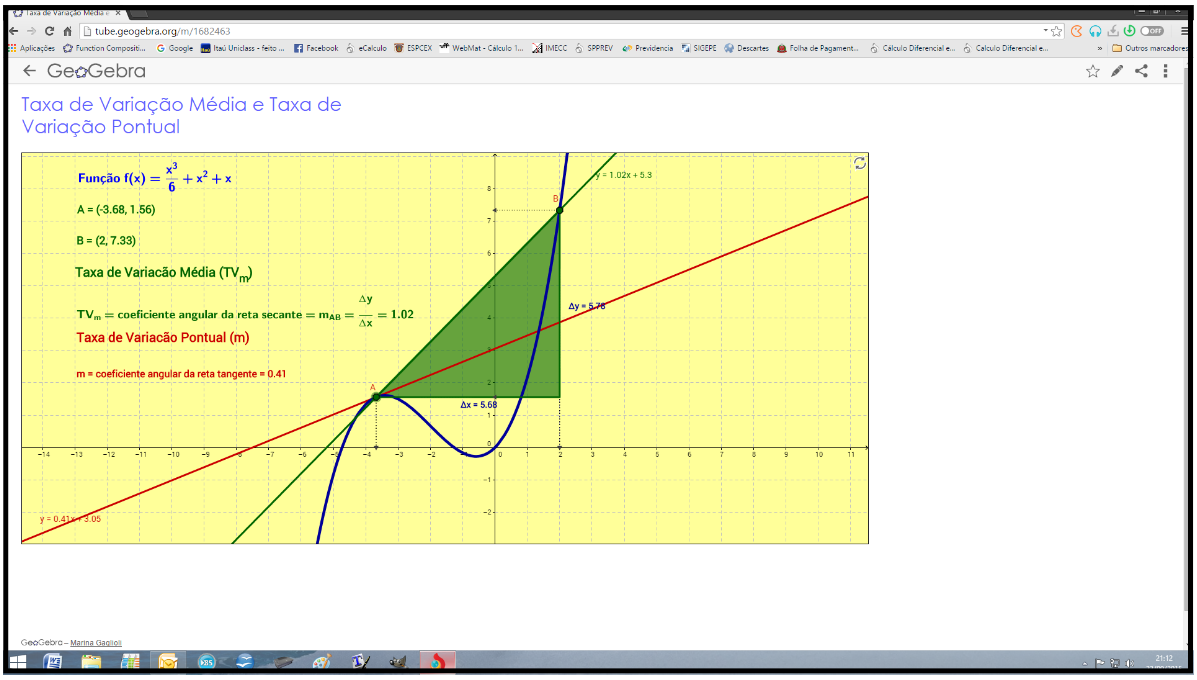
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1682445`



A.29 Applet 29

Taxa de variação média e taxa de variação pontual.

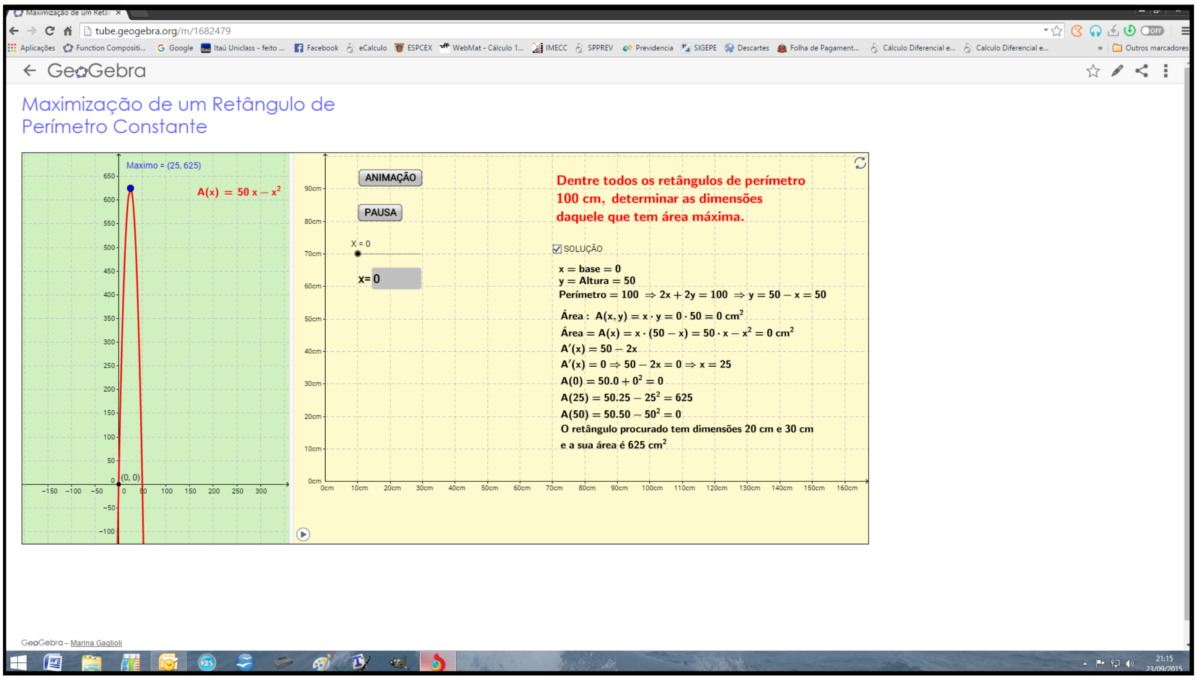
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1682463`



A.30 Applet 30

Maximização de um retângulo de perímetro constante.

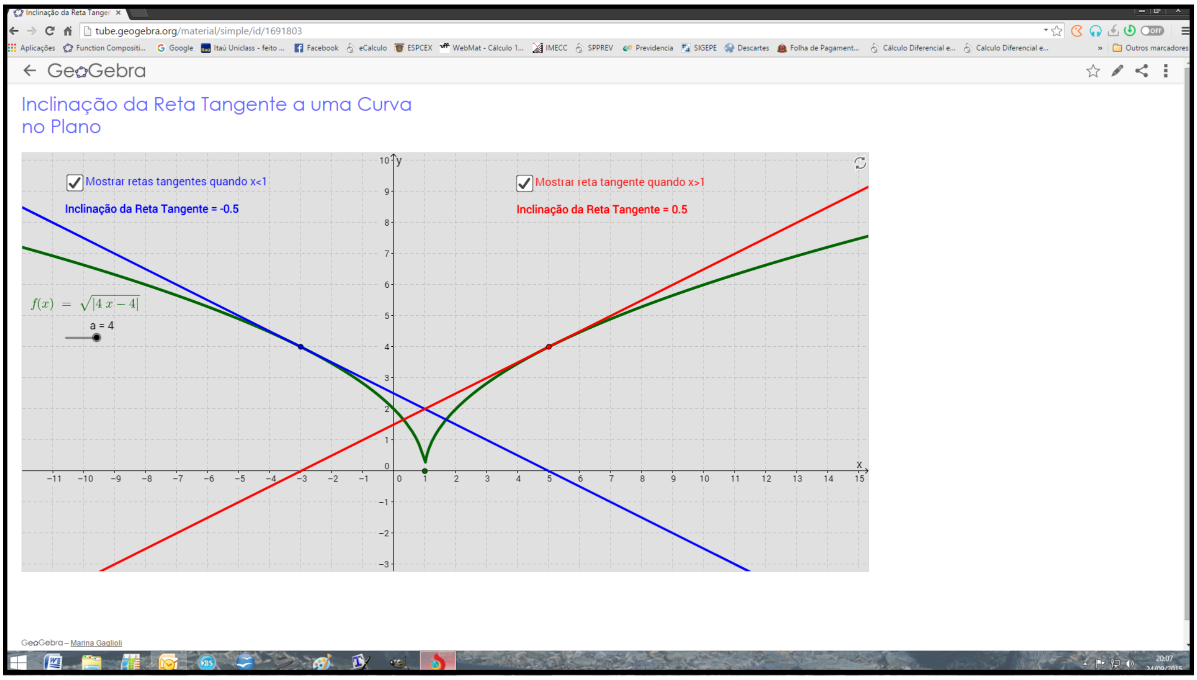
Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1896547`



A.31 Applet 31

Inclinação da reta tangente a uma curva no plano.

Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1691803`



A.32 Applet 32

Maximização de área limitada por círculos.

Endereço Web: `http://tube.geogebra.org/m/1691837`