

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RONALDO FRANCK FIGUEIREDO LEITE

*UM OLHAR DA ETNOMATEMÁTICA NA APLICAÇÃO  
DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO NA PREVISÃO DA  
MARÉ NA FOZ DO RIO AJURUXI ESQUINA COM O  
RIO AMAZONAS*

Macapá  
2017

RONALDO FRANCK FIGUEIREDO LEITE

*UM OLHAR DA ETNOMATEMÁTICA NA APLICAÇÃO  
DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO NA PREVISÃO DA  
MARÉ NA FOZ DO RIO AJURUXI ESQUINA COM O  
RIO AMAZONAS*

Dissertação apresentada ao colegiado do Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Guzmán Eulalio Isla Chamilco**  
**Doutor em Modelagem Computacional - UNIFAP**

Macapá  
2017

Leite, Ronaldo Franck Figueiredo

UM OLHAR DA ETNOMATEMÁTICA NA APLICAÇÃO DAS  
FUNÇÕES SENO E COSSENO NA PREVISÃO DA MARÉ NA  
FOZ DO RIO AJURUXI ESQUINA COM O RIO AMAZONAS /

Ronaldo Franck Figueiredo Leite - 2017

63.p

1. Maré. 2. Função Seno e Cosseno. 3. Etnomatemática 4. Rio  
Amazonas 5. Rio Ajuruxi. . I.Título.

CDU 536.21

RONALDO FRANCK FIGUEIREDO LEITE

*UM OLHAR DA ETNOMATEMÁTICA NA APLICAÇÃO  
DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO NA PREVISÃO DA  
MARÉ NA FOZ DO RIO AJURUXI ESQUINA COM O  
RIO AMAZONAS*

Dissertação apresentada ao colegiado do Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 03 de Março de 2017

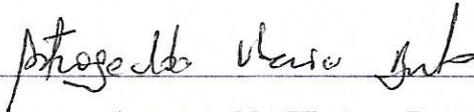
**BANCA EXAMINADORA**



---

Guzmán Eulalio Isla Chamilco

Doutor em Modelagem Computacional - UNIFAP



---

Astrogecildo Ubaiara Brito

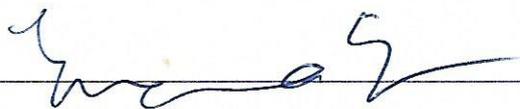
Mestre em Matemática - IFAP



---

José Walter Cárdenas Sotil

Doutor em Matemática - UNIFAP



---

Erasmo Senger

Doutor em Modelagem Computacional - UNIFAP

*A minha mãe Lucicléia Figueiredo Leite, que tanto acreditou no meu potencial, ao meu pai Oziel Vaz Leite, a minha avó Enerina Nascimento Figueiredo (in memoriam) e ao meu Tio Clodoaldo (in memoriam) que com certeza estão transbordando de alegria com essa minha conquista. A minha companheira Ângela Maria Chaves Miranda e os meus filhos Rodrigo Francklin, Isabele Miranda e Stefany Eloise, amo vocês.*

## Resumo

Esta pesquisa se deu a partir da necessidade de tornar a aprendizagem da matemática mais significativa e interessante para o terceiro ano do ensino modular de uma comunidade ribeirinha. Um público carente que enfrenta dificuldades para o acesso à instituição além de uma rotina cansativa após a aula e que o desestimula a gostar de aprender. Assim se propôs um ensino mais crítico e contextualizado, a partir de conceitos etnomatemáticos que vislumbra tendências de um saber mais crítico que valorize o conhecimento empírico do educando, revelando que a disciplina não é tão distante de sua realidade e que pode ser melhor compreendida se relacionarmos ao contexto. Seguindo estes pressupostos teóricos iniciou-se uma análise da maré, estudando conceitos matemáticos de trigonometria, especificamente função seno e cosseno, estabelecendo um estudo prático da disciplina, assim como aproveitando o conhecimento empírico dos discentes que convivem diariamente com a variação da maré e já tem noção de como ela se dá. A metodologia utilizada foi a qualitativa, inicialmente por meio de discussões com o público sobre os níveis da maré, estudo das funções seno e cosseno para posteriormente relacioná-la à variação da maré e a tábua da maré prevista pela marinha no site. Foi possível perceber através deste que houve uma integração maior da turma com a disciplina e que a percepção de que a realidade e a teoria estão vinculadas e fazem parte do cotidiano fez com que estes se sentissem mais confiantes na aprendizagem e valorizados quanto aos seus conhecimentos prévios.

**PALAVRAS-CHAVE:** etnomatemática, matemática, ensino, funções trigonométricas, maré.

## Abstract

This research was based on the need to make math learning more meaningful and interesting for the third year of the modular teaching of a riverine community. A needy public who faces difficulties accessing the institution beyond a tiring routine after class and discourages them from enjoying learning. Thus, a more critical and contextualized teaching was proposed, based on ethnomathematical concepts that envisage tendencies of a more critical knowledge that values the empirical knowledge of the student, revealing that the discipline is not so far from its reality and that can be better understood if we relate Context. Following these theoretical assumptions, an analysis of the tide began, studying mathematical concepts of trigonometry, specifically sine and cosine functions, establishing a practical study of the discipline, as well as taking advantage of the empirical knowledge of the students who live daily with the tide variation and already have Notion of how it is given. The methodology used was qualitative, initially by means of discussions with the public on the levels of the tide, study of sine and cosine functions to later relate it to the variation of the tide and the table of the tide foreseen by the navy in the site. It was possible to perceive through this that there was a greater integration of the class with the discipline and that the perception that reality and theory are linked and part of daily life made them feel more confident in learning and valued as to their previous knowledge.

KEYWORDS: ethnomathematics, mathematics, teaching, trigonometric functions, tide.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por me dar força e saúde para superar as dificuldades para concluir este Mestrado em Matemática.

Agradeço aos meus amados pais, por terem me ensinado os valores para ser um homem de fé e cidadão de bem.

A minha esposa Ângela Miranda, e meus filhos Rodrigo, Isabele e Stefany pelo amor, carinho e apoio, vocês são os alicerces da minha vida.

Agradeço aos meus irmãos Erick e Ederson, e especial ao Ederson apesar de ser o caçula é um exemplo de profissional.

Aos meus tios e tias filhos da minha avó Enerina Figueiredo (in memoriam) que sempre colocaram meu nome em suas orações.

Aos meus amigos Juliano Bandeira, Paulo Smith e Jésus Márcio, pelo encorajamento e apoio para concluir essa etapa dos estudos.

Aos professores Dr. José Walter Cárdenas Sotil , Msc. Steve Wanderson Calheiros de Araujo, Dr. Erasmo Senger por compartilharem seus conhecimentos nas aulas do PROFMAT, e em especial ao meu orientador: Guzmán Eulalio Isla Chamilco desde a graduação em Licenciatura em Matemática me acompanha nessa jornada..

*”Ensinar não é transferir conhecimento,  
mas criar as possibilidades para a sua  
produção ou a sua construção”.*

*(Paulo Freire)*

## Lista de Tabelas

2.1	Pontos da função seno . . . . .	20
2.2	Pontos da função cosseno . . . . .	23
3.1	Tábua da maré - Porto de Santana . . . . .	45
3.2	Dados ajustados da previsão da maré - Porto de Santana . . . . .	46
3.3	Tábua da maré - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas . . . . .	53
3.4	Dados ajustados - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas . . . . .	54
3.5	Dados estimados da previsão da maré - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas . . . . .	57

## Lista de Figuras

2.1	Círculo trigonométrico . . . . .	18
2.2	Quadrantes do círculo trigonométrico . . . . .	19
2.3	Círculo trigonométrico seno . . . . .	19
2.4	Gráfico da função seno . . . . .	20
2.5	Gráfico com elementos da função seno . . . . .	20
2.6	Paridade da da função seno . . . . .	22
2.7	Círculo trigonométrico cosseno . . . . .	23
2.8	Gráfico da Função Cosseno . . . . .	23
2.9	Paridade da função cosseno . . . . .	25
2.10	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(0,5x)$ . . . . .	26
2.11	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(3x)$ . . . . .	27
2.12	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(-3x)$ . . . . .	27
2.13	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(-0,5x)$ . . . . .	28
2.14	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(x+4)$ . . . . .	28
2.15	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{sen}(x-4)$ . . . . .	29
2.16	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = 2\text{sen}(x)$ . . . . .	29
2.17	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = 0,5\text{sen}(x)$ . . . . .	30
2.18	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = -2\text{sen}(x)$ . . . . .	30
2.19	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = -0,5\text{sen}(x)$ . . . . .	31
2.20	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = 1 + \text{sen}(x)$ . . . . .	31
2.21	Gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = -1 + \text{sen}(x)$ . . . . .	32
2.22	Gráfico das funções $g(x) = \text{cos}(x)$ e $q(x) = \text{cos}(0,5x)$ . . . . .	33

2.23	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = \cos(3x)$ . . . . .	33
2.24	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = \cos(-3x)$ . . . . .	34
2.25	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = \cos(-0,5x)$ . . . . .	34
2.26	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = \cos(x+4)$ . . . . .	35
2.27	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = \cos(x-4)$ . . . . .	35
2.28	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = 2\cos(x)$ . . . . .	36
2.29	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = 0,5\cos(x)$ . . . . .	36
2.30	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = -2\cos(x)$ . . . . .	37
2.31	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = -0,5\cos(x)$ . . . . .	37
2.32	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = 1 + \cos(x)$ . . . . .	38
2.33	Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $q(x) = -1 + \cos(x)$ . . . . .	38
3.1	Localização da comunidade Foz do Rio Ajuruxi . . . . .	42
3.2	Foz do Rio Ajuruxi . . . . .	43
3.3	Tábua da maré . . . . .	45
3.4	Eixo cartesiano com os dados ajustado do Porto de Santana . . . . .	47
3.5	Gráfico da função seno na previsão da maré . . . . .	50
3.6	Gráfico da função cosseno na previsão da maré . . . . .	51
3.7	Medição da nível da Maré no dia 17 de maio de 2016 . . . . .	52
3.8	Eixo cartesiano (dados ajustado - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas)	54
3.9	Eixo cartesiano - marcação do ponto $M_C(36, 2,95)$ . . . . .	58
3.10	Medição do nível da maré as 12h do dia 18 de maio de 2016 . . . . .	59

# Sumário

<b>Lista de Tabelas</b>	<b>6</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>7</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2 ELEMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>13</b>
2.1 Etnomatemática . . . . .	13
2.2 Breve Histórico da Trigonometria . . . . .	16
2.3 Definição de Função . . . . .	17
2.3.1 Função Par . . . . .	17
2.3.2 Função Impar . . . . .	17
2.3.3 Função Periódica . . . . .	18
2.3.4 Funções Trigonométricas . . . . .	18
2.4 Função Seno . . . . .	19
2.4.1 Gráfico da Função Seno: . . . . .	20
2.4.2 Propriedades da Função Seno . . . . .	21
2.5 Função Cosseno . . . . .	23
2.5.1 Gráfico da Função Cosseno . . . . .	23
2.5.2 Propriedades da Função Cosseno . . . . .	24
2.6 Parâmetros . . . . .	25
2.6.1 Parâmetros na Função Seno . . . . .	26
2.6.2 Parâmetros na Função Cosseno . . . . .	32
2.7 Previsão da Maré . . . . .	39

<b>3</b>	<b>DELINEAMENTO DA PESQUISA</b>	<b>41</b>
3.1	Descrição do local: Rio Ajuruxi esquina com o Rio Amazonas . . . . .	41
3.2	Metodologia da pesquisa . . . . .	43
3.3	Desenvolvimento da pesquisa - 1ª parte . . . . .	44
3.3.1	Usando a função seno na previsão da maré . . . . .	47
3.3.2	Usando a função cosseno na previsão da maré . . . . .	50
3.4	Desenvolvimento da pesquisa - 2ª parte . . . . .	52
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>61</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Nós educadores criamos muitas expectativas à cerca da aprendizagem de nossos alunos, e assim também nos frustramos quando o objetivo não é alcançado da forma que planejamos. Embora muitos educadores busquem formas diferenciadas de aprendizagem, modifiquem suas metodologias e tentem ao máximo chegar a bons resultados, isso só será possível se aliarmos nossa prática diária a uma série de fatores que compreendem o processo de ensino aprendizagem.

Com as experiências de 20 anos de sala de aula, e destes 20, boa parte trabalhando a Matemática, passei a compreender que esta disciplina vai despertando interesse no aluno com o decorrer do tempo e que não há uma fórmula mágica pronta e acabada para prender a atenção do educando nas aulas diárias. A interação do aluno se dá dia após dia com a criação de novos métodos, experimentos, abordagens novas e isso tudo nos leva ao que realmente nos interessa, à aprendizagem.

Neste trabalho apresentarei uma pesquisa desenvolvida com alunos de uma turma de 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Osmundo Valente Barreto, 15 alunos de áreas ribeirinhas, uma vez que o ensino nesta comunidade é modular.

A pesquisa refere-se ao uso das funções seno e cosseno na descrição e na previsão do nível das marés.

O estudo deste tema se fez necessário a partir da percepção de que alunos de Ensino Médio demonstravam pouco conhecimento teórico sobre o assunto, apresentando dificuldades em entender os conceitos da Trigonometria e suas aplicações no cotidiano. Ainda que a oscilação do nível da maré seja algo presente na vida diária destes educandos, eles apresentaram certa dificuldade em relacionar o conceito visto em sala com suas práticas frequentes.

Então quando nosso aluno consegue explicar o fenômeno de variação no nível da maré, suas ações no meio em que eles se inserem, podemos perceber manifestação do saber empírico, isto é, fatos que se apoiam somente em experiências vividas, na observação dos fenômenos, e não em teorias e métodos científicos.

---

Por isso da importância de que os alunos percebam que teoria e prática se diferem, mas se completam sempre. Desta forma, para desenvolver minha pesquisa, usei como base a importância do estudo da Etnomatemática. Uma vez que esta valoriza a Matemática existente nos grupos culturais e os conceitos matemáticos informais desenvolvidos pelo indivíduo no dia a dia.

Para a Etnomatemática a construção do conhecimento da disciplina está relacionada à tradição, à sociedade e à cultura social em que se insere o educando. Isto é, trabalhar conceitos e fórmulas exige que façamos uma análise do mundo que cerca nossos alunos, dos saberes que eles nos trazem.

## 2 ELEMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Etnomatemática

Para compreender melhor a palavra etnomatemática, destaca-se a análise a partir do prefixo etno proveniente do termo etnia, ou seja, a cultura de um grupo social com linguagem, crenças e conhecimentos próprios e a diversidade cultural existente entre os povos os caracteriza como povos distintos. Assim cada etnia constrói sua etnociência, a partir de seu conhecimento de mundo e a construção deste ocorre de formas diferenciadas. Neste contexto, etno, portanto, é usado para tratar do sistema de conhecimentos e aspectos cognitivos específicos de uma cultura.

Nos anos 70 surgiram várias tendências educacionais a cerca da Etnomatemática, uma reação que Hamze (2017) afirma que contestavam a adoção de um currículo comum para a disciplina e questionavam a apresentação da matemática como conhecimento universal, um ponto de vista único detentor da razão. Isto porque viam a importância da Matemática Moderna valorizar o conhecimento que o aluno tem e adquirir por meio do convívio social, não desvalorizando o que ele já sabe.

Então toda reação contra o ensino formal da matemática iniciou após a segunda guerra mundial, onde muitos educadores principalmente a partir da crise enfrentada na década de 70 em que a matemática moderna imperava e não se preocupava em explicar ou explicar os conteúdos significativamente, mas reduzi-los a técnicas, regras e algoritmos, começaram a apresentar forte resistência ao ensino da disciplina como uma visão única, como um conhecimento universal ou verdade absoluta rejeitada.

Esta forma de encarar o ensino da disciplina considerando o contexto histórico não surgiu do nada, foram tendências influenciadas por educadores como Paulo Freire que viam no ensino uma forma libertadora, que destacavam a importância da humanização, um ensino mais significativo, que contribuísse para uma sociedade mais crítica e preparada para o mundo em que vive.

De acordo com D'Ambrosio (1997) apud Passos (2008) em 1976 no Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática ocorrido na cidade de Karlsruhe localizado na Alemanha o brasileiro Ubiratan D'Ambrosio expôs um programa que enfocava a crítica sociocultural da matemática ocidental pela primeira vez, e em outros eventos em que se discutiam estas tendências, dois anos depois, no Encontro Anual da Associação Americana para a Promoção da Ciência o pesquisador usou a definição etnomatemática.

Entretanto foi em 1984, na Austrália, no Congresso de Educação Matemática que enfatizou o fato da etnomatemática ter ampliado espaço na área do ensino e se efetivado enquanto abordagem necessária a melhor aplicação da disciplina no processo ensino-aprendizagem.

[...] uma tendência definitiva em direção aos interesses socioculturais na educação matemática. Questões sobre 'Matemática e Sociedade', 'Matemática para Todos', a crescente ênfase na 'História da Matemática e sua Pedagogia' [...] foram marcadas pela emergência da nova área da etnomatemática. (D'AMBROSIO, 2007b, p.176) apud (PASSOS, 2016, p.39)

Segundo Hamze (2017) a palavra etnomatemática inicialmente usada por Ubiratan D'Ambrosio e abordada em 1985 na sua obra "Etnomathematics and its Place in the History of Mathematics", defini o termo como parte importante da História da Matemática. D'Ambrosio na obra definiu que "a etnomatemática é a arte ou técnica (techné = tica) de explicar, de entender, de se desempenhar na realidade (matemática), dentro de um contexto cultural próprio (etno)."

Em 1986, o Grupo Internacional de Estudo em Etnomatemática (IGSEm) de acordo com Hamze reuniu pesquisadores educacionais de todo o mundo que interessados nesta área do conhecimento e em formas de usar em sala de aula.

A etnomatemática, portanto, defende a corrente contrária a tendência da abordagem da matemática universal da cultura dominante, segundo esta a cultura do estudante influencia na aquisição do conhecimento e por isso não está desvinculada da cultura deste. De acordo com este princípio é necessário considerar a cultura e estabelecer planos de ensino que vá de encontro aos anseios do público a que se destina, uma abordagem social responsável e cidadã, que considera a função da matemática na história e política de uma sociedade.

Neste âmbito a etnomatemática valoriza a matemática existente nos grupos

culturais e os conceitos matemáticos informais desenvolvidos por estes no dia a dia. Para os etnomatemáticos a construção do conhecimento da disciplina está relacionada à tradição, à sociedade e à cultura social em que se insere o educando.

É importante destacar que a linguagem matemática está presente em múltiplas atividades, nos PCN (2016) destaca como, por exemplo: nas artes, na música, na arquitetura, na dança, nos esportes, na engenharia, na informática.

Ao longo da história a sociedade é representada pelos grupos que a formam, a valorização destes grupos e de seus conhecimentos é o reconhecimento de que toda resolução de problemas está vinculada ao social e cultural, por isso educadores da área matemática propõem a simplificação do ensino da disciplina a partir do social.

Existe uma diversidade de posicionamento acerca da Etnomatemática, pelo fator social se pode defini-la como etnociência, numa visão antropológica do termo. Outro posicionamento se refere ao estudo como pesquisa histórica da matemática pelo fato de se basear na evolução cultural, como se os grupos distintos estivessem passando por um estágio na área e que posteriormente estariam aptos a um estágio superior da matemática.

Neste sentido D'Ambrozio (1993) apud Passos (2008) caracteriza a etnomatemática como abordagens cognitiva, epistemológica, histórica e política, ou seja, a matemática e a sua forma de abordagem na área do ensino passou a considerar que todo conhecimento sofre influência do meio em que se insere e vive-versa. A perspectiva de uma matemática crítica que se transforma e evolui historicamente.

Segundo Passos (2016) destacam que a mudança de visão matemática foi uma tendência influenciada pelas mudanças de paradigmas educacionais em prol de um ensino mais crítico, contextualizado, que valorizou as relações estabelecidas entre educador e educando. Inclusive Passos ressalta posicionamentos do educador Paulo Freire quanto a necessidade de um ensino crítico construído através do diálogo.

Assim, o ensino da matemática partiu de uma necessidade histórica, uma realidade educacional pertinente e condizente com o contexto em que nos inserimos e não se pode ignorar as tendências e necessidades mundiais, alienando-se numa forma de ensino ultrapassada, que não atende aos anseios da comunidade, mas essencialmente à um ensino promissor, que englobe os princípios de um ensino mais crítico e significativo, que prepare o discente para o mundo em que se insere.

## 2.2 Breve Histórico da Trigonometria

A origem da trigonometria está diretamente relacionada à astronomia, uma vez que as necessidades humanas contribuíram significativamente para a busca de meios de produção agrícola. Para produzir alimento, tornou-se necessário o conhecimento dos astros, das estações do ano, do movimento da Terra, e foi exatamente nesse momento que a matemática demonstrou suas contribuições. A matemática é uma ciência que busca modelar a realidade em fórmulas, estruturas e padrões, graças a essa ciência conseguimos transcrever a realidade numericamente e geometricamente.

Boyer (1996) salienta que a origem da trigonometria é um tanto imprecisa. Os babilônios e os egípcios já estudavam e utilizavam a **trigonometria** na Antiguidade, mas foi no período helênico que o estudo relacionado a essa área das ciências exatas ganhou maior notoriedade. Esses estudos foram motivados em razão da necessidade de se ter um maior rigor relacionado ao conceito da medida de ângulo.

Na Grécia, *Hipócrates* e *Eudoxo* foram personalidades importantes que estudaram conceitos relacionados à medição de ângulo. *Hipócrates*, que foi considerado o pai da **Trigonometria**, foi o responsável pelos estudos relacionados às propriedades das cordas envolvendo os ângulos inscritos em círculos, ele também criou o que podemos considerar como a primeira tabela trigonométrica.

Uma característica das funções trigonométricas é sua periodicidade, sua aplicação descrever fenômenos de natureza. Suas aplicações se estenderam principalmente a partir dos estudos de Joseph Fourier

A importância das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier em 1822 de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é uma soma (finita e infinita) de funções do tipo  $a \cos nx + b \sin nx$ . Para que se tenha a ideia de relevância desse fato de que deu origem a chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo no banco de dados da revista *Mathematical Reviews*, o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos 50 anos é o de Fourier (LIMA et al, 2012, p. 214).

## 2.3 Definição de Função

Segundo Giovanni (1992), Iezzi (1977,2007) e Guidorizzi (2002) descrevem as seguintes definições sobre funções.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos quaisquer, uma função é uma relação  $f : X \rightarrow Y$  que, a cada elemento  $x \in X$ , associa um e somente um elemento  $y \in Y$ .

(i) O conjunto  $X$  é chamado de domínio de  $f$ ,

(ii) O conjunto  $Y$  é chamado de contradomínio de  $f$ ,

(iii) O conjunto  $f(X) = \{y \in Y ; \exists x \in X, f(x) = y\} \subset Y$  é chamado conjunto imagem de  $f$ ;

(iv) Dado  $x \in X$ , o (único) elemento  $y = f(x) \in Y$  correspondente é chamado imagem de  $x$ .

### 2.3.1 Função Par

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é denominada Função Par se, e somente se,  $f(-x) = f(x)$ , isto é, atribuindo valores simétricos à variável  $x$ , obtemos os mesmo valor para a função  $f(x)$ .

Exemplo. Considere a função quadrática  $f(x) = x^2 + 1$ .

$$\text{Note que, } f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x).$$

Portanto, essa função é uma Função Par.

### 2.3.2 Função Ímpar

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é denominada Função Ímpar se, e somente se,  $f(-x) = -f(x)$ , isto é, atribuindo valores simétricos à variável  $x$ , obtemos valores simétricos a função  $f(x)$ .

Exemplo. Considere a função  $f(x) = 2x$ .

$$\text{Note que } f(-x) = 2(-x) = -(2x) = -f(x).$$

Portanto, essa função é uma Função Ímpar.

### 2.3.3 Função Periódica

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se periódica quando existe um número  $T > 0$  tal que  $f(t + T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se isto ocorre, então  $f(t + kT) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ . O menor número  $T > 0$ , tal que  $f(t + T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  chama-se o período da função  $f$ .

### 2.3.4 Funções Trigonômicas

As funções  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$E(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

ou seja,

$$x = \cos \alpha \quad \text{e} \quad y = \sin \alpha$$

são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto  $E(\alpha)$  da circunferência de raio igual a 1. Veja Figura 2.1.

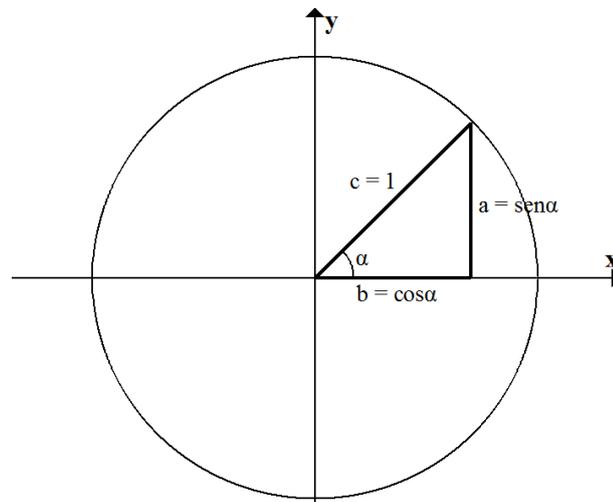


Figura 2.1: Círculo trigonométrico

*Fonte: Autor construído no Graph*

Como a hipotenusa do triângulo representado tem o comprimento  $c = 1$ , então por definição é imediato concluir que para um ângulo entre  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$  radianos.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a \text{ e}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$$

Isto é, o comprimento  $a$  e  $b$  dos catetos, representam os valores das funções Seno e Cosseno do ângulo  $\alpha$ . O círculo trigonométrico é dividido em quadrantes apresentados na Figura 2.2.

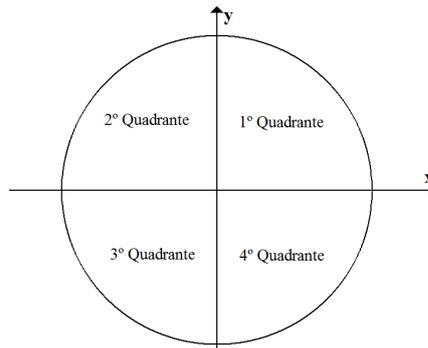


Figura 2.2: Quadrantes do círculo trigonométrico

*Fonte: Autor construído no Graph*

## 2.4 Função Seno

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada número real  $x$ , denomina-se Função Seno, o número real  $\overline{OP_1} = \operatorname{sen} x$ , isto é  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , veja Figura 2.3.

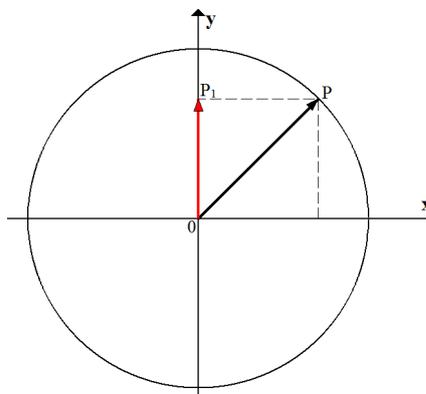


Figura 2.3: Círculo trigonométrico seno

*Fonte: Autor construído no Graph*

### 2.4.1 Gráfico da Função Seno:

Para construir o gráfico da função seno atribuímos valores para  $x$  (vê tabela 2.1).

Tabela 2.1: Pontos da função seno

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \text{sen}x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Agora marcamos no eixo cartesiano os pontos conforme Figura 2.4.

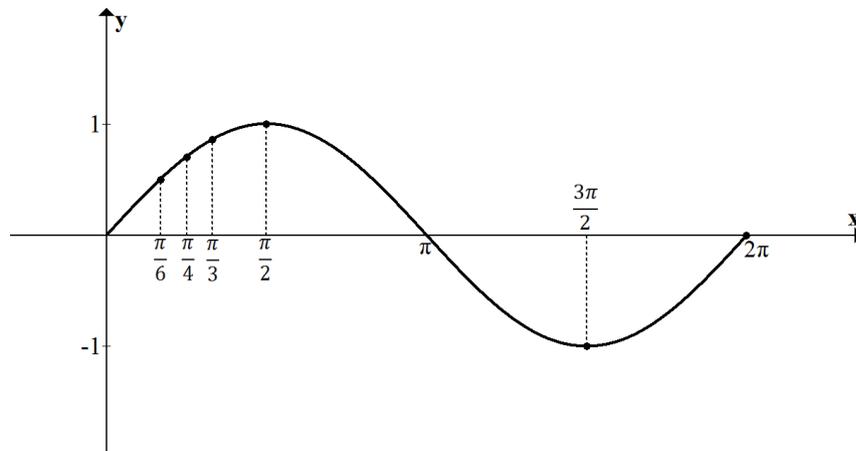


Figura 2.4: Gráfico da função seno

*Fonte: Autor construído no Graph*

Observe na Figura 2.5 os elementos Amplitude, Comprimento e Período da função seno.

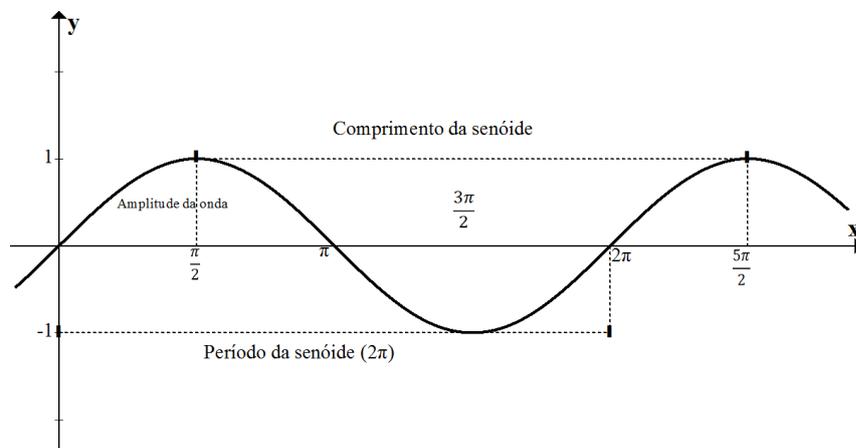


Figura 2.5: Gráfico com elementos da função seno

*Fonte: Autor construído no Graph*

### 2.4.2 Propriedades da Função Seno

#### i) Imagem:

Sendo o círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário, o conjunto imagem da função seno está no intervalo  $[-1, 1]$ , isto é,  $I = \{y \text{ em } \mathbb{R} : -1 \leq \text{sen} \leq 1\}$

#### ii) Amplitude:

Como  $f(x) = \text{sen } x$  é uma função circular e sua imagem situa-se em um intervalo fechado, pode-se definir a amplitude da mesma pela relação:

$$\frac{f(x)_{max} - f(x)_{min}}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

#### iii) Estudo do Sinal:

a) Se  $x$  está no 1º ou no 2º quadrante, então  $P$  estará acima do eixo das abscissas, sendo assim, de ordenada positiva, ou seja,  $f(x) = \text{sen } x$  é positivo;

b) Se  $x$  está no 3º ou no 4º quadrante, então  $P$  estará abaixo do eixo das abscissas, sendo assim, de ordenada negativa, ou seja,  $f(x) = \text{sen } x$  é negativo;

c) e nula quando  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

ou seja,

$$f(x) = \text{sen } x \begin{cases} > 0, \text{ se } 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ = 0, \text{ se } x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ < 0, \text{ se } \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

#### iv) Domínio:

A função seno está definida para todos os valores reais, sendo assim  $D(\text{sen}) = \mathbb{R}$ .

#### v) Periodicidade:

A função é periódica de período  $2\pi$ . *Paradoxem Reparatodok*  $\in \mathbb{Z}$ :

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 4\pi) = \dots = \text{sen}(x + 2k\pi)$$

**vi) Monotonicidade:**

a) No 1º e 4º quadrantes,  $\text{sen } x$  será crescente. No 1º quadrante, a medida que deslocamos  $x$  de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , a ordenada se desloca de 0 (origem) até 1. No 4º quadrante, a medida que  $x$  se desloca de  $\frac{3\pi}{2}$  a  $2\pi$ , a ordenada desloca de  $-1$  até 0 (origem);

b) No 2º e 3º quadrantes,  $\text{sen } x$  será decrescente. No 2º quadrante, a medida que deslocamos  $x$  de  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$ , a ordenada se desloca de 1 até 0 (origem). No 3º quadrante, a medida que  $x$  se desloca de  $\pi$  a  $\frac{3\pi}{2}$ , a ordenada se desloca de 0 (origem) até  $-1$ ;

**vii) Limitação:**

O gráfico de  $y = \text{sen}(x)$  está inteiramente contido na faixa do plano situada entre as retas horizontais  $y=-1$  e  $y=1$ . Para todo  $x$  real temos:

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$$

**viii) Paridade:**

A função seno é ímpar conforme Figura 2.6, pois para todo  $x$  real, tem-se que:

$$\text{sen } (-x) = -\text{sen}(x)$$

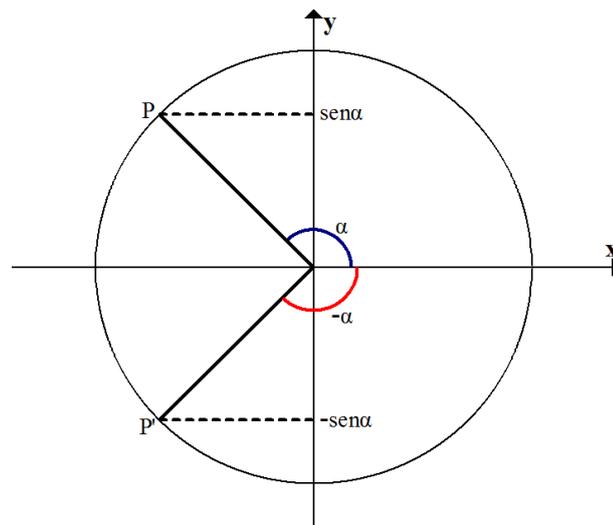


Figura 2.6: Paridade da da função seno

*Fonte: Autor construído no Graph*

## 2.5 Função Cosseno

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada número real  $x$ , denomina-se Função Cosseno o número real  $\overline{OP_2} = \cos x$ , isto é  $f(x) = \cos x$ . Veja Figura 2.7.

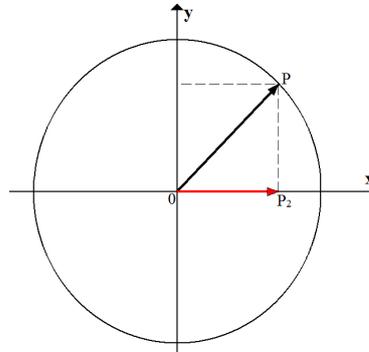


Figura 2.7: Círculo trigonométrico cosseno

*Fonte: Autor construído no Graph*

### 2.5.1 Gráfico da Função Cosseno

Para construir o gráfico da função cosseno atribuímos valores para  $x$ . veja Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Pontos da função cosseno

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Agora marcamos no eixo cartesiano os pontos conforme Figura 2.8.

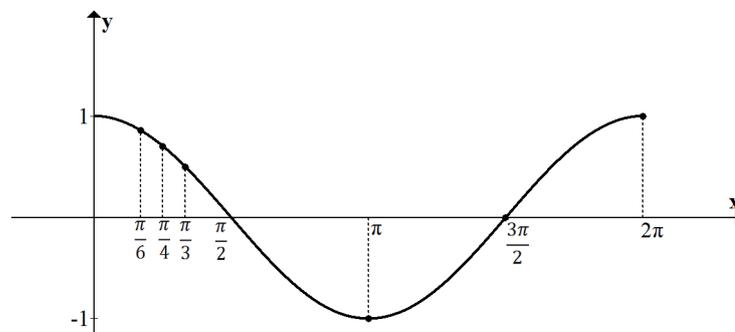


Figura 2.8: Gráfico da Função Cosseno

*Fonte: Autor construído no Graph*

## 2.5.2 Propriedades da Função Cosseno

### i) Imagem:

Sendo o círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário, o conjunto imagem da função cosseno está no intervalo  $[-1, 1]$ , isto é,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ;

### ii) Amplitude:

Como  $f(x) = \cos x$  é uma função circular e sua imagem situa-se em um intervalo fechado, pode-se definir a amplitude da mesma pela relação:

$$\frac{f(x)_{max} - f(x)_{min}}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

### iii) Estudo do Sinal:

a) Se  $x$  está no 1º ou no 4º quadrante,  $P$  estará projetado na parte positiva do eixo das abscissas. Dessa forma,  $\cos x$  será positivo;

b) Se  $x$  está no 2º ou no 3º quadrante,  $P$  estará projetado na parte negativa do eixo das abscissas. Dessa forma  $\cos x$  será negativo;

c) É nula quando e nula quando  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

ou seja,

$$f(x) = \cos x \begin{cases} > 0, & \text{se } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ = 0, & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ < 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

### iv) Domínio:

A função cosseno está definida para todos os valores reais, assim  $D(\cos) = \mathbb{R}$ .

### v) Periodicidade:

A função é periódica de período  $2\pi$ . Para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$  e para todo  $k$  em  $\mathbb{Z}$ :

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$$

### vi) Monotonicidade:

a) No 3º e 4º quadrantes,  $\cos x$  será crescente, ou seja, no 3º quadrante, a medida que deslocamos  $x$  de  $\pi$  a  $\frac{3\pi}{2}$ , a abscissa se desloca de  $-1$  até  $0$  (origem), e no 4º quadrante, a medida que deslocamos  $x$  de  $\frac{3\pi}{2}$  a  $0$ , a abscissa se desloca de  $0$  (origem) até  $1$ .

b) No 1º e 2º quadrantes,  $\cos x$  será decrescente. Ou seja, no 1º quadrante, a medida que deslocamos  $x$  de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , a abscissa se desloca de 1 até 0 (origem), e no 2º quadrante, a medida que deslocamos  $x$  de  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$ , a abscissa se desloca de 0 (origem) até  $-1$ .

### vii) Limitação:

O gráfico de  $y = \cos(x)$  está inteiramente contido na faixa do plano situada entre as retas horizontais  $y = -1$  e  $y = 1$ . Para todo  $x$  real temos:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

### viii) Paridade:

A função cosseno é par, pois para todo  $x$  real, tem-se que:  $\cos(-x) = \cos(x)$ , observe a Figura 2.9.

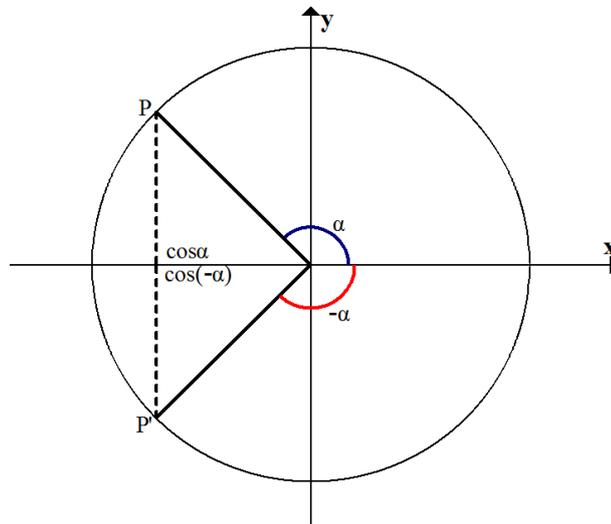


Figura 2.9: Paridade da função cosseno

*Fonte: Autor construído no Graph*

## 2.6 Parâmetros

Podemos acrescentar os parâmetros  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  numa função de tal:

$$h(x) = d + c \operatorname{sen}(ax + b) \quad \text{ou} \quad g(x) = d + c \operatorname{cos}(ax + b)$$

São elementos importantes e nos permite avaliar e compreender as alterações das funções seno ou cosseno.

### 2.6.1 Parâmetros na Função Seno

Seja a função seno  $f(x) = \text{sen}(x)$  na sua forma básica. Podemos acrescentar os parâmetros  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  nessa função de tal modo que ela que na forma:

$$h(x) = d + c \text{sen}(ax + b)$$

Os parâmetros colocados na função trigonométrica provocarão mudanças no gráfico  $f(x)$

#### Parâmetro $a$

Este coeficiente ocasiona alterações no Período  $T$  da função trigonométrica e reflexões horizontais no gráfico.

$$h(x) = \text{sen}(ax)$$

Assim temos:

- Se  $0 < a < 1$ , temos aumento do período da função, ou seja, uma dilatação horizontal. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(0,5x)$ , o comportamento é observado na Figura 2.10.

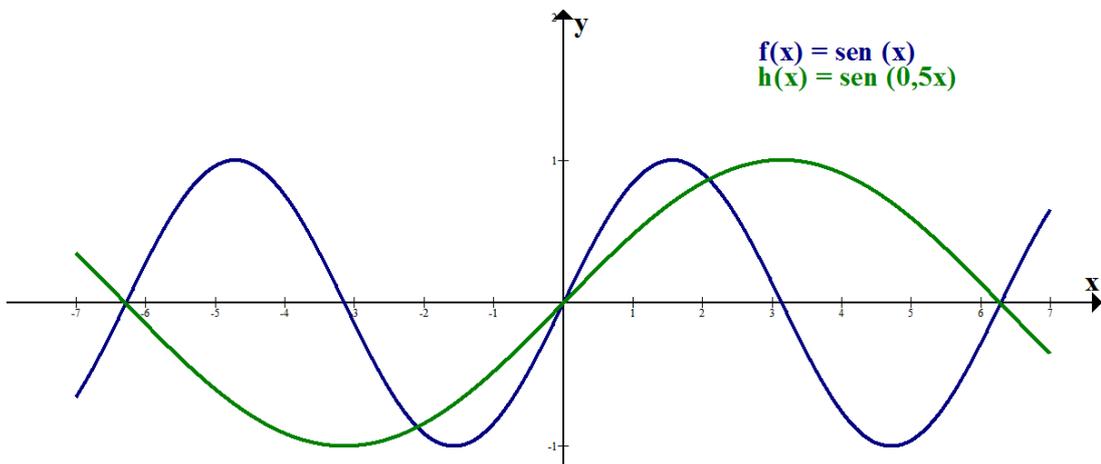


Figura 2.10: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(0,5x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $a > 1$ , temos a diminuição do período da função, ou seja, uma compressão horizontal. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(3x)$ , o comportamento é observado na Figura 2.11.

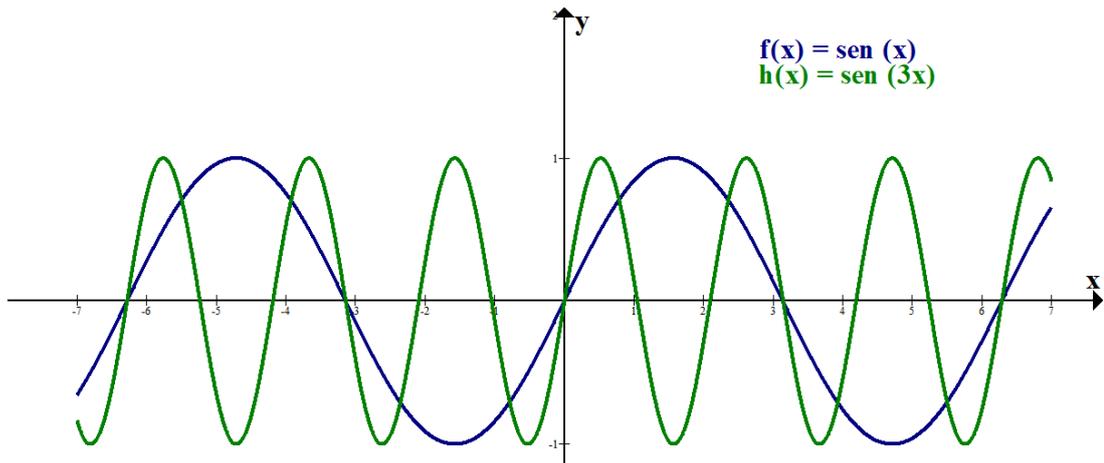


Figura 2.11: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(3x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $a < -1$ , temos a diminuição do período da função juntamente com reflexão em relação ao eixo vertical. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(-3x)$ , observamos seu comportamento na Figura 2.12.

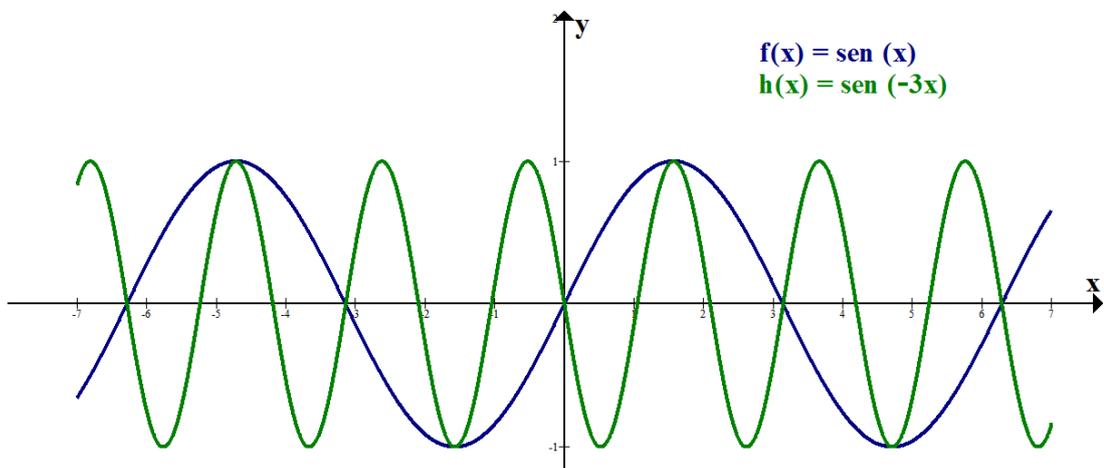


Figura 2.12: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(-3x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $-1 < a < 0$ , temos aumento do período da função juntamente com a reflexão em relação ao eixo vertical. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(-0,5x)$ , seu comportamento observamos na Figura 2.13.

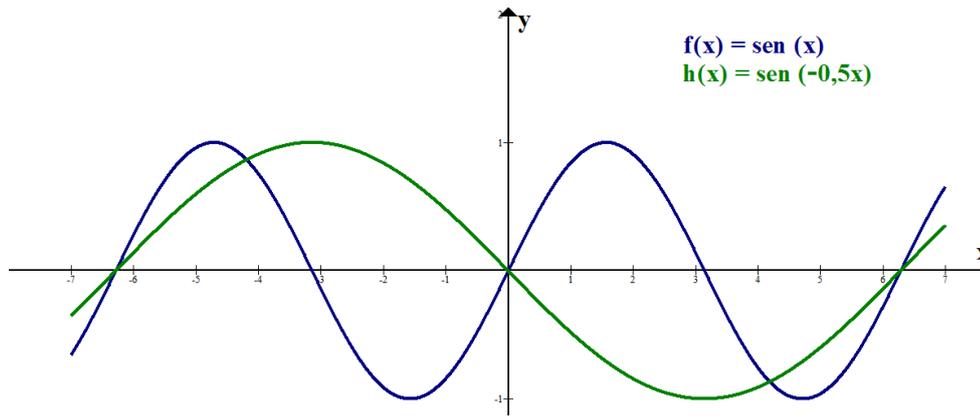


Figura 2.13: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(-0,5x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

### Parâmetro $b$

Coefficiente responsável pelo deslocamento horizontal nos gráficos das funções em  $b$  unidades.

$$h(x) = \text{sen}(x + b)$$

- Se  $b > 0$ , temos um deslocamento horizontal para a esquerda, ou seja, o gráfico se deslocará no sentido negativo do eixo das abscissas ( $x$ ). Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(x+4)$ , o comportamento é observado na Figura 2.14.

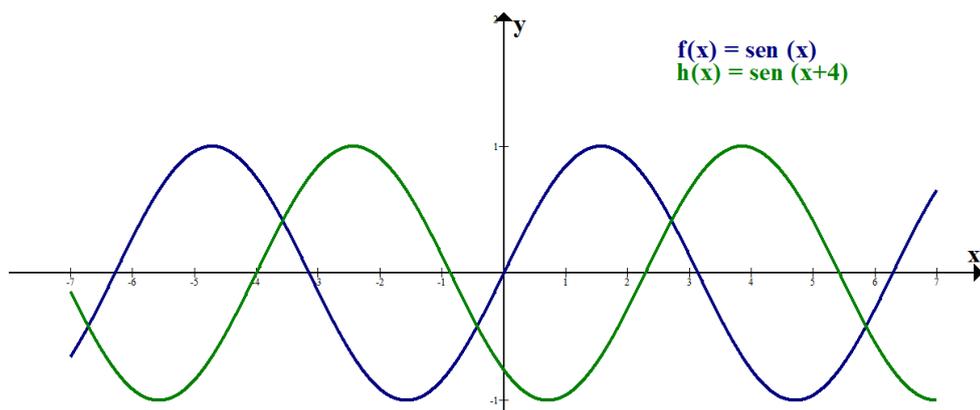


Figura 2.14: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(x+4)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $b < 0$ , temos um deslocamento horizontal para a direita, ou seja, o gráfico se deslocará no sentido positivo do eixo das abscissas ( $x$ ). Exemplo: Seja  $\text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(x-4)$ , observamos o comportamento na Figura 2.15.

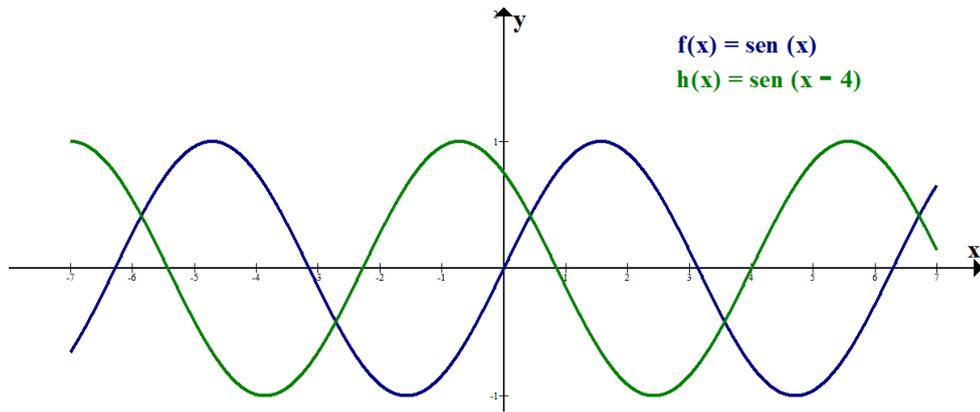


Figura 2.15: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = \text{sen}(x - 4)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

### Parâmetro $c$

Este coeficiente ocasiona alterações na amplitude da função trigonométrica e reflexões horizontais.

$$h(x) = c \text{ sen } x$$

- Se  $c > 1$ , temos um esticamento vertical da função, ou seja, uma dilatação eixo das ordenadas no gráfico. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = 2\text{sen}(x)$ , o comportamento é observado na Figura 2.16.

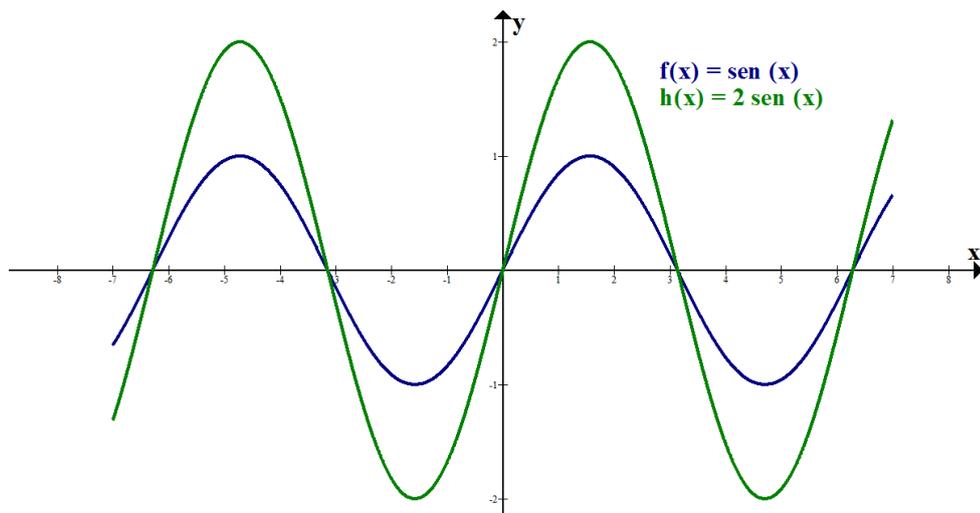


Figura 2.16: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = 2\text{sen}(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $1 < c < 0$ , temos um encolhimento vertical da função, ou seja, uma compressão eixo das ordenadas no gráfico. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = 0,5\text{sen}(x)$ , observamos seu comportamento na Figura 2.17.

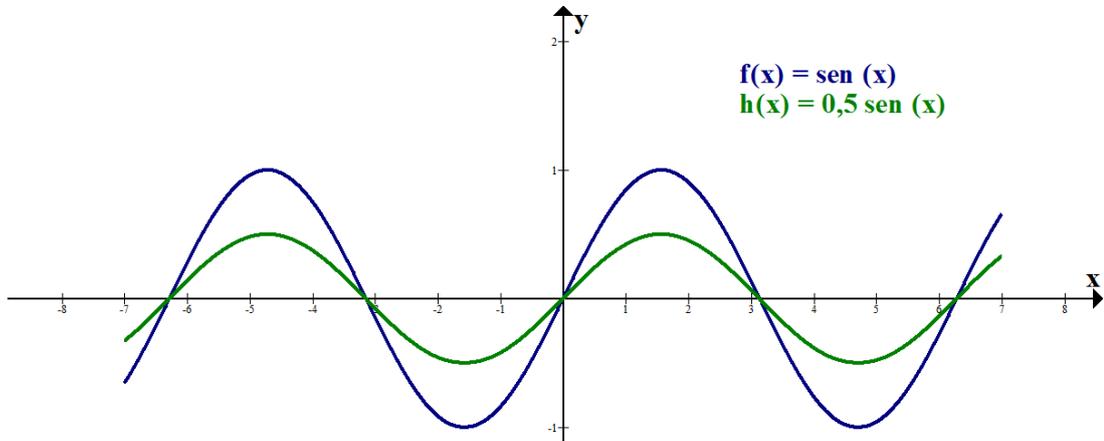


Figura 2.17: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = 0,5\text{sen}(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $c < -1$ , temos o esticamento vertical com a reflexão em relação ao eixo horizontal. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = -2\text{sen}(x)$ , observamos seu comportamento na Figura 2.18.

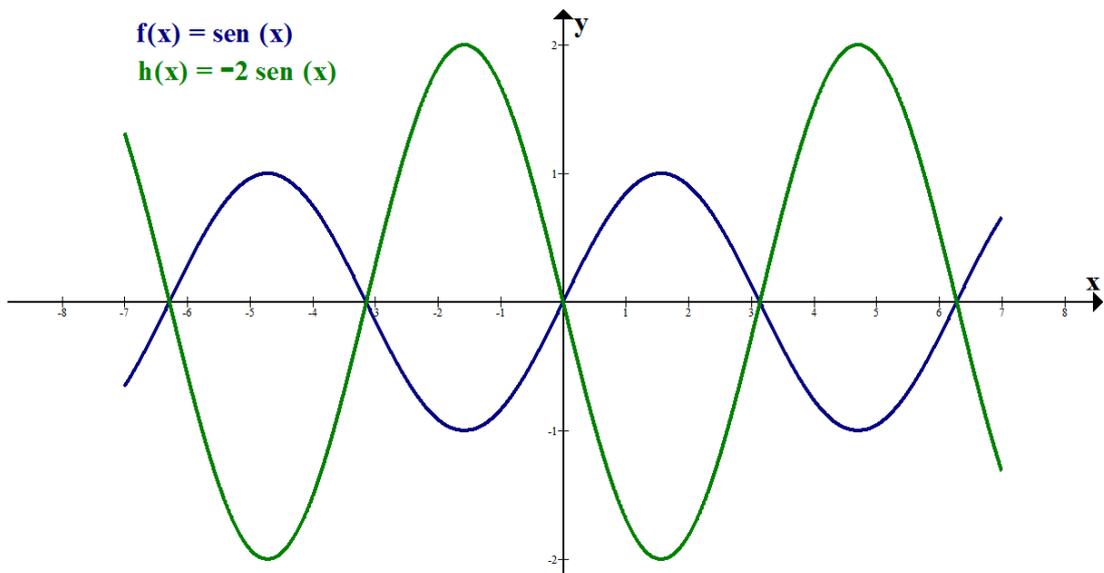


Figura 2.18: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = -2\text{sen}(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $-1 < c < 0$ , temos o encolhimento vertical com a reflexão em relação ao eixo horizontal. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = -0,5\text{sen}(x)$ , observamos seu comportamento na Figura 2.19.

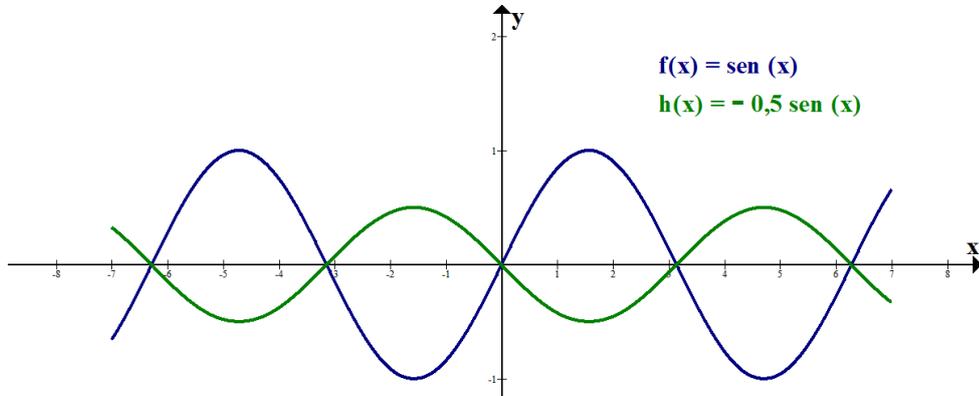


Figura 2.19: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = -0,5\text{sen}(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

### Parâmetro $d$

Coefficiente é responsável pelo deslocamento vertical do gráfico

$$h(x) = d + \text{sen } x$$

- Se  $d > 0$ , temos o deslocará para cima no eixo vertical, ou seja, no sentido positivo do eixo y. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = 1 + \text{sen}(x)$ , observamos seu comportamento na Figura 2.20.

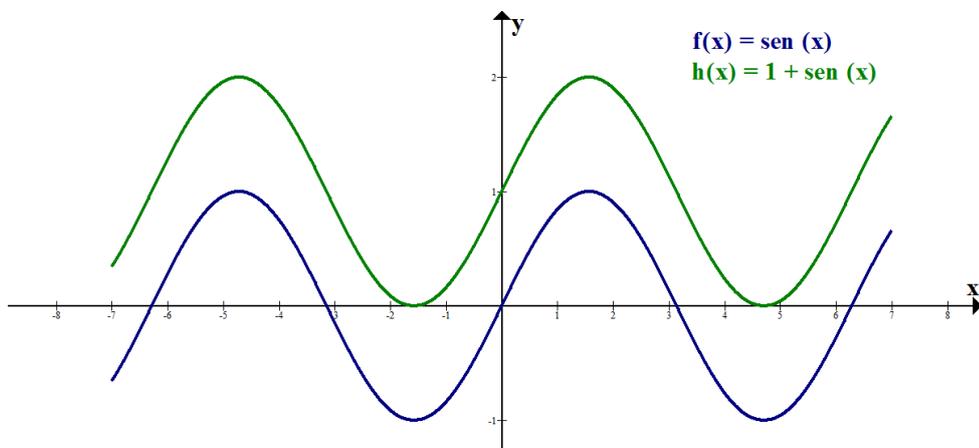


Figura 2.20: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = 1 + \text{sen}(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $d < 0$ , temos o deslocará para baixo no eixo vertical, ou seja, no sentido negativo do eixo y. Exemplo: Seja  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = -1 + \text{sen}(x)$ , o comportamento observamos na Figura 2.21.

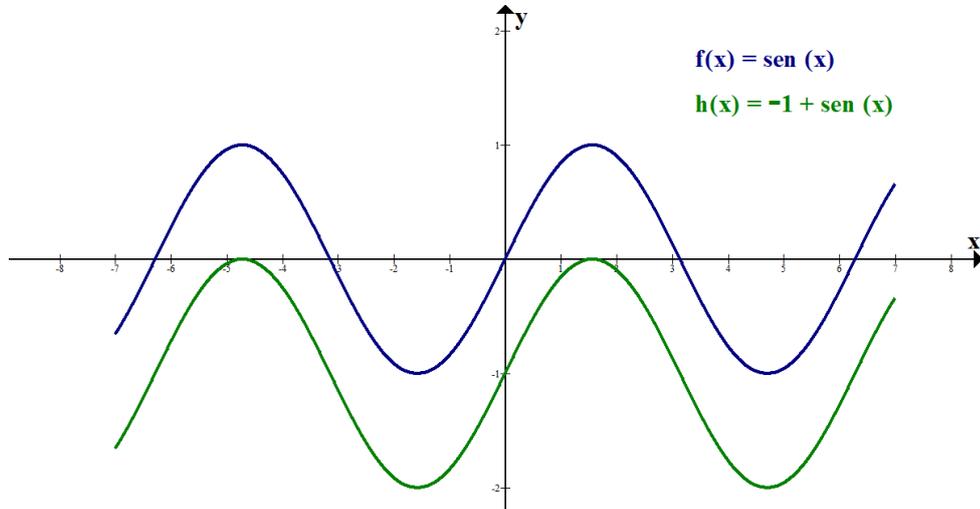


Figura 2.21: Gráfico das funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $h(x) = -1 + \text{sen}(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

### 2.6.2 Parâmetros na Função Cosseno

Sendo a função cosseno  $f(x) = \cos(x)$  na sua forma básica. Podemos acrescentar os parâmetros  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  nessa função de tal modo que ela que na forma:

$$g(x) = d + c \cos(ax + b)$$

Os parâmetros colocados na função trigonométrica provocarão mudanças no gráfico  $f(x)$

#### Parâmetro $a$

Coefficiente responsável pelas alterações no Período  $T$  da função trigonométrica e reflexões horizontais no gráfico.

$$g(x) = \cos(ax)$$

Assim temos:

- Se  $0 < a < 1$ , temos aumento do período da função, ou seja, uma dilatação horizontal. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(0,5x)$ , o comportamento observamos na Figura 2.22.

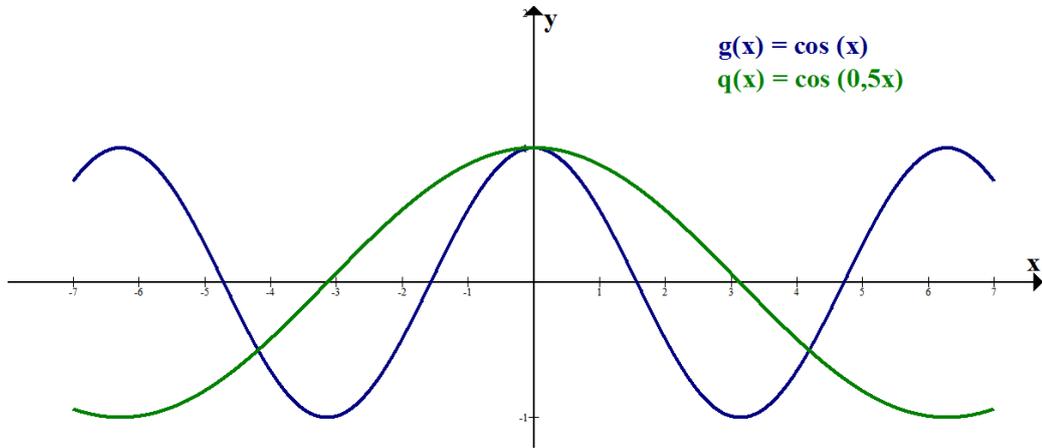


Figura 2.22: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(0,5x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $a > 1$ , temos a diminuição do período da função, ou seja, uma compressão horizontal. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(3x)$ , o comportamento observamos na Figura 2.23.

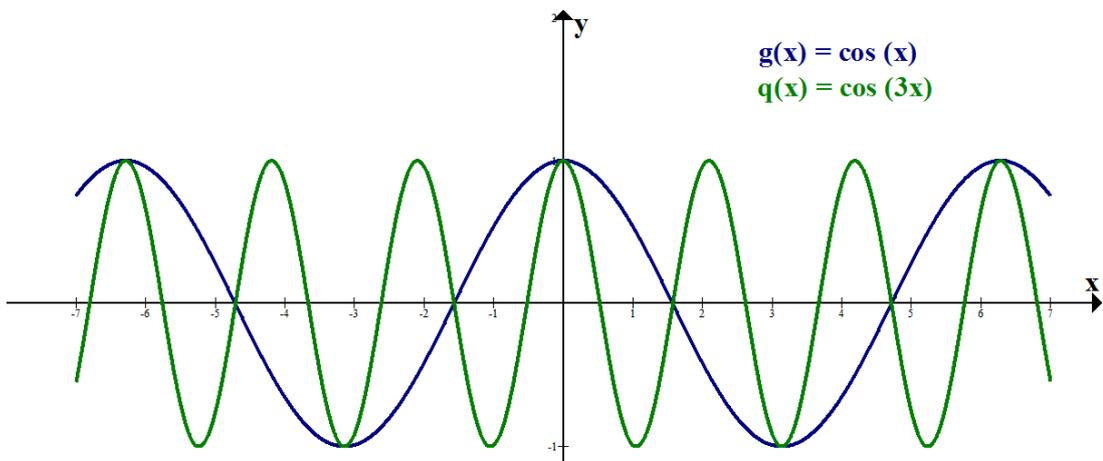


Figura 2.23: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(3x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $a < -1$ , temos a diminuição do período da função. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(-3x)$ , observamos o comportamento na Figura 2.24.

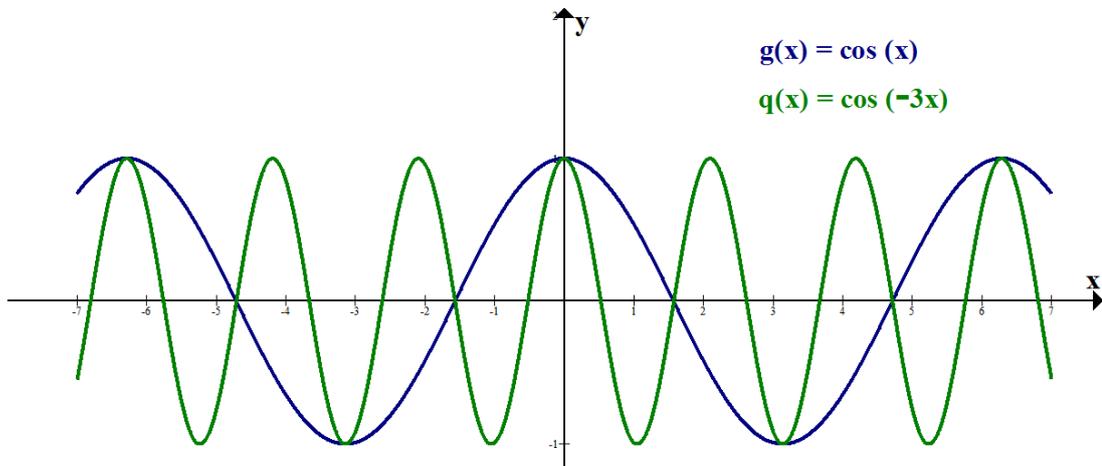


Figura 2.24: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(-3x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $-1 < a < 0$ , temos aumento do período da função. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(-0,5x)$ , observamos o comportamento na Figura 2.25.

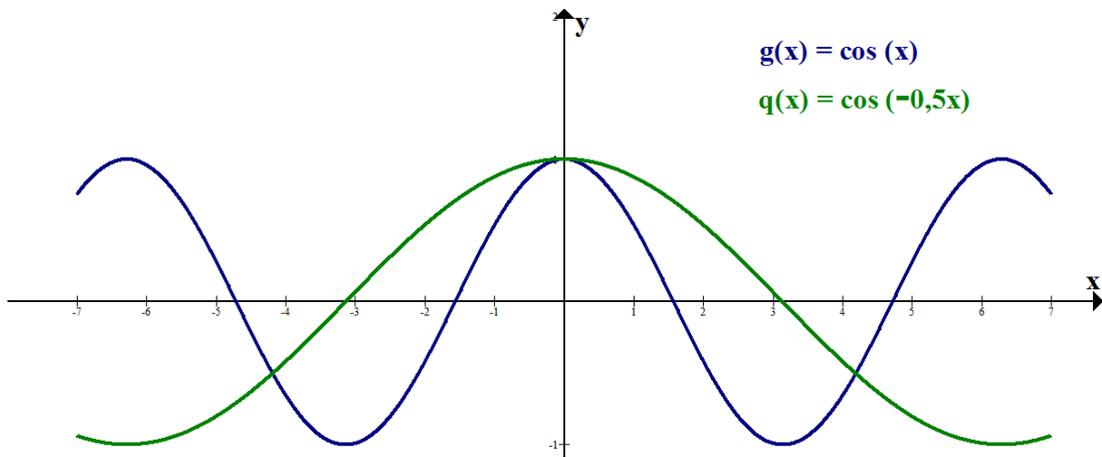


Figura 2.25: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(-0,5x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

### Parâmetro $b$

Este coeficiente é responsável pelo deslocamento horizontal nos gráficos das funções em  $b$  unidades

$$q(x) = \cos(x + b)$$

- Se  $b > 0$ , temos um deslocamento horizontal para a esquerda, ou seja, o gráfico se deslocará no sentido negativo do eixo das abscissas ( $x$ ). Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(x+4)$ , o comportamento observamos na Figura 2.26.

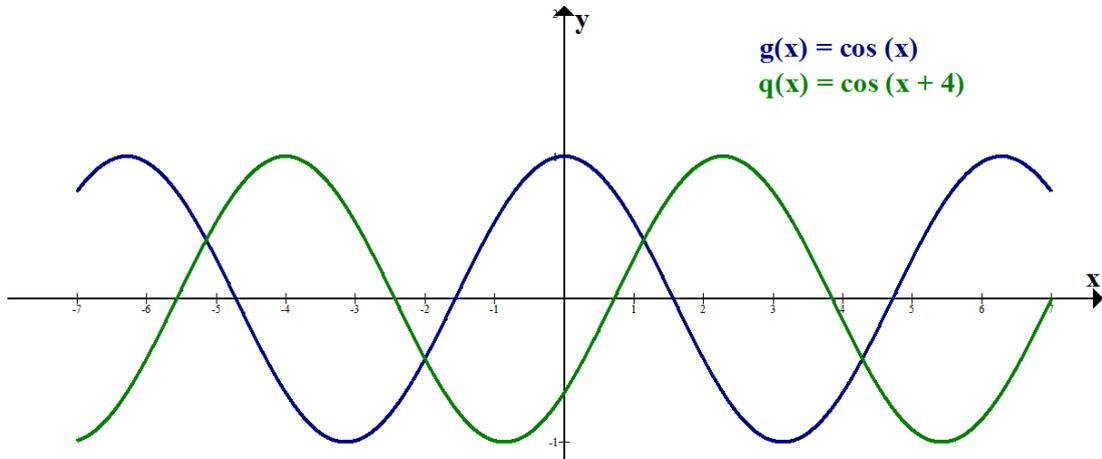


Figura 2.26: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(x+4)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $b < 0$ , temos um deslocamento horizontal para a direita, ou seja, o gráfico se deslocará no sentido positivo do eixo das abscissa ( $x$ ). Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(x-4)$ , o comportamento temos na Figura 2.27.

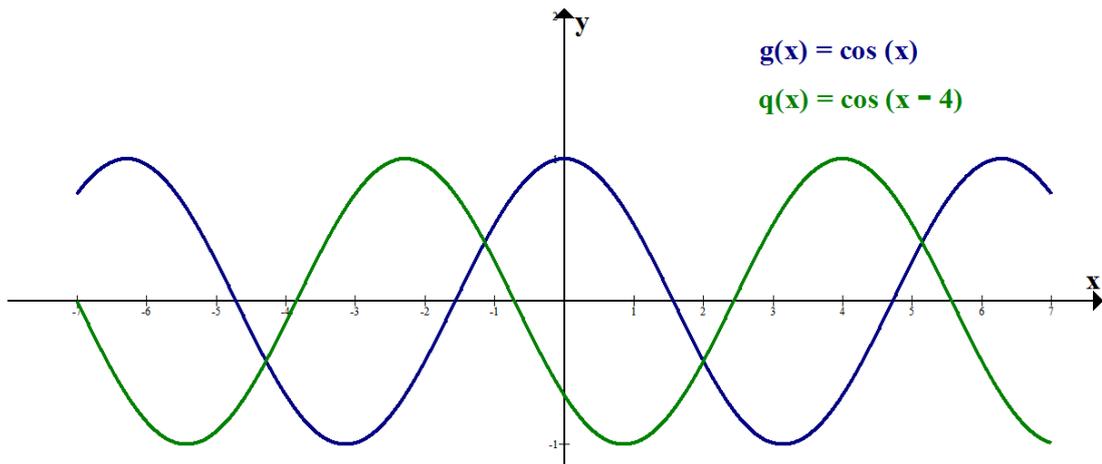


Figura 2.27: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = \cos(x-4)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

### Parâmetro $c$

Este coeficiente faz alterações amplitude da função trigonométrica e reflexões horizontais.

$$g(x) = c \cos x$$

- Se  $c > 1$ , temos um esticamento vertical da função, ou seja, uma dilatação eixo das ordenadas no gráfico. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = 2\cos(x)$ , o comportamento observamos na Figura 2.28.

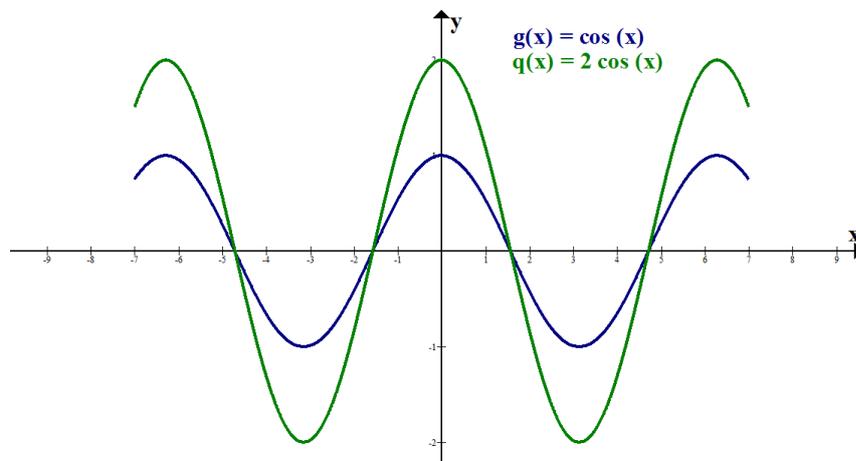


Figura 2.28: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = 2\cos(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $1 < c < 0$ , temos um encolhimento vertical da função, ou seja, uma compressão eixo das ordenadas no gráfico. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = 0,5\cos(x)$ , o comportamento observamos na Figura 2.29.

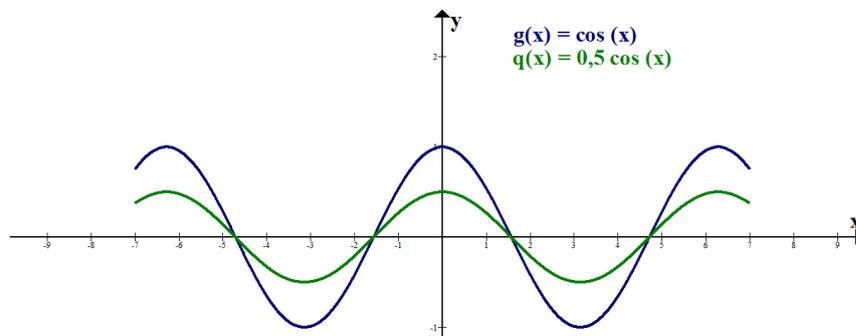


Figura 2.29: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = 0,5\cos(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $c < -1$ , temos o esticamento vertical com a reflexão em relação ao eixo horizontal. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = -2\cos(x)$ , observamos o comportamento na Figura 2.30.

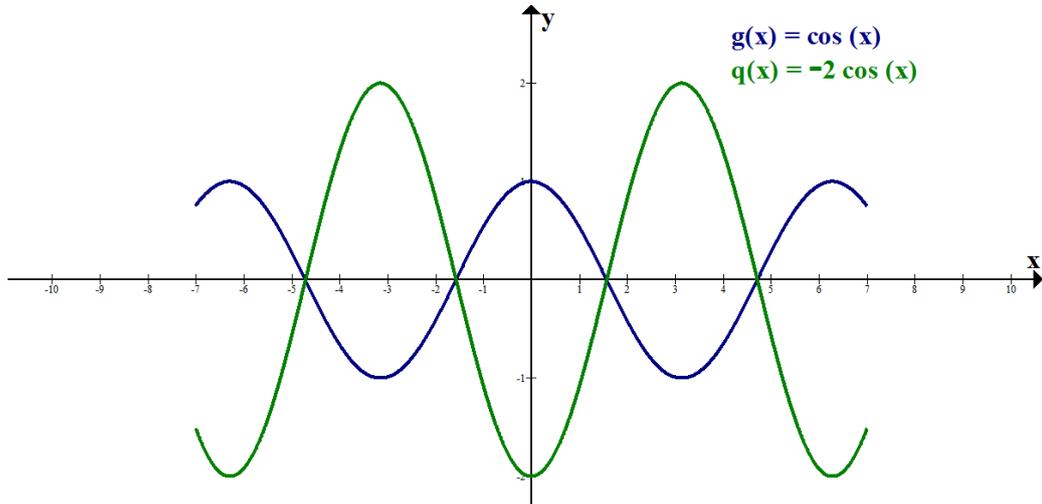


Figura 2.30: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = -2\cos(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $-1 < a < 0$ , temos o encolhimento vertical com a reflexão em relação ao eixo horizontal. Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = -0,5\cos(x)$ , observamos o comportamento na Figura 2.31.

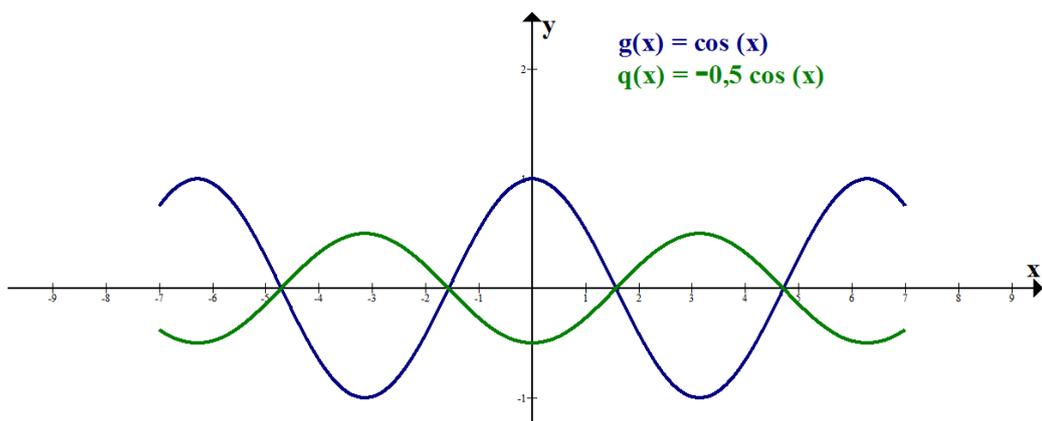


Figura 2.31: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = -0,5\cos(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

**Parâmetro  $d$** 

Este coeficiente é responsável pelo deslocamento vertical do gráfico

$$g(x) = d + \cos x$$

- Se  $d > 0$ , temos o deslocará para cima no eixo vertical, ou seja, no sentido positivo do eixo  $y$ . Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = 1 + \cos(x)$ , observamos o comportamento na Figura 2.32.

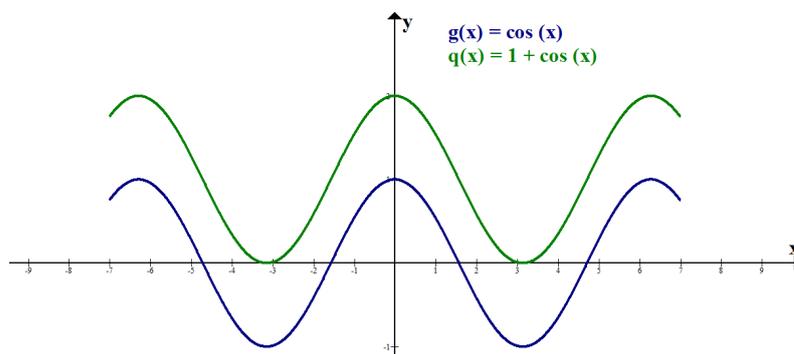


Figura 2.32: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = 1 + \cos(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

- Se  $d < 1$ , temos o deslocará para baixo no eixo vertical, ou seja, no sentido negativo do eixo  $y$ . Exemplo: Seja  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = -1 + \cos(x)$ , o comportamento observamos na Figura 2.33.

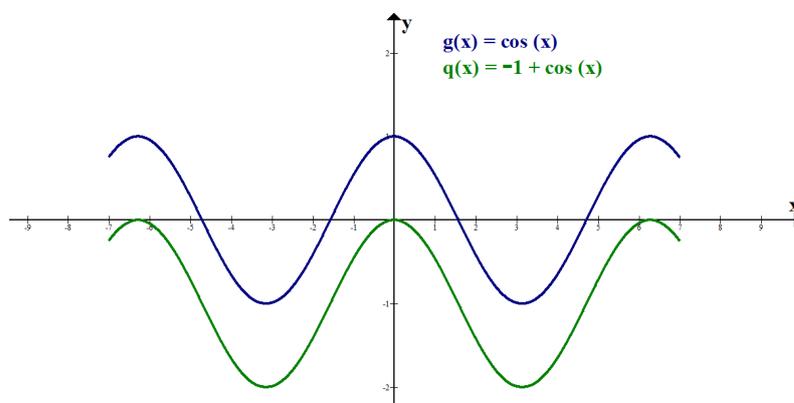


Figura 2.33: Gráfico das funções  $g(x) = \cos(x)$  e  $q(x) = -1 + \cos(x)$

*Fonte: Autor construído no Graph*

## 2.7 Previsão da Maré

Através da Lei da gravitação Universal de Newton (MIGUENS, 1996), a qual definiu que a atração das matérias se dá por meio da razão direta de suas massas e da razão inversa do quadrado da distância que as separa. Ou seja, da Lua e do Sol com maior índice de influência sobre a terra, o que de acordo com Lima (2016) impulsiona movimentos periódicos de alterações quanto ao nível da água em rios, mares e lagos.

A superfície dos mares não permanece estacionária. Devido, principalmente, às atrações da Lua e do Sol, a massa líquida se movimenta no sentido vertical, dando origem às marés e, também, horizontalmente, provocando as correntes de maré. Ademais, o aquecimento desigual dos diferentes pontos da Terra pelo Sol e os grandes sistemas de vento resultantes dão origem às correntes oceânicas (...) (MIGUENS, 1996, p.227)

Lima (2016) ainda destaca que as ocorrências de maré são regulares e ocorrem em intervalos de 6 horas e 12 minutos. O que gera consequentemente duas subidas e descidas no nível de água a cada 24 horas e 50 minutos, o qual resulta num fluxo e refluxo das águas.

Como a Terra gira cada dia em torno de seu eixo, de Oeste para Leste, completando uma rotação a cada 24 horas, o ponto da superfície da Terra que fica na direção da Lua muda e, teoricamente, cada ponto na Terra apresentaria duas preamares (PM) e duas baixa-mares (BM) no período de 24 horas. Entretanto, como a Lua gira em torno da Terra no mesmo sentido em que a Terra gira em torno de seu eixo, o tempo que a Terra leva para efetuar um rotação completa com relação à Lua é de aproximadamente 24h 50m, período conhecido como um dia lunar. Ademais, como resultado da inclinação do eixo da Terra, as PREAMARES e as BAIXA-MARES sucessivas não são normalmente de níveis iguais. (MIGUENS, 1996, p. 229)

Além disso, Antunes e Godinho (2011) destaca que existem variações que sofrem influencias do vento e da pressão atmosférica, embora seja menor.

Conforme ocorre a rotação da terra ocorrem as variações no nível da água alterando de maneira diferente conforme a região, como se a alteração seguisse de acordo com o movimento lunar. Um lado terrestre eleva o nível de água como se fosse uma espécie de compensação do outro, de forma que estas elevações nos litorais correspondam às marés altas, assim se de um lado está com maré alta, no lado oposto há a ocorrência de maré baixa e assim sucessivamente.

Estudos revelam que a influência maior é da Lua pela proximidade, mas embora a influência solar seja menor em decorrência da distância que está em relação à terra também é significativa. Sendo que quando acontece o alinhamento dos três, a elevação da maré é mais acentuada. Isto acontece duas vezes por mês, especificamente na lua cheia e lua nova e esta maré é chamada de maré grande. A maré mais baixa nomeada de maré morta ocorre quando terra, lua e sol estando dispostos em ângulo reto e tendo a terra como vértice.

Denomina-se amplitude a diferença que ocorre entre a maré baixa e maré alta e a medida é realizada através de uma régua com o nome de marégrafo.

A observação e o índice maregráfico numérico provém a partir da análise harmônica de origem astronômica.

Conforme Antunes e Godinho (2011) é importante que se tenha controle tanto da hidrografia quanto da oceanografia para diversas atividades humanas, por isso estes índices são monitorados de forma rigorosa, devem ser exatos e apresentando a melhor previsão possível.

A partir destes fundamentos e a análise prática desta ocorrência se tem a oportunidade de proporcionar aos educandos a aprendizagem prática através de uma função matemática que estabeleça a relação entre a altura da maré e o tempo observando este fenômeno da natureza.

Os movimentos relativos Sol–Terra–Lua fazem com que as **marés** sejam **movimentos harmônicos compostos** que podem, conseqüentemente, ser decompostos em vários **movimentos harmônicos simples**, expressos por equações matemáticas. (MIGUENS, 1996, p.228)

A proposta de analisar os índices da maré parte do princípio da etnomatemática tencionando oferecer um ensino efetivo, significativo e de qualidade que esteja em consonância as tendências de ensino mais crítica do mundo.

Pois considerar o conhecimento do aluno é um meio de adequar-se a uma educação que proporcione a formação de um cidadão mais consciente e preparado para sua realidade histórica, em contraposição à matemática tradicional e descontextualizada que se detém a um ensino tradicionalista que limita a capacidade cognitiva dos alunos, desconsidera que já possui conceitos empíricos da disciplina e que vai a escola para ampliá-los.

## **3 DELINEAMENTO DA PESQUISA**

### **3.1 Descrição do local: Rio Ajuruxi esquina com o Rio Amazonas**

Para Moraes e Moraes (2011) o passado histórico do Amapá é marcado por uma sucessão de eventos políticos, vinculados as grandes navegações e, sobretudo, a expansão territorial e a consolidação do domínio de Portugal no Brasil. Dentre estes eventos, destacamos o Tratado de Tordesilhas, assinado no século XV, entre Portugal e Espanha, pelo qual “o mundo foi dividido em dois hemisférios. Em 1900, quando uma comissão de arbitragem, em Genebra, reconheceu a posse do território para o Brasil, a França desistiu do Amapá. O território foi incorporado ao estado do Pará com o nome de Araguari, até se tornar o Território Federal do Amapá, em 1943 (MORAIS, 2011).

O povoamento da região teve grande impulso a partir do século 19, com a descoberta de ouro, nas cabeceiras do rio Calçoene, e a exploração da borracha. No século 20, a ocupação do território foi principalmente determinada pela mineração. A população do Amapá foi recenseada pela primeira vez em 1950 e tinha 37 mil habitantes. Atualmente, segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, possui 16 municípios, tendo como Capital a cidade de Macapá, e em 2015 a estimativa populacional era de 766.679 habitantes (IBGE, 2017).

Segundo Amaral (2007), o Município de Mazagão foi criado pela Lei nº 226, em 28 de novembro de 1890, Em sua área se localiza a Reserva Extrativista do Rio Cajari. Brasil (2016a) cita que na reserva do Rio Cajari, no Amapá, a população tradicional faz a exploração sustentável do açaí e da castanha-do-brasil. Além dessas atividades, há projeto que prevê o manejo de fauna silvestre.

O rio Amazonas, localizado na América do Sul, é o maior rio do mundo, segundo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). Em BRASIL (2016b, p1) cita que “segundo a metodologia do trabalho coordenado por Paulo Roberto Martini, da

Divisão de Sensoriamento Remoto do INPE, o Amazonas tem 6.992,06 quilômetros de extensão enquanto o Nilo atinge 6.852,15 quilômetros.”

Segundo Bartoli (2010) o rio Amazonas tem a maior bacia de drenagem do mundo e possui aproximadamente 1.100 afluentes, e na Amazônia Brasileira é responsável por cerca de um quinto do fluxo fluvial total do mundo. De sua área total, cerca de 3,89 milhões de km<sup>2</sup> encontram-se no Brasil, ou seja, 45% do país, abrangendo os estados do Acre, Amazonas, Roraima, Rondônia, Mato Grosso, Pará e Amapá.

Localizada aproximadamente à 69km do Porto de Santana, veja Figura 3.1 está foz do Rio Juruxi.

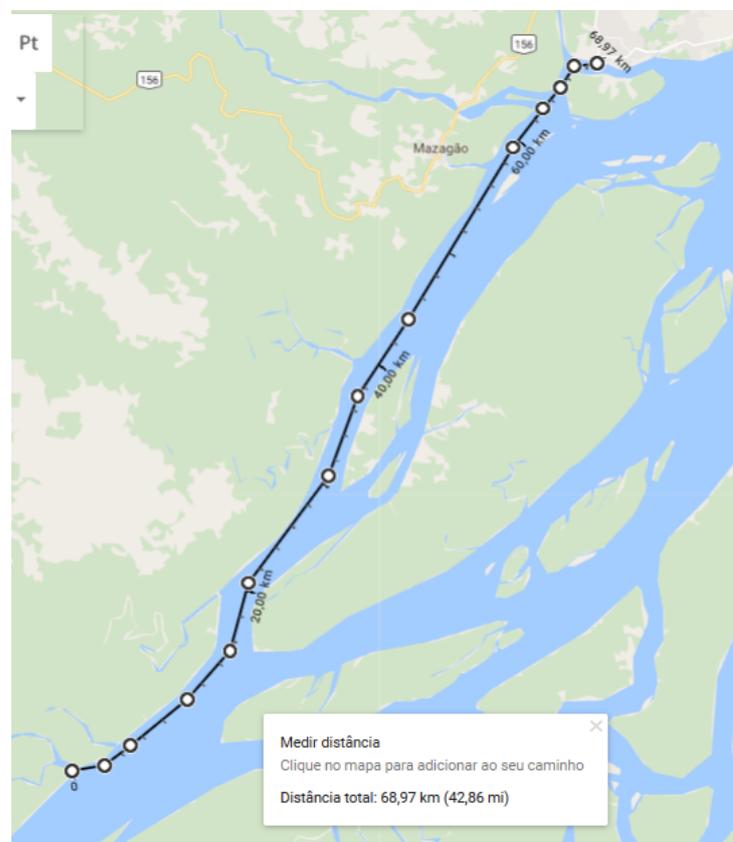


Figura 3.1: Localização da comunidade Foz do Rio Ajuruxi

*Fonte: site GoogleMaps - 20 de dezembro de 2016*

O Rio Ajuruxi é um dos afluentes do Rio Amazonas, localizado do lado esquerdo do canal norte, pertencente ao município de Mazagão, no Estado do Amapá, encontra-se a comunidade Maranata. Nela, está assentada a Escola Estadual Osmundo Valente Barreto.

Criada em 1976 a Escola Estadual Osmundo Valente Barreto atende aproxima-

damente 400 alunos, das comunidades: Vila Betel, Rio Arraio, Rio Mulato, Rio Capitão, Furo do Capitão, Igarapé Carneiro, Rio Curuçá, Furo do Maracá e Braço do Rio Ajuruxí, sendo que a referida escola oferta do ensino fundamental ao médio.

O ensino nas áreas ribeirinhas apresenta inúmeras dificuldades, entre as quais podemos destacar o acesso dos alunos à escola. Em particular, os alunos das comunidades Vila Betel, Rio Capitão e Furo do Capitão possuem uma rotina nada positiva para o processo ensino aprendizagem. Os mesmos precisam se deslocar a partir das 5 da manhã, usando o barco escolar, conhecido como catraia. Em média esse deslocamento dura aproximadamente 5 horas até seu destino final. Veja o local onde foi coletados os dados sobre os níveis da maré na Figura 3.2.

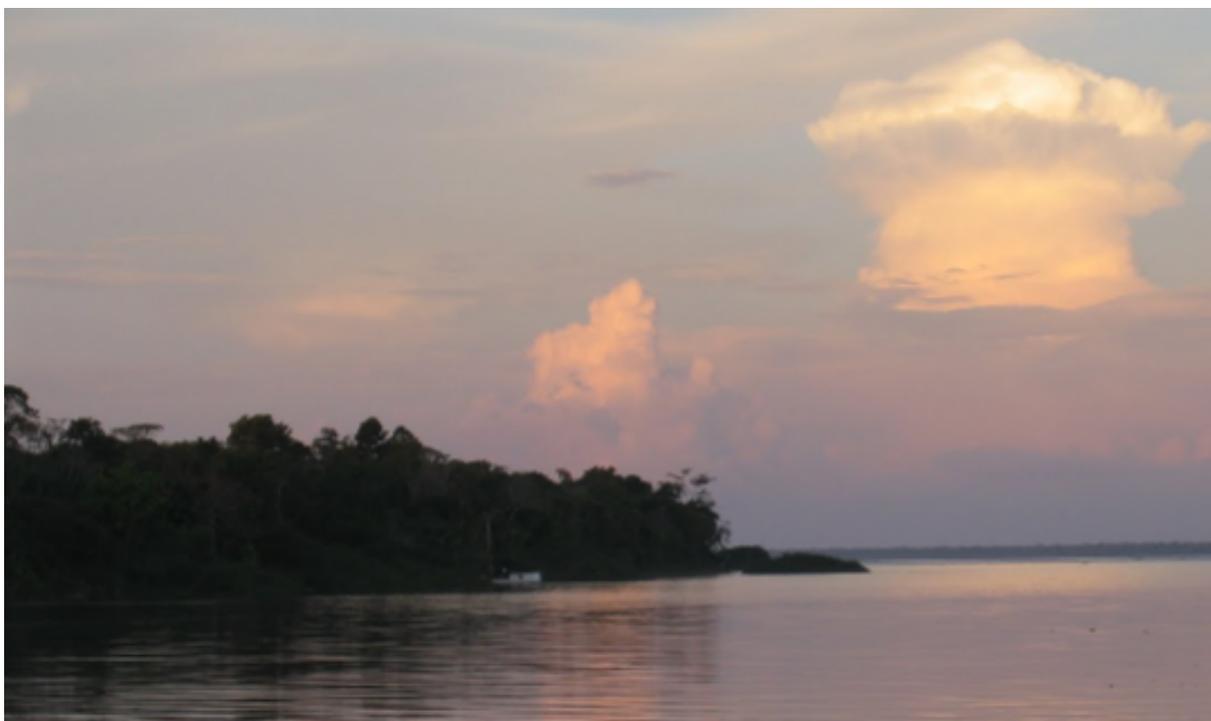


Figura 3.2: Foz do Rio Ajuruxi

*Fonte: Foto de Pozzi Sergio (2016)*

## 3.2 Metodologia da pesquisa

Acredito que a escolha, bem como o desenvolvimento da pesquisa do tema já mencionado é de suma importância no cotidiano desses alunos e da comunidade em geral e assim o desejo de que este trabalho seja desenvolvido na escola.

A importância de se caracterizar os conhecimentos prévios dos alunos, relacionados às funções trigonométricas se deve à contribuição que esta ação pode oferecer ao professor, para que ele possa conduzir melhor suas intervenções em prol de aprendizagens significativas para os alunos. Essa caracterização nos leva a procurar respostas para perguntas que nos permitam determinar os conhecimentos pertinentes e necessários para que os alunos aprendam o conteúdo que pretendemos ensinar-lhes. Para se chegar a um resultado, de certa forma, satisfatório, elencamos questionamentos que precisam ser sanados. Vejamos:

O que gostaria que os alunos aprendessem sobre este conteúdo?

Como pretendo que o aprendam?

O que precisam saber para poder entrar em contato e atribuir um significado inicial a estes aspectos do conteúdo que pretendo que aprendam?

Que elementos devem ter conhecimento para que possam fazer a relação com os aspectos do conteúdo?

Mediante o tema e o público alvo a ser atendido, fora elaborada uma sequência didática a ser seguida para melhor desenvolvimento das ações.

### 3.3 Desenvolvimento da pesquisa - 1ª parte

Para essa construção, procurou-se seguir algumas etapas, as quais destacamos a seguir:

1. Exposição do conteúdo funções seno e cosseno e seus parâmetros em sala;
2. Discussão sobre o níveis das marés;
3. Identificação da relação dos estudos das funções seno e cosseno no fenômeno das marés;

Após a discussão em sala, apresentamos na lousa a tábua da maré retirada do site do Centro de Hidrografia da Marinha do Brasil, no ponto de medição do Porto de Santana - Cia Docas de Santana no Estado no Amapá, previsão para o mês de maio de 2016, carta número 00206, veja Figura 3.3.

<b>QUI 12/05/2016</b>	03:34	0.3
	08:15	3.0
	15:51	0.5
	20:38	2.9
<b>SEX 13/05/2016</b>	04:28	0.4
	09:19	2.9
	16:53	0.6
	21:43	2.8
<b>SÁB 14/05/2016</b>	05:30	0.5
	10:21	2.9
	18:00	0.7
	22:47	2.7
<b>DOM 15/05/2016</b>	06:36	0.6
	11:21	2.8
	19:09	0.7
	23:49	2.7
<b>SEG 16/05/2016</b>	07:41	0.6
	12:17	2.9
	20:13	0.6
<b>TER 17/05/2016</b>	00:47	2.7
	08:39	0.5
	13:08	3.0
	21:06	0.5

Figura 3.3: Tábua da maré

*Fonte: Centro de Hidrografia da Marinha do Brasil*

A proposta apresentada foi para encontrar um modelo matemático que descrevesse o fenômeno da maré no dia 14 de maio de 2016, desta forma retiramos as informações necessárias para a construção da Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Tábua da maré - Porto de Santana

Maré	Hora	Altura (m)
maré baixa 1	05:30	0,5
maré alta 1	10:21	2,9
maré baixa 2	18:00	0,7
maré alta 2	22:47	2,7

Para construirmos um modelo matemático mais apropriado para esse fenômeno, foram necessários fazer alguns ajustes:

Primeiro, calculamos a média aritmética das marés altas e das marés baixas.

$$M_a = \frac{ma_1 + ma_2}{2} = \frac{2,9 + 2,7}{2} = 2,8$$

$$M_b = \frac{mb_1 + mb_2}{2} = \frac{0,5 + 0,7}{2} = 0,6$$

Em seguida fizemos a conversão da grandeza tempo, ou seja, transformamos os minutos em horas. Para transformar 5:30h em horas, utilizamos o conceito da regra de três simples, assim:

Hora	minuto
1	60
X	30

como são grandezas diretamente proporcionais, segue:

$$60 \text{ x} = 1 \cdot 30$$

$$\text{x} = \frac{30}{60}$$

$$\text{x} = 0,5$$

logo: 5:30h = 5h + 0,50h = 5,50h

Da mesma forma temos:

$$10:21\text{h} = 10\text{h} + \frac{21}{60} \text{ h} = 10\text{h} + 0,35\text{h} = 10,35\text{h};$$

$$22:47\text{h} = 22\text{h} + \frac{47}{60} \text{ h} = 22\text{h} + 0,78\text{h} = 22,78\text{h};$$

Com os dados ajustados obtivemos a tabela 3.2.

Tabela 3.2: Dados ajustados da previsão da maré - Porto de Santana

Maré	Hora	Altura (m)
maré baixa 1	5,50	0,6
maré alta 1	10,35	2,8
maré baixa 2	18,00	0,6
maré alta 2	22,78	2,8

Utilizamos uma malha quadriculada Figura 3.4 para traçarmos o eixo cartesiano e marcarmos os pontos (hora, altura da maré), A (5,50, 0,6); B (10,35, 2,8); C (18,00, 0,6) e D (22,78, 2,8).

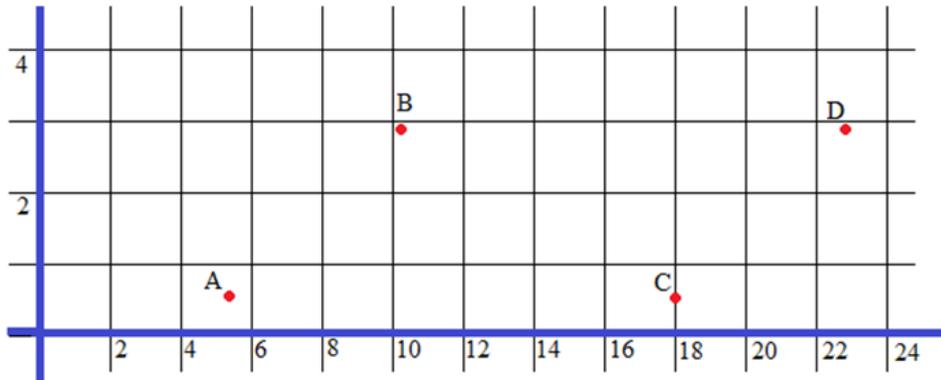


Figura 3.4: Eixo cartesiano com os dados ajustado do Porto de Santana

*Fonte: Alunos do ensino médio*

Para construir uma função que possa descrever a maré da forma  $f(x) = d + c \operatorname{sen}(ax + b)$  ou  $g(x) = d + c \operatorname{cos}(ax + b)$ , precisamos calcular os parâmetros **a**, **b**, **c** e **d**.

### 3.3.1 Usando a função seno na previsão da maré

Seja a função seno definida por:

$$f(x) = d + c \operatorname{sen}(ax + b)$$

Observe que os parâmetros **d** e **c** são responsáveis pela mudança da imagem da função.

Então encontraremos primeiro o parâmetro **c** responsável pela amplitude, desta forma, determinamos a variação entre a maré alta e a maré baixa,

$$A = \frac{m_a - m_b}{2} = \frac{2,8 - 0,6}{2} = 1,1$$

$$f(x) = d + 1,1 \operatorname{sen}(ax + b)$$

Para calcularmos o parâmetro **d**, observa-se que a variação desse parâmetro provoca o deslocamento no eixo vertical (eixo y), sendo assim, verificar-se que a imagem da função

$f(x) = d + c \operatorname{sen}(ax + b)$  é dada por:

$$[-c + d, c + d]$$

logo:

$$-1,1 + d = 0,6$$

$$d = 1,7$$

$$f(x) = 1,7 + 1,1 \operatorname{sen}(ax + b)$$

O parâmetro  $a$  é responsável na mudança do período da função seno, logo podemos encontrar usando a igualdade:

$$a = \frac{2\pi}{p}, \text{ sendo } p \neq 0$$

O período é encontrado entre duas marés altas ou entre duas marés baixas consecutivas, desta forma temos:

$$\text{Marés altas: } 22,78 - 10,35 = 12,43$$

$$\text{Marés baixas: } 18,00 - 5,50 = 12,5$$

Como os valores entre esses dois períodos são diferentes, encontramos a média aritmética entre eles,

$$\frac{12,43 + 12,5}{2} = \frac{24,93}{2} = 12,465$$

assim:

$$a = \frac{2\pi}{12,465}$$

temos:

$$f(x) = 1,7 + 1,1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12,465}x + b\right)$$

Para encontrar o parâmetro  $b$ , utilizamos um ponto pertencente à função, escolhemos o ponto C (18,00, 0,6)

$$f(18) = 1,7 + 1,1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12,465}18 + b\right)$$

$$0,6 = 1,7 + 1,1 \operatorname{sen}\left(\frac{36\pi}{12,465} + b\right)$$

$$0,6 - 1,7 = 1,1 \operatorname{sen}\left(\frac{36\pi}{12,465} + b\right)$$

$$-1,1 = 1,1 \operatorname{sen}\left(\frac{36\pi}{12,465} + b\right)$$

$$\frac{-1,1}{1,1} = \text{sen} \left( \frac{36\pi}{12,465} + b \right)$$

$$-1 = \text{sen} \left( \frac{36\pi}{12,465} + b \right)$$

O arco cujo seno igual  $-1$  é  $\frac{3\pi}{2}$ , ou seja,  $\text{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$

$$\text{sen} \left( \frac{3\pi}{2} \right) = \text{sen} \left( \frac{36\pi}{12,465} + b \right)$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{36\pi}{12,465} + b$$

$$b = \frac{3\pi}{2} - \frac{36\pi}{12,465} = \frac{37,395 \pi - 72 \pi}{24,93}$$

$$b = -\frac{34,605 \pi}{24,93}$$

A função final ficou

$$f(x) = 1,7 + 1,1 \text{ sen} \left( \frac{2\pi}{6,2325} x - \frac{34,605 \pi}{24,93} \right)$$

A partir deste resultado propomos a validação do modelo matemático encontrado. Desta forma, fomos calcular o nível da maré às 8h

$$f(8) = 1,7 + 1,1 \text{ sen} \left( \frac{2\pi}{12,465} \cdot 8 - \frac{34,605 \pi}{24,93} \right)$$

$$f(8) = 1,7 + 1,1 \text{ sen} \left( \frac{16\pi}{12,465} - \frac{34,605 \pi}{24,93} \right)$$

$$f(8) = 1,7 + 1,1 \text{ sen} \left( \frac{32\pi - 34,605 \pi}{24,93} \right) = 1,7 + 1,1 \text{ sen} \left( -\frac{2,605 \pi}{24,93} \right)$$

$$f(8) = 1,7 + 1,1 \text{ sen}(-18,8087^\circ) = 1,7 + 1,1 \cdot (-0,3224)$$

$$f(8) = 1,7 - 0,3546 = 1,3454$$

$$f(8) \cong 1,35 \text{ m}$$

Mediante o resultado encontrado ficou comprovado a validação da fórmula, pois observamos que o ponto maré calculada  $M_C(8, 1,35)$  pertence ao gráfico da função  $f(x)$ , ou seja, o nível da maré às 8h foi de aproximadamente 1,35 m. Veja Figura 3.5.

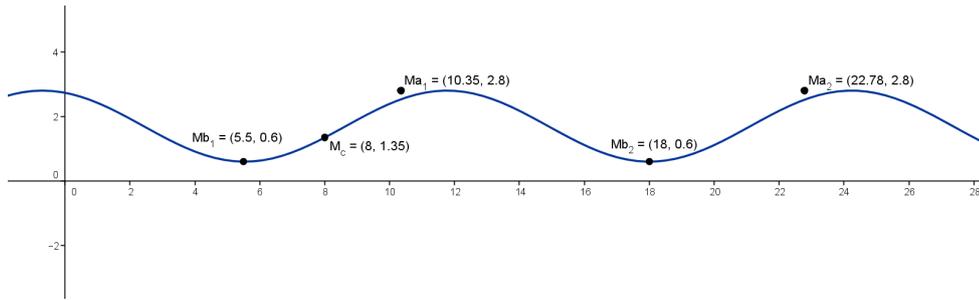


Figura 3.5: Gráfico da função seno na previsão da maré

*Fonte: Construído no GeoGebra*

### 3.3.2 Usando a função cosseno na previsão da maré

Também foi proposto encontrar um modelo matemático usando a função cosseno do tipo

$$g(x) = d + c \cos(ax + b)$$

Observamos que os parâmetros  $d$ ,  $c$  e  $a$ , são os mesmos calculados no modelo da função seno.

Logo temos:

$$g(x) = 1,7 + 1,1 \cos\left(\frac{2\pi}{12,465}x + b\right)$$

Usamos o ponto C (18,00 , 0,6) para calcular o parâmetro  $b$ .

$$g(18) = 1,7 + 1,1 \cos\left(\frac{2\pi}{12,465}18 + b\right)$$

$$0,6 = 1,7 + 1,1 \cos\left(\frac{36\pi}{12,465} + b\right)$$

$$-1,1 = 1,1 \cos\left(\frac{36\pi}{12,465} + b\right)$$

$$-1 = \cos\left(\frac{36\pi}{12,465} + b\right)$$

O arco cujo cosseno igual  $-1$  é  $\pi$ , ou seja,  $\cos \pi = -1$

$$\cos \pi = \cos\left(\frac{36\pi}{12,465} + b\right)$$

$$\pi = \frac{36\pi}{12,465} + b$$

$$b = \pi - \frac{36\pi}{12,465} = \frac{12,465\pi - 36\pi}{12,465}$$

$$b = -\frac{23,535 \pi}{12,465}$$

assim temos:

$$g(x) = 1,7 + 1,1 \cos \left( \frac{2\pi}{12,465}x - \frac{23,535 \pi}{12,465} \right)$$

Fizemos também a validação deste modelo matemático, usando a função cosseno para novamente calcular o nível da maré as 8h

$$g(8) = 1,7 + 1,1 \cos \left( \frac{2\pi}{12,465}8 - \frac{23,535 \pi}{12,465} \right)$$

$$g(8) = 1,7 + 1,1 \cos \left( \frac{16\pi}{12,465} - \frac{23,535 \pi}{12,465} \right)$$

$$g(8) = 1,7 + 1,1 \cos \left( -\frac{7,535 \pi}{12,465} \right)$$

$$g(8) = 1,7 + 1,1 \cos (-108,8087^\circ)$$

$$g(8) = 1,7 + 1,1 \cdot (-0,3224) = 1,7 - 0,3546$$

$$g(8) = 1,3454$$

$$g(8) \cong 1,35m$$

Usando o GeoGebra marcamos este ponto  $M_C(8, 1,35)$ , veja Figura 3.6.

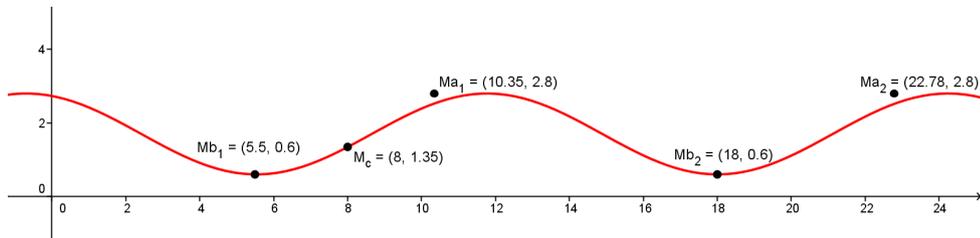


Figura 3.6: Gráfico da função cosseno na previsão da maré

*Fonte: Construído no GeoGebra*

Verificamos que este ponto  $M_C(8, 1,35)$ , pertence tanto a função

$$f(x) = 1,7 + 1,1 \sen \left( \frac{2\pi}{6,2325}x - \frac{34,605 \pi}{24,93} \right)$$

quanto a

$$g(x) = 1,7 + 1,1 \cos \left( \frac{2\pi}{12,465}x - \frac{23,535 \pi}{12,465} \right)$$

Logo o nível da maré calculado pela função cosseno é numericamente igual quando calculada pela função seno, ou seja, às 8h a maré será de aproximadamente de 1,35 m.

### 3.4 Desenvolvimento da pesquisa - 2ª parte

Após os estudos das funções e modelos matemáticos em sala, se fez necessário partir para o momento crucial da pesquisa. No dia 16 de maio de 2016 fora proposto aos alunos a saída pra campo para que pudéssemos colocar em prática toda a bagagem teórica que já havíamos adquirido. Então, no dia 17 de maio de 2016 partimos para coleta de dados dos níveis da maré.

Primeiramente a tarefa dos alunos foi observar e anotar os horários de oscilações dos níveis de maré (baixa e alta). Contudo, houve um momento que não foi possível a participação dos alunos nesta coleta, visto que o ciclo da maré, em média, tem a duração de 24 horas, alguns ocorreriam durante a madrugada e noite, assim sendo, tive que fazer a coleta nesses dois momentos.

Vejamos então os dados coletados pelos alunos Figura 3.7 no dia 17 de maio de 2016:

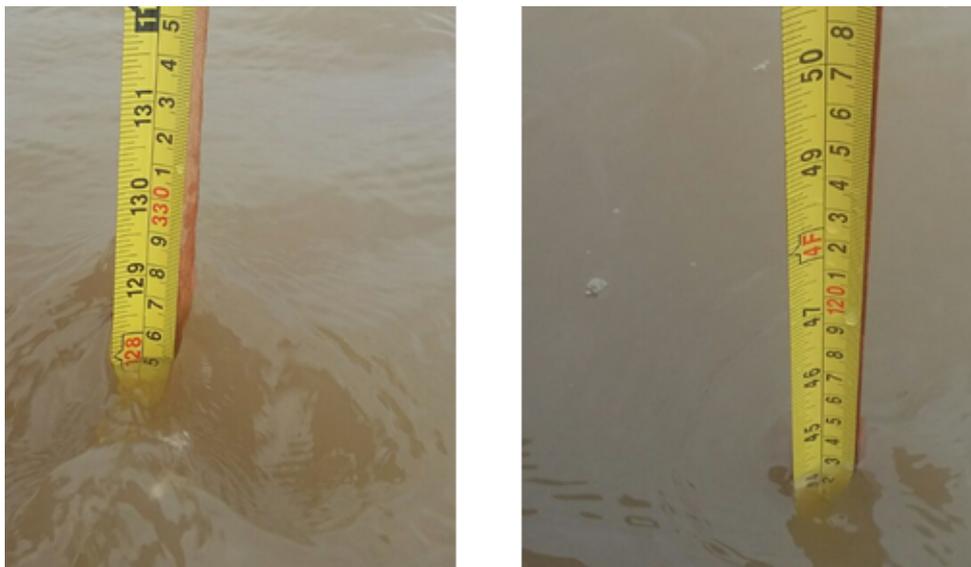


Figura 3.7: Medição da nível da Maré no dia 17 de maio de 2016

*Fonte: Alunos do Ensino Médio*

Foi perceptível na parte prática o interesse dos alunos, e o mais importante, ficou nítida naquela ação o saber empírico, uma vez que aquelas oscilações nos níveis da maré são corriqueiras na vida daqueles educandos. A Etnomatemática se destaca nesse momento na pesquisa, percebemos que aqueles alunos estavam expondo a Matemática informal, aquela que se transmite e se aprende fora do sistema de educação formal, isto

levando em conta também o processo cognitivo. A prática diária deles estava ali.

Assim concluída a parte de coleta de dados, houve o retorno à sala de aula para que os educandos socializassem tudo o que fora visto. Foi ainda a hora de iniciar o trabalho com tudo o que foi coletado sobre os níveis de maré, com os gráficos e fórmulas matemáticas para que de fato pudessemos chegar ao resultado satisfatório.

No dia 18 de maio de 2016, às 8h com os dados coletados, partimos para a construção de uma fórmula que faria a previsão dos níveis da maré.

No primeiro momento organizamos as informações coletadas. Veja Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Tábua da maré - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas

Maré	Hora	Altura (m)
maré baixa 1	02:15	0,95
maré alta 1	10:03	3,25
maré baixa 2	14:25	1,10
maré alta 2	22:28	3,15

Para utilizarmos algum dos modelos matemáticos, seja o da função seno ou da função cosseno era necessário fazer ajustes.

Para altura da maré calculamos a média aritmética das marés altas e das marés baixas.

$$M_a = \frac{ma_1 + ma_2}{2} = \frac{3,25 + 3,15}{2} = \frac{6,40}{2} = 3,20$$

$$M_b = \frac{mb_1 + mb_2}{2} = \frac{0,95 + 1,10}{2} = \frac{2,05}{2} = 1,025$$

Em seguida fizemos a conversão dos minutos em horas.

$$02:15h = 2h + \frac{15}{60} h = 2h + 0,25h = 2,25h;$$

$$10:03h = 10h + \frac{03}{60} h = 10h + 0,05h = 10,05h;$$

$$14:25h = 14h + \frac{25}{60} h = 14h + 0,42h = 14,42h;$$

$$22:28h = 22h + \frac{28}{60} h = 22h + 0,47h = 22,47h;$$

Após ajustes, obtivemos a Tabela 3.4

Tabela 3.4: Dados ajustados - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas

Maré	Hora	Altura (m)
maré baixa 1	2,25	1,025
maré alta 1	10,05	3,20
maré baixa 2	14,42	1,025
maré alta 2	22,47	3,20

Utilizando uma malha quadriculada Figura 3.8 traçamos o eixo cartesiano e marcamos os pontos (hora, altura da maré), A (2,25, 1,025); B (10,05, 3,20); C (14,42, 1,025) e D (22,47, 3,20).

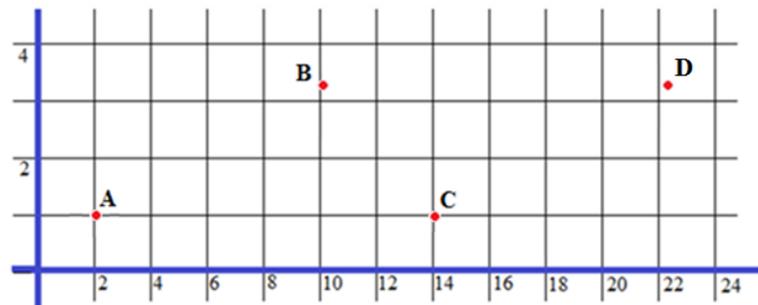


Figura 3.8: Eixo cartesiano (dados ajustado - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas)

*Fonte: Alunos do ensino médio*

Calculamos o parâmetro  $c$  sendo  $m_a$ : maré alta e  $m_b$ : maré baixa

$$A = \frac{m_a - m_b}{2} = \frac{3,20 - 1,025}{2} = \frac{2,175}{2} = 1,0875$$

Assim  $c = 1,0875$

$$f(x) = d + 1,0875 \operatorname{sen}(ax + b)$$

Como valor de  $\operatorname{sen}(ax + b)$  varia de  $-1$  a  $1$ , ou seja,  $-1 \leq \operatorname{sen}(ax + b) \leq 1$

segue:

$$-1,0875 + d = 1,025$$

$$d = 2,1125$$

$$f(x) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen}(ax + b)$$

Para encontrar o parâmetro  $a$ , usamos a relação:

$$a = \frac{2\pi}{p}, \text{ sendo } p \neq 0$$

Marés altas

$$22,47 - 10,05 = 12,42$$

Marés baixas

$$14,42 - 2,25 = 12,17$$

Como os valores entre esses dois períodos são diferentes, encontramos a média aritmética entre eles.

$$\frac{12,42 + 12,17}{2} = \frac{24,59}{2} = 12,295$$

logo:

$$a = \frac{2\pi}{12,295}$$

Tivemos:

$$f(x) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295}x + b \right)$$

Para encontrar o parâmetro  $b$ , usamos o ponto C (10,05 , 3,20)

$$f(10,05) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295}10,05 + b \right)$$

$$3,20 = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295}10,05 + b \right)$$

$$3,20 - 2,1125 = 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{20,10\pi}{12,295} + b \right)$$

$$1,0875 = 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{20,10\pi}{12,295} + b \right)$$

$$\frac{1,0875}{1,0875} = \operatorname{sen} \left( \frac{20,10\pi}{12,295} + b \right)$$

$$1 = \operatorname{sen} \left( \frac{20,10\pi}{12,295} + b \right)$$

O arco cujo seno igual 1 é  $\frac{\pi}{2}$ , ou seja,  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{20,10\pi}{12,295} + b \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{20,10\pi}{12,295} + b$$

$$b = \frac{\pi}{2} - \frac{20,10\pi}{12,295} = \frac{12,295 \pi - 40,20 \pi}{24,59}$$

$$b = -\frac{27,905 \pi}{24,59}$$

A função final ficou

$$f(x) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295}x - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

Para verificar nossa função, calculamos os níveis da maré para os tempos 2,25h, 10,05h, 14,42h e 22,47 para compararmos os valores reais com os estimados pela função.

Para  $x=2,25$ h temos:

$$f(2,25) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295} \cdot 2,25 - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(2,25) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{4,5\pi}{12,295} - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(2,25) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{9\pi - 27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(2,25) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( -\frac{18,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(2,25) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen}(-138,3855^\circ)$$

$$f(2,25) = 2,1125 + 1,0875 \cdot (-0,6641) = 2,1125 - 0,7222 = 1,3903$$

$$f(2,25) \cong 1,390 \text{ m}$$

Para  $x=10,05$ h temos:

$$f(10,05) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295} \cdot 10,05 - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(10,05) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{20,10\pi}{12,295} - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(10,05) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{40,20\pi - 27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(10,05) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{12,295 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(10,05) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen}(91,0928^\circ)$$

$$f(10,05) = 2,1125 + 1,0875 \cdot (0,9998) = 2,1125 + 1,0873 = 3,1998$$

$$f(10,05) \cong 3,20 \text{ m}$$

Para  $x=14,42$ h temos:

$$f(14,42) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295} \cdot 14,42 - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(14,42) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{57,68\pi - 27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(14,42) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{29,775 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(14,42) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen}(2179545^\circ)$$

$$f(14,42) = 2,1125 + 1,0875 \cdot (-0,6150) = 2,1125 - 0,6688 = 1,4437$$

$$f(14,42) \cong 1,444 \text{ m}$$

Para  $x=22,47$ h temos:

$$f(22,47) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295} \cdot 22,47 - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(22,47) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{89,88\pi - 27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(22,47) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{61,975 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(22,47) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen}(453,6600^\circ)$$

$$f(22,47) = 2,1125 + 1,0875 \cdot (0,9980) = 2,1125 + 1,0853 = 3,1978$$

$$f(22,47) \cong 3,20 \text{ m}$$

Com os valores das estimativas calculados, montamos a Tabela 3.5

Tabela 3.5: Dados estimados da previsão da maré - Foz do Rio Ajuruxi com o Rio Amazonas

Maré	Hora	Altura (m)	Altuma (m) Estimada
maré baixa 1	2,25	1,025	1,390
maré alta 1	10,05	3,20	3,20
maré baixa 2	14,42	1,025	1,444
maré alta 2	22,47	3,20	3,20

Observamos que as estimativas de marés das 2,25h e das 14,42h tiveram uma diferença de 0,365m e 0,419m respectivamente, essas diferenças são aceitáveis, pois foram

realizados ajustes de tal forma que consideramos o mesmo tempo que a maré vai da alta para baixa a da maré baixa para a alta, ou seja, o tempo para a maré “encher” é diferente do tempo para a maré “secar”.

Chegado o momento dos alunos vivenciarem a prática dos conteúdos, terem a possibilidade de fazer a previsão da maré através de uma “formula matemática”, uma atividade do seu cotidiano, feita de forma empírica. Como proposta calculamos a previsão do nível da maré para as 12h deste dia (18 de maio de 2016). Observe que temos que usar  $x = 36h$ , tendo em vista que os dados coletados foram do dia 17 de maio de 2016.

$$f(36) = f(12 + 24)$$

Assim temos:

$$f(36) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{12,295} \cdot 36 - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(36) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{72\pi}{12,295} - \frac{27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(36) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{144\pi - 27,905 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(36) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen} \left( \frac{116,095 \pi}{24,59} \right)$$

$$f(36) = 2,1125 + 1,0875 \operatorname{sen}(849,8211^\circ)$$

$$f(36) = 2,1125 + 1,0875 \cdot 0,7680 = 2,1125 + 0,8352 = 2,9477$$

$$f(36) \cong 2,95 \text{ m}$$

Assim o nível da maré às 12h é aproximadamente de 2,95m. Em seguida utilizamos o GeoGebra e marcamos as coordenadas do ponto  $M_C(36, 2,95)$ , observe a Figura 3.9.

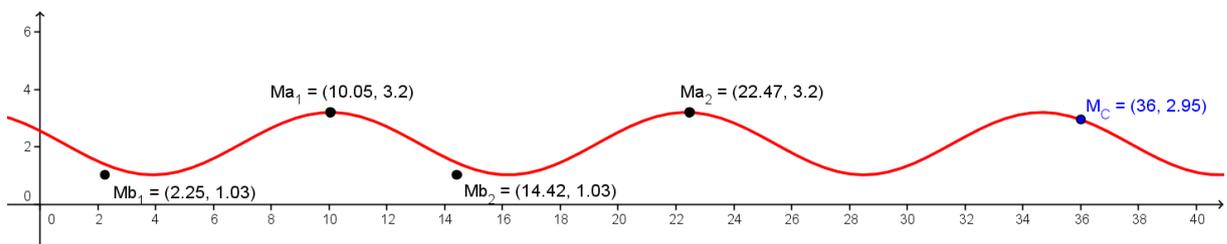


Figura 3.9: Eixo cartesiano - marcação do ponto  $M_C(36, 2,95)$

*Fonte: Construído no GeoGebra*

Após a conclusão dos cálculos, aguardamos até o horário estipulado para a validação do resultado. Foi então que às 12h fizemos a medição:



Figura 3.10: Medição do nível da maré as 12h do dia 18 de maio de 2016

*Fonte: Alunos do ensino médio*

O nível da maré marcado foi 2,87m, a diferença entre o valor calculado e o real foi de apenas 7 cm, assim concluímos que o modelo matemático foi satisfatório para a previsão da maré. Desta forma possibilitou mostrar e demonstrar para o nosso aluno que a teoria e a prática estão juntas, e o processo de aprendizagem pode e deve ser significativo aplicado no seu contexto sócio cultural.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da pesquisa realizada com alunos ribeirinhos, do 3º ano modular, ficou claro que teoria e prática juntas, propiciaram um ambiente de interação, favorecendo a participação e a aprendizagem dos alunos envolvidos. As ações propostas sobre as funções seno e cosseno com uma abordagem da Etnomatemática, através de situações concretas que abordaram o movimento das marés, foram vistas, predominantemente, sob um olhar matemático diferenciado. A preocupação em criar um espaço de construção de conhecimento, levando em conta o saber sócio cultural, do educando, nos trouxe bons resultados.

Ao longo da prática docente de muitos profissionais da área, foi possível perceber que há necessidade de inovar a didática de ensino viabilizando melhor assimilação dos conteúdos estudados e melhorar a utilização dessas atividades. Pois nos parece comum um olhar assustador do educando sobre os conteúdos ministrados na matemática.

É fato que o trabalho com a pesquisa exige do docente tempo, paciência, força de vontade e um amplo conhecimento do que vem a ser pesquisado. Mas destaco aqui a dificuldade maior encontrada nesta pesquisa, que foi o deslocamento dos alunos até a escola, pois alguns alunos precisavam deslocar-se de suas residências antes mesmo do sol nascer para que pudessem estar pontualmente às 7:30. Estes mesmos alunos, após encerramento da manhã letiva já deslocavam direto para o trabalho. Tal rotina comprometia seriamente o processo de ensino aprendizagem, umas que muitos deles mostravam-se exaustos nas aulas.

Contudo, acredita-se que o resultado final foi o esperado, o público alvo foi de fato contemplado, percebeu-se o processo de ensino-aprendizagem acontecendo, apesar das barreiras já mencionadas. Foi um grande desafio, despertar nos alunos daquela turma a certeza de que o saber deles é e sempre será válido, que a prática desses educandos, aliadas aos conceitos sistemáticos, fazem fluir o ensino da Matemática tal como deveria em nossas escolas.

## REFERÊNCIAS

ANTUNES, Carlos, GODINHO, Joana Mendes. *Estudo da Análise Harmônica da Maré aplicada ao Marégrafo de Cascais*. Conferência Nacional de Cartografia e Geodesia. Porto, 2011. Disponível em: [http://webpages.fc.ul.pt/\\$\sim\\$cmantunes/artigos/CNCG2011\\\_Artigo\\\_Analise\%20da\%20mare\\\_CA\\\_\.pdf](http://webpages.fc.ul.pt/$\sim$cmantunes/artigos/CNCG2011\_Artigo\_Analise\%20da\%20mare\_CA\_\.pdf) Acesso em: 20 de dezembro de 2016.

AMARAL, Augusto Ferreira do. **Mazagão: A epopeia portuguesa em Marrocos**. 2007.

BOYER, Carl B., **História da Matemática**. 2 ed., São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. *Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade. Reserva Extrativista Rio Cajari*. 2016a. Disponível em: <http://www.icmbio.gov.br/portal/populacoestradicionais/producao-e-uso-sustentavel/uso-sustentavel-em-ucs/249-reserva-extrativista-rio-cajari.htm>. Acesso em: 01 de abr. 2016.

\_\_\_\_\_. *Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Estudo do INPE indica que o rio Amazonas é 140 km mais extenso do que o Nilo*. 2016b Disponível em: [http://www.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod\\\_Noticia=1501](http://www.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod\_Noticia=1501). Acesso em: 17 de dez. 2016.

\_\_\_\_\_. *PCN Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica*, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em:

---

10 abril de 2016.

\_\_\_\_\_. Centro de Hidrografia da Marinha do Brasil. Disponível em: <http://www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/10615Mai2016.htm>. Acesso em 20 de nov. 2016.

BARTOLI, Estevan. *Amazonas e a Amazônia: geografia, sociedade e meio ambiente* - Rio de Janeiro: MEM VAV MEM, 2010. Disponível em: <http://http://www.memvavmem.com.br/>. Acesso em: 23 de jan. 2016.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. Arte ou técnica de explicar ou conhecer. São Paulo: Ed. Ática, 1990.

\_\_\_\_\_. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica. (Coleção Tendências em Educação Matemática). 2001.

\_\_\_\_\_. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papyrus. 1996.

\_\_\_\_\_. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática. 1990.

\_\_\_\_\_. **Etnomatemática**: Um Programa - Educação Matemática em Revista - SBEM nº 1. 1993

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. *Matemática, 3*: geometria análítica, números complexos, polinômios, limites e derivadas, noções de estatística do 2º grau. São Paulo: FTD, 1992.

\_\_\_\_\_. *Matemática Completa, 3ª série*: ensino médio. São Paulo: FTD, 2009.

GOOGLEMAPS. Google. (2016) *Mapa da localização do comunidade Foz do Ajuruxi*. 2016. Disponível: <https://www.google.com.br/maps/@-0.3200596,-51.2318065,10>.

---

27z?hl=pt-BR. Acesso em: 20 de dezembro de 2016.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 4, 5 ed., Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

HAMZE, Amélia. *Etnomatemática, abordagem histórico c ultural da Matemática*. Disponível em: <http://educador.brasilecola.uol.com.br/trabalho-docente/etnomatematica.htm>. Acesso em: 12 de jan 2017.

IBGE. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística e Cidades**. Disponível em: <http://cod.ibge.gov.br/3I7>. Acesso em: 04 de jan. 2017.

IEZZI, Gelson, **Fundamentos da Matemática Elementar: trigonometria**. Vol. 3, 2 ed., São Paulo: Atual Editora, 1977.

\_\_\_\_\_. **Fundamentos da Matemática Elementar**. Vol. 1, 3 ed., São Paulo: Atual Editora, 1977.

\_\_\_\_\_, **Matemática**. Vol. único, 4.ed., São Paulo: Atual Editora, 2007.

LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio - volume 1*. Rio de Janeiro: SBM, 10 ed., 2012 (Coleção do professor de Matemática).

LIMA, Jozildes Vieira Lima. *Aplicações das funções seno e coseno através do movimento das marés e das ondas sonoras*. Mossoró, RN, 2013. Disponível em: <http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/725>. Acesso em: 20 de dezembro de 2016.

MIGUENS, Altineu Pires. *Navegação a ciência e a arte*. Disponível em: [https://www.mar.mil.br/dhn/dhn/quadros/livro\\\_um.html](https://www.mar.mil.br/dhn/dhn/quadros/livro\_um.html). Acesso em dezembro de 2016.

---

MORAIS, Paulo Dias; MORAIS, Jurandir Dias. *Geografia do Amapá*. Macapá: JM, 2011.

PASSOS, Caroline Mendes dos. *Etnomatemática e educação matemática crítica*. Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~brolezzi/carolinepassos.pdf>. Acesso em 20 de dezembro de 2016.

POZZI, Sergio. Foz do Rio Ajuruxi. Disponível em: <https://www.google.com.br/maps/@-0.536949,-51.537895,3a,75y,90t/data=!3m8!1e2!3m6!1s9824494!2e1!3e10!6s%2F%2F6.googleusercontent.com%2Fproxy%2FQU6gLcSfh4jwtNMOhP6QlFKpPVMXobAZYXl2-i6vCWa1Y5ZSgHPaQSJdh6Oe3CgFeaoSJP0c7dc8XI3JcZvGW4l9z%3Dw203-h1si52!7i3264!8i2448?hl=pt-BR>. Acesso em: 20 de dezembro 2016