UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Motivações para o Ensino dos Números Complexos

Jocimar Montanha

Orientador
Prof. Dr. José Roberto Nogueira

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Motivações para o Ensino dos Números Complexos

Jocimar Montanha

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Orientador
Prof. Dr. José Roberto Nogueira

2017

Montanha, Jocimar.
Motivações para o ensino dos números complexos / Jocimar Montanha. -- São José do Rio Preto, 2017
79 f. : il., gráfs.

Orientador: José Roberto Nogueira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números complexos - Estudo e ensino. 3. Transformações (Matemática) 4. Álgebra. 5. Equações. 6. Tecnologia educacional. 7. Ensino auxiliado por computador. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.
CDU – 511.2:513.75

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Jocimar Montanha

Motivações para o Ensino dos Números Complexos

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. José Roberto Nogueira
FCT/UNESP - Campus de Presidente Prudente
Orientador

Profª. Drª. Marluce da Cruz Scarabello
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) - São José dos Campos

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
FCT/UNESP - Presidente Prudente

Presidente Prudente, 03 de fevereiro de 2017

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia, aos meus pais, irmãos, minha esposa Karina Montanha, e a todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

Agradecimentos

A realização do presente curso foi possível devido à colaboração de muitas pessoas que me auxiliaram durante suas etapas. Manifesto assim minha gratidão:

Primeiramente, a Deus sobre todas as coisas, por me proporcionar forças nas horas mais difíceis, por sempre me ajudar a não desistir dessa longa caminhada, e por sempre me acompanhar durante a execução de minhas tarefas.

Aos meus pais, Benedito Montanha e Joanita de Souza Montanha, que souberam me educar e sempre acreditaram que o maior investimento de um homem é seu caráter e sua formação.

À minha querida esposa, Karina Souza Alves Montanha, pelo amor, por me apoiar, incentivar e por estar sempre junto a mim.

Aos meus irmãos, sogros e cunhados, pelo apoio, incentivo e compreensão.

A todos os colegas do mestrado pelo companherismo.

A todos os meus professores do PROFMAT, por contribuírem na minha formação e darem importantes sugestões para a minha formação.

Ao professor orientador Dr. José Roberto Nogueira, pela dedicação e condução de todo o processo de elaboração e de execução deste trabalho.

E finalmente à CAPES e à SBM, pelo apoio financeiro e pela oportunidade de proporcionar a nós, professores da rede pública de ensino, este curso de Mestrado.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

Descartes

Resumo

Este trabalho tem por objetivo principal apresentar uma sugestão de como introduzir e contextualizar os conceitos de números complexos, utilizando como motivações áudios, vídeos e software, além de outras atividades complementares sugeridas. Os áudios tratam dos números complexos através de uma história livremente inspirada no livro *O Médico e o Monstro*, do escritor escocês Robert Louis Stevenson. Os vídeos mostram uma maneira divertida e curiosa de olhar para os números complexos contando um pouco sobre sua história. O software tem a finalidade de estudar as transformações geométricas no plano (translação, rotação, dilatação e contração), utilizando os conceitos e operações de números complexos, propriedades e características geométricas. Este material faz parte da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Universidade Estadual de Campinas, e serviu como base para organizarmos o nosso trabalho. Outro software utilizado é o *"GeoGebra"* que servirá de suporte para a realização das soluções das demais atividades sugeridas.

Palavras-chave: números complexos, números imaginários, TICs no ensino, transformações geométricas, equações algébricas.

Abstract

This work has as main objective to present a suggestion of how to introduce and contextualize the concepts of complex numbers, using as motivation audios, videos and software, and other complementary activities suggested. Audios deal with complex numbers through a story loosely inspired by the book *The Doctor and Monster*, the Scottish writer Robert Louis Stevenson. The videos show a fun and funny way to look at the complex numbers telling a little about their history. The software aims to study the geometric transformations in the plane (translation, rotation, expansion and contraction), using the concepts and operations of complex numbers, geometric properties and characteristics. This material is part of the M^3 - Multimedia Mathematics collection of the State University of Campinas, and served as a basis for organizing our work. Another software used is *"GeoGebra"* that will be used to support the solutions of the other suggested activities.

Keywords: complex numbers, imaginary numbers, ICT in education, geometric transformations, algebraic equations.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Números complexos são números compostos por dois números reais, a e b, e representados costumeiramente na forma a+bi, em que a e b são chamados, respectivamente, de parte real e parte imaginária do número em questão. O símbolo matemático i, por sua vez, é denominado de unidade ou constante imaginária. Quando a parte real de um número complexo é nula, este número também é chamado de número imaginário ou puramente imaginário. Muitas vezes, números reais são identificados como números complexos de parte imaginária nula. O conjunto de todos os números complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

De acordo com o material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, os números complexos a princípio causam certa estranheza, mas eles podem ser interpretados significativamente, bem como as operações que realizamos sobre eles. Afinal, a Matemática que estudamos é como uma linguagem, uma maneira de expressão e compreensão do mundo, a ser desenvolvida na escola, com a língua materna, a língua nossa de cada dia.

Ao apresentarmos o conjunto dos números complexos enfatizamos apenas o emprego de fórmulas e não relacionamos este conteúdo com nenhuma outra área do conhecimento ou até mesmo com outro conteúdo da Matemática. Sendo assim, este trabalho foi elaborado de modo a apresentar uma nova abordagem para a resolução de questões de geometria plana utilizando transformações geométricas e números complexos. Às vezes, um tema da Matemática serve apenas de apoio a outro tema. Este, por sua vez, possui uma ligação direta com a prática. E ambos, tanto o apoiador quanto o apoiado, precisam ser estudados.

Para isso, estabeleceremos que existe uma relação entre as operações algébricas com números complexos e as transformações geométricas no plano, apresentando uma forma de aplicação concreta dos números complexos.

O objetivo principal deste trabalho é propor uma abordagem metodológica para o ensino dos números complexos, dando suporte ao professor de Matemática da Educação Básica para que trabalhe com os números complexos de maneira diferente em relação aos livros didáticos; usando áudios, vídeos e software como motivações para o desenvolvimento do conteúdo matemático. Para atingir tal objetivo faz-se necessário:

- Considerar o perfil do aluno atual e sua relação com o ambiente escolar;

- Eludir dificuldades encontradas por alunos e professores quanto à aprendizagem no ensino dos números complexos.

No segundo capítulo apresentaremos um pouco sobre a história dos números complexos, uma vez que tais histórias apresentadas não são trabalhadas no ensino médio. É interessante para os alunos e professores o conhecimento sobre a história dos números ou da matemática de um modo geral, pois mostra os caminhos e desafios enfrentados pela humanidade até os dias atuais.

No terceiro capítulo mostraremos as definições e propriedades básicas relativas aos números complexos partindo da Álgebra Linear e utilização da teoria das matrizes na construção dos números complexos.

No quarto capítulo apresentaremos os áudios, vídeos e o software da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Universidade Estadual de Campinas. Material disponível no site `http://m3.ime.unicamp.br/` e que dá suporte ao trabalho apresentado nesta dissertação.

No quinto capítulo são apresentadas as sugestões de atividades para o estudo dos números complexos e os resultados da pesquisa de campo realizada com os alunos do ensino médio de uma escola pública. As atividades sugeridas são complementares ao estudo realizado. A pesquisa de campo mostra o avanço dos alunos ao longo do projeto apresentado no ensino médio e serve como metodologia de ensino para os educadores da educação básica que desejarem algo diferenciado envolvendo os números complexos.

Por fim, no último capítulo são apresentadas algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido.

2 Um pouco sobre a história dos Números Complexos

Neste Capítulo faremos um estudo histórico, de acordo com Garbi (1997), procurando levantar como surgiram os números complexos e quais obstáculos epistemológicos ligados a esse conceito.

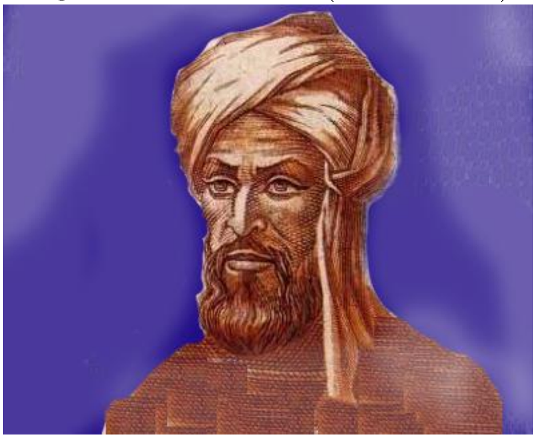
A aceitação, compreensão e utilização dos números complexos ocorreram de modo lento. Costuma-se dizer que esses números estão ligados às equações de 2º grau, mas vemos ao decorrer de sua história, que esses números estão ligados à resolução de equações algébricas, principalmente às equações de 3º grau.

Ao longo da história, resolver equações sempre foi um assunto que deslumbrou os estudiosos da Matemática. Na Babilônia, os antigos matemáticos conseguiam resolver algumas equações do 2º grau através de "completamento de quadrados". O desenvolvimento da matemática também teve um importante papel executado pelos povos gregos, e estes resolviam alguns tipos de equações do 2º grau com régua e compasso, mas a conquista da Grécia por Roma praticamente acabou com o domínio da Matemática Grega. Porém, quando a Europa entrou na *Idade das Trevas*[1], o desenvolvimento da Matemática ficou nas mãos dos árabes e dos hindus. Isso após a ascensão do Cristianismo e fim do Império Romano.

A Álgebra teve um importante progresso com os matemáticos hindus. E quando falamos de equações do 2º grau lembramos-nos de Bhaskara, matemático que nasceu em 1114 na cidade de Vijayapura, na Índia. Todavia, a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara no século XI. Entretanto, os matemáticos da época não ficavam perturbados quando, com o auxílio da fórmula de Bhaskara, e dependendo da equação, o número $\Delta = b^2 - 4ac$ fosse negativo. Eles diziam, neste caso, que o problema não tinha solução.

[1] Essa expressão se dá em referência à Idade Média, período da história da Europa entre os séculos V e XV. Época com pouco desenvolvimento cultural, pois a cultura era controlada pela Igreja Católica. Alguns historiadores afirmavam que nesse período não ocorreu desenvolvimento científico e técnico.

Figura 2.1: Bhaskara $(1114 - 1185)$



Fonte: `http://www.coladaweb.com/biografias/bhaskara`

Foi na Europa, no século XVI, mais precisamente na Itália, com estudiosos interessados pela Matemática, onde foi percebido que os números reais não eram suficientes. Assim, começou a criação do conjunto dos números complexos. Isso ocorreu em meio à disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução de equações do 3º grau.

Segundo Eves (2004), o primeiro matemático que resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3+mx = n$, provavelmente baseando-se em fontes árabes, foi Scipione del Ferro $(1465 - 1526)$, em Bolonha, por volta de 1515. Del Ferro revelou seu segredo ao seu pupilo, Antonio Fior, e não publicou o resultado. Porém, em meados do século XVI, Niccolo Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px = n$.

> "Achando que se tratava de blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente. Mais tarde, Girolamo Cardano, um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução cúbica. Em 1545, porém quando apareceu em Nuremberg a *Ars Magna* de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tártaglia da cúbica."(EVES, 2004)

Girolamo Cardano $(1501 - 1576)$ discute em seu livro *Ars Magna* (A Grande Arte), publicado em 1545, o problema de encontrar dois números x e y cuja soma é 10, $x + y = 10$ e cujo produto é 40, $xy = 40$. Este problema gera uma equação quadrática $x^2 - 10x + 40 = 0$, cujas raízes são $5 - \sqrt{-15}$ e $5 + \sqrt{-15}$. Com isso ele observa que estes números não existem.

Figura 2.2: Girolamo Cardano e Niccolo Fontana Tartaglia

Fonte: http://pt.slideshare.net/biancafilgueiras1/histria-e-surgimento-dos-nmeros-complexos

Para Garbi (1997), o problema seguinte foi o que levou os matemáticos à descoberta dos números complexos:

Problema: Considere a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

a) Mostre que $x = 4$ é solução da equação.

b) Divida $x^3 - 15x - 4 = 0$ por $x - 4$.

c) Encontre as outras duas soluções da equação e verifique que são números reais.

d) Aplique a fórmula de Cardano (Tartaglia!) e verifique que a solução fornecida pela fórmula é:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Reflitindo sobre o problema parece que há algo de errado com as soluções encontradas.

Com isso, começaram a surgir questionamentos intrigantes que não podiam ser deixados de lado. Agora, além da extração de raízes quadradas de números negativos, também encontramos extrações de raízes cúbicas de números de natureza ignorada. E isso não ocorria apenas com essa equação. Podemos demonstrar facilmente que as equações do tipo $\mathrm{x}^3 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0$ tem as 3 raízes reais se, e somente se, $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0$.

Os números reais eram insuficientes para se abordar as equações algébricas e foi Raphael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1526, quem conseguiu desatravancar o empecilho e chegar aos novos números. Raphael Bombelli era um admirador de *Ars Magna* de Cardano, publicada em 1545, mas achava que seu estilo de exposição não era claro. Decidiu então, escrever um livro expondo os mesmos assuntos, mas de tal forma que um principiante pudesse estudá-los sem necessidade de nenhuma outra referência. Em 1572, Bombelli publicou *L' Algebra*, obra na qual ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro e na qual considera a equação $x^3 = 15x + 4$. Conforme seu próprio relato no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua ideia foi supor que os números $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma a + $\sqrt{b}$ e a - $\sqrt{b}$, respectivamente. Ele chegou à conclusão que a = 2 e b = 1 com algumas contas. Assim, surgiu o primeiro sinal de que os números complexos poderiam de fato serem instrumentos úteis. Porém, a resistência e o preconceito entre os ilustres da matemática permaneceram.

Figura 2.3: Raphael Bombelli (1526 – 1572)

Fonte: `https://alchetron.com/Rafael-Bombelli-1060617-W`

Bombelli usava a expressão *più di meno* para se referir ao que nós chamamos hoje como $+i$ e *meno di meno* para $-i$. Ele então enuncia o que chamava de regras do produto, que citamos abaixo junto com sua tradução na nossa simbologia.

> "Più via più di meno fa più di meno $+(+i) = +i$
> Meno via più di meno fa meno di meno $-(+i) = -i$
> Più via meno di meno fa meno di meno $+(-i) = -i$
> Meno via meno di meno fa più di meno $-(-i) = +i$
> Più di meno via più meno fa meno $(+i).(+i) = -$
> Meno di meno via più di meno fa più $(-i).(+i) = +$
> Meno di meno via meno di meno fa meno $(-i).(-i) = -$"(ROSA, 1998, p.51).

Com o tempo foram sendo descobertas relações entre números e formas, mesmo tendo a Geometria e a Aritmética origens independentes. Os geniais matemáticos franceses Pierre de Fermat e René Descartes idealizaram independentemente na primeira metade do século XVII o que hoje conhecemos por Geometria Analítica.

Figura 2.4: Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

Com o domínio da Geometria Analítica Descartes estudou, entre outras coisas, as equações algébricas. Descartes escreveu a seguinte frase em uma passagem do livro *Discurso do Método*: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são **imaginárias**".

Figura 2.5: René Descartes $(1596 - 1650)$

Fonte: http://www.biography.com/people/ren-descartes-37613

Justamente por esse motivo, até os dias atuais, o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número imaginário. Termo este, que se consagrou juntamente com a expressão "número complexo". Infelizmente, são denominações um tanto impróprias e particulares para objetos matemáticos.

> "O termo imaginários foi utilizado por Descartes em outras situações para traduzir a impossibilidade de uma representação geométrica para as equações. Em seu livro, ele também faz referências às equações cúbicas e ao método de resolução de Cardano."(PINTO, 2009, p.41)

Foi o matemático francês Abraham de Moivre que relacionou os números complexos com a trigonometria. A fórmula de *De Moivre* afirma que:

$$(\cos x + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, x)^n = \cos(nx) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Esta fórmula é importante porque estabelece uma ligação entre os números complexos e a trigonometria, pois i que é a unidade imaginária pode ser colocada no lugar da $\sqrt{-1}$.

Figura 2.6: Abraham de Moivre (1667 – 1754)

Fonte: `https://alchetron.com/Abraham-de-Moivre-1078669-W#-`

Usando o Cálculo, Leonhard Paul Euler descobriu alguns anos mais tarde, que $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$, (quando x é medido em radianos). Para $x = \pi$, esta expressão se torna $e^{i\pi} = -1$, que relaciona alguns dos mais importantes números da Matemática: os números irracionais e e π, o número imaginário i e o número 1 com o sinal negativo.

O trabalho mais respeitável e determinante sobre o assunto dos números complexos foi de Euler. Dentre as inúmeras contribuições de Euler, foi evidente seu empenho no progresso da simbologia. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações sugeridas por Euler destacamos o i substituindo $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Esses números são chamados de números complexos.

Já na metade do século XVIII, compreendia-se que os números complexos tinham uma ligação intensa com as funções trigonométricas e exponenciais. Todavia prosseguiam alguns problemas. Para Euler, a $\sqrt{-2}$ ainda era um problema.

Figura 2.7: Leonhard Euler (1707 – 1783)

Fonte: `https://teleskopos.wordpress.com/2013/06/21/leonhard-euler-longitude-winner/`

Carl Friedrich Gauss ($1777-1855$) foi um dos mais impressionantes homens nos séculos XVIII e XIX. Em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt, escrita aos vinte anos de idade, deu a primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. O Teorema Fundamental da Álgebra é bastante conhecido e utilizado há muito tempo, mas os matemáticos tiveram que esperar um jovem brilhante matemático alemão completar a sua tese de doutorado para observar a primeira demonstração inteiramente correta deste fato.

Figura 2.8: Carl Friedrich Gauss ($1777-1855$)

Fonte: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg`

Em matemática, o teorema fundamental da Álgebra afirma que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa. Em outras palavras, o corpo dos números complexos é algebricamente fechado e, portanto, tal como com qualquer outro corpo algebricamente fechado, a equação $p(z) = 0$ tem n soluções (não necessariamente distintas). A ideia por trás da demonstração de Gauss é a substituição de z por $x+iy$, na equação polinomial geral $p(z)=0$. Também foi Gauss quem propôs o termo "números complexos".

No século XIX, as coisas começaram a ser postas em ordem. O matemático francês Jean-Robert Argand, nascido na Suíça, foi o primeiro a indicar em 1806 que se poderiam representar geometricamente os complexos em um plano. Gauss propôs a mesma ideia em 1831 e este plano no qual os complexos são representados é chamado de plano de Argand-Gauss.

Figura 2.9: Jean-Robert Argand (1768 – 1822)

Fonte: http://www.routledgetextbooks.com/textbooks/9780415662802/biographies.php

Com isso, vimos que os números complexos não surgiram de repente, foi necessário um estudo sistemático por parte de muitos matemáticos ao longo da história para compreenderem a construção desses números, propriedades, utilidades e fórmulas que temos nos dias atuais. É importante conhecermos a história dos números para sabermos os motivos que levaram os estudiosos do passado a chegarem nos conceitos que temos no presente. No próximo capítulo faremos a construção dos números complexos através da Álgebra Linear e veremos mais detalhadamente as propriedades e operações com esses números, pois eles possuem muita importância na Matemática.

3 A Álgebra Linear e os Números Complexos

Apresentaremos aqui a construção dos números complexos utilizando a álgebra linear e a teoria das matrizes (SOARES, 2003).

De acordo com Soares (2003), o adjetivo complexo é infeliz, herdado de épocas nas quais a abstração envolvida na compreensão desses números era considerada elevada. Atualmente sabemos que o conceito de número *real* existe nível de abstração equivalente e, para exemplificar isso, começamos trabalhando a mais básica ilustração que se pode dar sobre números complexos: a solução da equação

$$X^2 + 1 = 0 \text{ ou, o que dá no mesmo, } X^2 = -1.$$

No conjunto $\mathbb{R}$ esta equação não tem solução e com isso somos obrigados a definir um "número" i, satisfazendo $i^2 = -1$, que soluciona a equação. Recorrendo à Álgebra Linear elementar e procurando um ente de natureza geométrica que seja a solução procurada podemos olhar para essa equação sob a forma

$$X \cdot X = -I$$

onde X é uma matriz quadrada de ordem 2 com coeficientes reais e I é a matriz identidade $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Temos assim uma equação matricial cuja solução é dada pela matriz

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pois

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou ainda, $i = \begin{pmatrix} \cos 90^o & -\operatorname{sen} 90^o \\ \operatorname{sen} 90^o & \cos 90^o \end{pmatrix}$ corresponde geometricamente à rotação de um ângulo reto $\left(90^o \ ou \ \frac{\pi}{2} radianos\right)$ no plano $\mathbb{R}^2$, no sentido anti-horário.

Podemos ver essa rotação $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ como um número dentro de um conjunto que amplia o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais fazendo o seguinte:

Associando o número real a ou o número real c à matriz identidade teremos:

$$aI = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ou

$$cI = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Com isso, podemos perceber que as matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se comportam exatamente da mesma maneira que os números reais em relação à soma e ao produto, pois $a + c = c + a$ e $ac = ca$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}$$

Podemos com isso dizer que $\mathbb{R}$ é *isomorfo* ao corpo cujos elementos são as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ onde $a \in \mathbb{R}$.

Vamos agora ampliar o conjunto $\mathbb{R}$ considerando as matrizes 2×2 da forma

$$aI + bi = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Podemos chamar os "números" da forma $aI + 0i = aI$ de *reais*, os da forma $0I + bi = bi$ de *imaginários* e os "números" da forma $aI + bi$ de *números complexos*.

Assim, a partir da soma e do produto das matrizes deste tipo, podemos definir as operações entre números complexos. Com isso, a soma é comutativa e dada por

$$(aI+bi)+(cI+di) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = (a+c)I+(b+d)i,$$

onde temos como elemento neutro a matriz nula gerada por $0I + 0i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e como elemento simétrico a matriz gerada por $-(aI + bi) = -aI - bi = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

O produto das matrizes deste tipo é dado por

$$(aI + bi) \cdot (cI + di) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = (ac - bd)I + (ad + bc)i,$$

tendo como elemento identidade a matriz obtida por $1I + 0i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podemos observar também que

$$(aI+bi)\cdot(cI+di) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = (cI+di)\cdot(aI+bi)$$

e concluir que o produto é *comutativo.*

É possível também obter o inverso multiplicativo. Para isso temos que lembrar que uma matriz quadrada é invertível se e somente se o seu determinante não é nulo, e também que

$$det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

se anula apenas para $a = b = 0$. Portanto, um número complexo dado por $aI + bi$ tem um inverso multiplicativo desde que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, isto é, $aI + bi \neq 0I + 0i$ e nesse caso

$$(aI + bi)^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2 + b^2} & \dfrac{b}{a^2 + b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2} & \dfrac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} = \frac{a}{a^2 + b^2} I + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

Sabemos que a soma e o produto de matrizes quadradas são operações associativas. Sendo assim, é válido também a distributividade do produto em relação à soma. Portanto, podemos concluir que todas essas propriedades são válidas para a soma e para o produto dos números complexos e com isso o conjunto $\{aI + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ é um *corpo*, chamado de corpo dos números complexos e representado por $\mathbb{C}$.

Com isso, vimos que fazer corresponder o número $a \in \mathbb{R}$ a matriz diagonal $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ não incorporou modificação nenhuma no que diz respeito à soma e ao produto. Vendo de outra maneira, essa identificação $i^2 = i \cdot i =$ -I condiz com o número real -1. Assim, podemos de modo mais descomplicado eliminar o "I"em $aI+bi$ e associar i^2 a -1, tendo em mente sempre as fórmulas para a soma e para o produto dos números complexos. Com isso, escrevemos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

mas sabendo que o produto também é comutativo, temos $bi = ib$ e conseguimos escrever um número complexo $a + bi$ como $a + ib$. E como $i^2 = -1$ somos naturalmente levados a colocar $i = \sqrt{-1}$.

> "Pois bem, o que fizemos até agora foi resolver a equação $X^2 = -1$ e a partir daí obtivemos o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos. E se tivéssemos considerado uma outra equação polinomial? Teríamos obtido um outro corpo, talvez mais "complexo"? A resposta é não e constitui uma página importante da Matemática. Ela foi dada por Carl Friedrich Gauss, matemático alemão que na sua tese de doutorado em 1799 demonstrou o *Teorema Fundamental da Álgebra*, segundo o qual qualquer equação polinomial sobre o corpo $\mathbb{C}$ tem solução."(SOARES, 2003, p. 4-5)

3.1 O conjunto $\mathbb{C}$

Definição 3.1. *Segundo (CHURCHILL, 1975), um número complexo z pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais x e y,*

$$z = (x, y), \tag{3.1}$$

sujeito às regras e leis de operação a serem especificadas abaixo.

> "Essa definição é devida ao matemático irlandês William R. Hamilton e apareceu em 1837, embora muito anteriormente vários matemáticos já houvessem trabalhado com números complexos como pontos no plano."(SOARES, 2003, p. 5)

O par (x, y) é identificado com o número real x quando

$$(x, 0) \Rightarrow x. \tag{3.2}$$

Esta regra nos proporciona caracterizar os números reais como um subconjunto do conjunto dos números complexos.

Convém-nos dar um nome e um símbolo ao par $(0, 1)$. Esse par será chamado *unidade imaginária* e indicada por i:

$$(0, 1) \Rightarrow i.$$

Os números reais x e y são, respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginária* de (x, y), sendo indicados por

$$Re(z) = x \qquad \text{e} \qquad Im(z) = y.$$

Um par do tipo $(0, y)$ é um número *imaginário puro.*

Uma outra regra a ser imposta a tais pares é que dois números complexos são iguais se, e somente se, as partes real e imaginária de um são iguais, respectivamente, às do outro.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \ \textit{se, e somente se,} \ x_1 = x_2 \ \textit{e} \ y_1 = y_2 \tag{3.3}$$

Em particular, visto que $0 = (0, 0)$, tem-se

$$z = (x, y) = 0 \ \textit{se, e somente se,} \ x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Denotando por $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$ a soma e o produto de dois números complexos quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ podemos defini-los como os números complexos dados pelas fórmulas:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{3.4}$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{3.5}$$

Em especial, temos $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ e $(0, y) = (y, 0)(0, 1)$. Assim, podemos escrever cada número complexo que não é real como a soma de um número real com um número imaginário puro:

$$z = (x, y) = x + yi. \tag{3.6}$$

O produto zz se escreve z^2; z^3 significa zz^2, etc. De acordo com a equação (3.5), tem-se $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, isto é,

$$i^2 = -1.$$

Em vista da equação (3.6), podemos escrever a equação (3.5) como

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

A ampliação formal do produto no primeiro membro, realizada como se os binômios fossem reais, e a substituição de i^2 por -1, dão o mesmo resultado. A equação (3.5) justifica esse procedimento formal.

Os pares ordenados (3.1) de números reais que satisfazem às condições (3.2) a (3.5) são *definidos* como números complexos.

3.2 Propriedades Adicionais

Podemos definir várias outras operações envolvendo os números complexos. A operação de subtração é a inversa da adição, isto é, se a diferença $z_1 - z_2$ se denota por z_3,

$$z_1 - z_2 = z_3.$$

Assim, z_3 é o número complexo que deve ser somado a z_2 para encontrar z_1:

$$z_2 + z_3 = z_1 \text{ ou } (x_2, y_2) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1)$$

Pela equação (3.4), temos na adição:

$$(x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1)$$

logo, igualando as partes correspondentes, vemos que:

$$x_2 + x_3 = x_1,\ y_2 + y_3 = y_1$$

Se resolvermos em relação a x_3 e y_3, obtemos a lei da subtração:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i$$

A divisão é a inversa da multiplicação, assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \text{ se } z_2 z_3 = z_1 \ (z_2 \neq 0)$$

ou

$$(x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) = (x_1, y_1).$$

Igualando as partes correspondentes e resolvendo as duas equações consequentes em relação a x_3 e y_3, obtemos a lei da divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \ (z_2 \neq 0).$$

Observamos que esta mesma fórmula aparece de modo distinto e manipulativo quando multiplicamos ambos o denominador e numerador no primeiro membro por $x_2 - y_2 i$.

A divisão por zero não é definida.

A partir das fórmulas para o quociente e para o produto é fácil mostrar que

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left(\frac{1}{z_2}\right),\ \frac{1}{z_2 z_3} = \left(\frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_3}\right) \ (z_2 \neq 0, z_3 \neq 0).$$

Podemos utilizar as leis comutativas para a adição e para a multiplicação,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

isso em decorrência da definição de números complexos e do fato de que os números reais satisfazem a tais leis. Exemplo:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i = x_2 + x_1 + (y_2 + y_1)i = z_2 + z_1.$$

Também são satisfeitas pelos números complexos as leis associativas para a adição e para a multiplicação, assim como a lei distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3,$$

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3,$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Como consequências, temos que:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \ \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right), \ (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0).$$

Devemos destacar também, a decorrência de outra propriedade: se o produto de dois números complexos é nulo, então pelo menos um dos fatores deve ser nulo, isto é,

$$z_1 z_2 = 0 \text{ implica que } z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0.$$

Da definição do produto decorre que, se $z_1 z_2 = 0$, então

$$x_2 x_1 - y_2 y_1 = 0 \text{ e } y_2 x_1 + x_2 y_1 = 0.$$

Se, pelo menos, um dos x_1 e y_1 não é nulo, então o determinante dos seus coeficientes no sistema homogêneo acima deve ser igual a zero, isto é,

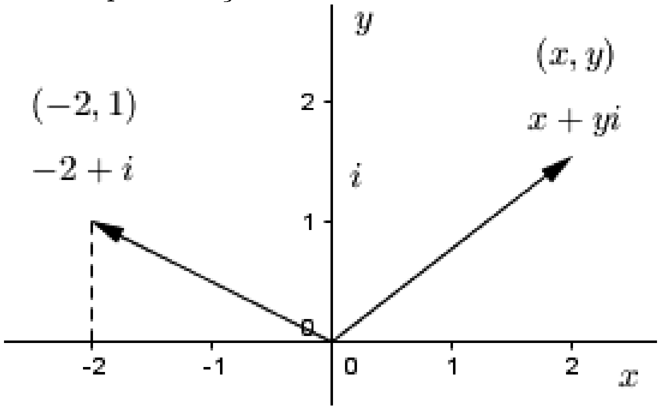
$${x_2}^2 + {y_2}^2 = 0$$

e portanto $x_2 = y_2 = 0$. Assim, se $z_1 z_2 = 0$, então ou $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, ou ainda, $z_1 = z_2 = 0$.

3.3 Representação Geométrica

Podemos representar um número complexo z através da associação entre um par (x, y) e as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto no plano cartesiano. Cada número complexo corresponde a um único ponto. Como exemplo, temos que o número complexo $-2+i$ é representado pelo ponto $(-2, 1)$. A origem representa o ponto $z = 0$. Quando usado para exibir os números complexos z geometricamente, o plano XY se diz *plano complexo* $\mathbb{C}$.

Figura 3.1: Representação Geométrica de um Número Complexo



Fonte: Feito no *GeoGebra* pelo próprio autor

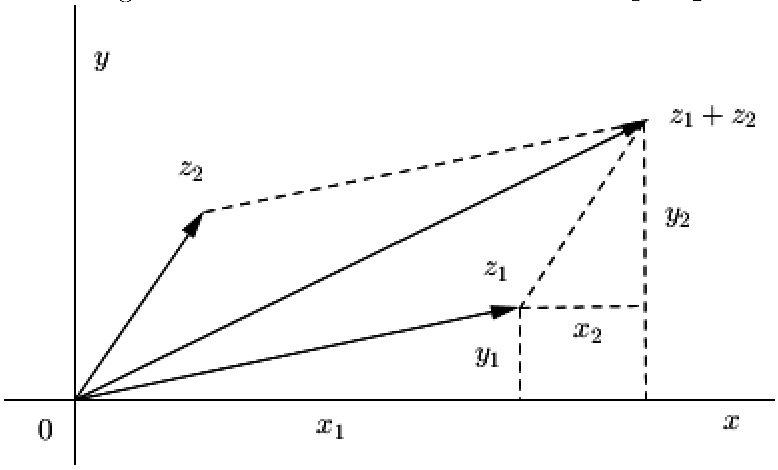
> "A cada número complexo z corresponde um único ponto do plano, o afixo de z, e a cada ponto do plano corresponde um único número complexo ou plano de Gauss (Carl Friedrich Gauss/$1777-1855$) ou de Argand-Gauss (Jean Robert Argand/$1768-1822$)."(IEZZI, 1981, p. 130)

Por outro lado, o número z pode ser representado como um segmento orientado (vetor) da origem ao ponto (x, y), ou como qualquer vetor obtido pela translação desse vetor no plano. Assim, o vetor emanando do ponto $(2, 1)$ ao ponto $(3, 3)$, que tem a primeira componente igual a 1 e a segunda igual a 2, representa o número $1 + 2i$. A representação vetorial e a representação por pontos, de números complexos, são, ambas, muito úteis.

Um número complexo z será considerado como um ponto z ou como um vetor v. Devemos notar que o produto z_1z_2 de dois números complexos é um número complexo, vetor no plano dos vetores z_1 e z_2. Este produto não é o produto escalar nem o produto vetorial, usados no cálculo vetorial. Consequentemente, os números complexos não podem ser identificados com os vetores do cálculo vetorial de dimensão dois. Os vetores no cálculo vetorial, assim como matrizes, são números complexos de outro tipo; suas álgebras são diferentes da álgebra para os números z.

Pela definição da soma de dois números complexos, $z_1 + z_2$ corresponde ao ponto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Por sua vez, este ponto corresponde ao vetor cujas componentes são as coordenadas do ponto. Portando, o número complexo $z_1 + z_2$ é representado pela soma vetorial dos vetores z_1 e z_2.

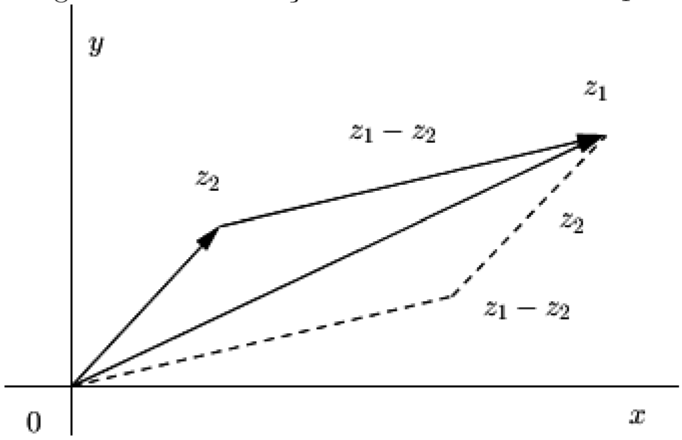
Figura 3.2: Soma Vetorial dos vetores z_1 e z_2



Fonte: Feito no *GeoGebra* pelo próprio autor

A diferença $z_1 - z_2$ é representada pelo vetor, partindo do ponto z_2 ao ponto z_1.

Figura 3.3: Diferença Vetorial dos vetores z_1 e z_2



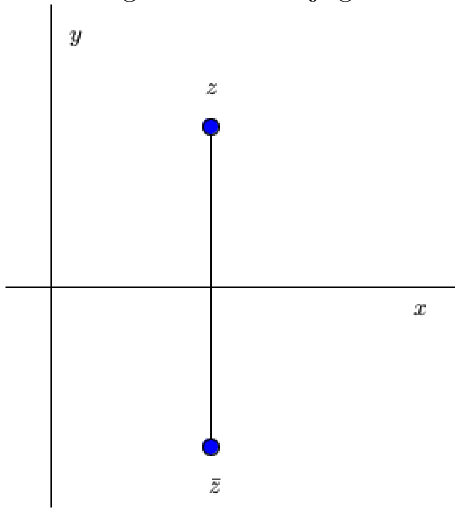
Fonte: Feito no *GeoGebra* pelo próprio autor

3.4 Conjugados Complexos

Dado um número complexo $z = x + yi$, o conjugado de z é o número complexo $\bar{z} = x - yi$.

Note que $\bar{z}$ significa, geometricamente, a reflexão de z em torno do eixo horizontal.

Figura 3.4: Conjugado de z



Fonte: Feito no *GeoGebra* pelo próprio autor

A conjugação é importante porque, entre outras informações, nos diz que:

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Além disso é fácil verificar:

- $x = Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$,
- $y = Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \dfrac{-i}{2}(z\bar{z})$,
- z é real se e somente se $z = \bar{z}$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Usando a última dessas igualdades obtemos

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \, |z_2|^2,$$

ou seja,

$$|z_1| = |z_1| \, |z_2|.$$

3.5 Representação Polar

Sabendo que um número complexo pode ser definido por um par ordenado de números reais, temos que um número qualquer pode ser identificado como um ponto do plano cartesiano.

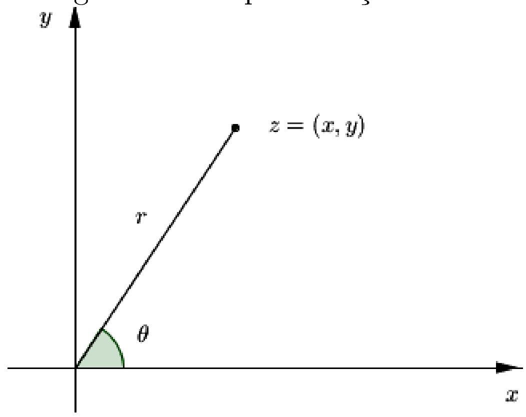
Uma outra identificação pode ser obtida através das *coordenadas polares* (r, θ). Se $(x, y) \neq (0, 0)$ é um ponto do plano então a coordenada r desse ponto é a distância à origem e a coordenada θ é o ângulo determinado pelo segmento de reta que une um ponto à origem e o semi-eixo positivo dos x, medido no sentido anti-horário (em radianos).

As coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas por:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Figura 3.5: Representação Polar



Fonte: Feito no *GeoGebra* pelo próprio autor

Portanto, um número não nulo $z = x + iy = (x, y)$ se escreve

$$z = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Esta é a chamada *representação polar* ou *forma trigonométrica* de um número complexo.

Chamamos, para qualquer valor de θ no qual a igualdade acima se verifica, de *um argumento* de z e usamos a notação $\theta = \arg(z)$. O valor de θ não é único. Se a igualdade é verdadeira para um valor de θ, também o é para $\theta + 2k\pi$, k é um número inteiro arbitrário, mas θ pode ser determinado de maneira única exigindo, por exemplo, que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou que $-\pi < \theta \leq \pi$.

> "Se θ é um argumento de $z = x + yi$ então $x = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, que é chamada *forma trigonométrica ou polar* do complexo z. (Os números r e θ são as *coordenadas polares* do ponto $P(x, y)$ do plano)."(LIMA, 1998, p.193)

Vamos dar alguns exemplos. Os números da forma yi com $y > 0$ têm a representação polar

$$yi = y\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Já os da forma $x + ix$ com $x < 0$ se escrevem

$$x + ix = -\sqrt{2}x\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}x\left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Agora, sejam z e w dois números complexos não nulos com representações polares

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$w = \rho(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

Temos que a representação do produto zw é

$$zw = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\rho(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi) =$$
$$r\rho[(\cos\theta.\cos\phi - \mathrm{sen}\,\theta.\,\mathrm{sen}\,\phi) + i(\cos\theta.\,\mathrm{sen}\,\phi + \mathrm{sen}\,\theta.\cos\phi)] = r\rho[\cos(\theta+\phi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\phi)]$$

usando as fórmulas de adição para seno e cosseno.

Sabemos que $|zw| = |z|\,|w|$ e agora podemos concluir, a partir da igualdade acima, que $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$, ou seja, um argumento do produto de dois números complexos é igual a soma dos argumentos desses números.

Fazendo $z = w$ no exemplo acima, obtemos $z^2 = r^2[\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta)]$.

Essa igualdade é sugestiva e nos induz a dizer que

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = r^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, uma afirmativa verdadeira, conhecida como *fórmula de De Moivre*. Uma demonstração imediada desta fórmula pode ser feita por indução.

Vimos neste capítulo a construção de um conjunto que amplia o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, ou seja, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Foi apresentado as diversas operações envolvendo esses números, suas propriedades fundamentais, conjugado e tipos de representações (algébrica, geométrica e trigonométrica). No próximo capítulo teremos a apresentação de um material diferenciado para a aplicação em sala de aula envolvendo as características, conceitos, história e representações de um número complexo.

4 Áudios, Vídeos e Software para o Ensino dos Números Complexos

Esse capítulo tem como objetivos: trazer uma proposta de ensino dos Números Complexos através da modelagem matemática de problemas, descrevendo os números complexos enquanto raízes de polinômios e relacionando-os através do teorema fundamental da álgebra; mostrar algumas relações dos números complexos com a trigonometria; mostrar a representação dos números complexos no plano; e, com o auxílio de um software, utilizar o conceito e propriedades de números complexos estudando as transformações de translação, rotação, dilatação e contração no plano complexo. O estudo é realizado por meio da análise do efeito dessas transformações em triângulos e, em especial, são utilizadas as interpretações geométricas das operações de números complexos.

O material apresentado neste capítulo faz parte da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Universidade Estadual de Campinas e pode ser encontrado no endereço eletrônico `http://m3.ime.unicamp.br/`. Este material foi desenvolvido por pessoas de múltiplas profissões, com dedicação de tempo e energia distintos, mas todos com entusiasmo pelas potencialidades para o ensino e aprendizagem da matemática do ensino médio. Segundo o site `http://m3.ime.unicamp.br/` da própria coleção do M^3 - Matemática Multimídia, a proposta nasceu de uma chamada de Edital do MEC e MCT para o desenvolvimento e produção de recursos educacionais em mídias digitais no ano de 2007 sendo que todos os recursos foram desenvolvidos durante aproximadamente 4 anos.

Os recursos educacionais da coleção abordam praticamente todo conteúdo de matemática do ensino médio do Brasil e de forma variada. Cabe ao professor, em acordo com a coordenação pedagógica e direção escolar, escolher os itens que melhor se enquadram no seu programa, respeitando as características do professor e a realidade dos seus alunos. Os recursos educacionais utilizados foram: experimento, vídeo, software e áudio, abordando os temas: análise de dados e probabilidade, geometria e medidas, números e funções para todas as séries do ensino médio de tal maneira que favorecem a interação social ao formar grupos de atividades, mas sempre com a mediação do professor em sala de aula.

Todos os recursos educacionais no formato de vídeos, áudios, softwares e experimentos estão licenciados sob uma licença Creative Commons - é permitido copiar, distribuir, exibir, executar a obra e criar obras derivadas, mas não é permitido o uso comercial ou relicenciamento sobre uma licença mais restritiva.

Figura 4.1: Imagem da página inicial do site M^3 - Matemática Multimídia

Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/`

4.1 Os Áudios: Mundos Imaginários

Os áudios *Mundos Imaginários* fazem parte da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Universidade Estadual de Campinas, Série Cultura, tendo como conteúdo os números complexos, duração de 10 minutos e tem como objetivo principal descrever os números complexos enquanto raízes de polinômios, relacionando-os através do teorema fundamental da álgebra. Tais áudios têm como autores: Leonardo Barichello, Carolina Bonturi, Fernando Martins Collaço e Douglas Mendes

De acordo com o Guia do Professor dos áudios *Mundos Imaginários*, a série Cultura foi concebida com o objetivo de proporcionar aos alunos a oportunidade de fazerem paralelos significativos entre Literatura, Cultura Geral e Matemática, para que eles, além de poderem observar resoluções de problemas de matemática, também se sentissem estimulados a buscar as referências literárias e expandirem seus conhecimentos em diversas áreas.

Estes áudios trabalham os números complexos através de uma história livremente inspirada no livro *O Médico e o Monstro*, do escritor escocês Robert Louis Stevenson.

Na criação imaginária dos áudios, Morfeu é um garoto que, todas as noites, ao ir para a cama, começa a contar carneirinhos até adormecer. O modo como ele faz essa contagem não é muito usual, já que ele acha interessante acrescentar números como ϕ, e, π, entre outros, à sequência 1, 2, 3, ..., seguindo a ordem natural dos números. Por exemplo, o e viria antes do 3 e o π logo após este, pois $e \cong 2,718$, enquanto o $\pi \cong 3,14$. Mas, ainda mais incomum do que a maneira como ele fazia isso, foi o que veio acontecer a Morfeu em uma dessas noites de insônia.

4.2 Os Vídeos

4.2.1 Um Sonho Complexo

O vídeo *Um Sonho Complexo* faz parte da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Universidade Estadual de Campinas, Série Matemática na Escola. O conteúdo envolve a História dos números complexos, suas formas e propriedades algébricas, trigonométricas e geométricas A duração é de 10 minutos e tem como objetivos: apresentar os números complexos, sua parte real e sua parte imaginária; mostrar algumas relações dos números complexos com a trigonometria e mostrar a representação dos números complexos no plano.

Segundo o site `http://m3.ime.unicamp.br/`, a série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

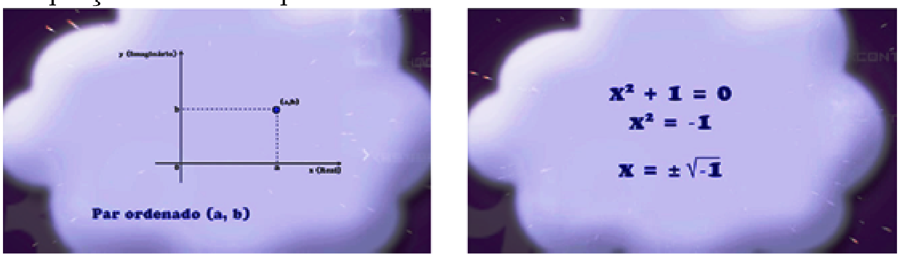
Este vídeo faz parte de uma trilogia, sobre números complexos. Este é o primeiro e os outros dois são: *O sonho Não Acabou* e *O Sonho Continua*. Os vídeos mostram uma maneira divertida e curiosa de olhar para os números complexos. O primeiro usa a dualidade do personagem do livro *O Médico e o Monstro*. O segundo e o terceiro usam Morfeu, o deus dos sonhos. Todos eles tratam da história dos números complexos e de algumas de suas propriedades. Estes vídeos tem como autores: Samuel Rocha de Oliveira, Carolina Bonturi, Ângela Annunciato e Otília W. Paques.

Segue abaixo algumas imagens retiradas do guia do professor encontrado nos Recursos Educacionais do portal da coleção M^3 - Matemática Multimídia:

Figura 4.2: Imagens do vídeo *Um sonho complexo*: Hans e Hydyll

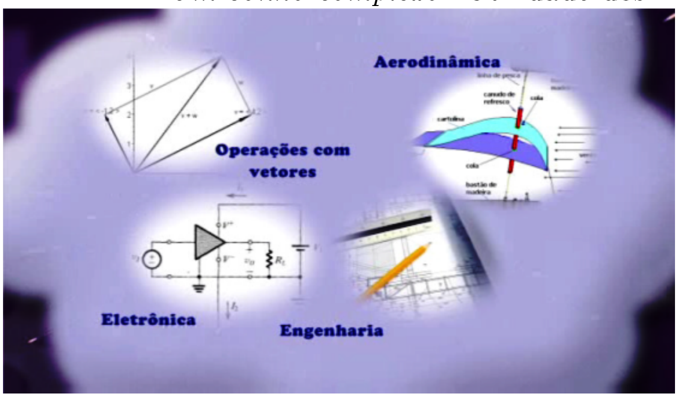
Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187`

Figura 4.3: Imagens do vídeo *Um sonho complexo*: Representação de um número complexo e equação com raiz quadrada de -1



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187`

Figura 4.4: Imagens do vídeo *Um sonho complexo*: Utilidade dos números complexos



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187`

4.2.2 O Sonho Não Acabou

O vídeo *O Sonho Não Acabou* também faz parte da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Universidade Estadual de Campinas, Série Matemática na Escola. Envolve os conteúdos: Números complexos e sua história; Fórmula de *De Moivre* e Adição e multiplicação de números complexos. A duração também é de aproximadamente 10 minutos e têm como objetivos: Apresentar uma breve história dos números complexos; apresentar a fórmula de *De Moivre* para potências inteiras de números complexos e mostrar as raízes n-ésimas de números complexos.

Segue abaixo outras imagens retiradas do guia do professor encontrado nos Recursos Educacionais do portal da coleção M^3 - Matemática Multimídia:

Figura 4.5: Imagens do vídeo *O sonho não acabou*: Hans, Morfeu e a Fórmula de *De Moivre*

Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1142`

Figura 4.6: Imagens do vídeo *O sonho não acabou*: Morfeu

Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1142`

4.2.3 O Sonho Continua

Já o terceiro vídeo da mesma coleção - *O Sonho Continua* - envolve os conteúdos: História dos números complexos, suas formas e propriedades algébricas, trigonométricas e geométricas; Fórmula de Euler e Conjuntos numéricos. Possui duração semelhante aos outros vídeos e tem como objetivos: Apresentar o número complexo, mostrar a fórmula trigonométrica de Euler e mostrar os principais conjuntos numéricos.

Segue abaixo imagens retiradas do guia do professor encontrado nos Recursos Educacionais do portal da coleção M^3 - Matemática Multimídia:

Figura 4.7: Imagens do vídeo *O sonho Continua*: Morfeu e os conjuntos numéricos

Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1141`

Figura 4.8: Imagens do vídeo *O sonho Continua*: Fórmula de Euler

Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1141`

4.3 O Software

O software utilizado nesse trabalho é o de *Movimentos Complexos*, que tem como autores Claudina Izepe Rodrigues, Leonardo Barichello e Rita Santos Guimarães. Os conteúdos abordados são: transformações no plano (translação, rotação, dilatação e contração) e números complexos (operações e propriedades). Tem como objetivos: estudar o efeito da translação, rotação, dilatação e contração no plano complexo; aplicar os conceitos e propriedades dos números complexos; e utilizar as propriedades geométricas das operações de números complexos.

É importante saber que para o software funcionar adequadamente é preciso que o computador tenha o software *GeoGebra* instalado. Além disso, é preciso mudar as configurações no Painel de Controle do *java*, acrescentado na parte de segurança, no local *Lista de Exceções de Sites*, o site `http://m3.ime.unicamp.br/`, dando assim permissão de ser executado após os *prompts* de segurança apropriados.

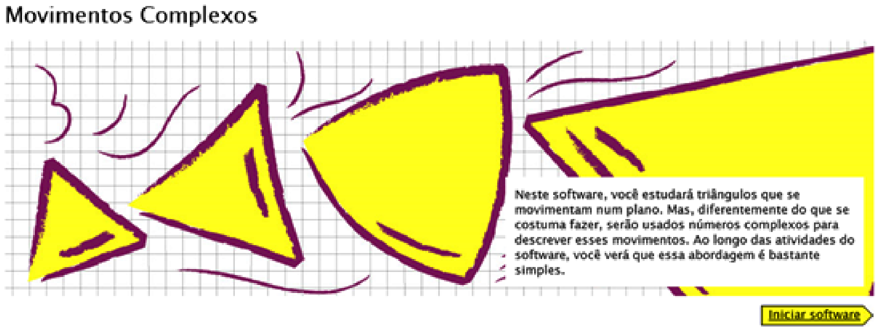
Figura 4.9: Página para iniciar o software *Movimentos Complexos*

Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1239`

4.3.1 Movimentos Complexos

Neste software, utilizando o conceito e propriedades dos números complexos, são estudadas as transformações de translação, rotação, dilatação e contração no plano complexo. O estudo é realizado por meio da análise do efeito dessas transformações em triângulos e, em especial, são utilizadas as interpretações geométricas das operações de números complexos.

Figura 4.10: Imagem da página para iniciar o software *Movimentos Complexos*

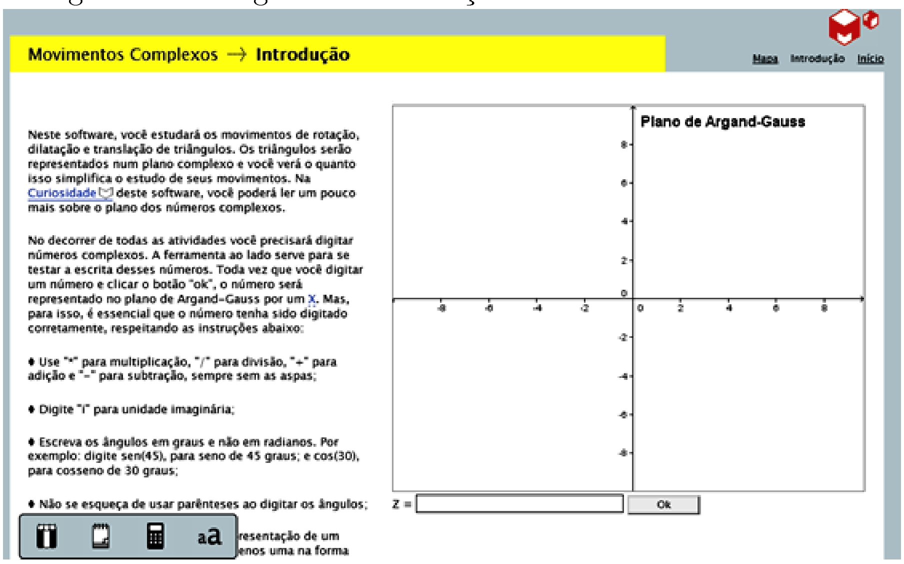


Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/`

As transformações geométricas constituem ferramentas importantes em geometria facilitando a resolução de vários problemas. O objetivo desse software é o estudo das transformações geométricas de translação, rotação, dilatação e contração utilizando os conceitos, operações, propriedades e interpretação geométrica das operações de números complexos. Sobretudo, são exploradas as relações entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. Sendo assim, tal software constitui uma motivação para o estudo dos números complexos adequada para o desenvolvimento no Ensino Médio.

O software *Movimentos Complexos* é composto por uma atividade e um desafio, sendo que este último pode gerar novos desafios aleatoriamente enquanto o usuário desejar.

Figura 4.11: Página de introdução às atividades do Software



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/introducao.html`

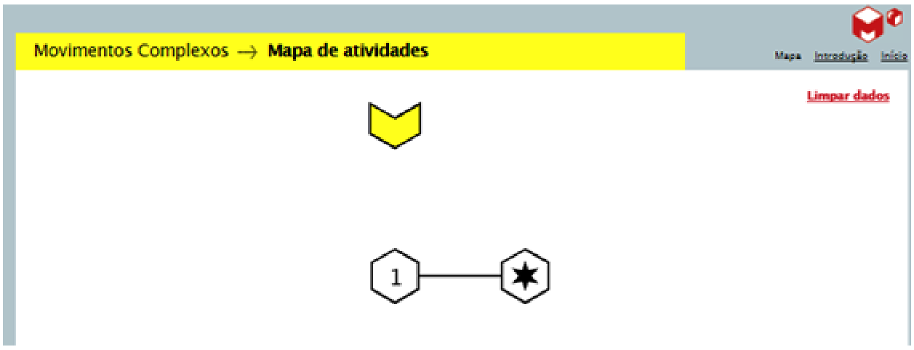
A Atividade 1 envolve todo conteúdo, enquanto que o desafio explora o conteúdo apresentado anteriormente com um grau de dificuldade maior, ficando a cargo do professor da sala decidir como utilizá-lo com seus alunos.

Atividade 1 - Os Movimentos

Como já foi dito anteriormente, o objetivo desta atividade é o estudo das transformações de translação, rotação, dilatação e contração no plano, utilizando os conceitos e operações de números complexos, propriedades e características geométricas. Desse modo, é conveniente que, antes do início do software, seja feita com os alunos uma recordação desses tópicos. Esta atividade é dividida em 6 partes.

A figura 4.12 mostra o Mapa de Atividades, onde o aluno pode escolher em realizar as questões da Atividade 1 ou ir diretamente para o Desafio. Nesta tela o aluno também consegue visualizar e conhecer algumas curiosidades sobre os números complexos e o plano de Argand-Gauss clicando na seta de cor amarela na parte superior.

Figura 4.12: Mapa de atividades



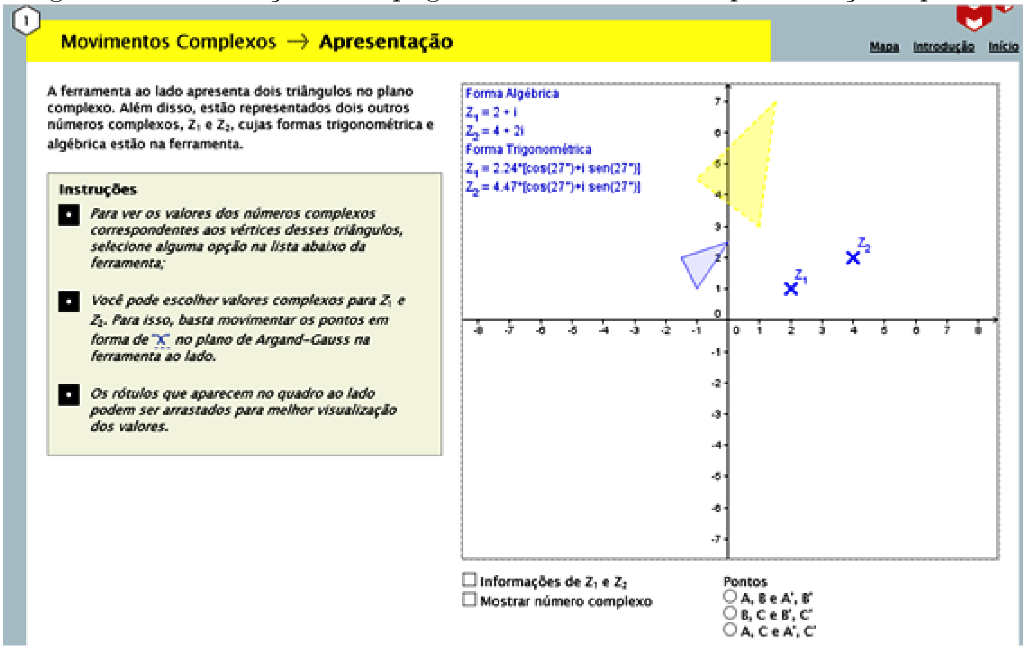
Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/mapa.html`

- **Parte 1: Apresentação**

Na parte 1 da Atividade 1 é apresentada uma ilustração com dois triângulos tendo como vértices os números complexos A, B, C e A', B', C', respectivamente. O triângulo ABC é fixo e o triângulo A'B'C' é obtido a partir do triângulo ABC e de dois números complexos Z_1 e Z_2. O aluno pode variar os números complexos Z_1 e Z_2, e o software automaticamente apresenta na tela o triângulo A'B'C'. É possível também observar na tela do software as formas algébricas e trigonométricas dos números complexos Z_1 e Z_2.

O objetivo desta parte é a familiarização com a ferramenta. Os alunos são orientados a calcular os números complexos A', B', C' utilizando o procedimento descrito acima e comparando com os valores apresentados pela ferramenta.

Figura 4.13: Cabeçalho da página da atividade de apresentação - parte1

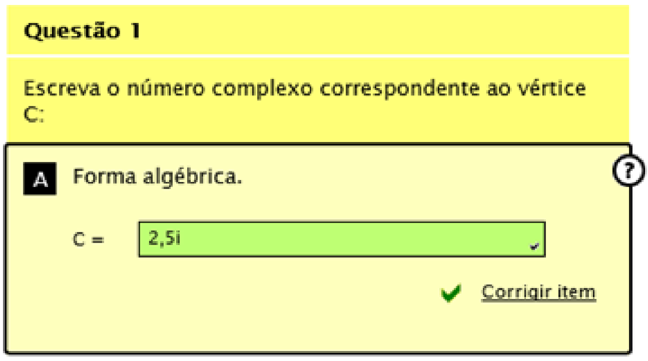


Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte1.html`

Na parte 1 da Atividade 1 teremos 5 questões para serem respondidas envolvendo a situação apresentada. Só é possível passar para a próxima parte da Atividade 1 se todas as questões estiverem corretas.

A 1ª questão pede para escrevermos o número complexo em sua forma algébrica correspondente ao vértice C do triângulo ABC.

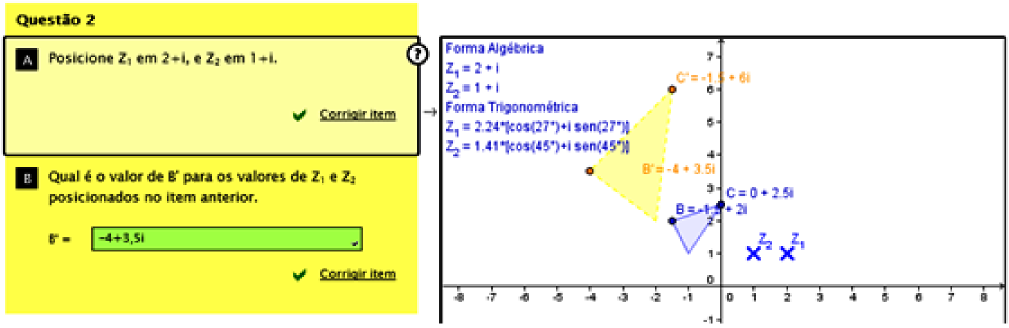
Figura 4.14: Imagem da questão 1 da atividade de apresentação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte1.html`

Na 2ª questão devemos posicionar Z_1 em $2+i$ e Z_2 em $1+i$, respondendo em seguida qual o valor do número complexo correspondente ao vértice B'.

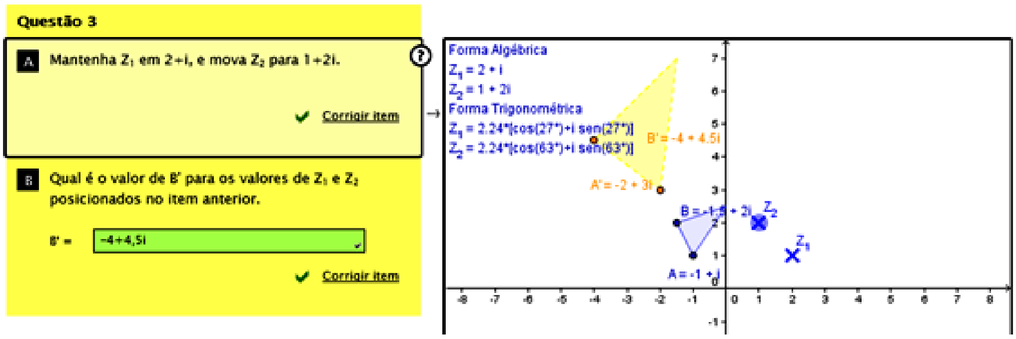
Figura 4.15: Imagem da questão 2 da atividade de apresentação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte1.html`

A 3ª questão pede para mantermos Z_1 em $2+i$ e movermos Z_2 para $1+2i$. Em seguida, pergunta-nos o valor do número complexo correspondente ao vértice B'.

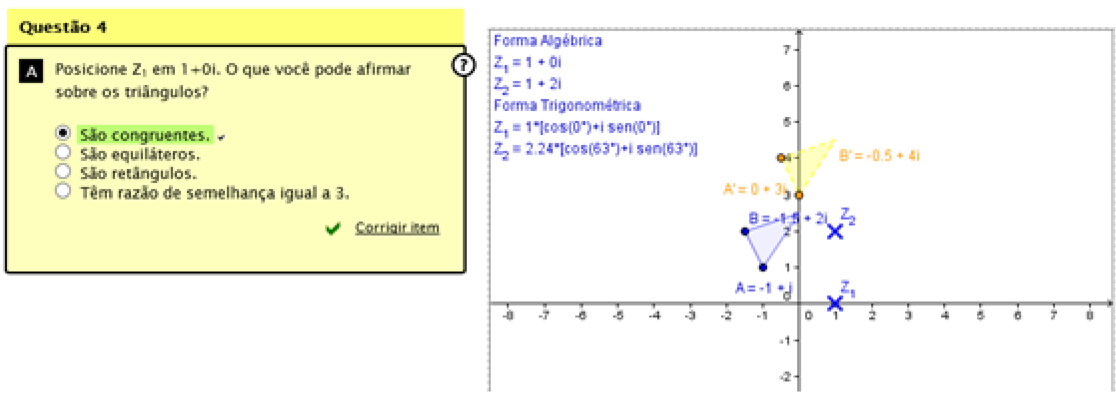
Figura 4.16: Imagem da questão 3 da atividade de apresentação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte1.html`

Na 4ª questão desta parte, devemos posicionar Z_1 em $1+0i$ e responder o que podemos afirmar sobre os dois triângulos: se eles são congruentes, equiláteros, retângulos ou se têm razão de semelhança igual a 3.

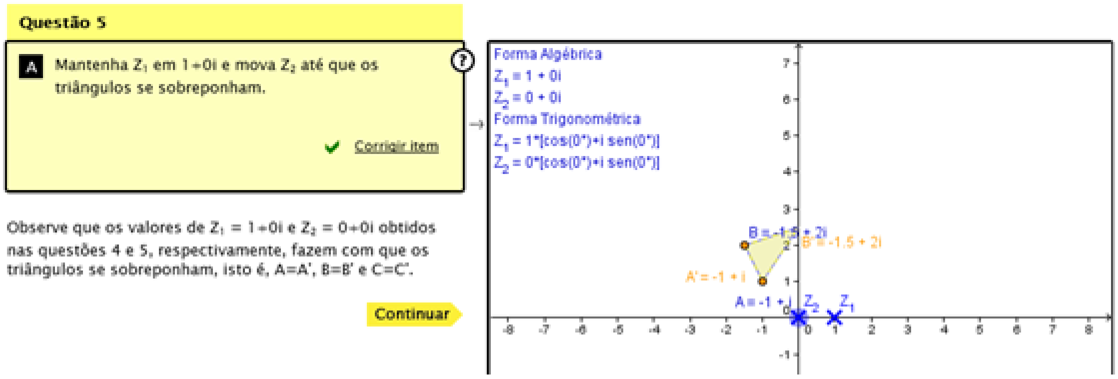
Figura 4.17: Imagem da questão 4 da atividade de apresentação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte1.html`

Já na 5ª questão, última desta parte, é necessário apenas posicionarmos Z_1 em $1+0i$ e movermos Z_2 até que os triângulos se sobreponham. Com isso podemos observar que os valores de $Z_1 = 1 + 0i$ e $Z_2 = 0 + 0i$ obtidos nas questões 4 e 5, respectivamente, fazem com que os triângulos se sobreponham, isto é, A=A', B=B' e C=C'.

Figura 4.18: Imagem da questão 5 da atividade de apresentação



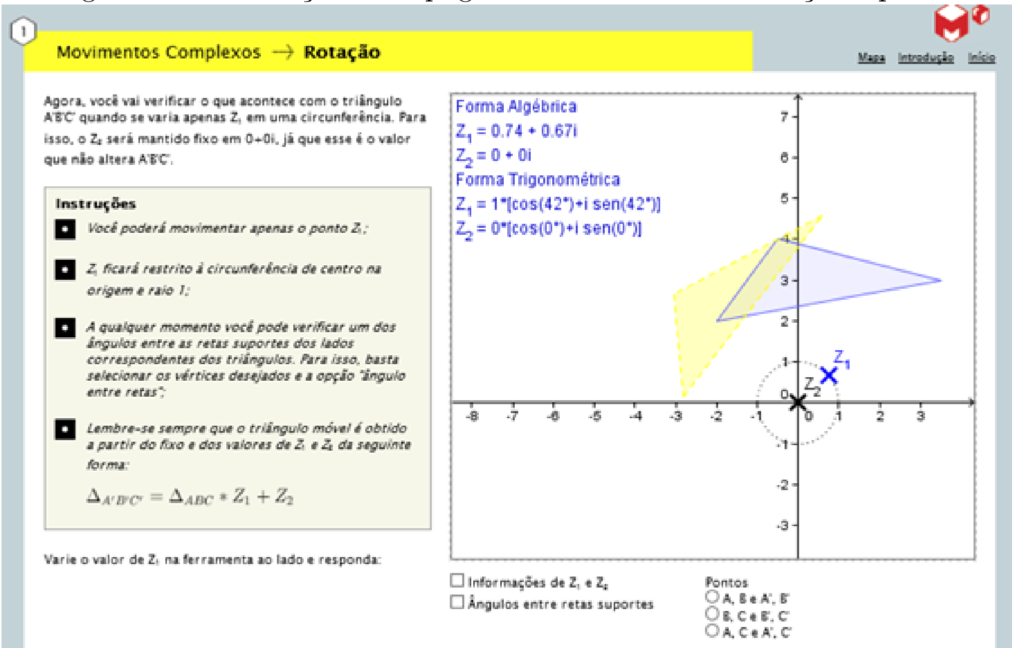
Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte1.html`

- **Parte 2: Rotação**

Na parte 2, o número complexo Z_2 é igual a $0 + 0i$ e Z_1 pode variar em uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1. Assim, o número complexo Z_1 tem módulo 1 e seu argumento varia. Sendo θ_1 o argumento de Z_1 e Z um número complexo qualquer de módulo r e argumento θ, o produto $Z \cdot Z_1$ tem módulo r e argumento $\theta + \theta_1$. Assim, o número complexo $Z \cdot Z_1$ é a rotação de ângulo θ_1 do número complexo Z. Em particular, isto ocorre com os pontos do triângulo ABC. Portanto, o triângulo A'B'C' é a rotação de ângulo θ_1 do triângulo ABC.

Ao variar Z_1 na circunferência podemos observar o triângulo A'B'C' girando em volta da origem do plano complexo.

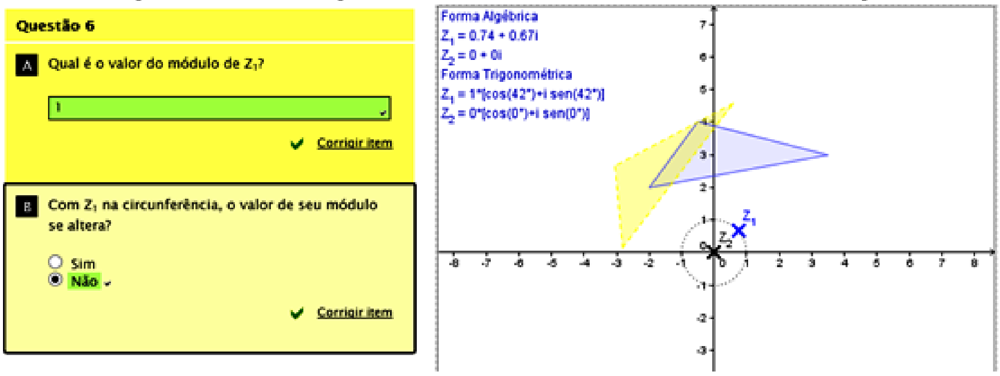
Figura 4.19: Cabeçalho da página da atividade de rotação - parte2



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte2.html`

Esta parte apresenta três questões (6, 7 e 8). A questão 6 está dividida em dois itens (A e B). O item A da questão 6 nos pergunta qual é o valor do módulo de Z_1 e no item B é para respondermos (Sim ou Não) se o valor do módulo de Z_1 se altera com Z_1 na circunferência.

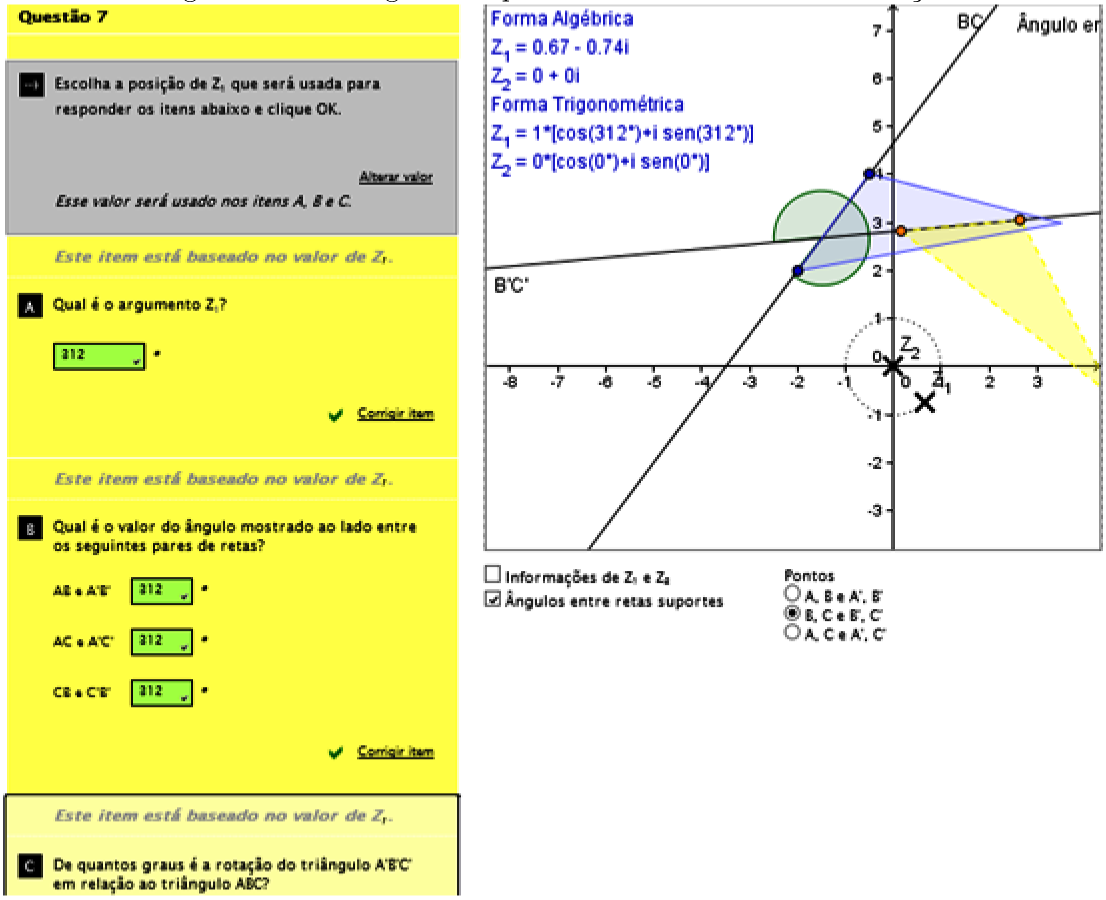
Figura 4.20: Imagem da questão 6 da atividade de rotação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte2.html`

A 7ª questão está dividia em três partes (A, B e C). Antes do item A devemos escolher a posição de Z_1 que será usada para respondermos os itens A, B e C. No item A devemos responder qual é o argumento de Z_1. O item B pede para respondermos qual é o valor do ângulo mostrado entre os pares de retas apresentados, ou seja, ângulos entre as retas suporte dos lados correspondentes. E no item C devemos responder de quantos graus é a rotação do triângulo A'B'C' em relação ao triângulo ABC.

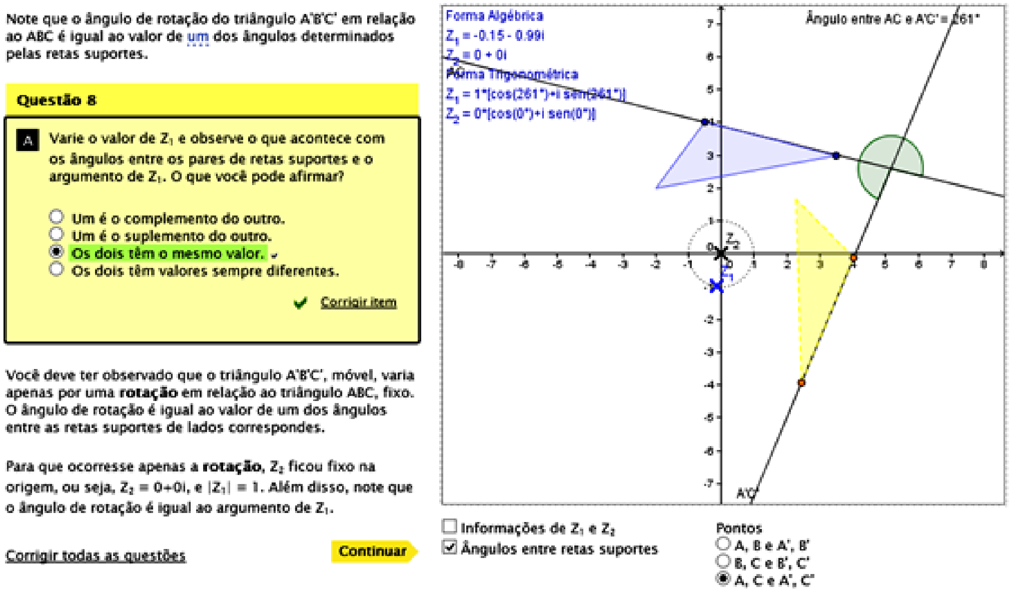
Figura 4.21: Imagem da questão 7 da atividade de rotação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte2.html`

A 8ª questão pede para variarmos o valor de Z_1 e observarmos o que acontece com os ângulos entre os pares de retas suporte e o argumento de Z_1. Com isso devemos responder o que podemos afirmar: se um é o complemento do outro, se um é o suplemento do outro, se os dois têm o mesmo valor ou se os dois têm valores sempre diferentes.

Figura 4.22: Imagem da questão 8 da atividade de rotação

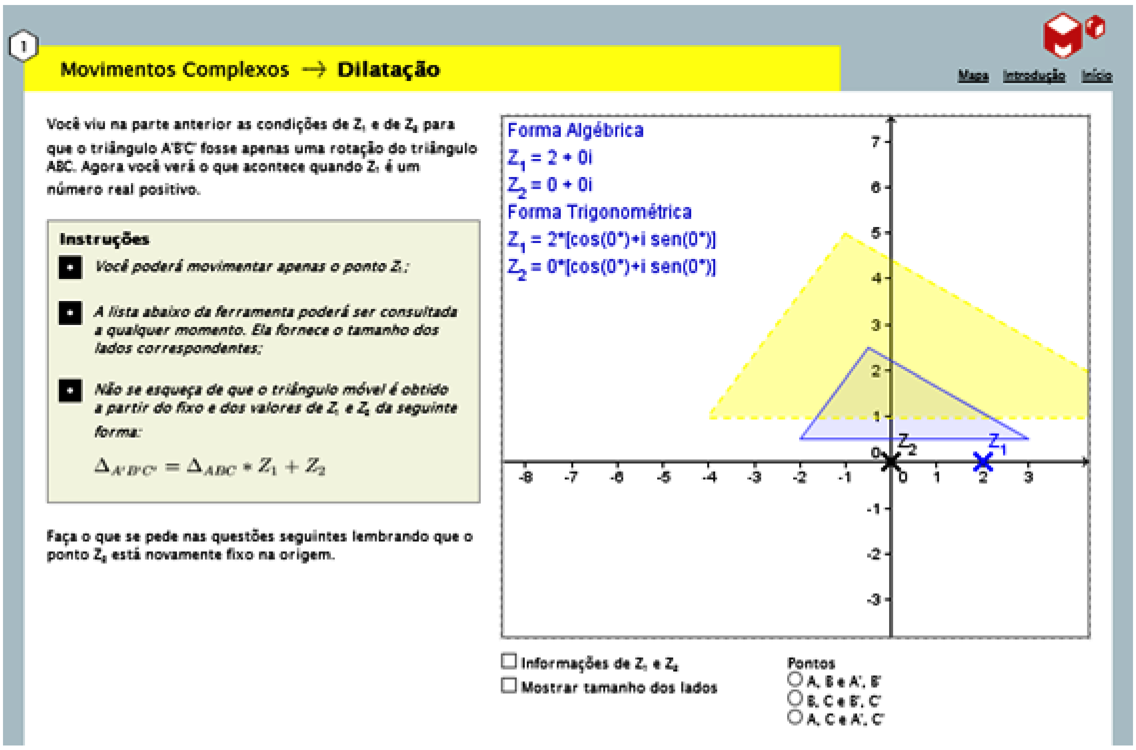


Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte2.html`

- **Parte 3: Dilatação**

Na parte 3, o número Z_1 pode variar entre os números reais positivos e diferentes de 1. Ou seja, a parte imaginária é igual a zero e a parte real, r_1, é positiva e diferente de 1. O número complexo Z_2 é fixo e igual a $0 + 0i$.

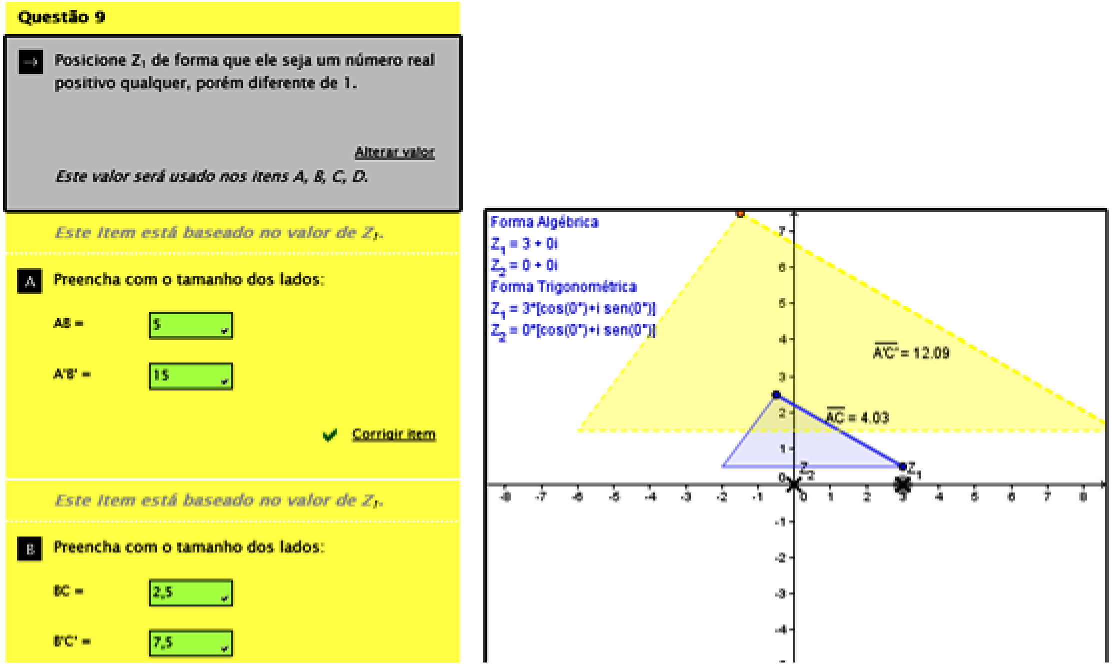
Figura 4.23: Cabeçalho da página da atividade de dilatação - parte3



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte3.html`

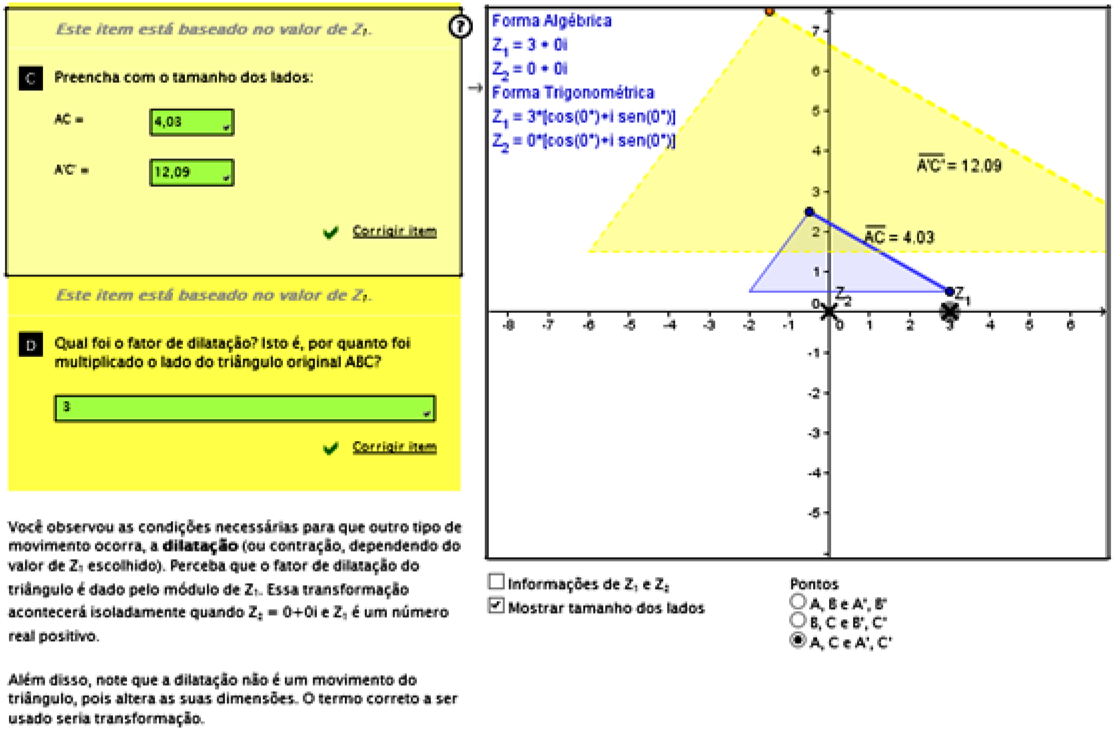
Esta parte 3 possui apenas uma questão (9). Esta porém está divida em 4 itens (A, B, C e D). Antes de respondermos os itens é necessário posicionarmos Z_1 de forma que ele seja um número real positivo qualquer e diferente de 1. O item A pede para preenchermos os espaços correspondes com os tamanhos dos lados AB e A'B'. O item B para para preenchermos com os tamanhos dos lados BC e B'C'. O item C pede para preenchermos com os tamanhos dos lados BC e B'C'. Por fim, o item D pergunta qual foi o fator de dilatação, isto é, por quanto foi multiplicado o lado do triângulo original ABC.

Figura 4.24: Imagem da questão 9(A e B) da atividade de dilatação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte3.html`

Figura 4.25: Imagem da questão 9(C e D) da atividade de dilatação

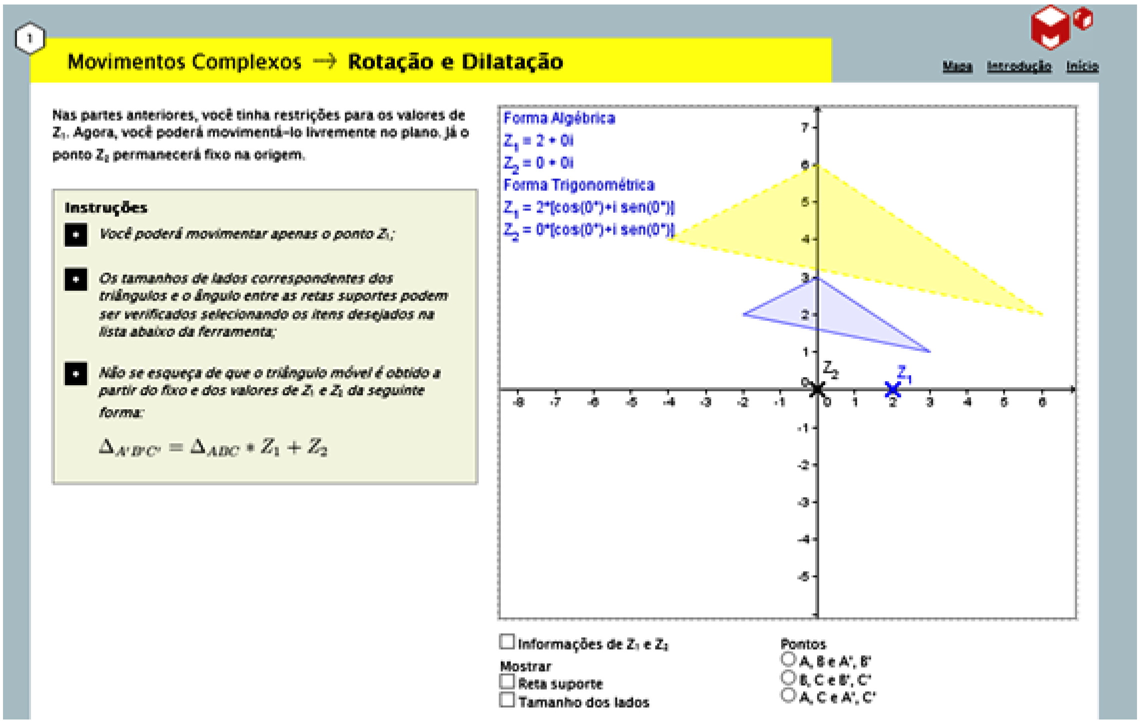


Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte3.html`

- **Parte 4: Rotação e Dilatação**

Nesta parte, o aluno pode variar livremente o número complexo Z_1 e o número complexo Z_2 permanecerá fixo na origem. Espera-se que o aluno perceba que a transformação sofrida pelo triângulo é a composição de uma rotação e de uma dilatação ou contração.

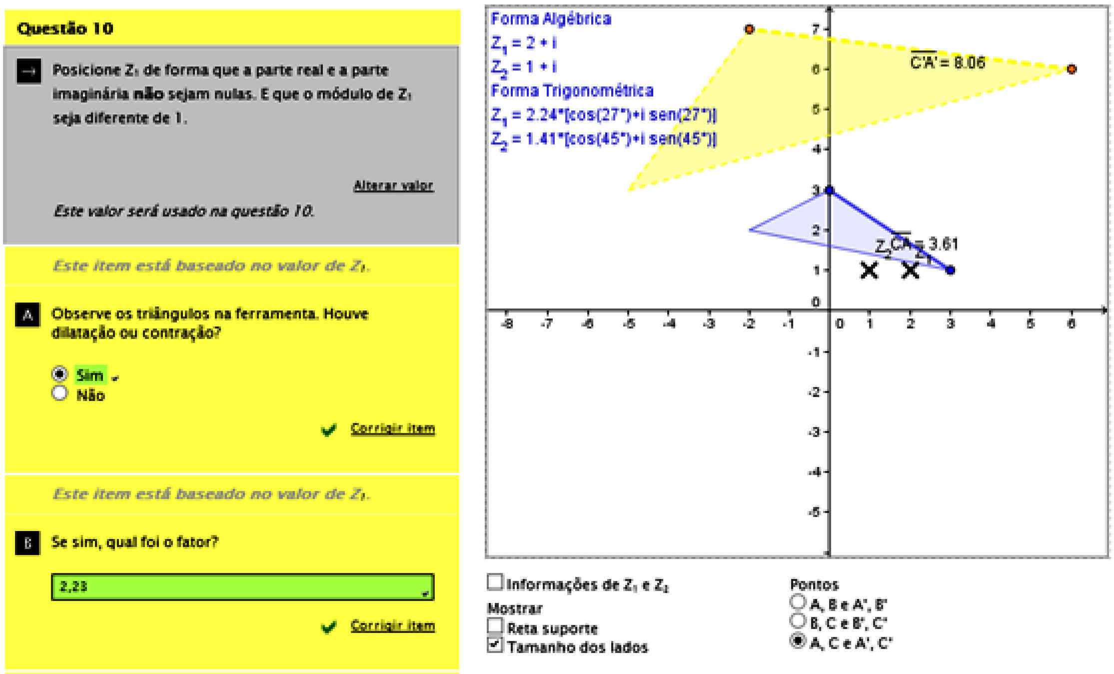
Figura 4.26: Cabeçalho da página da atividade de rotação e dilatação - parte4



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte4.html`

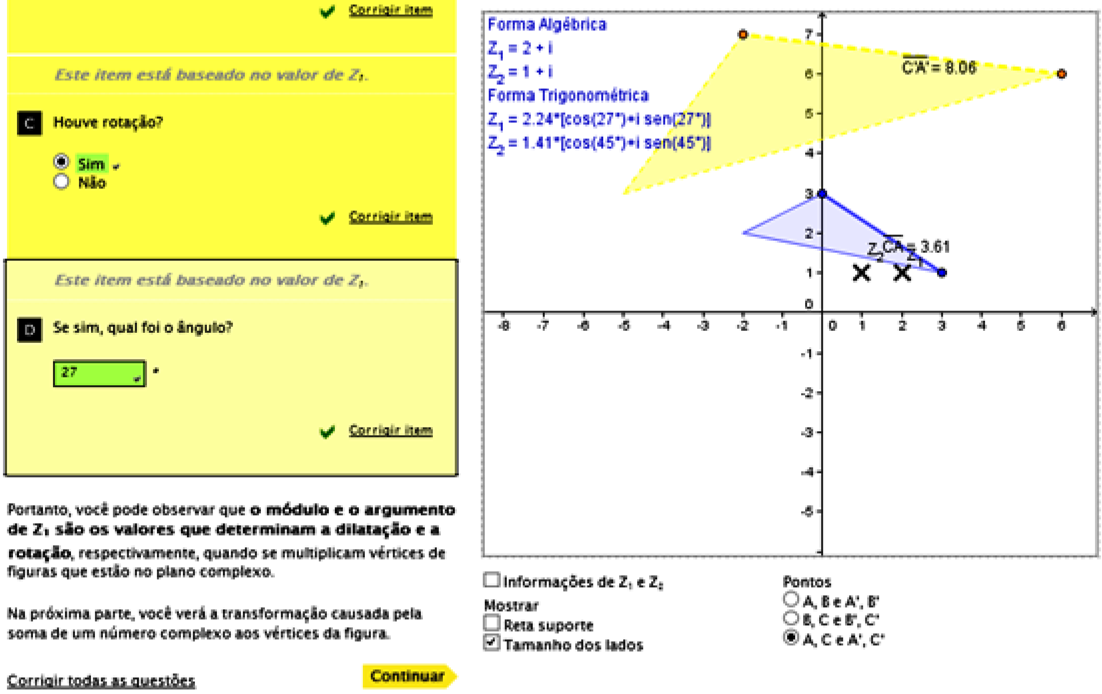
A parte 4 também possui apenas uma questão (10) que está dividida em 4 itens (A, B, C e D). Agora, antes de respondermos os itens da questão 10, devemos posicionar Z_1 de forma que a parte real e a parte imaginária não sejam nulas e que o módulo de Z_1 seja diferente de 1. O item A pede para observarmos os triângulos na ferramenta e respondermos se houve dilatação (ou contração). Se a resposta foi sim, o item B pede para dizermos qual foi o fator. Já o item C pergunta se houve rotação (sim ou não). Com a responta sim, o item D pede para dizermos qual foi o ângulo.

Figura 4.27: Imagem da questão 10(A e B) da atividade de rotação e dilatação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte4.html`

Figura 4.28: Imagem da questão 10(C e D) da atividade de rotação e dilatação

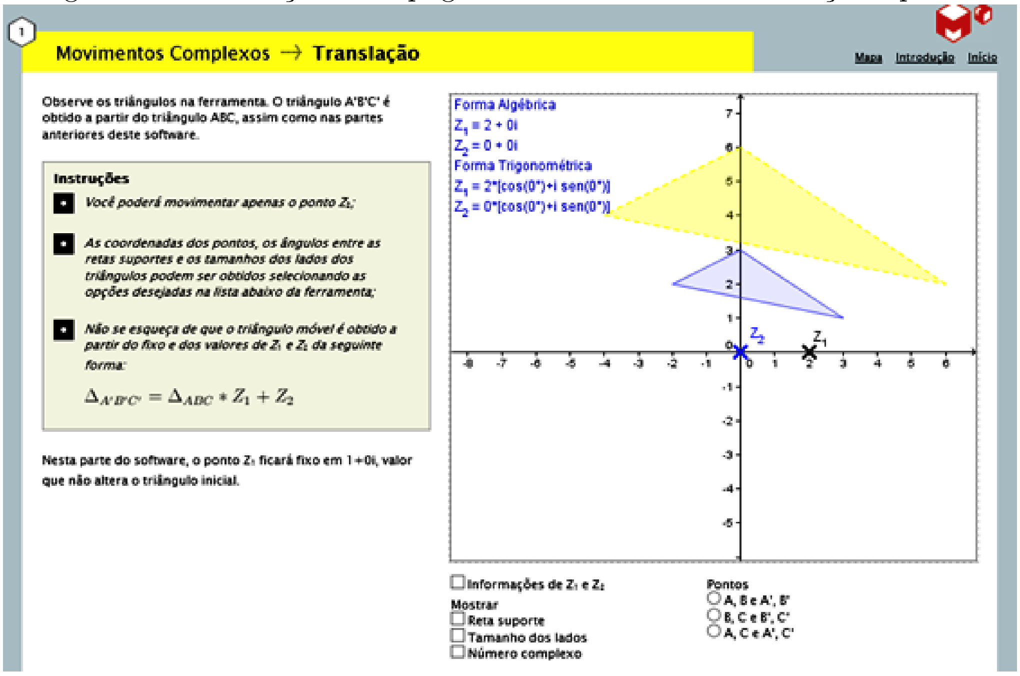


Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte4.html`

- **Parte 5: Translação**

Nas questões desta parte, o número complexo Z_1 é mantido fixo igual a $2 + 0i$ e Z_2 pode ser qualquer valor diferente de $0 + 0i$.

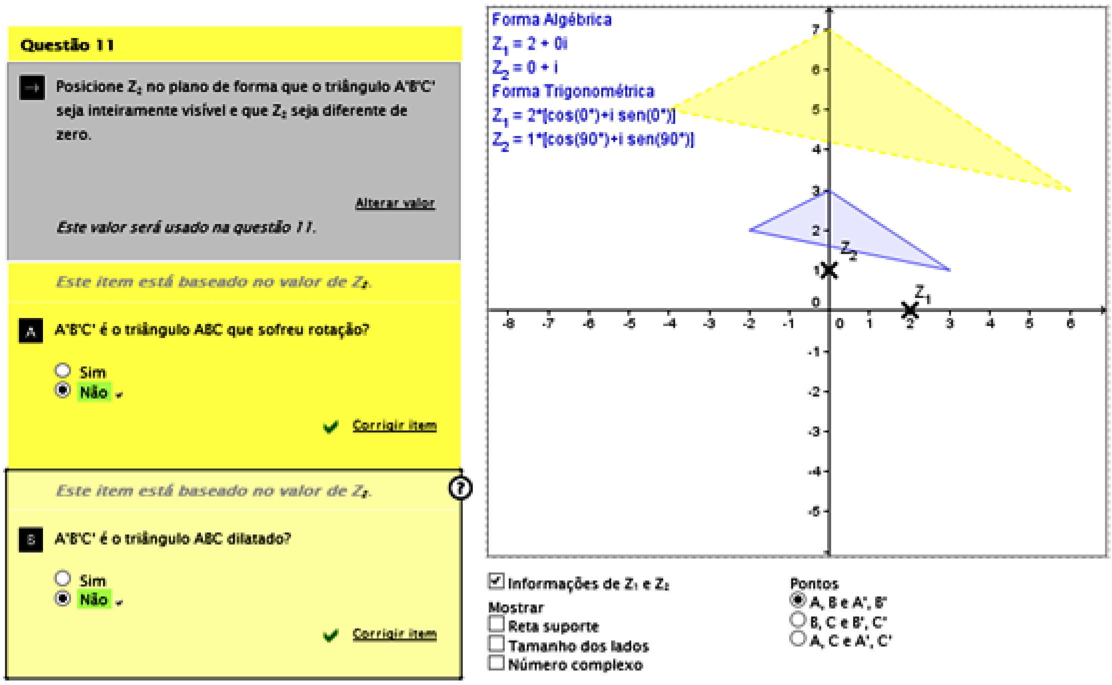
Figura 4.29: Cabeçalho da página da atividade de translação - parte5



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte5.html`

Nesta parte teremos duas questões (11 e 12). A questão 11 está dividida em dois itens (A e B). Antes de responder os itens é necessário posicionar Z_2 no plano complexo de forma que o triângulo A'B'C' seja inteiramente visível e que Z_2 seja diferente de zero. O item A da questão 11 pergunta se o triângulo A'B'C' é o triângulo ABC que sofreu uma rotação (Sim ou Não). Já o item B pergunta se A'B'C' é o triângulo ABC que sofreu uma dilatação (Sim ou Não). As duas respostas é Não. Com isso podemos observar que a transformação sofrida foi uma translação.

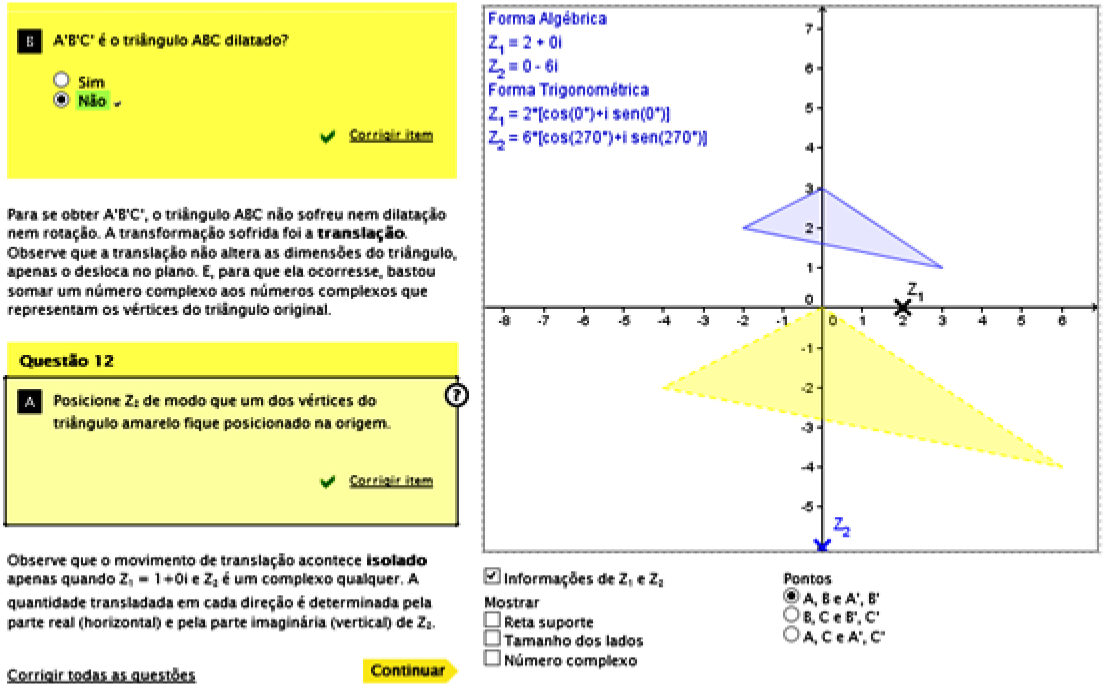
Figura 4.30: Imagem da questão 11 da atividade de translação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte5.html`

A questão de número 12 pede apenas para posicionarmos o Z_2 de modo que um dos vértices do triângulo amarelo fique posicionado na origem. Com esta questão do software observamos que o movimento de translação acontece isolado apenas quando Z_1 é fixo e Z_2 é um número complexo qualquer. A quantidade transladada em cada direção é determinada pela parte real (horizontal) e pela parte imaginária (vertical) de Z_2.

Figura 4.31: Imagem da questão 12 da atividade de translação



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte5.html`

- **Parte 6: Mãos a obra!**

Nas questões desta parte são apresentados dois triângulos ABC e DEF, sendo que DEF é obtido a partir de ABC por meio de uma única transformação: ou rotação, ou dilatação (ou contração), ou translação.

O aluno deve descobrir, inicialmente por meio da visualização, qual é a transformação. A seguir, deve movimentar os pontos Z_1 e Z_2 para descobrir seus valores para que tal transformação ocorra.

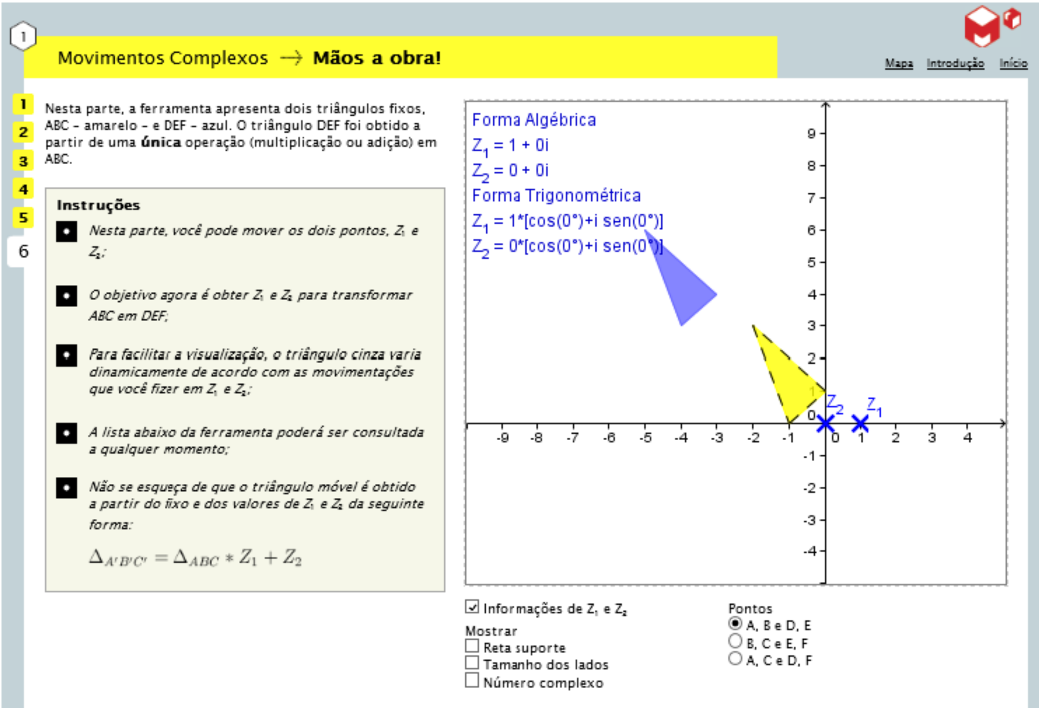
Para realizar as questões, é preciso ter em mente as conclusões obtidas nas partes anteriores, a saber:

- Se o módulo de Z_1 é igual a 1 e $Z_2 = 0 + 0i$ ocorre uma rotação em torno da origem do triângulo. Além disso, o ângulo de rotação é igual ao argumento de Z_1.

- Se Z_1 é um número real positivo, diferente de 1, e $Z_2 = 0+0i$ ocorre uma dilatação (ou contração) do triângulo.

- Se $Z_1 = 1 + 0i$ e $Z_2 = a + bi$, com $(a, b) \neq (0, 0)$, ocorre uma translação do triângulo. A translação ocorre na direção e sentido do vetor correspondente ao número complexo Z_2.

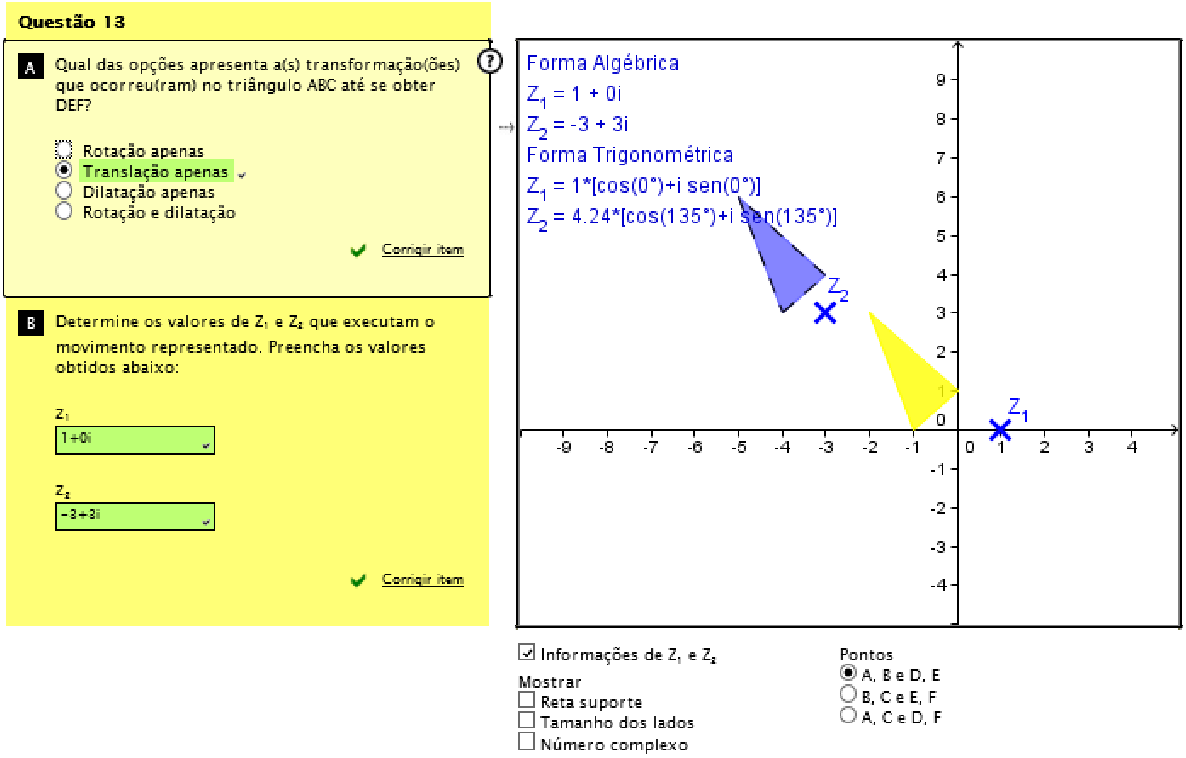
Figura 4.32: Cabeçalho da página da atividade Mãos a obra! - parte6



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte6.html`

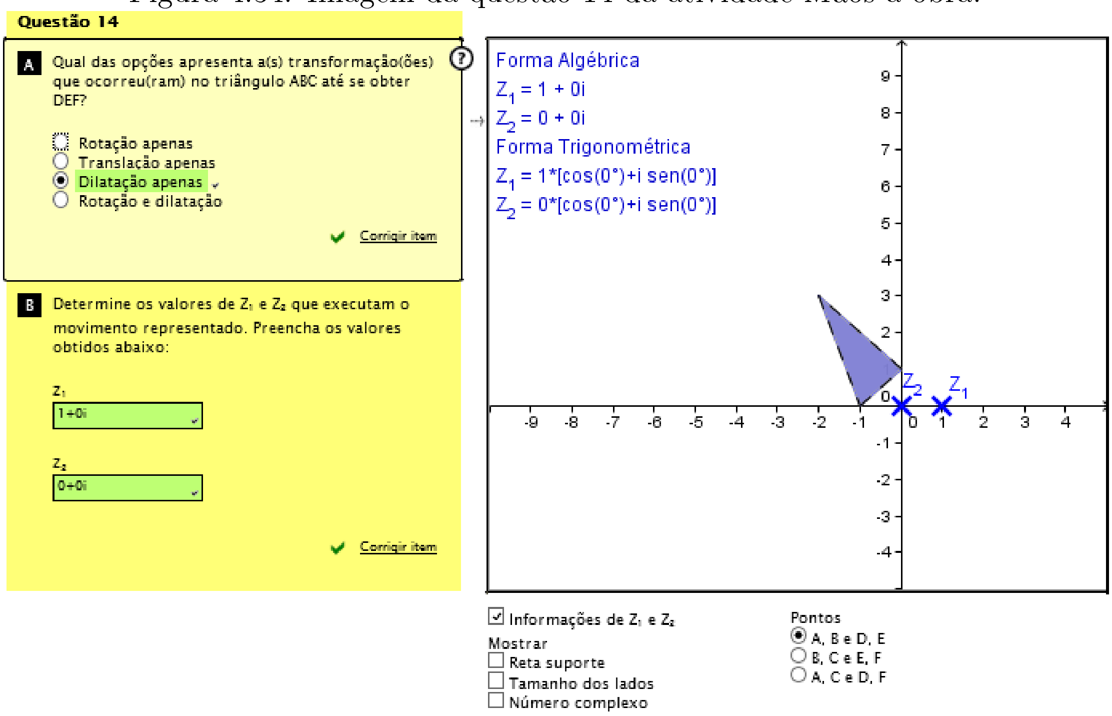
A parte 6 desta Atividade 1 é composta por 3 questões (13, 14 e 15). Cada questão envolve uma das transformações estudadas e apresenta dois itens (A e B). Nos itens A das questões 13, 14 e 15 devemos responder qual das opções disponíveis (Rotação apenas, Translação apenas, Dilatação apenas ou Rotação e Dilatação) apresenta a transformação que ocorreu no triângulo ABC até se obter DEF. Nos itens B das questões 13, 14 e 15 é para determinarmos os valores dos números complexos Z_1 e de Z_2 que executam o movimento representado nas questões. Nas figuras 4.33, 4.34 e 4.35 podemos observar as questões 13, 14 e 15 desta parte e ver que ocorreram translação, dilatação e rotação, respectivamente.

Figura 4.33: Imagem da questão 13 da atividade Mãos a obra!



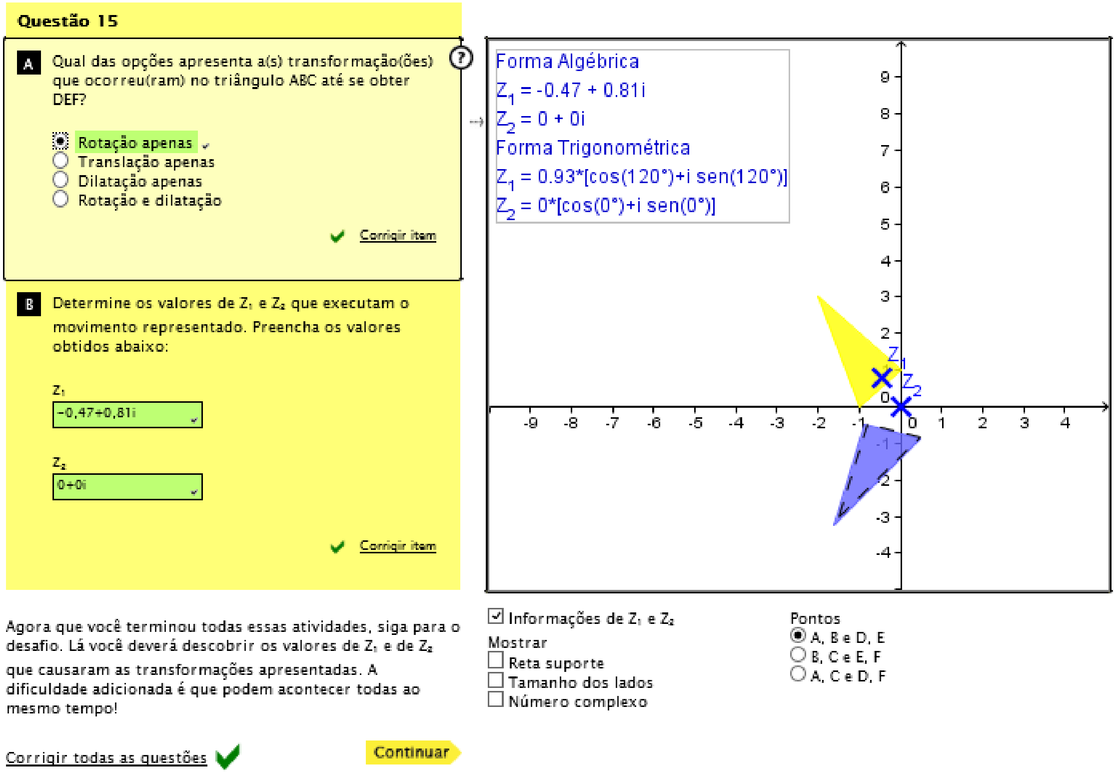
Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte6.html`

Figura 4.34: Imagem da questão 14 da atividade Mãos a obra!



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte6.html`

Figura 4.35: Imagem da questão 15 da atividade Mãos a obra!



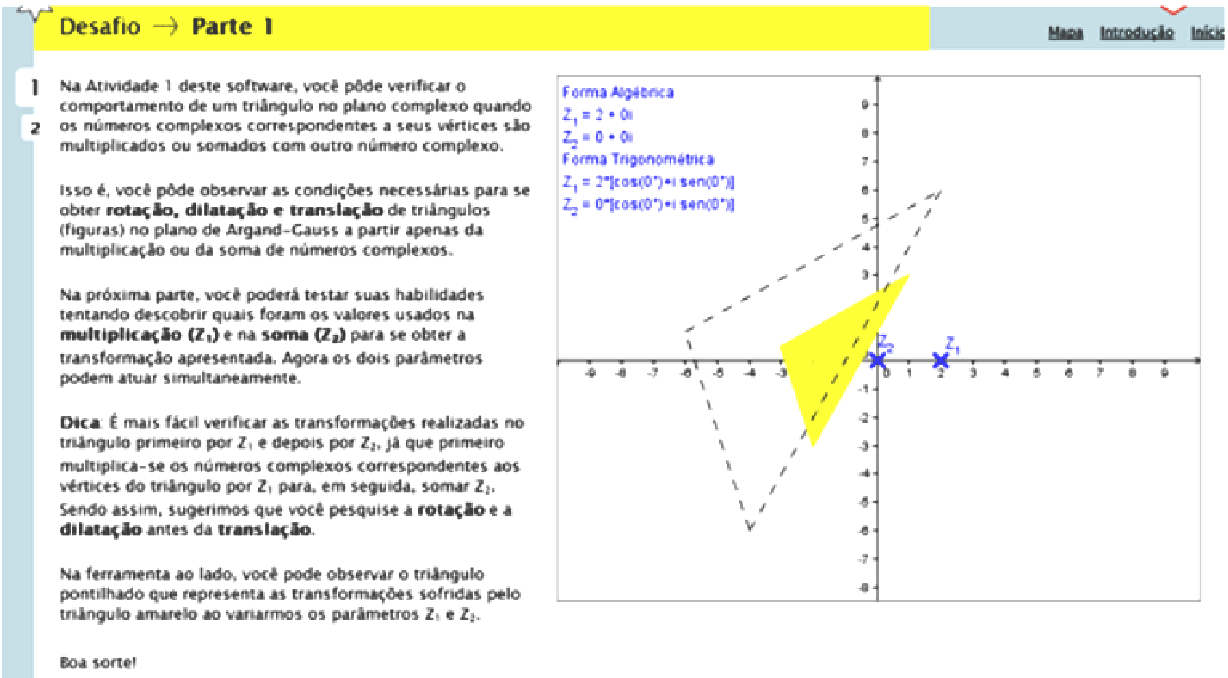
Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade1_parte6.html`

Desafio

No desafio são apresentados dois triângulos ABC e DEF, sendo que DEF é obtido a partir de ABC por meio de uma transformação que é uma composição de algumas das transformações estudadas na atividade 1. O aluno deve descobrir a transformação que leva o triângulo ABC no triângulo DEF movimentando os pontos Z_1 e Z_2. Convém primeiro movimentar o ponto Z_1, deixando Z_2 na origem, para descobrir a rotação e dilatação (ou contração) envolvidas, caso existam, e, depois, movimentar o Z_2 no caso de ocorrer alguma translação.

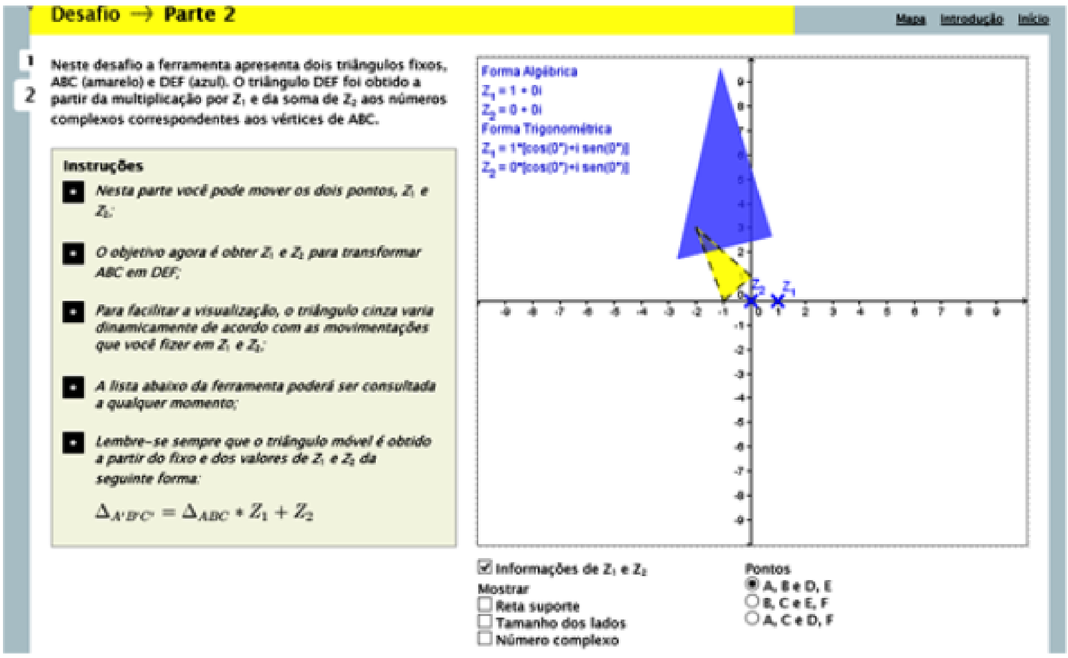
Depois de encontrar os valores para Z_1 e Z_2, os alunos são orientados a descrever as transformações envolvidas. Para isso, devem utilizar a forma trigonométrica de Z_1 e a forma algébrica de Z_2, que aparecem no canto superior esquerdo da ferramenta, e, também, as interpretações geométricas das operações de números complexos.

Figura 4.36: Imagem da página inicial do Desafio - parte1



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade2_parte1.html`

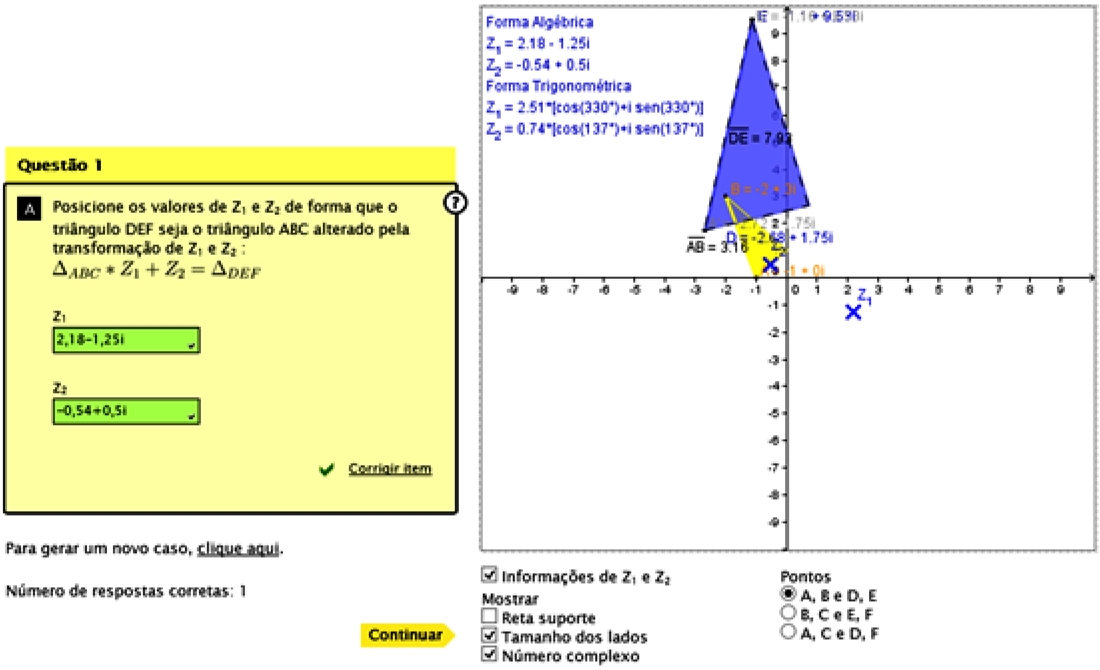
Figura 4.37: Imagem do cabeçalho do Desafio - parte2



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade2_parte1.html`

A figura 4.38 mostra a questão 1 da parte 2 do Desafio, onde devemos escrever os valores na forma algébrica dos números complexos Z_1 e Z_2 encontrados na transformação realizada para obter o triângulo DEF.

Figura 4.38: Imagem da questão 1 do Desafio - parte2



Fonte: `http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1239/atividade2_parte1.html`

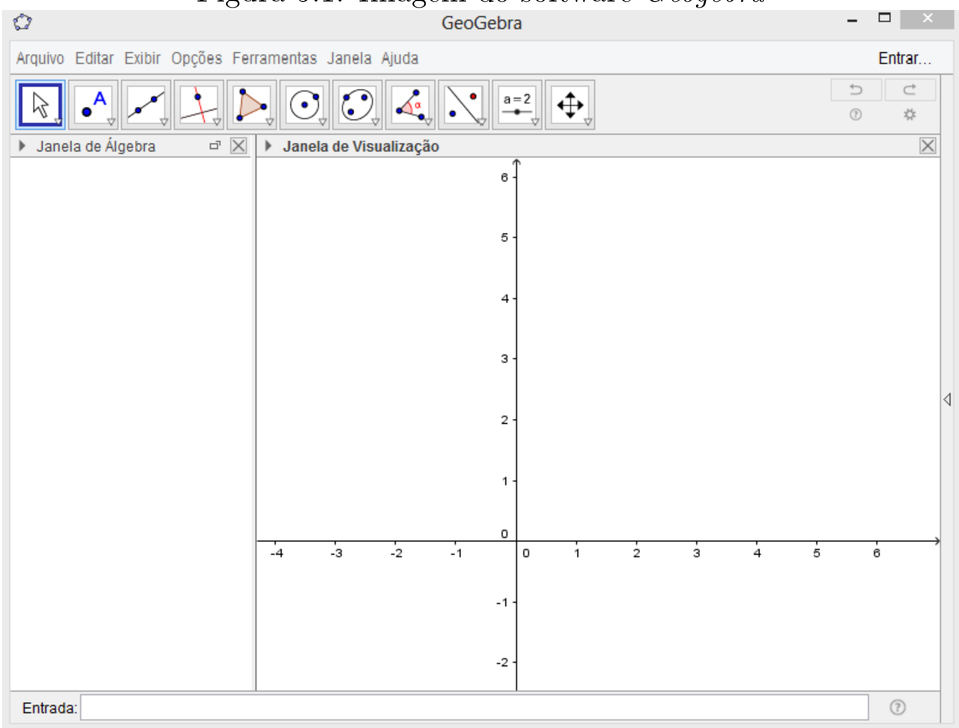
O material apresentado neste capítulo serve como forma diversificada e motivadora para o ensino dos números complexos em relação aos livros didáticos tradicionais e pode auxiliar o professor da educação básica na introdução, motivação, aplicação e aprofundamento de tal conteúdo com os alunos. Veremos a seguir sugestões de atividades complementares para serem solucionadas com o auxílio do software *GeoGebra* envolvendo a multiplicação de um número complexo pela unidade imaginaria i e mostrando que a diferença entre dois números complexos A - B, no plano complexo, traduz em um vetor com origem em B e extremidade em A, além das transformações geométricas de figuras no plano. O próximo capítulo também traz o resultado da aplicação de todo este material com os alunos do ensino médio.

5 Sugestões de Atividades

As atividades a seguir foram desenvolvidas para serem solucionadas com o auxílio do software *GeoGebra* (HOHENWARTER, 2001).

De acordo com o site `http://petmatematica.weebly.com/`, o *GeoGebra* é um software de matemática dinâmica gratuito, que relaciona geometria, álgebra, cálculo, planilhas e gráficos. Possibilita a realização de construções geométricas com a utilização de objetos como: pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, polígonos, etc.; os quais podem ser alterados dinamicamente mesmo após a construção estar finalizada. Coordenadas, funções e equações também podem ser inseridas diretamente através do campo de entrada. Permite também, operar com funções e determinar derivadas e integrais, dentre outros recursos relacionados a funções. Desta forma, uma das vantagens do software é a possibilidade de visualizar, em um mesmo ambiente virtual, as características algébricas e geométricas de um mesmo objeto.

Figura 5.1: Imagem do software *Geogebra*



Fonte: Próprio autor

5.1 Atividade 1: Problema - A ilha do tesouro

Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram à direita, segundo um ângulo 90^o, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90^o, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os predadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui. Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc..., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?[2]

Qual a relação entre o problema e os números complexos? Use o software *GeoGebra* e descubra.

Solução

Para resolver o problema podemos nos basear em dois fatos fundamentais: multiplicar um número complexo pela unidade imaginaria i equivale a girá-lo de um ângulo reto positivo e, no plano complexo, a diferença entre dois números complexos A - B traduz um vetor com origem em B e extremidade em A.

Dados dois complexos A e B eles podem ser identificados como pontos do plano, e no plano esses pontos podem ser representado por dois vetores.

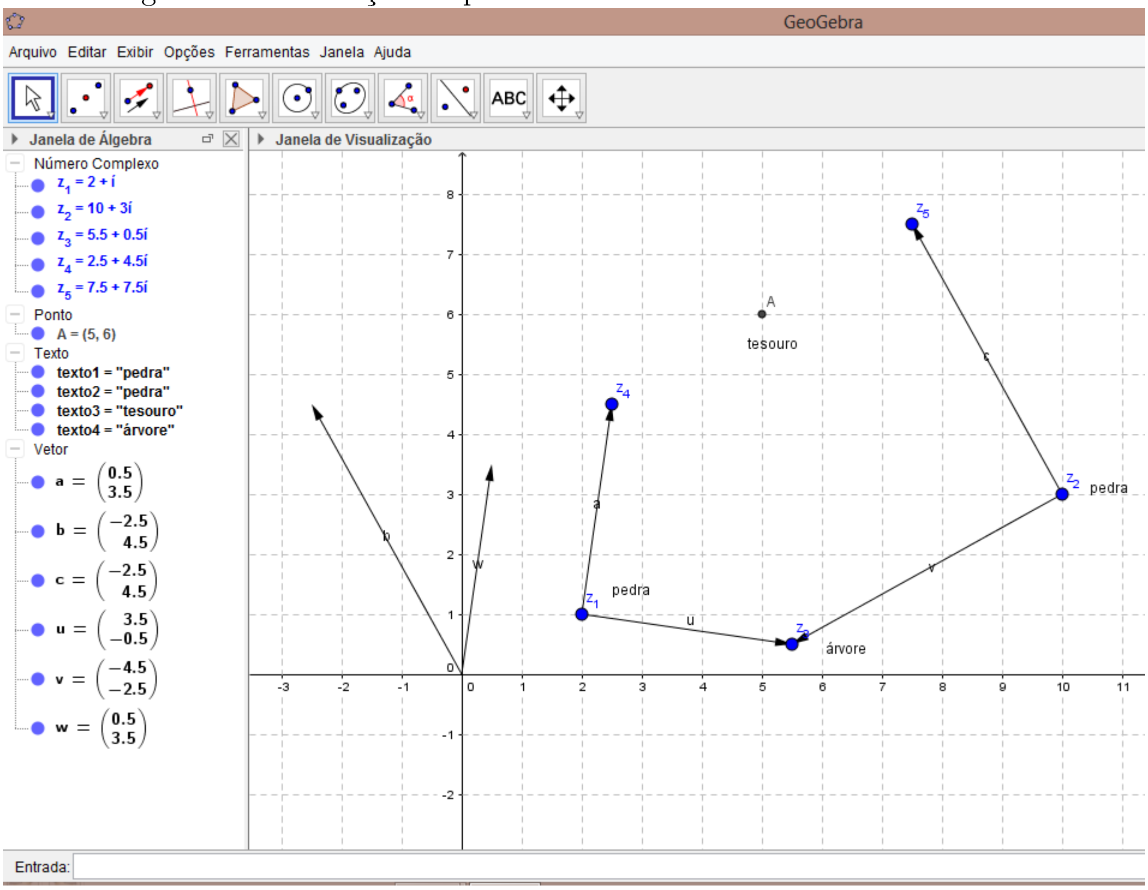
Podemos usar o *Geogebra* para ilustrar o problema, onde z_1 representa uma das pedras, z_2 representa a outra pedra e z_3 representa a árvore. Desenhamos o vetor u (com origem em z_1 e extremidade em z_3) e o vetor v (com origem em z_2 e extremidade em z_3). Logo após estas construções, podemos desenhar um vetor w multiplicando o vetor u por i digitando na entrada vetor[u*i]. Este vetor porém, tem mesmo módulo, é perpendicular ao vetor u e tem origem na origem do sistema cartesiano. Usando o comando de desenhar um *Vetor a Partir de um Ponto*, conseguimos desenhar o vetor a que seria uma translação do vetor w e terá origem no ponto z_1, ou seja, o vetor a seria a rotação de 90^o do vetor u no sentido anti-horário. Do mesmo modo, desenhamos o vetor b multiplicando o vetor v por $-i$ digitando na entrada vetor[v*-i] e este também tem mesmo módulo, é perpendicular ao vetor v e tem origem na origem do sistema cartesiano. Usando novamente o comando de desenhar um *Vetor a Partir de um Ponto*, conseguimos desenhar o vetor c que seria uma translação do vetor b e

[2]REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 47, 2001

com origem no ponto z_2, sendo este uma rotação de 90^o do vetor v no sentido horário. Com estas construções, o *GeoGebra* nos fornece os números complexos z_4 e z_5 que são as extremidades dos vetores a e c. Por fim, usamos o comando *Ponto Médio* entre dois pontos achando assim o ponto A (ponto médio entre z_4 e z_5).

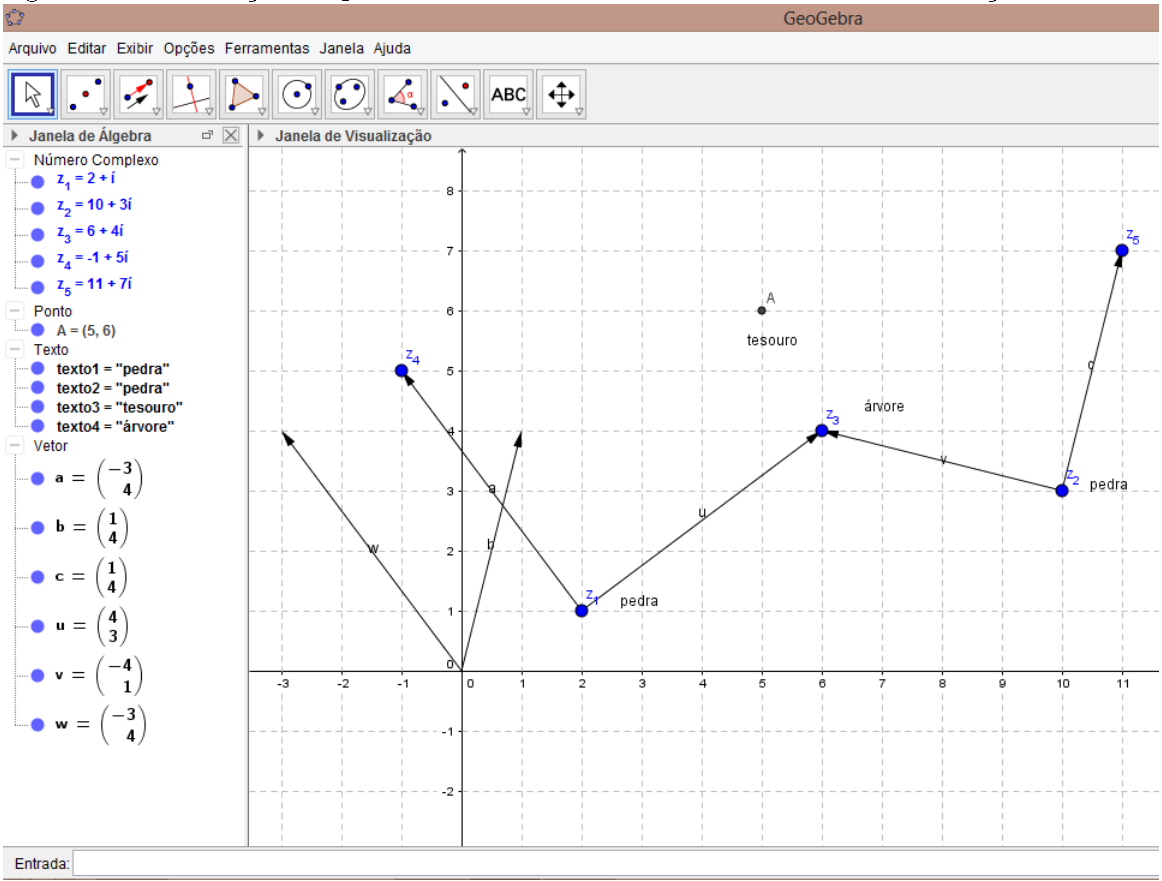
O ponto A é o local onde está enterrado o tesouro. Se mudarmos no *GeoGebra* o ponto z_3 de lugar percebemos que não há mudança no local onde está enterrado o tesouro. Com isso, concluímos que a posição da árvore não importa na localização do tesouro, podendo esta estar em qualquer lugar. Realmente o pirata era um matemático.

Figura 5.2: Ilustração do problema da ilha do tesouro no *GeoGebra*



Fonte: Próprio autor

Figura 5.3: Ilustração do problema da ilha do tesouro no com movimentação da árvore



Fonte: Próprio autor

Solução algébrica para o problema

Denotando, no plano de Argand-Gauss, por:

- A - o afixo da árvore;
- B - o afixo da 1ª pedra;
- C - o afixo da 2ª pedra;
- B' - o afixo da posição do pirata após caminhar a partir da 1ª pedra;
- C' - o afixo da posição do pirata após caminhar a partir da 2ª pedra;
- T - o afixo do tesouro

Temos assim, com os pontos correspondentes, a formação dos seguintes vetores: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{CC'}$.

Com isso:

$\overrightarrow{BA} = A - B$

$\overrightarrow{CA} = A - C$

E, sabendo que multiplicar um número complexo ou um vetor pela unidade imaginaria i equivale a girá-lo de um ângulo reto positivo, temos:

$\overrightarrow{BB'} = B' - B = (A - B) \cdot i = Ai - Bi \Rightarrow B' = Ai - Bi + B$
$\overrightarrow{CC'} = C' - C = (A - C) \cdot (-i) = Ci - Ai \Rightarrow C' = Ci - Ai + C$

Como enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas, teremos:

$T = \dfrac{B' + C'}{2} = \dfrac{Ai - Bi + B + Ci - Ai + C}{2} = \dfrac{B + C + (C - B) \cdot i}{2}$

Portanto, podemos concluir que a posição da árvore não importa na localização do tesouro.

No modelo feito no software *GeoGebra*, a 1ª pedra(B) localizava-se no afixo do número complexo $2 + i$, a 2ª pedra(C) no afixo do número complexo $10 + 3i$ e o tesouro(T) foi encontrado no afixo do número complexo $5 + 6i$.

Verificando, vemos que:

Como $T = \dfrac{B + C + (C - B) \cdot i}{2}$

Então $T = \dfrac{2 + i + 10 + 3i + (10 + 3i - 2 - i) \cdot i}{2} = \dfrac{12 + 4i + 8i - 2}{2} = 5 + 6i$

Assim, podemos ver que a solução apresentada no *GeoGebra* bate com a solução algébrica apresentada através de vetores.

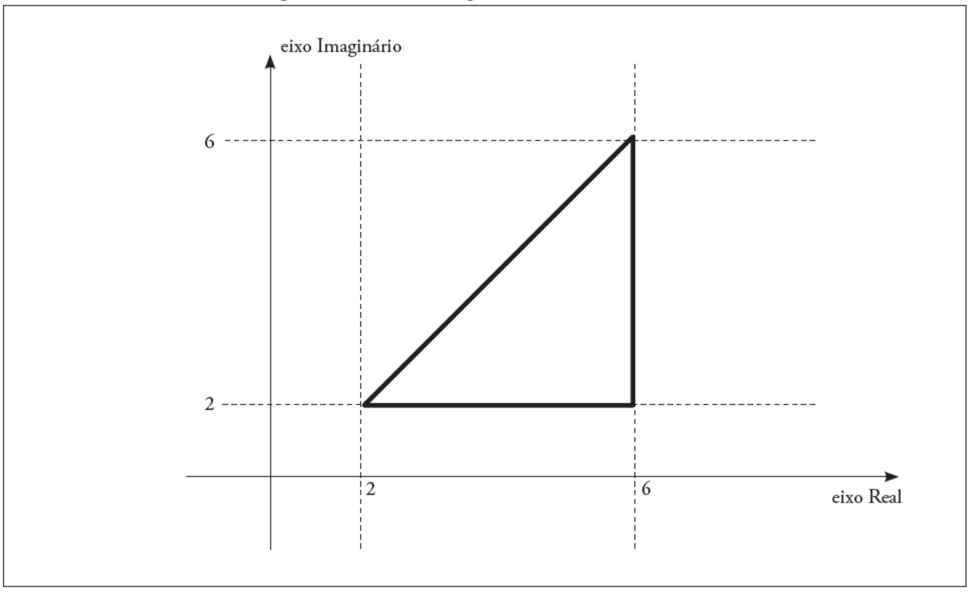
(c.q.d.)

Observação 5.1. As atividades a seguir foram extraídas do Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (Cadernos do Professor e do Aluno) da 3ª série do Ensino Médio e adaptadas para serem solucionadas com o software *GeoGebra*.

5.2 Atividade 2

Considere a região do plano complexo indicada na figura 5.4. Cada ponto da região é a imagem de um complexo e será objeto de uma transformação, indicada nos itens de a a e. Represente no plano complexo a região resultante após a transformação descrita em cada um desses itens. Para a realização da atividade utilize o software *GeoGebra*.

Figura 5.4: Imagem da atividade 2



Fonte: Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo/Caderno do Professor/Matemática/Ensino Médio/3ª Série/Volume1

a) A cada ponto da região será somado o número real 5.

b) A cada ponto da região será somado o número imaginário $3i$.

c) A cada ponto da região será somado o número complexo $3 + 4i$.

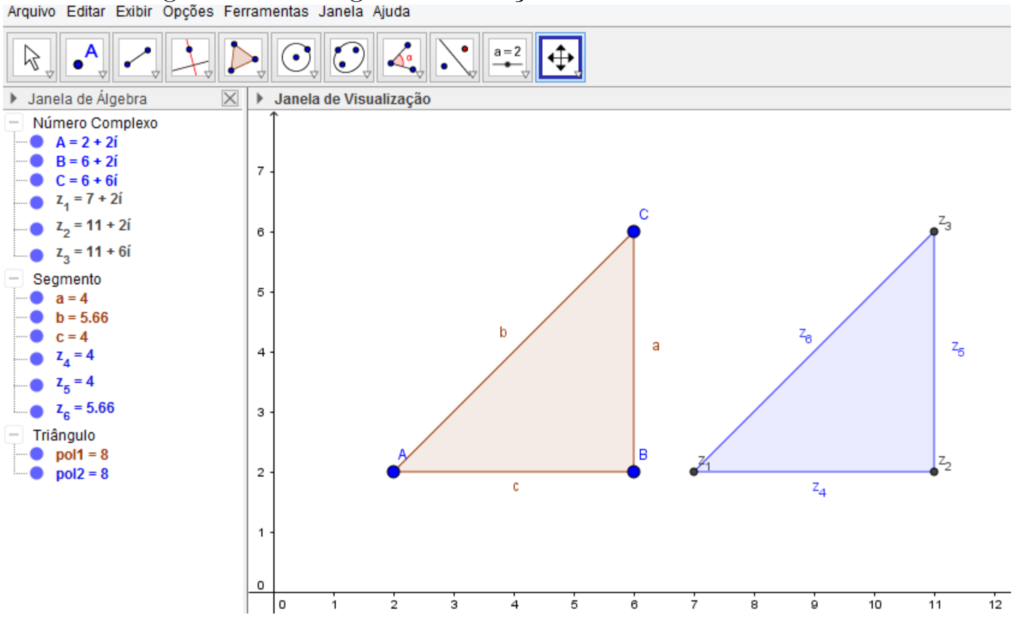
d) Cada ponto da região será multiplicado pelo número real 2.

e) Cada ponto da região será multiplicado pelo número real $\frac{1}{2}$.

Solução

a) Cada ponto da região será deslocado 5 unidades na direção do eixo real. A região transformada será um triângulo de vértices nas imagens dos complexos: $7 + 2i$, $11 + 2i$ e $11 + 6i$.

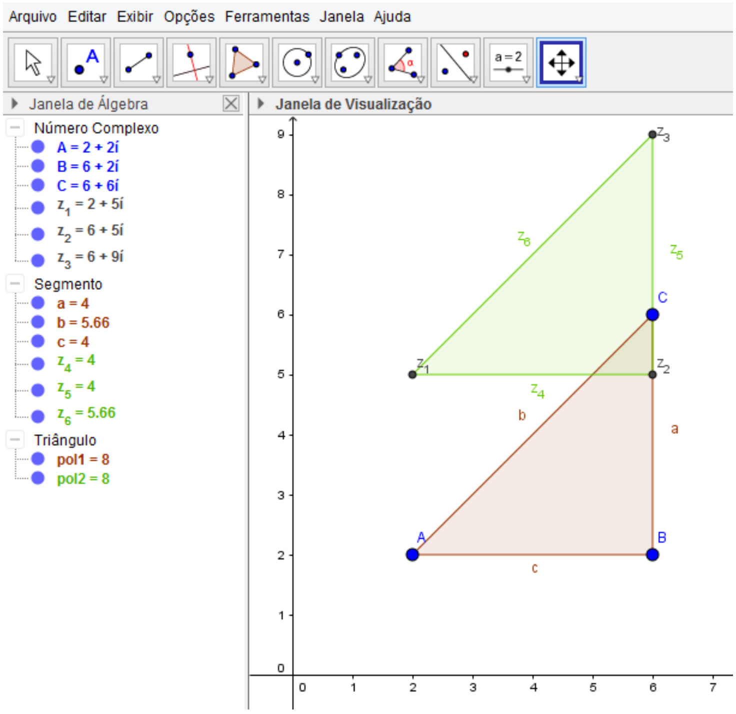
Figura 5.5: Imagem da solução da atividade 2 - item a



Fonte: Próprio autor

b) Cada ponto da região será deslocado 3 unidades na direção do eixo imaginário. A região transformada será um triângulo de vértices nas imagens dos complexos: $2 + 5i$, $6 + 5i$ e $6 + 9i$.

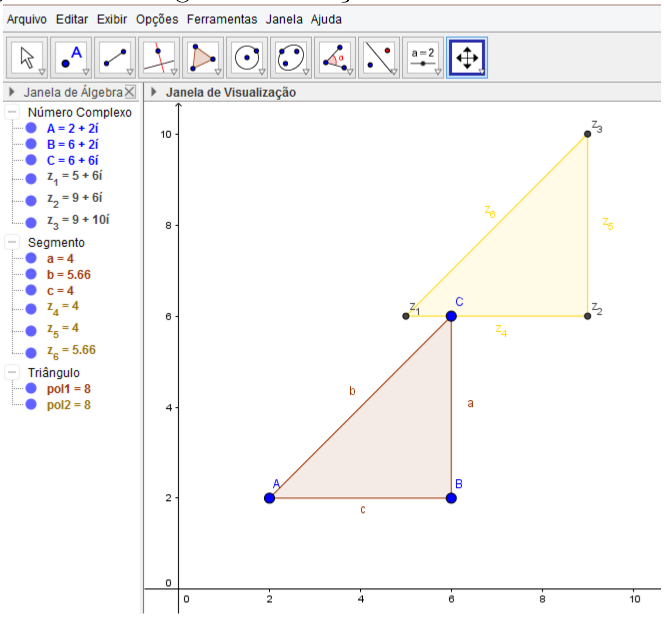
Figura 5.6: Imagem da solução da atividade 2 - item b



Fonte: Próprio autor

c) Cada ponto da região será deslocado 3 unidades na direção do eixo real, seguido de 4 unidades na direção do eixo imaginário (ou vice-versa). Cada ponto terá um deslocamento total de valor igual ao módulo do complexo $3+4i$, que é 5. Os vértices da região transformada serão os seguintes: $5+6i$, $9+6i$ e $9+10i$.

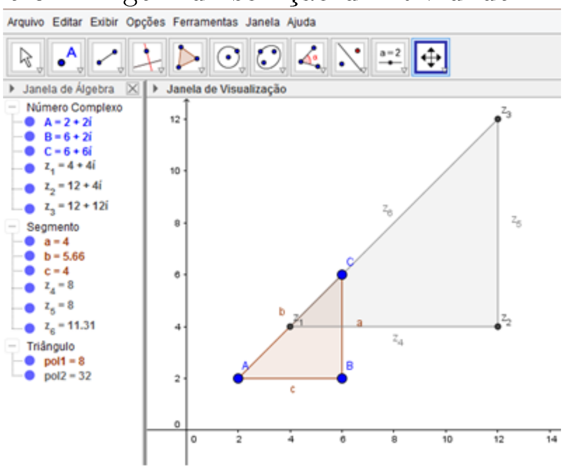
Figura 5.7: Imagem da solução da atividade 2 - item c



Fonte: Próprio autor

d) Cada ponto da região terá seu módulo multiplicado por 2. Logo, a região será ampliada, tendo cada segmento multiplicado por 2, e sua área multiplicada por 4. Como as distâncias de cada ponto até a origem serão multiplicadas por 2, haverá uma translação (afastamento da origem) com a ampliação. Os novos vértices serão: $4+4i$, $12+4i$ e $12+12i$. Os argumentos dos pontos da região não serão alterados, ou seja, não haverá rotação.

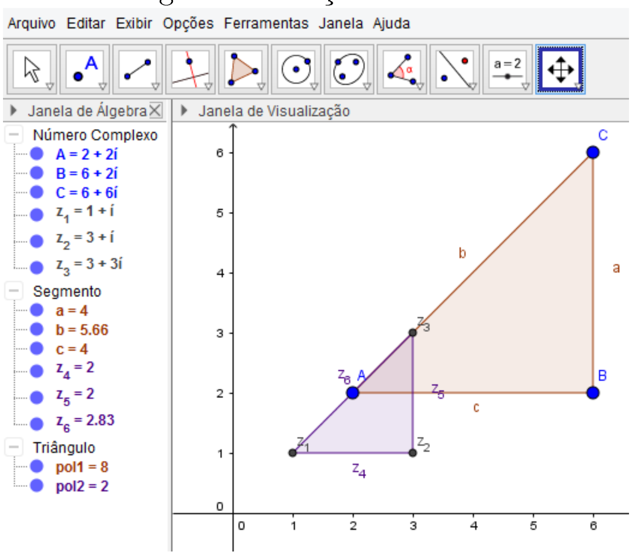
Figura 5.8: Imagem da solução da atividade 2 - item d



Fonte: Próprio autor

e) Cada ponto da região terá seu módulo multiplicado por $\frac{1}{2}$. Com isso, a região será reduzida, tendo cada segmento multiplicado por $\frac{1}{2}$ e sua área dividida por 4. Como as distâncias de cada ponto até a origem serão reduzidas à metade, haverá uma translação (aproximação da origem) com a redução. Os novos vértices serão: $1+i$, $3+i$ e $3+3i$. Os argumentos dos pontos da região não serão alterados, ou seja, não haverá rotação.

Figura 5.9: Imagem da solução da atividade 2 - item e

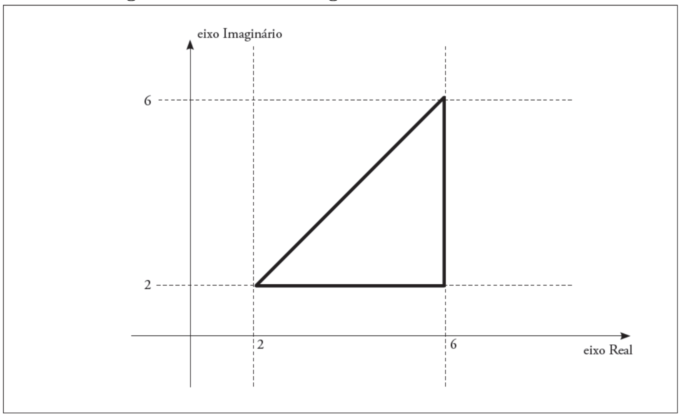


Fonte: Próprio autor

5.3 Atividade 3

Considere a região do plano complexo indicada na figura 5.10 (a figura é a mesma da atividade anterior). Cada ponto da região é a imagem de um complexo e será objeto de uma transformação. Represente no plano complexo - usando o software *GeoGebra* - a região resultante após a multiplicação de cada ponto da região pelo imaginário i.

Figura 5.10: Imagem da atividade 2

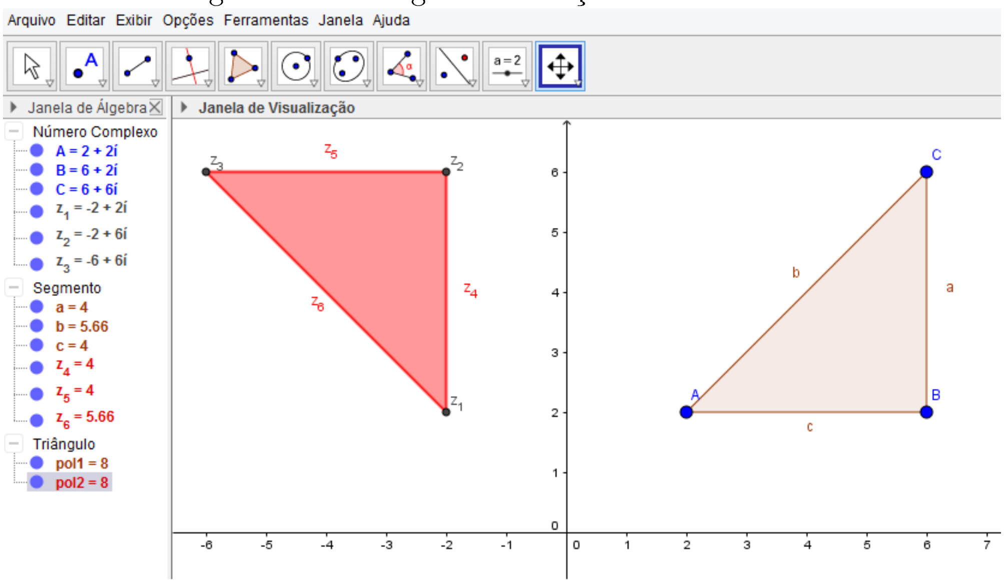


Fonte: Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo/Caderno do Professor/Matemática/Ensino Médio/3ªSérie/Volume1

Solução

Ao multiplicarmos por i todos os pontos da região indicada, ela manterá seu tamanho, mas sofrerá uma rotação de 90^o, conforme mostra a figura 5.11:

Figura 5.11: Imagem da solução da atividade 3

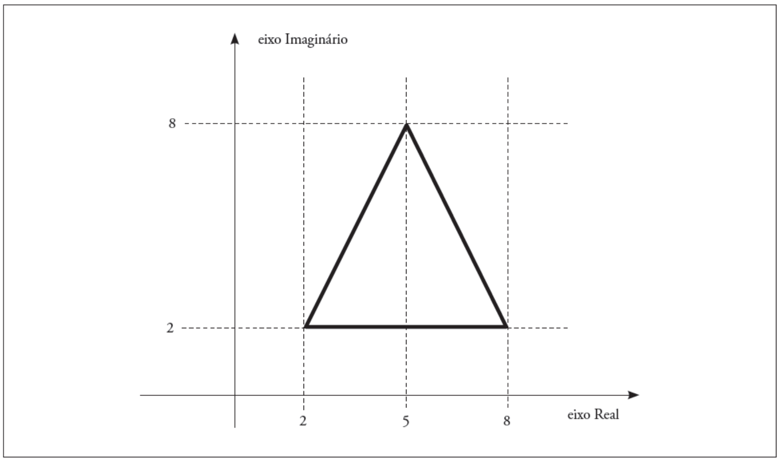


Fonte: Próprio autor

5.4 Atividade 4

Considere a região do plano complexo indicada a seguir. Cada ponto da região é a imagem de um complexo e será objeto de uma transformação, indicada nas alternativas. Represente no plano complexo usando o software *GeoGebra* a região resultante, nas seguintes situações:

Figura 5.12: Imagem da atividade 4



Fonte: Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo/Caderno do Professor/Matemática/Ensino Médio/3ªSérie/Volume1

a) for somado ao número real 9;

b) for somado ao número imaginário $9i$;

c) for somado ao número complexo $9 + 9i$;

d) for multiplicado pelo número real 2;

e) for multiplicado pelo número imaginário $2i$.

Solução

a) Ao somar um complexo com um número real, a imagem do complexo corresponde ao deslocamento horizontalmente na direção do eixo real. Neste caso, a região triangular será deslocada 9 unidades para a direita.

b) A região triangular será deslocada 9 unidades para cima.

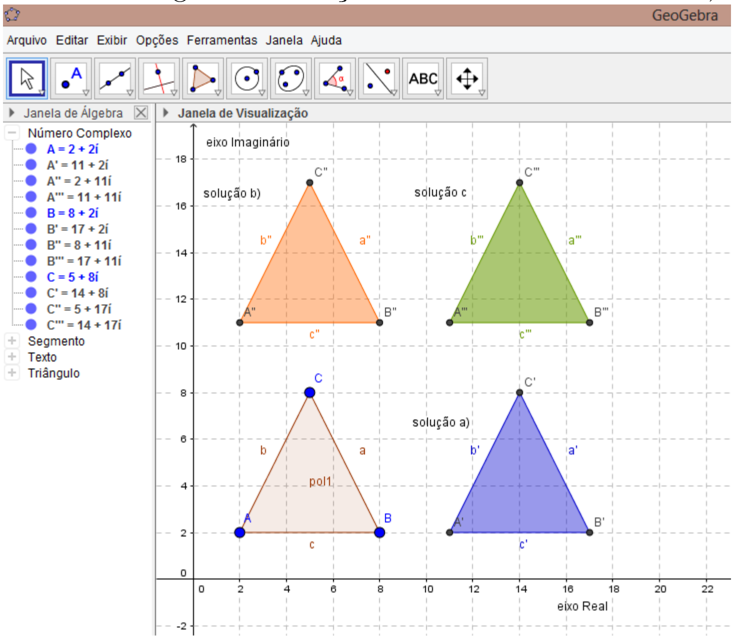
c) A região triangular será deslocada 9 unidades para a direita, em seguida, 9 unidades para cima; ou, equivalentemente, para cima de 9 unidades, e depois para a direita de 9 unidades.

d) A região será ampliada, cada complexo z terá seu valor absoluto multiplicado por 2. Não sofrerá rotação e sua área ficará multiplicada por 4.

e) A região sofrerá uma rotação de 90^o, correspondente à multiplicação por i, e também será ampliada de um fator 2, tendo sua área quadruplicada.

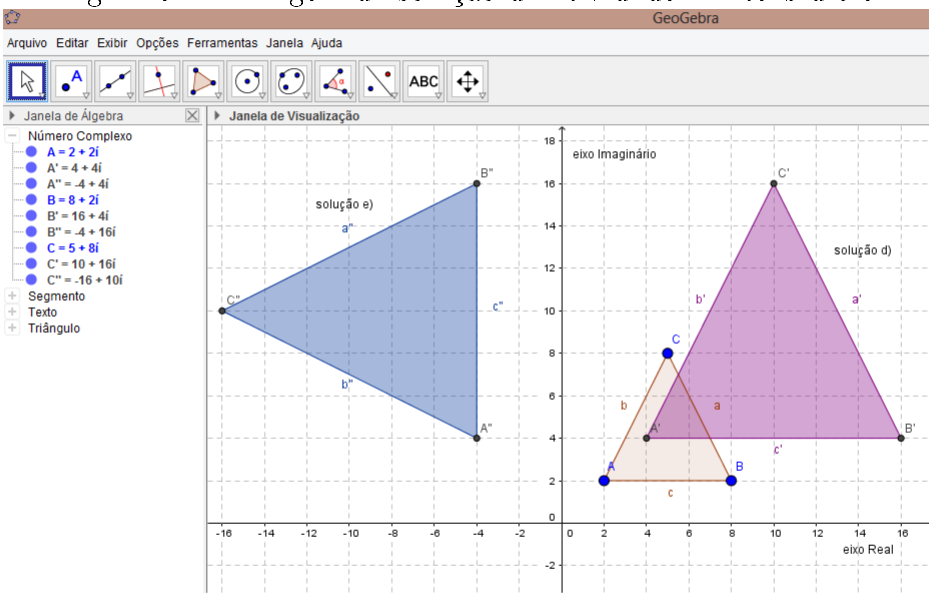
As figuras 5.13 e 5.14 a seguir traduzem as transformações ocorridas em **a**, **b**, **c**, **d** e **e**.

Figura 5.13: Imagem da solução da atividade 4 - itens a, b e c



Fonte: Próprio autor

Figura 5.14: Imagem da solução da atividade 4 - itens d e e



Fonte: Próprio autor

5.5 Pesquisa de Campo

As atividades propostas nesta dissertação de mestrado foram aplicadas para os alunos das 3^{as} séries do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Fleurides Cavallini Menechino na cidade de Adamantina-SP. Escola esta onde trabalho como professor titular de cargo efetivo na disciplina de Matemática. Os alunos aceitaram bem o projeto e se dedicaram na realização das atividades propostas.

Primeiramente foi feito um questionamento com os alunos para que os mesmos colocassem em jogo tudo que sabiam e pensavam sobre o conteúdo que iríamos aprender. Em seguida, foram apresentados os áudios e vídeos da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Unicamp, iniciando assim as discussões e explanações complementares, esclarecendo e organizando as tarefas de modo a garantir a máxima circulação de informações possíveis sobre os números complexos. Foram usados também os livros didáticos disponíveis sobre o assunto para conhecerem as operações e propriedades dos números complexos, assim como o material do Currículo Oficial do Estado de São Paulo (Caderno do Professor e Caderno do Aluno da 3ª série - Ensino Médio - Volume 1). Posteriormente, apresentamos o software *Movimentos Complexos* da coleção M^3 - Matemática Multimídia da Unicamp e o analisamos fazendo adendos pertinentes quanto à discussão das soluções do mesmo. Por final, foi passado as atividades adicionais com solução através do uso do software *GeoGebra*, sendo necessário uma aula apresentando o software e suas ferramentas antes da realização das atividades propostas. Para encerrar o projeto foi realizado novamente o mesmo questionamento inicial para verificar se essa metodologia de ensino surtiu efeito.

Vamos apresentar agora os resultados dos questionários aplicados antes e depois do trabalho realizado com os alunos da educação básica.

O questionário diagnóstico, aplicado para 49 alunos, distribuídos em três salas diferentes, continha as seguintes questões:

1) Quais conjuntos numéricos você conhece?

2) Você sabe o que é um número imaginário? Justifique.

3) Você conhece o conjunto dos números complexos? Justifique.

4) O que você imagina ser um número complexo?

5) E o que deve ser um número imaginário?

6) O que é o plano de Argand-Gauss?

7) De acordo com seus conhecimentos, é possível resolver a $\sqrt{-4}$?

Com tal questionário pude perceber que:

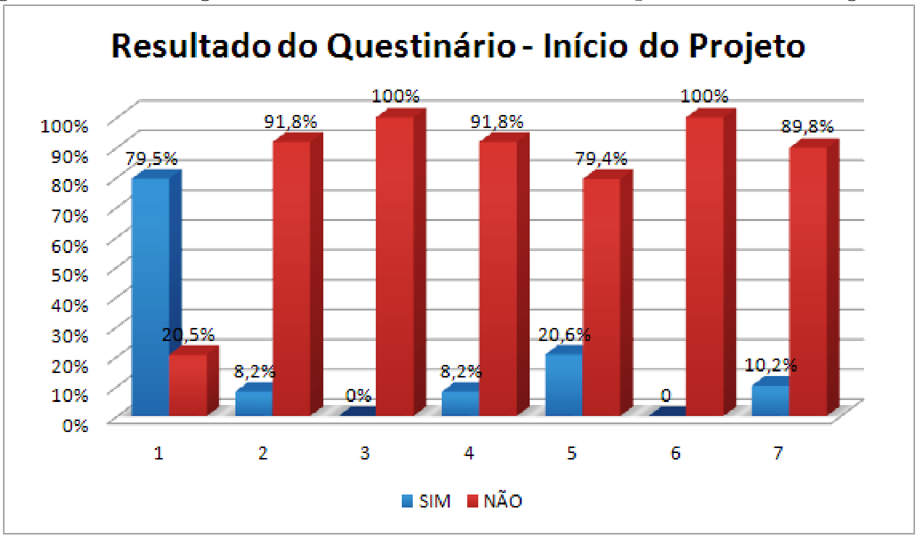
- $79,5\%$ dos alunos conheciam ou já ouviram falar sobre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. $20,5\%$ não conheciam ou não sabiam responder;

- $91,8\%$ não sabiam responder o que era um número imaginário e $8,2\%$ responderam ser um número que não era real;

- Todos os alunos (100%) responderam não conhecerem o conjunto dos números complexos;
- 91, 8% dos alunos não sabiam responder sobre o que imaginavam ser um número complexo e 8, 2% dos alunos deixaram a questão em branco;
- 69, 2% dos alunos não sabiam responder o que deveria ser um número imaginário, 10, 2% dos alunos deixaram a questão em branco, 14, 4% responderam ser um número que imaginamos e 6, 2% responderam ser um número que usamos para resolver uma equação;
- 94% dos alunos responderam não saber o que era o plano de Argand-Gauss e 6% não responderam nada;
- 81, 6% responderam não ser possível resolver a $\sqrt{-4}$, 10, 2% achavam que era possível resolver e 8, 2% deixaram a questão em branco.

O gráfico da figura 5.15 abaixo nos dá uma representação das respostas para o questionário aplicado aos alunos.

Figura 5.15: Imagem do Gráfico - Resultado do questionário diagnóstico



Fonte: Próprio autor

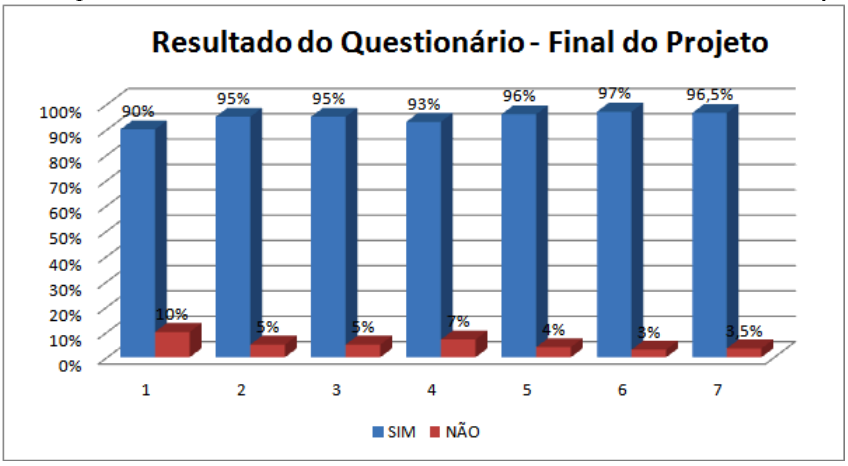
O mesmo questionário foi aplicado após a apresentação dos áudios, dos vídeos, do software, das discussões e explanações sobre o assunto e realização das atividades propostas, ou seja, após a finalização deste projeto envolvendo os conteúdos dos números complexos. Com isso pude perceber que:

- 90% dos alunos mencionaram os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos. 10% não sabiam responder;

- 5% não sabiam responder o que era um número imaginário e 95% responderam ser um número utilizado para resolver raízes quadradas de números negativos;
- 95% dos alunos responderam conhecerem o conjunto dos números complexos, formados por números reais e números imaginários e 5% não souberam responder;
- 93% dos alunos sabiam responder sobre o que imaginavam ser um número complexo e 7% dos alunos deixaram a questão em branco;
- 96% dos alunos sabiam responder o que era um número imaginário e 4% dos alunos deixaram a questão em branco;
- 97% dos alunos responderam o que era o plano de Argand-Gauss (aquele usado para representar geometricamente um número complexo) e 3% não responderam nada;
- $96,5\%$ responderam ser possível resolver a $\sqrt{-4}$, $2,2\%$ achavam não ser possível e $1,3\%$ deixaram a questão em branco.

O gráfico da figura 5.16 abaixo nos dá uma representação das respostas realizadas pelos alunos na aplicação do questionário de finalização do projeto envolvendo os números complexos.

Figura 5.16: Imagem do Gráfico - Resultado do questionário após o projeto realizado



Fonte: Próprio autor

Percebemos neste capítulo, que é possível aplicar os conceitos e conteúdos matemáticos do ensino médio de maneira diferenciada, utilizando vários recursos educacionais para este fim. Na Pesquisa de Campo realizada e mostrada anteriormente vimos como os alunos avançaram seus conhecimentos e adquiriram as habilidades necessárias envolvendo os números complexos. O resultado dos questionários aplicados e ilustrados nos gráficos relatam bem isso, onde podemos perceber um progresso significativo no aprendizado dos alunos.

6 Conclusões

Sabemos que o ensino da Matemática precisa avançar de modo a obter melhorias no aprendizado de nossos alunos. Porém, esta tarefa não é fácil, exigindo dos alunos e, principalmente dos professores, muita disposição e trabalho intenso.

O intuito deste trabalho é mostrar uma maneira dos alunos adquirirem as competências e habilidades relacionadas aos números complexos. Desse modo, espero profundamente poder contribuir para o ensino significativo dos números complexos. Foram apresentados, como motivações para tal assunto: áudios, vídeos, um software e demais atividades envolvendo tais conteúdos utilizando o *GeoGebra*. A partir deles são introduzidos os conceitos, propriedades, gráficos e transformações.

Pude perceber, durante todo o projeto desenvolvido com os alunos do Ensino Médio, que eles tinham um brilho diferente nos olhos durante a apresentação dos áudios e dos vídeos, e também na realização das atividades propostas tanto no site `http://m3.ime.unicamp.br/` quanto no software *GeoGebra*. Acredito que isso se deve ao fato de serem materiais diferenciados do normal em relação a uma sala de aula, principalmente na disciplina de Matemática.

Os alunos estranharam bastante a história apresentada nos áudios *Mundos Imaginários*, pois falava muito em dualidade, real e imaginário. Eles não imaginavam como isso era possível em Matemática, que trabalha com resultados concretos e exatos. Com a apresentação dos vídeos, os alunos começaram a entender o significado de números imaginários e a composição do conjunto dos números complexos, dando mais sentido ao conteúdo. Os vídeos motivam os alunos contando a história dos números complexos de uma maneira divertida e curiosa, falando e explicando algumas propriedades dos números complexos e suas representações algébricas e geométricas através de imagens e sons que chamaram a atenção dos mesmos.

Com a utilização do software *Movimentos Complexos* pude perceber um pouco de dificuldade por parte de alguns alunos, pois tal software trabalha com as transformações no plano complexo e é necessário conhecer as propriedades e operações envolvendo os números complexos. Contudo, foi muito interessante para os educandos, uma vez que eles viram a utilidade dos números complexos para a realização das transformações estudadas. Ou seja, os alunos puderam contextualizar o conteúdo estudado dando sentido naquilo que aprenderam.

O sofware *GeoGebra*, utilizado na realização das atividades sugeridas no Capítulo 5, é muito bom. Com ele é possível trabalhar vários assuntos da Matemática, além dos números complexos, principalmente na construção de gráficos de funções. Neste trabalho, os alunos não apresentaram dificuldades para solucionar as atividades propostas, achando o software muito prático e interessante. É possível também trabalhar com o *GeoGebra* utilizando o próprio celular, pois já existe o aplicativo *GeoGebra* para serem manuseados nos celulares.

Pude perceber através dos resultados dos questionários diagnósticos (inicial e final) que houve um aprendizado significativo em relação aos números complexos, pois no questionário inicial os alunos não sabiam nada a respeito de tais números e ao final do projeto conseguiam responder as questões e fazer as devidas justificativas. Isso foi muito gratificante, pois o que todo professor deseja é que seus alunos aprendam os conteúdos trabalhados. Em seus depoimentos pessoais, os alunos acharam motivadores os recursos educacionais apresentados e que tais recursos trouxeram para eles uma vontade curiosa e diferenciada em aprender sobre o tema.

Acredito que os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados e que o material é muito bom e motivador, pois desperta o interesse por parte dos alunos já que trabalha de modo diferenciado. Creio que não haja necessidade de modificação para que o mesmo material seja trabalhado por uma outra turma.

Tenho o anseio de que, partindo de um problema e da necessidade de resolvê-lo, podemos mostrar a utilidade de aprender os conteúdos do Ensino Médio. Assim, podemos dar sentido no aprendizado dos conteúdos, sem utilizar ferramentas decoradas e prontas, mas construindo com os alunos essas ferramentas.

Esta pesquisa para a dissertação, assim como todo o curso de mestrado, trouxe-me uma nova visão de como abordar determinados conteúdos matemáticos, na perspectiva de construir conceitos. Isso tem me levado a não mais utilizar fórmulas prontas para ensinar determinados assuntos, mas sim, construir tais fórmulas com os alunos, interpretando os resultados.

Referências

ARAÚJO, Nanci B. Ferreira. *Números complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio.* 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

CHURCHILL, Ruel Vance. *Variáveis complexas e suas aplicações*; tradução: Tadao Yoshioka; Revisão técnica: Alfredo Alves de Farias. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

DO CARMO, M. P., MORGADO, A. C., WAGNER, E. *Trigonometria - Números Complexos.* IMPA-VITAE, 1992.

EVES, Howard: *Introdução à História da Matemática.* São Paulo. Editora Unicamp, 2004.

GARBI, Gilberto G. *O Romance das Equações Algébricas.* Makron Books, 1997.

HOHENWARTER, Markus, et al. *GEOGEBRA*. 2001. Disponível em <https://www.geogebra.org/team>. Acesso em: 20 set. 2016.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar. Complexos, Polinômios e Equações.* Vol.6. Editora Atual, 2 ed. São Paulo.

LIMA, Elton Lages e outros: *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 3. Rio de Janeiro. SBM, 1998.

MENDES, Douglas. *Mundos Imaginários.* Guia do Professor-Áudio. Série Cultura, 2011. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1255>. Acesso em: 10 ago. 2016.

PAQUES, Otília W. *Um Sonho Complexo.* Guia do Professor-Vídeo. Série Matemática na Escola, 2011. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187>.

Acesso em: 12 ago. 2016.

PAQUES, Otília W. *O Sonho Continua.* Guia do Professor-Vídeo. Série Matemática na Escola, 2011. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1141>. Acesso em: 12 ago. 2016.

PAQUES, Otília W. *O Sonho Não Acabou.* Guia do Professor-Vídeo. Série Matemática na Escola, 2011. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1142>. Acesso em: 12 ago. 2016.

PINTO JUNIOR, Ulício. *A História dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand.* 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

RODRIGUES, Claudina Izepe. *Movimentos Complexos.* Guia do Professor-Software. Série Matemática na Escola, 2011. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1239>. Acesso em: 12 set. 2016.

ROSA, Mário Servelli. *Números complexos: uma abordagem histórica para aquisição dos conceitos.* 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SÃO PAULO (ESTADO) Secretaria da Educação. *Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo.* CADERNO DO ALUNO: matemática, ensino médio, 3ª série/ Secretaria da Educação. São Paulo: SE, 2014. v. 1, p. 78-102.

SÃO PAULO (ESTADO) Secretaria da Educação. *Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo.* CADERNO DO PROFESSOR: matemática, ensino médio, 3ª série/ Secretaria da Educação. São Paulo: SE, 2014. v. 1, p. 84-104.

SOARES, Marcio G. *Cálculo em uma variável complexa.* Coleção Matemática Universitária. 3ª ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA: *Revista do Professor de Matemática 47.* 2001.

<http://m3.ime.unicamp.br> - último acesso em 12/09/2016.

<http://petmatematica.weebly.com/> - último acesso em 01/02/2017.