Frações contínuas e aproximações de reais por racionais

Thiago Ribeiro de Araujo Bruno

17 de fevereiro de 2017

Sumário

Resumo

Neste trabalho vamos estudar a representação de números reais por outro meio além da conhecida por decimais, a representação em frações contínuas. Veremos que elas nos fornecem aproximações excelentes para os números reais por meio de racionais, e que de fato elas são as melhores aproximações. No primeiro capítulo veremos uma definição de frações contínuas baseada no algoritmo de Euclides, e apresentaremos os chamados convergentes. O segundo capítulo é dedicado às aproximações de números reais por meio de racionais; isso é feito por meio de teoremas relacionados ao tema. Também é apresentado o conceito de fração contínua periódica e sua relação com os chamados irracionais quadráticos. No terceiro capítulo veremos a equação de Pell e sua relação com os convergentes, que fornecem – alguns deles - as soluções para a dita equação. O quarto capítulo apresenta uma proposta didática voltada para alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental, incluindo a teoria básica e algumas aplicações das frações contínuas.

Palavras-chave: teoria dos números, frações contínuas, equações de Pell, ensino fundamental

Agradecimentos

Embora o grau de mestre seja individual, me sinto na obrigação de compartilhar esse mérito com algumas pessoas. Esses agradecimentos são sinceros e merecidos.

Inicialmente, agradeço aos meus pais, por terem me ensinado desde sempre que estudar é a melhor arma contra as dificuldades que uma família pobre enfrentará na vida.

Agradeço ao professor Gugu, por ter me orientado durante toda essa caminhada, e também aos meus colegas de classe no IMPA. Poucas vezes vi um nível tão alto de colaboração e empenho para ajudar o outro. Desejo sucesso a todos.

Um agradecimento também ao meu grande amigo e professor Jorge Fagundes, por ter me ajudado no início da minha profissão e me apresentado o PROFMAT, incentivando-me a fazê-lo.

Não poderia esquecer os meus amigos, de profissão ou não, por sempre terem me incentivado e acreditado no meu potencial. Também quero agradecer à Fernanda, minha inspiração, por estar ao meu lado em todos os momentos.

E, embora sempre tivesse convicção do meu potencial, acredito que o caminho teria sido mais difícil sem o apoio do governo federal democraticamente eleito. Este abriu portas para que professores da rede pública, que em boa parte não tinham esperanças de fazer um mestrado, se qualificassem.

Capítulo 1

FRAÇÕES CONTÍNUAS

1.1 Introdução

Imaginemos a seguinte situação: um aluno deve resolver a seguinte equação de segundo grau:

$$x^2 - 5x - 1 = 0 \tag{1.1}$$

utilizando uma técnica diferente: dividindo ambos os membros da equação por x. Teríamos, então, a seguinte igualdade:

$$x = 5 + \frac{1}{x}$$

Utilizando essa mesma igualdade, e substituindo o valor de x, repetidas vezes, chegaríamos a igualdade:

$$x = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{x}}}}$$

Ou seja, a variável x aparecerá sempre no desenvolvimento dessa equação, sendo impossível determinar seu valor exato. Porém, ocorre, no segundo membro dessa equação, uma repetição de valores, uma sucessão de frações

$$5+\frac{1}{5},\ 5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5}},\ 5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5}}}$$

obtidas a partir de interrupções feitas em cada passo. Essas frações, escritas na forma usual, nos dão os seguintes valores:

$$5+\frac{1}{5}=5,2,\quad 5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5}}=5,1923076...,\quad 5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5}}}=5,1925925...$$

Esses resultados nos fornecem aproximações surpreendentemente boas para a raiz positiva da equação (1.1). Ele são os chamados *convergentes*, como veremos mais tarde. De fato, a raiz em questão é

$$x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}=5,1925824...$$

Comparando com o último convergente obtido, este nos dá uma precisão de 4 casas decimais (5,1925).

Observando essa dinâmica, surgem alguns questionamentos: se calcularmos os próximos convergentes, conseguiremos melhores aproximações para x? Existe alguma outra técnica por meio da qual obtemos outras aproximações mais precisas? A exemplo da representação por decimais, como $\frac{2}{3}=0,66666...$, a igualdade

$$\frac{5+\sqrt{29}}{2}=5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

é válida? A teoria das frações contínuas nos fornece essas e outras respostas para problemas que envolvam aproximações de números racionais por meio de reais.

1.2 Fração contínua

Uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

é chamada de *fração contínua*, onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{N}^*$. Por enquanto estamos preocupados em estudar as chamadas frações contínuas finitas, ou seja,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

onde (a_n) é uma sequência de inteiros positivos, com $n \geq 1$. Por enquanto, não estamos interessados nas frações contínuas infinitas; isso será visto no capítulo 2.

Exemplo 1.1. *Representar o numero* $\frac{91}{27}$ *em termos de frações contínuas.*

Inicialmente, efetuamos a divisão indicada, cujo quociente é 3. Então reescrevemos a fração como uma soma entre o quociente e uma fração própria, ou seja, cujo valor se encontra entre 0 e 1. Assim sendo, temos

$$\frac{91}{27} = 3 + \frac{10}{27}$$

Escrevemos a segunda parcela da soma como uma fração de numerador 1. Ao denominador resultante, aplicamos novamente o primeiro passo:

$$\frac{91}{27} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{7}{10}}$$

Repetimos o procedimento com a fração $\frac{7}{10}$, e assim sucessivamente, até chegar à expressão final:

$$\frac{91}{27} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}$$

Observe que, na última fração obtida, a aparição do numerador 1 permite encerrar a operação, obtendo assim uma fração contínua finita. Outra representação para uma fração contínua é pela notação $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Portanto, $\frac{91}{27} = [3; 2, 1, 2, 3]$.

Observando o desenvolvimento de $\frac{91}{27}$, podemos estabelecer um algoritmo para a obtenção de uma fração contínua de um número x. Para isso, utilizaremos a *função piso*.

Definição 1.2. *A função piso associa um número real x à sua parte inteira, denotada por $\lfloor x \rfloor$, que é o único inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

Exemplo 1.3. $\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lfloor \frac{14}{3} \rfloor = 4$.

Podemos definir o algoritmo para obtenção de uma fração contínua de um número x em dois passos:

- Escrever $x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\alpha_1}$, onde α_1 é o inverso da fração obtida ao calcular $x - \lfloor x \rfloor$;

- Se $\alpha_1 \in \mathbb{N}^*$, o algoritmo se encerra. Caso contrário, repetimos o primeiro passo em α_1, ou seja, escrevemos $x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor \alpha_1 \rfloor + \cfrac{1}{\alpha_2}}$, e assim sucessivamente.

Este algoritmo nos fornece uma forma eficiente de se representar uma fração contínua. Nesse desenvolvimento, comparando com as notações vistas anteriormente, fica claro que o inteiro $\lfloor x \rfloor$ corresponde a a_0, e os inteiros positivos $\lfloor \alpha_1 \rfloor, \lfloor \alpha_2 \rfloor, \ldots, \lfloor \alpha_n \rfloor$ correspondem à sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Em algum momento do desenvolvimento, se $\lfloor \alpha_n \rfloor = \alpha_n$, então $\alpha_n = a_n$, e temos uma fração contínua finita. Caso contrário, teremos uma fração contínua infinita. Nesse caso dizemos que

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] \tag{1.2}$$

onde

$$\alpha_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \ddots}}$$

Se, para algum n, $\alpha_n = \alpha_{n+k}$, teremos uma fração contínua *periódica*. Veremos a importância dessas definições no capítulo 2, onde estudaremos as frações contínuas infinitas com mais detalhes.

Exemplo 1.4. *Desenvolver* $\frac{27}{91}$ *em termos de frações contínuas.*

Utilizando o algoritmo apresentado acima, $\left\lfloor \frac{27}{91} \right\rfloor = 0$, então

$$\frac{27}{91} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{91}{27}}$$

Ou seja, $\alpha_1 = \frac{91}{27}$. Aplicando o primeiro passo nessa fração, chegamos a

$$\frac{27}{91} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Portanto, $\frac{27}{91} = [0; 3, 2, 1, 2, 3]$.

Os dois últimos exemplos nos mostram uma propriedade interessante das frações contínuas. Dois números, quando um é inverso do outro, possuem representações semelhantes, a saber: se

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

com $a_0 \geq 1$, então

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

A representação em frações contínuas é única, com exceção feita ao último termo. Tomando como exemplo novamente a fração $\frac{91}{27} = [3; 2, 1, 2, 3]$, temos $a_4 = 3$. Podemos reescrever o último passo da fração contínua como se segue:

$$\frac{91}{27} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}}$$

Portanto, $\frac{91}{27} = [3; 2, 1, 2, 2, 1]$. A partir daqui, consideraremos apenas a primeira notação, para não gerar confusões.

Exemplo 1.5. *Escrever* $-\frac{27}{11}$ *em fração contínua.*

$$-\frac{27}{11} = -3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$$

Portanto, $-\frac{27}{11} = [-3; 1, 1, 5]$.

1.3 O algoritmo de Euclides

O algoritmo para obtenção de uma fração contínua descrito acima pode ser encarado como um caso particular do algoritmo de Euclides, usado para determinar o maximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros. Esse algoritmo consiste em aplicar sucessivamente o algoritmo da divisão a dois inteiros, até que se chegue a um resto zero, o que certamente acontecerá, pois é finito o número de naturais divisores de algum outro número. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. De acordo com os passos descritos acima, obtemos o seguinte:

$$
\begin{array}{rcl}
a = & b.q_0 + r_0, & 0 < r_0 < b \\
b = & r_0.q_1 + r_1, & 0 < r_1 < r_0 \\
r_0 = & r_1.q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
r_{n-3} = & r_{n-2}.q_{n-1} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} = & r_{n-1}.q_n &
\end{array}
\tag{1.3}
$$

Nas desigualdades que envolvem os restos, admitiu-se que os restos são estritamente maiores que zero, ou seja, $0 < r_0 < b$ ao invés de $0 \leq r_0 \leq b$. A explicação é simples: se $r_0 = 0$, a equação será a última e o algoritmo se encerra. De fato, a sequência $(r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{n-2}, r_{n-1})$, de números inteiros positivos, é decrescente. Portanto, em certo momento um dos restos será zero, e assim a sequência se encerrará.

A partir das desigualdades em (1.1), dividimos os membros de cada equação pelo divisor correspondente a ela, e assim obtemos:

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{a}{b} & = & q_0 + \frac{r_0}{b} \\
\frac{b}{r_0} & = & q_1 + \frac{r_1}{q_0} \\
\frac{r_0}{r_1} & = & q_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} & = & q_{n-1} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \\
\frac{r_{n-2}}{r_{r-1}} & = & q_n
\end{array}
\tag{1.4}
$$

, onde vemos que r_{n-1} é, de fato, o MDC entre a e b.

Observando cada igualdade em (1.2), vemos que, no primeiro membro, aparece uma fração cujo numerador é maior que o denominador, e no segundo membro, temos um número inteiro e uma fração entre 0 e 1. Além disso, podemos observar que, com exceção da primeira, a fração própria que aparece no primeiro membro de cada equação é o inverso da fração própria que aparece no segundo membro da anterior. Diante disso, a primeira equação pode ser reescrita como

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}.$$

Repetindo esse procedimento em todas as equações, e fazendo as devidas substituições, obtém-se a igualdade abaixo:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Ou seja, obtemos a representação de $\frac{a}{b}$ em fração contínua. Comparando com a notação usada na seção anterior, a sequência $(q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ corresponde a sequência $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Por ser finito, o algoritmo de Euclides prova que todo número racional possui uma representação finita em termos de fração contínua.

1.4 Convergentes

Em vários momentos, se fará necessária a interrupção do desenvolvimento de uma fração contínua. Como já visto no início do capítulo, ao fazer isso, encontramos os chamados *convergentes*, que não por acaso possuem esse nome: veremos mais adiante que a sequência dos convergentes $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ converge exatamente para o número real x que ele representa. Além disso, eles nos fornecem aproximações surpreendentemente boas para o número real em questão. Nesta seção conheceremos os convergentes e suas propriedades aritméticas mais interessantes. Começaremos desenvolvendo os convergentes a partir da interrupção dos passos do algoritmo descrito na primeira seção. Seja

$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, e sejam $p_n \in \mathbb{Z}$ e $q_n \in \mathbb{N}^*$, com $mdc(p_n, q_n) = 1$, tais que

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

com $n \in \mathbb{N}^*$. Definimos $\frac{p_n}{q_n}$ como o n-ésimo *convergente* da fração contínua de x, e $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ como a sequência dos convergentes $\frac{p_n}{q_n}$. Podemos verificar, tomando $n = 0$, que $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$, ou seja, $p_0 = a_0$ e $q_n = 1$. Para $n = 1$, temos

$$\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1a_0 + 1}{a_1},$$

o que implica $p_1 = a_1a_0 + 1$ e $q_1 = a_1$. Para $n = 2$, temos

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_2a_1a_0 + a_0 + a_2}{a_2a_1 + 1}$$

ou seja, $p_2 = a_2a_1a_0 + a_0 + a_2$ e $q_2 = a_2a_1 + 1$.

Usando as igualdades obtidas e substituindo convenientemente, chegamos às seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 \quad e \quad q_0 = 1 \\ p_1 &= a_1p_0 + 1 \quad e \quad q_1 = a_1 \\ p_2 &= a_2p_1 + p_0 \quad e \quad q_0 = a_2q_1 + q_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Observando as igualdades obtidas acima, podemos conjecturar uma fórmula recorrente para obter p_n e q_n, e, consequentemente, todos os convergentes $\frac{p_n}{q_n}$. Veremos isso nos resultados que provaremos a seguir.

Proposição 1.6. *Dada uma sequência de números reais $t_0, t_1, t_2, \ldots$, finita ou infita, tal que $t_k \neq 0$, para todo $k \geq 1$, definimos duas sequências, (x_m) e (y_m), definidas pelas recorrências $x_0 = t_0$, $x_1 = t_0t_1 + 1$, $x_{m+2} = t_{m+2}x_{m+1} + x_m$ e $y_0 = 1$, $y_1 = t_1$,*

$y_{m+2} = t_{m+2}y_{m+1} + y_m$, para todo $m \geq 0$. Então,

$$[t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{t_n}}}} = \frac{x_n}{y_n},\ \forall n \geq 0$$

Além disso, $x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração. A prova será por indução em n, para n = 0, 1 e 2 já foi visto acima. Suponha, agora, que seja válido para n. Vamos mostrar que a afirmação também é válida para $n + 1$.

Temos que $[t_0; t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}] = [t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}]$. Então:

$$\begin{aligned}
[t_0; t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}] &= \frac{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right)x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(t_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)y_{n-1} + y_{n-2}} \\
&= \frac{t_{n+1}t_n p_{n-1} + x_{n-1} + t_{n+1}x_{n-2}}{t_{n+1}t_n q_{n-1} + y_{n-1} + t_{n+1}y_{n-2}} \\
&= \frac{t_{n+1}\left(t_n p_{n-1} + x_{n-2}\right) + x_{n-1}}{t_{n+1}\left(t_n y_{n-1} + y_{n-2}\right) + y_{n-1}} \\
&= \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}
\end{aligned}$$

Para a segunda afirmação, novamente usaremos indução em n. Para $n = 0$, temos

$$x_1 y_0 - y_0 x_1 = (t_1 t_0 + 1)1 - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0$$

Sendo válido para n, então temos, para n + 1

$$\begin{aligned}
x_{n+2}y_{n+1} - x_{n+1}y_{n+2} &= (t_{n+2}x_{n+1} + x_n)y_{n+1} - (t_{n+2}y_{n+1} + y_n)x_{n+1} \\
&= x_n y_{n+1} - x_{n+1}y_n = -(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}) \\
&= (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

□

Corolário 1.7. *As sequências (p_n) e (q_n) são definidas, para todo $n \geq 0$, pelas re-*

corrências

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \quad e \quad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \tag{1.6}$$

onde

$$p_0 = a_0, p_1 = a_1a_0 + 1 \quad e \quad q_0 = 1, q_1 = a_1 \tag{1.7}$$

Demonstração. As sequências (p_n) e (q_n), definidas dessa forma, satisfazem as igualdades dadas na proposição anterior,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] \text{ e } p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n, \ \forall n \geq 0$$

Como $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, segue que todos os elementos p_n e q_n são primos entre si. Também podemos observar que $q_n > 0$ para todo $n \geq 0$. Diante desses fatos, podemos concluir que $\dfrac{p_n}{q_n}$ é um convergente da fração contínua de x. □

Corolário 1.8. *A diferença entre dois convergentes consecutivos, denotada por Δ_n, é dada por*

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}$$

Demonstração. $\Delta_n = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_{n+1}q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}$ □

O último resultado nos mostra um fato interessante: os convergentes de ordem par são menores que seus convergentes vizinhos; consequentemente, os convergentes de ordem ímpar são maiores que seus vizinhos. Além disso, os convergentes de ordem par formam uma sequência crescente e os convergentes de ordem ímpar formam uma sequência decrescente. Outro fato interessante é que, devido a essas propriedades, o valor exato de uma fração contínua está localizado entre dois convergentes consecutivos quaisquer.

Teorema 1.9. *Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$x = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - xq_{n-1}}{xq_n - p_n} \tag{1.8}$$

Demonstração. O primeiro resultado segue de (1.2), pois $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1}]$. O segundo é consequência direta do primeiro.

□

O próximo teorema nos traz a ordem do erro absoluto entre os convergentes e x.

Teorema 1.10. *Temos, para $n \geq 0$,*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$$

onde $\beta_{n+1} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$. Em particular,

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

Demonstração. Do teorema anterior, temos

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(\alpha_{n-1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{\left(\alpha_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} \end{aligned}$$

Em particular, temos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2},$$

e como $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1}$ e $0 < \beta_n < 1$, temos que $a_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2$. Portanto,

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

Além disso, como $\beta_{n+1} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n}$, temos

$$\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{1}{\dfrac{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}}} = \frac{1}{a_n + \dfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$$

Desenvolvendo essa fração em termos de frações contínuas, chegamos a $\beta_{n+1} = [0; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$. $\square$

Anteriormente foi citado que todos os convergentes pares são menores que todos os convergentes ímpares, o que implica que o valor exato de uma fração contínua está sempre localizado entre dois convergentes consecutivos. Outros fatos interessantes podem ser observados, quando se trata de convergentes e a diferença entre eles. Um resultado interessante é que a diferença entre dois convergentes consecutivos vai ficando menor à medida em que s converggentes vão aumentando. De fato, seja Δ_n e Δ_{n+1}. Sabemos que

$$\Delta_n = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n} \quad e \quad \Delta_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+2}q_{n+1}}$$

Então

$$|\Delta_n| = \frac{1}{q_{n+1}q_n} \quad e \quad |\Delta_{n+1}| = \frac{1}{q_{n+2}q_{n+1}}$$

A sequência (q_n) é (estritamente) crescente, para $n \geq 2$ (esse fato segue da definição de convergentes via recorrências), segue que $q_n < q_{n+2}$, portanto $q_{n+1}q_n < q_{n+2}q_{n+1}$. Conclui-se, então que

$$\frac{1}{q_{n+2}q_{n+1}} < \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

Portanto, $|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|$. O próximo resultado mostra que os convergentes pares formam uma sequência crescente, e que os convergentes ímpares formam uma sequência decrescente. Além disso, nos dá uma nova demonstração de que os convergentes ímpares são maiores que todos os convergentes pares.

Proposição 1.11. *Temos, para $k \geq 0$,*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

Demonstração. Inicialmente, verificamos a primeira parte das desigualdades, ou seja, $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}}$. De fato:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} &= \frac{p_{2k+2}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+2}}{q_{2k+2}q_{2k}} \\
&= \frac{(a_{2k+2}p_{2k+1} + p_{2k})q_{2k} - (a_{2k+2}q_{2k+1} + q_{2k}p_{2k}}{q_{2k+2}q_{2k}} \\
&= \frac{a_{2k+2}(p_{2k+1}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+1})}{q_{2k+2}q_{2k}} = \frac{(-1)^{2k}a_{2k+2}}{q_{2k+2}q_{2k}},
\end{aligned}$$

que é positivo para todo $k \geq 0$, ou seja, $\dfrac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \dfrac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}}$. Analogamente, para a última parte das desigualdades, temos

$$\frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} - \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = \frac{(-1)^{2k+1}a_{2k+3}}{q_{2k+3}q_{2k+1}},$$

que é negativo para todo $k \geq 0$, ou seja, $\dfrac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \dfrac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$. Por fim, usamos o fato de que $x - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$, que é positivo para n par e negativo para n ímpar. Isso conclui a demonstração. $\square$

A partir de agora, mostraremos que toda fração contínua simples infinita representa um número irracional.

Corolário 1.12. *Seja a sequência de convergentes* $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$*. Então* $lim_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}$ *existe e*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} < \cdots < \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} < \cdots < \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

Demonstração. Pelo corolário 1.1, temos que

$$|\Delta_n| = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

Como (q_n) é estritamente crescente, então $\left|\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \to 0$ quando $n \to 0$. Assim

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

que implica em

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_k}{q_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

e portanto

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} < \cdots < \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} < \cdots < \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

$\square$

Com base no corolário anterior, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 1.13. *Sejam* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *inteiros positivos, exceto possivelmente* a_0*. Esta sequência determina uma fração contínua simples e infinita. O valor de* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$

é definido como
$$\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

A partir dessa definição, vamos mostrar que toda fração continua simples e infinita representa um número irracional, e que esse número é exatamente o limite da sequência de convergentes. Também mostraremos que um número irracional é representado unicamente por uma fração contínua. Para começar, mostraremos o seguinte teorema:

Teorema 1.14. *Toda fração contínua simples infinita representa um número irracional.*

Demonstração. Seja $\rho = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Então, pela definição 1.14, temos que

$$\rho = \lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Pelo corolário 1.13,
$$\frac{p_n}{q_n} < \rho < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Sendo assim,
$$0 < \left|\rho - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

Sabemos que $\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \Delta$. Então, podemos reescrever a desigualdade anterior da seguinte forma:
$$0 < \left|\rho - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

Multiplicando essa desigualdade por q_n,

$$0 < \left|\rho q_n - q_n\right| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

Suponha que $\rho = \frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Então,

$$0 < \left|aq_n - bp_n\right| < \frac{b}{q_{n+1}}.$$

Quando $n \to \infty$, $q_{n+1} \to \infty$. Logo, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b < q_{n+1}$, ou seja,

$$0 < \left|aq_{n_0} - bp_{n_0}\right| < 1.$$

Contradição, pois $aq_{n_0} - bp_{n_0} \in \mathbb{N}$. Portanto, ρ é irracional. □

Proposição 1.15. *Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ inteiros, com $a_k > 0\ \forall k \geq 1$, e sejam $\left(\dfrac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ os convergentes da fração contínua $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Então o conjunto de todos os números reais cuja representação em frações contínuas se iniciam em $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ é o intervalo*

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup \{[a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha], \alpha > 1\}$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right) & com\ \ n\ \ par \\ \left(\dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}\right] & com\ \ n\ \ impar \end{cases}$$

Além disso, a função $G(1, +\infty) \longrightarrow I(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, dada por $G(\alpha) = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha]$ é monótona, crescente para n ímpar e decrescente para n par.

Demonstração. Como

$$G(\alpha) = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha] = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{(\alpha q_n + q_{n-1})q_n},$$

então, por 1.11, temos que $G(\alpha)$ é rcescente para n ímpar e decrescente para n par. Sendo assim, como $G(1) = \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ e $G(\alpha) = \dfrac{p_n}{q_n}$, temos que

$$G((1, +\infty)) = \begin{cases} \left(\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right) & com\ \ n\ \ par \\ \left(\dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}\right) & com\ \ n\ \ impar \end{cases}$$

Portanto,

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup [a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha], \alpha > 1$$

$$= \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup G((1, +\infty))$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right) & com\ \ n\ \ par \\ \left(\dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n}\right] & com\ \ n\ \ impar \end{cases}$$

□

Proposição 1.16. *Existe um único número irracional α cuja representação em frações contínuas é $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.*

Demonstração. Sejam p_n e q_n definidos tais que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ seja a sequência de convergentes de $[a_0, a_1, \dots]$. Então, por 1.11,

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}},\ \forall\, k \geq 0.$$

Então, considere os intervalos fechados

$$I_k = \left[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right].$$

Desse modo, podemos afirmar que $I_{k+1} \subset I_k$. Utilizando intervalos encaixados, e observando que

$$|I_k| = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{p_{2k+1}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+1}}{q_{2k}q_{2k+1}} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k}q_{2k+1}} = \frac{1}{q_{2k}q_{2k+1}},$$

existe, então, um número real x que pertence a $\bigcap\limits_{k\geq 0} I_k$. Agora, observe que, como

$$[a_0, a_1, \dots, a_{2k}] = \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq x \leq [a_0, a_1, \dots, a_{2k+1}]$$

e, pela proposição anterior, $\dfrac{p_{2k}}{q_{2k}}$ e $\dfrac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ pertencem ao intervalo $I_{2k} \subset I9a_0, a_1, \dots, a_{2k})$, podemos afirmar que $x \in I(a_0, a_1, \dots, a_{2k})$. Sendo assim, sua fração contínua começa com $[a_0, a_1, \dots, a_{2k})$, $\forall k \geq\ 0$ e, portanto, $x = [a_0, a_1, \dots]$. Como se trata de uma fração contínua infinita, temos que x é irracional. □

Capítulo 2

CONVERGENTES E BOAS APROXIMAÇÕES

No capítulo anterior vimos que a sequência de convergentes de um número irracional convergem para ele. Neste capítulo, veremos qual é a ordem dessa aproximação, ou seja, vamos analisar como esses convergentes se aproximam do número irracional. Essa ideia consiste em estabelecer cotas superiores e inferiores para o erro da aproximação entre ele e seus convergentes. Depois disso, veremos que as aproximações dadas para números irracionais por racionais, quando dadas por seus convergentes, são as melhores. Veremos também que todas as melhores aproximações são necessariamente dadas por convergentes.

2.1 Aproximação por convergentes

Teorema 2.1. *Seja x irracional e $\dfrac{p_n}{q_n}$ convergentes da fração contínua de x. Então*

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Demonstração. Vamos demonstrar a primeira parte da desigualdade. Do teorema 1.4, temos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$$

Fazemos a seguinte afirmação:

$$(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2 < (q_n + q_{n+1})q_n^2,$$

que é equivalente a

$$(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n < q_n + q_{n+1}.$$

De fato, essa afirmação é verdadeira. Podemos escrever a última desigualdade como

$$q_n(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} - 1) < q_{n+1}.$$

De fato, temos

$$q_n(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} - 1) = q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1} - q_n,$$

pois $q_n\beta_{n+1} = q_{n-1}$. Temos então

$$q_n(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} - 1) = q_n(\alpha_{n+1} - 1) + q_{n-1} < \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$$

Quanto a segunda parte da desigualdade, basta lembrar que

$$\frac{p_n}{q_n} \leq x \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \ \ ou \ \ \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \leq x \leq \frac{p_n}{q_n}$$

Daí, segue que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_nq_{n+1}}$$

que é equivalente a

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

□

2.2 Boas aproximações

Nesta seção mostraremos que as melhores aproximações de um número real são dadas por convergentes de frações contínuas. Caracterizaremos essas boas aproximações e veremos desigualdades importantes que refinam o erro dessa aproximação. Primeiramente, definiremos abaixo o que é uma *boa aproximação*.

Definição 2.2. *Uma boa aproximação para um número real x é uma fração $\frac{a}{b}$, $b > 0$, tal que, para todo $\frac{c}{d}$, $0 < d < b$, vale a desigualdade*

$$|dx - c| > |bx - a|.$$

Proposição 2.3. *Vale a seguinte desigualdade:*

$$\left|q_n x - p_n\right| < \left|q_{n-1} x - p_{n-1}\right|$$

Demonstração. Sabemos que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}$$

que é equivalente a

$$\left|q_n x - p_n\right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}.$$

Analogamente, temos que

$$\left|q_{n-1} x - p_{n-1}\right| = \frac{1}{q_{n-1}(\alpha_n + \beta_n)}$$

Para concluir a prova, provaremos o lema a seguir.

Lema 2.4. $\dfrac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})} < \dfrac{1}{q_{n-1}(\alpha_n + \beta_n)}$.

Demonstração. Sabemos que $\beta_{n+1} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n}$. Portanto, podemos reescrever a desigualdade acima da seguinte forma:

$$\frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})} < \frac{1}{q_{n-1}(\alpha_n + \beta_n)}$$

$$q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1} > q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2} = q_n + \frac{q_{n-1}}{\alpha_{n+1}},$$

pois $\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$, e como $\alpha_{n+1} > 1$, a prova está concluída. □

□

Teorema 2.5. *Para todo x e três convergentes consecutivos dele,*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}},$$

pelo menos um deles satisfaz a desigualdade

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Demonstração. A prova é por contradição. Supondo o teorema falso, então, pelo teorema 1.4 existe x irracional tal que nenhum dos três convergentes satisfaz a desigualdade. Ou seja,

$$\alpha_n + \beta_n \le \sqrt{5}, \ \ \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \le \sqrt{5} \ \ e \ \ \alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \le \sqrt{5}.$$

Diante disso, temos que $a_k \le 2$, para $k = n,\ n+1,\ n+2$ (a_k é a parte inteira de α_k). Como $\beta_{k+1} = \dfrac{1}{a_k + \beta_k} \ge \dfrac{1}{3}$, com $k \in n, n+1$, $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$, pois se $a_k = 2$, para $k = n+1,\ n+2$, teríamos $\alpha_k + \beta_k \ge 2 + \dfrac{1}{3} > \sqrt{5}$, absurdo. E $a_n = 1$ também, pois senão teríamos

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} > a_n + \frac{1}{3} \ge 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5},$$

um absurdo. Feito isso, agora vamos escrever as desigualdades acima em função de α_{n+1} e β_{n+1}. Elas ficam da seguinte forma:

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{a_n + \beta_n} = \frac{1}{1 + \beta_n} \Rightarrow \beta_n = \frac{1}{\beta_{n+1}} - 1$$

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+2}} \Rightarrow \alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}$$

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} = \frac{1}{\beta_{n+1} + 1}$$

$$\frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \le \sqrt{5}\ ,\ \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \le \sqrt{5}\ e\ \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1} + \frac{1}{\beta_{n+1} + 1} \le \sqrt{5}$$

Vamos analisá-las. Primeiramente, sabemos que $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \le \sqrt{5}$. Então

$$\alpha_{n+1} \le \sqrt{5} - \beta_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{5} - \beta_{n+1}}$$

$$\sqrt{5} \ge \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{5} - \beta_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}}{\beta_{n+1}(\sqrt{5} - \beta_{n+1})}$$

e portanto $\beta_{n+1}(\sqrt{5} - \beta_{n+1}) \ge 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \le \beta_{n+1} \le$

$dfrac\sqrt{5} + 12$. Em particular, $\beta_{n+1} \ge \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Por outro lado, $\alpha_{n+1} - 1 \le \sqrt{5} -$

$\beta_{n+1} - 1$, portanto

$$\sqrt{5} \geq \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1} + \frac{1}{\beta_{n+1} + 1} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - \beta_{n+1} - 1} + \frac{1}{\beta_{n+1} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5} - \beta_{n+1} - 1)(\beta_{n+1} + 1)},$$

ou seja, $(\sqrt{5} - \beta_{n+1} - 1)(\beta_{n+1} + 1) \geq 1$, e logo $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq \beta_{n+1} \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, e, em particular, $\beta_{n+1} \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, donde concluímos que $\beta_{n+1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, o que é absurdo, pois $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$. □

Em particular, o teorema acima prova que a desigualdade $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ possui infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$, para todo α irracional.

Os próximos dois resultados - os últimos dessa seção - são extremamente importantes, pois amarram toda a teoria de aproximações explanada nesse capítulo. O primeiro estabelece um parâmetro alternativo sobre a eficiência de aproximar um número real por convergentes, e o segundo nos dá a ordem desse erro, e nos informa essa margem de erro para que possamos identificar um convergente. Esses resultados são especialmente importantes, pois respondem algumas questões importantes levantadas no início desse trabalho. Já sabemos que, dado x irracional, podemos encontrar um racional $\frac{p}{q}$, com q positivo, tão próximo de x quanto se queira. A grande motivação desse capítulo é otimizar esse erro de aproximação. Veremos agora as respostas a essas perguntas.

Teorema 2.6. *Para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_{n+1}$, com $0 < q < q_{n+1}$ e $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, temos*

$$\left| q_n x - p_n \right| < \left| qx - p \right|$$

Demonstração. Seja $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Temos que

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|$$

pois $q_{n+1} > q$. Então, $\frac{p}{q}$ não pertence ao intervalo $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right)$. Agora, temos dois casos a analisar:

i) Quando $\frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n}$, então temos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{qq_{n+1}}$$

;

ii) Quando $\frac{p}{q} > \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, temos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|qp_{n+1} - pq_{n+1}|}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}.$$

Ou seja, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$. Dessa desigualdade, concluímos que

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} > |q_n x - p_n|,$$

pois $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ □

Teorema 2.7. *Dados dois convergentes consecutivos de x, pelo menos um deles satisfaz a desigualdade*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Além disso, qualquer fração irredutível que satisfaça essa desigualdade é um convergente de x.

Demonstração. Começamos escrevendo a seguinte igualdade:

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| + \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right|,$$

que vale para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ou $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \leq x \leq \frac{p_n}{q_n}$. A partir daí, suponha que o teorema não é verdadeiro para dois convergentes consecutivos

$\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} &= \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| + \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \\
\frac{1}{q_n q_{n+1}} &\geq \frac{1}{2q_{n+1}^2} + \frac{1}{2q_n^2} \\
\frac{1}{q_n q_{n+1}} &\geq \frac{q_n^2 + q_{n+1}^2}{2q_{n+1}^2 q_n^2} \\
2q_{n+1}q_n &\geq q_n^2 + q_{n+1}^2 \\
(q_{n+1} - q_n)^2 &\leq 0
\end{aligned}$$

o que é absurdo, pois q_k é estritamente crescente para $k \geq 2$. Essa desigualdade pode ser verdadeira no caso em que $n = 0$ e $q_0 = q_1 = a_1 = 1$. Então, para concluir a demonstração, basta analisar o caso $n = 0$, que são exatamente os convergentes $\dfrac{p_0}{q_0}$ e $\dfrac{p_1}{q_1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{q_1} - x = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} - x &= a_0 + 1 - x = a_0 + 1 - [a_0, 1, a_2, \dots] \\
&< 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a_2}} = 1 - \frac{a_2}{a_2 + 1} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

satisfazendo o teorema. □

Corolário 2.8. *Qualquer fração irredutível que satisfaça a desigualdade*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

é um convergente de x.

Demonstração. Suponha que $\frac{p}{q}$ satisfaz a desigualdade provada no teorema anterior. Então, basta provar que $\frac{p}{q}$ é uma boa aproximação de x.

Tome $\dfrac{P}{Q}$ tal que $\dfrac{P}{Q} \neq \dfrac{p}{q}$, $Q \leq P$ e que $|Qx - P| < |qx - p| = q\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q}$. Então, utilizando um raciocínio semelhante ao aplicado na demonstração da primeira parte do teorema,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{qQ} &< \frac{|Pq - pQ|}{qQ} \\
&= \left|\frac{p}{q} - \frac{P}{Q}\right| \\
&\leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| + \left|\frac{P}{Q} - \alpha\right| \\
&< \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2qQ} \\
&= \frac{q+Q}{2q^2Q} \\
1 &< \frac{q+Q}{2q} \\
2q &< q + Q \\
q &< Q,
\end{aligned}
$$

absurdo. Portanto, $\dfrac{p}{q}$ é uma boa aproximação. □

2.3 Frações Contínuas Periódicas

Nessa última seção, vamos falar um pouco mais sobre frações contínuas periódicas e os irracionais quadráticos. O objetivo principal é relacionar essa nova classe de irracionais com equações polinomiais quadráticas, ou seja, mostrar que todo irracional quadrático possui uma representação por uma fração contínua periódica e também é raiz de um polinômio de 2º grau de coeficientes inteiros. Para tanto, vamos apresentar as seguintes definições:

Definição 2.9. *Uma fração contínua* $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ *é dita periódica quando se tem, para algum* $k_0 \in \mathbb{N}$ *e algum* $l \geq 1$, $a_k = a_{k+l}$, *para todo* $k > k_0$. *Nesse caso,* l *é o período e podemos utilizar a seguinte notação:* $[a_0; a_1, \dots, a_{k_0}, \overline{a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \dots, a_{k_0+l}}$.

Exemplo 2.10. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = [1, 2, 2, 2, \dots] = [1, \overline{2}]$

Definição 2.11. *Um número irracional* α *é dito quadrático quando ele é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros de grau 2. Sua outra raiz* β *é o conjugado de* α.

Um irracional quadrático pode ser escrito na forma $\xi = m \pm n\sqrt{d}$, onde $m, n \in \mathbb{Q}$ e $d > 1$ é um inteiro livre de quadrados - caso d seja um quadrado perfeito, teríamos $m \pm \sqrt{d}n \in \mathbb{Q}$. Podemos também utilizar uma outra forma de representar um irracional quadrático, que será útil mais adiante. Fazendo $m = \dfrac{p}{q}$ e $n = \dfrac{r}{s}$, com $q, s > 0$, temos

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{p}{q} + \sqrt{d}\frac{r}{s} \\ &= \frac{ps + \sqrt{d}qr}{qs} \\ &= \frac{ps + \sqrt{dq^2r^2}}{qs} \\ &= \frac{pqs^2 + \sqrt{dq^4r^2s^2}}{q^2s^2}. \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = pqs^2$, $\beta = q^2s^2$ e $A = dq^4r^2s^2$, então $A - \alpha^2 = dq^4r^2s^2 - p^2q^2s^4 = q^2s^2(dq^2r^2 - p^2)$, ou seja, $A - \alpha^2$ é um múltiplo de β. Diante disso, podemos reescrever um irracional quadrático como

$$\xi = \frac{\alpha + \sqrt{A}}{\beta},$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e $A > 0$ é um inteiro não-quadrado, e $\beta | (A - \alpha^2)$.

Para prosseguir com o estudo, faremos a definição a seguir baseada no algoritmo para obtenção de frações contínuas, exposto em (1.2).

Definição 2.12. *Seja ξ um número real. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ definimos recursivamente $\xi_0 = \xi$, $a_n = \lfloor \xi_n \rfloor$ e $\xi_n = a_n + \dfrac{1}{\xi_{n+1}}$.*

Teorema 2.13. *Seja ξ_n definido como em (2.12). Então vale a igualdade*

$$\xi_n = \frac{\alpha_n + \sqrt{A}}{\beta_n},$$

com α_n e β_n inteiros, $\beta_n > 0$, definidos pelas recorrências

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \alpha \quad &, \quad \beta_0 = \beta \\ \alpha_{n+1} = a_n\beta_n - \alpha_n \quad &, \quad \beta_{n+1} = \frac{A - \alpha_{n+1}^2}{\beta_n}, \end{aligned}$$

com $\beta_n | (A - \alpha_n^2)$.

Demonstração. Vamos provar, por indução, que α_n e β_n sempre serão inteiros. Para n=0, segue diretamente da definição. Suponha que seja válido para n. Então veremos o que acontece para $n+1$. Diretamente verifica-se que $\alpha_{n+1} = a_n\beta_n - \alpha_n$ é inteiro. Em β_{n+1}, basta observarmos que

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} &= \frac{A - \alpha_{n+1}}{\beta_n} \\
&= \frac{A + (a_n\beta_n - \alpha_n)^2}{\beta_n} \\
&= \frac{A - a_n^2\beta_n^2 + 2a_n\beta_n\alpha_n - \alpha_n^2}{\beta_n} \\
&= \frac{A - \alpha_n^2}{\beta_n} + 2a_n\alpha_n - a_n^2\beta_n.
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, $\beta_n|(A-\alpha_n^2)$. Isso, somado ao fato de que $2a_n\alpha_n - a_n^2\beta_n \in \mathbb{Z}$ completa a prova de que β_{n+1} é inteiro. Agora vamos provar que a iguadade mencionada no teorema é de fato válida. Para tanto, vamos manipular essa fórmula da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\xi_n - a_n &= \frac{\alpha_n + \sqrt{A}}{\beta_n} - \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{\beta_n} \\
&= \frac{\sqrt{A} - \alpha_{n+1}}{\beta_n}
\end{aligned}$$

Racionalizando o numerador, vem

$$\xi_n - a_n = \frac{A - \alpha_{n+1}^2}{\beta_n(\sqrt{A} + \alpha_{n+1})} \tag{2.1}$$

Como $\frac{A - \alpha_{n+1}^2}{\beta_n} = \beta_{n+1}$ e $(\sqrt{A} + \alpha_{n+1}) = \xi_{n+1}\beta_{n+1}$, segue que

$$\xi_n - a_n = \frac{1}{\xi_{n+1}} \Rightarrow \xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}$$

□

Agora vamos provar o resultado mais importante dessa seção, que estabelece uma relação enre os irraconais quadráticos e a periodicidade das frações contínuas.

Teorema 2.14 (Lagrange)**.** *Um número irracional é quadrático se e somente se sua representação em frações contínuas for periódica.*

Demonstração. Dividiremos em duas partes essa demonstração. A primeira será a parte do "se". Seja $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, \overline{b_0, b_1, b_m}]$, onde $b_0, b_1, \ldots, b_m$ denota o período de x. Definiremos $x' = [b_0, b_1, \ldots, b_m, b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots] = [b_0, b_1, \ldots, b_m, x']$. Sabemos, pelo teorema 1.10, que

$$x' = \frac{x' p'_{m-1} + p'_{m-2}}{x' q'_{m-1} + q'_{m-2}},$$

com p'_{m-1}, p'_{m-2}, q'_{m-1} e q'_{m-2} estão associados a $[b_0, b_1, \ldots, b_m, b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots]$. Fazendo algumas contas, chega-se a

$$q_{m-1} x'^2 + q_{m-2} x' - p_{m-1} x' - p_{m-2} = 0.$$

Então, temos

$$a x'^2 + b x' + c = 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ e $a = q_{n-1}$, $b = (q_{m-2} - p_{m-1})$ e $c = -p_{m-2}$. Portanto, x' é um irracional quadrático. Então, novamente utilizando o teorema 1.10, vem

$$x = \frac{x' p_{i-1} + p_{i-2}}{x' q_{i-1} + q_{i-2}},$$

onde p_{i-1}, p_{i-2}, q_{i-1} e q_{i-2} estão associados a $[a_0; a_1, \ldots, a_{i-1}]$. Como x′ é irracional quadrático, segue que x também é.

Para a segunda parte do teorema, mostraremos α_n e β_n, definidos como anteriormente, possuem um número finito de valores. Para isso, seja $\xi = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ um irracional quadrático. Podemos escrever também $\xi = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \xi_n]$, de acordo com o teorema 2.13. Então, temos

$$\xi = \frac{\xi_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\xi_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Isolando ξ_n, chegamos a

$$-\xi_n = \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \frac{\left(\xi - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)}{\left(\xi - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)}$$

Tomando o conjugado de ξ_n, e sabendo que ele preserva as operações básicas, escrevemos

$$-\overline{\xi_n} = \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \frac{\left(\overline{\xi} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)}{\left(\overline{\xi} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)}$$

Sabemos que $\xi = \dfrac{\alpha - \sqrt{A}}{\beta}$. Portanto, $\overline{\xi} - \xi = -\dfrac{2\sqrt{A}}{\beta} \neq 0$. Como $\dfrac{p_k}{q_k}$ tende a ξ quando k é muito grande, segue que, quando $n \to \infty$, temos

$$\frac{\left(\overline{\xi} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)}{\left(\overline{\xi} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)} \to \frac{(\overline{\xi} - \xi)}{(\overline{\xi} - \xi)} = 1$$

Em particular, existe um natural N tal que, para $n > N$, temos $\dfrac{\left(\overline{\xi} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)}{\left(\overline{\xi} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)} > 0$.

Como q_k sempre é positivo para $k \geq 0$, concluímos que $-\overline{\xi_n} > 0$. Como ξ_n é positivo para $n \geq 1$ e $\xi_n = \dfrac{(\alpha_n - \sqrt{A})}{\beta_n}$, temos que, para $n > N$,

$$0 = 0 + 0 < \xi_n + (-\overline{\xi_n}) = \frac{2\sqrt{A}}{\beta_n}$$

Então, para $n > N$, $\beta_n > 0$. Agora, tomando a equação $\beta_{n+1} = \dfrac{A - \alpha_n^2}{\beta_{n+1}}$ e resolvendo-a para A, chegamos à igualdade $\beta_n \beta_{n+1} + \alpha_n^2 = A$. Para $n > N$, β_n e β_{n+1} são positivos, e sendo assim, devemos ter $0 < \beta_n \leq A$ e $0 \leq |\alpha_n| \leq A$, pois caso um dos dois fosse maior do que A teríamos que a primeira parte da expressão seria estritamente maior que A, contrariando a equação. Em particular, se K é o conjunto finito

$$K = \{(j,k) \in \mathbb{Z} \ X \ \mathbb{Z};\ -A \leq j \leq A \ e \ 0 < k \leq A\}$$

então, para infinitos $n > N$, $(\alpha_n,\ \beta_n) \in K$. Pelo princípio da casa dos pombos, existem $i, k > N$ tais que $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_k, \beta_k)$. Assumindo que $i > k$, então temos

$\alpha_k = \alpha_{k+m}$ e $\beta_k = \beta_{k+m}$, sendo $m = j - k$. Como $a_k = \lfloor \xi_k \rfloor$ e $a_{k+m} = \lfloor \xi_{k+m} \rfloor$, temos

$$\xi_k = \frac{\alpha_k + \sqrt{A}}{\beta_k} = \frac{\alpha_{k+m} + \sqrt{A}}{\beta_{k+m}} = \xi_{k+m},$$

Isso implica em $a_k = \lfloor \xi_k \rfloor = \lfloor \xi_{k+m} \rfloor = a_{k+m}$.

De acordo com as definições para α_{k+1} e β_{k+1} mostradas no teorema 2.12, podemos escrever

$$\alpha_{k+1} = a_k\beta_k + \alpha_k = a_{k+m}\beta_{k+m} + \alpha_{k+m} = \alpha_{k+m+1}$$

e

$$\beta_{k+1} = \frac{A - \alpha_{k+1}^2}{\beta_k} = \frac{A - \alpha_{k+m+1}^2}{\beta_{k+m}} = \beta_{k+m+1}.$$

Daí, podemos dizer que

$$\xi_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1} + \sqrt{A}}{\beta_{k+1}} = \frac{\alpha_{k+m+1} + \sqrt{A}}{\beta_{k+m+1}} = \xi_{k+m+1},$$

o que implica em $a_{k+1} = \lfloor \xi_{k+1} \rfloor = \lfloor \xi_{k+m+1} \rfloor = a_{k+m+1}$. Continuando esse processo, concluímos, por indução, que $a_n = a_{m+n}$ para todo $n = k, k+1, \ldots$. Essa é exatamente a definição exposta em 2.9. Portanto, ξ possui uma representação em fração contínua periódica. $\square$

Uma fração contínua é dita *periódica pura* quando é da forma $\xi = [\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}}]$. Um irracional quadrático que possui essa propriedade é chamado de *periódico puro*. O próximo teorema, atribuído a Galois, define uma caracterização para esses números.

Teorema 2.15. *Seja um irracional quadrático ξ e seu conjugado $\overline{\xi}$. Então ξ é puramente periódico se e somente se $\xi > 1$ e $-1 < \overline{\xi} < 0$.*

Demonstração. Para a primeira parte do teorema, assuma que $\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_0, a_1, \ldots]$ seja periódica puro. Então basta provar que $\xi > 1$ e $-1 < \overline{\xi} < 0$. Observe que, depois do a_0, todos os elementos são positivos em ξ. Porém, a_0 também aparece repetidamente após sua primeira aparição. Portanto, $a_0 \geq 1$. Como $\xi = a_0 + \dfrac{1}{\xi_1}$, temos que $\xi \leq 1$.

Observe que $\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \xi]$. Pelo teorema 1.9, temos

$$\xi = \frac{\xi p_{m-1} + p_{m-2}}{\xi q_{m-1} + q_{m-2}},$$

onde p_n e q_n são os convergentes associados a ξ. Essa igualdade é correspondente a $\xi^2 q_{m-1} + \xi(q_{m-2} - p_{m-1}) - p_{m-2} = 0$, equação que podemos associar à função $f(x) = q_{m-1}x^2 + (q_{m-2} - p_{m-1})x - p_{m-2}$, ou seja, $f(\xi) = 0$. Em particular, ξ é uma raiz de f. Como f é uma função quadrática, o conjugado $\overline{\xi}$ também é raiz da função. Agora, observe que $f(-1) = (p_{m-1} - p_{m-2}) + (q_{m-1} - q_{m-2}) > 0$, pois $p_n < p_{n+1}$, $q_n < q_{n+1}$ para todo n e $p_n > 0$, pois $\xi > 1$. Observe também que $f(0) = -p_{m-2} < 0$. O teorema do valor intermediário garante que $f(x) = 0$ para algum x entre -1 e 0. Como $\overline{\xi}$ é a outra raiz de f, segue que $-1 < \overline{\xi} < 0$.

Para a segunda parte do teorema, admita que ξ é um irracional quadrático tal que $\xi > 1$ e $-1 < \overline{\xi} < 0$. Vamos, então, provar que ξ é um periódico puro. Para isso, vamos mostrar que, se ξ_n é definido como no teorema 2.13, então $-1 < \overline{\xi_n} < 0$ para todo n. Provaremos isso por indução. Para $n = 0$ é direto, pois $\xi_0 = \xi$. Assuma que é verdade para n. Então temos

$$\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}.$$

Utilizando os conjugados, temos

$$\overline{\xi_n} = a_n + \frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}} = \overline{\xi_n} - a_n < -a_n \leq -1,$$

ou seja, $\frac{1}{\overline{\xi_{n+1}}} > 1$. Isso implica em $-1 > \overline{\xi_{n+1}} > 0$, como queríamos demonstrar.

Agora que sabemos que ξ é periódico, mostraremos que se trata de um periódico puro. Para isso, por contradição, assuma que $\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_{l-1}, \overline{a_l, \ldots, a_{l+m-1}}]$, onde $l \geq 1$. Então $a_{l-1} \neq a_{l+m-1}$; caso contrário o período se iniciaria em a_{l-1}. Sendo assim,

$$\xi_{l-1} = a_{l-1} + [\overline{a_l, \ldots, a_{l+m-1}}] \neq a_{l+m-1} + [\overline{a_l, \ldots, a_{l+m-1}}] = \xi_{l+m-1}$$

Da expressão acima, temos que $\xi_{l-1} - \xi_{l+m-1} = a_{l-1} + a_{l+m-1}$ é um inteiro. Tomando os conjugados, observamos que

$$\overline{\xi_{l-1}} - \overline{\xi_{l+m-1}} = a_{l-1} + a_{l+m-1} = \xi_{l-1} + \xi_{l+m-1}$$

Sabemos que $-1 < \overline{\xi_{l-1}} < 0$ e $-1 < \overline{\xi_{l+m-1}} < 0$; essa última desigualdade pode também ser escrita como $0 < -\overline{\xi_{l+m-1}} < 1$. Somando $\overline{\xi_{l-1}}$ a ela, temos

$$0 - 1 < \overline{\xi_{l-1}} + (-\overline{\xi_{l+m-1}} < 1 \Rightarrow -1 < \xi_{l-1} + \xi_{l+m-1} < 1,$$

pois $\overline{\xi_{l-1}} - \overline{\xi_{l+m-1}} = \xi_{l-1} + \xi_{l+m-1}$. Mas vimos que $\xi_{l-1} + \xi_{l+m-1}$ é inteiro, e o inteiro que se localiza entre -1 e 1 é 0. Nesse caso, $\xi_{l-1} = \xi_{l+m-1}$, absurdo, e a prova está completa. $\square$

Capítulo 3

A EQUAÇÃO DE PELL

3.1 Introdução

Uma *equação diofantina* é uma equação com duas ou mais variáveis, cujos valores podem ser inteiros ou racionais. Neste capítulo será estudado um tipo específico: a equação de Pell. Veremos que podemos encontrar soluções que são mínimas, e a partir delas, encontraremos uma infinidade de soluções. Por exemplo, a equação

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

tem a solução não nula $(3, 2)$, ou seja, $3^2 - 2.2^2 = 1$. Como $x^2 - 2y^2 = (x - y\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1$, se elevarmos ambos os membros ao quadrado teremos

$$(x - y\sqrt{2})^2(x + y\sqrt{2})^2 = 1^2 = 1$$

e com uma série de manipulações algébricas chegamos a $(a^2+2b^2, 2ab)$ como uma outra solução, vinculada à solução inicial (a, b), e assim podemos encontrar um número infinito de soluções. Vamos formalizar essa teoria a partir da seguinte

Definição 3.1. *Uma equação de Pell é da forma $x^2 - Ay^2$, com $A \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{A}$ irracional.*

A restrição à irracionalidade de $\sqrt{A}$ se deve pelo fato de que, quando A é um quadrado perfeito, suas soluções são simples. De fato, temos que se $\sqrt{A}$ é inteiro, então $A = k^2$ e

$$(x^2 - y^2k^2) = (x - ky)(x + ky) = 1.$$

Como 1 possui apenas 1 e -1 como divisores, resta que $(x - ky) = \pm 1 = (x + ky)$, logo $ky = 0$ e $y = 0$, donde conclui-se que $x = \pm 1$. Sendo assim, o caso realmente interessante é quando A não é um quadrado perfeito, sendo então $\sqrt{A}$ irracional. Nosso objetivo é procurar soluções inteiras para as equações desse tipo. Para efeitos práticos, vamos considerar os pares de soluções (x, y) como números da forma $x + \sqrt{A}y$. Em outras palavras, trabalharemos com o conjunto $X = \{x + \sqrt{A}y; x, y \in \mathbb{Q}\}$. Além disso, também utilizaremos a seguinte definição:

Definição 3.2. *A função norma é uma função $N : X \to \mathbb{Q}$, definida por $N(x + y\sqrt{A}) = x^2 - Ay^2$, com $(x + y\sqrt{A}) \in X$.*

Essa função está bem definida, pois os elementos de X possuem uma única representação, ou seja, se $x + \sqrt{A}y = x' + \sqrt{A}y'$, então $x = x'$ e $y = y'$. De fato, caso contrário, ou seja, sendo $y \neq y'$, teríamos

$$(y - y')\sqrt{A} = (x' - x) \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{x' - x}{y - y'} \in \mathbb{Q},$$

um absurdo. A função norma, assim definida, é uma função multiplicativa. Esse fato será muito útil para a demonstração dos principais resultados desse capítulo. Apresentaremos essa propriedade na proposição a seguir:

Proposição 3.3. *A função norma é multiplicativa, ou seja,*

$$N((x + \sqrt{A}y)(x' + \sqrt{A}y')) = N(x + \sqrt{A}y)N(x' + \sqrt{A}y').$$

Demonstração. Temos que

$$(x + \sqrt{A}y)(x' + \sqrt{A}y) = (xx' + Ayy') + (x'y + xy')\sqrt{A}$$

Então,

$$\begin{aligned} N((x + \sqrt{A}y)(x' + \sqrt{A}y')) &= (xx' + Ayy')^2 - A(x'y + xy')^2 \\ &= x^2x'^2 - Ax^2y'^2 - Ax'^2y^2 + A^2y^2y'^2 \\ &= (x^2 - Ay^2)(x'^2 - Ay'2) \\ &= N(x + \sqrt{A}y)N(x' + \sqrt{A}y') \end{aligned} \tag{3.1}$$

□

Veremos adiante que toda equação de Pell tem solução, e que elas são infinitas. Em outras palavras, basta que encontremos uma solução $x_1 + \sqrt{A}y_1$

- chamada *solução mínima* - para encontrarmos todas as outras soluções, as quais são obtidas calculando as potências da solução mínima. Inicialmente, mostraremos que toda equação de Pell aceita uma solução diferente da trivial, a partir de dois lemas que serão provados a seguir.

Lema 3.4. *Seja A não quadrado perfeito. Então existe uma constante M para a qual* $\left|x^2 - Ay^2\right| < M$ *possui infinitas soluções inteiras positivas* (x, y)..

Demonstração. Primeiramente, sabemos que $x^2 - Ay^2 = (x + \sqrt{A}y)(x - \sqrt{A}y)$. Pelo teorema de Dirichlet, existem infinitos pares (x, y) positivos que satisfazem a desigualdade $|x - \sqrt{A}y| < \dfrac{1}{y}$. Utilizando desigualdade triangular, segue que

$$\left|x + \sqrt{A}y\right| < \left|x - \sqrt{A}y\right| + \left|\sqrt{A}y + \sqrt{A}y\right| = \left|x - \sqrt{A}y\right| + 2\sqrt{A}y.$$

Então, temos que

$$\left|x + \sqrt{A}y\right| < \frac{1}{y} + 2\sqrt{A}y$$

$$\left|x + \sqrt{A}y\right|\left|x - \sqrt{A}y\right| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{A} \leq 2\sqrt{A} + 1,$$

ou seja,

$$\left|x^2 - Ay^2\right| < 2\sqrt{A} + 1$$

□

No próximo lema, utilizaremos o resultado anterior para provar que a equação de Pell sempre possui solução.

Lema 3.5. *Seja A não quadrado perfeito. A equação* $x^2 - Ay^2 = 1$ *admite solução não trivial inteira.*

Demonstração. De acordo com o Lema 3.4, existem infinitos pares (x_n, y_n) tais que $\left|x_n^2 - Ay_n^2\right| < 2\sqrt{A} + 1$. Ou seja, existe algum m tal que $x^2 - Ay^2 = m$ para infinitos pares(x, y). Como temos um número limitado de classes residuais módulo m para as soluções (x, y), existem $a,\ b\ \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x_n \equiv\ a\ (mod\ m)\ \ e\ \ y_n \equiv b\ (mod\ m)$$

para infinitos n $\in \mathbb{N}$. Considere agora os números distintos $\alpha = x_k + \sqrt{A}y_k$ e $\beta = x_{k'} + \sqrt{A}y_{k'}$, com $x_k \equiv x_{k'} \equiv a\ (mod\ m)$ e $y_k \equiv y_{k'} \equiv b\ (mod\ m)$ e seus conjugados

α' e β'. Temos que

$$\alpha'\beta = (x_k - \sqrt{A}y_k)(x_{k'} + \sqrt{A}y_{k'}) = (x_k x_{k'} - Ay_k y_{k'}) + \sqrt{A}(x_k y_{k'} - x_{k'} y_k).$$

Então

$$x_k x_{k'} - Ay_k y_{k'} \equiv x_k^2 - Ay_k^2 = m \equiv 0(mod m)$$

e

$$x_k y_{k'} - x_{k'} y_k \equiv ab - ab = 0(mod m)$$

e, portanto, $\alpha'\beta = m(u + \sqrt{A}v)$, com $u, v \in \mathbb{R}$. Aplicando a função norma nos dois lados da igualdade, temos $m^2 = m^2(u^2 - Av^2)$, ou seja,

$$u^2 - Av^2 = 1.$$

Segue que $v \neq 0$. De fato, se $v = 0$, teríamos $u = \pm 1$ e $\alpha\beta' = \pm m$. Multiplicando ambos os lados por α, teríamos $\beta = \pm\alpha$, ou seja, $x_k = x_{k'}$, absurdo. Portanto, existe uma solução não trivial nos inteiros positivos. □

A equação de Pell admite uma solução inteira positiva mínima, isto é, uma solução (x, y) com x mínimo. Chamaremos de *solução mínima*. Note que, se x é mínimo, temos $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{A}}$ também é mínimo, e logo $x + y\sqrt{A}$ é mínimo. Veremos que a partir dela podemos gerar todas as outras soluções de uma equação de Pell.

Proposição 3.6. *Seja a equação de Pell $x^2 - Ay^2 = 1$ e (x_1, y_1) uma solução mínima. Todas as soluções (x, y) da equação de Pell são dadas por potências da solução mínima, ou seja,*

$$x + \sqrt{A}y = (x_1 + \sqrt{A}y_1)^n, \text{ com } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots ...$$

Demonstração. Seja $x_1 + \sqrt{A}y_1$ e (x, y) uma solução positiva para a equação de Pell. Então, existe n tal que $(x_1 + \sqrt{A}y_1)^n \leq x + \sqrt{A}y < (x_1 + \sqrt{A}y)^{n+1}$. Multiplicando tudo por $(x_1 + \sqrt{A}y_1)^{-n}$, temos

$$1 \leq (x + \sqrt{A}y)(x_1 + \sqrt{A}y_1)^{-n} < x_1 + \sqrt{A}y_1$$

Como $x_1 + \sqrt{A}y_1$ é solução mínima, a desigualdade acimma resume-se a $1 \leq (x + \sqrt{A}y)(x_1 + \sqrt{A}y_1)^{-n}$. Vamos provar, agora, que isso é igual a 1. Chamamos $\leq (x + \sqrt{A}y)(x_1 + \sqrt{A}y_1)^{-n} = X + \sqrt{A}Y$ e, por contradição, supomos que $x_1 +$

$\sqrt{A}y_1 > X + \sqrt{A}Y > 1$. Multiplicando pelo seu conjugado $X - \sqrt{A}Y = (x - \sqrt{A}y)(x_1 + \sqrt{A}y_1)^n$, obtemos

$$(X - \sqrt{A}Y)(X + \sqrt{Y}) = X^2 - AY^2 = (x + \sqrt{A}y)(x - \sqrt{A}y) = 1.$$

Temos, então,

$$0 < (x_1 + \sqrt{A}y_1)^{-n} < (X + \sqrt{A}Y)^{-1} = X - \sqrt{A}Y < 1.$$

Daí, concluímos que $2X = (X + \sqrt{A}Y) + (X - \sqrt{A}Y) > 1 + 0 > 0$ e $2\sqrt{A}Y = (X + \sqrt{A}Y) - (X - \sqrt{A}Y) > 1 - 1 = 0$, ou seja, (X, Y) é solução da equação de Pell menor do que a solução mínima, contrariando a minimalidade de (x_1, y_1). Portanto, a hipótese $X + \sqrt{A}Y > 1$ é falsa. Sendo assim,

$$(x_1 + \sqrt{A}y_1)^{-n}(x + \sqrt{A}y) = 1 \Rightarrow x + \sqrt{A}y = (x_1 + \sqrt{A}y)^n$$

□

Proposição 3.7. *Seja A livre de quadrados e $\alpha = \sqrt{A}$. Definimos $\alpha_n = \dfrac{P_n + \sqrt{A}}{Q_n}$, como definido no teorema 2.12. Para todo $n \geq 2$, temos*

$$p_n^2 - Aq_n^2 = (-1)^{n-1}Q_{n+1}$$

Demonstração. Sabemos que $\sqrt{A} = \dfrac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$. Substituindo α_{n+1} como foi definido, segue que

$$\begin{aligned}
\sqrt{A} &= \frac{(P_{n+1} + \sqrt{A})p_n + p_{n-1}Q_{n+1}}{(P_{n+1} + \sqrt{A})q_n + q_{n-1}Q_{n+1}} \\
\sqrt{A}((P_{n+1} + \sqrt{A})q_n + q_{n-1}Q_{n+1}) &= (P_{n+1} + \sqrt{A})p_n + p_{n-1}Q_{n+1} \\
\sqrt{A}((P_{n+1}q_n + Q_{n+1}q_{n-1} + \sqrt{A}q_n) &= p_n\sqrt{A} + P_{n+1}p_n + p_{n-1}Q_{n+1} \\
\sqrt{A}(P_{n+1}q_n + Q_{n+1}q_{n-1}) + Aq_n &= p_n\sqrt{A} + P_{n+1}p_n + p_{n-1}Q_{n+1},
\end{aligned}$$

donde concluímos que $p_n = P_{n+1}q_n + Q_{n+1}q_{n-1}$ e $Aq_n = P_{n+1}p_n + p_{n-1}Q_{n+1}$. Multiplicando a primeira igualdade por p_n e a segunda por q_n, e subtraindo as duas, temos

$$p_n^2 - Aq_n^2 = Q_{n+1}(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n) = Q_{n+1}(-1)^{n-1}$$

$\square$

Agora, estamos prontos para mostrar a que as soluções são dadas por alguns convergentes de $\sqrt{A}$, inclusive a solução mínima, e que todas as outras soluções são potências da solução mínima. O próximo teorema completa as soluções da equação de Pell. Continuaremos usando as definições de P_{n+1} e Q_{n+1} como anteriormente.

Teorema 3.8. *Seja l o menor período da fração contínua de $\sqrt{A}$. A solução mínima da equação de Pell é dada por*

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (p_{l-1}, q_{l-1}), & \textit{para } l \textit{ par;} \\ (p_{2l-1}, q_{2l-1}), & \textit{para } l \textit{ impar.} \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que todas as soluções da equação de Pell são convergentes de $\sqrt{A}$. Seja (x, y) uma solução. Então

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{A} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{y\sqrt{A} - x}{y}\right| \\ &= \left|\frac{Ay^2 - x^2}{y(y\sqrt{A} + x}\right| \\ &= \frac{1}{y^2(\sqrt{A} + \frac{x}{y})} \\ &= < \frac{1}{2y}. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{x}{y}$ é um convergente de $\sqrt{A}$.

Agora, vamos mostrar que, na proposição 3.7, $Q_{n+1} = 1$ se e somente se $(n+1)$ for múltiplo de l. Para isso, observe que em

$$p_n^2 - Aq_n^2 = (-1)^{n-1} Q_{n+1}$$

, mais especificamente o caso em que $p_n^2 - Aq_n^2 = 1$, temos que $Q_{n+1} = 1$, pois, por definição, Q_{n+1} não é negativo. Sendo assim, $n + 1$ deve ser múltiplo de l. Temos então $n + 1 = kl$ para algum k e assim,

$$p_{kl-1}^2 - Aq_{kl-1} = (-1)^{kl-2}.1 = (-1)^{kl-2}.$$

Em particular, se l for par, então a segunda parte da igualdade é sempre igual a 1, e se l for ímpar, então a segunda parte da igualdade será igual a 1 apenas se k for par. Isso completa a prova. □

Capítulo 4

PROPOSTA DIDÁTICA

4.1 Introdução

Como visto, a teoria das frações contínuas nos fornece questões muito interessantes e pode ser uma ferramenta para solucionar diversos problemas. A dinâmica de obtenção das frações contínuas, como descrito nos exeplos iniciais desse trabalho, pode ser apresentada aos alunos do ensino básico como uma forma de mostrar algo novo, fora do conteúdo curricular básico, e despertando a curiosidade para temas que não são vistos com regularidade. Desse modo, a aplicação desses conteúdos diferenciados contribui para que o ensino da matemática se torne mais interessante e inspirador, despertando inclusive o interesse em competições olímpicas e estimulando novos talentos.

A proposta aqui apresentada é voltada para alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental, referente ao nível 2 das competições olímpicas, e possui inspiração em algumas questões de competições anteriores, em especial ao problema 2 da Olimpíada Paulista de Matemática, 2ª fase de 2013. Nesses anos do ensino fundamental, o aluno já teve contato com os números irracionais, que são comumente definidos como os números que não podem ser escritos por meio de uma fração de números inteiros. Embora seja a definição correta, observamos que ainda há uma dificuldade na assimilação desse conteúdo, talvez pelo fato de termos poucos exemplos de irracionais nesse estágio - basicamente, raízes não-exatas e o $/pi$. Há também exemplos geométricos feitos a partir da diagonal do quadrado, e a construção sucessiva das raízes não exatas por meio do Teorema de Pitágoras, além do π como sendo a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência. Tais exemplos podem ser melhor explorados, e as frações contínuas são uma ferramenta que possibilita a exploração de novos e interessantes aspectos dos números irracionais. Por exemplo, mostrar que a fração contínua $[1;\overline{2}]$ representa o radical $\sqrt{2}$ pode ser interessante no momento que o aluno possui maior contato com esse tipo de número, pois entrega uma justificativa mais convincente da sua irracionalidade.

4.2 Metodologia

Apresentaremos alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando frações contínuas, bem como mostraremos o desenvolvimento de algumas raízes não exatas, além do número de ouro e o π. Para a obtenção dessas expansões em frações contínuas, pode ser utilizada uma calculadora científica, ou a calculadora do próprio telefone celular do aluno, que possui a função $\frac{1}{x}$, necessária para o algoritmo. Para a obtenção das frações contínuas, utiliza-se a seguinte sequência:

- a partir do número em sua forma decimal, subtrai-se a sua parte inteira;
- utiliza-se a tecla $\frac{1}{x}$ para obter o inverso do resultado;
- novamente subtrai-se a parte inteira, como no primeiro item, e volta para o segundo item.

No caso dos números racionais, em algum ponto esse procedimento se encerrará, e o resultado final será zero. Para irracionais, ou obteremos expansões infinitas ou será observada a repetição dos valores subtraídos, ou seja, teremos uma fração contínua periódica.

Para iniciar, apresentaremos a notação usual de frações contínuas

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são números inteiros. Em seguida, falaremos sobre os racionais, utilizando o exemplo 1.1, do Capítulo 1 deste trabalho. Seguindo a sequência apresentada acima, temos:

- $\frac{91}{27} = 3,\overline{370}$; diminuindo sua parte inteira, chega-se a $0,\overline{370}$;

- apertando a tecla $\frac{1}{x}$, e obtemos $2,7$;
- retira a parte inteira e obtemos $0,7$
- aperta a tecla $\frac{1}{x}$ e obtemos $1,\overline{428571}$;
- retira a parte inteira e apertando $\frac{1}{x}$, obtemos $2,\overline{3}$.
- repete-se o procedimento e obtemos o inteiro 3, e o algoritmo se encerra.

A cada subtração de inteiros, o aluno é orientado a anotar esse número, que serão os inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Desse modo, o aluno está apto a construir a representação em fração contínua

$$\frac{91}{27} = [3; 2, 1, 2, 3]$$

Podem ser utilizados outros racionais como exemplos e motivar o aluno a repetir o procedimento, obtendo outras frações contínuas, reforçando a finitude do procedimento quando se trata de números racionais.

4.3 O número $\sqrt{2}$

O número $\sqrt{2}$ é um dos primeiros irracionais apresentados ao aluno, e ele é convencido de quee se trata de tal, porém sem muita convicção, apenas baseado no fato de que ele não é uma raiz exata. Utilizando o procedimento apresentado - retira-se a parte inteira e inverte-se o resultado -, o aluno consegue deduzir a fração contínua que representa o número. Vejamos:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\cdots \Rightarrow a_0 = 1$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2,41421356\ldots} \Rightarrow a_1 = 2$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,41421356\ldots}} \Rightarrow a_2 = 2$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,41421356\ldots}}} \Rightarrow a_3 = 2$$

Nesse momento, o aluno observa que os inteiros se repetem e os valores obtidos a partir da inversão também são os mesmos, o que fará ele se perguntar, ou até afirmar, que esse número se repetirá indefinidamente. Para provar isso, apresenta-se um segundo procedimento, esse mais algébrico. Temos $\sqrt{2} = 1,41421356 = 1+\frac{1}{x_1}$. Fazendo $\sqrt{2}-1 = \frac{1}{x_1}$, concluímos que $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$. Então segue que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Repetindo o procedimento adotado em $\sqrt{2}$, obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{x_1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_1}}$$

Substituindo sucessivamente x_1, chegamos a

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1; \overline{2}]$$

Como já verificado anteriormente, mostramos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Nesse momento, podemos introduzir a ideia de aproximação, interrompendo esse procedimento e obtendo os convergentes. Por exemplo, interrompendo em a_2, obtemos o convergente $\frac{p_2}{q_2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}$. Estendendo esse raciocínio, temos

$$\frac{p_3}{q_3} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}$$

Verificamos que $\frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12} = 1,416666\ldots$ e $\frac{p_4}{q_4} = \frac{41}{29} = 1,413793\ldots$, ou seja, obtemos uma aproximação até 3 casas decimais para $\sqrt{2}$. Esse desenvolvimento resolve o problema a seguir:

Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas, de razão $\sqrt{2} : 1$. *É impraticável que estas rodas tenham mais de 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para o número de dentes que irão aproximar a razão desejada.*

Solução: Podemos escrever a razão desejada da seguinte forma: $\dfrac{x}{y} = \sqrt{2}$. Daí, basta observar os resultados obtidos anteriormente. Temos o convergente $\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{17}{12}$, que melhor atende à condição de cada roda ter no máximo 20 dentes. Sendo assim, para uma melhor aproximação da razão dada, teríamos que ter 17 dentes na roda maior e 12 dentes na roda menor.

4.4 O número de ouro

Euclides, no Livro VI de **Os Elementos**, dá a seguinte definição: "um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo". Essa é a exata definição da *razão áurea*, ou número de ouro, cuja representação se dá pela letra grega ϕ. Embora em **Os Elementos** esteja definida sobre uma reta, a razão áurea pode ser extensível a retângulos e áreas. Sua representação em frações contínuas é simples e bela, e pode ser explorada com facilidade. Tomando o segmento com comprimennto 1, a definição pode ser representada algebricamente pela razão

$$\phi = \frac{1}{k} = \frac{k}{1-k}$$

Observe que

$$\frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{k} - 1\right) = 1 + \frac{1-k}{k} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{k}{1-k}}$$

Ou seja, $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$. Repetindo esse procedimento, obtemos a representação em frações contínuas da razão áurea:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [1;\ 1,\ 1,\ 1,\ldots]$$

Desenvolvendo $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$, chegamos à equação de 2º grau $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, que pode ser resolvida pelos alunos, e encontraremos $\phi = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; como ϕ é positivo, segue que o número de ouro é $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Extraindo os convergentes de ϕ, utilizando a calculadora e o algoritmo mostrado na seção 4.2, temos

$$\frac{p_0}{q_0} = 1$$

$$\frac{p_1}{q_1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

Observando os valores que commpõem os convergentes, e continuando a escrever os seguintes, reparamos que eles formam a sequência de Fibonacci $(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ldots)$.

4.5 Observações e resultados

Para que o trabalho fosse realizado, um conhecimento prévio de frações e suas operações básicas era suficiente para que houvesse algum nível de aproveitamento do trabalho. Dentro de sala, conseguimos evoluir até a obtenção da fração contínua de $\sqrt{2}$ e o cálculo dos convergentes. Não foi possível pôr em prática a forma algébrica de obtenção e a parte que fala sobre ϕ. Dentro da escolaridade do público-alvo é esperado que grande parte dos alunos domine o básico desse assunto. Durante todo o processo, foi observado que o grupo era bastante heterogêneo: haviam alunos com diversos níveis de aprendizagem. Desse modo, seria difícil unificar um resultado, então foi observado que, dentro da habilidade individual e do que o aluno já possuía de conhecimento, houve um aproveitamento satisfatório. Dentro de cada particularidade, tivemos um grande número de alunos que alcançaram o objetivo, a saber:

- os alunos que apresentavam pouco ou nenhum conhecimento prévio exigido foi o grupo com mais dificuldades de compreensão do conteúdo de um modo geral. No início, onde se exigiam apenas as operações básicas, esses alunos reforçaram esse conteúdo, inclusive no trabalho com a calculadora. Conforme o grau de dificuldade aumentava, a compreensão foi menor.

- o grupo de alunos situado entre o conhecimento prévio intermediário - adição e subtração eficiente, com certa dificuldade em multiplicação e divisão de frações - apresentou bom desempenho, e ficou claro como se obtêm uma fração contínua a partir do algoritmo apresentado na calculadora.

- O grupo avançado, aquele que dominava todas as operações, compreendeu todo o procedimento, inclusive procurou mais informações sobre o tema. Com eles, foi aprofundado o momento em que se obtêm a fração contínua pela forma algébrica e foram citados alguns fatos interessantes sobre aproximação. Também foi possível falar sobre o número ϕ e sua relação com a sequência de Fibonacci.

Diante do exposto, pode-se afirmar que o trabalho foi proveitoso, pois cada aluno, dentro do seu limite, tirou algum proveito do trabalho, com raras exceções. Ao menos, foi possível praticar o conteúdo de frações, algo que sempre causa problemas para os alunos, com uma abordagem diferenciada.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

A busca por uma educação de qualidade, principalmente em matemática, onde observam-se índices baixos de aprendizagem, passa por apresentar um currículo atraente aos alunos, que instigue a curiosidade e priorize a sua criatividade e habilidades. Nesse âmbito também devemos identificar aqueles que procuram cada vez mais conhecimento, por possuírem habilidades diferenciadas, e que possam seguir o caminho acadêmico ou participando de competições apenas por prazer. E acredito que esse caminho deva se iniciar já nos anos iniciais do ensino fundamental, apresentando novas possibilidades de aprendizado e temas que não seriam explorados caso seguíssemos como currículo básico.

A teoria das frações contínuas, normalmente só vista no ensino superior, e ainda assim quando vista, fornece várias possibilidades de aprendizagem, inclusive no ensino básico, dada a sua estreita relação com o algoritmo de Euclides e a matemática elementar. Abordada de uma forma mais simplificada, torna-se, assim, uma ferramenta importante no contato do aluno com conteúdos mais interessantes da matemática, despertando a curiosidade por novos saberes, dadas as possibilidades de aplicações em diversos temas do ensino básico. No ensino médio, outras formas de aplicação das frações contínuas podem ser abordadas, mas o contato inicial com o público das séries finais pode ser bastante proveitoso para que a matemática se torne mais atrativa para os alunos, e que os façam procurar evoluir cada vez mais e se interessar pelos mais diversos temas.

No ensino fundamental, destacam-se a proximidade com a construção dos números reais, abordando os números racionais e irracionais por outro ponto de vista, apresentando outra forma de representá-los. Outro ponto importante é a possibilidade de obter aproximações eficientes de raízes não-exatas, e também há que se destacar a possibilidade de intensificar e otimizar o trabalho com frações de um modo geral, já que o cálculo dos convergentes pode ser feito de maneira elementar desenvolvendo a fração contínua; isso, em última instância, pode se tornar um aliado para sanar deficiências fundamentais na compreennsão de frações e seus significados.

Referências Bibliográficas

[1] Beskin, N. *Frações Contínuas, Coleção Iniciação à Matemática*. Ed.(1980).

[2] Loya, Paul. *Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis: On the incredible infinite*. UTM series of Springer-Verlag (2006). Disponível em `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.231.8101&rep=rep1&type=pdf`

[3] Olds, Carl Douglas. *Continued fractions*. Vol. 18. New York: Random House (1963).

[4] Martinez, Fabio Brochero, et al. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Coleção Projeto Euclides, IMPA (2013).

[5] Andreescu, Titu, Dorin Andrica, and Ion Cucurezeanu. *An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach*. Springer Science and Business Media, 2010.

[6] Yang, Seung Hyun. *Continued Fractions and Pell's Equation.* University of Chicago REU Papers (2008). Disponível em: `http://math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Yang.pdf`

[7] Guerzhoy, P. *A short introduction to continued fractions*. (2007). Disponível em: `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.594.4660&rep=rep1&type=pdf`