SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DESMISTIFICANDO O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

HARLEY PAULINO DE MOURA MELLO

Rio de Janeiro

2017

HARLEY PAULINO DE MOURA MELLO

DESMISTIFICANDO O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise Combinatória

ORIENTADOR: Prof.º Doutor Roberto Imbuzeiro de Oliveira

Rio de Janeiro

2017

Dedico este trabalho à minha amada esposa Tais e meus amados filhos Enrico, Barbara e melissa.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor meu Deus e ao seu filho amado Jesus Cristo, que por sua infinita misericórdia me concedeu a graça de viver esta experiência tão gratificante, não me deixando esmorecer, apesar da minha pequenez.

Aos meus amados pais, Antônio Paulino de Mello (em memória) e Gildete Moura de Melo (em memória) , pelo empenho, tenacidade e dedicação, na missão de me educarem e semearem os valores que me guiam por todos os dias da minha existência.

À minha esposa amada Tais Perisse Parreira e filhos, que paciente e generosamente, se dispuseram a me apoiar em todos os momentos, mesmo quando furtava-lhes o tempo da nossa convivência para me dedicar a reclusão dos estudos.

Ao meu orientador, Roberto Imbuzeiro, pela sua generosidade e dedicação, que na grandeza de sua humildade, me conduziu nesta missão com paciência e dedicação, me dando a oportunidade de conhecer mais de perto o ser humano que tanto admiro e respeito.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa.

Aos meus companheiros da Turma PROFMAT 2014, que Deus uniu em uma família, que compartilhou, todos os momentos desta jornada. Em especial ao Patrick, Ricardo, Bruno, Júlio, Carlos, Fábio e Milton, pelas longas horas de estudos nos fins de semana no IMPA.

"***Combati o bom combate****, terminei a minha carreira, guardei a fé. Desde já me está reservada a coroa da justiça, que me dará o Senhor, justo juiz, naquele dia; e não somente a mim, mas a todos os que tiverem esperado com amor sua aparição* (2Timóteo 4,6-8)."

RESUMO

O ensino de Análise Combinatória, com suas fórmulas e problemas específicos, sempre se mostrou como um obstáculo aos alunos e professores. O objetivo deste trabalho é propor uma forma alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio, com atividades que envolvam raciocínio combinatório, em detrimento à subdivisão dos conceitos em rótulos e suas fórmulas. Apresento um guia para o professor, contendo comentários, atividades, exemplos e orientações a partir de minha prática docente.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Princípio Fundamental da Contagem, Raciocínio Combinatório.

ABSTRACT

The lessons of Combinatory Analysis along with its formulas and specific problems, has always showed itself as an obstacle for students and teachers alike. The purpose os this thesis e to suggest an alternative method to teaching Combinatory Analysis during the middle and high school phases with exercises involving rational habilities disregarding the subdivisions of the subject´s many concepts and formulas. I present here a commented teacher´s guide, complete with activities, examples and orientations based on my personal experience as a professor.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o estudo de Análise Combinatória cresceu de maneira exponencial, sendo empregada de maneira consistente na crescente evolução da Computação e suas tecnologias, além de ser ferramenta indispensável nos diversos campos da Estatística.

A sociedade atual preconiza indivíduos com maior capacidade crítica e analítica, capazes de analisar e propor soluções para os novos desafios, quer sejam no campo teórico ou em práticas cotidianas. Dentre as áreas da Matemática no Ensino Médio, a Análise Combinatória destaca-se como a que mais exige flexibilidade e criatividade dos alunos.

Dentro desta perspectiva, o professor deve orientar e conduzir o aluno na busca pelo conhecimento, formando indivíduos capazes de identificar, modelar e propor soluções criativas nas mais diversas áreas, atendendo às necessidades dessa mesma sociedade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> "A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno." (BRASIL, 1997).

De maneira geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, constituindo, assim, uma importante ferramenta que abrange um vasto campo investigativo, com intensa atividade devido às suas inúmeras aplicações nas mais diversas áreas.

Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, p.1) "os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatória".

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) no volume 2 ressaltam que os conteúdos do bloco *Análise de dados e probabilidade* têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Ainda segundo as OCEM, o estudo desse bloco de conteúdos possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico.

Encontramos também nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio) a importância da contagem no ensino médio, no tema *análise de dados.* Estes textos ressaltam os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos no tema:

- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio destacam, entre outros conteúdos, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio no seguinte trecho:

> "As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de

> população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas". (PCNEM, 2000, p.44).

É fato que apesar de reconhecermos a importância do ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio, este conteúdo da matemática, quando explorado sob a forma de problemas, apresenta certas dificuldades em relação à sua formulação e à interpretação dos seus enunciados.

Roa e Navarro-Pelayo, citando Hadar e Hadass, evidenciam que as dificuldades típicas dos alunos ao resolverem problemas combinatórios são:

i. Dificuldade em reconhecer o conjunto correto a enumerar;

ii. Escolher uma notação apropriada, o que é agravado com diferentes textos utilizando diferentes notações;

iii. Fixar uma ou mais variáveis;

iv. Generalizar a solução. (HADAR;HADASS,1981 apud ROA;NAVARRO-PELAYO,2001).

1.1 A análise combinatória no ensino médio.

Análise Combinatória é um dos grandes desafios enfrentados pelos professores de matemática do Ensino Médio.

Não é raro ouvir relatos de colegas que se depararam com exercícios que, à primeira vista pareciam simples e de fácil resolução, entretanto, quando lidos com mais atenção, exigiam uma conduta mais elaborada e uma solução criativa.

Talvez essa dificuldade esteja associada à forma com que os docentes costumam abordar este conteúdo em sala, muitas vezes capitaneados por livros didáticos que definem e modelam as diferentes formas de contagem através de seus rótulos.

Esta formatação induz o aluno à ideia de que todo problema de Análise Combinatória se resume à tarefa de se determinar a que tipo de caso: agrupamento – arranjo, combinação ou permutação – que o problema se refere e, em seguida, aplicar a fórmula correspondente, em detrimento da evolução natural do raciocínio combinatório.

Segundo Vazquez e Noguti (2004, p.6) cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los.

Porém, não é isso que observamos ao analisarmos as práticas docentes no ensino de análise combinatória. Em grande parte, os professores se valem da memorização de fórmulas e de sequências de instruções bem definidas que podem ser executadas mecanicamente. Essa prática furta do aluno o mais nobre objetivo da arte de ensinar, que é justamente o de mostrar e oferecer um leque de possibilidades, para entender como e por que, o caminho escolhido é a melhor solução para a resolução de um problema proposto.

A análise combinatória fornece uma inestimável oportunidade para que o professor auxilie o aluno no desenvolvimento de estratégias que facilitem a interpretação, a identificação do objetivo a ser alcançado, a decodificação e, por fim, a elaboração de um modelo aritmético ou algébrico que o leve a solução do problema. Fórmulas e memorização atendem ao anseio do caminho mais curto e imediato, porém tolhem o senso crítico e criativo do aluno.

Almeida e Ferreira (s/d) refere-se que é comum o ensino da Combinatória processar-se através da exposição e aplicação repetida de fórmulas à resolução de exercícios e problemas.

A busca premente de subsídios que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo no Ensino Médio é uma necessidade decorrente do distanciamento dos princípios que norteiam o "pensar combinatório", gerando assim as dificuldades de entendimento e compreensão relativas aos problemas de contagem tanto para professores como para alunos.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio), no tema *análise de dados* destaca-se:

> "A **Contagem,** ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação". (PCN+, p. 126, grifo do autor).

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema.

Faz-se necessário uma evolução gradativa dos níveis de dificuldade apresentados aos alunos, de maneira que ele possa construir de forma segura e consistente, se apropriar do raciocínio combinatório e adquirir sua própria forma de organizar tal raciocínio, de maneira assistida, mas também autônoma.

Ainda sobre as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio), no tema *análise de dados* também se destaca que:

> "As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito

> grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril". (PCN+, p.126-127).

1.2 Objetivo do trabalho.

O objetivo fundamental deste trabalho é propor um guia de atividades para sala de aula que estimule o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Através de problemas simples e sugestões de resolução co-participativa, motivaremos professores e alunos a descobrirem um modo de desenvolverem o princípio fundamental da contagem. A partir daí serão investigados os diferentes modos de contar grupos e suas especificidades.

Nossa ideia é que, com este modo de trabalho, a Análise Combinatória será naturalmente entendida e interiorizada pelo estudante. A utilização de fórmulas é na verdade a tradução de toda uma estratégia, pensada e fundamentada nos princípios fundamentais da contagem. Ou seja, as fórmulas são fins, e não meios de se chegar a uma solução do problema.

Por estas razões, nossa estratégia será introduzir novos conhecimentos através da proposição de problemas. Eles servem de pretexto e ponto de partida para construção do saber e têm grande importância no processo de ensino-aprendizagem tanto da Matemática como de outras disciplinas, uma vez que somos desafiados a resolver problemas a todo o momento em nosso cotidiano. Segundo Pinheiro (2008, p. 54), a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, por meio da resolução de problemas, constitui-se num caminho metodológico para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas e não de ensinar a resolver problemas.

Para dar um formato pedagógico, achei por bem elaborar um guia para cada atividade, com o intuito de ajudar os docentes a ter um modelo para desenvolver as atividades em sala de aula, levando os discentes à compreensão desse tema por meio da resolução de problemas de contagem envolvendo o raciocínio combinatório.

Minhas orientações refletem as dificuldades e problemas enfrentados por colegas que observei e com quem convivi ao longo dos anos.

1.3 "Augusto Cesar Morgado, um divisor de águas"

A escolha deste trabalho tem uma enorme influência da experiência maravilhosa que tive como professor de matemática de ensino médio ao dividir algumas turmas do ensino médio com o saudoso professor Augusto Cesar Morgado, em um colégio particular em Jacarepaguá, na segunda metade da década de 90.

Esta escola propôs ao emérito mestre, a quem são dispensadas as devidas apresentações, que ministrasse um curso de reciclagem para seus professores. O tema escolhido pelos próprios docentes foi análise combinatória. Por um lado, a Combinatória era tida como o calcanhar de Aquiles da maioria. Por outro, era-nos conhecida a capacidade imensurável que o professor Morgado tinha de ensinar o referido assunto.

Por uma semana, o mestre, como o chamávamos carinhosamente, nos mostrou maneiras simples e criativas de interpretar e montar estratégias de resoluções de diversos problemas de análise combinatória. Exercícios simples serviam de pretexto para se chegar em casos mais complexos. Ele fazia com que acreditássemos que era realmente fácil.

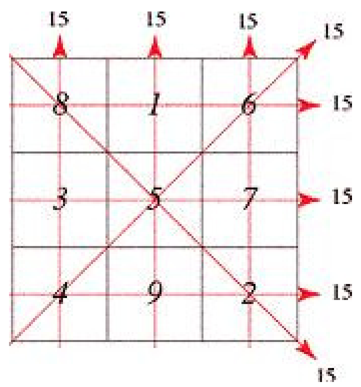
A partir de então, apaixonei-me pela análise combinatória e rompi completamente com o modelo antigo. Passei a suscitar o raciocínio combinatório em meus alunos, mostrando a eles que a beleza da solução passa pela total compreensão dos processos envolvidos no problema e os caminhos que se oferecem para solucioná-los. Rótulos e suas fórmulas estanques foram deixados em segundo plano.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

A Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório, por décadas foi considerado completamente desconectado do cálculo aritmético, segundo Rey Pastor (1939) *"o conceito moderno do número é, porém, uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas".*

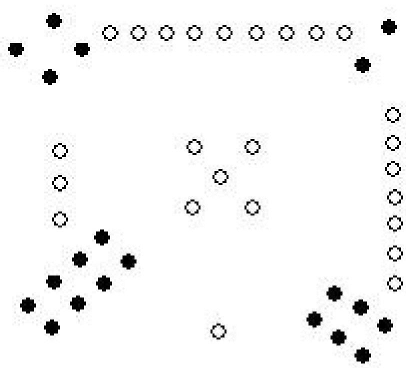
Segundo Wieleitner o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números 1, 2, 3 ... n^2 em um quadrado $n \times n$ de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Como vemos abaixo:

Figura 1



O primeiro quadrado mágico conhecido é o *Lo Shu*, que segundo Needham (1959) data do século I d.C., mas que pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (Berge, 1971):

Figura 2



=

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado *Saturn.* Este quadrado causava uma grande fascinação para a maioria das pessoas, pois nesta época, mesmo a mais simples aritmética era algo espantoso. Acredita-se que a idéia dos quadrados mágicos foi transmitida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo *Lo Shu*.

Encontramos ainda, uma poesia infantil que transcende os tempos sobrevivendo em várias culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios (Biggs, 1979):

> *"Quando eu estava indo para St. Ives,*
> *Eu encontrei um homem com sete mulheres,*
> *Cada mulher tem sete sacos,*
> *Cada saco tem sete gatos,*
> *Cada gato tem sete caixas,*
> *Caixas, gatos, sacos e mulheres,*
> *Quantos estavam indo para St. Ives?"*[1]

Esta poesia data, pelo menos de 1730 e é usualmente interpretada como uma brincadeira, entretanto, poderia se imaginar que por trás dela existiriam propósitos bem mais sérios, pois existe um problema similar no *Líber Abaci*, *"Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?"*,escrito por Leonardo de Pisa que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil. As duas citações mostram aspectos artificiais do problema envolvendo a adição e a repetição do número sete, reforçando a memorização do mesmo.

Segundo Wilson (1990), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a elusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue: *Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido* *sete hekat*[3] *de grãos; quantos itens têm ao todo?* Ou também o problema da construção de quadrados mágicos.

Foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, alguns quadrados mágicos maiores que o *Lo Shu,* que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

Em fins do século XVII, a teoria combinatória começa a figurar como um capítulo novo da Matemática e logo três notáveis livros surgiram: *Traité du trianglearithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Em (1693) foram apresentados todos os 880 quadrados de ordem 4, pelo matemático francês Frénicle e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubère (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como "método de fronteira".

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo *"o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos"* enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como *"o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos pode ser associados e misturados entre si".*

Já a definição de combinatória depende de conceitos de "configurações", pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados foi defendida por Berge (1971).

A combinatória moderna pode ser pautada de maneira geral, por quatro aspectos : listar, contar, estimar e existir – muitos dos quais podem ser ilustrados pelo problema de dispor *n* distinguíveis objetos em uma fileira.

Para Biggs (1979) há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação, sendo que o 1º diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividir isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Isso é fato da experiência do dia a dia. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, $x \cdot y$.

Na análise combinatória estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: *arranjos, permutações e combinações,* e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

Ainda no princípio do século XIX não havia significado preciso para o emprego dos termos *arranjo* e *permutação*. Leibniz designava as permutações por *variações*, que é a palavra hoje utilizada por alguns autores para indicar *arranjos*.

Quando num problema figura uma coleção de elementos, é possível que a solução desse problema vá depender da maneira por que se escolhe alguns desses elementos e também da ordem em que os mesmos se dispõem.

Se considerarmos uma coleção ou um conjunto de elementos quaisquer e, tomarmos um, dois, três, ... desses elementos, temos um agrupamento. Um agrupamento é simples quando o mesmo elemento não figura nele mais de uma vez; caso contrário, o agrupamento é denominado com repetição.

Chamamos *arranjo simples,* o agrupamento em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, e um elemento figura uma só vez em cada grupo, e dois agrupamentos diferem pela *natureza* ou pela *ordem* dos elementos que neles figuram, e quando o agrupamento formado difere apenas pela *natureza* de pelo menos um elemento temos uma *combinação simples*. Já ao agrupamento formado por todos os elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos, chamamos *permutação*.

Muitos matemáticos, durante o desenvolvimento da análise combinatória adotaram diferentes simbologias para denominar as mesmas operações. O símbolo

$\pi(n)$ foi instituído por Gauss (1777-1855) para representar o produto dos n primeiros números naturais (fatorial de n), A. M. Legendre (Paris, 1811) usava o símbolo Γ (n + 1); a notação *n!* é devida a Cristian Kramp (Colônia, 1808) e $\underline{n}$ usada por outros autores. A Arbogast (Strasburgo, 1800) deve-se a denominação *fatorial.*

O estudo da Análise Combinatória vem sendo empregada nos dias de hoje, com base a várias teorias da Análise Matemática: probabilidades, determinantes, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, etc. Tal assunto é foco de muita atenção, pois na literatura não existe uma definição satisfatória desta ciência e de suas ramificações.

3. GUIA DE ORIENTAÇÕES E SUGESTÕES PARA PROFESSORES

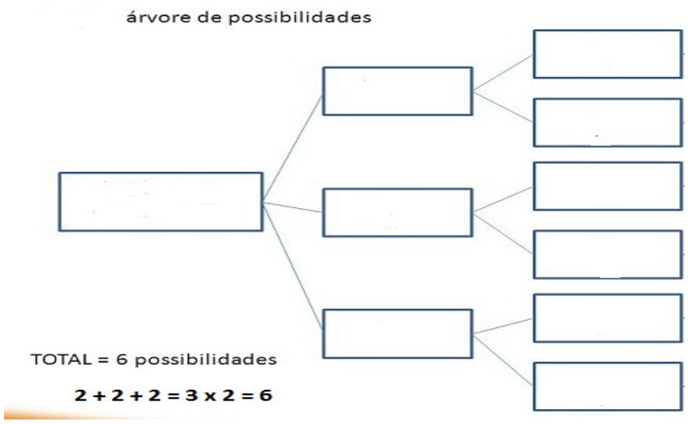
Neste capítulo vamos propor exemplos e condutas que, segundo meu entendimento e experiência, podem facilitar o ensino de análise combinatória no ensino médio. Utilizaremos o conceito de árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo para nortear o principio fundamental da contagem. Estas e as demais técnicas empregadas têm por objetivo permitir que o aluno se apoderasse do raciocínio combinatório de forma gradativa, com exemplos simples para fixar conceitos. O capítulo seguinte apresenta soluções de problemas mais complexos.

Observação: a convenção usada é que o texto em itálico é o que corresponderia à fala e às intervenções do professor em sala de aula.

3.1. Árvores de Possibilidades e o Princípio Fundamental da Contagem

Vamos tomar como ponto de partida, a construção de um grafo primitivo, chamado de ÁRVORE DE POSSIBILIDADES. Este nome faz alusão a uma árvore que é formada a partir de seu tronco e os galhos que estão ligados a ele, e os galhos que se ligam entre si, assim, cada "galho", dará origem a outros "galhos", até que a árvore esteja completa. Considerando que cada "galho" ou ramo, de origem a quantidades iguais de ramos, a cada nível, a quantidade de ramos é uma soma de parcelas iguais, onde a quantidade de parcelas é a quantidade ramos do nível anterior, podendo assim ser escrita na forma de um produto, que nos permitirá enunciar o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem.

Figura 3



Começaremos com um exemplo motivador, utilizando a construção de uma árvore de possibilidades, a fim de despertar a construção de uma rotina de encadeamento de ações que nos levaram ao PRINCIPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM, que doravante norteará nossas ações.

O objetivo deste exercício é introduzir a ideia de contar a quantidade de ordenamentos de ações e objetos, além de mostra a dedução do princípio multiplicativo, através da árvore de possibilidades.

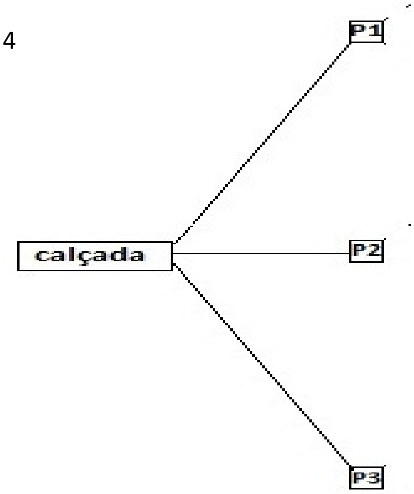
Exemplo 1.1: Um edifício comercial tem 3 portas giratórias que levam ao salão do andar térreo, onde se encontram 2 escadas rolantes, que funcionam no sentido de subida e 2 que funcionam no sentido de descida, todas ligando o térreo e o primeiro andar, neste encontram-se 3 elevados, que servem a todos os andares, do primeiro ao décimo segundo andar. Vamos analisar as seguintes ocorrências:

a) De quantas maneiras um indivíduo que está na calçada desse edifício, poderá chegar ao quinto andar desse edifício, utilizando os meios descritos?

Para resolver esse primeiro questionamento, vamos montar um esquema chamado de árvore das possibilidades. Vejam que no nosso exemplo a calçada que é o ponto de partida, pode ser comparado ao tronco, de onde partiram 3 galhos (ramos), observem:

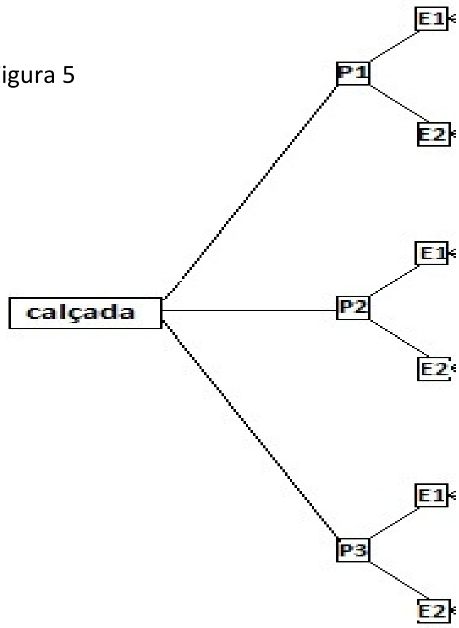
1º. Quem está na calçada, tem 3 possibilidades para a escolha de uma das portarias P_1, P_2,*e* P_3.

Figura 4



2º. Tomemos agora a P_1 como sendo a portaria escolhida, por exemplo, então na próxima etapa teremos 2 possibilidades para a escolha de uma das escadas rolantes de subida E_1 ou E_2.

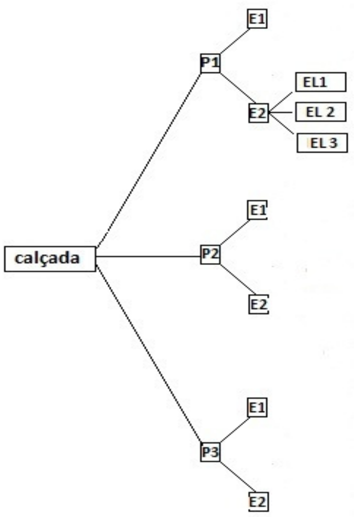
Figura 5



Notem que agora temos seis ramificações diferentes, que corresponde a seis possibilidades de se chegar até um dos três elevadores.

3º. Tomando como base a porta P_1 e a escada rolante E_2, nos deparamos com 3 possibilidades de escolha de um elevado, EL_1, EL_2 e EL_3 .

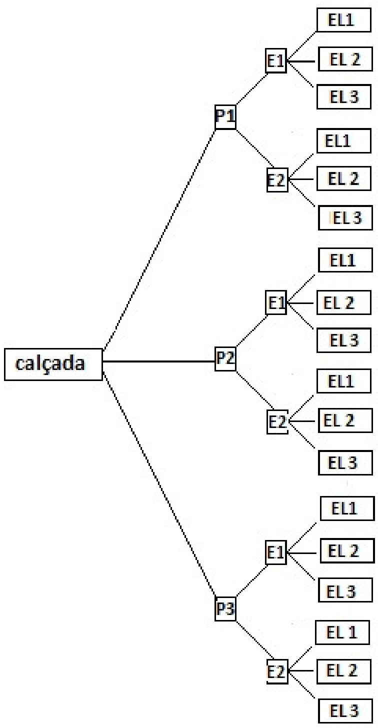
Figura 6



Agora podemos destacar que para cada escada abriram-se 3 novos ramos, que indicam as possibilidades de se chegar ao andar desejado: $P_1\,E_2\;EL_1$, $P_1\,E_2\;EL_2$ *e* $P_1\,E_2\;EL_3$.

E por fim temos nossa árvore completa, mostrando todas as possibilidades de se chegar ao andar desejado

Figura 7



$$\underbrace{\underbrace{3}_{P}\,.\,\underbrace{2.}_{ES}\,\underbrace{3}_{EL}} = 18 \text{ possibilidades}$$

O item b trará a possibilidade de discutir-se a introdução de condições que restringem uma ação ou um objeto, e como isso influencia diretamente a árvore das possibilidades e, por conseguinte o cálculo do número total das possibilidades.

Podemos ainda ressaltar a inviabilidade da construção de uma árvore de possibilidades para um número elevado de possibilidades, assim surge a necessidade da existência de um modelo matemático que traduza tal organização, então vamos introduzir o conceito básico do PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO.

As árvores de possibilidades podem ser representadas por um modelo multiplicativo, onde cada fator representa o número de possibilidades de cada ramo. Cada fator ocupa uma cela multiplicativa, assim podemos entender como "cela", o espaço reservado para escrever a quantidade de possibilidades de se preencher um ordinal em uma sequência ordenada de objetos ou ações ou os elementos de um n-upla. Vejamos o exemplo do item b.

b) De quantas maneiras esse indivíduo pode ir e voltar ao 12º andar sem utilizar nenhum dos acessos utilizados na ida?

Neste exemplo temos três ações para a ida e outras três para volta, cada ação é representada por uma cela, assim temos seis celas, sendo as três últimas condicionadas, ou seja, obedecem a uma condição prévia determinada pelo próprio exercício, neste caso as ações da volta têm que ser diferentes das ações de ida.

Como já calculamos as possibilidades para as ações de ida no item anterior, vamos nos ater as ações da volta que precisa ser diferente do meio escolhido anteriormente, logo cada possibilidade se reduz em uma unidade, pois excluímos os meios da ida, exceto as escadas, que são diferenciadas pelo sentido de subida e de descida, assim restaram 2 possibilidades para o elevador, 2 para as escadas de descida e 2 para as portas giratórias, vejamos como ficaram organizadas e preenchidas as celas.

$$\underbrace{\underbrace{3}_{P} . \underbrace{2.}_{ES} \underbrace{3}_{EL}}_{IDA} . \underbrace{\underbrace{2.}_{EL} \underbrace{2.}_{ES} \underbrace{2}_{P}}_{VOLTA} = 72 \text{ maneiras}$$

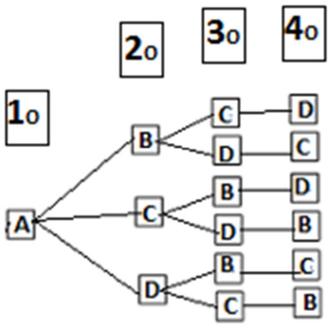
No próximo exemplo, o objetivo é sedimentar de maneira mais consistente o princípio multiplicativo, mostrando a importância das ordenações ou formação da n-upla ordenadas, além de reforçar a importância da utilização das celas no modelo matemático para calcular o número dessas ordenações, ressaltando a definição de "cela".

Exemplo 2: De quantas maneiras podemos formar uma fila com André (A), Bia (B), Carla (C) e Daniel (D)?

Neste exemplo vamos utilizar mais uma vez a construção da arvores das possibilidades, porém vamos analisar um único ramo, e então estender a mesma lógica para toda a árvore.

Primeiro vamos fixar um dos elementos no primeiro lugar da fila, por exemplo, André (A), então a partir daí nossa árvore abrirá 3 ramos, ou seja, 3 possibilidades.

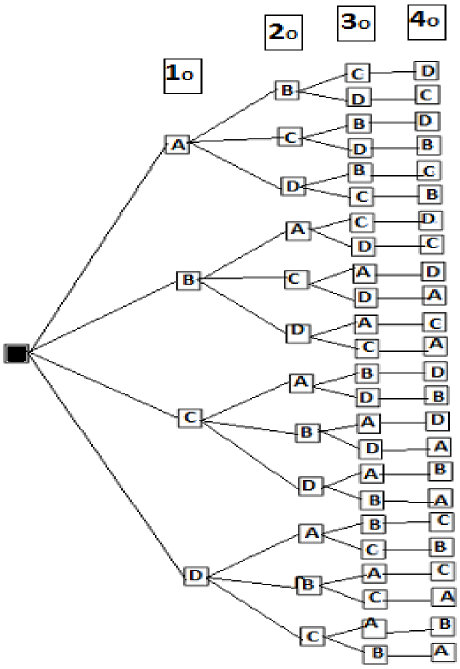
Figura 8



Como Andre ocupa a primeira posição, mostra aos alunos que a segunda posição só pode ser ocupada por Bia (B), Carlos (C) ou Daniel (D), ou seja 3 possibilidades, e ainda que a escolha de qualquer um deles, exclui esse elemento para opção de preencher a próxima ordem, diminuindo assim o número de possibilidades para 2 e depois para apenas uma possibilidade. Então concluímos que o número de filas em que André(A) é o primeiro elemento é: $\underbrace{\underbrace{1}_{A}.\underbrace{3}_{2°}.\underbrace{2}_{3°}.\underbrace{1}_{4°}}_{FILAS}=6$

Seguindo a mesma lógica de raciocínio, pergunto aos alunos se a fila começasse por outro elemento, se haveria diferença na maneira de calcular o número de filas, e normalmente *a resposta é não, o que nos permite a concluir então que para cada elemento que ocupe o primeiro lugar, podemos formar sempre seis filas, como mostra a árvore completa e o modelo matemático formado pelas celas multiplicativas.*

Figura 9



$$\underbrace{\underbrace{4}_{1°} . \underbrace{3}_{2°} . \underbrace{2}_{3°} . \underbrace{1}_{4°}}_{FILAS} = 24$$

3.2. Formando Agrupamentos Ordenados

Nesta seção mostraremos como ordenar p elementos ou objetos, a partir de um grupo de n objetos, tal que p < n. Neste tipo de contagem não é recomendada a utilização da árvore de possibilidades, uma vez que a quantidade de ramos aumentará consideravelmente, inviabilizando esta estratégia.

Os exemplos que utilizam a formação de números do sistema decimal de numeração, ou base dez, são de grande utilidade para compreensão do modelo multiplicativo e a utilização das "celas condicionais", vejamos alguns exemplos.

Ex_1: Quantos números de 5 algarismos podemos formar no sistema de base dez?

Devemos chamar a atenção dos alunos para o fato do exercício não mencionar qualquer tipo de restrição ou condição especial, porém todo número do sistema decimal está sujeito as suas regras, como por exemplo, um número não pode começar pelo algarismo zero. Sabemos ainda que os números são formados por classes, e as classes são compostas por 3 ordens (unidade, dezena, centena), assim as ordens correspondem as celas, mas não são iguais, a ordem guarda um símbolo, que é o algarismo, enquanto a cela guarda a quantidade de algarismos que podem ocupar uma determinada ordem, ou o número de possibilidades de preenche-la.

Neste momento escrevo no quadro os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e pergunto quantos símbolos ou algarismos temos e concluímos rapidamente que são 10, apresento então as celas $\underbrace{\_}_{dm}\ \underbrace{\_}_{um}\ \underbrace{\_}_{c}\ \underbrace{\_}_{d}\ \underbrace{\_}_{u}$.

Começamos a preenchê-las e pergunto: De quantas maneiras podemos preencher a primeira cela? Os mais afoitos e distraídos logo respondem que são dez, mas vos lembro que pela regra do sistema de numeração decimal, nenhum número pode começar pelo algarismo zero, o que faz esta cela ser chamada de cela condicionada, ou seja, que atende a uma condição previamente determinada.

Refaço a pergunta, então e eles, agora respondem 9 equivocadamente, então digo: a próxima cela não apresenta qualquer condição, ou seja temos assim os dez algarismos a disposição, pergunto então novamente e o coro responde dez, vou repetindo a pergunta até que a última cela seja preenchida, sob o coro de dez maneiras para cada questionamento e chegamos a: $\underbrace{\underline{9}}_{dm}\ \underbrace{\underline{10}}_{um}\underbrace{\underline{10}}_{c}\underbrace{\underline{10}}_{d}\underbrace{\underline{10}}_{u} = 9.10^4$

Devemos também ressaltar a importância de se preencher prioritariamente as celas condicionadas, mostrando que não devemos postergar as dificuldades, ao contrário, elas devem ser debeladas no início da resolução de cada problema.

Agora podemos explorar este exercício criando outras condições, como por exemplo:

a) Os algarismos sejam distintos.

Tomando como base o exemplo anterior dispomos das celas $\underbrace{\_}_{dm}\underbrace{\_}_{um}\underbrace{\_}_{c}\underbrace{\_}_{d}\underbrace{\_}_{u}$, *e quando pergunto: De quantas maneiras podemos preencher a primeira cela? A resposta é imediata: 9 algarismos, pergunto então quantos algarismos sobraram, e novamente a resposta é imediata: 9 algarismos, e então volto a perguntar: De quantas maneiras posso preencher a segunda cela, e novamente eles respondem corretamente 9, e assim vou repetindo essas perguntas, sistematicamente, até que são preenchidas todas as celas:* $\underbrace{\underline{9}}_{dm}\ \underbrace{\underline{9}}_{um}\ \underbrace{\underline{8}}_{c}\underbrace{\underline{7}}_{d}\underbrace{\underline{6}}_{u}$*=27.216*

Nos próximos dois exemplos que se seguem, vamos nos deparar com nova dificuldade, na qual mostraremos a necessária importância de se dividir as dificuldades em etapas, de modo que cada etapa seja mais simples. Esta estratégia ajuda o aluno a enxergar melhor uma organização lógica de possíveis soluções.

b) O número seja par de algarismos distintos.

Começo o exercício com o procedimento básico, que é montar as celas, e para tal, questiono os alunos acerca de como eles reconhecem se um número é par ou não, e a grande maioria fala acertadamente da definição de número par, mas pergunto se há outra forma de reconhece-los, então muitos logo respondem, que é necessário que o último algarismo seja par, então chegamos a conclusão que a última cela é condicionada, assim escrevemos:

$$\underbrace{\_}_{dm}\underbrace{\_}_{um}\underbrace{\_}_{c}\underbrace{\_}_{d}\ \underbrace{\_}_{u-par}.$$

Agora lembro aos alunos que neste caso temos duas celas condicionadas, a primeira que não admite a possibilidade do zero e a última que só admite possibilidades pares, e questiono qual das duas está ligada diretamente com o objetivo da questão, o que leva o aluno *a refletir e concluir que é necessário que a condição para que o número seja par, deve ser a primeira condição a ser atendida.*

Destaco então a lista dos algarismos pares 0, 2, 4, 6 e 8, e pergunto: De quantas maneiras podemos preencher a última cela? E são quase unânimes em dizer que são 5 maneiras, então pergunto: E a primeira cela? Alguns respondem 9 maneiras e outros 8 maneiras, digo que todos estão certos, o que causa uma discussão, mas logo intervenho dizendo que cada resposta é correta aplicada especificamente dentro de cada tipo de número par, e explico que tudo depende se o número termina em zero ou não, pois se terminar em zero, o mesmo não estará entre os nove algarismos restantes, assim é correto afirmar que são 9 as possibilidades de preencher a primeira cela, porém se o número não termina em zero, o mesmo estará entre os nove algarismos restantes, logo são apenas 8 maneiras de preencher a primeira cela.

Explico então que é necessário dividir o problema em dois casos que tornam mais simples a compreensão de cada um deles, ou seja: Números pares terminados por zero ou números pares não terminados por zero, e voltamos a escrever novamente as celas de cada caso:

1º. Número par terminado por zero: $\underbrace{\_}_{dm}\underbrace{\_}_{um}\underbrace{\_}_{c}\underbrace{\_}_{d}\underbrace{1}_{0}$ *pergunto: De quantas maneiras podemos preencher a primeira cela? A resposta é imediata: 9 algarismos, pergunto então quantos algarismos sobraram, a resposta é imediata: 8 algarismos, e então volta a perguntar: De quantas maneiras posso preencher a segunda cela, e novamente eles respondem corretamente , e assim vou repetindo essas perguntas, sistematicamente, até que são preenchidas todas as celas:* $\underbrace{9}_{dm}\underbrace{8}_{um}\underbrace{7}_{c}\underbrace{6}_{d}\underbrace{1}_{0}$*=3.024.*

ou

2º. Número par não terminado em zero: $\underbrace{\_}_{dm}\underbrace{\_}_{um}\underbrace{\_}_{c}\underbrace{\_}_{d}\underbrace{\_}_{u\neq 0}$*. Pergunto: De quantas maneiras podemos preencher a última cela? A resposta é imediata: 4 algarismos, pergunto então quantos algarismos diferentes de zero sobraram, e novamente a resposta é imediata: 8* *algarismos, e então volta a perguntar: De quantas maneiras posso preencher a primeira cela, e o coro responde de maneira firme 8 possibilidades, volto a perguntar: Quantos algarismos sobraram, a resposta é imediata: 8 algarismos, refaço então as perguntar e assim vou repetindo essas perguntas, sistematicamente, até que são preenchidas todas as celas:* $\underbrace{\underline{8}}_{dm}\ \underbrace{\underline{8}}_{um}\ \underbrace{\underline{7}}_{c}\underbrace{\underline{6}}_{d}\ \underbrace{\underline{4}}_{u\neq 0}$ *=10.752.*

Como podem ser os 3.024 do primeiro ou os 10.752 do segundo caso, destacando a presença do conectivo "ou" que indica união, e se tratando de conjuntos disjuntos, temos que o valor total é dado pela soma dos resultados, 3.024+10.752=13.776 números.

O próximo exemplo tem por objetivo mostrar como uma mudança sutil no enunciado pode mudar completamente a maneira de organizar a resolução do exercício, além de reforçar a necessidade de se reconhecer as celas condicionadas e as suas prioridades.

c) O número tenha algarismos pares e ímpares alternados.

Começo o exercício perguntando quais são as possibilidades de se ordenar 5 algarismos, intercalando pares e ímpares, e é claro que uns começam por algarismo par e outros por algarismo ímpar, então fica clara a necessidade de separarmos as duas possíveis organizações ou casos.

1º. O número começa por algarismo par , logo as celas são dispostas da seguinte forma: $\underbrace{\_\_}_{P\neq 0}\ \underbrace{\_\_}_{I}\underbrace{\_\_}_{P}\underbrace{\_\_}_{I}\underbrace{\_\_}_{P}$*. Mostro aos alunos a importância de se identificar com clareza cada tipo de cela e suas especificidades, e lhes pergunto: De quantas maneiras podemos preencher a primeira cela? E sem titubearem, respondem 4, pergunto outra vez, e a segunda? E* *novamente o coro responde 4 e acabam já complementando a última com 3 possibilidades. Faço as mesmas perguntas para as celas ímpares e chegamos até a solução:* $\underbrace{4}_{P\neq 0}\ \underbrace{5}_{I}\underbrace{4}_{P}\underbrace{4}_{I}\underbrace{3}_{P}=960.$

Ou

2º. O número começa por algarismo ímpar, logo as celas são dispostas da seguinte forma: $\underbrace{\_\_}_{I}\ \underbrace{\_\_}_{P}\ \underbrace{\_\_}_{I}\ \underbrace{\_\_}_{P}\ \underbrace{\_\_}_{I}$*. Logo eles percebem que já não há mais outras condições especiais para qualquer cela, o que nos trás:* $\underbrace{5}_{I}\underbrace{5}_{P}\underbrace{4}_{I}\underbrace{4}_{P}\underbrace{3}_{I}=1.200.$

Como podem ser os 960 do primeiro ou os 1.200 do segundo caso, destacando a presença do conectivo "ou" que indica união. Em se tratando de conjuntos disjuntos, temos que o valor total é dado pela soma dos resultados, 960 + 1200 = 2.160 números.

O próximo exemplo tem por objetivo mostrar como uma mudança sutil no enunciado pode mudar completamente a maneira de organizar a resolução do exercício, além de reforçar a necessidade de se reconhecer as celas condicionadas e as suas prioridades.

d) O número comece e termine por algarismo par.

Começo o exercício destacando a necessidade básica de se organizar imediatamente as celas, que nortearão as outras condutas, assim temos: $\underbrace{\_\_}_{P\neq 0}\ \underbrace{\_\_}\underbrace{\_\_}\underbrace{\_\_}\underbrace{\_\_}_{P}$ *, pergunto então: De quantas maneiras podemos preencher a primeira cela? Embasados pelo exercício anterior, logo o coro responde 4, e a última? Novamente o coro responde 4. Nesse momento, pergunto quantos algarismos tínhamos disponíveis, quantos sobraram, assim como podemos preencher a segunda cela? Refaço então as perguntar e assim vou repetindo essas perguntas, sistematicamente, até que são preenchidas todas as celas:* $\underbrace{4}_{P\neq 0}\ \underbrace{8}\underbrace{7}\underbrace{6}\underbrace{4}_{P}=5.376.$

3.3. Permutação e Fatorial - Um Casamento Perfeito

Aproveitaremos a resolução dos problemas a seguir, para definirmos o fatorial de um número natural, como sendo o produto deste número e seus antecessores diferentes de zero, o qual é representado pelo número acompanhado pelo símbolo de exclamação, assim temos que n! = n x (n-1) x (n-2) x ...x (n-p) x ...x 4 x 3 x 2 x 1. A notação do fatorial de um número natural trouxe para o estudo da contagem, os modelos ou fórmulas que utilizamos até hoje.

Ainda para melhor fixar o pensamento multiplicativo, sugiro que sejam feitos exemplos possibilitem a formação de grupos ordenados e, a ordenação desses grupos, como no exemplo abaixo.

> Exemplo 3.1: Na vitrine de uma concessionaria, 13 carros ficam expostos, um ao lado do outro, sempre agrupados pela montadora, 6 da Chevrolet, 3 da Fiat e 4 da Ford, todos de modelos diferentes, desta maneira, qual o número máximo de maneiras diferentes de se organizar a vitrine com os veículos?

Começo a resolução deste exercício chamado à atenção dos alunos, para o fato de serem apresentados objetos principais, que são as montadoras e que cada objeto é formado por uma determinada quantidade de elementos diferentes, que são os modelos.

Vamos então dividir o exercício em duas partes:

Na primeira vamos fixar uma ordenação das montadoras, por exemplo, (Chevrolet, Ford e Fiat) e fazer a distribuição dos diversos modelos de cada uma delas, ou seja:: $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{CHEVROLET}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{FIAT}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{FORD}$ *pergunto então: De quantas maneiras podemos preencher a primeira cela da Chevrolet? A resposta é imediata 6, repito a pergunta para as outras celas, e logo os alunos percebem que a cada cela ocupada, a quantidade de elementos diminui de uma unidade até completar a montadora Chevrolet,* $\underbrace{:\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}_{CHEVROLET}$, *repito o mesmo* *processo para as outras montadoras, Ford e Fiat e assim chegamos a:* $\underbrace{\underline{6}\,\underline{5}\,\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}}_{CHEVROLET}\ \underbrace{\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}}_{FIAT}\ \underbrace{\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}}_{FORD}$ *=720 x 6 x 24 = 103.680*

Na segunda parte, vamos calcular de quantas maneiras diferentes nós podemos ordenar as montadoras, como são três, utilizaremos 3 celas: $\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$*= 6, neste momento, comento que são 6 maneiras de permutar a ordem de exposição das montadoras, ou seja de trocar as ordens.*

Como a apresentação da vitrine depende da ordem das montadoras, e da ordem dos modelos, ou seja, uma e outra, daí deve-se calcular o produto dos valores encontrados: 6 x 103.680 = 622.080.

Assim digo a turma que todo produto ordenado e composto por um número natural e seus antecessores diferentes de zero é chamado de fatorial desse número, assim 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1= 6! (lê-se: seis fatorial), logo a resolução do exercício poderia ser representada por: 3! · 6! · 3! · 4!.

E acabo definindo PERMUTAÇÃO, como sendo as diferentes maneiras de se ordenar n elementos em n celas, que pode ser representado por $P_n = n!$

3.4. Arranjos ou Agrupamentos

Acredito que as bases do princípio multiplicativo já estejam bem sedimentadas neste ponto. Agora é hora de propor exemplos que organizem *n* objetos ou elementos em p celas.

O objetivo agora é apresentar a ideia de formar grupos ordenados, onde a quantidade de elementos do grupo é sempre menor que a quantidade de elementos totais disponíveis, além apresentar a definição de agrupamento ou arranjo de *n* elementos p a p, deixando que o aluno perceba que os rótulos tratam do mesmo raciocínio que advém do princípio multiplicativo. Uma boa sugestão é utilizar o exemplo:

Exemplo 4.1: Quantas filas de 5 elementos podemos formar a partir de um grupo de 8 elementos.

Proponho a turma que escrevamos a celas que iremos utilizar e que representam cada ordinal da fila, ou seja: $\underbrace{\underbrace{\ }_{1°}\ \underbrace{\ }_{2°}\ \underbrace{\ }_{3°}\ \underbrace{\ }_{4°}\ \underbrace{\ }_{5°}}_{FILA}$*, ao lançar a pergunta básica:*

De quantas maneiras poderemos preencher a primeira cela e as demais? A turma responde de maneira firme : $\underbrace{\underbrace{8}_{1°}\underbrace{7}_{2°}\underbrace{6}_{3°}\underbrace{5}_{4°}\underbrace{4}_{5°}}_{FILA}$*= 8.7.6.5.4 = 6.720 filas.*

Proponho aos alunos, multiplicar o produto 8.7.6.5.4 pela fração $\frac{3!}{3!}$ *, e assim obtemos 8.7.6.5.4.* $\frac{3!}{3!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{3!} = \frac{8!}{3!}$ *. Neste momento por vezes sou interrompido, pois eles ainda não conseguem perceber qual é o objetivo deste desenvolvimento, mas então digo que o numerador da fração representa as filas formadas pelos 8 elementos* $\underbrace{8}_{1°}\underbrace{7}_{2°}\underbrace{6}_{3°}\underbrace{5}_{4°}\underbrace{4}_{5°}\underbrace{3}_{6°}\underbrace{2}_{7°}\underbrace{1}_{8°}$*, mas que o exercício só quer os cinco primeiros lugares, e que os últimos três lugares da fila não interferem na ordenação e no preenchimento dos cinco primeiros, aja visto que um elemento não pode ocupar simultaneamente dois lugares diferentes, portanto eles devem ser descartados, então temos que o denominador 3! representa a parte a ser descartada.*

Proponho agora o seguinte desafio: Como podemos representar o número de filas de p elementos, que podemos formar, a partir de um conjunto de n elementos, com n>p.

Lembro aos alunos que a estratégia anterior, baseia-se em formar uma fila com todos os elementos disponíveis ou seja n e depois descarta a parte da fila que não se quer, então *pergunto: Se temos n elementos, mas só queremos utilizar p elementos, quantos elementos devem ser descartados? E logo se chega a concussão que esse número é (n-p).*

Volto então ao exercício anterior em que encontramos $\frac{8!}{3!}$ *que na verdade pode ser representado por* $\frac{8!}{(8-5)!}$ *, seguindo o mesmo raciocínio, qual é a representação do número procurado? E logo eles respondem* $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Aproveito a ocasião para definir para os alunos ARRANJO OU AGRUPAMENTO de n elementos, p a p, como sendo o ato de ordenar n elementos em p celas, quando n é maior que p, e que é representado pelo modelo matemático $A_{n;p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Não demora e alguém sempre diz: Professor é muito mais simples fazer como estávamos fazendo! O que me enche de alegria, pois vejo que os colegas concordam, o que mostra que estão arraigados aos conceitos básicos do pensamento combinatório propostos pelo princípio fundamental da contagem.

A dedução da fórmula é importante, porém devem-se propor exemplos que desestimulem a mera aplicação das fórmulas, e privilegiem o raciocínio e os fundamentos do princípio fundamental da contagem, para tal, podemos acrescentar algumas condições para o exemplo anterior, como por exemplo, citar que os 8 elementos são 4 rapazes e 4 moças. Sugiro então os exemplos que seguem:

Exemplo 4.2: A fila comece e termine por pessoas do mesmo sexo.

Digo a turma que eles têm 5 minutos para pensar em um modo para resolver esse problema. Passado o tempo combinado, peço que levantem o braço os que conseguiram elaborar uma solução. A grande maioria levanta o braço, e pergunto: Quem fez utilizando a fórmula de agrupamento? O silêncio revela que essa opção não foi utilizada.

Agora peço que um aluno venha ao quadro para mostrar a sua solução, "normalmente escolho o aluno que mostra maior dificuldade", então o mesmo começa a ser ajudado pelo *restante da turma, quase que aos gritos, "tem que separar em dois casos, o que começa e termina do menina e o outro que começa e termina com meninos", fato que todos acabam concordando, e logo as celas são escritas:* $\underbrace{\underbrace{4}_{M}\,\underbrace{6}_{2°}\,\underbrace{5}_{3°}\,\underbrace{4}_{4°}\,\underbrace{3}_{M}}_{FILA}$ *ou* $\underbrace{\underbrace{4}_{R}\,\underbrace{6}_{2°}\,\underbrace{5}_{3°}\,\underbrace{4}_{4°}\,\underbrace{3}_{R}}_{FILA}$, *assim eles chegam conclusão que o número de filas que começam e terminam como as moças é igual ao número de filas que começam e terminam por rapazes, e que a solução é a soma dessas quantidades ou duas vezes o valor de uma delas: 2 x 4.6.5.4.3 = 2.880.*

Exemplo 4.3: Admitindo que as amigas Ana e Carla façam parte deste grupo, em quantas filas as amigas aparecem juntas?

Como de hábito, procuro induzir os alunos a construírem uma linha de raciocínio que facilite a escolha da estratégia, neste caso, escrevo no quadro as cinco celas que correspondem aos cinco ordinais da fila e pergunto: Existem celas condicionadas neste exercício? Após uma breve discussão, todos concordam que existem duas celas consecutivas, que necessariamente precisam ser ocupadas por Ana e Carla. Logo faço uma nova pergunta: Quais celas devem ser reservadas para as amigas? Sem demora surgem logo as opções, que são escritas no quadro.

$\underbrace{\_\ \_}_{amigas}\ \_\ \_\ \_$ *ou* $\_\ \underbrace{\_\ \_}_{amigas}\ \_\ \_$ *ou* $\_\ \_\ \underbrace{\_\ \_}_{amigas}\ \_$ *ou* $\_\ \_\ \_\ \underbrace{\_\ \_}_{amigas}$

Agora sugiro que preenchamos algum dos casos construído, pergunto então: De quantas maneiras posso preencher as celas destinadas as amigas? E é claro que eles de pronto respondem: duas e uma. Volto a perguntar: quantos elementos restaram? Oito, e como poderemos preencher as celas restantes? $\underbrace{\underline{2}\,\underline{1}}_{amigas}\ \underline{8}\,\underline{7}\,\underline{6} = 672$ *, como os outros casos são calculados de forma idêntica, temos então o total de 4 x 672 = 2688.*

Ao final lanço um desafio, quem conseguiria resolver a questão utilizando as fórmulas aprendidas. Após alguns momentos escrevo a seguinte expressão $P_4^3.P_2.A_{8;3}$ *, o que causa o maior alvoroço.*

Explico então que $P_4^3 = 4$ *quer dizer permutação de 4 elementos, com repetição de 3 elementos, refere-se as quatro posição que a dupla de amigas podem ocupar na fila,* $P_2 = 2$ *é as diferentes maneiras de preencher as celas das amigas, e por fim temos* $A_{8;3} = 336$ *refere-se ao preenchimento dos lugares restantes, assim* $P_4^3 . P_2 . A_{8;3} = 4.2.336 = 2688.$

Não demora e logo eles gritam: "É muito mais difícil professor, é melhor fazer as celas", o que me dá a certeza de que a base do raciocínio combinatório está bem sedimentada.

3.5. Estudando Anagramas De Uma Palavra.

Defino ANAGRAMA, como as diferentes maneiras de ordenar um grupo de leras de uma palavra, independentemente do seu sentido, ou seja, a pura e simples permutação dessas letras, por isso temos que a quantidade de anagramas de uma palavra é dada por $\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{n}!$.

Neste momento lançado para a turma dois exemplos ou questionamentos:

Exemplo 5.1: Quantos anagramas, podemos formar com as letras da palavra "último"?

A turma logo responde fatorial de 6, ou seja $P_6 = 6! = 720$*.*

Exemplo 5.2: Quantos desses anagramas possuem as letras "m" e "o" juntas?

Neste momento, sinto que a turma se cala, então proponho que listemos os símbolos que devemos permutar, e logo as discussões a respeito de como farão com o "m" e o "o", depois de algumas considerações eles percebem que o "m" e o "o" vão formar os símbolos "mo" e "om", e que uma das lista é "u, l, t, i , mo e que é formada por 5 elementos, logo a quantidade é $P_5 = 5!$*, assim a quantidade total é dada por* $2.P_5 = 2.5! = 2.5.4.3.2.1 = 240.$

3.6. Estudo das Permutações com Repetições

O objetivo agora, é fazer o aluno perceber como as repetições influenciam a quantidade total do número de anagramas.

Entender bem como funciona a contagem das permutações como repetições, sob o olhar do Princípio Fundamental da Contagem, é de grande valia, para o pleno entendimento das diferentes maneiras de se escolher elementos dentre um grupo dado.

Este raciocínio, nos levará a construção de um modelo matemático para resolver problemas que envolvam situações como estas. Como venho mostrando desde o início é importante utilizar exemplos simples que mostrem uma direção a ser seguida, proponho então a seguinte estratégia:

Escrevo no quadro a palavra "VACA" e peço para que consideremos o "A" vermelho diferente do "A" azul, e peço ainda que escrevamos todos os anagramas possíveis levando em consideração o combinado, assim organizo no quadro a lista:

VACA CAV A AVAC ACAV VCAA CVAA AAVC AACV VAAC CAAV AVAC ACAV
VACA CAV A AV AC ACAV VCAA CVAA AAVC AACV VAAC CAAV AVAC ACAV

Assim fizemos na verdade $P_4 = 4! = 24$ *conforme a lista acima, agora pergunto: Se desconsideramos o fato acordado do "A vermelho ser diferente do A azul" , quantos anagramas teremos? Convencidos e ajudados pela organização das colunas, eles respondem 12 acertadamente.*

Reforço então: Observamos que cada coluna é composta por dois anagramas iguais, que agora passa a ser contado uma única vez, ou seja, a cada 2 anagramas, contamos apenas 1 anagrama, o que significa que, permutação entre elementos iguais, não gera um novo anagrama.

Questiono os alunos, se é possível então desenvolver um modelo matemático que permita calcular a quantidade de anagramas quando ocorrem repetições, e se alguém já tem alguma ideia, após algumas ponderações, eles concluem que o caminho é calcular todas as permutações, sem distinção de elementos e ao final descontar as repetições. Volto a questionar: Quem gera essas repetições? E click, logo alguém diz: temos que dividir pelo número de permutações entre as letras repetidas, assim escrevo a sugestão: $\frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2}$ *=12.*

Pergunto então: E se em vez de VACA, fosse CACA, como será?

Antes que eles respondam, peço que eles observem no quadro o que ocorre quando substituímos o V pelo C:

CACA CACA ACAC ACAC CCAA CCAA AACC AACC CAAC CAAC ACAC ACAC
CACA CACA ACAC ACAC CCAA CCAA AACC AACC CAAC CAAC ACAC ACAC

Então fica claro para eles chegarem a conclusão: $\frac{P_4}{P_2.P_2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$*, neste momento digo: Pela mesma linha de raciocínio como será calculado o número de anagramas da palavra CARACA? E prontamente eles respondem* $\frac{P_6}{P_2.P_3}$ *.*

Agora sinto-me a vontade para lhes dizer que: Dada uma lista de n elementos, que apresentem repetições de $\alpha, \beta, \theta, \ldots$ *elementos, com* $\alpha + \beta + \theta + \cdots \leq n$*, a permutação dos n elementos é representada por* $P_n^{\alpha,\beta,\theta,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.\theta!.\ \ldots}$*.*

Lembro que é muito importante, não perdermos o foco de privilegiar a compreensão e a aplicação do princípio multiplicativo, deixando claro que nada substitui o raciocínio lógico e criativo proposto pelo princípio fundamental da contagem, por isso, seguindo esta linha proponho a discussão do exemplo que se seguirá.

O objetivo deste exemplo, é fazer que o aluno percebesse que não basta simplesmente aplicar uma fórmula, e que cada exercício exige antes uma compreensão, e a necessidade de utilizar as bases do princípio multiplicativo, além de ressaltar mais uma vez a importância de separar a contagem em casos mais simples, e assim, melhores de serem contados, sem que se abra mão do princípio multiplicativo.

Quantos desses anagramas da palavra caraca começam por consoante e termina por vogal ?

Recomendo a eles que uma boa estratégia seria trabalhar com as celas do princípio multiplicativo, lembrando que se devem calcular as permutações indiscriminadamente, neste caso, faço a seguinte pergunta: Se temos 2C e 1R, existe diferença quando começamos com C ou com R? Então fica claro para eles que será preciso separar os casos, pois em cada um haverá uma mudança na quantidade de elementos que se repete, alterando a quantidade de elementos do cancelamento das repetições, e logo chegamos aos modelos:

1º.- Fixamos um R na primeira cela e um A na última cela, com isso temos a repetição de duas letras R e duas letras A: $\dfrac{\underbrace{\underline{R}}_{c}\,\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}\,\underbrace{\underline{A}}_{v}}{\underbrace{\underline{2}\,\underline{1}}_{2C}\,\underbrace{\underline{2}\,\underline{1}}_{2A}}=\dfrac{24}{4}=6$

ou

2º.- Fixamos um C na primeira cela e um A na última cela, com isso temos a repetição somente de duas letras A: $\dfrac{\underbrace{\underline{C}}_{c}\,\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}\,\underbrace{\underline{A}}_{v}}{\underbrace{\underline{2}\,\underline{1}}_{2A}}=\dfrac{24}{2}=12$

Como podem ser os 6 que começam com R e terminam com A ou os 12, começam com C e terminam com A, destacando a presença do conectivo "ou" que indica união, e se tratando de conjuntos disjuntos, temos que o valor total é dado pela soma dos resultados, 6 + 12 = 18anagramas.

3.7. Combinações (Contando os Modos de se Escolher)

Neste tópico, devemos instigar os alunos a perceberem uma fundamental diferença entre os tipos de contagem que foram feitas até agora e esse novo que apresentaremos a seguir.

Segue abaixo uma atividade bem interessante que auxilia na compreensão deste novo modelo, visto ainda sob o prisma do princípio multiplicativo.

Na sala de aula, proponho aos alunos a seguinte atividade:

1º: Peço 4 voluntários (Ana, Bia, Carla e Dani), e os coloco de pé em frente ao quadro;

2º: Agora solicito que outros 12 voluntários fiquem de pé em seus lugares;

3º: Peço que cada um deles, escolha dois alunos, entre os 4 alunos que estão em frente ao quadro, e vou anotando no quadro os nomes dos alunos de cada dupla escolhida, de modo que as duplas formem pares ordenados e que não ocorra pares iguais, ou seja, cada um dos doze alunos deve formar um par ordenado diferente dos demais, e chegamos ao seguinte quadro:

(Ana;Bia) (Ana;Carla) (Ana;Dani) (Bia;Carla) (Bia;Dani) (Carla;Dani)
(Bia;Ana) (Carla;Ana) (Dani;Ana) (Carla;Bia) (Bia;Dani) (Dani;Carla)

Agora pergunto a turma, qual a quantidade de duplas diferentes foi formada? Os mais afoitos e distraídos logo respondem que são doze, mas vos lembro de que as duplas se diferenciam pelos elementos que as formam e não pela ordem que são escritas.

Após uma pequena pausa, logo surgem os gritos de 6 duplas, e todos se convencem desta verdade e concluímos que a ordem da escolha, não altera a escolha, ou seja, escolher Bia e Ana, é o mesmo que escolher Ana e Bia.

Outra vez pergunto a turma: Alguém pode justificar porque formamos 12 pares ordenados?

Fustigo as cabecinhas dizendo: Pense que o par pode ser visto como duas celas, vejam: ($\underbrace{\_\_}_{abs}$; $\underbrace{\_\_}_{ord}$ *), como temos 4 elementos, fica fácil perceber que podemos preencher a primeira cela de 4 maneiras e a segunda de 3 maneira, assim chegamos:* $\underbrace{4}_{abs} \cdot \underbrace{3}_{ord}$ *= 12 pares.*

Pergunto: Será, que existe alguma semelhança entre a lógica de se calcular anagramas com repetições e a maneira de escolhe pessoas ou objetos em uma lista dada? A resposta é um sonoro sim.

Pergunto: Qual a semelhança? E para meu deleite, a maioria responde: Na hora de cancelar as repetições.

Pergunto então, se é correto dizer que o número de escolhas pode ser calculada por: $\frac{A_{4;2}}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$ *= 6, é claro que a resposta é sim obviamente, mas refaço a pergunta: Para todo conjunto de n elementos, o número de maneiras de escolher p elementos pode ser calculado por* $\frac{A_{n;p}}{P_p}$*? O silêncio paira, intervenho dizendo, vamos analisar outro exemplo:*

Exemplo 6.1: Quantos subconjuntos de três elementos, podemos formar, a partir do conjunto das vogais?

Seguindo estratégia do exercício anterior, podemos propor que seja calculado o número de anagramas de três vogais que podem ser formadas a partir das vogais do nosso alfabeto, ou seja, com "a, e, i, o, u" escrevemos todos os ternos ordenados de vogais: $A_{5;3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *ternos ordenados, vamos escolher um deles: (a, e, u) , agora pergunto: Quantos ternos ordenados são formados pelo a, e, u? Sem demora eles respondem* $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ressalto que a ordem da escolha não altera a escolha, assim os 6 ternos (a, e, u) (a, u, e) (e, a, u) (e, u, a) (u, a, e) (u, e, a) representam uma única escolha, então o que podemos *concluir? Após alguns múrmuros, alguém diz: a cada seis ternos, temos uma única escolha, então por fim chegamos a:* $\frac{5\,.\,4\,.\,3}{3.2\,.1}$ *= 10 subconjuntos.*

Faço a seguinte observação: O ato formar subconjuntos é semelhante ao ato de escolher os elementos que formarão, assim podemos montar um modelo matemático que nos permite calcular as diferentes maneiras de escolher p elementos dentre um grupo de n elemento, com p ≤ n, que definimos com combinação de n elementos escolhidos p à p, e representamos por $C_{n;p}$ *ou* C_p^n.

Refaço a pergunta: É correto afirmar que $C_{n;p}=\frac{A_{n;p}}{P_p}$ *representa todas as maneiras de se escolher p elementos, em um grupo de n elementos? Agora a resposta é direta, sim. Digo: Vamos escrever um modelo matemático que traduza esta sentença, vejam:*

$$C_{n;p}=\frac{A_{n;p}}{P_p}=\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}=\frac{n!}{(n-p)!}\cdot\frac{1}{p!}\text{ , logo : } C_{n;p}=\frac{n!}{(n-p)!.p!}\,.$$

Alerto os alunos, que é muito importante não perder o raciocínio adquirido através do P.F.C. e do princípio multiplicativo, pois se corre o risco de ficar engessado pelas fórmulas, perdendo o raciocínio combinatório, construído passo a passo.

Uma interpretação bem razoável da maneira de contar escolhas ou combinações é fazer a razão ou divisão entre a distribuição de n elementos em p celas, que é na verdade $A_{n;p}$ *, e a distribuição de p elementos em p celas, que equivale a* $p!$.

Exemplo: $C_{9;4}=\frac{\underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}}{\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}=\frac{3024}{24}$*=126.*

Uma das maneiras que encontrei para manter os alunos focados no raciocínio combinatório, foi mostrar à importância de se escrever as ações que devem ser tomadas, antes de se efetivamente partir para o cálculo, que sem dúvida alguma é a parte menos interessante do problema.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6.2: Um grupo é formado por quatro moças: Ana, Claudia, Ligia e Paula, e quatro rapazes: André, Pedro, Rui e Carlos, a partir do exposto, vamos calcular os itens que se seguem.

a) De quantas formas podemos escolher 4 pessoas dentre os elementos do grupo?

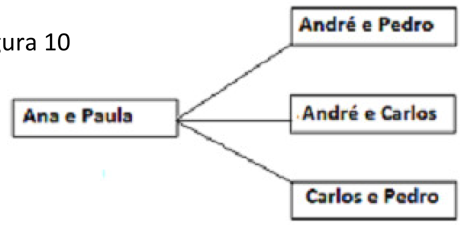
Devemos escolher 4 elementos entre 8 elementos, logo temos $C_{8;4} = \frac{8\ 7\ 6\ 5}{4\ 3\ 2\ 1} = 70$

b) De quantas formas podemos escolher duas moças e dois rapazes para formar uma comissão que os represente.

Neste exercício, lembro aos alunos que temos dois atos distintos e independentes entre si, uma vez que a escolha das moças não interfere nas escolhas dos rapazes, porém as escolhas das duplas interferem na escolha do grupo.

Uma boa estratégia para este exercício é escolher duas meninas aleatoriamente, fixando-as, por exemplo Ana e Claudia, e agora para escolher os dois rapazes dentre os três, *e então montar uma árvore das possibilidades.*

Figura 10



A exibição da árvore de possibilidades, leva o aluno a concluir, que para cada dupla de meninas, temos 3 duplas de meninos, o que nos remete ao princípio multiplicativo, e ao desenvolvimento abaixo:

Deve-se escolher 2 moças entre 4 moças e 2 rapazes entre 3 rapazes.

Escolher 2 moças entre 4 moças => $C_{4;2} = \frac{4\ 3}{2\ 1}$=6

Escolher 2 rapazes entre 3 rapazes =>$C_{3;2} = \frac{3\ 2}{2\ 1}$=3

Relembro os alunos que o conectivo "e" leva a interdependência entre os grupos, por isso devemos multiplicar os valores encontrados, corroborando com a árvore de possibilidades, mostrada anteriormente, logo a quantidade total de maneiras de escolher é: $C_{4;2}xC_{3;2}$*=6x3= 18.*

È muito comum neste estágio do estudo da análise combinatória, os alunos terem a impressão que os exercícios que envolvem combinações, são resolvidos pura e simplesmente com o emprego da fórmula, assim é importante, dissuadi-los deste pensamento, propondo exercício que privilegiam o raciocínio combinatório.

Exemplo 6.3: Suponha que o grupo agora seja formado por: Ana, Claudia, Ligia, Paula, André, Pedro, Rui e Carlos, e que se queira escolher 3 moças e dois rapazes, de modo que Ana sempre seja escolhida e André nunca seja escolhido. Qual a quantidade máxima de escolhas que se pode fazer, nestas condições?

Enfatizo para os alunos, que neste exemplo, há duas condições restritivas, a obrigatoriedade da presença de Ana, restringe a quantidade de moças a serem escolhidas, e também a quantidade de elementos desse grupo. Por sua vez, a exclusão da possibilidade de André ser escolhido, restringe a quantidade de elementos do grupo dos rapazes, porém mantém a quantidade de elementos a serem escolhidos.

Esse tipo de análise, é fundamental, para que o aluno possa escrever com clareza, sua estratégia, colocando em prática seu raciocínio combinatório.

Com auxílio da turma escrevo no quadro:

1º - Como Ana já foi escolhida, devemos escolher 2 moças dentre as 3 moças que restaram, ou seja $C_{3;2}$ *.*

2º - André não pode ser escolhido, devemos escolher 2 rapazes dentre os 3 rapazes que restaram, ou seja $C_{3;2}$ *.*

Assim temos: $C_{3;2}$ *x* $C_{3;2}$ *= 3 x 3 = 9.*

Exemplo 6.4: Considerando o exemplo anterior, de quantas maneiras podemos escolher 5 elementos deste grupo, de maneira que haja ao menos uma moça escolhida?

Começo a abordagem do exercício, chamando a atenção dos alunos, para o termo "ao menos ", que indica uma quantidade mínima de certo elemento ou objeto, assim, se faz necessário a divisão do exercício em casos, que atendam a condição pré-estabelecida.

1º caso – escolhe-se 1 moça dentre 4 moças e 4 rapazes dentre 4 rapazes:

$\boldsymbol{C_{4;1}}$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{C_{4;4}}$ = 4 x 1 = 4

ou

2º caso – escolhe-se 2 moças dentre 4 moças e 3 rapazes dentre 4 rapazes;

$\boldsymbol{C_{4;2}}$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{C_{4;3}}$ = 6 x 4 = 24

ou

3º caso – escolhe-se 3 moças dentre 4 moças e 2 rapazes dentre 4 rapazes;

$\boldsymbol{C_{4;3}}$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{C_{4;2}}$ = 4 x 6 = 24

ou

4º caso – escolhe-se 4 moças dentre 4 moças e 1 rapaz dentre 4 rapazes:

$\boldsymbol{C_{4;4}}$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{C_{4;1}}$ = 1 x 4 = 4.

Como já vimos anteriormente o conectivo ou indica a união, como os grupos formados podem ser entendidos como conjuntos disjuntos, devemos então somar os resultados, logo temos: total = 4 + 24 + 24 + 4 = 56.

Para encerrar esta seção, proponho mais uma vez um exemplo que privilegia o raciocínio combinatório, onde o aluno deve perceber o quão importante é planejar as ações e dividir tarefas.

Exemplo 6.5: Em uma reunião de 10 acionistas, deverão ser escolhidos 2 diretores, 3 gerentes e 2 tesoureiros. A convenção desta empresa estabelece que: serão escolhidos inicialmente os dois diretores, após serão escolhidos os 3 gerentes, e por último escolhem-se os 2 tesoureiros. De quantas maneiras diferentes Podem ser preenchidos os cargos desta empresa, atendendo sua convenção?

Após a leitura do enunciado, para envolver a turma, escrevo no quadro as seguintes indagações:

Todos os candidatos possuem a mesmas condições para ocupar qualquer cargo?

Qual é o objetivo do problema?

Quais as condições impostas, para que sejam feitas as escolhas?

É claro que não estou diretamente interessado nas respostas a estes questionamentos, e sim no desdobramento que eles trazem, para a análise de uma estratégia positiva de resolução do problema.

Após alguns instantes, pergunto a turma, quais a são as etapas a serem cumpridas?

- Escolher 2 diretores entre 10 possíveis, logo temos $C_{10;2} = \frac{10\ 9}{2\ 1} = 45$.

E

- Escolher 3 gerentes entre os 8 restantes possíveis, logo temos $C_{8;3} = \frac{8\ 7\ 6}{3\ 2\ 1} = 56$.

E

- Escolher 2 tesoureiros entre os 5 restantes possíveis, logo temos

$C_{5;2} = \frac{5\ 4}{2\ 1} = 10$.

Como os 2 diretores, os 3 gerentes e os 2 tesoureiros formarão uma só equipe, pois o conectivo "E" garante isso, vamos chegar a solução:

$C_{10;2}\ x\ C_{10;2}\ \ x\ C_{10;2} = 45\ x\ 56\ x\ 10 = 25.200$ *maneiras.*

4. PROBLEMAS COMENTADOS E RESOLVIDOS

Este capítulo traz uma lista de exercícios resolvido e comentados, com o propósito de mostrar ao leitor alguns exercícios que exigem um raciocínio um pouco mais elaborado, além de mostrar diferentes formas de abordar o mesmo exercício.

1) Calcule quantos múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2,3,4,6 e 9 (Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 3).

Objetivo: Esta questão tem como objetivo reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, além trabalhar com celas condicionadas.

Solução:

Precisamos selecionar quatro algarismos cuja soma seja múltiplo de 3:

- soma 21: {2,4,6,9}: 4 x 3 x 2 x 1 = 24 números distintos.

- soma 18: {2,3,4,9}: 4 x 3 x 2 x 1 = 24 números distintos.

- soma 15: {2,3,4,6): 4 x 3 x 2 x 1 = 24 números distintos.

Logo, há no total 24 + 24 + 24 = 72 números possíveis.

2) Seis times de futebol, entre os quais estão A e B, vão disputar um campeonato. Suponha que na classificação final não existam empates. Um indivíduo fez duas apostas sobre a classificação final. Na primeira, apostou que A não seria campeão; na segunda, apostou que B não seria o último colocado. Em quantas das 720 classificações possíveis esse indivíduo ganha as duas apostas?

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, mostrar a importância de trabalhar o espaço complementar, como uma forma bem razoável para casos que envolvam variar condições.

Solução: Para que ganhe as duas apostas, as duas situações devem ocorrer. Uma forma de pensar é calcular as situações ocorrendo e subtrair do total. Isto é trabalhamos com o complementar:

1º - A é campeão: fixamos A na 1º colocação: A _ _ _ _ _ Há 5! = 120 possibilidades para o restante. Repare que B pode em alguma delas ocupar a última posição.

2º - B é o último: fixamos B na 6ª colocação: _ _ _ _ _ B Há também 5! = 120 possibilidades. Repare que A pode ocupar a 1º posição em algumas das possibilidades.

3º - A campeão e B o último: A _ _ _ _ B Há 4! = 24 possibilidades. Essa situação é a interseção dos dois casos anteriores.
Logo, o número de possibilidades de ganha na aposta é: 720 – (120 + 120 – 24) = 720 – 216 = 504 possibilidades.

3) Usando-se os algarismos 1,3,5,7 e 9, existem x números de 4 algarismos de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais. Determine o valor de **x**.

*Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, mostrar a importância de trabalhar o espaço complementar, como uma forma bem razoável para casos que envolvam variar condições, geralmente causadas pela expressão "**ao menos**".*

Solução: O oposto de ter pelo menos dois números iguais é ter todos diferentes. Logo, o número de casos pedidos será: Número total – Número (4 algarismos distintos).

1º- Total de números de quatro algarismos: 5 x 5 x 5 x 5 = 625 números.

2º- Total de números de quatro algarismos distintos: 5 x 4 x 3 x 2 = 120 números.

Logo há 625 – 120 = 505 números de quatro algarismos com pelo menos dois algarismos iguais.

4) Entre os 20 professores de uma escola, devem ser escolhidos três para os cargos de diretor, vice-diretor e orientador pedagógico. De quantas maneiras a escolha pode ser feita?

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno o uso crítico do raciocínio combinatório, uma vez que o problema associa a ideia do PFC, as diferentes maneiras de escolher.

Solução: Escolhendo um professor para cada cargo, temos: 20 x 19 x 18 = 6840 casos possíveis.

5) Uma sala tem seis lâmpadas com interruptores independentes. De quantos modos pode-se ilumina-la, se pelo menos uma das lâmpadas deve ficar acesa?

*Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno o uso crítico do raciocínio combinatório, uma vez que o problema associa a ideia do PFC, as diferentes maneiras de escolher, além de mostrar a importância de trabalhar o espaço complementar, ainda que de maneira sútil, mais uma vez destacando a expressão "**pelo menos**", e ainda que o mesmo exercício pode ser resolvido através de ferramentas diferentes.*

Solução 1: Como a lâmpada pode ficar acesa ou apagada, cada uma tem duas condições. Há um total de 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^6 = 64 casos. Mas como um sempre deve ficar acesa, temos que excluir o caso todas apagadas. Logo, há 64 – 1 = 63 modos.

Solução 2: Essa supõe uma combinação de resultados onde podemos ter:

1º- 1 acesa e 5 apagadas: $C_{6;1}\ x\ C_{5;5} = 6\ x\ 1 = 6$ *maneiras.*

2º- 2 acesas e 4 apagadas: $C_{6;2}\ x\ C_{4;4} = 15\ x\ 1 = 15$ *maneiras.*

3º- 3 acesas e 3 apagadas: $C_{6;3}\ x\ C_{3;3} = 20\ x\ 1 = 20$ *maneiras.*

4º- 4 acesas e 2 apagadas: $C_{6;4}\ x\ C_{2;2} = 15\ x\ 1 = 15$ *maneiras.*

5º- 5 acesas e 1 apagadas: $C_{6;5}\ x\ C_{1;1} = 6\ x\ 1 = 6$ *maneiras.*

6º- 6 acesas e 0 apagadas: $C_{6;6} = 1$ *maneira.*

Total: 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 possibilidades.

6) Determine a quantidade de números de três algarismos que tem pelo menos dois algarismos repetidos.

*Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno o uso crítico do raciocínio combinatório, uma vez que o problema associa a ideia do PFC, as diferentes maneiras de escolher, além de mostrar a importância de trabalhar o espaço complementar, ainda que de maneira sútil, mais uma vez destacando a expressão "**pelo menos**".*

Solução: Total de números de 3 algarismos: 9 x 10 x 10 = 900.

Total de números de 3 algarismos distintos: 9 x 9 x 8 = 648.

Total de números de 3 algarismos com pelo menos dois repetidos: 900–648 = 252.

7) Uma bandeira é formada de 7 listras que devem ser formadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pinta-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno a importância da lista de objetos que se tem a disposição, associado ao uso crítico do raciocínio combinatório, utilizando celas condicionadas.

Solução: Considerando as 7 listras, a partir da 1ª temos:

1º- 1ª listra pode ser com qualquer das 3 cores.

2º- 2ª listra será pintada com 2 cores possíveis, diferente da 1ª listra.

3º- 3ª listra também terá duas cores possíveis, pois a 1ª cor já poderá ser reutilizada.

Este procedimento mostra que temos: $3.2.2.2.2.2.2 = 3.2^6 = 3.(64) = 192$ *formas diferentes de pintar.*

8) (UFRJ-2000) Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro "Combinatória é fácil" e 5 exemplares de "Combinatória não é difícil". Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de "Combinatória não é difícil" nunca estejam juntos.

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, mostrar ao aluno, a necessidade do uso crítico do raciocínio combinatório, uma vez que o problema associa a ideia do PFC, as diferentes maneiras de escolher, além de mostrar que o mesmo exercício pode ser resolvido através de ferramentas diferentes.

Solução 1. Colocando os 11 livros de "Combinatória é fácil" primeiramente deixando um espaço entre eles, temos: _CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_.

Há 12 espaços vazios onde os livros "Combinatória não é difícil" podem entrar sem ficarem juntos. O problema se resume a escolher 5 lugares dentre os 12 disponíveis:

$$C_{12;5} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5!7!} = 11.9.8 = 792 \ formas$$

Solução 2. Colocando os 11 livros de "Combinatória é fácil" primeiramente deixando um espaço entre eles, temos: _CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_.

Há 12 espaços vazios que podem ser ocupados ou não, como os cinco objetos "Combinatória não é difícil" são indistinguíveis, podemos então utilizar os símbolos "O" para o espaço ocupado e "L" para o espaço livre, assim a resolução se resume a permutar os 12 objetos, com repetições de 5 e 7:

$$P_{12}^{5;7} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5!7!} = 11.9.8 = 792 \ formas$$

9) (UFRJ-2003) A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, todos variando de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera, mas sabe que atende às condições:

1ª) se o primeiro algarismo é ímpar, então o último também é ímpar; 2ª) se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro; 3ª) a soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.

Quantas combinações diferentes atendem às condições do Dr. Z?

Objetivo: Esta questão tem como objetivo reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, além trabalhar as celas com condicionadas.

Solução. De acordo com as informações, as possibilidades para o 2º e 3º algarismos são: (2,3), (3,2), (1,4), (4,1),(5,0), (0,5).

1º- 1º e 5º ímpares: <u>5 possibilidades</u>.(6 possibilidades).<u>10 possibilidades</u>. <u>5 possibilidades</u>.

2º- 1º par e 5º igual ao 1º: <u>5 possibilidades</u>.(6 possibilidades).<u>10 possibilidades</u>. 1 <u>possibilidades</u>.

Total: (5.6.10.5) + (5.6.10.1) = 1500 + 300 = 1800 combinações diferentes.

10) Uma equipe esportiva composta por 6 jogadoras está disputando uma partida de 2 tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo podem ser feitas até 3 substituições e, para isto, o técnico dispões de 4 jogadoras no banco. Quantas formações distintas podem iniciar o segundo tempo?

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, mostrar a importância elaborar bem a sua estratégia, se valendo do raciocínio combinatório.

Solução: Importante lembrar que o número de atletas que saem é igual ao número de atletas que entram e há combinações na saída e na entrada.

1º - nenhuma substituição: 1 forma (mesma do 1º tempo).

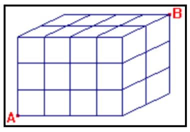
2º - 1 substituição: escolher 1 para sair dentre 6 e 1 para entrar dentre 4: $C_{6;1} \times C_{4;1} = 6x4 = 24$

3º - 2 substituições: escolher 2 para sair dentre 6 e 2 para entrar dentre 4: $C_{6;2} \times C_{4;2} = 15x6 = 90$.

4º - 3 substituições: escolher 3 para sair dentre 6 e 3 para entrar dentre 4: $C_{6;3} \times C_{4;3} = 20x4 = 80$.

Total: 1 + 24 + 90 + 80 = 195 formas distintas.

11) Sendo possível somente percorrer as arestas dos cubos abaixo, quantos caminhos diferentes podem fazer indo do ponto A até o ponto B, percorrendo o mínimo de arestas possível?



Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, mostrar a importância elaborar bem a sua estratégia, se valendo do raciocínio combinatório.

Solução. Problema semelhante ao bidimensional. Há 4 caminhos no comprimento, 2 na largura e 3 na altura. Ou seja, o número de anagramas de CCCCLLHHH:

$$P_9^{4;2;3} = \frac{9!}{4!2!3!} = \frac{9.8.7.6.5.4!}{4!2!3!} = 9.4.7.5 = 1260\, ca\min hos$$

12) Quantos anagramas da palavra ARITMÉTICA começam por vogal e terminam por consoante?

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, mostrar a importância elaborar bem a sua estratégia, se valendo do raciocínio combinatório, utilizando conscientemente as ferramentas a sua disposição, mostrando que as fórmulas são os meios e não os fins.

Solução. Inicialmente vamos supor quais as possiblidade de começar com vogal e terminar com consoante:

Temos 5 vogais, sendo dois "a" , dois "i" e em "e", já as consoantes também são 5, sendo dois "t", um "r", um "c" e um "m", assim precisamos definir qual a vogal e qual a consoante que ficaram fixadas. O que nos leva as seguintes possiblidades:

1º - Começa com "e" e termina com "t", assim permutaremos a,a,i,i,t,r,m,c , temos então:

$$P_8^{2;2;} = \frac{8!}{2!2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2!}{2!2!} = 4.7.5.4.3 = 1680$$

2º - *Começa com "e" e não termina com "t", assim permutaremos a,a,i,i,t,t e outra duas, temos então:*

$$P_8^{2;2;2} = \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2!}{2!2!2!} = .7.5.4.3.2 = 840$$

3º - Começa com "i" ou "a" e termina com "t", assim permutaremos a,a,i,e,t,r,m,c ou a,i,i,e,t,r,m,c , temos então:

$$2 . P_8^{2} = 2.\frac{8!}{2!} = 2.\frac{8.7.6.5.4.3.2!}{2!} = 2.8.7.5.4.3 = 6720$$

4º - Começa com "i" ou "a" e não termina com "t", assim permutaremos a,a,i,e,t,t e outra duas ou a,i,i,e,t,t e outra duas, temos então:

$$2 . P_8^{2;2} = 2.\frac{8!}{2!2!} = 2.\frac{8.7.6.5.4.3.2!}{2!2!} = 8.7.5.4.3 = 3360$$

Total: 1680 + 840 + 6720 + 3360 = 12600 anagramas.

13) Calcule o número de permutações da palavra ECONOMIA que não começam nem terminam com a letra O.

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno a ideia de dividir o problema em etapas, mostrar a importância elaborar bem a sua estratégia, se valendo do raciocínio combinatório, utilizando conscientemente as ferramentas a sua disposição, mostrando que as fórmulas são os meios e não os fins.

Solução 1. Na configuração _ (_ _ _ _ _ _) _ os espaços entre parênteses são os possíveis a serem ocupados pela letra O. Há 6 espaços e escolhemos dois deles: $C_{6;2} = 15$. *Uma vez fixados esses dois lugares, basta permutar as 6 letras restantes. Logo, são:*

$6!xC_6^2 = (720)x15 = 10800\ anagrama$ **.**

Solução 2. Calculando as possibilidades totais e subtraindo das ocorrências indesejadas.

1º - Total de anagramas: $P_8^2 = \frac{8!}{2!} = \frac{8.7.6!}{2} = 4.7.(720) = 20160\ anagramas$.

2º - Total de anagramas iniciando com O: $P_7 = 7! = 7.(720) = 5040\ anagramas$.

3º - Total de anagramas terminando com O: $P_7 = 7! = 7.(720) = 5040\ anagramas$.

4º - Total de anagramas iniciando e terminando com O (interseção):

$P_6 = 6! = 720\ anagramas$.

Total de anagramas pedido: $20160 - (5040 + 5040 - 720) = 20160 - 9360 = 10800\ anagramas$ **.**

14) Um estudante ganhou quatro livros diferentes de matemática, três diferentes de física e dois diferentes de química. Querendo manter juntos os da mesma disciplina, calculou que poderá enfileirá-los de diferentes modos numa prateleira de estante. Calcule essa quantidade de modos.

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, de mostrar ao aluno importância elaborar bem a sua estratégia, se valendo do raciocínio combinatório.

Solução. Uma forma seria (M1M2M3M4)(F1F2F3)(Q1Q2). Podem permutar entre si e entre as ordens das matérias: 3! x (4! x 3! x 2!) = 6 x (24 x 6 x 2) = 6 x 288 = 1728 modos.

15) Em uma classe de 9 alunos, todos se dão bem, com exceção de Patrícia, que não se entende com Luiza e Thiago. Nessa classe será constituída uma comissão de cinco alunos com a exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros. Quantas comissões podem ser formadas?

Objetivo: Esta questão tem como objetivo, reforçar no aluno o uso crítico do raciocínio combinatório, uma vez que o problema associa a ideia do PFC, as diferentes maneiras de escolher, além de mostrar a importância de trabalhar o espaço complementar.

Solução: A proposta é calcular todas as combinações possíveis de 5 elementos, e em seguida, excluir as que apresentam Patrícia e Luzia , Patrícia e Thiago, e Patrícia, Luzia e Thiago.

1º- Devemos escolher 5 entre os 9 alunos da turma: $C_{9;5} = \frac{12!}{5!4!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!4!} = 9.2.7 = 126$

2º- Como formar comissões a partir de Patrícia e Luiza, é análogo ao caso Patrícia e Thiago, temos que escolher 3 em 7, então:

$$2.C_{7;3} = 2.\frac{7!}{3!4!} = 2.\frac{7.6.5.4!}{3!4!} = 2.7.5 = 70$$

3º- Vamos formar comissões a partir de Patrícia, Luiza e Thiago, temos que escolher 2 em 6, então:

$$.C_{6;2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{.6.5.4!}{2!4!} = 3.5 = 15$$

Total de comissões pedida: $126 - (70 + 15) = 126 - 85 = 41$ *comissões*.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante todos esses anos de vida escolar, quer seja como aluno, quer seja como professor, a resolução de problemas sempre me motivou, com seus desafios, exigindo compreensão, criatividade e aplicabilidade de conceitos aprendidos.

Em especial, a análise combinatória nos propicia a possibilidade de desenvolver a habilidade de elaborar tais estratégias, para encontrar soluções ou vislumbrar diferentes caminhos para resolver os problemas, assim enxergamos nessa prática um instrumento valioso a ser utilizado.

Foi com este espírito, e apoiado nas melhores práticas didáticas, que apresentei um guia de aula calcado na resolução de problemas.

Nele, procurei mostrar que o professor tem o papel fundamental de mediador, que orienta e direciona, sem que necessariamente forneça o próprio caminho simplesmente. Antes, o professor deve incentivar seus alunos, através de atitudes positivas, que transmitam segurança, a fim de que eles descubram seus próprios caminhos, na arte de criar suas soluções na resolução de problemas, tais como: dar oportunidade para que todos possam expressar as próprias estratégias de resolução; valorizar todas as resoluções apresentadas pelos alunos, trabalhando o erro como instrumento pedagógico; desenvolver nos alunos a persistência na elaboração de estratégias para a resolução dos problemas.

Nesta óptica, o principal objetivo foi fornecer uma proposta que possa servir como uma orientação ao professor de abordagem dos problemas de contagem juntamente aos seus alunos.

Neste guia, dentro dos comentários e falas atribuídas aos alunos, fica nítida a incorporação do como aos poucos, os alunos vão se apropriando do pensar combinatório, através da aplicação do PFC, na elaboração de suas estratégias, além criarem o hábito de estabelecer etapas que facilitam a compreensão dos objetivos de cada problema.

Fica claro também, que eles passam a enxergar de maneira diferente a aplicação das fórmulas, como uma consequência natural de uma estratégia que foi traçada a partir dos conceitos do PFC, não mais se prendendo aos rótulos, que antes eram os norteadores das ações que se seguiriam.

Essas atividades propostas, assim como os comentários, são fruto da minha real vivência docente, assim espero sinceramente contribuir, sobretudo, com os colegas mais jovens, para que, desde cedo, possam agregar ao seu trato didático tais sugestões, melhorando suas práticas docentes no que tange ao ensino de análise combinatória no ensino médio, contribuindo ainda, de modo geral, para melhoria da qualidade do ensino de matemática.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: MEC, 1999. 364 p.

CARVALHO, Paulo Cezar P. Métodos de Contagem e Probabilidade, volume 2. Programa de Iniciação Científica (PIC) – OBMEP: 2011.

LIMA, Elon L. – Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio – Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar P.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo – A Matemática do Ensino Médio, volume 2 – 6ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar P.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo – A Matemática do Ensino Médio, volume 1 – 9ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, Antônio dos Santos – Matemática Temas e Metas: sistemas lineares e análise combinatória – São Paulo: Atual, 1986.

MALAGUTTI, Pedro Luiz. Atividades de Contagem a partir da Criptografia, volume 10. Programa de Iniciação Científica (PIC) – OBMEP: 2011.

MENG, Koh K.; GUAN, Tay Eng – Counting – Singapore: World Scientific, 2002.

MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, João B. P. de; CARVALHO, Paulo Cezar P.; FERNANDEZ, Pedro – Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios – 9ª ed. – Rio de Janeiro, SBM, 1991.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p.

PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

VAZQUEZ, Cristiane M. R.; NOGUTI, Fabiane C. H. – Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica – Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>.

NEEDHAM, J. Science and Civilisation in China. London: Cambridge University Press. Vol 3.1959. p.58

WIELEITNER, H. Historia de la Matematica.Barcelona: Labor. 1932. p.134

WILSON, R. J.; LLOYD, E. K. Combinatorics. 1990. p.952-965.

URL: http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html (versão 14/01/2004).

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. Revista Historia Mathematica. Vol 6. 1979. p.109-136.