PROFMAT-IMPA

AS GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANAS

José Pedro Alves da Silva

Orientador: prof. Eduardo Wagner

Rio de Janeiro

2017

JOSÉ PEDRO A. DA SILVA

ALUNO DO CURSO DE MESTRADO PROFMAT DO IMPA

AS GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANAS

Trabalho de conclusão do curso de mestrado profissional em matemática (PROFMAT) do IMPA, sob orientação do prof. Eduardo Wagner.

Rio de Janeiro

2017

Trabalho de Conclusão do Curso de mestrado profissional em matemática (PROFMAT) pelo IMPA.

Rio de Janeiro 2017.

EPÍGRAFE

"Quem, na juventude, não teve seu entusiasmo despertado por Euclides, certamente não nasceu para ser cientista"- Albert Einstein.

RESUMO

Até o início do século XIX a Geometria de Euclides reinou absoluta, e, face às várias contradições apresentadas, uma nova geometria foi criada por conceituados matemáticos da época. Por tratar-se de uma geometria contraditória à então existente, foi chamada de Geometria Não-Euclidiana. Esta geometria, ao contrário da anterior que analisa o plano, leva em consideração a curvatura da superfície e tem proporcionado ao homem grandes avanços tecnológicos e constante progresso nas pesquisas espaciais. Este estudo partiu das primeiras teorias sobre as geometrias não euclidianas, com problema no quinto postulado dos Elementos de Euclides, as suas tentativas de demonstrá-lo, o surgimento dos modelos de Geometrias Não Euclidianas e sua influência na física e na Teoria da Relatividade de Einstein. Neste contexto, estudou-se como as ideias não euclidianas mudaram a concepção de espaço e geometria, influenciando no surgimento das teorias relativistas. Face ao total desconhecimento da Geometria Não-Euclidiana pelos alunos do ensino médio, e até mesmo por seus professores, este trabalho teve por objetivo central trazer à luz um assunto que é pouco divulgado e levar ao conhecimento dos professores dos cursos de licenciatura em matemática e interessados em geometria, as fascinantes Geometrias Não-Euclidianas, evitando com isso, que alunos do ensino médio cheguem às universidades alheios a esta nova ciência. A partir de pesquisas bibliográficas, procurou-se mostrar o desenvolvimento histórico das Geometrias Não Euclidianas e também que conceitos como espaços curvos somente são possíveis considerando o espaço não euclidiano. Os achados obtidos nesta revisão permitem inferir que os alunos de ensino médio compreenderiam muito melhor as evoluções tecnológicas uma vez que lhes fossem oferecidas noções, mesmo que básicas, de Geometria Não-Euclidiana.

Sumário

INTRODUÇÃO

Este é o Trabalho de Conclusão do Curso de mestrado profissional em matemática (PROFMAT) pelo IMPA, cujo interesse central foi trazer à luz um assunto pouco divulgado e levar ao conhecimento dos alunos do ensino médio e interessados em geometria, as fascinantes Geometrias Não-Euclidianas, criadas no início do século XIX e que abriram novas e abrangentes perspectivas para o desenvolvimento das matemáticas. O desenvolvimento dessa ciência foi propiciado, basicamente, face às controvérsias apresentadas em torno do quinto postulado de Euclides.

Tendo em vista que as Geometrias Não-Euclidianas têm permitido ao homem grandes avanços tecnológicos e constante progresso nas pesquisas espaciais no estudo do Universo, e que os alunos chegam às Universidades com total desconhecimento dessa nova ciência, este projeto visa a trazer à luz um assunto pouco conhecido junto aos alunos e professores do ensino médio, bem como aos interessados em geometria.

O adjetivo “Não-Euclidiana”, dado a essas geometrias, surgiu do fato de estarem ligadas a princípios diferentes dos estabelecidos na obra de Euclides, os quais, por consequência, levam a teoremas que, muitos deles, não coincidem com os da Geometria Euclidiana. Um destes teoremas, por exemplo, afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo perfaz 180º, mas quando este mesmo triângulo é traçado sobre a superfície de uma esfera, isto não mais acontece, ou seja, a soma dos ângulos internos deste triângulo difere de 180º, sendo esta soma tanto maior, quanto maior for a curvatura da superfície.

Face às controvérsias apresentadas, observou-se que as leis da Geometria Euclidiana somente eram válidas quando analisadas em superfícies planas e que uma nova geometria, com novos teoremas, deveria existir, quando superfícies curvas estivessem envolvidas. Esta nova geometria foi denominada de Geometria Não-Euclidiana e leva em consideração a curvatura da superfície analisada e desta forma as leis da geometria Euclidiana não são mais absolutas.

Considerada, até o aparecimento das geometrias não-euclidianas, a descrição perfeita e, portanto, inquestionável do nosso mundo, a Geometria Euclidiana passou a dividir a sua posição com outras geometrias, também válidas. Se para o engenheiro ou o carpinteiro, a geometria mais adequada é a convencional que aprendemos na escola, para o marinheiro, nas suas grandes travessias, a mais adequada é a Geometria Não-Euclidiana, uma vez que a curvatura de nosso planeta deve ser considerada.

Pelo exposto, o presente trabalho teve por objetivo apresentar um pouco das histórias das geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas, e que estudiosos de geometria, como professores e alunos, tenham conhecimento desta outra geometria.

CAPÍTULO I

1. A GEOMETRIA NA HISTÓRIA

1.1. A Origem da Geometria

O homem, através da observação da natureza e de tudo o que está ao seu redor, criou conceitos para formas, figuras planas, corpos, volumes, retas e curvas. Da construção de casas com paredes verticais e tetos horizontais surgiu a noção de perpendicularidade e paralelismo, até chegar a descobrir que a distância mais curta entre duas cidades é o caminho reto.

Os conceitos de Geometria surgiram nas civilizações do antigo Egito e datam de dois mil anos antes de Cristo, porém foi na Grécia onde adquiriram forma científica de um modo prático, e alcançaram o seu máximo esplendor em estreita relação com a filosofia, de tal maneira que para entrar na escola filosófica de Platão (428-347 a.C.), era preciso ter conhecimentos de geometria. Sobressaíram Tales de Mileto (séc.VI a.C.), um dos sete sábios da Grécia e Pitágoras (séc.VI a.C), famoso por seu teorema.

Em 333 a.C. foi fundada a cidade de Alexandria, no Egito, pelo Imperador Alexandre, o Grande. Desde o início, Alexandria mostrou que estava destinada a um futuro promissor. Por volta de 300 a.C. tinha já 500.000 habitantes.[1] Em um espaço de tempo incrivelmente curto, devido em grande parte à sua localização privilegiada, num entroncamento de importantes rotas comerciais, enriqueceu e se tornou o centro mais suntuoso e cosmopolita do mundo.

Depois da morte de Alexandre, em 323 a.C., seu império foi dividido entre seus líderes militares, resultando na emergência de três impérios, com governos independentes, mas unidos pelos laços da civilização helênica decorrente das conquistas de Alexandre. O Egito

---

1 EVES, Howard. Introdução à história da matemática. São Paulo: Unicamp, 2004. p.166.

coube a Ptolomeu que escolheu Alexandria para capital e, para atrair homens de saber à sua cidade, imediatamente começou a construir a famosa Universidade de Alexandria.

Esta Universidade era muito bem provida de recursos e seu projeto agradável e bem elaborado continha salas de aula, laboratórios, jardins, bibliotecas bem aparelhadas e habitações. A grande biblioteca, que por muito tempo foi o maior repositório de registros culturais de todo o mundo e que após quarenta anos de sua fundação ostentava mais de 600.000 rolos de papiro. Por volta de 300 a.C. a universidade abriu suas portas e daí em diante, por quase um milênio, Alexandria se tornou a metrópole intelectual da raça grega.

Para montar uma equipe de intelectuais de alto gabarito na universidade, Ptolomeu recorreu a Atenas, convidando homens de talento e capacidade para desenvolver os vários campos de estudo. Euclides, possivelmente também oriundo de Atenas, foi escolhido para chefiar o departamento de matemática.

1.2. Euclides de Alexandria(360 a.C – 295 a.C)

Euclides foi um professor grego e escritor e teve o espaço euclidiano, imutável, simétrico e geométrico, metáfora do saber na antiguidade clássica, que se manteve incólume no pensamento matemático medieval e renascentista, pois somente nos tempos modernos puderam ser construídos modelos de geometrias não-euclidianas. Teria sido educado em Atenas e frequentado a Academia de Platão, em pleno florescimento da cultura helenística.

Tornou-se o mais importante autor de matemática da Antiguidade greco-romana e talvez de todos os tempos, com seu monumental “Stoichia” (Os elementos, 300 a.C.), no estilo livro de texto, uma obra em treze volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço.

Escrita em grego, a obra cobria toda a aritmética, a álgebra e a geometria conhecidas até então no mundo grego, e sistematizava todo o conhecimento geométrico dos antigos e intercalava os teoremas já conhecidos então com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado. Após sua primeira edição foi copiado e recopilado inúmeras vezes e, versado para o árabe

(774), tornou-se o mais influente texto científico de todos os tempos e um dos com maior número de publicações ao longo da história.[2]

1.3. A Obra de Euclides

A obra mais famosa de Euclides são os Elementos de Geometria (Stoichia), em treze livros, dos quais nove tratam de geometria plana e sólida e quatro tratam da teoria dos números. Euclides foi também o autor de Data, Divisões de Superfícies, Tratados Sobre Harmonia, Óptica e Os Fenômenos (Celestes), entre outras obras desaparecidas. Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente à sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho genial. Ao recolher tudo o que então se conhecia, sistematiza os dados da intuição, e substitui imagens concretas por noções abstratas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo.[3]

Os Elementos compõem-se de treze livros, o primeiro dos quais contém os axiomas distribuídos em dois grupos: postulados e noções comuns. Os postulados constituem os fundamentos especificamente geométricos e fixam a existência dos entes fundamentais: ponto, reta e plano. Nos quatro primeiros livros encontram-se as proposições da geometria plana elementar. Os dois livros seguintes tratam da teoria das proporções e da aplicação dessa teoria às magnitudes geométricas. Os livros VII, VIII e IX tratam da teoria dos números, dos inteiros positivos, da divisibilidade dos fatores primos, das proporções e progressões geométricas e aritméticas. O livro X, que trata dos números irracionais é o mais extenso e difícil de todos. Os três últimos livros referem-se à geometria sólida e cobrem grande parte do material, com exceção do que diz respeito à esfera. As definições, os teoremas sobre retas e planos no espaço e os teoremas sobre paralelepípedos, se encontram no livro XI. O método de exaustão

---

[2] Luchetta, Valéria. Euclides e os elementos. Ime, São Paulo, 23 abril 2003. Disponível em < http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/euclides.html >. Acesso em: 20 maio 2016.

[3] Op.cit.

desempenha um papel importante na abordagem de volumes do livro XII. No livro XIII se desenvolvem construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.[4]

1.4. Os principais postulados de Euclides

Em geometria, ponto é um elemento básico, cuja posição no sistema cartesiano pode ser determinada pelas suas coordenadas. Os matemáticos têm tido dificuldade em definir o ponto, pois não tem tamanho, e é apenas o local onde duas linhas se encontram. De acordo com Euclides, um ponto não tem volume e a linha reta é a distância mais curta entre dois pontos.

Postulados são proposições geométricas específicas, sendo que postular significa pedir para aceitar. Abaixo são relacionados os cinco postulados de Euclides: [5]

1 – Fique postulado traçar uma reta a partir de qualquer ponto até outro ponto;

2 – Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;

3 – E, com todo centro e distância, descrever um círculo;

4 – E serem iguais entre si todos os ângulos retos;

5 – E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no mesmo lado no qual estão os menores do que dois retos.

Este 5º é o famoso postulado das paralelas e modernamente é apresentado com as seguintes palavras: "Por um ponto P exterior a uma reta m, consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta m".[6] Permaneceu como um desafio para os matemáticos durante dezenas de séculos, até ser parcialmente contestado por Gauss, Riemann, Lobachewski e Bolyai que criaram uma nova geometria que veio a ser conhecida como Geometria Não-Euclidiana.

---

4 EVES, Howard. Introdução à história da matemática. São Paulo: Unicamp, 2004.p.175

5 Euclides. Os Elementos. Tradução e introdução Irineu Bicudo.Ed. Unesp, 2009.p98

6 Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/af18/produto/pdias/trabalho1.htm>.Acesso em 30 setembro 2016.

1.5. O quinto postulado de Euclides

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), colega de Euler e Lagrange na Academia das Ciências em Berlim, foi o primeiro a publicar a demonstração de que π é irracional. Fez importantes trabalhos sobre a teoria das paralelas, tendo escrito um livro com esse título, onde deduziu muitas propriedades da Geometria Não Euclidiana, embora não aceitasse claramente sua existência. Lambert tentou provar o quinto postulado por meio de um argumento indireto[7]. Ele considerou um quadrilátero com três ângulos retos (figura 1), agora chamado de quadrilátero de Lambert (COUTINHO, 2001). Lambert, então, supôs três hipóteses para o quarto ângulo:

1. Hipótese do ângulo reto, o que equivale ao quinto postulado de Euclides;
2. Hipótese do ângulo obtuso;
3. Hipótese do ângulo agudo.

A primeira hipótese conduz à geometria euclidiana. Lambert rejeitou a hipótese do ângulo obtuso. Fez isso mostrando que sob essa hipótese duas perpendiculares à mesma reta se intersectam. Isso na verdade não resulta nenhuma contradição. Se a hipótese do ângulo obtuso fosse válida, então as propriedades das figuras seriam como se traçadas sobre uma esfera, ou seja, curvadas. As linhas retas seriam como círculos máximos. No entanto, como os círculos máximos se encontram em mais de um ponto, não possuem as propriedades das linhas retas, e isso permite refutar a hipótese do ângulo obtuso. Todavia, também não chegou à contradição ao tentar demonstrar a hipótese do ângulo agudo. Assim, Lambert obtém que sendo válidas as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo, o defeito (excesso ou a falta sobre 180º na soma de seus ângulos na trigonometria esférica) na soma dos ângulos de um triângulo seria proporcional à área deste triângulo. Essa diferença é conhecida como diferença do triângulo, e tem um papel muito importante na Geometria Hiperbólica e seu valor é igual a zero na Geometria Euclidiana, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. No caso do quadrilátero com o quarto ângulo agudo (terceira hipótese), Lambert conclui que quanto mais agudo fosse o ângulo, maior seria o quadrilátero. Essa análise levou Lambert a descobrir que a soma dos ângulos de um triângulo poderia ser inferior a dois ângulos retos.

[7] AMADO, Antônio Tadeu F. Elementos de Matemática 3. Santos: Ed. Universitária Leopoldianum, 2011

Para a hipótese do ângulo agudo, Lambert conclui que, se comparada à hipótese do ângulo obtuso, poderia ocorrer o caso de uma "esfera imaginária". Lambert teria dito "Estou quase inclinado a concluir que a terceira hipótese surge com uma superfície esférica imaginária".

Figura 1 - Quadrilátero de Lambert

1.6. A criação da Geometria Não- Euclidiana (espaçoes curvos)

A Geometria Euclidiana funcionava muito bem em superfícies planas o que era de se esperar. Afinal de contas, a geometria Euclidiana é uma geometria aplicada ao plano. Então, como se podem definir situações geométricas sobre uma superfície curva? Na geometria Euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo dá sempre o valor de 180º. Ao se traçar o mesmo triângulo sobre uma superfície curva isso já não é mais verdade. Era preciso então estabelecer uma nova geometria que pudesse resolver essas questões.

Quando é necessário considerar grandes distâncias sobre a superfície da Terra a geometria de Euclides também não funciona. Para desenvolver uma geometria de espaços curvos foi necessária a colaboração de pesquisadores que marcaram a história da matemática. Entre esses nomes estavam Gauss, Bolyai, Lobachevski e Riemann. [8]

---

[8] Observatório nacional, Geometria dos espaços curvos. On br. Disponível em < http://www.on.br/site_edu_dist_2006/pdf/modulo3/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf >. Acesso em 20 maio 2016.

1.7. Johann Gauss (1777 – 1855)

Johann Friederich Carl Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha e obteve brilhantismo em sua carreira. Homem de talento matemático impressionante, é universalmente considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos.

Gauss decidiu-se pela Matemática em 30 de março de 1796, quando se tornou o primeiro a construir um polígono regular de dezessete lados somente com o auxílio de régua e compasso. Doutorou-se em 1798, na Universidade de Helmstädt e sua tese foi a demonstração do "Teorema fundamental da Álgebra", provando que toda equação polinomial f (x) = 0 tem pelo menos uma raiz real ou imaginária e para isso baseou-se em considerações geométricas.

Deve-se a Gauss a representação gráfica dos números complexos pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano. Seu livro "Disquisitiones Arithmeticae" (Pesquisas Aritméticas) é o principal responsável pelo desenvolvimento e notações da Teoria dos Números, nele apresentando a relação de congruência, que é uma relação de equivalência. Ainda nesta obra Gauss apresenta a lei da reciprocidade quadrática, demonstrando o teorema, segundo o qual, todo inteiro positivo pode ser representado de uma só maneira como produto de primos. [9]

Gauss deu contribuições notáveis à astronomia, à geodésia e à eletricidade. Em 1801 calculou, mediante um novo procedimento e com poucos dados, a órbita do planetoide Ceres, recentemente descoberto, e no ano seguinte a do planetoide Palas. Em 1807 se tornou professor de matemática e diretor do observatório astronômico de Göttingen, posto que ocupou até sua morte. Em 1821 realizou uma triangulação de Hanover, calculou a medida de um arco meridiano e inventou o heliógrafo. Em 1833, junto com seu colega Wilhelm Weber, descobriu o telégrafo eletromagnético.

---

9 EVES, Howard. Introdução à história da matemática. São Paulo: Unicamp, 2004.p.175

Na Geometria, Gauss verificou a independência do postulado das paralelas de Euclides e foi o primeiro a alcançar conclusões penetrantes relativas às Geometrias Não-Euclidianas, mas como nunca publicou nada sobre essa matéria, a honra da descoberta dessa particular Geometria coube a outros matemáticos. A razão pela qual Gauss manteve em segredo suas descobertas, foi o fato de que a filosofia de Kant dominava a Alemanha da época e seus dogmas eram que as ideias da Geometria Euclidiana eram as únicas possíveis. Gauss sabia que outras perspectivas de geometria eram possíveis, mas para não entrar em conflito com os filósofos da época resolveu manter-se em silêncio.

1.8. János Bolyai (1802 – 1860)

Desde muito cedo, o húngaro János dotado de um espírito extremamente observador revelou capacidades intelectuais superiores. Aos nove anos, quando o pai decidiu mandá-lo para a escola, já ele tinha adquirido conhecimentos profundos de assuntos vários com primazia para as ciências exatas. Por exemplo, aos quatro anos podia distinguir certas figuras geométricas, sabia a função seno, identificava as constelações conhecidas. Aos cinco anos tinha aprendido a ler, praticamente por si próprio e estava bem acima da média na aprendizagem da língua e da música. Aos sete anos começou a tocar violino e fez tão bons progressos que depressa tocava difíceis peças para concertos.

Farkas Bolyai, pai de János e professor provinciano de matemática, tinha os mais talentosos dos seus discípulos a ensinar ao seu filho assuntos diversos, mas reservou para si próprio o ensino da matemática, numa carta escrita a Gauss, manifestou-lhe o desejo de que o seu filho fosse um matemático. Entretanto János decidiu-se por uma carreira em engenharia militar na Academia de Engenharia de Viena. Em agosto de 1818, depois de receber ajuda financeira de algumas pessoas, entrou naquela Academia, no 4º ano, o mais avançado possível pelo regulamento. No ano seguinte já era o 2º melhor aluno na sua classe, tendo as mais elevadas notas em tudo exceto em desenho e a caligrafia.

Nesse ano o Arquiduque Johann von Hausburg, Comandante-Chefe da Academia e Superintendente dos Engenheiros, durante uma visita, teve conhecimento do talento matemático de János Bolyai, e esmerou-se em enviar uma mensagem para Farkas Bolyai exprimindo o seu reconhecimento e a sua convicção de que János podia esperar rápido avanço na carreira militar se continuasse a trabalhar diligentemente.

Enquanto permaneceu em Viena, János Bolyai revelou interesse especial para certos campos da Matemática, em particular pelo 5º postulado de Euclides. Aliás, o seu interesse tinha sido despertado pelo seu pai que, desinteressadamente lhe passou os seus esplêndidos conhecimentos e deixou as bases dos feitos maravilhosos descritos no “Tentamen”. Isto foi um dos méritos incontestáveis de Farkas Bolyai apesar de não ter conseguido ver o que o filho viria a criar: a Geometria Não- Euclidiana.

Durante os seus anos na Academia János aprofundou mais o seu conhecimento sobre o assunto, a sua ambição era aumentada pelo interesse inspirador do seu professor de matemática, Johan Walter von Eckwehr. O objetivo de János Bolyai, posto a si próprio, era provar o 5º postulado por um caminho indireto, ou seja, que o axioma do paralelismo de Euclides equivale a assumir que a circunferência de raio infinito é uma reta.

Em setembro de 1823, János Bolyai foi comissariado para Subtenente, e enviado para a Fortificação de Temesvár. Em três de novembro escrevia, numa carta a seu pai que "descobria a ideia básica de um novo sistema geométrico", que "criara um novo, um outro mundo a partir do nada"[10]. A sua hipótese apoiava-se numa definição de paralelismo mais geral do que na Geometria de Euclides, as suas investigações foram recordadas num trabalho “Apendix” (Apêndice ao Tentamen) extremamente estruturado, consistindo em 43 seções.

1.9. Nicolai Lobachevski (1792 – 1856)

Nicolai Ivanovich Lobachevsky nasceu na Rússia e passou a maior parte de sua vida na Universidade de Kazan, primeiro como aluno, depois como professor de matemática e finalmente como reitor. Seu primeiro artigo sobre Geometria não-Euclidiana foi publicado em 1829 e 1830 no Kazan Bulletin, dois ou três anos antes de o trabalho de Bolyai aparecer impresso.

[10] Op.cit, p.542

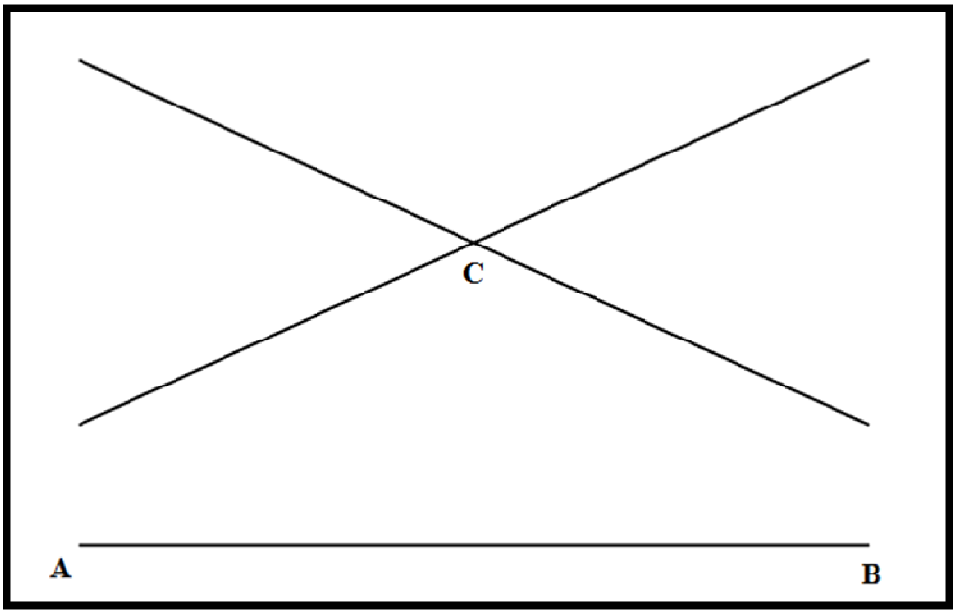
Essa memória mereceu muito pouca atenção na Rússia e, por ter sido escrita em russo, praticamente nenhuma em outros lugares. Lobachevski deu continuidade a seus esforços iniciais com outras exposições. Por exemplo, na expectativa de alcançar um grupo mais amplo de leitores, ele publicou em 1840, um pequeno livro escrito em alemão intitulado “Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien” (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas), e mais tarde, em 1855, um ano antes de sua morte e algum tempo depois de ficar cego, uma abordagem final, mais condensada, em francês, com o título de “Pangéométrie” (Pangeometria).

As informações sobre novas descobertas disseminaram-se tão lentamente naqueles tempos que Gauss com certeza jamais ouvira falar do trabalho de Lobachevski antes do aparecimento do texto em alemão citado e não teve conhecimento de János Bolyai antes de 1848. Embora Lobachevski não tivesse vivido para ver concedido a seu trabalho um reconhecimento amplo, hoje a Geometria Não-Euclidiana desenvolvida por ele costuma ser chamada de Geometria de Lobachevski.

Esta nova geometria construída por Lobachevski é totalmente fundamentada na hipótese contrária à de Euclides, de que "Por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta no plano que não encontra AB" (figura 2).[11]

[11] COUTINHO, Lázaro. Convite às geometrias não euclidianas. São Paulo: Interciência, 2001. p.40

Figura 2 - Postulado das paralelas de Lobachevski



Parecia ela tão contraditória ao senso comum que o próprio Lobachevsky a chamou de Geometria Imaginária, revolucionando o assunto e mostrando que a Geometria Euclidiana não era a verdade absoluta suposta até então, e tornando necessário fazer-se uma revisão completa nos conceitos fundamentais da Matemática.

Em 1838 publicou “Novos Fundamentos da Geometria” em russo. Em 1842 publicou “Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas”, em alemão. E finalmente em 1855 lançou seu último livro ”Pangeometria” em francês e russo. Em 1842 foi eleito para a Sociedade Científica de Gottingen, porém suas descobertas só foram reconhecidas muito lentamente. Os grandes matemáticos da época, como Gauss, tomando conhecimento de sua nova teoria a elogiavam, mas não tinham coragem de publicar comentários a respeito, com medo de serem ridicularizados.

1.10. Georg Riemann (1826 – 1866)

O passo seguinte no desenvolvimento da geometria não-Euclidiana foi feito pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann. Para obter uma posição de professor assistente na Universidade de Göttingen, a mesma onde Gauss era Diretor, Riemann tinha que fazer uma palestra que serviria como teste. Apresentou alguns tópicos para que fosse escolhido o seu assunto de palestra. Um desses estava voltado para os fundamentos da geometria e embora esse assunto fosse o menos preparado por Riemann, Gauss o escolheu querendo saber como um jovem matemático trataria tema tão difícil.

Riemann deu sua palestra sobre esse tema, que mais tarde foi publicada com o título de "Sobre as Hipóteses subjacentes aos fundamentos da Geometria", com sucesso absoluto. Gauss ficou impressionado pela abordagem feita por Riemann para a Geometria não-Euclidiana pelo fato de que ela era bem diferente daquelas apresentadas por seus antecessores.

Aparentemente Riemann não sabia nada sobre os trabalhos de Lobachevski e Bolyai e tinha somente uma vaga ideia do interesse de Gauss pelo assunto. O sucesso de Rieman se deve ao fato dele ter incorporado em seu estudo duas ideias extremamente férteis: o aparato matemático de Gauss para descrever a geometria de superfícies curvas bidimensionais e seu próprio novo conceito de variedade multidimensional, ou seja, objetos geométricos com múltiplas dimensões.

Uma superfície é uma variedade bidimensional e um espaço é uma variedade tridimensional. Como essa é a única diferença entre elas, todas as ideias e métodos usados para descrever superfícies bidimensionais podem ser agora diretamente aplicados a espaços curvos tridimensionais. Entre as noções usadas a mais importante é aquela de métrica, ou seja, a forma quadrática para as diferenças entre coordenadas que descreve o comprimento do intervalo entre dois pontos vizinhos em uma variedade curva.

Esta bem-sucedida integração de ideias permitiu que Riemann avançasse ao construir tanto casos particulares de espaços não-Euclidianos como uma teoria de espaços arbitrariamente curvos. Em primeiro lugar Riemann descobriu uma geometria esférica que era oposta à geometria hiperbólica de Lobachevski. Deste modo ele foi o primeiro a indicar a possibilidade de existir um espaço geométrico finito. A ideia logo se firmou e trouxe a questão de que o nosso espaço físico era finito. Além disso, Riemann construiu geometrias muito mais gerais do que a de Euclides e sua matemática foi de grande importância para a evolução dos estudos sobre eletricidade e magnetismo e para a demonstração da Teoria da Relatividade de Einstein.

1.11. Necessidade da Geometria Não-Euclidiana

Que tipo de argumento científico poderia ter chamado a atenção de matemáticos tão ilustres como Nikolai Lobachevski, János Bolyai, Carl Gauss e Bernhard Riemann para que dedicassem parte de suas vidas a estabelecer uma geometria que ia contra o senso comum, a vida diária? Basicamente o que esses pesquisadores investigavam era o que ocorreria se eles desprezassem o quinto postulado de Euclides e considerassem exatamente o oposto, ou seja, que através de um ponto C não situado sobre uma dada linha reta AB, fosse possível traçar não uma, mas duas, e consequentemente um número infinito de linhas paralelas a AB.[12]

A tarefa agora passava a ser construir uma geometria baseada nesse novo axioma. A ideia subjacente a isso era que se o quinto postulado era realmente um teorema, então, mais cedo ou mais tarde, a nova geometria conteria contradições lógicas, o que significaria que a suposição inicial estava errada e o quinto postulado estaria então provado.

Só que, após construir essa nova geometria os matemáticos não encontraram contradições. Mais ainda, eles descobriram que tinham uma nova e elegante geometria com várias características interessantes e únicas. Por exemplo, nessa nova geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo era menor do que 180º e de fato dependia das dimensões lineares do triângulo.[13]

Essa nova geometria era bastante particular. Em uma região bastante pequena do espaço essa nova geometria era praticamente euclidiana, mas em grandes regiões as duas eram essencialmente diferentes. Tanto Lobachevski como Gauss não se limitaram aos aspectos matemáticos dessa importante descoberta. Eles imediatamente começaram a pensar como essa nova geometria poderia estar relacionada com o mundo físico. Eles queriam saber qual das duas geometrias, a Euclidiana ou a não-Euclidiana recém descoberta, descrevia realmente o espaço, tendo em vista a curvatura do planeta.

Tentando responder a essa questão Gauss tentou medir a soma dos ângulos de um triângulo formado por três montanhas. Lobachevski tentou fazer a mesma medida só que usando um triângulo bem maior formado por duas posições da Terra em sua órbita e uma

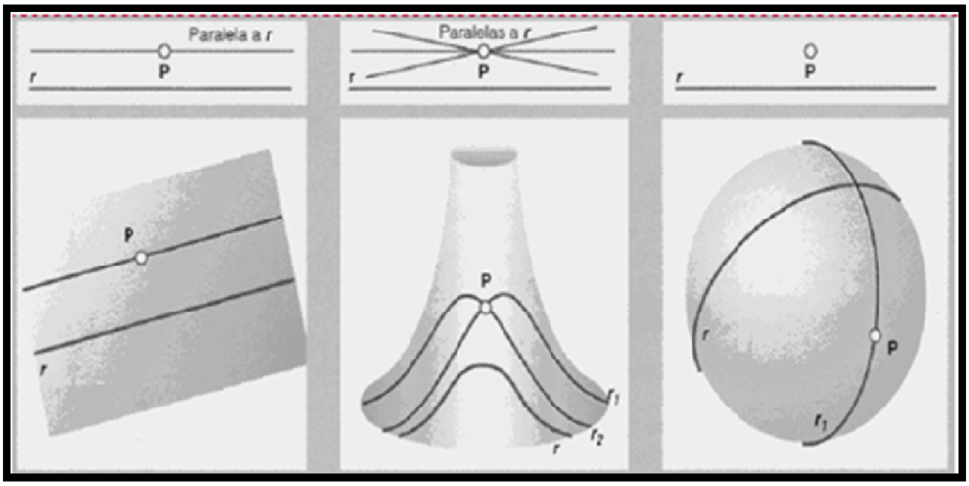
12 Id, ibid, p.63
13 Id, ibid, p.43

estrela distante. Infelizmente nenhum dos dois foi bem-sucedido, pois, naquela época, eles não dispunham de equipamentos capazes de fornecer a precisão necessária para essas medidas.

1.12. As Geometrias Hiperbólicas e Elípticas

Ao contrário da geometria Euclidiana, as geometrias agora apresentadas são definidas sobre a superfície de uma esfera ou de um hiperboloide (algo parecido com a sela de um cavalo), sendo convencionado que uma superfície esférica tem uma curvatura positiva, enquanto que a superfície de um hiperboloide tem curvatura negativa. (Figura 3)

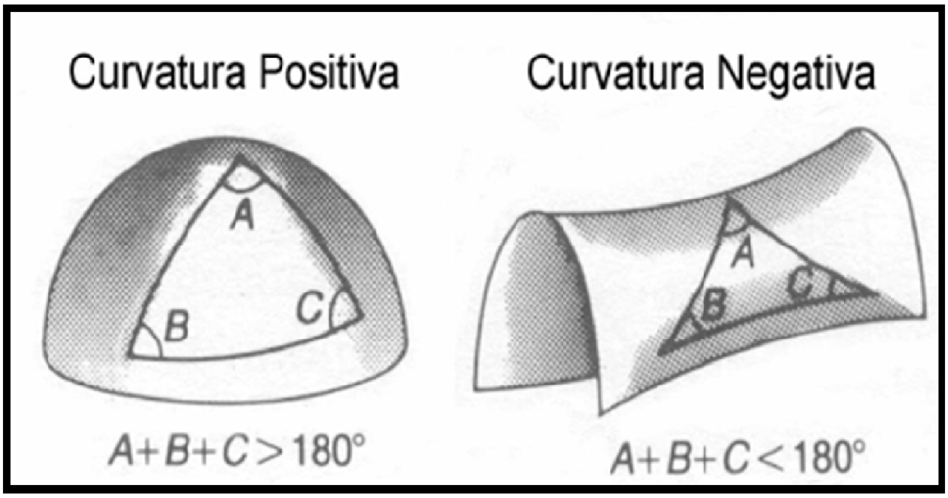
Figura 3 - Retas paralelas nas superfícies plana, hiperboloide e esférica.



Em uma superfície com curvatura positiva a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado nessa superfície é maior que 180º. No caso de uma superfície com curvatura negativa a soma desses ângulos internos é menor que 180º.[14] (Figura 4)

[14] Observatório nacional, Geometria dos espaços curvos. On br. Disponível em < http://www.on.br/site_edu_dist_2006/pdf/modulo3/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf >. Acesso em 20 maio 2016.

Figura 4 - Superfícies esféricas e hiperboloide



1.13. A Geometria da Relatividade

O conceito de espaço na Física

Na física, em geral, pode-se qualificar o espaço como contínuo, homogêneo, físico ou infinito. Em certos campos bem determinados, essa concepção física do espaço é baseada na Geometria Euclidiana. Por exemplo para fazer o mapa de uma cidade pode-se usar uma geometria plana, mas para um mapa de um continente, deve-se usar uma geometria esférica. A ideia de espaço aparece muito cedo na filosofia grega. Segundo Aristóteles, os pitagóricos atribuíam aos números uma espécie de espacialidade. O conceito de espaço foi enriquecido e tornado mais completo por Galileu e Newton, à medida que o espaço tem de ser instituído como causa independente do comportamento inercial dos corpos e a partir daí, à lei clássica do movimento.

O final do século XIX registrou os maiores avanços com relação à teoria do espaço, com o advento das Geometrias Não-Euclidianas. Um dos fatos importantes para a concretização das novas ideias de espaço é colocado como conceito de infinito em geometria, pela abordagem de Riemann. O espaço representado por uma superfície esférica é finito.

A relatividade restrita

A física parecia formar um sistema consistente e completo. Mas já no século XIX, essa física clássica começou a apresentar inconsistência. A Teoria da Relatividade resolveu esse problema. Mas qual era essa inconsistência? Primeiro os fenômenos eletromagnéticos, que ocorrem na velocidade da luz, pareciam não obedecer à lei da adição de velocidade. Outro ponto é que na mecânica de Newton todos os referenciais inerciais são equivalentes. A Teoria da Relatividade de Albert Einstein é baseada nos seguintes postulados:

As leis da física são as mesmas para os observadores situados em qualquer referencial inercial;

A velocidade da luz no vácuo tem sempre o mesmo valor, em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.

Einstein foi o primeiro a compreender que a fórmula das transformações de Galileu não podia estar completamente correta e que teria de ser substituída. A Teoria da Relatividade Restrita é contrária à Geometria Euclidiana, onde o tempo é uma entidade absoluta. É a chamada dilatação do tempo.

Geometria de Minkowski

A percepção de que a relatividade espacial poderia ser tratada como uma geometria do espaço-tempo foi desenvolvida por Hermann Minkowski (1864-1909) [15]que apresentou uma formulação baseada em quadrivetores. Nessa geometria o espaço e o tempo são entidades indissociáveis e passam a formar um contínuo espaço-tempo. De acordo com Einstein, o mundo dos eventos físicos na geometria de Minkowski é naturalmente de quatro dimensões no sentido de espaço temporal, configurando eventos que são descritos por quatro números, as três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal: (x, y, z, t).

---

15 MINKOWSKI, Geometria e Relatividade, disponível em http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/pdf/artigos/minkowski.pdf >. Acesso em 20 maio 2016.

Einstein publicou o seu artigo sobre Teoria da Relatividade em 1905, mas este despertou, de início, pouco interesse por parte dos físicos. A Relatividade só começou a ser conhecida num âmbito mais vasto em 1908, quando Minkowski, que fora professor de Einstein no Instituto Politécnico de Zurique, proferiu a sua famosa palestra "Espaço e Tempo" em 28 de setembro de 1908, numa conferência de cientistas alemães de diversas áreas. Minkowski era professor de Matemática na Universidade de Göttingen desde 1902 e também se dedicou à Teoria da Relatividade.

À primeira vista, o fato de Minkowski ter se dedicado, no fim da sua carreira, à Teoria da Relatividade parecia ser bastante surpreendente. Afinal a maioria de seus trabalhos científicos pulicados antes dessa inflexão eram sobre Teoria dos Números e estes foram relativos a formas quadráticas e à Geometria dos Números, criada por ele. A Geometria dos Números não teve relevância para a Teoria da Relatividade, mas a sua criação lhe proporcionou a capacidade de introduzir conceitos geométricos em áreas onde, até aí, estes pareciam não ser aplicáveis. Outro aspecto importante no trabalho de Minkowski reside no uso de geometria não-euclidiana. Tendo declarado numa palestra em 1907 que o Mundo no Espaço e no Tempo é, em certo sentido, uma variedade não-euclidiana de dimensão 4. Outros matemáticos exploraram essa abordagem que, implicitamente, Minkowski estava aplicando geometria não- euclidiana à Física.

A Relatividade Geral

A relatividade geral envolve uma abordagem matemática bem mais complexa. A teoria da relatividade de Einstein mudou as bases da física alterando conceitos tão fundamentais com o espaço e tempo. Essa nova física só é possível quando se considera uma geometria não-euclidiana. Com a teoria da relatividade geral Einstein resolveu ao mesmo tempo o problema gravitacional e o de exprimir as leis dos fenômenos naturais mediante equações válidas para qualquer sistema de referência. Nessa nova teoria a gravitação deixa de ser uma força de ação instantânea à distância e se reduz à geometria do Universo. A partir das geometrias não-euclidianas, Einstein combina a métrica de Minkowski com a geometria curva de Riemann para obter seu espaço-tempo curvo.

A luz sofre atração gravitacional, não tem massa, mas ainda assim muda de caminho na presença do campo gravitacional. Na teoria geral da relatividade, a velocidade da luz não é mais uma constante absoluta, e a trajetória do raio luminoso não é uma reta, mas uma geodésica. A lei da gravitação de Newton é apenas uma aproximação, e a nova teoria a compreende como um caso particular. Nesse contexto deixa de valer a Geometria Euclidiana e passa a vigorar a Geometria Não-Euclidiana. A Teoria da Relatividade, restrita e geral, foi testada desde sua formulação teórica e tem se mantido nas suas previsões.

CAPÍTULO II

2. UM MODELO DE GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA – A GEOMETRIA ESFÉRICA

2.1. Principais elementos da geometria esférica[16]

Para o estudo da Geometria Esférica, que é um modelo de Geometria Não-Euclidiana, faz-se necessária a definição de alguns de seus principais elementos:

a) Superfície esférica (plano esférico): a superfície esférica é o "plano" na geometria esférica. Isso faz sentido, pois para determinar cada ponto da superfície esférica, são necessárias apenas duas coordenadas (latitude e longitude, por exemplo). Assim, a superfície esférica tem dimensão 2 como o plano comum da geometria euclidiana;

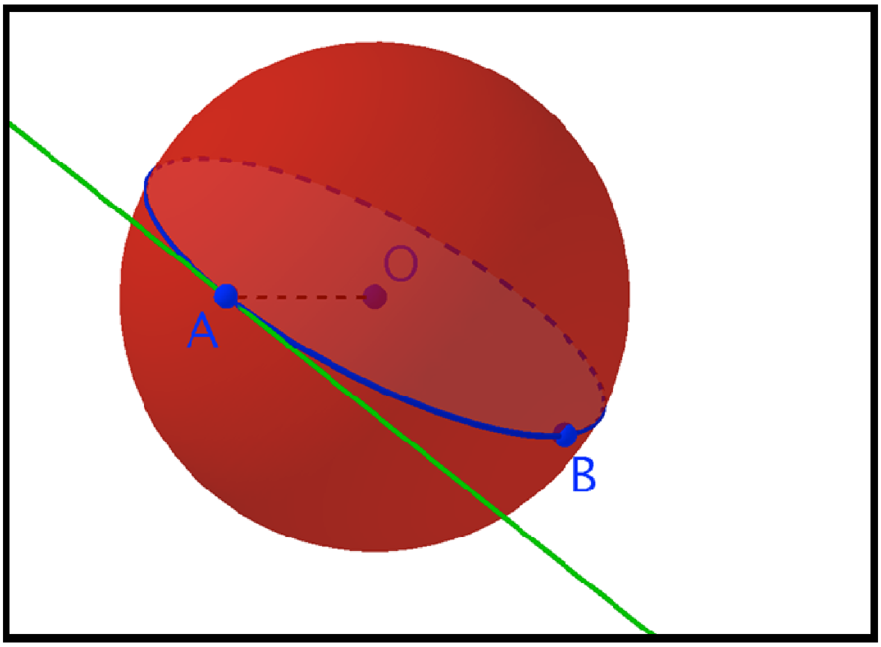
b) Reta ou círculo máximo: na geometria esférica, uma "reta" é um círculo máximo da esfera. Dessa forma, nessa geometria, uma reta fica também determinada por dois pontos. De fato, dados dois pontos A e B da superfície esférica o plano euclidiano que contém o centro O da esfera e os pontos A e B intersecta a esfera segundo um círculo máximo passando por eles. O arco AB é, nessa geometria um "segmento de reta" e seu comprimento é a menor distância entre A e B, da mesma forma que na geometria euclidiana.

Na figura 5 observa-se uma reta que passa nos pontos A e B da superfície esférica de centro O. No ponto A aparece uma reta euclidiana (verde) que está contida no plano OAB e é tangente à esfera no ponto A. Chamaremos essa reta por t_{AB}.

Essa reta euclidiana é necessária para definir ângulos na superfície esférica.

[16] SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. Noções de Geometrias Não Euclidianas

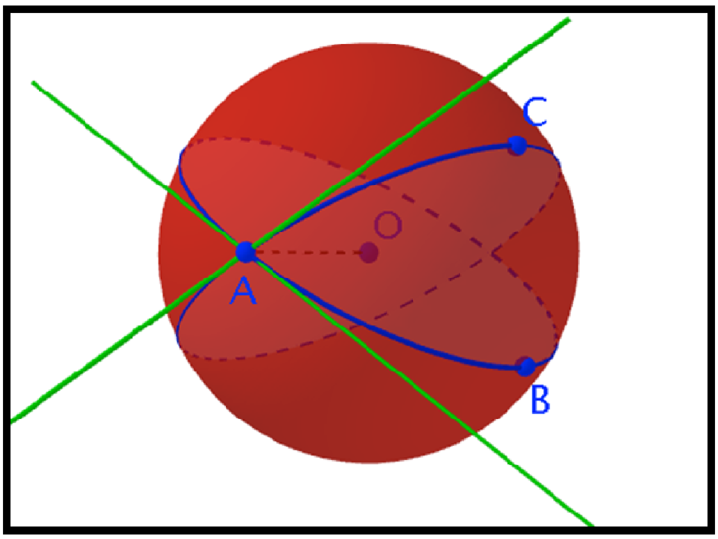
Figura 5 – Reta ou círculo máximo



c) Ângulo entre retas: dados os pontos A, B e C na superfície esférica, o ângulo BAC é, por definição, o ângulo entre as retas euclidianas t_{AB} e t_{AC}.

Na figura 6 o ângulo entre as duas retas verdes é o ângulo BAC entre os segmentos AB e AC da superfície esférica;

Figura 6 – Ângulo entre duas retas



d) Como as retas da geometria esférica são círculos máximos da esfera fica claro que não existem retas paralelas nessa geometria. De fato, dois círculos máximos possuem sempre 2 pontos em comum.

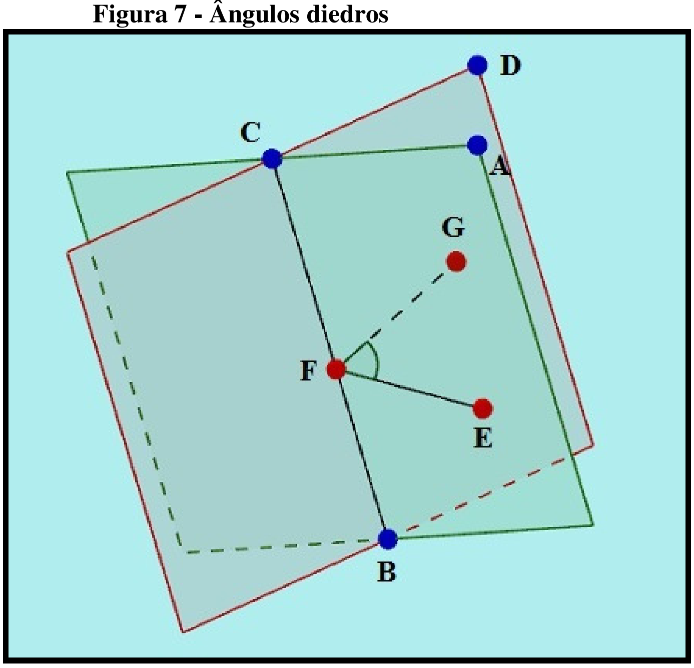
Assim, na geometria esférica, duas retas distintas possuem sempre dois pontos de interseção.

e) Distância entre pontos: a reta é um círculo máximo e o segmento que une pontos A e B é um arco do círculo máximo, daí a distância na superfície esférica dos pontos A e B é a menor porção do círculo máximo que contém esses pontos;

2.2. Recordando alguns elementos da Geometria Euclidiana

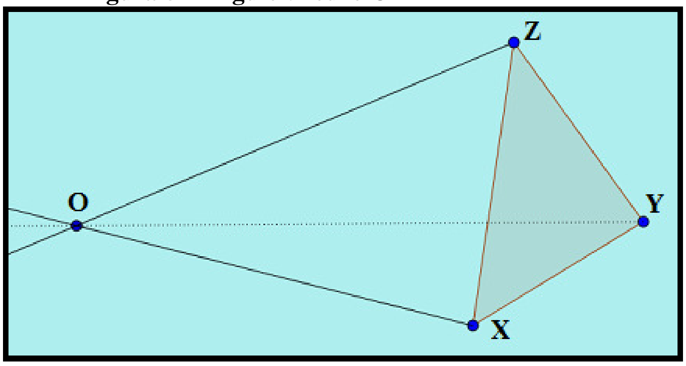
Ângulos diedros (figura 7): na Geometria Euclidiana duas retas que se interceptam determinam quatro ângulos planos. E dois planos que se interceptam determinam quatro ângulos diedros, onde pode-se destacar o diedro A-BC-D. Os planos ACB e DCB são chamados faces e a linha BC aresta do diedro. E, o ângulo plano formado por duas linhas situadas, cada uma, numa das faces do diedro, EF e GF, perpendiculares à aresta, chama-se ângulo plano do diedro.

Figura 7 - Ângulos diedros



Ângulos triedros (figura 8): quando três planos têm um, e apenas um, ponto comum, eles determinam oito ângulos triedros. Analisando o ângulo triedro O-XYZ), temos: o ponto comum O é chamado vértice e os planos OXY, OYZ e OZX, faces do triedro. As faces, consideradas aos pares, formam três ângulos diedros cujas arestas são OX, OY e OZ. Os ângulos planos $X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$ e $Z\hat{O}X$ são chamados ângulos das faces do triedro ou simplesmente faces.

Figura 8 - Ângulo triedro O-XYZ



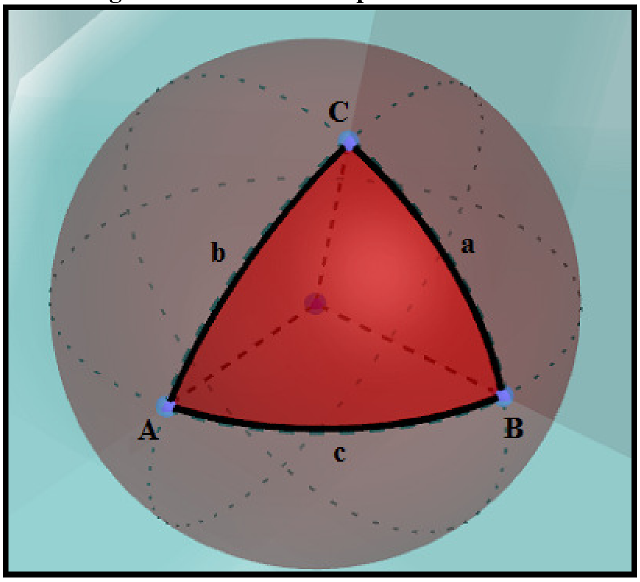
Vamos voltar agora à Geometria Esférica e estudar os triângulos esféricos..

2.3. Triângulos esféricos

O estudo dos triângulos esféricos é importante na Geometria Esférica e algumas relações são importantes:

Definição de triângulo esférico (figura 9): Sejam três pontos distintos A, B e C sobre uma esfera e não pertencentes ao mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que une esses pontos dois a dois é denominado triângulo esférico. Os lados BC, AC e AB do triângulo esférico são arcos de círculos máximos e escritos, respectivamente, por a, b e c, e medidos pelos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera (podendo ser em graus ou radianos), sendo definido pelo ângulo do setor circular determinado por dois vértices e o centro da esfera. E, os ângulos do triângulo ABC são os ângulos esféricos A, B e C, que podem ser reescritos como $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$. Além disso, os triângulos esféricos possuem três alturas, três bissetrizes internas e três medianas. Com a mesma definição de triângulos planos.

Figura 9 - Triângulo esférico formada pelos arcos de círculos máximos



2.4. Propriedades dos triângulos esféricos

1ª – A soma dos ângulos de duas faces quaisquer de um ângulo triedro é maior do que o ângulo da terceira face;

2ª - A soma dos três lados (arcos esféricos) de um triângulo esférico é maior que 0° e menor que 360°, ou seja, $0° < a + b + c < 360°$;

3ª - A área de um triângulo esférico é dada pela fórmula:

$S = R^2\left[\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}\right) - \pi\right] = R^2 \cdot E$, sendo E o excesso esférico que representa o valor que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico excede a 180°;

4ª - A soma dos três ângulos internos de um triângulo esférico é maior que dois ângulos retos e menor que seis ângulos retos, ou seja, $\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$;

5ª - Dois lados de um triângulo esférico são iguais se, e somente se, os ângulos opostos também são iguais: a = b $\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$;

6ª - Ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa;

7ª - A soma de dois ângulos é menor que o terceiro acrescido de 180° e a diferença é menor que o suplemento do terceiro:

$\hat{A} + \hat{B} < \hat{C} + 180° \; e \; \hat{A} - \hat{B} < 180° - \hat{C}$

Demonstração das propriedades:

Propriedade 1 (figura10): Caso os três ângulos das faces sejam iguais, o teorema é verdadeiro. Considere-se agora um ângulo triedro O-XYZ no qual a face $\widehat{XOY}$ é maior que as outras duas faces, $\widehat{YOZ} \, e \, \widehat{XOZ}$. Sobre OX tome-se um ponto A qualquer; sobre OY um ponto B e sobre AB um ponto D de modo que $\widehat{AOD} = \widehat{XOZ}$. Sobre OZ tome-se C de modo que $OC = OD$. Unindo-se A e B a C no qual $AC + CB > AD + DB$. Uma vez que os triângulos AOC e AOD são congruentes (caso LAL), $AD = AC \Rightarrow AC + CB > AC + DB \; e \; CB > DB$. Assim os lados OD e OB do triângulo ODB são iguais, respectivamente, aos lados OC e OB do triângulo OCB, $\widehat{COB} > \widehat{DOB}$. Onde tem-se, $\widehat{AOC} + \widehat{COB} > \widehat{AOD} + \widehat{DOB} = \widehat{AOB}$.

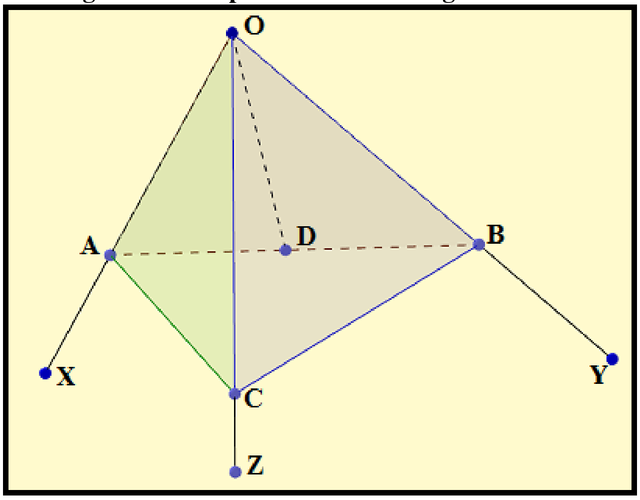
Propriedade 2 (figura 10): Nas retas do ângulo triedro O-XYZ tome-se os pontos A, B e C. Nota-se que há três triângulos com vértice O e que a soma dos ângulos desses triângulos é 3.180=540°, isto é, $(\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA}) + (\widehat{OAB} + \widehat{OAC}) + (\widehat{OBA} + \widehat{OBC}) + (\widehat{OCA} + \widehat{OCB}) = 540°$, pela propriedade 1 segue que: OD

$\widehat{OAB} + \widehat{OAC} > \widehat{BAC}$, $\widehat{OBA} + \widehat{OBC} > \widehat{ABC}$ e $\widehat{OCA} + \widehat{OCB} > \widehat{ACB}$, com isso:

$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} + \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} < 540^{\circ}$

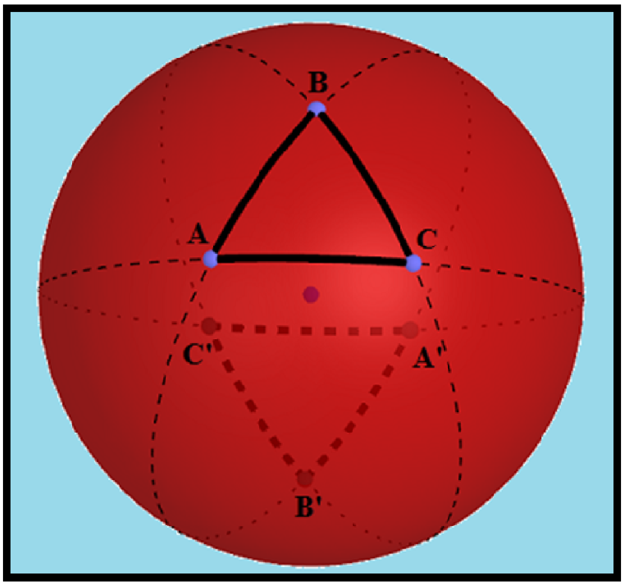
ou $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} < 540^{\circ} - 180 = 360^{\circ}$.

Figura 10 - Propriedades dos triângulos esféricos



Propriedade 3 (figura 11): De fato, sabe-se que um triângulo esférico é formado por três pontos ligados por arcos de círculos máximos. Se estes arcos forem prolongados, forma-se outro triângulo esférico que pode ser obtido por uma reflexão do original pelo centro da esfera. Por simetria os dois triângulos têm áreas iguais.

Figura 11 -Triângulo esférico obtido por uma reflexão

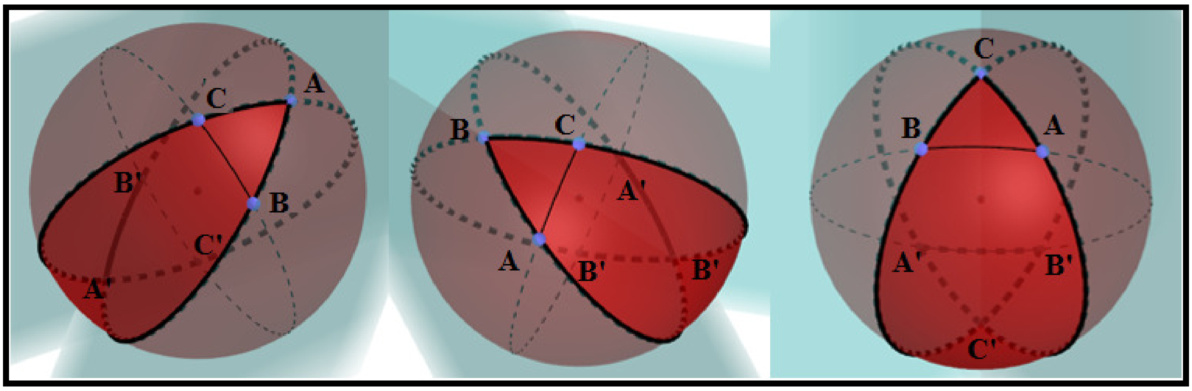


Representando-se a área da esfera como uma soma de diedros convenientemente escolhidos, em cada vértice do triângulo, obtemos dois diedros (figura 12).

Representando a área da esfera como a soma das áreas desses diedros obtém-se:

$$S_{esfera} = 2S_{AA'} + 2S_{BB'} + 2S_{CC''} - 4S_{ABC} \quad (1)$$

Figura 12 - Soma de diedros em uma superfície esférica



Nota-se que a área da superfície esférica delimitada pelo diedro é proporcional ao ângulo diedro. Como a área da esfera é $4\pi R^2 = 2.(2\pi).R^2$, analogamente, obtém-se que a superfície de um diedro com ângulo α é $2\alpha R^2$. Portanto de (1) conclui-se que:

$$4\pi R^2 = 2R^2.(2\hat{A} + 2\hat{B} + 2\hat{C}) - 4S_{ABC}\,.$$

Logo $S_{ABC} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2$.

Propriedade 4: A área mínima de um triângulo esférico estabelece-se quando esta área tende a zero. Considerando essa área como sendo zero, tem-se $S_{ABC} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2 = 0$, com R$\neq 0$ e, portanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$.

Logo, para qualquer $R \neq 0$ temos: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$.

A área máxima de um triângulo esférico tende a uma semi-esfera (área da semi-esfera $2\pi R^2$).

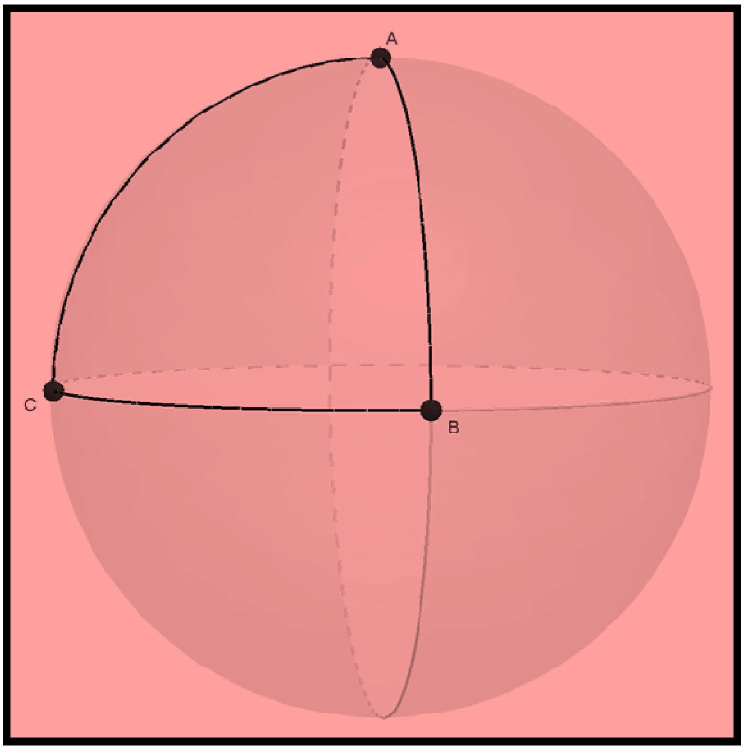
Considerando que:

$S_{ABC} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2 = 2\pi R^2 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 2\pi$, ou seja, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 3\pi$.

As demais propriedades 5, 6 e 7 possuem deduções intuitivamente claras e suas demonstrações serão omitidas.

Voltando para o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico na propriedade 4, pode-se notar que o triângulo PAB (figura 13) tem BC sobre o Equador, AB sobre o Meridiano de Greenhwich e AC sobre o meridiano 90°, P situado no pólo Norte. Como os meridianos são perpendiculares ao Equador, os ângulos B e C são retos. Além disso os meridianos formam um ângulo de 90° no pólo Norte. Esse triângulo é conhecido como o trirretângulo e ocupa a oitava parte da esfera. Logo, pode-se concluir que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90° + 90° + 90° = 270°$.

Figura 13 - Triângulo trirretângulo



Quanto ao número de ângulos retos, os triângulos esféricos podem ter a seguinte classificação: retângulo (um ângulo reto); birretângulo (dois ângulos retos); trirretângulo (os três ângulos retos).

Quanto aos lados (arcos esféricos): retilátero (um lado medindo 90°); birretilátero (dois lados medindo 90°); trirretilátero (cada um dos lados medindo 90°).

Observa-se que se um triângulo esférico é trirretângulo, então é também trirretilátero e ocupa exatamente a oitava parte da superfície esférica. Uma das características da Geometria Esférica que mais diferencia da Geometria de Euclides, é o fato de não existir a noção de semelhança, ou seja, não podemos num plano esférico, desenhar duas figuras que tenham a mesma proporção. Neste caso, não podemos encontrar um triângulo esférico que seja maior do que outro, e que tenha os mesmos ângulos. Desta forma, a Geometria Esférica não admite a semelhança entre triângulos. Temos apenas congruência entre triângulos. Isto acontece pois a área de um triângulo esférico depende apenas da soma dos seus ângulos internos. Na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área. Logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

2.5. Relações trigonométricas nos triângulos esféricos[17]

Há várias relações trigonométricas para triângulos esféricos, sendo as principais a lei dos senos (equivalente à lei dos senos da trigonometria plana) e a lei dos cossenos.

Em um triângulo esférico, um ângulo interno é um ângulo entre dois segmentos consecutivos da esfera e, portanto, já foi definido anteriormente. Assim, senos dos ângulos internos de um triângulo estão definidos.

Os "lados" de um triângulo esférico são arcos de círculo. Dessa forma, podemos falar também em "senos dos lados de um triângulo". Nesse contexto, o seno de um lado é o seno do arco de círculo, ou seja, o seno do ângulo central correspondente.

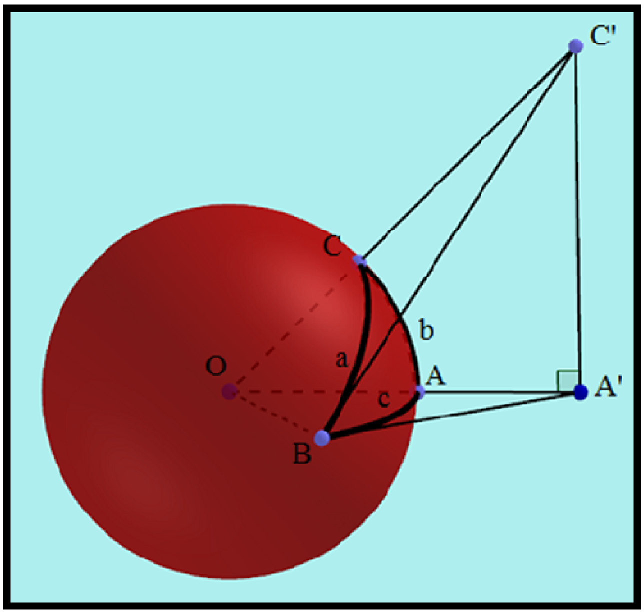
Lei dos senos:

Na figura 14 temos um triângulo esférico ABC de uma esfera de centro O, sendo que o ângulo A é reto. Por B traça-se uma reta tangente ao arco AB que encontra o prolongamento do raio OA em A'. Também por B traça-se outra reta tangente que encontra o prolongamento do raio OC em C', então, liga-se A' e C'.

Desde que o raio OB é perpendicular às tangentes BA' e BC', segue-se que o plano A'BC' é perpendicular a cada plano que passa por OB e, portanto, ao plano AOB. O plano AOC é perpendicular ao plano AOB, pois A é reto. A reta A'C' é perpendicular ao plano AOB, pois é a interseção dos planos AOC e A'BC'. Logo os ângulos A'ÔC' e BÂC' são retos.

Figura 14 -Triângulo esférico ABC

[17] Op.Cit.



Da geometria plana podemos estabelecer algumas relações:

$$\frac{OB}{OC'}=\frac{OA'}{OC'}.\frac{OB}{OA'}\Rightarrow \cos a=\cos b.\cos c \qquad (1)$$

$$\frac{A'C'}{BC'}=\frac{A'C'}{OC'}.\frac{OC'}{BC'}\Rightarrow \sin B=\sin b.\frac{1}{\sin a}\Rightarrow \sin b=\sin a.\sin B \qquad (2)$$

Por analogia,

$$\sin c = \sin a.\sin C \qquad (3)$$

$$\frac{A'B}{BC'}=\frac{A'B}{OB}.\frac{OB}{BC'}\Rightarrow \tan b=\cos B.\tan a \qquad (4)$$

$$\frac{A'C'}{A'B}=\frac{A'C'}{OA'}.\frac{OA'}{A'B}\Rightarrow \tan a = \tan B.\sin c \qquad (5)$$

Analogamente,

$$\tan b = \tan B.\sin c \qquad (6)$$

E também

$$\tan c = \tan C.\sin b \qquad (7)$$

Multiplicando (6) e (7) temos,

$$\tan b.\tan c = \tan B.\tan C.\sin c.\sin b \Rightarrow \tan B.\tan C = \frac{1}{\cos b.\cos c}$$

De (1), tem-se:

$\cos a = \cot B.\cot C$ (8)

Multiplicando (3) e (4) resulta:

$\tan c.\sin a.\sin C = \cos B.\tan a.\sin c$

$$\cos B = \frac{\tan c.\sin a.\sin C}{\tan a.\sin c} = \frac{\sin a.\sin c.\cos a.\sin C}{\sin a.\sin c.\cos c} = \frac{\cos a.\sin C}{\cos c}$$

Pela fórmula (1)

$\cos B = \sin C.\cos b$ (9)

Multiplicando (5) e (8) resulta:

$\cos C = \cos c.\sin B$ (10)

Teorema dos senos:

Em todo triângulo esférico, a razão entre o seno de um lado (arco esférico) e o seno de seu ângulo oposto é a mesma para os três lados e os respectivos ângulos opostos. Assim:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

As figuras 15 e 16 mostram os dois casos de triângulos esféricos quaisquer a considerar, onde são traçadas as alturas partindo do vértice C que caem sobre a base ou sobre seu prolongamento.

Figura 15 - Triângulos esféricos partindo do vértice C

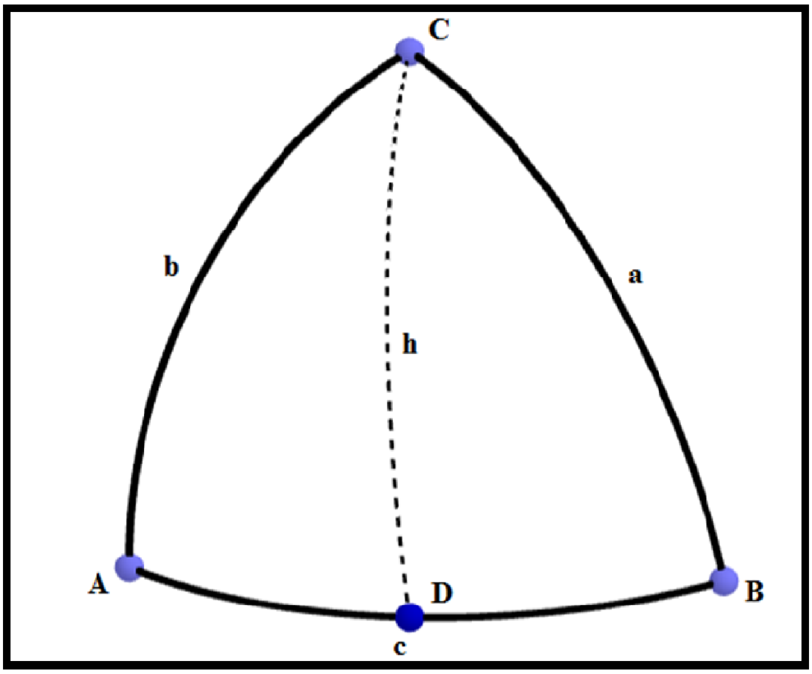
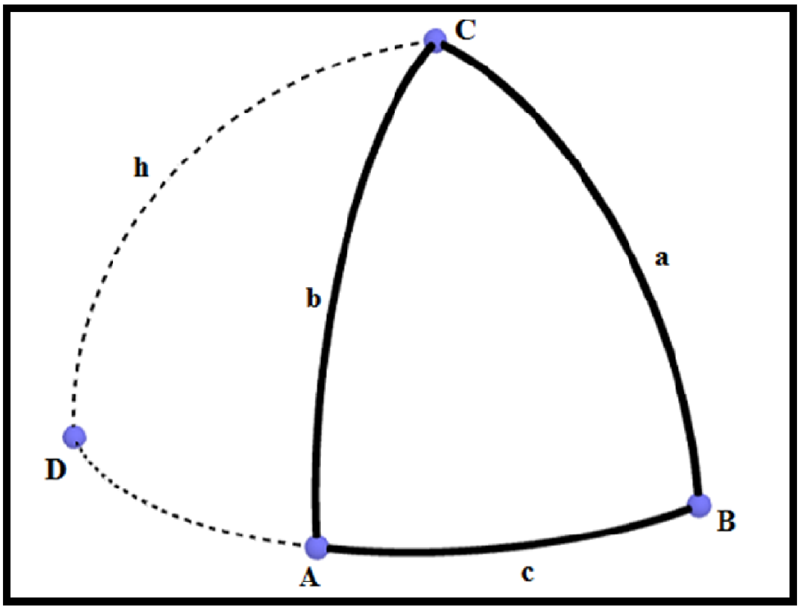


Figura 16 - Triângulos esféricos partindo do vértice C



O vértice D dos triângulos é reto e aplicando a fórmula (3) para triângulos retângulos esféricos tem-se:

$$\sin h = \sin a . \sin B$$

$$\sin h = \sin b . \sin A$$

$$\sin h = \sin a . \sin C$$

$$\sin h = \sin c . \sin A$$

Logo:

$$\sin a . \sin B = \sin b . \sin A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

Traçando a altura a partir do vértice A, de maneira análoga, encontra-se que:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

E devido a (1):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \qquad (11)$$

Lei dos cossenos:

Em todo triângulo esférico, o cosseno de um lado (arco esférico) qualquer é igual ao produto dos cossenos dos dois outros lados, mais o produto dos senos desses mesmos lados e do cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado considerado. Dado um triângulo esférico ABC, traça-se a altura a partir do vértice B e determinam-se sobre a base ou o seu prolongamento, dois segmentos conforme as figuras 17 e 18.

Figura 17 -Triângulo esférico

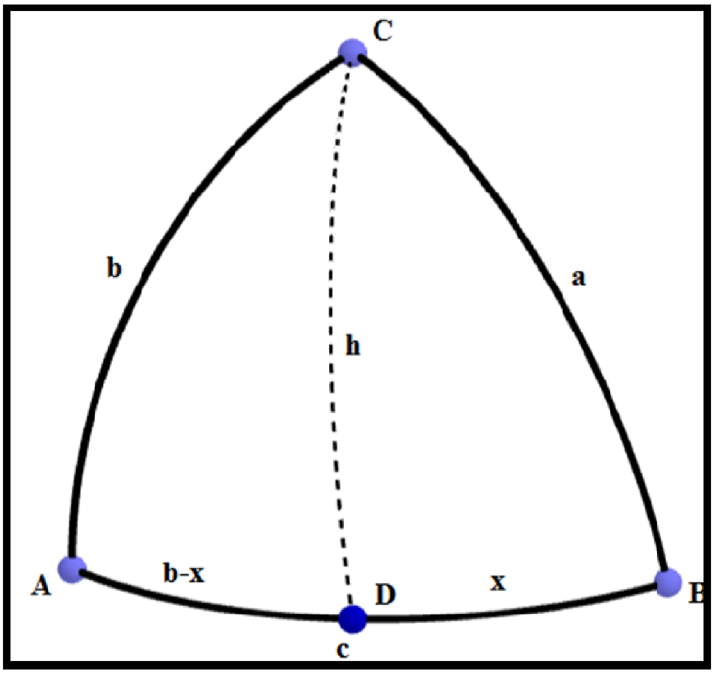
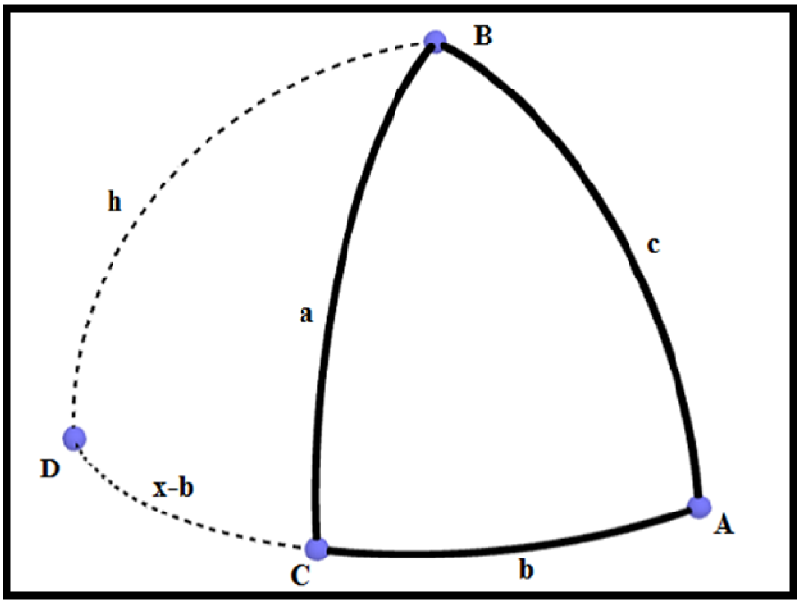


Figura 18 - Triângulo esférico



Aplicando a fórmula (1) para resolução de triângulos retângulos esféricos no triângulo esférico da figura 8, resulta:

$\cos c = \cos h.\cos (b - x)$ e $\cos a = \cos h.\cos x$

$$\Rightarrow \frac{\cos (b - x)}{\cos x} = \frac{\cos b.\cos x + \sin b.\sin x}{\cos x} = \cos b + \sin b.\tan x$$

Pela fórmula (5) para resolução de triângulos retângulos tem-se que:

$\dfrac{\cos c}{\cos A} = \cos b + \sin b\,.\tan a.\cos C = \cos b + \sin b.\dfrac{\sin a}{\cos a}.\cos C$, ou seja,

$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos C \quad (12)$$

Ao traçar-se a altura do triângulo esférico a partir dos vértices A e C, obtém-se, de maneira análoga:

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A$$

$$\cos b = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos B \quad (13)$$

CONCLUSÃO

Este trabalho procurou mostrar a evolução da Geometria ao longo da história, desde a sua origem no Antigo Egito, através da observação da própria natureza, passando pela Grécia em mais ou menos quinhentos anos antes de Cristo, onde tomou a forma que mantém até os tempos modernos, graças, principalmente, à grande obra de Euclides de Alexandria, "Os Elementos".

Verificando outras possibilidades para o quinto postulado dos Elementos de Euclides, foi possível desenvolver outras geometrias diferentes da Geometria Euclidiana, mas que funcionavam tão bem como ela. A existência de geometrias, onde a soma dos ângulos de um triângulo poderia ser maior ou menor que dois ângulos retos, implicava em um novo conceito de espaço. Um espaço que poderia existir apenas como objeto matemático, mas que também poderia existir fisicamente.

Além dos aspectos históricos também procurou-se mostrar sua ligação com outro tema, não menos abstrato, a Teoria da Relatividade e a sua importância para o ensino. A Teoria da Relatividade de Einstein mudou as bases da Física alterando conceitos tão fundamentais como espaço e tempo. Essa nova Física só é possível quando se considera uma Geometria Não-Euclidiana.

A Geometria Euclidiana, manteve-se absoluta até o século XIX, quando devido a outras possibilidades para o quinto postulado, foi criada a Geometria Não-Euclidiana por conceituados matemáticos e retrata com mais exatidão o espaço em que vivemos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMADO, Antônio Tadeu F. **Elementos de Matemática 3**. Santos: Ed. Universitária Leopoldianum, 2011.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas.** São Paulo: Interciência, 2001.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da matemática elementar**. v. 10. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução Irineu Bicudo.Ed. Unesp, 2009. Abordagem às geometrias não euclidianas. Disponível em <bit.profmat-sbm.org.br/.../2012_00896_Osnildo_Andrade_Carvalho>. Acesso em 30 setembro 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Unicamp, 2004.

LUCHETTA, Valéria. **Euclides e os elementos.** Ime, São Paulo, 23 abril 2003. Disponível em <http://www.ime.usp.br/leo/imatica/historia/euclides.html>. Acesso em: 20 maio 2016.

MINKOWSKI, **Geometria e Relatividade**. Disponível em http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/pdf/artigos/minkowski.pdf >. Acesso em 20 maio 2016.

NACIONAL, Observatório. **Geometria dos espaços curvos.** On br. Disponível em <http://www.on.br/site_edu_dist_2006/pdf/modulo3/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf >. Acesso em: 20 maio 2016.

PETIT, Jean-Pierre. **As aventuras de Anselmo Curioso**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. **Noções de Geometrias Não Euclidianas**. Curitiba: Ed.CRV, 2011.