



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO BATISTA MOTA

PRINCÍPIOS DE CONTAGEM E APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO:
O PROBLEMA DE CONTAGEM DOS QUADRADOS EM UMA QUADRÍCULA
E O CÓDIGO QQ

FORTALEZA

2016

ANTONIO BATISTA MOTA

**PRINCÍPIOS DE CONTAGEM E APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO:
O PROBLEMA DE CONTAGEM DOS QUADRADOS EM UMA QUADRÍCULA
E O CÓDIGO QQ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M871p Mota, Antônio Batista.
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM E APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO : O PROBLEMA DE
CONTAGEM DOS QUADRADOS EM UMA QUADRÍCULA E O CÓDIGO QQ / Antônio Batista Mota. –
2017.
77 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Princípios elementares de combinatória. 2. Resolução de problemas de quadrados em uma quadricula. 3.
Códigos de leitura rápida tipo códigos QR. I. Título.

CDD 510

ANTONIO BATISTA MOTA

**PRINCÍPIOS DE CONTAGEM E APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO:
O PROBLEMA DE CONTAGEM DOS QUADRADOS EM UMA QUADRÍCULA
E O CÓDIGO QQ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Aprovada em: 15/02/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Prof. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

A Deus.

Aos meus pais, Manoel de Oliveira Mota e Efigênia Batista Mota, meus filhos Matheus Machado Mota, Luana Mota de Oliveira, Gabrielly Holanda Mota e Cláudio Cauã Batista Mota e a minha querida esposa Laudécia Moreira Mota.

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

A Deus e a minha família: meu pai, Manoel de Oliveira Mota e minha saudosa mãe Efigênia Batista Mota, que deram uma base de vida honesta e batalhadora, meus filhos Matheus Machado Mota, Luana Mota de Oliveira, Gabrielly Holanda Mota e Cláudio Cauã Batista Mota que são minha inspiração diária e a minha querida esposa Laudécia Moreira Mota, que esteve comigo dando força sem a qual não chegaria até aqui.

Ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pela excelente orientação.

Aos professores do PROFMAT e aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo Prof. Carlos Augusto David Ribeiro pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado, pelos dias e noites de estudo em grupo na UFC que muito me ajudaram a concluir o curso.

“Sempre que puder, conte.”

Francis Galton

RESUMO

A presente dissertação pretende em um primeiro momento abordar os Princípios elementares de combinatória, com foco na resolução de problemas através da utilização de ferramentas básicas de contagem, e em alguns casos construindo-as de modo a mostrar que a resolução de problemas envolvendo combinatória requer mais de criatividade ao conhecimento de determinados procedimentos padrões de resolução.

O outro ponto a se destacar neste trabalho foi motivado por um problema visto em um concurso do Instituto Federal do Ceará de 2016 que pedia para determinar o número de quadrados distintos, de lados não necessariamente paralelos aos eixos cartesianos, cujos vértices pertencem ao conjunto $\{(a,b); a \text{ e } b \text{ inteiros}, 1 \leq a \leq 7; 1 \leq b \leq 7\}$. Um problema de contagem utilizando o Princípio da Adição, que será neste trabalho iniciado de forma bem simples por pontos em uma reta e a contagem de segmentos, passando pelo problema tal qual o do concurso pede, mas com uma quadrícula 10×10 até sua versão em três dimensões com a contagem de cubos nele inseridos e com a conjectura para espaços n -dimensionais.

Além disso, é apresentada uma aplicação para esse problema de contagem de quadrados numa transformação destes em um código do tipo leitura rápida, denominado pelo autor de Código QQ (Quadrados em Quadrículas).

Palavras-chave: Princípios elementares de combinatória. Resolução de problemas de quadrados em uma quadrícula. Códigos de leitura rápida tipo códigos QR.

ABSTRACT

The present dissertation intends at first to approach the elementary Principles of combinatorics, giving a focus on problem solving without the direct use of ready-made formulas, and in some cases constructing them in order to show that problem solving involving combinatorial requires more of a good idea than of the knowledge of certain standard procedures of resolution.

The other point to be highlighted in this work was motivated by a problem seen in a contest of the Federal Institute of Ceará that asked to determine the number of distinct squares, sides not necessarily parallel to the Cartesian axes, whose vertices belong to the set $\{(a, b); a \text{ and } b \text{ integers, } 1 \leq a \leq 7; 1 \leq b \leq 7\}$, a problem of counting using the Addition Principle, which will be initiated in this work very simply by points in a line and the count of segments, going through the problem just like the one in the contest but with a grid 10 X 10 until its version in three dimensions with the counting of cubes inserted in it and with the conjecture for n-dimensional spaces.

Additionally, an application for this square counting problem is presented in a transformation of these into a read-through type code called by the author of Code QQ (Square squares).

Keywords: Elementary combinatorial principles. Solving squares problems in a grid. QR code type quick read codes.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 - Figura de 02 dados (Ilustrativa)
- Figura 2 - Árvore de Possibilidades (cardápio)
- Figura 3 - Pontilhado com segmentos
- Figura 4 - Quadrícula 10 x 10
- Figura 5 - Quadrícula 10 x 10 com 01 quadrado
- Figura 6 - Quadrícula 10 x 10 com 02 quadrados
- Figura 7 - Quadrícula 10 x 10 com 03 quadrados
- Figura 8 - Árvore de possibilidades
- Figura 9 - 03 Quadrículas 10x10 com 04, 05 e 06 quadrados, respectivamente.
- Figura 10 - O quadrado de lado 5
- Figura 11 - Um Cubo virado para o lado “Frente”
- Figura 12 - Outro Cubo virado para o lado “Frente”
- Figura 13 - Um Cubo virado para o lado “Lateral”
- Figura 14 - Outro Cubo virado para o lado “Lateral”
- Figura 15 - Exemplo de Código de Barras
- Figura 16 - Exemplo de Código de Barras para produtos
- Figura 17 - Código preto e branco do bullseye QR
- Figura 18 - Código QR para URL do Wikipédia Inglês
- Figura 19 - Elementos Funcionais de uma Estrutura de código QR.
- Figura 20 - Código QR usado em Outdoor no Japão
- Figura 21 - Código QR usado em bilhete de trem na China
- Figura 22 - Selo Criptografado
- Figura 23 - Quadrícula com marcação matricial
- Figura 24 - Quadrícula com correspondente tabela ou Quadro
- Figura 25 - Modelo de Representação de Quadrado na quadrícula e tabela
- Figura 26 - Outro exemplo de Quadrado na quadrícula e tabela
- Figura 27 - Caracteres x quadrados correspondentes
- Figura 28 - Palavra “Bola.” em Código QQ
- Figura 29 - Caracteres “Bola.” em Código QQ sintético
- Figura 30 - Dígito Verificador
- Figura 31 - Código “MATEMÁTICA E UFC”

LISTA DE SÍMBOLOS

α	alfa
β	beta
π	pi
σ	Sigma
θ	Teta
ρ	Rho
\cup	União
\cap	Intersecção
Σ	Somatório
\prod	Produtório
\cup	Conjunto União
$\binom{a}{b}$	Binomial de a em b

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela de caracteres

Tabela 2 - Representação dos valores das letras Maiúsculas em Código QQ

Tabela 3 - Tabela de conversão de caracteres em valores de código QQ

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	ANÁLISE COMBINATÓRIA	3
3	PRINCÍPIOS ELEMENTARES DA CONTAGEM	5
3.1	Princípio da Bijeção	5
3.2	Princípio da Multiplicação	8
3.3	Princípio de Inclusão e Exclusão	13
4	PRINCÍPIO DA ADIÇÃO	16
4.1	O Problema dos Segmentos em uma linha pontilhada e dos Quadrados em uma quadrícula bidimensional	17
4.2	O caso dos cubos em uma quadrícula tridimensional	23
4.3	O problema das figuras geométricas regulares de dimensão n em uma quadrícula n-dimensional – (conjectura)	25
4.4	De volta ao Problema original	26
5	UMA APLICAÇÃO DO USO DAS QUADRÍCULAS PLANAS	30
5.1	História dos Códigos de Barra	30
5.2	História dos Códigos QR	35
5.3	Desenvolvendo um código baseado na contagem de quadrados em uma quadrícula	42
5.4	Dígito Verificador	49
6	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
	APÊNDICE A – SOMA DOS N PRIMEIROS QUADRADOS PERFEITOS	56
	APÊNDICE B – SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A. DE ORDEM SUPERIOR	58
	APÊNDICE C – TRIÂNGULOS RETÂNGULOS COM LADOS INTEIROS – PROCURANDO AS HIPOTENUSAS	59

1 INTRODUÇÃO

No capítulo 2 são dadas algumas definições sobre análise combinatória e é escrito um pouco da história sobre esse tema. É uma base teórica e histórica para o principal problema a ser apresentado nos capítulos a seguir. O capítulo 3 faz-se um passeio nos princípios elementares da contagem como o da bijeção, o da multiplicação e da inclusão e exclusão com definições e alguns exemplos interessantes, buscando resolvê-los sem o uso de fórmulas prontas, e com a técnica da análise dos dados oferecidos e, assim tornando mais empírica a resolução destes problemas. Essa é a beleza da matemática e da análise combinatória em particular. Podemos pensar também, pelo problema apresentado no Princípio Aditivo apresentado no capítulo 4 que as fórmulas não são usadas no caso concreto, mas construídas por eles e que poderão ser usadas apenas nas variações do próprio problema em questão. O problema dos quadrados com vértices nos pontos de uma quadrícula mostra-se um exercício que pode ser reduzido ou expandido e é o que é desenvolvido nesse capítulo.

O capítulo 5, posso dizer que é o principal deste trabalho, disserta sobre uma aplicação do uso das quadrículas planas, iniciando com a história dos códigos de barra, a história dos códigos QR para em seguida desenvolver um código baseado na contagem de quadrados em uma quadrícula como um código de leitura rápida denominado de Código QQ (Quadrados em uma Quadrícula). A leitura desse código é incipiente, contudo percebe-se que ele tem a capacidade de ter seu desenvolvimento ampliado e desenvolvido de forma prática, e com uso em vários sistemas. Ele possui um sistema de verificação de erros com a inserção de dígitos verificadores que analisam se os caracteres representados foram corretamente dispostos e estão locados em baixo de cada caractere que representam. Ele tem como referência a tabela do código ASCII, com exceção dos 31 primeiros caracteres que são códigos para itens como o retorno para o início de uma linha (CR - Carriage Return) e o avanço de linha (LF - Line Feed) etc.

A forma do código QQ é a de um quadrado que para conseguir esse formato não tem padrões fixos como o código QR, mas sim é baseado na quantidade de caracteres utilizados, prevalecendo o preenchimento na horizontal e deixando as coordenadas em branco na vertical com a complementação de pontos acima e abaixo dele num formato predefinido, deixando-o simétrico em relação à sua vertical.

Sua posição é verificada por duas linhas em forma de “L” formada por pontos pretos que fixa o código em uma posição única. Neste sentido, o código QQ tem a aparência próxima de um Código do tipo Data Matrix.

A ideia de desenvolver este código não é ter a pretensão de uso comercial, mas simplesmente mostrar que alguns problemas simples de análise combinatória podem ser estendidos para outros correlatos e mais amplos, mostrando que a motivação, a curiosidade e a intuição podem desenvolver situações interessantes com problemas simples e com potencial para tal. Isso pode ser levado para a sala de aula e desenvolvido outros problemas que possam ser expandidos ou até o próprio problema do código QQ ser estudado e ampliado com um formato mais padronizado e talvez incorporado um sistema mais sofisticado de correção de erros, deixando-o entendível mesmo que com certo dano.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA



Figura 1

Serão apresentadas algumas definições sobre Análise Combinatória que são encontradas na literatura e na internet.

Pela definição do google, Análise Combinatória é um conjunto de procedimentos que possibilita a construção de grupos diferentes formados por um número finito de elementos de um conjunto sob certas circunstâncias. Nesses grupos é possível realizar a análise das possibilidades e combinações.

Segundo Hélio e Eduardo, (2014, p. 101)

A Análise Combinatória (ou, simplesmente, Combinatória) é o ramo da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, nelas procurando determinar métodos de contagem ou de enumeração (termos aqui usados no sentido de determinar o número de elementos de um conjunto e de atribuir números naturais a seus elementos).

De acordo com Morgado, João Bosco, Paulo Cesar, e Pedro Fernandez, (1991, p. 01),” A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.”

Segundo Philippe e Robert (2009, p. 01), “Combinatória é o estudo de estruturas finitas construídas de acordo com um conjunto finito de regras.”

Se considerarmos os números como o início do que chamamos de análise combinatória, podemos dizer que os pitagóricos já faziam estudos sobre esses números. No entanto, é com o matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) e seus contemporâneos Fermat, Leibniz e Wallis, no século XVII, que esse estudo adquire uma configuração

científica.

Um motivo tão inusitado quanto os jogos de azar é que acabou levando ao desenvolvimento da Análise Combinatória. A necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos jogos gerou o estudo dos métodos de contagem. Grandes matemáticos se ocuparam com o assunto: o italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia, e os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Muitas técnicas foram criadas para a contagem de números por diversos matemáticos desde a antiguidade. Os livros de Euclides já mencionavam $(1+x)^2$ em torno de 3000 aC. Báskara sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos. Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jacques Phillippe Marie Binet (1786-1856) mostraram como achar diretamente os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos eles, até o que desejamos. Para isso, De Moivre utilizou pela primeira vez uma técnica extremamente poderosa, a das funções geradoras.

Euler foi um expoente no estudo da contagem. Ele desenvolveu em seu livro clássico *Introductio in Analysin Infinitorum* o problema das partições de um número inteiro.

A análise combinatória é assunto normalmente do ensino médio e principalmente no segundo ano, e isso causa em alguns professores de matemática um certo desconforto, pois se percebe que a contagem se faz presente na vida das pessoas desde a infância, contudo a abordagem ao assunto é tanto quanto tardia.

Desenvolveremos nessa dissertação uma abordagem um pouco diferente do que é exposto aos alunos do ensino médio. Serão vistos princípios elementares como o da adição, multiplicação, bijeção, inclusão e exclusão, e neles procuraremos explorar problemas interessantes e que podem desenvolver elementos além da própria contagem.

3 PRINCÍPIOS ELEMENTARES DE CONTAGEM

Vamos agora dar um passeio no estudo dos princípios básicos da análise combinatória e infiltrar-se na verificação de alguns problemas que normalmente não fazem parte de um curso de ensino básico, sobretudo, do ensino médio regular, pelo menos com essa profundidade de estudo. Veremos o Princípio da Bijeção, o Princípio da Adição e da Multiplicação, além do Princípio da inclusão e exclusão.

3.1 Princípio da Bijeção

O início da história da contagem, praticamente coincide com o início da humanidade quando se era necessário usar de meios primitivos para se contar alguma coisa. Foi necessário fazer comparações com algum parâmetro de tal modo que se soubesse contabilizar os objetos em questão. O que se afirma é que era necessário fazer uma bijeção entre o que se queria contar com uma referência qualquer. Vamos analisar o conceito de função e de função bijetora para aplicarmos ao Princípio da Bijeção em Combinatória.

Uma função é uma tripla ordenada (A, B, f) , em que $f \subset A \times B$ é tal que para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Em termos formais, as seguintes duas condições devem ser satisfeitas:

$$(i) (x, y_1) \in f \text{ e } (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

$$(ii) \forall x \in A; \exists y \in B: (x, y) \in f.$$

Qual é a importância de funções em Combinatória? As funções fazem associações entre dois conjuntos A e B diferentes, e portanto, transformam um problema de contagem em A em um problema de contagem em B . Dizemos que uma função é bijetora quando é injetora e sobrejetora. Chamamos uma função bijetora também de bijeção. Isso quer dizer que os inversos das condições (i) e (ii) da definição devem ser satisfeitas. Note que isso mostra que a relação inversa f^{-1} da função $f : A \rightarrow B$, definida por $f^{-1} \subset B \times A$, $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$ é uma função.

Mas, mais importante ainda, se A e B são finitos e existe uma bijeção de A em B , então $|A| = |B|$. Isso nos leva ao seguinte princípio:

$|A| = |B|$ quando existe uma função inversível de A em B.

Podemos dizer que bijeção é um mapeamento um-a-um entre os elementos de um conjunto com os elementos de outro. Sempre que você tem tal mapeamento, contar o tamanho de um dos conjuntos automaticamente lhe dá o tamanho do outro conjunto.

Explorar bijeções nos obriga a ter um repertório de conjuntos que sabemos como contar, para que possamos mapear outros objetos para eles.

Vamos ver um exemplo que aplica diretamente o Princípio da Bijeção:

Exemplo - Uma rua possui um estacionamento em fila com n vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. n automóveis, numerados de 1 a n , devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira?

Solução - Poderíamos começar pensando onde poderia estar o carro de número 1 e aí ir alocando os outros após o estacionamento do primeiro carro. Essa é uma técnica um pouco ineficaz, pois a posição do primeiro carro poderia gerar respostas para o segundo que dependeria da posição deste. Veja que se ele estacionar na primeira vaga ou na última. Teríamos apenas uma opção para o carro 2. O segredo é, então, não se preocupar com onde o carro 1 vai estacionar e colocar os outros. Cada carro, depois do primeiro, estaciona na frente ou atrás da fila. Pronto, fica assim estabelecida uma bijeção entre as configurações e o conjunto $\{\text{frente, atrás}\}^{N-1}$. Por exemplo, fazemos a correspondência (atrás, frente, frente, frente, atrás, atrás, atrás, frente, atrás) \leftrightarrow (10, 8, 7, 6, 2, 1, 3, 4, 5, 9)

Note que essa correspondência é claramente inversível: basta observar a posição do 2 em relação ao 1, depois observar a posição do 3 em relação ao grupo formado por 1 e 2, e assim por diante, observando a posição entre o i e o grupo formado por $1, 2, \dots, i - 1$.

Logo o total pedido é $|\{\text{frente, atrás}\}^{N-1}| = 2^{N-1}$.

Vamos a outro exemplo aplicando o Princípio da Bijeção:

Exemplo - Há n carros, numerados de 1 a n , e uma fileira com n lugares para estacionar, numerados de 1 a n . Cada carro i tem seu lugar favorito a_i ; quando vai estacionar, se dirige ao

seu lugar favorito; se ele está livre estaciona ali, caso contrário, avança para o primeiro lugar livre e estaciona; se não encontra lugar livre, vai embora e não volta mais. Quantas sequências (a_1, a_2, \dots, a_n) existem tais que todos os n carros conseguem estacionar?

Solução: Vamos listar alguns casos pequenos para entender o que está acontecendo:

Para $n = 1$, só há, é claro, uma possibilidade: (1) .

Para $n = 2$, só não dá certo $(2, 2)$. As outras três $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(1, 1)$ dão certo.

Vejamos $n = 3$. As seis permutações $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$ obviamente dão certo. Além disso, note que algum carro deve ter 1 como vaga favorita, senão todos os carros passarão direto pela vaga 1 e algum deles não vai estacionar. As outras possibilidades são $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, que funcionam, e $(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$ que não funcionam, além das outras $2^3 = 8$ que não contêm 1. Note que já lista todas as $3^3 = 27$ possibilidades. Com isso, o total é 16. Trabalhem agora com $n = 4$. São $4^4 = 256$ possibilidades, então não vale a pena listar todos, ou seja, precisamos de alguma estratégia de contagem. Contemos por quantidade de uns. Já temos $3^4 = 81$ possibilidades que não funcionam (as que não tem 1). Além disso, é fácil ver que $(1, 1, 1, k)$ funciona. Com isso, temos $(1, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, k)$ com $k = 2, 3, 4$ e permutações, que são mais $1 + 4 \cdot 3 = 13$ possibilidades que funcionam. Os que têm exatamente dois uns só não funcionam se são $(1, 1, 4, 4)$ ou permutações. Mais $\frac{4!}{2!2!} = 6$ que não funcionam e $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 6 = 48$ que funcionam. Entre os $4 \cdot 3^3 = 108$ que só têm um 1, retiramos o 1 (esse carro com certeza vai conseguir estacionar) e subtraímos 1 de cada outro número, e é possível estacionar se, e somente se, a sequência de três termos é válida. Com isso, temos $4 \cdot 16 = 64$ possibilidades que funcionam. O total é $13 + 48 + 64 = 125$. Vejamos: se x_n é a quantidade pedida, temos $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 16 = 4^2$ e $x_4 = 125 = 5^3$. Parece que $x_n = (n+1)^{n-1}$, ou seja, a gente deve conseguir uma bijeção das sequências com $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}^{n-1}$. Mas aí temos que conseguir uma associação entre sequências com n termos e sequências com $n-1$ termos, o que não parece ser interessante. Talvez seja mais fácil conseguir uma bijeção entre (sequência, k), $1 \leq k \leq n+1$ e $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}^n$.

Vamos pensar em $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}^n$ primeiro. Considere então uma nova vaga $n+1$, e as regras continuam as mesmas. Uma ideia que facilita a divisão por $n+1$ é considerar permutações cíclicas, ou seja, vamos supor que as vagas estão em círculo. Desse modo, com

as mesmas regras, todos os carros estacionam (por estarem em círculo, sempre aparece uma vaga livre!), e sobra uma vaga livre no final. Por simetria, há $(n+1)^n$

$n+1 = (n+1)^{n-1}$ configurações com i sendo a vaga livre, $1 \leq i \leq n+1$. Afirmamos que uma configuração corresponde a uma sequência válida se, e somente se, a vaga livre é $n+1$.

De fato, se a sequência é válida, os carros nunca chegam a precisar da vaga $n+1$, e ela nunca chega a ser usada. Reciprocamente, se a vaga livre é $n+1$, nenhum carro listou $n+1$ como vaga favorita no novo processo e, mais ainda, $n+1$ nunca foi usada como vaga livre, ou seja, nenhum carro passa da vaga n , o que significaria que ele iria embora. Logo

o problema está terminado (de fato, a bijeção é feita entre sequências válidas e não válidas e $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}^n$, sendo que a sequência é válida se, e somente se, a vaga que sobra é $n+1$).

3.2 Princípio da Multiplicação

Esse Princípio é também conhecido como o Princípio Fundamental da Contagem.

O Princípio Multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos. Vamos iniciar com alguns problemas de Contagem. Trataremos à resolução destes exercícios usando de início a árvore de possibilidades e posteriormente vamos usar uma técnica para que evitemos o trabalho de se construir a árvore das possibilidades, pois o mesmo pode ser muito desgastante ao depender do número de possibilidades.

Procuraremos não usar fórmulas prontas e, sim, usaremos mais do raciocínio para resolver os problemas apresentados.

Vamos a um exemplo simples que se utiliza desse princípio:

Exemplo - Um Restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada e salsichão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas).

De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

Solução: Resolveremos esse problema analisando a árvore que representa os dados fornecidos, conhecida árvore de possibilidades ou grafo. Veja como representamos por uma “árvore” o problema do cardápio.

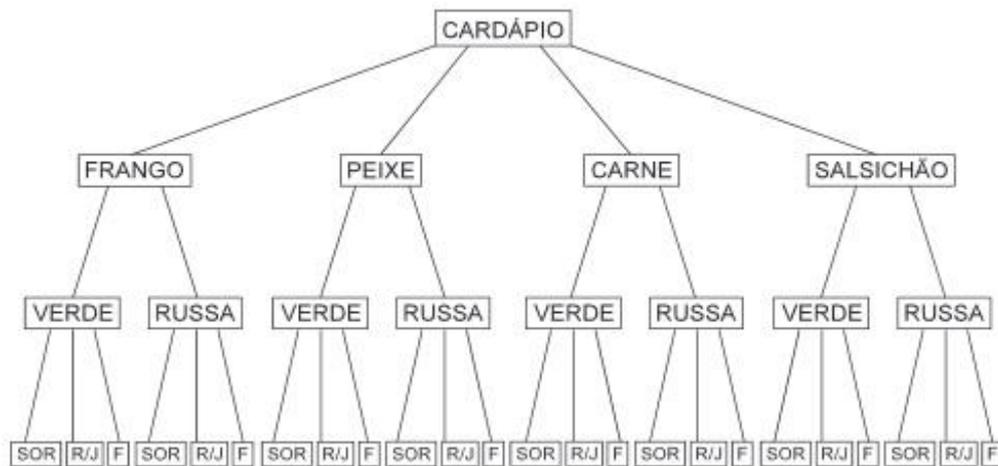


Figura 2 – Árvore das possibilidades

Temos nesse problema três níveis de decisão:

d₁: escolher um dentre os 4 tipos de pratos quentes;

d₂: escolher um dentre os 2 tipos de saladas;

d₃: escolher um dentre os 3 tipos de sobremesa;

Usando o princípio multiplicativo, concluímos que temos $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ maneiras de tomarmos as três decisões, ou seja, 24 opções de cardápio.

Outro exemplo usando o princípio multiplicativo.

Exemplo - Quantos divisores positivos de 10^{99} são múltiplos de 10^{88} ?

Solução: Seja n um divisor de 10^{99} que é múltiplo de 10^{88} . Vamos começar com a condição de que n é múltiplo de 10^{88} : devemos ter $n = 10^{88} \cdot t$, t inteiro positivo. Nossa meta é agora contar todos os números t . Além disso, 10^{99} é múltiplo de n , de modo que $10^{99} = n \cdot k \iff 10^{99} = 10^{88} \cdot t \cdot k \iff t \cdot k = 10^{11}$. Logo t deve ser divisor de 10^{11} . Sendo $10^{11} = 2^{11}$

• 5^{11} , os divisores de 1011 são da forma $2^a \cdot 5^b$ com $0 \leq a \leq 11$ e $0 \leq b \leq 11$. Assim, precisamos contar o número de ternas (a, b) com $0 \leq a \leq 11$ e $0 \leq b \leq 11$, ou seja, o número de elementos de $\{0, 1, 2, \dots, 11\} \times \{0, 1, 2, \dots, 11\}$, que é $12 \cdot 12 = 144$.

Agora um exemplo com coloração.

Exemplo - Mariana tem tinta guache de 8 cores diferentes e quer pintar os quatro quadradinhos unitários de um quadrado de lado 2 de modo que casas que têm um lado comum tenham cores diferentes. De quantas maneiras ela pode fazer isso? Duas colorações são iguais se uma pode ser obtida a partir de outra através de uma rotação.

Solução: De acordo com o enunciado, as quatro pinturas a seguir devem ser consideradas iguais:

A	B	C	A	D	C	B	D
C	D	D	B	B	A	A	C

Então o problema é simples: basta tomar o total, 8^4 , e dividir por 4: $8^4/4 = 1024$. Certo?

Errado! Imagine se fossem 7 cores; o total seria então $7^4/4$, que não é inteiro. Onde está o erro? O erro não está na multiplicação 8^4 : de fato, queremos contar as quádruplas (A,B,C,D) e tirar as repetições, já que (A,B,C,D) , (C,A,B,D) , (D,C,B,A) e (B,D,A,C) devem ser consideradas iguais. O problema é que nem sempre dividimos por 4. Existem situações em que dividimos por 2 ou nem dividimos (ou seja, não há repetições). Veja os exemplos:

A	B	B	A	A	A
B	A	A	B	A	A

Quando ocorre cada caso? Basta observar os quatro casos e verificar quando ocorre repetição.

A	B	C	A	D	C	B	D
C	D	D	B	B	A	A	C

Os dois primeiros são iguais quando $A = C$, $B = A$, $D = B$ e $C = D$, ou seja, quando as quatro cores são iguais. Nesse caso, os quatro são iguais, e não precisamos dividir. De fato, se dois vizinhos são iguais todas as quatro cores são iguais. Agora, se o primeiro e o terceiro são iguais, $A = D$ e $B = C$. Se $A = B$, obtemos o caso anterior, então $A = B$.

Então acontece que só os dois casos que listamos se repetem menos (uma ou duas vezes). Assim, há 8 possibilidades que não se repetem e $8 \cdot 7$ (8 escolhas para A, 7 para B) que representam duas repetições. As demais $8^4 - 8 - 8 \cdot 7$ são repetições de quatro vezes. Com isso, o total é

$$8 + \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{8^4 - 8 - 8 \cdot 7}{4} = 1044$$

Observação: Só para ter certeza: se fossem 7 cores, o total seria um inteiro.

$$7 + \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{7^4 - 7 - 7 \cdot 6}{4} = 637$$

Podemos agora enunciar o Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, sendo este conceito a ferramenta mais poderosa na resolução da maioria dos problemas de Contagem, além de servir como fundamentação de diversos outros conceitos que serão apresentados adiante.

Princípio Multiplicativo: Se uma decisão d_1 pode ser tomada de n maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de m maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 sucessivamente é $n \times m$.

É importante neste momento, exibir algumas estratégias (técnicas), baseadas em Morgado, et. al, Lima, et. al, Santos, et. al e Oliveira, et. al que facilitam a resolução de problemas de Contagem. São elas:

Estratégia 1 - Postura

É primordial que você tente se colocar no lugar de quem está executando a ação do problema, pense sempre que está de posse das opções e ao preencher uma etapa imagine que uma dessas opções já foi utilizada na mesma.

Estratégia 2 - Divisão

Devemos sempre dividir nosso problema em etapas (ou decisões) mais simples de serem determinadas as suas possibilidades, para que depois pensemos no conjunto de etapas como um todo, podendo ter um olhar simultâneo ou sucessivo das decisões.

Estratégia 3 - O que diferencia uma decisão de outra é sem sombra de dúvida, o grande dilema dos problemas de Contagem. Como justificar que um conjunto de decisões escolhido por você tem de fato o número correto de decisões ou podemos ainda subdividir alguma dessas decisões em outras ou até agrupar algumas compondo uma única ou simplesmente o seu conjunto de etapas não é compatível com o problema. Futuramente veremos o clássico problema da pintura de um mapa. E aí se pergunta: porque o correto é escolher a cor do 1o país em seguida a cor do 2o país e assim sucessivamente e não escolhermos o país que terá a 1a cor em seguida o outro país que terá a 2a cor e assim sucessivamente? De fato não há uma receita de bolo para a definição das etapas na qual será dividida o seu problema. Teremos que observar o que faz sentido.

Estratégia 4 - Quando uma decisão deve ser tomada antes de outra (não adiar dificuldades) Decisões adiadas por conter alguma dificuldade tornam-se mais complicadas posteriormente, por isso devem ser resolvidas de imediato. Em outras palavras, as etapas que sofrem mais influência em relação às demais devem ser resolvidas prioritariamente.

Estratégia 5 - Métodos de contagem (direto ou indireto)

Em todo problema de contagem, podemos optar por uma das duas técnicas de resolução:

_ direto: Esse método consiste em considerar inicialmente todas as particularidades do problema chegando assim diretamente à solução procurada.

_ indireto: Esse método consiste em ignorar uma (ou mais) das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

3.3 Princípio da Inclusão e Exclusão

O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. Na sua versão mais simples, ele afirma que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

E podemos estender este conceito para três conjuntos da seguinte forma

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Aplicações

Apresentaremos agora algumas aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão em problemas interessantes.

Exemplo: Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou 7?

Solução: Vamos definir os seguintes conjuntos:

$|A|$ = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3.

$|B|$ = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 7.

Queremos calcular $|A \cup B|$. Temos que

$$\begin{aligned} |A| &= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333 \\ |B| &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142 \\ |A \cap B| &= \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47 \end{aligned}$$

$A \cap B$ é o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou 7, isto é, que são divisíveis por 21. E pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 333 + 142 - 47 = 428.$$

Vamos generalizar essa ideia.

Teorema (Princípio da Inclusão e Exclusão). Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos. Então o número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ é

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Demonstração: Indução sobre n . Sabemos que a fórmula é verdadeira para $n = 2$ (de fato, ela se reduz para as fórmulas conhecidas para $n = 2$ e $n = 3$).

Agora, suponha que a fórmula é verdadeira para $n - 1$. Então

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| + |A_n| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = +|A_n| - \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) \right| \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + |A_n| - \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n) \right| \end{aligned}$$

Aí é só agrupar as somas com o mesmo número de conjuntos, e obtemos o que desejamos. De fato, as interseções que não têm A_n estão lá com o sinal certo, o A_n sozinho está lá com o sinal de $+$ e os que têm A_n com outros conjuntos cuja união é X estão com um conjunto a mais e, portanto, devem ter o sinal trocado, como ocorre na última parcela da soma.

Iniciaremos com a função φ de Euler, que encontra diversas aplicações na área de criptografia e teoria dos números.

Exemplo - Em teoria dos números, $\varphi(n)$ é a quantidade de números m menores ou iguais a n tais que $\text{mdc}(m, n) = 1$. Mostre que

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

em que p_1, p_2, \dots, p_k são os primos que dividem n .

Solução: Os números que são primos com n são aqueles que não são múltiplos de nenhum p_i , p_i divisor primo de n . Então basta subtrair de n a união dos múltiplos de p_i , que já sabemos contar:

$$\varphi(n) = n - \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} n \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i} = n \left(1 + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \prod_{i \in I} \frac{-1}{p_i} \right) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

Para entender melhor o que foi feito, façamos o resultado para três fatores primos: se

os fatores primos de n são p , q e r ,

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \frac{n}{p} - \frac{n}{q} - \frac{n}{r} - \frac{n}{pq} - \frac{n}{pr} - \frac{n}{qr} - \frac{n}{pqr} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{pq} - \frac{1}{pr} - \frac{1}{qr} - \frac{1}{pqr} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Uma contagem bacana é o número de maneiras de permutar n elementos de modo que nenhum deles fique em sua posição original. Essas permutações são conhecidas como desarrumações ou permutações caóticas.

Vamos em seguida por em destaque, apesar de ser mais um Princípio de Contagem elementar e dos mais simples, o Princípio da Adição, que neste trabalho entra como base para o problema principal que é o Problema dos quadrados a serem inseridos em uma quadrícula e seus desdobramentos.

4 PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

Inicialmente, vamos denotar $|X|$ como o número de elementos do conjunto X ou a cardinalidade de X .

O princípio aditivo, resultado importante da análise combinatória, nos diz que $|A \cap B| = |A| + |B|$. Porém, este resultado só pode ser aplicado quando A e B são disjuntos, ou seja, quando $A \cap B = \emptyset$.

De outro modo, se há $|A|$ possibilidades no conjunto A e há $|B|$ possibilidades no conjunto B , então há $|A|+|B|$ formas para A ou B ocorrerem, assumindo-se que os elementos de A são diferentes dos de B . Generalizando, dados os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , em que A_i tem exatamente a_i elementos, então o número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ é dado por $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Vamos a um exemplo que aplica o Princípio da Adição. Exploraremos nesse exemplo uma variedade de problemas dada à riqueza dos dados do exemplo.

4.1 O problema dos segmentos em uma linha pontilhada e dos quadrados em uma quadrícula bidimensional

Vamos iniciar com o caso unidimensional onde calcularemos o número de segmentos que cabem em uma linha de pontos.

Exemplo – Quantos segmentos de reta podem ser inseridos em uma linha de 10 pontos?

.

Analisando de forma segmentada o problema podemos observar o seguinte:

- Para o segmento unitário, podemos inserir 9 deles;
- Para o segmento do tamanho que corresponde a três pontos, podemos inserir 8 deles;

E assim por diante, até que para o segmento do tamanho que corresponde aos dez pontos, podemos inserir um só dele.

. —
 —————
 —————
 —————
 —————

Figura 3 – Pontilhado com segmentos

Fonte: O próprio Autor

O total seria, então, $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ segmentos.

Vamos agora ver um exemplo levando o anterior para a dimensão dois, ou seja, envolvendo uma quadrícula plana e, nesse caso, expandiremos mais à frente o conceito de quadrícula para uma utilização prática que envolve a leitura de um código como um modelo de código QR.

Exemplo - determine o número de quadrados distintos, de lados não necessariamente paralelos aos eixos cartesianos, cujos vértices pertencem ao conjunto $\{(a,b); a \text{ e } b \text{ inteiros}, 1 \leq a \leq 10; 1 \leq b \leq 10\}$.

Solução - Para o saudoso Professor Morgado, mais vale uma boa ideia de que mil fórmulas. E pode-se dizer que ele estava em consonância com o pensamento do grande cientista Alemão Albert Einstein que afirmou um dia que a imaginação é mais importante do que o conhecimento. E, se pararmos para pensar, essa é uma das principais belezas da análise combinatória, pois se pode resolver um determinado problema com um pensamento bem racional e lógico.

Neste caso vamos partir de uma ideia e chegaremos a algumas fórmulas que serão empiricamente construídas.

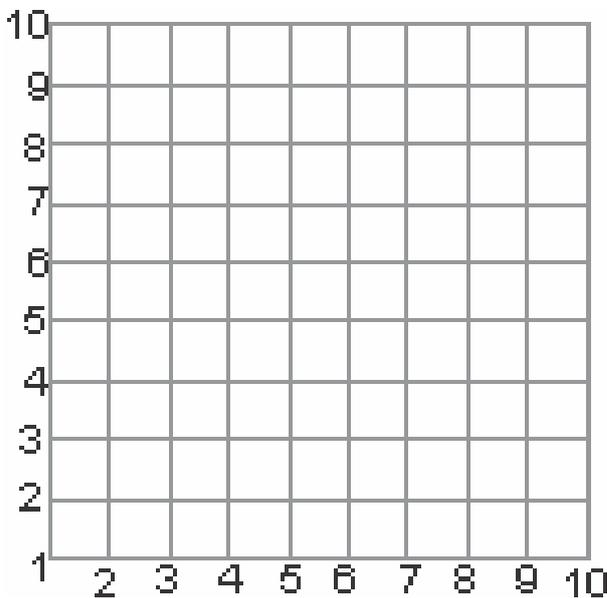
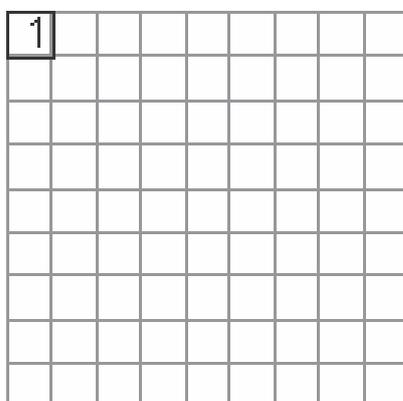


Figura 4 - Quadrícula 10 x 10

Fonte: Próprio Autor

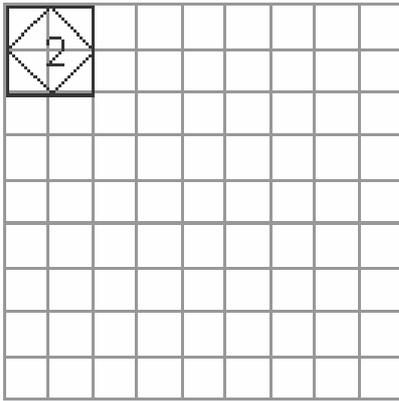


$$9 \times 9 \times 1 = 81$$

Fonte: Próprio Autor

Para um quadrado 1 x 1, podemos desenhar 9 deles na horizontal e 9 na vertical num total de 81 quadrados.

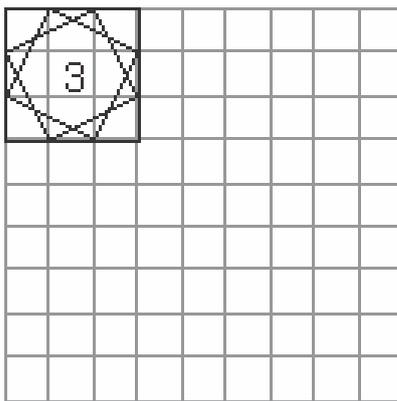
Figura 5- Quadrícula 10 x 10 com um quadrado



$$8 \times 8 \times 2 = 128$$

Figura 6 - Quadrícula 10 x 10 com dois quadrados
 Fonte: Próprio Autor

Para um quadrado 2 x 2, podemos desenhar 8 deles na horizontal e 8 na vertical e como o conjunto absorve 2 quadrados, isso dá um total de 128 quadrados.



$$7 \times 7 \times 3 = 147$$

Figura 7- Quadrícula 10 x 10 com três quadrados
 Fonte: Próprio Autor

Para um quadrado 3 x 3, podemos desenhar 7 deles na horizontal e 7 na vertical e como o conjunto contém 3 quadrados, isso dá um total de 147 quadrados.

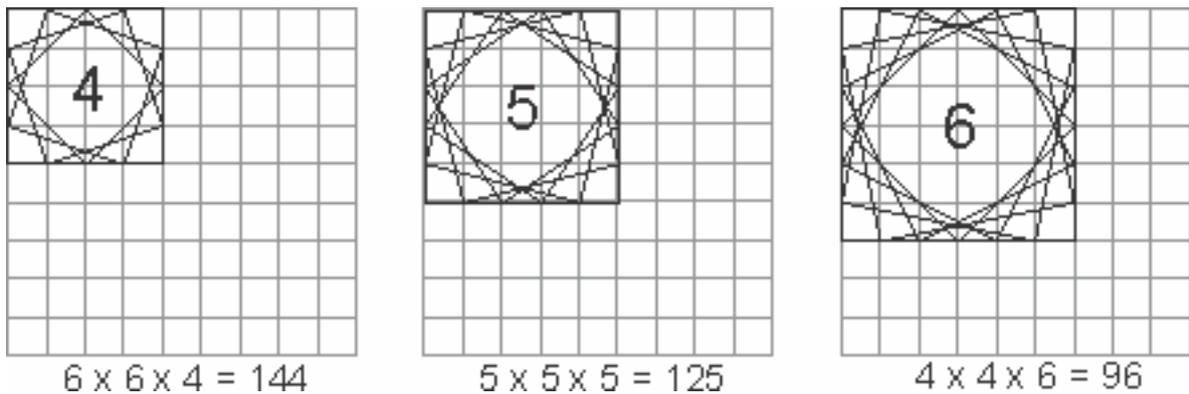


Figura 8 – Três Quadrículas com 4, 5 e 6 quadrados respectivamente.

Fonte: Próprio Autor

Do mesmo modo, para os quadrados do tipo 4 x 4, 5 x 5 e 6 x 6, respectivamente, temos que há a possibilidade de se desenhar 144, 125 e 96 quadrados.

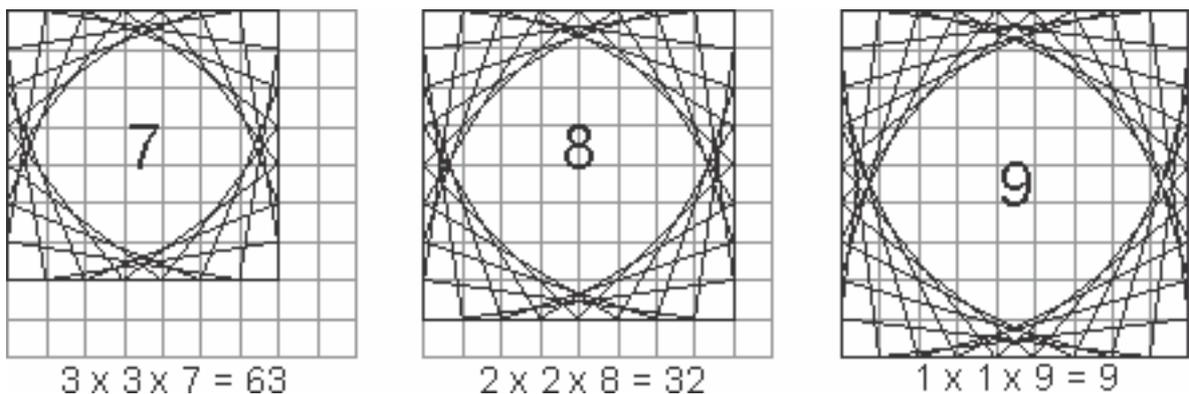


Figura 9- Três Quadrículas com 7, 8 e 9 quadrados respectivamente.

Fonte: Próprio Autor

Finalizando o processo com quadrados 7 x 7, 8 x 8 e 9 x 9, respectivamente, construiremos um total de 63, 32 e 9 quadrados. No total teremos que o número de quadrados cujos vértices estão nos pontos de interseção do quadriculado é de:

$$81 + 128 + 147 + 144 + 125 + 96 + 63 + 32 + 9 = \mathbf{825 \text{ quadrados}}$$

O que pode ser escrito como:

$$S_n = (9^2) + (8^2 + 8^2) + (7^2 + 7^2 + 7^2) + \dots + (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) =$$

$$= (9^2 + 8^2 + \dots + 2^2 + 1^2) + (8^2 + 7^2 + \dots + 2^2 + 1^2) + \dots + (2^2 + 1^2) + (1^2) = 825$$

E como a soma dos n primeiros números naturais quadrados perfeitos é dada por $S_n = \frac{(n+1)*n*(2n+1)}{6}$, (Ver Apêndice A - Soma dos n primeiros quadrados perfeitos), então podemos afirmar que o número de quadrados que tem como vértice pontos do quadriculado 10×10 é dado por $\sum_{i=1}^9 \frac{(i+1)*i*(2i+1)}{6} = 825$.

Podemos generalizar o problema anterior reescrevendo da seguinte forma:

O número de quadrados que tem como vértice pontos de um quadriculado $n \times n$ é dado por:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i+1)*i*(2i+1)}{6}$$

E tratando as somas entre parênteses acima como um P.A. (Progressão Aritmética) de quarta ordem (Ver Apêndice B - Soma dos termos de uma P.A. de ordem superior), temos que esse último somatório, $S_{10} = (1^2) + (1^2+2^2) + (1^2+2^2+3^2) + \dots + (1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+8^2+9^2)$, pode ser dado por:

$$\begin{aligned} S_{10} &= (1^2) + (1^2+2^2) + (1^2+2^2+3^2) + (1^2+2^2+3^2+4^2) + \dots + (1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+8^2+9^2) = \\ &= \mathbf{1} + 5 + 14 + 30 + 55 + 91 + 140 + 204 + 285 = \\ &\quad \mathbf{(4)} \quad \mathbf{(9)} \quad \mathbf{(16)} \quad \mathbf{(25)} \quad \mathbf{(36)} \quad \mathbf{(49)} \quad \mathbf{(64)} \quad \mathbf{(81)} \\ &\quad \mathbf{(5)} \quad \mathbf{(7)} \quad \mathbf{(9)} \quad \mathbf{(11)} \quad \mathbf{(13)} \quad \mathbf{(15)} \quad \mathbf{(17)} \\ &\quad \mathbf{(2)} \quad \mathbf{(2)} \quad \mathbf{(2)} \quad \mathbf{(2)} \quad \mathbf{(2)} \quad \mathbf{(2)} \end{aligned}$$

Que são as razões das progressões de cada ordem e tomando o primeiro elemento “1” da sequência e as primeiras razões de cada ordem na fórmula seguinte, então:

$$\begin{aligned} S_{10} &= \binom{10-1}{1} * 1 + \binom{10-1}{2} * 4 + \binom{10-1}{3} * 5 + \binom{10-1}{4} * 2 = \\ &= (10-1) \left[1 + 2(10-2) + \frac{5(10-2)(10-3)}{6} + \frac{(10-2)(10-3)(10-4)}{12} \right] = \\ &\quad S_{10} = 9 \left(1 + 2*8 + \frac{5*8*7}{6} + \frac{8*7*6}{12} \right) \end{aligned}$$

$$S_{10} = 9 (1+16 + 46,666\dots + 28) = 825$$

E o que é mais interessante é que pelas contas efetuadas, percebe-se que a fórmula seguinte agora com o valor n em substituição ao valor 10 do exemplo:

$$S_n = \binom{n-1}{1} * 1 + \binom{n-2}{2} * 4 + \binom{n-3}{3} * 5 + \binom{n-4}{4} * 2 =$$

$$\frac{1}{1!}(n-1) + \frac{4}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{5}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{2}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) =$$

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{r_i}{i!} * \prod (n-i) \right)$$

ri são as primeiras razões de cada sequência.

n é o número de pontos da quadrícula é um resultado de generalização do problema que pode ser escrito como:

$$S_n = (n-1) \left[1 + 2(n-2) + \frac{5(n-2)(n-3)}{6} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{12} \right]$$

Desenvolvendo ainda mais a fórmula acima pode-se resultar em:

$$S_n = n^2 \left(\frac{n^2-1}{12} \right)$$

Vamos, então, resolver o seguinte problema derivado do problema anterior usando um valor para a quantidade de pontos da quadrícula bem superior de modo a mostrar que a fórmula encontrada reduz substancialmente o número de contas tornando-o simples:

Quantos quadrados têm como vértice pontos do quadriculado 1000 x 1000?

Solução: Tomando a fórmula encontrada temos que

$$S_n = \frac{1000^2(1000^2-1)}{12} =$$

$$= 83.333.250.000$$

O que foi feito, graças a fórmula fechada encontrada, com bastante simplicidade de contas dado o valor considerável dos pontos da quadrícula.

4.2 O caso dos cubos em uma quadrícula tridimensional

Estendendo agora o problema para três dimensões, refaremos a pergunta e analisaremos a solução usando inicialmente o mesmo método utilizado para o caso de 2 dimensões:

Determine o número de cubos distintos, de lados não necessariamente paralelos aos eixos cartesianos, cujos vértices pertencem ao conjunto $\{(a,b,c)$; a, b e c inteiros, $0 \leq a \leq 10$; $0 \leq b \leq 10$; $0 \leq c \leq 10$.

Para este problema vamos considerar de início, cubos que têm seus vértices na quadrícula apenas em uma das dimensões (podemos considerar em sua base), portanto não fiel ao problema, contudo, que pode ter algum resultado de interesse teórico e, após isso, veremos o caso realmente como pede o problema, ou seja, todos os vértices dos cubos encontrados estão nos pontos da quadrícula.

Observando as figuras acima, dos quadriculados, e verificando a restrição da base do cubo estar nos pontilhados, podemos perceber que a mesma quantidade de movimentos que cada quadrado poderá fazer dentro da quadrícula no plano, poderá fazer na vertical, ou seja, teríamos:

$$\begin{aligned} & (9^3) + (8^3 + 8^3) + (7^3 + 7^3 + 7^3) + \dots + (1^3 + 1^3 + 1^3 + \dots + 1^3) = \\ & = (1^3) + (1^3 + 2^3) + (1^3 + 2^3 + 3^3) + (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) + \dots + (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 8^3 + 9^3) = \end{aligned}$$

E tratando as somas entre parênteses acima como um P.A. de quinta ordem, temos que esse somatório pode ser dado por:

$$= 1 + 9 + 36 + 100 + 225 + 441 + 784 + 1296 + 2025 =$$

$$(8) \quad (27) \quad (64) \quad (125) \quad (216) \quad (343) \dots$$

$$(19) \quad (37) \quad (61) \quad (91) \quad (127) \dots$$

$$(18) \quad (24) \quad (30) \quad (36) \dots$$

$$(6) \quad (6) \quad (6) \dots$$

Que são os números entre parênteses as razões das progressões de cada ordem. Tomando o primeiro elemento da sequência “1” e as primeiras razões de cada ordem na fórmula seguinte, teremos que:

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \binom{9}{1} * 1 + \binom{9}{2} * 8 + \binom{9}{3} * 19 + \binom{9}{4} * 18 + \binom{9}{5} * 6 = \\
 &= \frac{1}{1!}(10-1) + \frac{8}{2!}(10-1)(10-2) + \frac{19}{3!}(10-1)(10-2)(10-3) + \frac{18}{4!}(10-1)(10-2)(10-3)(10-4) + \frac{6}{5!}(10-1)(10-2)(10-3)(10-4)(10-5) = \\
 &= 9 + 4 * 9 * 8 + 19 * 3 * 4 * 7 + 18 * 9 * 7 * 2 + 6 * 9 * 2 * 7 = \mathbf{4917}
 \end{aligned}$$

De um modo geral, para n pontos de uma quadrícula cúbica teríamos:

$$S_n = \binom{n-1}{1} * 1 + \binom{n-1}{2} * 8 + \binom{n-1}{3} * 19 + \binom{n-1}{4} * 18 + \binom{n-1}{5} * 6$$

Que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{1!}(n-1) + \frac{8}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{19}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{18}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \\
 &\frac{6}{5!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) =
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{r_i}{i!} * \prod (n-i) \right)$$

onde r_i são as primeiras razões de cada sequência.

Ou desenvolvendo a fórmula acima teremos ainda que

$$S_n = \frac{n(n^2-1)(3n^2-2)}{60}$$

4.3 O problema das figuras geométricas regulares de dimensão n em uma quadrícula n -dimensional – (conjectura)

Determine o número de cubos n -dimensionais distintos, de lados não necessariamente paralelos aos eixos cartesianos, cujos vértices pertencem ao conjunto $\{(a,b,\dots,n); a, b,\dots, n \text{ inteiros}, 0 \leq a \leq m; 0 \leq b \leq m; \dots 0 \leq n \leq m\}$.

Tudo o que foi visto, leva a conjecturar-se que no caso de m dimensões, teríamos que num quadriculado de $n \times n \times n \times n \times \dots \times n$ (m vezes), ou n^m o total de figuras regulares seriam iguais a :

$$\sum_{i=1}^{m+2} \left(\frac{r_i}{i!} * \prod (n - i)\right)$$

onde r_i são as primeiras razões de cada sequência.

Lembrando que o caso visto para as figuras além das duas dimensões leva em consideração que os vértices das figuras regulares têm que estar nos pontos da quadrícula apenas em um plano e que os vértices nos outros planos considerados estarão soltos podendo ou não coincidir com algum ponto da quadrícula. O que veremos a seguir é como verificar quais são os cubos que têm todos os seus vértices em pontos da quadrícula.

4.4 De volta ao problema original

Agora para uma análise do problema realmente fiel ao que se pergunta que é estar cada vértice de um cubo em pontos da quadrícula, teremos que verificar uma situação importante. Para que o lado extrudado do cubo esteja em algum ponto da quadrícula este lado deve ter valor inteiro, portanto, para os cubos “bem comportados” ⁽¹⁾ isso é bem tranquilo, mas para os não bem comportados teríamos que fazer uma análise mais bem apurada. Para este último caso, poderíamos formar na quadrícula triângulos retângulos e verificar se a hipotenusa teria um valor inteiro o que corresponderia ao lado do cubo.

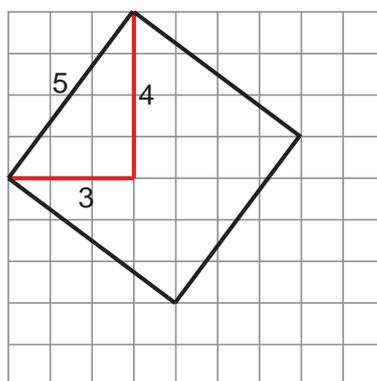


Figura 10 – O quadrado de lado 5

Fonte: Próprio Autor

No exemplo acima temos um triângulo pitagórico na quadrícula 10 x 10. Agora entra a seguinte questão antes de tratarmos desses triângulos que são possíveis de atender aos requisitos do problema: será que existem outros triângulos pitagóricos capazes de atender ao problema além dos da proporção 3:4:5, ou seja, triângulos retângulos que atendam a fórmula $a^2=b^2 + c^2$, sendo a, b e c são os lados e de valores inteiros?

Andrade, José F. (2006, Triângulos retângulos com lados inteiros: Procurando as hipotenusas da MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA n° 41 – Dezembro/2006 – pp. 1–10), buscou nesse artigo determinar os números inteiros que são hipotenusas de um triângulo retângulo cujos catetos são também números inteiros. Vemos que dependendo do número de pontos da quadrícula o trabalho pode render um bom tempo, mas para o valor menor ou

(1) – Chamaremos de Cubos “bem comportados” aos cubos cujos lados não sofrem ângulos diferentes de $k \cdot 90^\circ$ em relação aos pontos da quadrícula, com $0 \leq k \leq 3$

igual a 25 é fácil ver que apenas 5, 10, 13, 15, 17, 20 e 25 são valores de hipotenusa de um triângulo retângulo. Com efeito, temos $3^2 + 4^2 = 5^2$, $6^2 + 8^2 = 10^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, $9^2 + 12^2 = 15^2$, $8^2 + 15^2 = 17^2$, $12^2 + 16^2 = 20^2$, $15^2 + 20^2 = 25^2$, $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Vejamos que uma quadrícula até $8 \times 8 \times 8$ não possui cubos “não bem comportados” e a contagem é mais fácil.

Para uma quadrícula do tipo $9 \times 9 \times 9$, teremos, além dos cubos “bem comportados”, alguns cubos como os das figuras com suas translações na quadrícula que vamos contar a seguir:

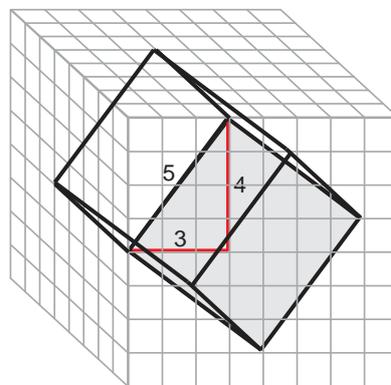


Figura 11 – Um cubo virado para o lado frente

Fonte: Próprio Autor

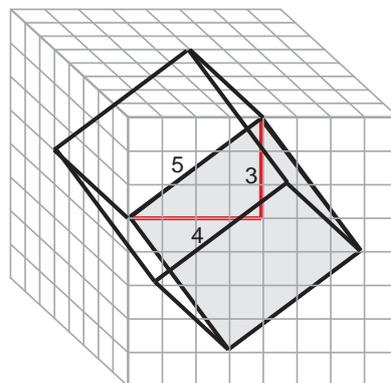


Figura 12 – Outro cubo virado para o lado frente

Fonte: Próprio Autor

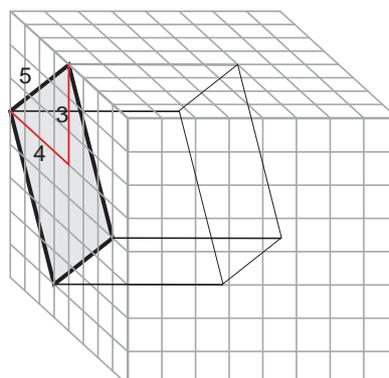


Figura 13 - Um cubo virado para o lado lateral

Fonte: Próprio Autor

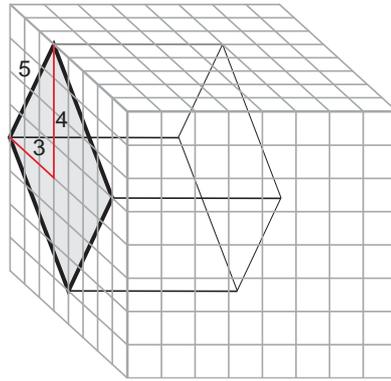


Figura 14 - Outro cubo virado para o lado lateral

Fonte: Próprio Autor

Teremos na *figura 8*, $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ cubos “não bem comportados” e em suas quatro versões um total de $16 \cdot 4 = 64$ cubos a mais além dos “bem comportados” que serão:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 \text{ de comprimento } 1 = 512;$$

$$7^3 \text{ de comprimento } 2 = 343;$$

$$6^3 \text{ de comprimento } 3 = 216;$$

$$5^3 \text{ de comprimento } 4 = 125;$$

$$4^3 \text{ de comprimento } 5 = 64;$$

$$3^3 \text{ de comprimento } 6 = 27;$$

$$2^3 \text{ de comprimento } 7 = 8; \text{ e}$$

$$1^3 \text{ de comprimento } 8 = 1$$

Num total de 784 cubos “bem comportados”.

Somando os 784 cubos aos 16 encontrados anteriormente, teremos então no total **800** cubos numa quadrícula $9 \times 9 \times 9$.

E o problema inicial de uma quadrícula $10 \times 10 \times 10$, quantos cubos teriam seus vértices nos pontos da quadrícula? Ainda não respondemos essa pergunta, mas vamos fazê-lo agora.

Vamos inicialmente contar os cubos “bem comportados”:

$$\begin{aligned} S_n &= 9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = \\ &= 45^2 = 2025. \end{aligned}$$

Agora contando os cubos “não bem comportados”:

Como não cabem outros cubos diferentes dos cubos do exemplo anterior iremos contar agora com um valor a mais que o 9, o que resulta em $3*3*5 = 45$. As quatro versões tem mesma quantidade, portanto seriam $45*4 = 180$ cubos que somados aos 2025 resultariam num total de **2205** cubos numa quadrícula $10 \times 10 \times 10$.

Perceba agora para finalizar este tópico, que outros cubos “não bem comportados” seriam inseridos na quadrícula se ela fosse no mínimo do tipo $14 \times 14 \times 14$. Pode verificar isso?

De um modo geral, Andrade explicita o seguinte teorema para se encontrar o número de triângulos retângulos de medidas inteiras.

Teorema. Seja $z = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k} w$. Suponha que os números primos p_j são distintos, que $p_j \equiv 1 \pmod{4}$ e que w não é divisível por nenhum primo p tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Então existem

$$\sum_{m=1}^k 2^{m-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq k} t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_m} \right)$$

triângulos retângulos não semelhantes com hipotenusa z e catetos números inteiros.

5 UMA APLICAÇÃO INTERESSANTE DO USO DAS QUADRÍCULAS PLANAS

Voltando ao caso da quadrícula plana, podemos, usando esse processo de inserção de quadrados, verificar uma aplicação bem interessante relacionada a codificação.

Vamos antes disso, saber um pouco da história dos códigos de barras e dos códigos QR para motivarmos o interesse no assunto sobre codificação de dados para uma leitura rápida e como lincador de resultados diversos como páginas da web, e-mails, localização georeferenciada etc.

5.1 História dos Códigos de Barras

Fonte: “https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_de_barras”

Código de barras (em inglês: **barcode**) é uma representação gráfica de dados numéricos ou alfanuméricos. A decodificação (leitura) dos dados é realizada por um tipo de scanner - o leitor de código de barras -, que emite um raio vermelho que percorre todas as barras. Onde a barra for escura, a luz é absorvida; onde a barra for clara (espaços), a luz é refletida novamente para o leitor. Os dados capturados nessa leitura óptica são compreendidos pelo computador, que por sua vez converte-os em letras ou números humano-legíveis. A utilização é muito comum em diversas áreas, desde a indústria é largamente utilizado no comércio e serviços.



Figura 15 – Exemplo de Código de Barras

Código de Barras para produtos - Os códigos de barras EAN-13 servem como identificação de seu produto no sistema de Ponto de Vendas dos lojistas. Qualquer produto, como, por exemplo, produtos alimentícios, CDs e DVDs, produtos naturais, verduras e legumes, roupas e vestuários, sapatos, entre outros utilizam códigos de barras EAN-13. As únicas exceções são livros e medicamentos controlados.

RG DOS PRODUTOS

ENTENDA A COMPOSIÇÃO DOS CÓDIGOS DE BARRAS



Figura 16 – Exemplo de Código de Barras para produtos

Fonte: http://www.gbnet.com.br/v2/codigo_de_barras_fontes_gs1_gtin_ean_13_para_produto.html

Também conhecido como GTIN-13, esse código de barras é usado no mundo todo, exceto EUA e Canadá.

A primeira patente de um código de barras foi atribuída em 1952 a Joseph Woodland e Bernard Silver. Seu código consistia num padrão de circunferências concêntricas de espessura variável.

Em 1969, a Associação Nacional das cadeias alimentares (NAFC) realizou uma reunião onde se discutiu a ideia de sistemas de verificação geral automatizadas. RCA tinha comprado os direitos à patente de Woodland original, participou da reunião e deu início a um projeto interno para desenvolver um sistema baseado no bullseye código. A Krogercadeia de supermercados se ofereceu para testá-lo.

Em meados dos anos 1970, o NAFC estabeleceu o Supermercado Comitê Ad Hoc dos Estados Unidos em um uniforme do mantimento Código do produto, que estabeleceu diretrizes para o desenvolvimento de códigos de barras e criou uma subcomissão símbolo de seleção para ajudar a padronizar a abordagem. Em cooperação com a empresa de consultoria McKinsey & Co., que desenvolveu um código padronizado de 11 dígitos para identificar qualquer produto. A comissão enviou então uma proposta de contrato para desenvolver um sistema de código de barras para imprimir e ler o código. O pedido foi para Cantor , National Cash Register (NCR), Litton Industries , RCA, Pitney-Bowes , IBM e muitos outros. foram estudados Uma grande variedade de abordagens de código de barras, incluindo códigos lineares, bullseye código círculo concêntrico da RCA, starburst padrões e outros.

Na primavera de 1971 RCA demonstraram o seu código bullseye em outra reunião indústria. Os executivos da IBM na reunião notaram as multidões no estande da RCA e imediatamente desenvolveu seu próprio sistema. Especialista em marketing IBM Alec Jablonover lembrou que a empresa havia empregado Woodland, e ele estabeleceu uma nova unidade na Carolina do Norte para liderar o desenvolvimento.



Figura 17 - código preto e branco do bullseye QR Adesivo Quadrado

Em julho de 1972 RCA começou um teste de dezoito meses em uma loja de Kroger em Cincinnati. Os códigos de barras foram impressas em pequenos pedaços de papel adesivo, e anexado à mão por funcionários da loja quando eles estavam adicionando etiquetas de preços. O código provou ter um problema sério. Durante a impressão, às vezes prensas manchar de tinta na direção do papel está em execução, tornando o código ilegível na maioria das orientações. Um código linear, como o que está a ser desenvolvido pela Woodland na IBM, no entanto, foi impresso na direção das tiras, de modo que tinta adicional torna o código simplesmente "mais alto", permanecendo legível, e em 3 de Abril de 1973, a IBM UPC foi

selecionado pela NAFC como seu padrão. IBM tinha projetado cinco versões da simbologia UPC para necessidades futuras da indústria: UPC A, B, C, D, e E.

NCR instalado um sistema testbed no Supermercado da Marsh em Troy, Ohio , perto da fábrica que estava produzindo o equipamento. Em 26 de junho de 1974, Clyde Dawson puxou um pacote de 10 de Wrigley Juicy Fruit goma fora de sua cesta e foi digitalizada por Sharon Buchanan em 8h01. O pacote de chicletes e da recepção estão agora em exposição no Smithsonian Institution . Foi a primeira aparição comercial da UPC.

Em 1971, a IBM tinha montado uma equipe para uma sessão de planejamento intensivo, dia após dia, de 12 a 18 horas por dia, para discutir a forma como todo o sistema pode operar e programar um plano de roll-out. Em 1973 eles se reuniram com os fabricantes de supermercado para introduzir o símbolo que teria de ser impresso na embalagem ou nos rótulos de todos os seus produtos. Não foram observadas reduções de custos para uma mercearia para usá-lo, a menos que, pelo menos, 70% dos produtos da mercearia tinha o código de barras impresso no produto pelo fabricante. IBM estava projetando que 75% seriam necessários, em 1975. Apesar de que foi alcançado, não foram máquinas ainda a digitalização em menos de 200 supermercados por 1977.

Estudos econômicos realizados pelo comitê indústria de supermercado projetado mais de US \$ 40 milhões em poupanças para a indústria da verificação por meados dos anos 1970. Esses números não foram alcançados nesse período de tempo e alguns previram o fim do código de barras. A utilidade do código de barras necessário a adoção de scanners caros por uma massa crítica de varejistas, enquanto fabricantes adotadas simultaneamente etiquetas de código de barras. Nem queria mudar primeiro e os resultados não foram promissores para o primeiro par de anos, com a *Business Week* proclamando "A Scanner Supermercado que falhou."

A experiência com código de barras nas lojas revelou benefícios adicionais. As informações detalhadas de vendas adquiridas pelos novos sistemas permitiu uma maior capacidade de resposta às necessidades dos clientes. Isso se refletiu no fato de que cerca de 5 semanas depois de instalar scanners de código de barras, as vendas em supermercados normalmente começou a subir e, eventualmente, nivelou-se em um aumento de 10-12% nas vendas, que nunca caiu. Houve também uma diminuição de 1-2% no custo operacional para as lojas que lhes permitiu reduzir os preços para aumentar a quota de mercado. Foi mostrado no campo que o retorno sobre o investimento para um scanner de código de barras foi de 41,5%. Em 1980, 8.000 lojas por ano foram de conversão.

O lançamento público global do código de barras foi recebida com ceticismo por meio dos teóricos da conspiração, que consideravam os códigos de barras ser um intruso da vigilância tecnológica e de alguns cristãos que pensavam os códigos escondiam o número 666, que representa o número da besta . Televisão anfitrião Phil Donahue descreveu códigos de barras como uma "conspiração corporativa contra os consumidores".

O uso do código de barras - uma prática ligada à automação de processos nas empresas - levou cerca de duas décadas para ser universalizado. Na Europa, segundo dados da EAN International, até 1981 poucos dos 21 países filiados à entidade utilizavam efetivamente o código. Em 1985, cerca de 92% das lojas automatizadas em todo o mundo estavam concentradas em somente seis países. Os produtos devem ser identificados pelo seu código de barras para este controle de entrada e saída de mercadorias, cadastrando-os no sistema utilizado pela empresa.

Muitas empresas escolhem a ferramenta de código de barras por ser “[...] utilizado em sistemas de pontos-de-venda em supermercados e lojas de varejo. Os códigos podem conter dados de horário, data e localização, além dos dados de identificação” (LAUDON, 2014).

Codificar produtos é uma forma de aumentar o nível de acurácia uma vez que a partir da codificação o estoque não poderá ter duplicidade de produtos, a localização dos itens se torna mais fácil, os riscos de compra ou venda errada são menores, a praticidade de manuseio por meio de quem trabalha com os itens é maior.

No Brasil, o Código Nacional de Produtos (código de barras) foi introduzido formalmente em 29 de novembro de 1984.

Em Portugal, o código de barras surgiu em 1985, sendo utilizado até hoje. Muitas empresas e administradores usam do código de barras para que seu estoque e produção não fiquem vagos. Com este sistema de código o trabalho que antes demorado hoje é muito mais eficiente.

5.2 História dos Códigos QR

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/QR_code



Figura 18 – Código QR para o URL da Wikipédia Inglês

Código QR (abreviado de *Código de Resposta Rápida*) é a marca registrada de um tipo de código de barras de matriz (ou código de barras bidimensional) projetado pela primeira vez para a indústria automotiva no Japão. Um código de barras é um rótulo ótico legível por máquina que contém informações sobre o item ao qual ele está anexado. Um código QR usa quatro modos de codificação padronizados (numérico, alfanumérico, byte / binário e kanji) para armazenar dados de forma eficiente; Extensões podem também ser utilizadas.

O sistema de código QR tornou-se popular fora da indústria automotiva devido à sua rápida legibilidade e maior capacidade de armazenamento em comparação com os códigos de barras padrão do UPC. As aplicações incluem rastreamento de produtos, identificação de itens, rastreamento de tempo, gerenciamento de documentos e marketing geral.

Um código QR consiste de quadrados pretos dispostos em uma grade quadrada sobre um fundo branco, que pode ser lido por um dispositivo de imagem, como uma câmera, e processado usando a correção de erro Reed-Solomon até que a imagem possa ser interpretada apropriadamente. Os dados necessários são então extraídos de padrões que estão presentes em ambos os componentes horizontais e verticais da imagem.

História

O sistema de código QR foi inventado em 1994 por Denso Wave. Seu objetivo era acompanhar os veículos durante a fabricação; Ele foi projetado para permitir a digitalização de componentes de alta velocidade. Os códigos QR são agora utilizados num contexto muito mais amplo, incluindo aplicações de rastreamento comercial e aplicações orientadas para a conveniência, destinadas a utilizadores de telemóveis (denominadas etiquetas móveis). Os

códigos QR podem ser usados para exibir texto para o usuário, para adicionar um contato vCard ao dispositivo do usuário, para abrir um URI (Uniform Resource Identifier) ou para compor um e-mail ou mensagem de texto. Os usuários podem gerar e imprimir seus próprios códigos QR para que outros possam fazer a varredura e o uso, visitando um dos vários sites pagos e livres gerando código QR ou aplicativos. A tecnologia tornou-se desde então um dos tipos os mais usados de código de barras bidimensional

Padrões

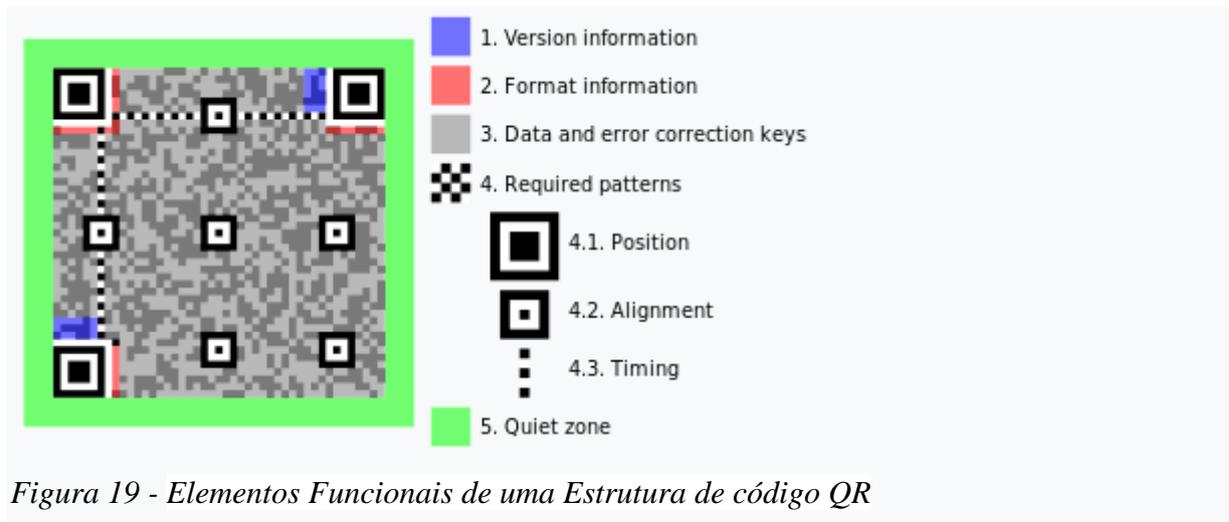


Figura 19 - Elementos Funcionais de uma Estrutura de código QR

Usos



Figura 11- Um código QR usado em um outdoor grande no Japão, ligando para o site sagasou.mobi

Os códigos QR tornaram-se comuns na publicidade ao consumidor. Normalmente, um smartphone é usado como um scanner de código QR, exibindo o código e convertê-lo para

algum formulário útil (como um URL padrão para um site, evitando assim a necessidade de um usuário digitá-lo em um navegador da Web). O código QR tornou-se um foco da estratégia de publicidade, uma vez que fornece uma maneira de acessar o site da marca mais rapidamente do que inserindo manualmente um URL. Além da mera conveniência para o consumidor, a importância desta capacidade é que ele aumenta a taxa de conversão (a chance de que o contato com o anúncio se converta em uma venda), persuadindo as perspectivas interessadas mais abaixo no funil de conversão com Pouco atraso ou esforço, trazendo o espectador para o site do anunciante imediatamente, onde um passo de vendas mais longo e mais direcionado pode perder o interesse do telespectador.

Embora usado inicialmente para rastrear peças na fabricação de veículos, os códigos QR são usados em um leque muito mais amplo de aplicações, incluindo rastreamento comercial, entretenimento e transporte de bilhetes, marketing de produtos e lealdade (exemplos: couponing móvel onde uma empresa descontada e percentual Desconto pode ser capturado usando um decodificador de código QR que é um aplicativo móvel, ou armazenar informações de uma empresa, tais como endereço e informações relacionadas ao lado de seus dados alfanuméricos de texto como pode ser visto no diretório Yellow Pages) e rotulagem de produtos na loja. Ele também pode ser usado no armazenamento de informações pessoais para uso das organizações. Um exemplo disso é Filipinas National Bureau of Investigation (NBI), onde NBI clearances agora vêm com um código QR. Muitas destas aplicações destinam-se a utilizadores de telemóveis (através de etiquetas móveis). Os usuários podem receber texto, adicionar um contato vCard a seu dispositivo, abrir um URI ou compor uma mensagem de e-mail ou de texto após a digitalização de códigos QR. Eles podem gerar e imprimir seus próprios códigos QR para que outros possam fazer a varredura e o uso, visitando um dos vários pagam ou livres sites ou aplicativos geradores de códigos QR. O Google tinha uma API, agora obsoleta, para gerar códigos QR, e aplicativos para digitalização de códigos QR podem ser encontrados em quase todos os dispositivos de smartphone.

Os códigos QR que armazenam endereços e URLs podem aparecer em revistas, em placas, em ônibus, em cartões de visita ou em quase qualquer objeto sobre o qual os usuários podem desejar informações. Os usuários com um telefone com câmera equipado com o aplicativo de leitor correto podem digitalizar a imagem do código QR para exibir texto, informações de contato, conectar-se a uma rede sem fio ou abrir uma página da Web no navegador do telefone. Este ato de ligação de objetos do mundo físico é denominado *hardlinking* ou objeto *hyperlinke*. Os códigos QR também podem estar vinculados a um local

para rastrear onde um código foi digitalizado. Ou o aplicativo que verifica o código QR recupera as informações geográficas usando GPS e triangulação de torre de célula (aGPS) ou o URL codificado no próprio código QR está associado a um local.



Figura 21 - Os códigos QR foram usados e impressos em bilhetes de trem na China desde 2010.

Recrutadores começaram a colocar códigos QR em anúncios de emprego, enquanto os candidatos têm começado ostentando-o em seus currículos e cartões de visita.

Em junho de 2011, a Royal Dutch Mint (*Koninklijke Nederlandse Munt*) emitiu a primeira moeda oficial do mundo com um código QR para celebrar o centenário do seu edifício e instalações atuais. A moeda pode ser digitalizada por um smartphone e link para um site especial com conteúdos sobre o evento histórico e design da moeda. Em 2014 o banco central de Nigéria emitiu uma nota 100-naira para comemorar seu centenário, a primeira nota de banco para incorporar um código de QR em seu projeto. Quando digitalizado com um dispositivo móvel habilitado para internet, o código vai para um site que conta a história centenária da Nigéria.^[17] Em 2015, o Banco Central da Federação Russa emitiu uma nota de 100 rublos para comemorar a anexação da Criméia pela Federação Russa. Ele contém um código QR em seu design e, quando digitalizado com um dispositivo móvel habilitado para internet, o código é acessado por um site que detalha o histórico e o histórico técnico da nota comemorativa. Em 2008, um pedreiro japonês anunciou planos para gravar códigos QR em lápides, permitindo que os visitantes para ver informações sobre o falecido, e os membros da família para acompanhar as visitas.

O psicólogo Richard Wiseman foi um dos primeiros autores a incluir códigos QR em um livro, na *Paranormalidade: Por que vemos o que não existe* (2011), permitindo que seus leitores acompanhem as afirmações paranormais ao acessar sua pesquisa através dos códigos.

Sistemas operacionais móveis

Os códigos QR podem ser usados em vários sistemas operacionais de dispositivos móveis. Esses dispositivos oferecem suporte ao redirecionamento de URL , que permite que os códigos QR enviem dados para aplicativos existentes no dispositivo. Muitos aplicativos

pagos ou gratuitos estão disponíveis com a capacidade de digitalizar os códigos e hard-link para um URL externo.

URLs

Os URLs ajudaram as taxas de conversão de marketing mesmo na era pré-smartphone, mas durante esses anos enfrentaram várias limitações: os visualizadores de anúncios geralmente precisavam digitar o URL e muitas vezes não possuíam um navegador na web quando viram o anúncio pela primeira vez. As chances eram altas de que eles se esqueceriam de visitar o site mais tarde, não se preocupar em digitar um URL, ou esquecer o URL para digitar. Os URLs semânticos reduziram esses riscos, mas não os eliminaram. Algumas dessas desvantagens para as taxas de conversão de URL estão desaparecendo agora que os smartphones estão colocando acesso à web e reconhecimento de voz em constante alcance, com o código QR fornecendo o URL para acesso instantâneo.

Lojas virtuais

Durante o mês de junho de 2011, de acordo com um estudo, 14 milhões de usuários móveis digitalizados um código QR ou um código de barras. Cerca de 58% desses usuários digitalizaram um QR ou código de barras de suas casas, enquanto 39% escaneados de lojas de varejo; 53% dos 14 milhões de usuários eram homens com idades entre 18 e 34 anos. O uso de códigos QR para formatos de "lojas virtuais" começou na Coreia do Sul e na Argentina mas atualmente está se expandindo globalmente . Walmart, Procter & Gamble e Woolworths já adotaram o conceito de Loja Virtual.

Pagamentos de código

Os códigos QR podem ser usados para armazenar informações de contas bancárias ou informações de cartões de crédito, ou podem ser especificamente projetados para trabalhar com determinados aplicativos de provedores de pagamento. Existem várias aplicações de teste de pagamentos de códigos QR em todo o mundo.

Em novembro de 2012, os pagamentos de códigos QR foram implantados em maior escala na República Tcheca, quando foi introduzido e aprovado pela Associação de Bancos da República Checa, como a solução local oficial para pagamentos QR, um formato aberto para troca de informações de pagamento - um Short Payment Descriptor .

Os códigos QR são comumente usados no campo de moedas criptográficas, particularmente aqueles baseados em e incluindo o Bitcoin . Endereços de pagamento, chaves

criptográficas e informações de transação são frequentemente compartilhados entre carteiras digitais desta forma.

Login do site

Os códigos QR podem ser usados para efetuar login em sites: um código QR é exibido na página de login em uma tela de computador e quando um usuário registrado digitaliza com um smartphone verificado, eles serão automaticamente logados. A autenticação é realizada pelo smartphone que entra em contato com o servidor. O Google testou esse método de login em janeiro de 2012.

Criptografia



Figura 22 - Selo de imigração japonês com um código QR (conteúdo é criptografado)

Os códigos QR criptografados, que não são muito comuns, têm algumas implementações. Um aplicativo Android, por exemplo, gerencia criptografia e descryptografia de códigos QR usando o algoritmo Data Encryption Standard. O sistema de imigração japonês usa criptografados códigos QR em carimbos de autorização de desembarque em passaportes como mostrado na figura à direita.

Design

Ao contrário dos mais antigos códigos de barras unidimensionais projetados para serem varridos mecanicamente por um feixe de luz estreito, um código QR é detectado por um sensor de imagem digital bidimensional e depois analisado digitalmente por um processador programado. O processador localiza os três quadrados distintivos nos cantos da imagem de código QR, usando um quadrado menor (ou quadrados múltiplos) perto do quarto canto para normalizar a imagem para tamanho, orientação e ângulo de visualização. Os

pequenos pontos em todo o código QR são então convertidos em números binários e validados com um algoritmo de correção de erros.

5.3 Desenvolvendo um código baseado na contagem de quadrados em uma quadrícula (Código QQ)

Vamos agora ao nosso problema:

Será que com o exemplo da contagem dos quadrados em uma quadrícula pode-se atribuir um código de leitura rápida usando conceitos binários de cores?

Veremos essa utilização da contagem de quadrados:

Para tanto usaremos quadrículas do tipo 6 x 6, com os pontos identificados pelas coordenadas da matriz abaixo mencionada:

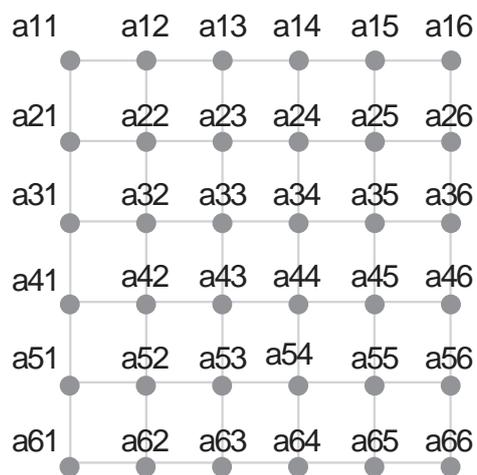


Figura 23 – Quadrícula com marcação matricial

Fonte: do próprio Autor

Vimos que numa quadrícula desse tipo podemos inserir

$$S_6 = (6 - 1) \left[1 + 2(6 - 2) + \frac{5(6-2)(6-3)}{6} + \frac{(6-2)(6-3)(6-4)}{12} \right] = \mathbf{105} \text{ quadrados.}$$

Vamos iniciar fazendo uma correspondência importante para nosso estudo dos pontos da quadrícula com as células de uma tabela (ou quadro) da seguinte forma:

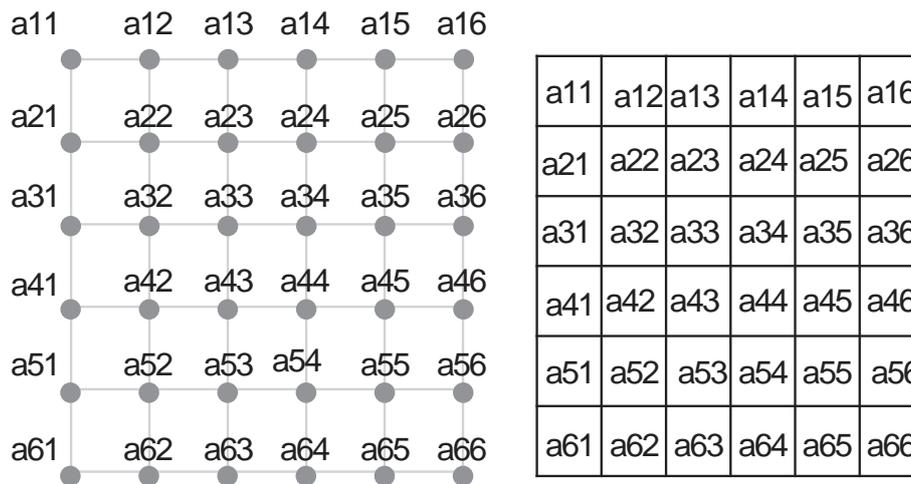


Figura 24 – Quadrícula com correspondente tabela ou Quadro

Fonte: do próprio Autor

Deste modo, um quadrado simples de comprimento 1 será representado como:

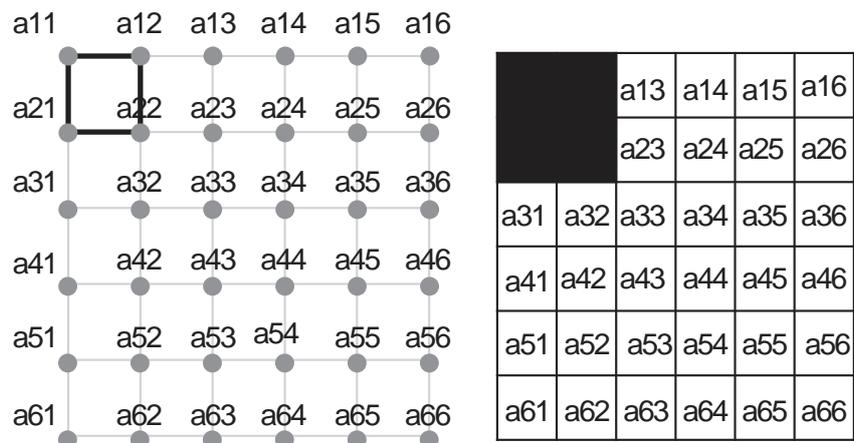


Figura 25 – modelo de representação de quadrado na quadrícula e tabela

Fonte: do próprio Autor

Vamos identificar esse quadrado pelas coordenadas dos pontos de sua matriz sem a identificação da letra “a”, ou seja, seria 11122122.

Outro exemplo seria:

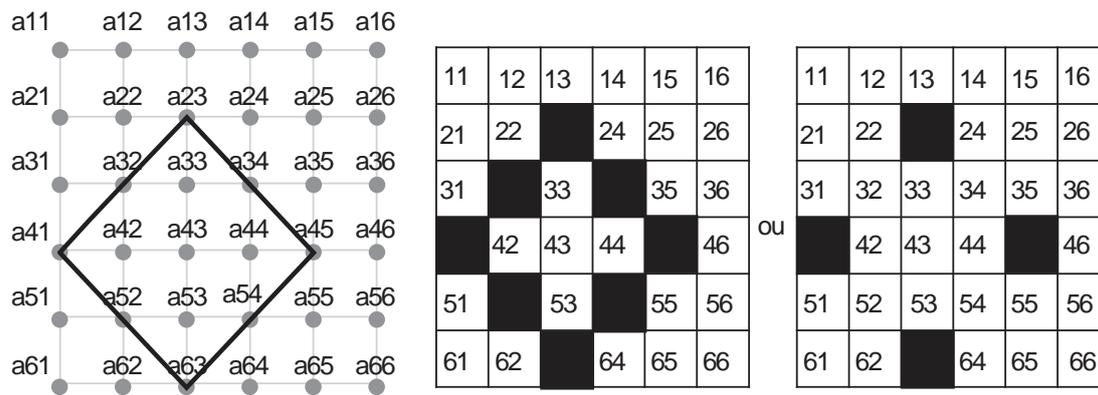


Figura 26 – Outro exemplo de quadrado na quadrícula e tabela

Fonte: do próprio Autor

Esse quadrado seria identificado pelo valor 23414563. Evidentemente que as variações desse número como, por exemplo, 41634523 correspondem ao mesmo quadrado, no entanto, acharemos mais adiante um modelo que atenderá nossas expectativas com mais clareza, por enquanto estejamos atentos a identificação do quadrado na quadrícula.

Utilizaremos 93 caracteres para serem caracterizados pelos quadrados dessas quadrículas baseados nos caracteres da tabela do Código ASCII com exceção dos 31 primeiros, sendo eles os seguintes:

A	a	0	!
B	b	1	"
C	c	2	#
D	d	3	\$
E	e	4	%
F	f	5	&
G	g	6	'
H	h	7	(
I	i	8)
J	j	9	*
K	k		+
L	l		,
M	m		-
N	n		.
O	o		/

P	p		:
Q	q		;
R	r		<
S	s		=
T	t		>
U	u		?
V	v		@
W	w		[
X	x]
Y	y		^
Z	z		_
			`
			{
			}
			~

Tabela 1 – Tabela de caracteres

Fonte: do próprio Autor

Percebe-se que como são 93 caracteres e 105 quadrados, então 12 quadrados não representaram caracteres inicialmente.

Faremos então uma correspondência de modo que como cada ponto corresponde a um quadrado, teremos as seguintes representações para as letras maiúsculas de A a Y.

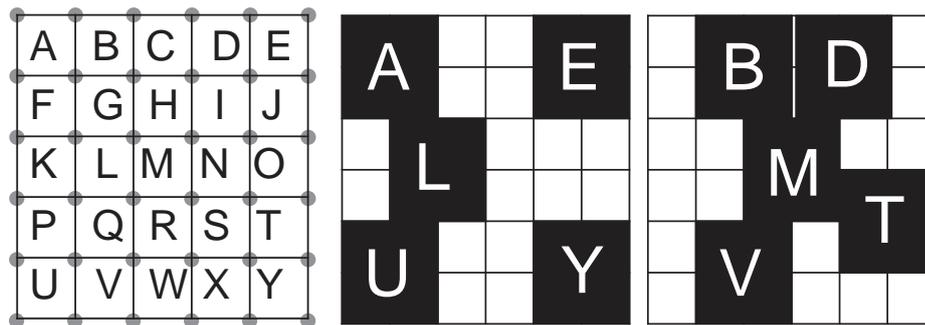


Figura 27 – Caracteres x Quadrados correspondentes

Fonte: do próprio Autor

Os caracteres que representam as letras maiúsculas do alfabeto de A a Y terão os valores:

A	11212212
B	12222313
C	13232414

D	14242515
E	15252616
F	21313222
G	22323323
H	23333424
I	24343525
J	25353626
K	31414232
L	32424333
M	33434434
N	34444535
O	35454636
P	41515242
Q	42525343
R	43535444
S	44545545
T	45555646
U	51616252
V	52626353
W	53636454
X	54646555
Y	55656656

Tabela 2 – Representação dos valores das letras Maiúsculas em Código QQ

Fonte: do próprio Autor

Todos os 93 caracteres estão com seus respectivos valores na tabela abaixo:

A	11212212	a	11313313	0	11611666	!	12525616
B	12222313	b	12323414	1	11414414	"	21616525
C	13232414	c	13333515	2	12424515	#	22626626
D	14242515	d	14343616	3	13434616	\$	12314324
E	15252616	e	21414323	4	21515424	%	13324425
F	21313222	f	22424424	5	22525525	&	14334526
G	22323323	g	23434525	6	23535626	'	22415334
H	23333424	h	24444626	7	31616434	(23425435
I	24343525	i	31515333	8	32626535)	24435536
J	25353626	j	32525434	9	33636636	*	32516244
K	31414232	k	33535535			+	33526345
L	32424333	l	34545636			,	34536446
M	33434434	m	41616343			-	21423413
N	34444535	n	42626444			.	22433514
O	35454636	o	43636545			/	23443615

P	41515242	p	44646646			:	31524423
Q	42525343	q	21322312			;	32534524
R	43535444	r	22332413			<	33544625
S	44545545	s	23342514			=	41625433
T	45555646	t	24352615			>	42635534
U	51616252	u	31423322			?	43645635
V	52626353	v	32433423			@	12415425
W	53636454	w	33443524			[13425526
X	54646555	x	34453625]	22516435
Y	55656656	y	41524332			^	23526536
Z	11515515	z	42534433			_	13315135
		ESPAÇO	43544534			`	14325236
						{	23416145
							24426245
						}	21524514
						~	22534615

Tabela 3 – Tabela de conversão de caracteres em valores de código QQ

Fonte: do próprio Autor

Vamos agora fazer um exemplo de um nome com uma letra maiúscula, três letras minúsculas e um símbolo – “**Bola.**”

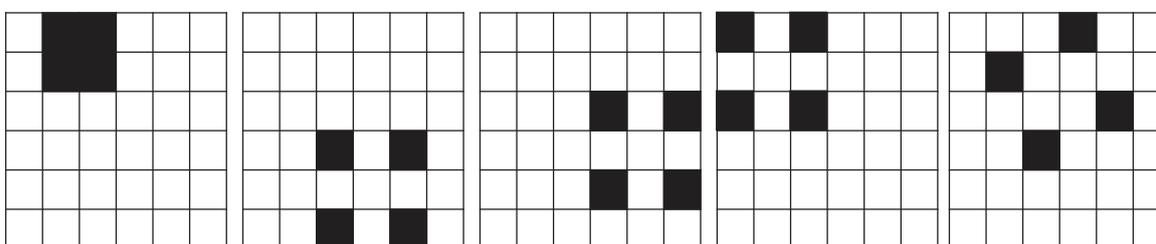


Figura 28 – Palavra “Bola.” em código QQ.

Fonte: do próprio Autor

Note que ficaram “em branco” muitos espaços e seria interessante diminuir esses brancos de modo que fossem mais homogêneas as cores dos quadros.

Uma ideia interessante seria reduzir esses quadros à metade. Mas como fazer isso?

Bem, poderíamos utilizar um quadro 6 x 3 (6 linhas e 3 colunas) ao invés de 6 x 6, tomando apenas um dos lados como o lado a ser mantido intacto que pode ser o direito ou o esquerdo. Mas e os quadrados marcados do lado de um só lado ou os que têm pontos dos dois lados?

Vejam os últimos quadros acima que representam o símbolo “ponto”. Nele temos pontos dos dois lados do quadro. Mas note que se reduzirmos o quadro à sua metade à esquerda,

mesmo assim daria para identificar o símbolo ponto, pois os pontos que restaram são suficientes para caracterizá-lo, logo não haverá prejuízo nessa redução.

Observemos, por exemplo, o terceiro quadro que representa o caractere “l”. Ele está totalmente do lado direito e, se houver a redução, ele não mais conterà os pontos indicando o caractere que ele indica se tomarmos o lado esquerdo. Outra questão é saber como identificar qual lado está sendo tomado.

Neste caso há uma alternativa cabível. As cores, do quadro do lado direito, se este quadro for o visível, ficarão invertidas o que caracterizará sempre este lado e viabilizará a homogeneidade das cores brancas e pretas.

Resta, então, refazer o exemplo acima com as alterações pretendidas e verificar se realmente é viável e, ainda, se torna o visual mais amigável. É uma observação ainda sobre a quantidade de brancos e pretos, o próprio sistema se encarregaria de selecionar o lado mais adequado preservando a legibilidade do código e a homogeneidade das cores.

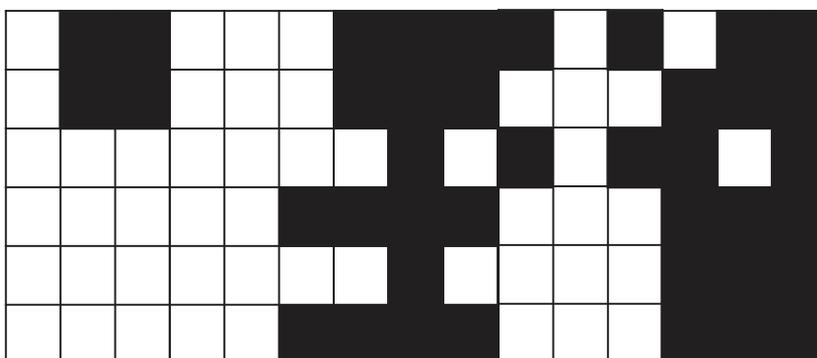


Figura 29 – Caracteres “Bola.” em código QQ sintético

Fonte: do próprio Autor

Agora temos um quadro mais enxuto com 50 quadros brancos e 40 quadros pretos.

- O primeiro quadro preservou todos os pontos que estão do lado esquerdo;
- o segundo quadro também se refere ao lado esquerdo e constam apenas dois pontos, no entanto os outros dois são de fácil identificação, vejamos as coordenadas deles como a45 e a65;
- o terceiro quadro refere-se ao lado direito, pois as cores foram invertidas, mas percebe-se com facilidade os pontos do quadrado agora em branco;
- o quarto quadro é do lado esquerdo com os quatro pontos preservados, logo sem nenhuma dificuldade de identificação; e
- o quinto e último é do lado direito com cores invertidas com apenas dois pontos visíveis, mas com facilidade de se localizarem os outros dois, cujas coordenadas são a22 e a43.

5.4 Dígito Verificador

O dígito verificador serve para garantir com certa precisão que o código está escrito corretamente. Usaremos os valores binários e a congruência módulo 7 para verificação do código, pois até esse número há a necessidade de apenas três dígitos binários e haverá maior diversidade de restos o que não ocorreria se a congruência fosse módulo 8, por exemplo. Funcionará assim:

O valor de cada caractere terá seus pares de dígitos somados e o resto da divisão por 7 será representado de forma binária em três cores, sendo branco para “0” e preto para “1”.

Tem-se que os números de 0 a 6 têm a seguinte representação binária:

0 – 000

1 – 001

2 – 010

3 – 011

4 – 100

5 – 101

6 – 110

Deste modo, vamos usar o exemplo acima para indicar os dígitos verificadores de cada caractere.

A letra B maiúscula tem como valor 12222313 cuja soma dos algarismos é $12+22+23+13 = 70 \equiv \mathbf{0} \pmod{7}$, então seu dígito verificador é o zero representado binariamente por 000 ou três quadrinhos brancos.

A letra o minúscula tem como valor 43636545 cuja soma dos algarismos é $43+63+65+45 = 216 \equiv \mathbf{6} \pmod{7}$, então seu dígito verificador é o zero representado binariamente por 100 ou quadrinhos preto, branco e branco.

A letra l minúscula tem como valor 34545636 cuja soma dos algarismos é $34+54+56+36 = 180 \equiv \mathbf{5} \pmod{7}$, então seu dígito verificador é o zero representado binariamente por 100 ou quadrinhos preto, branco e branco.

A letra a minúscula tem como valor 11313313 cuja soma dos algarismos é $11+31+33+13 = 88 \equiv \mathbf{4} \pmod{7}$, então seu dígito verificador é o zero representado binariamente por 000 ou três quadrinhos brancos.

O símbolo “ponto” tem como valor 22433514 cuja soma dos algarismos é $22+43+35+14 = 114 \equiv 2 \pmod{7}$, então seu dígito verificador é o zero representado binariamente por 000 ou três quadrinhos brancos.

Daí o quadro com os dígitos verificadores teriam a forma

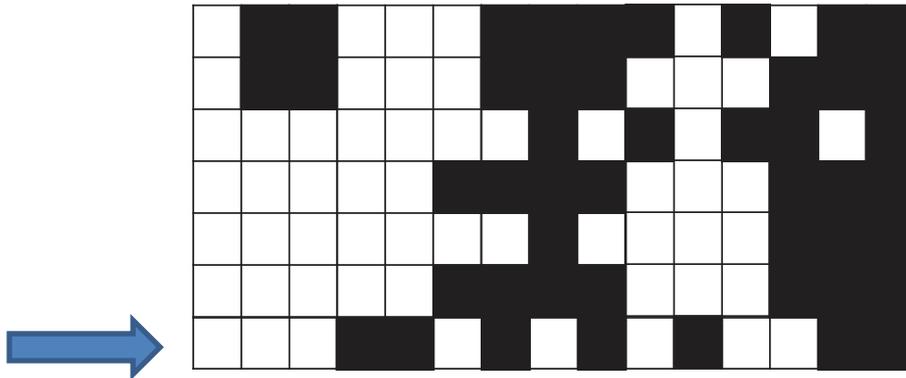


Figura 30 – Dígito Verificador

Fonte: do próprio Autor

Onde a última linha representa os dígitos verificadores e cada dígito está exatamente abaixo de seu caractere correspondente.

Para outro exemplo vamos agora completar um modelo para o código com o seguinte texto: “**MATEMATICA E UFC**”.

Vamos começar demarcando o quadrado do código com três pontos pretos a noroeste, a sudoeste e sudeste do quadrado do código para entender-se qual a posição correta deste e na linha e coluna entre esses pontos todos os pontos serão pretos formando um “L” que assenta a posição do código.

Se esse código for posto apenas numa linha, percebe-se que ele terá o formato de 7 x 48 pontos, considerando a linha com os dígitos verificadores. Para, então ser posto num formato quadrado, ele poderá ter um dos formatos: 7 x 48, 14 x 24 ou 21 x 26. O formato mais próximo a um quadrado é o 21 x 26, no entanto, tem diferença ímpar de pontos. Deste modo, o desenvolvedor deverá fazer prevalecer um formato de espaços simétricos em cima e em baixo do código, deixando-o centralizado, o que neste caso é o formato 14 x 24 que tem a diferença de $24-14=10$ pontos (número par).

E o que fazer com os espaços que estão “em branco” acima e abaixo do código?

Será padronizado um desenho do tipo: desce, segue um ponto à direita e sobe com pontos pretos, na parte de cima e em baixo do código. Deste modo, o desenho do código finalizado é o seguinte:

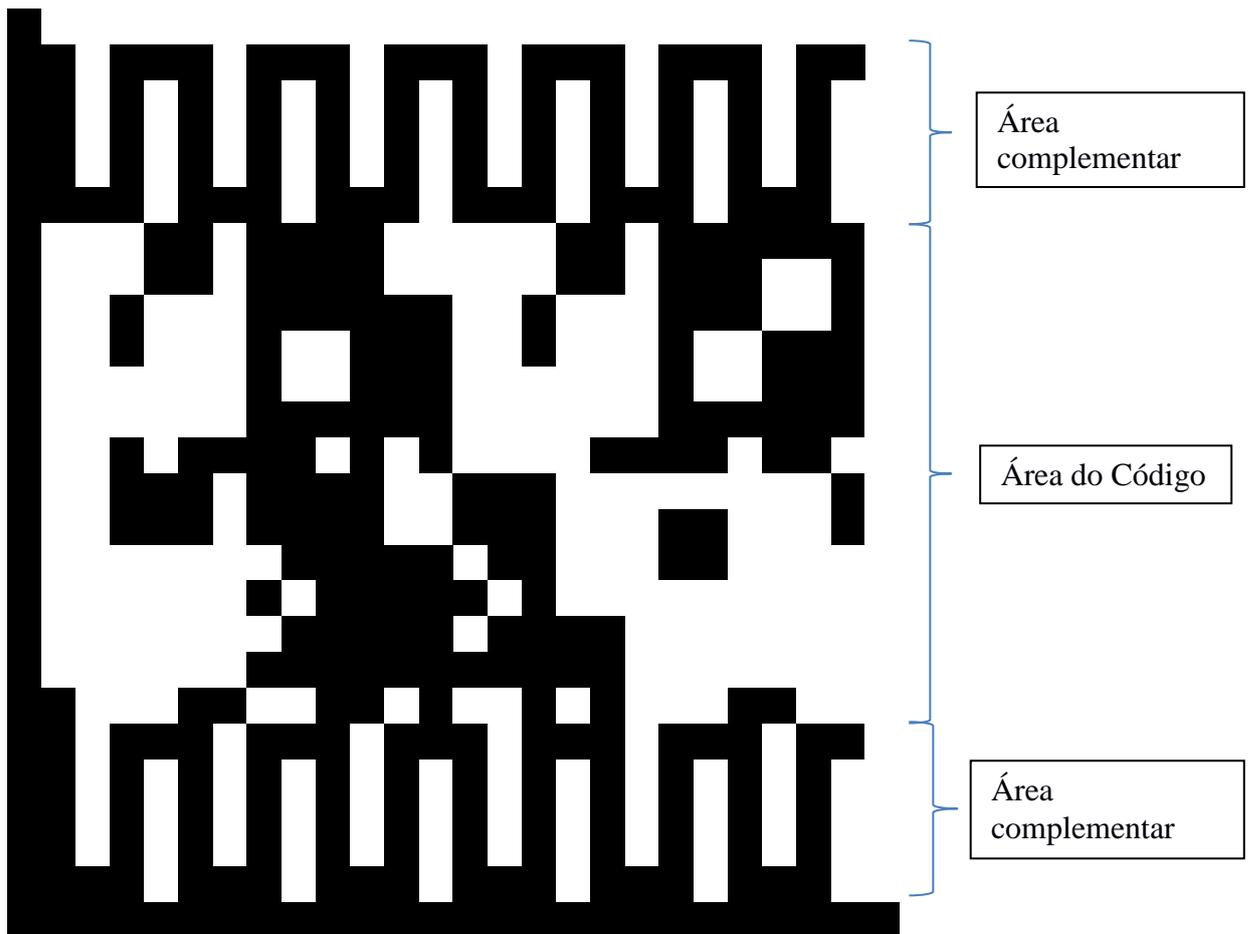


Figura 31 – “MATEMÁTICA E UFC” em Código QQ

Fonte: Do próprio Autor

Exercícios:

Visando por em prática a formação de códigos através deste método com código QQ serão sugeridos alguns exercícios onde se deve procurar seguir de modo idêntico ao processo aqui utilizado. Deverão ser observados todos os procedimentos adotados como os dígitos verificadores, a formatação do quadrado onde está inserido o código e a complementação em padrões já estabelecidos.

- 1) Quais os dígitos verificadores dos caracteres:
 - a) A;
 - b) j;
 - c) 7;
 - d) %;
 - e) Z.

- 2) Quais as possíveis formas de caracterização nos moldes de uma tabela 6x3 para as seguintes palavras:
 - a) Cama;
 - b) Pos-Graduacao;
 - c) Ciencias.

- 3) Por fim monte um código completo para os seguintes textos:
 - a) Centro de Tecnologia;
 - b) Apresentação de Dissertação;
 - c) O Codigo QQ como instrumento de aprendizagem de contagem.

6 CONCLUSÃO

A presente dissertação versou sobre o conceito da análise combinatória, tendo sido vistos algumas definições, propriedades e exercícios relativos a alguns princípios de contagem com o da Bijeção, o da Multiplicação e o da Inclusão e Exclusão. Foi falado um pouco da história da contagem e as principais motivações para o desenvolvimento desse tema da matemática. Foi visto que diversos problemas de contagem tornam a matemática uma ciência bastante interessante, pois eles não necessitam de uma fórmula toda pronta e montada para se chegar a sua resolução. Como o homem convive desde a infância com problemas práticos que o levam a usar diversas estratégias que por vezes nem se sabe que estar envolvido no conceito de contagem como tema matemático, qualquer pessoa com um sentimento mais lógico pode resolver problemas mais sofisticados de contagem sem tomar nenhum conceito formal do assunto.

Foi trabalhado nesse sentido, um problema de contagem de quadrados em uma quadrícula, que pode ser resolvido de forma braçal, mas que com certa dose de sistematização pode ser demasiadamente facilitada sua resolução. Foi mostrada uma forma de resolução utilizando um processo de amarração de quadrados de mesmo enquadramento e contando todas as possibilidades o que resultou em um somatório e com uma mudança nos termos dessa soma numa progressão aritmética de ordem superior o que possibilitou encontrar uma fórmula fechada para o problema. Ainda mais, foi possível expandir o problema para a dimensão três e até a dimensão n através de uma conjectura.

Utilizando o problema dos quadrados e buscando uma aplicação prática, foi desenvolvido um código de leitura rápida com a utilização de 93 caracteres. Evidentemente que é um estudo inicial, contudo o interessante é que esse código é único para cada caracter caracterizando-o fechado e com possível expansão para outros caracteres, e sendo formado por um problema simples de contagem. Foi feito um sistema de verificação de erro através de um dígito verificador e uma formatação dentro de um quadrado com a implementação de um fixador que mostra a posição correta do quadrado.

Como dito anteriormente uma ideia para a formação desse código é a de utilização em sala de aula como ferramenta de desenvolvimento matemático de um problema que pode ser expandido de forma diversa e interessante e que pode ser de grande motivador para o estudo de contagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. Introdução à Análise Combinatória. 4ª ed. Editora Ciência Moderna, 2007.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; Fernandez, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. 7ª edição. Editora Coleção do Professor de Matemática, 2005.

SCHEINERMAN, Edward R., Matemática Discreta: Uma introdução. 2ª edição. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.

CARDOSO, Domingos M. A Matemática e os seus Problemas. Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 2006.

SILVA, Hélio de Menezes; ALEXANDRE, Eduardo de Santana Medeiros. Matemática Elementar. Editora da UFPB, João Pessoa. 2014.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Métodos de Contagem e Probabilidade. 1ª Edição. Editora Impa, 2015.

WILLIAMSON, S.G., Discrete Mathematics – Vol 1, University of California, San Diego, USA, 1971.

Análise combinatória: a importância dos métodos de contagem – parte 1, por João Carlos Cataldo. Disponível em: <http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo=31> acesso em 14/01/17.

DEFINIÇÃO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA. Disponível em: <https://www.google.com.br/?gws_rd=ssl#q=defini%C3%A7%C3%A3o+de+An%C3%A1lise+Combinat%C3%B3ria++>. Acesso em 14/01/17

FLAJOLET, Philippe; SEDGEWICK, Robert. ANALYTIC COMBINATORICS - SYMBOLIC COMBINATORICS. France/ USA. First Edition, May 2002.

HISTÓRIA DO CÓDIGO DE BARRAS. Disponível em:

<https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_de_barras> Acesso em 17/01/2017

CÓDIGO DE BARRAS PARA PRODUTOS. Disponível em:

<http://www.gbnet.com.br/v2/codigo_de_barras_fontes_gs1_gtin_ean_13_para_produto.html
> Acesso em 17/01/2017.

HISTÓRIA DOS CÓDIGOS QR Disponível em: < https://en.wikipedia.org/wiki/QR_code>

Acesso em 17/01/2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. Biblioteca Universitária. Guia de normalização de trabalhos acadêmicos da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2013.

APÊNDICE A – SOMA DOS QUADRADOS DOS N PRIMEIROS INTEIROS POSITIVOS

Vamos determinar a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos, ou seja, calcular

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Considere a identidade

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1$$

já nossa velha conhecida, obtida da fórmula do cubo de uma soma

$$(a + b)^3 = a^3 + 3^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ fazendo } a = n \text{ e } b = 1.$$

Vamos fazer sucessivamente, $n = 0, 1, 2, \dots, n$ na identidade acima:

$$n = 0: (0+1)^3 = 1^3 = 0^3 + 3.0^2 + 3.0 + 1$$

$$n = 1: (1+1)^3 = 2^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1$$

$$n = 2: (2+1)^3 = 3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1$$

$$n = 3: (3+1)^3 = 4^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1$$

$$n = 4: (4+1)^3 = 5^3 = 4^3 + 3.4^2 + 3.4 + 1$$

.....

.....

.....

$$n = n: (n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1$$

Somando membro a membro as $(n + 1)$ igualdades acima, vem:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + 3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) + 3(1+2+3+\dots+n) + (n+1). \end{aligned}$$

Nota: Observe que o número 1 aparece $(n+1)$ vezes, daí, $(n+1).1 = (n+1)$.

Simplificando a expressão acima, observando que os termos de expoente 3 cancelam-se mutuamente, fica:

$$(n + 1)^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) + 3(1+2+3+\dots+n) + (n+1).$$

Ora, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ é justamente o que estamos procurando. Vamos chama-la de S.

A soma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ é exatamente a soma dos n primeiros números naturais, os quais formam uma Progressão Aritmética - PA de primeiro termo 1, último termo igual a n e número de termos igual também a n. Como já vimos no capítulo PA, tal soma é dada por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n+1)/2$$

Substituindo, fica:

$$(n + 1)^3 = 3.S + 3.n(n+1)/2 + n+1.$$

Isolando o termo 3S, vem:

$$3S = (n+1)^3 - (n+1) - 3n(n+1)/2$$

Multiplicando ambos os membros por 2, vem:

$$6S = 2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)$$

Colocando n+1 em evidencia no segundo membro, fica:

$$6S = (n+1)[2(n+1)^2 - 2 - 3n]$$

Efetuando as operações indicadas no segundo membro, vem:

$$6S = (n+1)[2(n^2+2n+1) - 2 - 3n]$$

$$6S = (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n)$$

$$6S = (n+1)(2n^2 + n)$$

$$6S = (n+1).n.(2n + 1)$$

Finalmente, fica:

$$S = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$$

A fórmula acima, permite o cálculo da soma dos quadrados dos n primeiros números naturais positivos, ou seja $1^2+2^2+\dots+n^2$.

Como a soma S acima é sempre um número inteiro, podemos concluir da expressão acima, que o produto $n(n+1)(2n+1)$, sendo n um número natural, é um número divisível por 6.

Como $n(n+1)(2n+1) = (n^2+n)(2n+1) = 2n^3 + 3n^2 + n$, podemos dizer de uma forma genérica que o valor numérico do trinômio $2n^3 + 3n^2 + n$ será sempre um número divisível por 6, para todo número natural n.

APÊNDICE B – SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A. DE ORDEM SUPERIOR.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Progressão_aritmética

Generalizando-se para o caso de uma sequência de ordem k , as fórmulas abaixo se aplicam para uma sequência de qualquer ordem. O primeiro termo dessa sequência é aqui designado por r_0 a razão primária (diferença entre dois termos consecutivos na sequência primária) por r_1 a razão secundária (diferença entre dois termos consecutivos na sequência formada pelas razões primárias) por r_2, \dots a razão de ordem k por r_k . De modo semelhante ao fato de dois pontos serem suficientes para se determinar uma reta, com dois valores de uma sequência de ordem 1 (linear) e a posição que ocupam, é possível escrever a equação dessa sequência. Para uma sequência de ordem 2, são necessários e suficientes 3 valores. Em geral, para uma sequência de ordem k são necessários $k+1$ valores. Para uma sequência de ordem k , o termo geral é calculado por:

$$a_n = \sum_{m=0}^k \binom{n-1}{m} r_m$$

O coeficiente binomial $\binom{n-1}{m}$ corresponde, em análise combinatória, ao número de combinações de $n-1$ elementos agrupados m a m .

A soma dos primeiros termos da sequência (S_n) é calculada por:

$$S_n = \sum_{m=0}^k \binom{n}{m+1} r_m$$

APÊNDICE C – TRIÂNGULOS RETÂNGULOS COM LADOS INTEIROS: PROCURANDO AS HIPOTENUSAS

Fonte: Andrade, José F., MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA n o 41 - Dezembro/2006 -pp. 1-10

O objetivo principal deste artigo é determinar os números inteiros que são hipotenusas de um triângulo retângulo cujos catetos são também números inteiros. Mostraremos que existe um triângulo retângulo com hipotenusa z se e somente se z é divisível por um número primo que deixa resto 1 quando dividido por 4.

Mostraremos também como encontrar todos os tais triângulos retângulos e quantos são eles, em função da decomposição de z em fatores primos.

Procuram-se os valores inteiros de z para os quais $x^2 + y^2 = z^2$. Para $z \leq 25$ é fácil ver que apenas 5, 10, 13, 15, 17, 20 e 25 são hipotenusa de um triângulo retângulo. Com efeito, temos $3^2 + 4^2 = 5^2$, $6^2 + 8^2 = 10^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, $9^2 + 12^2 = 15^2$, $8^2 + 15^2 = 17^2$, $12^2 + 16^2 = 20^2$, $15^2 + 20^2 = 25^2$, $7^2 + 24^2 = 25^2$ e, para os demais números inteiros menores que 25, testes simples mostram que não é possível encontrar um triângulo retângulo com estes valores para sua hipotenusa. Note que 25 é hipotenusa de dois triângulos retângulos não semelhantes.

Na determinação das soluções de $x^2 + y^2 = z^2$ escrevemos z^2 como produto de dois números inteiros: $z^2 = (z + y)(z - y)$ e a partir desta decomposição é que encontramos todos os triângulos retângulos com um cateto determinado. Para determinarmos os inteiros z que são hipotenusa de um triângulo retângulo, não é possível escrever z^2 como produto de dois números inteiros em função de x e y , mas de modo similar ao da resolução da equação de grau 2 com discriminante negativo, no qual passamos para o conjunto dos números complexos para encontrar suas raízes, é possível e conveniente passar para o conjunto dos números complexos para escrever z^2 como produto de dois fatores que dependam de x e y : $z^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$. Como $x, y \in \mathbb{Z}$, nossos fatores pertencem ao anel $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$, conhecido como anel dos inteiros de Gauss, o qual tem propriedades muito boas.

Enunciaremos agora três teoremas envolvendo os elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}[i]$:

Teorema (Fermat). Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. São equivalentes:

1. $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.
2. p não é irredutível em $\mathbb{Z}[i]$.
3. p é soma de dois quadrados.

Teorema. Os elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}[i]$ são:

1. $\pm p, \pm pi$ com p primo em \mathbb{N} tal que $p \equiv 3 \pmod{4}$.
2. $a + bi$ com $a^2 + b^2 = p$, p primo em \mathbb{N} .

Teorema Todo elemento não nulo e não inversível de $\mathbb{Z}[i]$ se escreve de maneira única, a menos de elementos invertíveis, como produto de elementos irredutíveis.

Observações:

1. O último teorema é semelhante ao Teorema Fundamental da Aritmética.
2. A maneira de escrever um número primo como soma de dois quadrados $p = a^2 + b^2$ com $a \geq b > 0$ é única.
3. Como $1 + i = -i(1 - i)$, $1 + i$ e $1 - i$ são associados. Usando a última igualdade, temos $2 = 1^2 + 1^2 = (1 + i)(1 - i) = -i(1 + i)^2$.
4. Quando $p \equiv 1 \pmod{4}$, escrevemos $p = a^2 + b^2$. Como p é ímpar, então a e b têm paridade distinta e podemos supor $a > b > 0$.

Neste caso, verificamos que $a + bi$ e $a - bi$ não são associados.

5. Se cada um dos inteiros $r, s \in \mathbb{N}$ é soma de dois quadrados, então rs também é. Com efeito, supondo $r = a^2 + b^2$ e $s = c^2 + d^2$, temos $rs = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = N(a + bi)N(c + di) = N((a + bi)(c + di)) = N(ac - bd + (ad + bc)i) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

A hipotenusa

Começamos com o nosso resultado principal, que estabelece quais os inteiros que são hipotenusas de triângulos retângulos.

Teorema. Seja z um número inteiro positivo. Então existe um triângulo retângulo com hipotenusa z e catetos números inteiros se e somente se z é divisível por um número primo p tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$, i. e. p deixa resto 1 quando dividido por 4.

Lema Sejam p_1, \dots, p_k números primos distintos tais que $p_j \equiv 1 \pmod{4}$. Suponha que $p_j = a_j^2 + b_j^2$ com $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$ e seja $\alpha = x + yi = (a_1 + b_1i) \dots (a_k + b_ki)$. Então x e y são primos entre si (em \mathbb{Z}).

Vamos agora ver como encontrar todos os triângulos retângulos com hipotenusa z .

Seja $z = z_1 z_2$, onde todos os primos p_j que dividem z_1 são tais que $p_j \equiv 1 \pmod{4}$ e todos aqueles q_j que dividem z_2 são tais que $q_j = 2$ ou $q_j \equiv 3 \pmod{4}$. x e y têm que ser múltiplos de z_2 . Portanto, o que realmente importa na determinação dos triângulos retângulos com hipotenusa z são os primos p_j que dividem z_1 . Seja pois d um divisor de z_1 , $z = dz_3$.

Vamos obter x_1, y_1 primos entre si tais que $x_1^2 + y_1^2 = d^2$ e tomando $x = x_1 z_3$ e $y = y_1 z_3$ teremos $x^2 + y^2 = z^2$.

Podemos então supor que $z = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$ com $p_j \equiv 1 \pmod{4}$ e vamos encontrar x e y primos entre si tais que $x^2 + y^2 = z^2$.

Para facilitar a compreensão, vamos tratar inicialmente do caso particular $k = 1$. Suponha então que $z = p^t$ com $p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$. Então $z^2 = N(p^t) = N((a + bi)^t)N((a - bi)^t) = N((a + bi)^t)N((a + bi)^t) = N((a + bi)^{2t})$. Assim, se $(a + bi)^{2t} = x + yi$ então $x^2 + y^2 = z^2$ e, pelo Lema 3.1, x e y são primos entre si. No caso de x ou y ser negativo, trocamos o sinal para obter o valor da cateto. Podemos escolher $z^2 = N(p^t) = N((a + bi)^t)N((a - bi)^t) = N((a - bi)^t)N((a - bi)^t) = N((a - bi)^{2t})$. Mas, por propriedade da conjugação complexa $(a - bi)^{2t} = x - yi$, e portanto obtemos o mesmo triângulo retângulo. Porém, não podemos trocar alguns dos fatores $a + bi$ por $a - bi$ sem trocar todos eles, porque neste caso os inteiros x e y são ambos divisíveis por p . Ainda mais, devido à decomposição única dos elementos de $Z[i]$ em produto de elementos irredutíveis, não é possível encontrar outro triângulo retângulo não semelhante a este com os catetos primos entre si. Consequentemente, neste caso temos apenas um triângulo retângulo com hipotenusa z e catetos x e y primos entre si.

Suponha agora que $k > 1$, $p_j = a_j^2 + b_j^2 = (a_j + b_j i)(a_j - b_j i)$ e $\alpha_j = a_j + b_j i$. Seja $\alpha = x + yi$ um dos números complexos $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$ onde $\beta_j = \alpha_j^{2t_j}$ ou $\beta_j = \alpha_j^{2t_j}$. Temos que $N(\alpha) = z^2$, i. e., $x^2 + y^2 = z^2$ e, x e y são primos entre si. Vamos agora contar quantos são os tais triângulos. Existem 2^k possibilidades para a escolha de α , mas dois a dois, um é o conjugado complexo do outro, gerando o mesmo um triângulo retângulo. Obtivemos, portanto, $2^k / 2 = 2^{k-1}$ triângulos retângulos não semelhantes com catetos x e y primos entre si e tais que $x^2 + y^2 = z^2$. Como no caso $k = 1$, não é possível encontrar um outro triângulo retângulo não semelhante a estes já obtidos com os catetos primos entre si.

Seja $z = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$ com $p \equiv 1 \pmod{4}$ e vamos contar quantos são os triângulos retângulos com hipotenusa z .

Tomemos um divisor $d = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$ de z com expoentes positivos, $z = d z_1$. Para este divisor obtemos 2^{m-1} triângulos retângulos com catetos primos entre si e hipotenusa d . Multiplicando os catetos e a hipotenusa por z_1 , obtemos 2^{m-1} triângulos retângulos com hipotenusa z . Com estes primos $p_{j_1}; p_{j_2}, \dots, p_{j_m}$ são exatamente $t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_m}$ divisores. Variando $j_1; j_2, \dots, j_m$ com $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq k$, vemos que z possui $X_1 \cdot j_1 < j_2 < \dots < j_m \cdot k$ $t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_m}$ divisores com exatamente m primos distintos. Finalmente fazendo m variar de 1 a k , acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema Seja $z = p^{t_1} p^{t_2} \dots p^{t_k} w$. Suponha que os números primos p_j são distintos, que $p_j \equiv 1 \pmod{4}$ e que w não é divisível por nenhum primo p tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Então existem

$$\sum_{m=1}^k 2^{m-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq k} t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_m} \right)$$

triângulos retângulos não semelhantes com hipotenusa z e catetos números inteiros.

No caso particular em que $z = p_1 p_2 \dots p_k w$, a soma do Teorema adquire uma forma interessante.

Corolário. Suponha que $z = p_1 p_2 \dots p_k w$ e que as demais condições do Teorema são satisfeitas. Então existem

$$\sum_{m=1}^k 2^{m-1} \binom{k}{m}$$

triângulos retângulos não semelhantes com hipotenusa z e catetos números inteiros.

Exemplo $z = 325 = 5^2 \times 13$

Primeiro observamos que 5 e 13 deixam resto 1 quando divididos por 4.

São 2 divisores com os primos 5 e 13 e para cada um deles temos $2^{2-1} = 2$ triângulos retângulos. São 2 divisores com o primo 5 e um com o primo 13 e para cada um deles temos $2^{1-1} = 1$ triângulo retângulo.

No total são 7 triângulos retângulos não semelhantes com hipotenusa 325. Vamos determiná-los:

Como $5 = 2^2 + 1^2 = (2 + i)(2 - i)$ e $13 = 3^2 + 2^2 = (3 + 2i)(3 - 2i)$, sejam

$$\alpha_1 = (2 + i)^4 (3 + 2i)^2 = (-7 + 24i)(5 + 12i) = -323 + 36i;$$

$$\alpha_2 = (2 + i)^4 (3 - 2i)^2 = (-7 + 24i)(5 - 12i) = 253 + 204i;$$

$$\alpha_3 = 5(2 + i)^2 (3 + 2i)^2 = 5(3 + 4i)(5 + 12i) = -165 + 280i;$$

$$\alpha_4 = 5(2 + i)^2 (3 - 2i)^2 = 5(3 + 4i)(5 - 12i) = 315 + 80i;$$

$$\alpha_5 = 13(2 + i)^4 = 13(-7 + 24i) = -91 + 312i;$$

$$\alpha_6 = 25(3 + 2i)^2 = 25(5 + 12i) = 125 + 300i;$$

$$\alpha_7 = 65(2 + i)^2 = 65(3 + 4i) = 195 + 260i;$$

Como $N(\alpha_j) = 325^2$, temos então que

$$323^2 + 36^2 = 325^2;$$

$$253^2 + 204^2 = 325^2;$$

$$165^2 + 280^2 = 325^2;$$

$$315^2 + 80^2 = 325^2;$$

$$91^2 + 312^2 = 325^2;$$

$$125^2 + 300^2 = 325^2;$$

$$195^2 + 260^2 = 325^2;$$

e encontramos os 7 triângulos retângulos cujos lados são números inteiros e com hipotenusa 325.