Universidade Federal da Bahia – UFBA
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Sociedade Brasileira de Matemática – SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Uma abordagem sobre os números de Liouville

Evandro Menezes de Souza Amarante

Salvador – Bahia
Março de 2017

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

AM485 Amarante, Evandro Menezes de Souza
Uma abordagem sobre os números de Liouville / Evandro Menezes de Souza Amarante. -- Salvador, 2017.
56 f.

Orientador: Evandro Carlos Ferreira dos Santos.
Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2017.

1. Números reais. 2. Números transcendentes. 3. Números Algébricos. 4. Números de Liouville. I. Santos, Evandro Carlos Ferreira dos. II. Título.

Uma abordagem sobre os números de Liouville

Evandro Menezes de Souza Amarante

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos.

Salvador – Bahia
Março de 2017

Uma Abordagem sobre os Números de Liouville

Evandro Menezes de Souza Amarante

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 03/03/2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos (orientador)
UFBA

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento
UNEB

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior
UFAL

Á minha familia

Agradecimentos

Agradeço à Deus em primeiro lugar, pois nele encontrei forças para continuar a jornada que, por vezes, me encontrava cansado, desanimado e, em alguns momentos, bastante estressado por conta da rotina do dia à dia.

Aos meus pais que, de maneira honrosa e sempre prezando pela retidão, me fez ser a pessoa que sou hoje.

À minha noiva, Ingrid Barros, que, por muitas das vezes, foi mais que uma parceira. Foi uma mãe, uma irmã, uma amiga, por vários momentos em que necessitei desses atributos. Por inúmeras vezes tive que trocar feriados, finais de semana na sua companhia, para estar focado estudando para os exames que aguardavam.

Foram várias tardes, noites, feriados associado à inúmeras horas de estudos na companhia de vocês. Sendo assim, agradeço aos amigos Raimundo, Carol e Felipe que, de uma forma bem saudável, a amizade ali contruida ao longo desses 2 anos, foi de extrema importância para que o sucesso de todo o grupo fosse atingido. Não é só mais uma conquista, mas o simples fato de ter conhecido todos vocês, já valeu muito à pena.

Ao professor e amigo, Adriano Cattai que sempre se mostrou presente nos momentos em que tive dúvidas quanto à escrita da dissertação no programa requerido.

Ao coordenador do programa de mestrado, Marco Antonio que, em todas vezes que precisei, sempre foi muito prestativo procurando assim, me ajudar da melhor forma possível e com toda paciência do mundo.

Ao professor e orientador, Evandro Carlos Ferreira dos Santos que, em todo o momento foi atencioso, dando assim, liberdade e autonomia suficiente para a conclusão deste trabalho.

"Mas, sejam fortes e não desanimem,
pois o trabalho de vocês será
recompensado."
(2 Crônicas 15:7 - Escrituras Sagradas)

Resumo

Neste trabalho, iremos fazer um aprofundamento no que diz repeito às definições e teoremas que envolvem os Números Algébricos e Transcendentes, tendo um enfoque especial nos Números de Liouville, que é uma classe de Números Transcendentes. Por fim, será apresentado como proposta didática, exercícios e orientações quanto à temática à ser estudada em sala de aula.

Palavras-chave: Números Algébricos, Números Transcendentes, Números de Liouville

Abstract

In this work, we will deepen the definitions and theorems involving the Algebraic and Transcendent Numbers, with a special focus on the Numbers of Liouville, which is a class of Transcendent Numbers. Finally, it will be presented as didactic proposal, exercises and orientations on the subject to be studied in the classroom.

Keywords: Algebraic Numbers, Transcendent Numbers, Numbers of Liouville

Conteúdo

Introdução

Desde a Antiguidade, os números estão inseridos no cotidiano dos seres humanos. As atividades ali desenvolvidas por eles, sejam realizando contagem ou medições, foram, de uma certa forma, bastante significativa para que os números que conhecemos atualmente, fossem se desenvolvendo com o passar do tempo. Sabe-se, por exemplo, que um dos primeiros sistemas de base que se têm conhecimento, é o sistema de base e 5, 10, ou até 20. Tais possibilidades, se dá ao fato dos seres humanos conhecerem a quantidade de dedos nas mãos e nos pés, e com isso, algumas tribos faziam essas associações para assim estabelecer um padrão no processo de contagem.

Com o passar do tempo e de acordo com a necessidade impregnada nas atividades diárias (ou não) os números passaram à ser classificados em conjuntos. As primeiras classes de números que tiveram uma caracterização formal foram o conjunto dos **Números Naturais** representado por $\mathbb{N}$. Desta forma, Giuseppe Peano, enunciou quatro axiomas sobre os números naturais. Os axiomas podem ser listados da seguinte maneira:

Axioma 1 - 0 (zero) é um número natural e não é sucessor de um número natural.

Axioma 2 - Todo número natural têm um único sucessor, que também é um número natural.

Axioma 3 - Se dois números têm o mesmo sucessor, então eles são iguais entre si.

Axioma 4 - Se um subconjunto X dos númeos naturais possui o elemento zero e também o sucessor de todos os elementos de X, então X é igual ao conjunto dos números naturais.

A caracterização feita por Peano ficou da seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Como o surgimento do conjunto dos números naturais está intimamente associado com o processo de contagem, mais tarde, houve-se uma necessidade de se representar o vazio. Daí, é neste contexto histórico que surge o número 0. Alguns autores, atribuem a representação do conjunto dos números naturais começando pelo 1, outros já atribuem começando pelo 0, é facultativo esta escolha. Vai depender muito do que se esteja trabalhando. O conjunto dos números naturais é munido de duas operações básicas: a adição e a multiplicação. A adição associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{N}$ a soma $x + y$. A multiplicação por sua vez associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{N}$ o produto $x \cdot y$

O próximo conjunto que temos conhecimento, é o conjunto dos **Números Inteiros** que é representado por $\mathbb{Z}$. Este conjunto é formado pelos números naturais, pelo zero e pelos números negativos. A necessidade da criação deste conjunto está associado ao fato de que dados $a, b \in \mathbb{N}$, a diferença $a - b \notin \mathbb{N}$ se $a < b$. Desta forma, os números inteiros são representados da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Em seguida, temos o conjunto dos **Números Racionais** representado por $\mathbb{Q}$. Ele é definido como o quociente de dois números inteiros, sendo o denominador diferente de zero. Sua representação é dada por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Desta forma, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, uma vez que, os números naturais e inteiros são racionais podem ser escritos com denominador 1. Assim concluímos que o conjunto dos números naturais e o dos números inteiros podem ser vistos como subconjuntos do conjunto dos números racionais. Além dos naturais e dos inteiros, as frações, os decimais finitos e os decimais infinitos periódicos são números racionais. Por exemplo,

$$4 = \frac{4}{1};\ 3,5 = \frac{7}{2};\ 0,3333\ldots = \frac{1}{3}$$

Para os Pitagóricos, o universo era perfeito onde tudo podia ser representado e regido pelos números. Eles acreditavam que todo número poderia ser escrito como a razão entre dois inteiros. O fato da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário não puder ser expressa como um número racional, abalou toda a crença de perfeição. A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi um dos momentos tão marcantes na história que, os pitagóricos procuraram manter em segredo tal descoberta. Porém, alguns historiadores afirmam que Hipaso, que era membro da Escola Pitagórica, foi expulso da sociedade por revelar o segredo, e assim, teria sido lançado ao mar.

Diferente da época do surgimento dos números irracionais, hoje eles já são bem aceitos. Eles são definidos como números que não podem ser expressos como a razão entre dois inteiros. Enquanto os números racionais possuem um padrão, como as dízimas periódicas os irracionais não possuem padrão algum. Como exemplo temos: $\frac{3}{7} = 0,428571428571428571\ldots$ que é um número racional e $\sqrt{3} = 1,732050807568877\ldots$ que é um número irracional.

A possibilidade de contar os elementos dos cojuntos infinitos, coube ao matemático Georg Cantor. Ele descobriu que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais são enumeráveis (ou contáveis), pelo fato ser possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre estes conjuntos e o conjunto dos números naturais. Porém, o conjunto dos números irracionais não é enumerável (incontável). A união dos conjuntos dos números racionais e dos irracionais forma o conjunto dos **Números Reais**, representado por $\mathbb{R}$. Desta forma, o foco deste trabalho, será em torno dos números algébricos reais e transcendentes fazendo assim, uma classificação entre eles, **Números Algébricos**, **Números Transcendentes** e **Números de Liouville** dividido assim em três capítulos.

No primeiro capítulo, faremos uma abordagem sobre números inteiros. Além disso, serão explanados sobre **Inteiros Algébricos**, evidenciando assim, o fato de que um inteiro algébrico (real) é inteiro ou irracional. Além disso, serão explanados sobre os **Números Algébricos e Transcendentes**, e as propriedades relacionadas aos **Conjuntos Enumeráveis** dando ênfase assim, definições, teoremas e exemplos pertinentes aos mesmos, até enumerabilidade dos números algébricos, conforme pode ser visto em [2] e [3].

No segundo capítulo, serão abordados sobre os **Números Transcendentes** e os **Números de Liouville**. Desta forma, serão apresentadas as demonstrações referentes à representação de qualquer número real como soma de números de Liouville, como pode ser visto em [1], [2] e [8], bem como, à irracionalidade e a transcendência dos números de Liouville. Além disso, à título de curiosidade do leitor, será apresentada a demonstração da transcendência do número e.

Por fim, no terceiro capítulo que é destinado à proposta didática na sala de aula, será apresentado uma sequência didática composta de exercícios com soluções (alguns destes podem ser verificados em [4] e [5]) e comentários sobre os mesmos, bem como, algumas orientações pedagógicas de como o docente deve intervir em todo o processo relacionado à proposta de trabalho.

Capítulo 1

Números Algébricos

O conceito de número, talvez tenha sido um dos primeiros conceitos matemáticos absorvidos pela humanidade nesta perspectiva no processo de contagem. Sendo assim, os números são classificados em números algébricos e números transcendentes. Chamamos de número algébrico, qualquer raiz de um polinômio $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ onde $a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq i \leq n$. Para tanto, neste primeiro capítulo, serão apresentados conceitos e propriedades referentes aos números inteiros, assim como, definições, teoremas, exemplos no que referem-se aos inteiros algébricos, números algébricos reais, conjuntos enumeráveis, conforme pode ser verificado em [2] e [3].

1.1 Números Inteiros

Definição 1.1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a divide b, e escrevemos $a|b$, se existir $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$. Neste caso, diremos que a é um fator ou divisor de b.

Exemplo 1.1. $4|12$, pois $12 = q \cdot 4 \Rightarrow q = 3$

Definição 1.2. **(a)** Um número $p \in \mathbb{N}, p > 1$, é chamado primo se este só possui dois divisores naturais: 1 e ele mesmo. Assim, se p é primo então $\forall d \in \mathbb{N}$ tal que $d|p$. Segue que $d = p$ ou $d = 1$. Como resultado têm-se que, se $p \in \mathbb{Z}, p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$ é primo, os únicos números inteiros que o dividem são $\pm p$ e ± 1.

Exemplo 1.2. $p = 7$ e $d|p \Rightarrow d = 1$ ou $d = 7$

Definição 1.3. Seja $a \in \mathbb{Z}$. Um número inteiro b é chamado múltiplo de a se $b = aq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.3. $a = 6, q = 3$; $b = a \cdot q \Rightarrow b = 18$ Portanto, 18 é múltiplo de 6.

Definição 1.4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, um número natural d é chamado de máximo divisor comum de a e b, denotado por $d = mdc(a, b)$, se satisfazer as afirmações abaixo:

(i) $d|a$ e $d|b$;

(ii) se $r \in \mathbb{Z}$ é tal que $r|a$ e $r|b$, então $r|d$.

Exemplo 1.4. Se $a = 20, b = 25$ então $mdc(20, 25) = 5$, pois $5|20$ e $5|25$ e além disso, se $r|20$ e $r|25$ então $r = 1$ ou $r = 5$. Logo $r|5$.

Teorema 1.1. (**Algoritmo da Divisão Euclidiana**) Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem (e, são únicos) $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < |b|$, tais que,

$$a = qb + r \tag{1.1}$$

Demonstração: (i) Existência. Analisando para **b>0**. Consideremos o conjunto dos números múltiplos de b ordenados de acordo com a ordem natural da reta, isto é, o conjunto $\ldots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \ldots$ com,

$$\ldots, -3b \leq -2b \leq -b \leq 0 \leq b \leq 2b \leq 3b \ldots$$

Note que disso decorre uma decomposição da reta em intervalos disjuntos da forma

$$[qb, (q+1)b[= \{x \in \mathbb{R}/qb \leq x < (q+1)b\},$$

com $q \in \mathbb{Z}$.

Assim, dado $a \in \mathbb{Z}$, este pertence a apenas um desses intervalos e portanto necessariamente é da forma $a = qb + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 0$. É claro que $r < (q+1)b - qb = b$.

Analisando agora para **b < 0**. Aplicando o **Teorema 1.1** para $|b|$, têm - se que existem $q'r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < |b|$ tais que

$$a = q'|b| + r. \tag{1.2}$$

Fazendo $q = -q'$, como $|b| = -b$, (pois $b < 0$), obtemos de **1.2** $a = qb + r$, onde $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < |b|$.

(ii) Unicidade. Resta demonstrar que q e r, os quais satisfazem **(1.1)** são únicos. De fato, suponha que $a = qb + r$ e $a = q_1b + r_1$, com $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r_1 < |b|$. Assim,

$$qb + r = q_1b + r_1 \Rightarrow r - r_1 = (q_1 - q)b. \tag{1.3}$$

Afirmamos que $r = r_1$. Com efeito, se $r \neq r_1$, então: $0 < |r_1 - r|$. Além disso, têm-se que $|r_1 - r| < b$. De fato, vamos admitir, sem perda de generalidade, que $|r < r_1|$, consequentemente $|r_1 - r| > 0$ e $|r_1 - r| = r_1 - r$. Assim, se $r_1 - r = |b|$, então $r_1 = |b| + r$ e portanto $r_1 > |b|$, que é absurdo. Também, se $r_1 - r > |b|$, então $r_1 > |b| + r > |b|$, gerando novamente o absurdo $r_1 > b$. Logo pela Lei da Tricotomia, $|r_1 - r| = r_1 - r < |b|$. Segue que

$$0 < |r_1 - r| < |b|. \tag{1.4}$$

Agora de **1.3** obtemos,

$$|r_1 - r| = |q_1 - q||b|. \tag{1.5}$$

Substituindo **1.5** em **1.4**, obtemos,

$$0 < |q_1 - q||b| < |b|.$$

Logo, $0 < |q_1 - q| < 1$, o que é um absurdo, pois $|q_1 - q|$ é um número inteiro (pois q e $q_1 \in \mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Z}$ vale a Lei do Fechamento da Adição). Portanto $r = r_1$. Note que essa igualdade combinada com **1.3** implica $q_1 = q$, já que $0 = (q_1 - q)b$ e $b \neq 0$ por hipótese.

□

Exemplo 1.5. Se $a = 22$ e $b = 5$ então obtemos $q = 4$ e $r = 2$ pois $22 = 4 \cdot 5 + 2$.

Lema 1.1. Sejam $a, x_0, b, y_0, d \in \mathbb{Z}$, $d|a$ e $d|b$, então $d|(ax_0 + by_0)$.

Demonstração: Como $d|a$ (pela definição 1.1) implica que existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $a = qd$. Também (pela definição 1.1) $d|b$ implica que existe $p \in \mathbb{Z}$, tal que $b = pd$. Logo,

$$ax_0 + by_0 = qdx_0 + pdy_0 = d(qx_0 + py_0).$$

Observe que $K = (qx_0 + py_0) \in \mathbb{Z}$, (pois vale a lei do fechamento da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$ e $q, x_0, p, y_0 \in \mathbb{Z}$. Portanto, $ax_0 + by_0 = dK, K \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$d|(ax_0 + by_0).$$

□

Teorema 1.2. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ pelo menos um deles não nulo, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = d$ onde $d = mdc(a, b)$.

Demonstração: Considere o conjunto C de todos os inteiros positivos da forma $ax + by$, isto é, $C = \{n \in \mathbb{N}\ n > 0\ e\ n = ax + by\ para\ algum\ x\ e\ algum\ y\}$. O conjunto C não é vazio, pois tomando $x = a$ e $y = b$ temos $n = aa + bb \in C$. Utilizando o Princípio da Boa Ordenação podemos afirmar que C tem um menor elemento. Dessa forma, existe $d \geq 1$ tal que $d = ax_0 + by_0$, com $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, e

$$d \leq ax + by \tag{1.6}$$

para todo $ax + by \in C$. A seguir afirmamos que

$$d|ax + by \tag{1.7}$$

$\forall ax + by \in C$. De fato, suponhamos por contradição, que d não divide $ax + by$. Logo existem $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 < r < d$ tais que

$$ax + by = qd + r = q(ax_0 + by_0) + r,$$

de onde segue que

$$r = a(x - qx_0) + b(y - qy_0) \qquad \textbf{(1.8)}$$

Como $r > 0$, a expressão 1.8 diz que $r \in C$. Porém, isso é um absurdo pois $r < d$, contrariando o fato de assumirmos d como o menor elemento do conjunto C. Logo $d|ax + by$. De fato,

$$|a| = a(sgn\{a\}) + b \cdot 0 \qquad \textbf{(1.9)}$$

e analogamente para $|b|$; em 1.9 onde $sgn\{a\} = +1$ se $a > 0$, e $sgn\{a\} = -1$ se $a < 0$, em ambos os casos $sgn\{a\} \in \mathbb{Z}$. A relação $d|ax + by$ implica $d||a|$ e $d||b|$. Além disso,

$$d \mid |a| \Rightarrow d|a,$$

$$d \mid |b| \Rightarrow d|b \qquad \textbf{(1.10)}$$

Por outro lado, se $n \in \mathbb{N}$ é tal que pelo **Lema 1.1** $n|a$ e $n|b$, então $n|(ax_0 + by_0)$, ou seja, $n|d$. Portanto, $d|a$ e $d|b$ e, também para $n \in \mathbb{N}$, $n|a$ e $n|b$, então $n|d$. Concluimos então que d é o máximo divisor comum de a e b. Logo,

$$d = ax_0 + by_0 = mdc(a, b),$$

o que finaliza a demonstração.

□

Exemplo 1.6. $4|8$ e $4|12 \Rightarrow 4|(8x_0 + 12y_0), \forall x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.2. Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo, e $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração: Se $p|a$, nada temos que provar. Suponhamos que p não divide a, ou seja, $mdc(a, p) = 1$. Logo, pelo Teorema 1.2, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + py_0 = 1$. Assim,

$$abx_0 + pby_0 = b \qquad \textbf{(1.11)}$$

Como $p|ab$ (por hipótese) e claramente $p|pb$, logo pelo Lema 1.1, segue que,

$$p|(abx_0 + pby_0)$$

Portanto de **(1.11)** segue que $p|b$.

□

Exemplo 1.7. Sejam $p = 2, a = 4, b = 7$, assim $2|4 \cdot 7$ e também $2|4$.

Corolário 1.1. Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo e $a \in \mathbb{Z}$. Se $p|a^n$, então $p|a$.

Demonstração: Esse resultado segue usando o Princípio da Indução Finita. Queremos mostrar a veracidade da sentença.

$$P(n) : p|a^n \Rightarrow p|a, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que, obviamente, $\mathbf{P(1)}$ é válida,

$$P(1) : p|a^1 \Rightarrow p|a.$$

Além disso, observe que $\mathbf{P(2)}$ também é válida pois se $p|a^2$, pelo Lema **1.2**, se $p|a \cdot a$, então $p|a$ ou $p|a$, isto é, $p|a$. Suponha agora que para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$P(k) : p|a^k \Rightarrow p|a.$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ é válida, ou seja,

$$p|a^{k+1} \Rightarrow p|a.$$

Observe que $p|a^{k+1}$ é o mesmo que $p|a^k \cdot a$. Agora, do Lema 1.2, segue que $p|a^k$ ou $p|a$. Se $p|a$, o resultado está provado. Por outro lado, se $p|a^k$ temos por Hipótese de Indução que $p|a^k$ implica que $p|a$ e também está provado. Portanto, $p|a^{k+1}$ implica $p|a$. Uma vez explorados os números inteiros, apresentamos então os inteiros algébricos para, em seguida, os números algébricos.

$\square$

1.2 Inteiros Algébricos

Definição 1.5. Chamamos de *Inteiros Algébricos*, qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros.

Sendo assim, qualquer número inteiro b é inteiro algébrico pois a equação

$$x - b = 0$$

tem b por solução.

Exemplo 1.8. Os números $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, são inteiros algébricos, pois eles são as soluções da equação

$$x^2 - 2 = 0$$

Exemplo 1.9. Os números $2i$ e $-2i$ são inteiros algébricos, pois eles são as soluções da equação

$$x^2 + 4 = 0$$

Exemplo 1.10. É fácil verificar que $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ é um inteiro algébrico, pois é solução da equação

$$x^4 - 6x^2 + 2 = 0$$

Sendo assim, conforme os exemplos mencionados, vale deixar claro que, para um número ser considerado inteiro algébrico, o mesmo, não obrigatoriamente, necessita ser um número inteiro. Basta que ele seja solução de um polinômio mônico de coeficientes inteiros.

Exemplo 1.11. Um outro exemplo bastante interessante é o número áureo, ϕ. A razão áurea é definida como $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$ em que $a = b\phi$. Desenvolvendo temos:

$$\frac{b\phi + b}{b\phi} = \frac{b\phi}{b}$$

$$\frac{\phi + 1}{\phi} = \phi$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Calculando então as raízes deste polinômio, chegamos ao resultado que $\phi = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, onde a unica raiz positiva é $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398875$.

Desta forma, verifica-se que o número de ouro é um inteiro algébrico. Vale ressaltar que, a aplicação do número de ouro tem inúmeras finalidades, sendo impossível determinar uma quantidade exata do emprego dessa razão. O termo ϕ pode ser constatado em diversas plantas, bem como, em muitas as flores. A razão áurea, além de ser encontrada em triângulos e retângulos, é possível constatar a sua presença em obras de arte (como é o caso da obra O Homem Vitruviano), construções e em elementos de natureza diversa. Há quem diga que até em outras matérias que o homem ainda não teria descoberto. Ele também é um inteiro algébrico.

Teorema 1.3. *Um inteiro algébrico (real) é inteiro ou irracional.*

Demonstração: Seja β um inteiro algébrico. Suponhamos que $\beta = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 1$, com $(p, q) = 1$. Ou seja, β é um número racional que não é inteiro. Seja

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

Como β é solução do polinomio mônico, substituindo temos:

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

$$p^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-2}p^{n-2}q^2 - \ldots - a_1pq^{n-1} - a_0q^n$$

$$p^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \ldots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1})$$

Seja $t = -a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \ldots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}$, com $\in \mathbb{Z}$. Daí, $p^n = qt$ levando a conclusão que $q|p^n$. Um absurdo! Por hipótese, admitimos que $mdc(p, q) = 1$. Portanto, inteiro algébrico (real) é inteiro ou irracional.

□

1.3 Números Algébricos e Transcendentes

Na seção anterior, foi explanado sobre o que viria à ser um inteiro algébrico, bem como, alguns exemplos. Nesta seção, serão abordados sobre números algébricos e exemplos, assim como, exemplos de números que não são algébricos, isto é transcendentes.

Definição 1.6. Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio com $a_i \in \mathbb{Z}$, onde $0 \leq i \leq n$. Chamamos de *Número Algébrico*, qualquer solução de $P(x) = 0$. Daí, como exemplo temos que qualquer $\alpha = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ é um número algébrico pois α é raiz da equação $qx - p = 0$.

Exemplo 1.12. Os números $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, são números algébricos, pois eles são as soluções da equação

$$2x^2 - 9 = 0$$

Exemplo 1.13. Os números $-\frac{4}{3}$, $\pm\sqrt{3}i$, são números algébricos, pois eles são as soluções da equação

$$3x^3 + 4x^2 + 27x + 36 = 0$$

De um modo geral, têm-se que todo inteiro algébrico é um número algébrico.

Definição 1.7. *Todo número que não seja algébrico é chamado de número transcendente.*

O número de Euler, denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A irracionalidade de e foi demonstrada por Lambert em 1761 e mais tarde por Euler. Veremos mais à frente que o número e é Transcendente. A prova da transcendência de e foi estabelecida por Hermite em 1873.

Proposição 1.1. *O número e é Irracional*

Demonstração: Seja $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$, isto é, $e = \sum\limits_{j=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right)$. Suponhamos que $e = \frac{p}{q}$, com $(p, q) = 1$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Então temos que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{j=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right)$$

Como

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \frac{1}{(q+4)!} + \ldots,$$

ou seja,

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right) = \frac{1}{q!} \left[\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots\right]$$

Chamemos de

$$k = \frac{1}{q!} \left[\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots\right].$$

Desta forma, podemos observar que

$$k \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$

Note que $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$ é uma progressão geométrica decrescente cuja soma vale $\frac{1}{q}$. Portanto, $k \leq \frac{1}{q}$. Levando à concluir que

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right) \leq \frac{1}{q \cdot q!}$$

Segue-se então que

$$0 \leq \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) \leq \frac{1}{q \cdot q!}$$

$$0 \leq q! \left[\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \ldots - \frac{1}{q!}\right] \leq \frac{1}{q}$$

Observe que $q!$ cancela todas as parcelas que estão entre colchetes. Sendo assim, têm-se um número inteiro situado entre 0 e 1. Absurdo! Portanto, o número e é Irracional.

$\square$

O número π é uma proporção numérica que têm origem na relação entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro. Desde a Antiguidade, foram encontradas várias aproximações de π para o cálculo da área do círculo. A primeira tentativa rigorosa de encontrar tal aproximação, deve-se à Arquimedes de Siracusa. Através da construção de polígonos inscritos e circunscritos de 96 lados, encontrou que π seria entre um valor entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, estaria aproximadamente entre 3,1408 e 3,1429. Tal método ficou conhecido como método da exaustão para o cálculo de π. Sendo assim, segue abaixo uma demonstração à cerca da irracionalidade do π.

Proposição 1.2. *π é um número irracional.*

Demonstração: Considere a função

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \qquad \mathbf{(1)},$$

onde n é um número inteiro positivo. Consideremos agora as seguintes afirmações.

Lema 1.3. *$D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, ...$, com $D^k f$ representa a k-ésima derivada de f, e $D^0 f = f$.*

Pela fórmula de Leibnitz para as derivadas de um produto de duas funções g e h, temos:

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j g \cdot D^{k-j} h \qquad \mathbf{(2)}.$$

Note que, $\binom{k}{j}$ são os coeficientes do Binômio de Newton, $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$. Aplicando **(2)** à função f definida em **(1)** temos:

$$D^k(gh) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j x^n \cdot D^{k-j}(1-x)^n \qquad \mathbf{(3)}$$

Observe que, calculando a derivada em $x = 0$, temos:

$$D^j x^n \bigg|_{x=0} = \begin{cases} 0, sej < n \\ n!, sej = n \\ 0, sej > n \end{cases} \qquad \mathbf{(4)}$$

Portanto, de **(3)** e **(4)** concluímos que

$$D^k f(0) = 0 \; se \; k < n \tag{5}$$

e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!}\binom{k}{j} \cdot n! \cdot D^{k-n}(1-x)^n \Big|_{x=0}, se \; k \geq n \tag{6}$$

Como os coeficientes binomiais são inteiros, segue-se que a expressão do segundo membro de **(6)** é um número inteiro. Desta forma, **(5)** e **(6)** garante a prova do lema.

Lema 1.4. *$D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, \ldots$*

Demonstração: Pelo lema anterior e o fato que $f(1-x) = f(x)$, suponhamos que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, onde $(p,q) = 1$.

Seja a função

$$F(x) = q^n[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \ldots + (-1)^n D^{2n} f(x)] \tag{7}$$

Como consequência dos lemas **1.1**, **1.2**, **1.3** e da hipótese de que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, temos que

$$F(0) \; e \; F(1) \tag{8}$$

são números inteiros. Observe que

$$[F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x]' = F''(x)sen\pi x + \pi^2 F(x)sen\pi x \tag{9}$$

Calculando a segunda derivada de F temos

$$[F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x] = p^n \pi^2 f(x)sen\pi x. \tag{10}$$

Como a função é contínua e derivável em $[0,1]$ podemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo. Se g: $[0,1] \to \mathbb{Z}$ é uma função continuamente derivável em $[0,1]$, então $\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0)$. Usando o teorema para a função $g(x) = F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x$, obtemos à partir da equação **(10)** a seguinte expressão

$$p^n \pi^2 \int_0^1 f(x)sen\pi x \; dx = \pi F(1) + \pi F(0),$$

ou seja,

$$\pi p^n \int_0^1 f(x)sen\pi x \; dx = F(1) + F(0) \tag{11}$$

Observe que para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!} \tag{12}$$

Usando a desigualdade **(12)** em **(11)** temos:

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x)sen\pi x \; dx < \pi \frac{p^n}{n!} \int_0^1 sen\pi x \; dx = \frac{2p^n}{n!},$$

no qual a última igualdade foi obtida fazendo-se a integração indicada. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$, vê-se que podemos tomar um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2p^n}{n!} < 1$, e assim, conclui-se a demonstração. Segue-se então que o número π é irracional.

$\square$

1.4 Conjuntos Enumeráveis

Definição 1.8. *Um conjunto B é enumerável, se existir uma correspondência biunívoca dos seus elementos com o conjunto dos números naturais. Em outras palavras, B é enumerável se existir uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to B$.*

Exemplo 1.14. *O conjunto dos números pares positivos é enumerável.*
Seja $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$, temos

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & P \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

Exemplo 1.15. *O conjunto dos números ímpares (positivos) é enumerável.*
Seja $Q = \{2n-1, n \in \mathbb{N}\}$, temos

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & Q \\ & n & \longmapsto & 2n-1 \end{array}$$

Exemplo 1.16. *O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.* Observe a correspondência abaixo

$$\begin{array}{cccccccc} ..., & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & ... \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ ... & 7, & 5, & 3, & 1, & 2, & 4, & 6, & ... \end{array}$$

Esta correspondência pode ser descrita por uma função definida por sentenças. Seja

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & f(n) \end{array}$$

onde

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se} \quad n > 0 \\ -2n+1, & \text{se} \quad n \leq 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.17. *O conjunto dos números racionais é enumerável.*

Inicialmente, mostraremos que o conjunto dos números racionais positivos é enumerável.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \rightarrow & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Note que todos os números da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$ estão dispostos no quadro acima. Portanto, se percorrermos as flechas, é fácil observar que existe uma ordenação no conjunto dos números racionais. Ou seja, a função f

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^+ \\
 & n & \longmapsto & f(n)
\end{array}
$$

será $f(n) = n$-ésimo elemento seguindo as flechas. Desta forma, mostramos que o conjunto $Q^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ é enumerável. Vale ressaltar que, a enumerabilidade de Q, segue-se do teorema abaixo, lembrando que $Q = Q^+ \cup \; Q^- \cup \{0\}$, onde $Q^- = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$.

Teorema 1.4.

1. A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.

2. A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

3. A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

4. A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável.

5. A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: **(1)** Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o conjunto finito e $B = \{b_1, b_2, \ldots, ...\}$ o conjunto enumerável. O conjunto $A \cup B$ é enumerável. De fato a correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e $\mathbb{N}$ será da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & ..., & a_n, & b_1, & b_2, & \ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & & n & n+1 & n+2 & \ldots \end{array}$$

□

(2) Se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, ...\}$ são dois conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável pelo fato de possuirem a seguinte correpondência biunívoca.

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

ou seja, $f(a_n) = 2n - 1$ e $f(b_n) = 2n$.

□

(3) Sejam $A_1, A_2, \ldots A_n$ conjuntos enumeráveis. Objetivo agora, é mostrar que $A_1 \cup A_2 \cup A_n$ é enumerável, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para tanto utilizaremos o Princípio da Indução Finita. Observe que para $k = 1$ a propriedade é válida pois A_1 é enumerável. Para $k = 2$ é válida pelo item **(ii)**. Suponhamos que seja válida para k, ou seja, se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são enumeráveis, então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ é enumerável. Provamos então que a propriedade é válida para $k + 1$. Portanto, $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$ são enumeráveis, então

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}$$

é enumerável. Observe que

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1} = (A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}$$

Considere $A = (A_1 \cup \ldots \cup A_k)$, então

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1} = A \cup A_{k+1} :$$

Agora A é enumerável por Hipótese de Indução e $A \cup A_{k+1}$ é enumerável por **(ii)**. Portanto $A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}$ é enumerável.

□

(4) Seja $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ um conjunto enumerável onde cada A_i é um conjunto finito, para qualquer $i \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

Portanto, queremos mostrar que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ é enumerável. Suponha que $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l_1}\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2l_2}\}$ e $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nl_n}\}$. Então, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l_1}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2l2}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nl_n}, \ldots\}$ Seja a seguinte correspondência entre $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ e $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}, & ..., & a_{1_{l1}}, & a_{21}, & ..., & a_{2_{l2}}, & ..., & a_{n1}, & ..., & a_{n_{l_n}}, & \cdots \\
\updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
1, & ..., & l_1, & l_1+1, & ..., & l_1+l_2, & ..., & l_1+l_2+...+l_{n-1}+1, & ... & l_{n+1} & \cdots
\end{array}$$

Logo, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ é enumerável.

$\square$

(5) Seja $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \}$ um conjunto enumerável onde cada A_i é um conjunto enumerável para qualquer $i \in \{1, \ldots, n, \ldots\}$. Suponhamos que

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\},$$

$$\vdots$$

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\}$$

Dispondo os elementos de $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ como na tabela abaixo e, formando flechas como feito em Q^+, definimos f por $f(n) = n$-ésimo elemento que encontramos seguindo as flechas. Desta forma construimos uma correspondência biunívoca entre $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ e $\mathbb{N}$ e, consequentemente, provamos que é um conjunto enumerável.

$$\begin{array}{l}
a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \\[1em]
a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots \\[1em]
\ \vdots, \ \ \vdots, \ \ \vdots, \ \ \vdots \\[1em]
a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots
\end{array}$$

É importante salientar que, se A é enumerável e $B \subset A$ é um conjunto infinito, então B também é enumerável, uma vez que, pois como A é enumerável existe uma correspondência biunívoca, f, entre $\mathbb{N}$ e A, então basta considerar a restrição $f|_B : B \longrightarrow \mathbb{N}$.

$\square$

Teorema 1.5. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Demonstraremos que o conjunto dos números reais $x \in [0,1)$, não é enumerável. E, como consequência da observação acima, segue-se que $\mathbb{R}$ também não é enumerável. Observe que os números $x \in [0,1)$ tem uma representação decimal da forma $0, a_1a_2a_3\ldots$ onde a_j é um dos algarismos $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ ou 9. Alguns números têm dois tipos de representação, como por exemplo, $\frac{1}{2}$. O mesmo pode ser representado por $0,5$ ou $0,4999\ldots$ (que neste caso, é um dízima periódica). Para o caso de dízima, eliminamos o período. Suponhamos que os decimais tipo, ou que os números reais no intervalo $[0;\,1)$, formam um conjunto enumerável.

$$0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$

$$0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$

$$0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$

$$\ldots$$

Agora, considerando o número decimal $0, b_1b_2b_3\ldots$ da seguinte forma onde todos os b_{is} são diferentes de 0 ou 9 e $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, ... É claro que $0, b_1b_2b_3\ldots \neq a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \forall n \in \mathbb{N}$, pois $b_n \neq a_{nn}$. Portanto, $0, b_1b_2b_3\ldots$ não está na tabela o que é um absurdo, já que é um número real entre 0 e 1.

$\square$

Teorema 1.6. *O conjunto de todos os números algébricos é enumeravel.*

Demonstração: Dado um polinômio com coeficientes inteiros

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

definimos sua altura como sendo o número natural

$$|P| = |a_n| + \ldots + |a_1| + |a_0| + n. \tag{2}$$

O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que $P(x) = 0$, $P(x)$ dado em **(1)**, têm exatamente n raízes complexas, sendo que todas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. Temos que o número de polinomios em (a) com uma dada altura é finito. (Note que, é para esta afirmação que incluimos a parcela n na definição da altura em **(2)**). Portanto, as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito. À seguir, observamos que o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável, pelo fato de que, ele é a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos. Portanto, podemos concluir que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável, e assim, conclui-se a demonstração.

À título de exemplo, em [6] na página 24, o autor cita o seguinte polinômio

$$P(x) = 3x^4 - x^3 + x - 5.$$

Pela definição de altura de um polinômio têm-se que

$$|P| = |3| + |-1| + |0| + |1| + |-5| + 4.$$

Logo, $|P| = 14$. Além disso, pelo Teorema Fundamental da Algebra, $P(x)$ possui quatro raízes complexas. O autor menciona que pode existir até treze polinômios com essa altura, o que não é verdade. Tomemos como exemplo o polinômio $Q(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$ onde a altura dele é igual à 14. Note que $|3| = \pm 3$, $|2| = \pm 2$, $|1| = \pm 1$. Sendo assim, para cada coeficiente e com apenas os valores dos coeficientes de $Q(x)$, têm-se que existem, pelo princípio fundamental de contagem, pelo menos 32 polinômios com altura igual à 14. Desta forma, fica claro que existe um número finito de polinômios à uma dada altura e isto pode ser confirmado com um problema de contagem.

Teorema 1.7. *O conjunto dos números transcendentes não é enumerável.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, sabemos que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Além disso, sabemos também que o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é não enumerável. Como $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{algebricos} \cup \mathbb{R}_{transcendentes}$ segue-se que o conjunto dos números transcendentes não é enumerável, pois como mencionado anteriormente, a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

$\square$

Desta forma, devem existir muitos exemplos de números transcendentes. A existência desses números foi garantida pelo matemático francês Joseph Liouville. À título de exemplo, temos que os seguintes números são transcendentes: e, π, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e^{π} (constante de Gelfond), $e + \pi$, $e\pi$, 2^{π}, $0,12345678910111213l4...$(constante de Champernowne, que neste caso é concatenização dos números naturais conforme pode ser verificado em [7]). No próximo capítulo será feito uma abordagem em torno dos números transcendentes, números de Liouville, assim como, será apresentado a prova da transcendência do e.

Capítulo 2

Números Transcendentes

No capítulo anterior, vimos que o **Teorema 1.5**, garante a existência de números transcendentes. Porém não fornece de maneira explicita nenhum número transcendente. Desta forma, coube então ao matemático francês, Joseph Liouville, em 1851, estabelecer um critério para que um número real seja transcendente. Assim, com o seu trabalho, passou a ser possível escrever explicitamente alguns números transcendentes. Primeiramente ele criou uma propriedade que todos os números algébricos devem satisfazer, e logo após, ucriou uma classe de números que não satisfazem tal propriedades. Daí, ele mostrou que de fato existem números transcendentes. Sendo assim, neste capítulo, serão enuciados teoremas referentes aos números transcendentes e aos números de Liouville. Esses resultados podem ser observados em [2], [6] e [8].

2.1 Números de Liouville

Definição 2.1. *Um número algébrico α é de grau n se ele for raiz de uma equação polinomial de grau n com coefcientes inteiros, e se não existir uma equação desse tipo, de menor grau, da qual α seja raiz.*

Exemplo 2.1. *Os Números Racionais coincidem com os números algébricos de grau 1, pois qualquer número racional da forma p/q, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ é raiz da equação polinomial de grau 1*

$$qx - p = 0$$

Definição 2.2. Dizemos que um número real α é aproximável na ordem n por racionais se existirem uma constante $c > 0$ e uma sucessão $\{p_j/q_j\}$ de racionais distintos, com $q_j > 0$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tais que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^n} \qquad \textbf{(2.1)}$$

É importante salientar que, se um número α for aproximável na ordem n, então ele é aproximável em qualquer ordem k, com $k < n$ pois $\frac{c}{q_j^n} \leq \frac{c}{q_j^k}$. Além disso, como α é aproximável, têm-se que $\frac{c}{q_j^n} \to 0$, o que mostra então que q_j é ilimitada.

De **(2.1)** obtemos que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < c \qquad \textbf{(2.2)}$$

Podemos, portanto, deduzir que $q_j \to_+ \infty$. Logo, de **(2.1)** concluímos que

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = \alpha \qquad \textbf{(2.3)}$$

Teorema 2.1. *Todo número racional (número algébrico de grau 1) é aproximável na ordem 1, e não é aproximável na ordem k, para* $k > 1$.

Demonstração: **(i)** (todo número racional é aproximável na ordem 1) Seja $p = q$ um número racional, com $q > 0$ e $mdc(p, q) = 1$. Pelo Teorema **(1.2)** existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$px_0 - qy_0 = 1. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Observe que a equação

$$px - qy = 1 \qquad \textbf{(2.5)}$$

tem um número infinito de soluções da forma

$$x_t = x_0 + qt,$$

$$y_t = y_0 + pt \qquad \textbf{(2.6)}$$

para qualquer $t \in \mathbb{Z}$, as quais satisfazem **(2.5)**, isto é,

$$px_t - qy_t = 1. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Fixando $k \in \mathbb{N}$, tal que $k > \frac{-x_0}{q}$, considere as sucessões $\{x_j\}, \{y_j\}$, definidas a partir de **(2.6)** por

$$x_j = x_0 + q(k + j),$$

$$y_j = y_0 + p(k + j), j \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Pela restrição sobre k e como $q > 0$ temos $x_j > q_j$ e daí $x_j > 0$, pois $q > 0$. Agora, afirmamos que

$$\frac{y_j}{x_j} \neq \frac{y'_j}{x'_j}, se\ j \neq j', \tag{2.9}$$

pois caso houvesse igualdade entre os racionais em **(2.9)**, por **(2.6)** e **(2.4)** teríamos $j = j'$. Em virtude de **(2.7)**, os x'_js e os y'_js, definidos em **(2.8)**, satisfazem a desigualdade

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{y_j}{x_j}\right| = \frac{1}{qx_j} < \frac{2}{x_j}$$

o que prova que p/q é aproximável na ordem 1. **(ii)** (todo número racional não é aproximável na ordem k, para $k > 1$) Para qualquer racional $v/u \neq p/q$ com $u > 0$, tem-se

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{v}{u}\right| = \frac{|pu - qv|}{qu} \geq \frac{1}{qu}. \tag{2.10}$$

Ora, se $\frac{p}{q}$ fosse aproximável na ordem 2, teríamos a existência de um $c > 0$, e de uma sucessão de racionais $\frac{v_j}{u_j}$ diferentes, tais que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{v_j}{u_j}\right| < \frac{c}{u_j^2}. \tag{2.11}$$

De **(2.10)** e **(2.11)**, segue-se que $\frac{1}{qu_j} < \frac{c}{u_j^2}$, isto é, $u_j < qc$, o que, entretanto, não pode ser verdade, pois $u_j \to +\infty$. Dessa forma, $\frac{p}{q}$ não é aproximável na ordem 2, e portanto, também não é aproximável em nenhuma ordem superior.

□

Teorema 2.2. *Todo número irracional é aproximável na ordem 2, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que a desigualdade abaixo se verifica para um número infinito de racionais p/q distintos.*

$$\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}.$$

Demonstração: Seja α um número irracional e $n \in \mathbb{N}$. Representamos por $[x]$ a parte inteira de um número real x, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x. Considere agora os $n + 1$ números reais

$$0, \alpha - [\alpha], 2\alpha - [2\alpha], \ldots, n\alpha - [n\alpha], \tag{2.12}$$

os quais pertencem ao intervalo $[0, 1) = \{x : 0 < x < 1\}$. Considere em seguida a partição do intervalo $[0, 1)$ em n intervalos, disjuntos dois a dois, da forma

$$\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right), j = 0, 1, \ldots, n - 1. \tag{2.13}$$

Desta forma, dois dos reais em **(2.12)** estão em um mesmo intervalo do tipo **(2.13)**. Digamos que eles sejam $n_1\alpha - [n_1 - \alpha]$ e $n_2\alpha - [n_2\alpha]$, com $0 \leq n_1 < n_2 \leq n$, para os quais temos então

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - n_1\alpha + [n_1\alpha]| < \frac{1}{n} \tag{2.14}$$

Seja agora $k = n_2 - n_1$ e $h = [n_2\alpha] - [n_1\alpha]$, os quais são inteiros com $k > 0$, $h \geq 0$. Logo, **(2.14)** pode ser escrito como

$$|k\alpha - h| < \frac{1}{n} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{nk},$$

segue que

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}, \tag{2.15}$$

para $k < n$. Em síntese, mostramos que, para cada n, existe um racional da forma h/k, com $k < n$, para o qual **(2.15)** se verifica. Agora, afirmamos que **(2.15)** se verifica para um número infinito de racionais h/k distintos. Suponha que tal não seja verdade, isto é, há apenas $h_1/k_1, \ldots, h_r/k_r$, racionais distintos satisfazendo **(2.15)**. Agora seja

$$\epsilon = min\{|\alpha - h_1/k_1|, \ldots, |\alpha - h_r/k_r|\}$$

e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$. Vimos que existe um racional h/k tal que

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{nk}.$$

Como $1/nk < 1/n < \epsilon$, segue que $h/k \neq h_i/k_i$ para i = 1, 2, ..., r. Isso é uma contradição, pois h/k satisfaz **(2.15)**.

$\square$

Teorema 2.3. Seja α um número algébrico real de grau n. Então existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Aq^n}. \tag{2.16}$$

para todo racional p/q.

Demonstração: Uma vez que α é um número algébrico real de grau n, segue que α é uma solução de uma equação polinomial da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.17}$$

Seja $d > 0$ tal que, no intervalo $[\alpha - d, \alpha + d]$ a única raiz de $f(x) = 0$ é α. A existência de um tal d segue do fato que a equação polinomial tem no máximo n raízes reais. Portanto d pode ser qualquer número menor que a menor das distâncias de α as demais raízes reais. A seguir observamos que a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ é um polinômio de grau $n-1$, e portanto, ela é limitada em qualquer intervalo finito. Seja pois $M > 0$ tal que

$$|f'(x)| < M, \ para \ x \in [\alpha - d, \alpha + d]. \tag{2.18}$$

Para qualquer racional p/q, com $q > 0$, em $[\alpha - d, \alpha + d]$ temos, aplicando o Teorema do Valor Médio, que

$$f(\alpha) - f(p/q) = (\alpha - p/q)f'(\xi),$$

com $\xi \in (\alpha - d, \alpha + d)$. Como $f(\alpha) = 0$, obtemos

$$\left| f(\frac{p}{q}) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |f'(\xi)| \leq M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \tag{2.19}$$

em que usamos a estimativa (2.18) no último passo. Para obter a desigualdade buscada, necessitamos de uma estimativa inferior para $f(\frac{p}{q})$:

$$\left| f(\frac{p}{q}) \right| = \left| \frac{a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \ldots + a_0 q^n}{q^n} \right| \geq \frac{1}{q^n} \tag{2.20}$$

De 2.19 e 2.20 segue que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n},$$

para $p/q \in [\alpha - d, \alpha + d]$. Se p/q não estiver nesse intervalo teremos então

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > d,$$

e como $q \geq 1$, temos

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{d}{q^n},$$

Tomamos, finalmente, $1/A$ igual ao menor dos números $1/M$ e d, e obtemos a relação (2.16) para todos os racionais p/q.

□

Corolário 2.1. *Se α é um número algébrico real de grau n, então α não é aproximável na ordem $n+1$.*

Demonstração: Por contradição, suponha que existe $c > 0$ e uma sucessão p_j/q_j de racionais distintos tais que

$$|\alpha - \frac{p_j}{q_j}| > \frac{c}{q_j^{n+1}}, \qquad \textbf{(2.21)}$$

Para tais racionais, seguir-se-ia de (2.16) e (2.21) que

$$\frac{1}{Aq_j^n} < \frac{c}{q_j^{n+1}}$$

ou $q_j < Ac$. Mas a ultima desigualdade não é possível, pois $q_j \rightarrow_{+} \infty$

$\square$

Observação: Uma versão mais forte do **Teorema (2.3)** segue-se de um teorema de Roth-Siegel-Thue, que estabelece o seguinte: "Seja λ um número algébrico; se houver uma infinidade de racionais distintos p/q, com $mdc(p,q) = 1, q > 0$, satisfazendo a desigualdade

$$\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{\upsilon}},$$

então $\upsilon \leq 2$". Segue-se daí que se $\mu > 2$, então há apenas um número finito de racionais p/q satisfazendo à desigualdade

$$\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{\mu}},$$

para um dado número algébrico λ. E finalmente, uma consequência imediata disso é o seguinte resultado. Dados um número algébrico λ e um número $\epsilon > 0$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^{2+e}},$$

para todos os números racionais p/q.

Definição 2.3. Um número real α é chamado um número de Liouville se existir uma sucessão $\{p_j/q_j\}$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$, com todos os elementos diferentes, e tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}. \qquad \textbf{(2.22)}$$

Em particular podemos dizer que um número real α é chamado de número de Liouville se para todo número inteiro n existirem inteiros p e q tais que:

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}, q > 1.$$

Veremos a seguir que os números de Liouville são irracionais e transcendentes.

Teorema 2.4. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que um certo número de Liouville $\alpha = \frac{a}{b}$, seja um inteiro positivo n tal que $2^{n-1} > b$. Como α é número de Liouville, então

$$0 < \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

A primeira desigualdade nos diz que $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$ o que equivale a $|aq - bp| \geq 1$. Assim,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n},$$

o que leva a uma contradição.

□

Teorema 2.5. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que um certo número de Liouville α seja algébrico, digamos de grau n. Então, pelo Teorema 2.3, a relação (2.16) seria válida para todo racional. Em particular, para os $\frac{p_j}{q_j}$ da Definição 2.3. Dessa forma teríamos

$$\frac{1}{Aq_j^n} < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j},$$

de onde obtemos

$$q_j^{j-n} < A. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Como $q_j \rightarrow_+ \infty$, segue que (2.23) não é verificada para j suficientemente grande. A contradição está no fato de supormos que α seja algébrico.

□

Lema 2.1. *Seja α um número tal que*

$$|\alpha - \frac{v_j}{u_j}| < \frac{1}{u_j^j},$$

em que $\{v_j, u_j\}$ é uma sucessão de racionais diferentes com $u_j > 0$. (Note que, não é necessário que $mdc(v_j, u_j)$ seja 1). Então α é um número de Liouville.

Demonstração: Considere a sucessão $\{p_j/q_j\}$, com $q_j > 0$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ definida por

$$\frac{p_j}{q_j} = \frac{v_j}{u_j}.$$

Então,

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| < \frac{1}{u_j^j} \leq \frac{1}{q_j^j},$$

o que prova que α é um número de Liouville.

□

Exemplo 2.2. Seja

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}. \tag{2.24}$$

Consideremos a sucessão de racionais definida por

$$\frac{v_j}{u_j} = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Temos, então

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}}\right| = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}}$$

Segue-se que

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| = \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!}} + \dots$$

Colocando $\frac{1}{10^{(j+1)!}}$ em evidência, temos:

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| = \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \dots\right). \tag{2.25}$$

Note que a expressão em parênteses é majorada por

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots$$

que neste caso equivale à uma soma de termos de uma progressão geométrica infinita de razão igual à $\frac{1}{10}$. Note que esta soma equivale à $\frac{10}{9}$. Portanto, o ultimo membro de (2.25) é majorado por

$$\frac{1}{(10^{j!})^j 10^{j!}} \cdot \frac{10}{9} < \frac{1}{(10^{j!})^j},$$

e assim

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| < \frac{1}{(10^{j!})^j}.$$

Como $u_j = 10^{j!}$ segue que α definido em (2.24) é um número de Liouville.

□

Exemplo 2.3. Qualquer numero da forma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}$$

onde a_k é um qualquer dos números de 1 a 9, é um número de Liouville. Em particular, se $a_k = 1$ então α é a chamada constante de Liouville.

Definição 2.4. A constante de Liouville foi o primeiro número transcendente historicamente reconhecido e é definida por

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,110001000000000000000001\ldots$$

Note que a constante de Liouville corresponde a um decimal não periódico no qual o algarismo 1 ocupa a casa decimal correspondente a um fatorial $k!$ e as demais casas são ocupadas pelo algarismo 0.

Proposição 2.1. *A constante de Liouville é um número de Liouville.*

Demonstração: Considere um certo n inteiro e positivo fixo e defina p e q da seguinte forma: $p = \sum_{k=1}^{n} 10^{n!-k!}$, $q = 10^{n!}$. Dessa forma,

$$\left|L - \frac{p}{q}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!} = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-(n+k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-(n+1)-k!} = 10^{-(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} < 10^{-n!n} = \frac{1}{q^n}$$

Portanto L é um número de Liouville.

□

2.2 Representação dos números reais como soma de Números de Liouville

Para mostrarmos que os números reais podem ser escritos como soma de Números de Liouville, apresentaremos uma proposição (no qual denotamos por $\mathbb{L}$ o conjunto dos números de Liouville) e uma prova construtiva, onde os números de Liouville são explicitados.

Proposição 2.2. Se $f \in \mathbb{Q}[x]$ é uma função racional não constante. Então $f(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$.

Demonstração: Sejam $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ (anel de polinômio) tais que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Dado $\xi \in \mathbb{L}$, existe $I \subset [\xi - 1, \xi + 1]$ um intervalo fechado tal que $\xi \in I$ e $Q(x) \cdot f'(x) \neq 0$, para cada $x \in I$. Podemos supor que existe uma sequência $(\frac{p_j}{q_j})_{j \geq 1}$ de racionais distintos, com $\frac{p_j}{q_j} \in I$, $q_j > 1$ e

$$\left| \xi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Para cada $j \geq 1$, utilizaremos o Teorema do Valor Médio para o intervalo com extremos ξ e $\frac{p_j}{q_j}$. Desta forma, existe ζ nesse intervalo tal que

$$f(\xi) - f\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = f'(\zeta)\left(\xi - \frac{p_j}{q_j}\right).$$

Daí, pelo Teorema de Weierstrass, existe $\alpha \in I$ tal que $|f'(\alpha)| \geq |f'(\zeta_j)|$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$0 < \left| f(\xi) - f(\frac{p_j}{q_j}) \right| \leq |f'(\alpha)| \left| \xi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{|f'(\alpha)|}{q_j^j}. \quad \textbf{(1)}$$

Note que, se $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, então,

$$f\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = \frac{q_j^m(a_0 q_j^n + a_1 p_j q_j^{n-1} + \ldots + a_n p_j^n)}{q_j^n(b_0 q_j^m + b_1 p_j q_j^{m-1} + \ldots + b_m p_j^m)}.$$

Defina

$$A_j = q_j^m(a_0 q_j^n + a_1 p_j q_j^{n-1} + \ldots + a_n p_j^n)(-1)^{w_j}$$

e

$$B_j = q_j^n(b_0 q_j^m + b_1 p_j q_j^{m-1} + \ldots + b_m p_j^m)(-1)^{w_j}$$

onde

$\bullet w_j = 0$, se $q_j^n(b_0q_j^m + b_1p_jq_j^{m-1} + \ldots + b_mp_j^m) \geq 1$;

$\bullet w_j = 1$, se $q_j^n(b_0q_j^m + b_1p_jq_j^{m-1} + \ldots + b_mp_j^m) \leq -1$.

De $|\xi - \frac{p_j}{q_j}| < 1$, segue que $|p_j| < (1 + |\xi|)q_j$. Desta forma,

$|B_j| = |q_j^n(b_0q_j^m + b_1p_jq_j^{m-1} + \ldots + b_mp_j^m)|$

$|B_j| \leq |b_0q_j^{n+m}| + |b_1p_jq_j^{n+m+1}| + \ldots + |b_mp_j^mq_j^n|$

$|B_j| < |b_0||q_j^{n+m}| + |b_1|(1 + |\xi|)|q_j^{n+m}| + \ldots + |b_m|(1 + |\xi|)^m|q_j^{n+m}|$

$|B_j| \leq L(Q)\theta^m q_j^{m+n}$,

em que $L(Q) = |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m|$ e $\theta = 1 + |\xi|$. Segue que $B_j \leq L(Q)\theta^m q_j^{m+n}$. De **(1)**,

$$0 < \left|f(\xi) - f\left(\frac{p_j}{q_j}\right)\right| < \frac{|f'(\alpha)|}{q_j^j} \leq \frac{f'(\alpha)}{\left(\frac{B_j}{L(Q)\theta^m}\right)^{\frac{j}{m+n}}} = \frac{|f'(\alpha)|(L(Q)\theta^m)^{\frac{j}{m+n}}}{B_j^{\frac{j}{m+n}}}$$

Note que $f(\frac{p_j}{q_j}) = \frac{A_j}{B_j}$ e que $(B_j)_j \geq 1$ não pode ser limitada, já que q_j é ilimitada e $b_0q_j^m + b_1p_jq_j^{m-1} + \ldots + b_mp_j^m \in \mathbb{Z}^*$. Sendo assim,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|f'(\alpha)|(L(Q)\theta^m)^{\frac{j}{m+n}}}{B_j^{\frac{j}{2(m+n)}}} = 0$$

Portanto, existe $C > 0$, tal que

$$\left|\frac{|f'(\alpha)|(L(Q)\theta^m)^{\frac{j}{m+n}}}{B_j^{\frac{j}{2(m+n)}}}\right| < C$$

Escolhemos assim, j_1 de modo que $C < B_{j_1}^{\frac{j}{2(m+n)}-1}$ e, para cada $i > 1$, escolhemos j_i, de modo que $j_i > j_{i-1}, B_j, \notin \{B_{j_1,\ldots,B_{j_{n-1}}}$ e $C < B_{j_i}^{\frac{j}{2(m+n)}-i}$. Por fim, definimos $\frac{c_i}{d_i} = \frac{A_{j_i}}{\psi} B_{j_i}$ e obtemos

$$0 < |f(\xi) - \frac{c_i}{d_i}| = |f(\xi) - \frac{A_{j_i}}{B_{j_i}}| = |f(\xi) - f(\frac{p_{j_i}}{q_{j_i}})|$$

Daí têm-se que

$$0 < |f(\xi) - \frac{c_i}{d_i}| < \frac{|f'(\alpha)|(L(Q)\theta^m)^{\frac{j_i}{m+n}}}{B_{j_i}^{\frac{j_i}{m+n}}} < \frac{C}{B_{j_i}^{\frac{j_i}{2(m+n)}}} < \frac{1}{B_{j_i}^i} = \frac{1}{d_i^i}.$$

Logo, $|f(\xi) - \frac{c_i}{d_i}| < \frac{1}{d_i^i}$ segue-se que $f(\xi)$ é um número de Liouville.

□

Teorema 2.6. (Erdös) *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(a,b) = a + b$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existem números de Liouville z e w tais que $f(z,w) = \alpha$.*

Para realizar a demonstração, consideramos dois casos. No primeiro caso tomaremos $\alpha \in \mathbb{Q}$, já no segundo caso , levaremos em conta que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Demonstração: Caso 1: Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, escolhendo z um número de Liouville qualquer, definido, temos pela Proposição **2.2** que $w = \alpha - z$ também é um número de Liouville pois

$$f(z,w) = z + w = z + (\alpha - z) = \alpha$$

E assim, conclui-se a demonstração para este caso.

Caso 2: Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, temos $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}$, onde $\lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$ corresponde à parte inteira de α e $\{\alpha\} \in (0,1)$ corresponde à parte fracionária. Desta forma, basta provar que existem números de Liouville w_1 e w_2 tais que $w_1 + w_2 = \{\alpha\}$, uma vez que, tomando $z = \lfloor \alpha \rfloor + \ w_1$ e $w = w_2$, obtemos

$$f(z,w) = z + w = \lfloor \alpha \rfloor + \ w_1 + w_2 = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\} = \alpha.$$

Como $\{\alpha\} \in (0,1)$, podemos escrever sua expansão 2-ádica como

$$\{\alpha\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

com $\varepsilon_k \in \{0,1\}$.

Definimos agora $w_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}$ e $w_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}$ onde $n! \leq k < (n+1)!$ com

$$\alpha_k = \varepsilon_k,\ \beta_k = 0\ (n = 1, 3, 5, ...)$$

$$\alpha_k = 0,\ \beta_k = \varepsilon_k\ (n = 2, 4, 6, ...)$$

Note que $w_1 + w_2 = \{\alpha\}$. Verificaremos apenas que w_2 é um número de Liouville, pois o mesmo argumento é válido para w_1. Dado $n \geq 1$, sejam

$$q_n = 2^{(2n+1)!-1},\ p_n = q_n \cdot \left(\sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\beta_k}{2^k} \right).$$

Deste modo,

$$\left| w_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} - \frac{q_n \cdot \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\beta_k}{2^k} \right)}{q_n} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} - \sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\beta_k}{2^k} \right|$$

Desenvolvendo este módulo, chegamos que

$$\left| w_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\beta_k}{2^k} + \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} - \sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\beta_k}{2^k} = \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}$$

Daí,

$$\left| w_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}.$$

Para $(2n+1)! \leq k < (2n+2)!$, têm-se $\beta_k = 0$, se $n \notin 2\mathbb{Z}$. Além disso,

$$\left| w_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \leq \sum_{k=(2n+2)!}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Note que, $\displaystyle\sum_{k=(2n+2)!}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ equivale a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita decrescente, onde pode-se observar que o primeiro termo dessa progressão é $a_1 = \frac{1}{2^{(2n+2)!}}$ e a razão $\frac{1}{2}$. Caculando então este somatório temos que

$$\sum_{k=(2n+2)!}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{(2n+2)!}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2^{(2n+2)!}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{(2n+2)!-1}}$$

Observe que

$$\frac{1}{2^{(2n+2)!-1}} < \frac{1}{2^{n(2n+1)!-n}}$$

Note que

$$\frac{1}{2^{n(2n+1)!-n}} = \frac{1}{q_n^n}$$

Portanto,

$$\sum_{k=(2n+2)!}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{q_n^n}$$

Daí, segue-se que $\left|w_2 - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}$. Segue-se então que, w_2 é um número de Liouville. Desta forma concluimos a demonstração.

2.3 A transcendência do número e

Teorema 2.7. *O número e é transcendente.*

Demonstração: Suponha que $f(x)$ é um polinômio de grau r com coeficientes reais e seja $F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + \ldots + f^{(r)}(x)$. Calculamos então $(\frac{d}{dx})(e^{-x}F(x))$. Como $f^{(r+1)}(x) = 0$, pois f tem grau r, e $(\frac{d}{dx})(e^{-x}F(x)) = e^{-x}F(x)$. O Teorema do Valor médio afirma que se $g(x)$ é uma função contínua e derivável, com valores no intervalo fechado $[x_1, x_2]$, então

$$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = g^{(1)}(x_1 + \theta(x_2 - x_1))$$

onde $0 < \theta < 1$. Podemos aplicar o teorema à função $e^{-x}F(x)$, que podemos perceber que satisfaz as condições do teorema no intervalo fechado $[x_1, x_2]$, onde $x_1 = 0$ e $x_2 = k$, com $k \in \mathbb{Z}_+$. Obtemos assim, $e^{-k}F(k) - F(0) = -e^{-\theta_k K} f(\theta_k k)k$, no qual θ_k depende de k e é um número real entre 0 e 1. Multiplicando esta igualdade por e^k, temos

$$F(k) - F(0) = -e^{(1-\theta_k)k} f(\theta_k k)k.$$

Segue-se então que:

$$\begin{aligned} F(1) - eF(0) &= -e^{(1-\theta_1)} f(\theta_1) = \epsilon_1, \\ F(2) - e^2F(0) &= -2e^{2(1-\theta_2)} f(2\theta_2) = \epsilon_2, \\ &\vdots \\ F(n) - e^nF(0) &= -ne^{n(1-\theta_n)} f(n\theta_n) = \epsilon_n. \end{aligned} \qquad \mathbf{(1)}$$

Suponha agora que e seja um número algébrico. Se e é algébrico, então satisfaz alguma relação da forma

$$c_n e^n + c_{n-1} e^{n-1} + \ldots + c_1 e + c_0 = 0 \tag{2}$$

Nas relações (1), multiplicamos a primeira equação por c_1, a segunda por c_2 e assim por diante. Somando-as, obtemos:

$$c_1 F(1) + c_2 F(2) + \ldots + c_n F(n) - F(0)(c_1 e + c_2 e^2 + \ldots + c_n e^n) = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \ldots + c_n \epsilon_n.$$

De acordo com a relação (2), $c_1 e + c_2 e^2 + \ldots + c_n e^n = -c_0$, e então a equação acima se torna

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \ldots + c_n F(n) = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \ldots + c_n \epsilon_n \tag{3}$$

Observe que, toda esta discussão foi feita para a $F(x)$ construida a partir de um polinômio arbitrário $f(x)$. Vejamos agora o que todas essas implicações significam para um polinômio em especifíco, o primeiro usado por Hermite, a saber,

$$f(x) = \frac{i}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \ldots (n-p)^p.$$

Escolhendo um número primo p de tal forma que $p > n$ e $p > c_0$. Para este polinômio daremos uma olhada cuidadosa em $F(0)$, $F(1), \ldots, F(n)$ e estimaremos o tamanho de $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$. Quando expandido, $f(x)$ é um polinômio da forma

$$\frac{(n!)^p}{(p-1)!} x_{p-1} + \frac{a_0 x^p}{(p-1)!} + \frac{a_1 x^{p+1}}{(p-1)!} + \ldots,$$

onde $a_0, a_1, \ldots,$ são inteiros. Quando $i \geq p$ afirmamos que $f^{(i)}(x)$ Se um polinômio com coeficientes inteiros multiplos de p. Portanto para qualquer inteiro j e para $i \geq p$, $f^{(i)}(j)$ é um inteiro multiplo de p. Agora, pela sua propria definição, $f(x)$ tem uma raiz de multiplicidade p em $x = 1, 2, \ldots, n$. Assim para $j = 1, 2, \ldots, n$ temos que

$$f^{(j)} = 0, f^{(1)}(j) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(j) = 0.$$

Contudo,

$$F(j) = f(j) + f^{(1)}(j) + \ldots + f^{(p-1)}(j) + f^{(p)}(j) + \ldots + f^{(r)}(j)$$

e pela discussão acima, para $j = 1, 2, \ldots, n, F(j)$ é um inteiro e é multiplo de p. Como $f(x)$ tem uma raiz de multiplicidade $p-1$ em $x = 0, f(0) = f^{(1)}0 = \ldots f^{(p-2)}(0) = 0$. Para $i \geq p, f^{(i)}(0)$ é um inteiro que é multiplo de p. Mas $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e como $p > n$

e este é um numero primo, p não divide $(n!)^p$ de modo que $f^{(p-1)}(0)$ é um inteiro que não é divisível por p. Como

$$F(0) = f(0) + f^{(1)}(0) + \ldots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \ldots + f^{(r)}(0),$$

concluimos que $F(0)$ é um inteiro não divisível por p. Por ser $c_0 > 0$, $p > c_0$ e como p não divide $F(0)$, apesar de que $p|F(1), p|F(2), \ldots, p|F(n)$, podemos afirmar que $c_0F(0) + c_1F(1) + \ldots + c_nF(n)$ é um inteiro, e que além disso, não é divisível por p. Entretanto, por (3), $c_0F(0) + c_1F(1), \ldots, c_nF(n) = c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n$. Note que

$$\epsilon_1 = \frac{-e^{i(1-\theta_i)}(1 - i\theta_i)^p \ldots (n - i\theta_i)^p (i\theta_i)^{p-1} i}{(p-1)!},$$

onde $0 < \theta_i < 1$. Assim

$$|\epsilon_i| \leq e^n \frac{n^p (n!)^p}{(p-1)!}.$$

Como $p \to \infty$,

$$\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} \to 0,$$

Desta forma, podemos encontrar um número primo maior que c_0 e n e suficientemente grande que implique que $|c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n| < 1$. Mas $c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + c_1F(1) + \ldots + c_nF(n)$, que deve ser um inteiro; como este é menor que 1 nossa única conclusão possível é que $c_0F(0)+c_1F(1)+\ldots+c_nF(n) = 0$. Porém, $c_0F(0)+c_1F(1)+\ldots+c_nF(n) = 0$ levando assim à um absurdo, pois sabemos que p não divide $(c_0F(0) + c_1F(1) + \ldots + c_nF(n))$, enquanto $p|0$. Esta contradição veio do fato de termos suposto que e é um número algébrico. Assim provamos que e é trancendente.

$\square$

Capítulo 3

Uma proposta didática na sala de aula

O número é um conceito em matemática que foi construido ao longo de um grande percurso. A noção de número, bem como, as suas generalizações estão ligadas à história da humanidade. Grande parte das comparações que o homem formula, seja como gestos ou atitudes cotidianas, remetem conscientemente ou não a juízos aritméticos e propriedades geométricas. É nesta perspectiva que, os números, sejam racionais ou irracionais, algébricos ou transcendentes, surgem e dão um significado à atividade humana em um determinado processo. Nesta perspectiva, o presente capítulo irá abordar alguns exercícios de natureza conceitual e geométrica, partindo ou não de uma situação problema, à serem aplicados no ensino médio, que irão permitir à fixação de conceitos relacionados aos números algébricos e transcendentes, podendo desta forma, proporcionar um melhor aprendizado no que diz respeito a importância destes números mediante ao problema trabalhado. Sendo assim, as propostas para trabalhar com os números *pi* e *e* podem ser observadas em [4] e [5].

3.1 Exercícios

Questão 1- Julgue verdadeiro ou falso as afirmações abaixo, justificando a sua resposta.

a) Chamamos de Inteiro Algébrico, toda solução da equação polinomial

$$bx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros com $b \neq 1$.

b) Todo inteiro algébrico é um número algébrico.

c) Todo número irracional é transcendente.

d) Existem números irracionais que não são algébricos.

e) Todo número racional é algébrico.

f) $\sqrt[3]{7}$ é um número transcendente.

Solução da Questão 1-

a) Falso. Um número é Inteiro Algébrico, toda vez que ele for solução de uma equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros.

b)Verdadeiro. Tendo em vista que um número é Inteiro Algébrico, toda vez que ele for solução de uma equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros, e um número Algébrico toda vez que ele for solução de uma equação polinomial

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros, fica claro desta maneira que o conjunto dos Números algébricos, contém o conjunto dos Inteiros Algébricos.

c) Falso. Como contra-exemplo podemos citar $\sqrt{5}$ uma vez que, ele é solução da equação

$$x^2 - 5 = 0$$

.

d) Verdadeiro. A título de exemplo podemos citar os números π e e.

e) Verdadeiro. $\alpha = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ é um número algébrico pois α é raiz da equação $qx - p = 0$.

f) Falso. $\sqrt[3]{7}$ é um número algébrico, pois é solução da equação polinomial $x^3 - 7 = 0$.

O surgimento dos números irracionais, está associado com o cálculo da diagonal de um quadrado em que o lado mede 1 unidade e diagonal medindo $\sqrt{2}$. A descoberta de um número irracional, foi atribuida à Hipaso, um dos discípulos de Pitágoras. Isso havia feito com que estes o expulsassem da escola e erigissem uma tumba com seu nome, mostrando asssim que, para eles, ele estava morto. Vale salientar que, existem várias versões para o seu final. Uns dizem que morreu em um naufrágio cuja origem da causa é um mistério; outros, que se suicidou como autocastigo, dando, assim, liberdade a sua alma para buscar a purificação em outro corpo, já que eles eram adpetos da Metempsicose (teoria da transmigração da alma); há quem diga também que, alguns pitagóricos o matou, normalmente na descrição, afogado, e há inclusive a teoria que diz que Pitágoras em pessoa o condenou à morte.

Questão 2- Sabendo que o número $x = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$ é racional, resolva os itens abaixo:

a) Usando as propriedades da potência calcule o valor de x.
b) Mostre que existem dois números irracionais α e β tais que α^{β} é racional.

Solução da Questão 2 -

a) $x = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ (2 é um número algébrico.

Sabe-se que $x = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]$ é um número transcendente e que $\sqrt{2}$ é um número algébrico. Portanto, através deste exemplo, fica claro que nem sempre operando um número transcendente com um algébrico, resultará em um número transcendente.

b) Já sabemos que o número $\sqrt{2}$ é irracional, e que pelo item a) $x = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$ é racional. Portanto, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional. Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é um número racional, então existem dois irracionais α e β tais que α^{β} é racional, isto é, $\alpha = \beta = \sqrt{2}$. Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é um número irracional, então existem dois irracionais α e β tais que α^{β} é racional, isto é, $\alpha = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $\beta = \sqrt{2}$.

Questão 3- Um moleiro armazenou 100 sacas de trigo, de 100 kg cada. O moleiro pretende transportar tal carga, do armazém de sua casa até o moinho, que fica a 100 km de distância. Para tal faz uso de um burro, teimoso por natureza, que não suporta mais de 100 kg. Porém, o burro, quando carregado, exige consumir 1 kg de trigo para cada quilômetro que percorre. Pergunta-se:

a)Nos termos propostos, é possível transportar toda a carga de trigo do armazém da casa do moleiro até o moinho?
b)Caso exista um posto comercial ao meio do caminho entre o armazém da casa do moleiro e o moinho, existirá solução?
c)Caso exista solução, proponha um modo de maximizar a quantidade de trigo que o moleiro deve fazer chegar até o moinho. Despreze as massas das sacas.

Solução da questão 3-

Em um primeiro instante,este problema parece não ter solução, pois a cada viagem que o burro faz, consome toda a carga que irá transportar. Sendo assim, uma das estratégias à ser construidas seria em dividir o caminho de 100km em duas partes iguais, como se existisse um posto no meio do percurso. Então, o burro faz várias viagens, somente na primeira parte do percurso (50km), sobrando 100 sacos com 50kg cada (metade da carga inicial). Antes de continuar o transporte, o moleiro junta dois meios sacos para fazer um saco, de modo a constituir 50 sacos de 100kg. Ao completar várias viagens do posto ao moinho, restarão 50 sacos de 50kg: $1/2$ x $1/2 = 1/4$ da carga inicial. Uma outra solução seria dividir o caminho em quatro partes iguais. Generalizando em n intervalos igualmente espaçados sobrariam $(\frac{n-1}{n})^n$ da quantia inicial. Isto recai na essência do numero de Euler: $e = (\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Assim, quando n é muito grande esta expressão aproxima-se do valor $\frac{1}{e} = 0,3678$. Chegando assim ao valor de $e = 2,71886\ldots$. Portanto, no máximo ele irá ficar com 3678kg de trigo.

É importante deixar claro que, o esforço de todas estas paragens (tanto para o burro como para o moleiro que terá de fazer a transferência do grão) pode não compensar o grão que se poupa.

As tabelas abaixo, mostram a quantidade de carga que o burro irá transportar dividindo o percurso em duas ou quatro partes iguais.

Por muitas vezes, nos deparamos com problemas, ou até mesmo, situações em que só fazemos substituir o número de Euler, sem ao menos nos darmos conta do porque fazer isso. Fica até mecânico de certa forma. Através deste exemplo, os alunos podem construir

Carga	100 sacos 100 kg	100 sacos 50 kg	50 sacos 25 kg
Saída: km 0	Saída: km 0	Km 50	Km 100
Total	10.000 kg	5.000 kg	2.500 kg
Rearranjo da carga na chegada		50 sacos 100 kg	
Fração da carga inicial		1/2	1/2x1/2= 1/4
Solução para o problema do Moleiro, na divisão da distância em 2 partes iguais			

Carga	100 sacos 100 kg	100 sacos 75 kg	75 sacos 75 kg	56,25 sacos 75 kg	42,19 sacos 75 kg
Saída: km 0	Saída: km 0	Km 25	Km 50	Km 75	Km 100
Total	10.000 kg	7.500 kg	5625 kg	4218,75 kg	3164,25
Rearranjo da carga na chegada		75 sacos 100 kg	56,25 sacos 100 kg	42,19 sacos 100 kg	
Fração da carga inicial		3/4	3/4x3/4= $(3/4)^2$	3/4x3/4x3/4= $(3/4)^3$	3/4x3/4x3/4x3/4= $(3/4)^3$
Solução para o problema do Moleiro, na divisão da distância em 4 partes iguais					

um melhor significado para número de Euler, pelo fato de ser um problema próximo da realidade.

Questão 4- No que diz respeito aos números algébricos irracionais, responda os itens abaixo.

a) Encontre uma expressão para $sen3x$ como um polinômio de coeficientes inteiros em termos de $senx$.

b) Mostre que $sen10^o$ é um número algébrico e use este fato para concluir que $sen10^o$ é irracional.

Solução da questão 4-

a)

$$sen3x = sen(2x + x) = sen2xcosx + senxcos2x$$

$$sen3x = 2senxcos^2x + senx(1 - 2sen^2x)$$

$$sen3x = 2senx(1 - sen^2x) + senx - 2sen^3x$$

Daí,

$$sen3x = 3senx - 4sen^3x$$

$$sen3x = P(senx)$$

Fazendo $u = senx$, têm-se $P(u) = 3u - 4u^3$.

b)

Suponhamos que $sen10^o$ seja racional. Então existem $p, q \in \mathbb{Z}^*$, primos entre si, tais que, $sen10^o = \frac{p}{q}$. Pelo item anterior, têm-se que

$$\begin{gathered} 3sen10^o - 4sen^3 10^o = sen30^o \\ 3sen10^o - 4sen^3 10^o = \frac{1}{2} \\ 6sen10^o - 8sen^3 10^o = 1 \\ 8sen^3 10^o - 6sen10^o + 1 = 0 \end{gathered}$$

e isto implica que $sen10^o$ é raiz da equação polinomial $P(u) = 8u^3 - 6u + 1$

$$8u^3 - 6u + 1 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial **(1)**, então

$$8(\frac{p}{q})^3 - 6(\frac{p}{q}) + 1 \Leftrightarrow 8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0$$

Reescrevendo essa equação temos $8p^3 = 6pq^2 - q^3$ e $q^3 = 6pq^2 - 8p^3$, como p e q são primos entre si, vemos que $p|1$ e $q|8$. Desta forma, as únicas possibilidades para as raízes racionais são $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, visto que $sen10^o$ é positivo e diferente de 1. Como nenhum desses números é raiz de **(1)** temos que **(1)** não têm raízes racionais, e uma vez que, $sen10^o$ é raiz de **(1)**, conclui-se que $sen10^o$ é irracional.

Questão 5- Com base na abordagem histórica no que diz respeito ao surgimento dos números π e e, elabore um argumento que sirva de "justificativa"para que esses números sejam transcendentes.

Comentários da Questão 5 -

Observação: Foi apresentado neste trabalho, algumas demonstrações que se referiam a irracionalidade e a transcendência desses números. Pudemos perceber, nas mesmas, a genialidade dos matemáticos ao fazerem chegar aos resultados assim esperados. Logo, por se tratar de alunos de ensino médio, nós professores, não podemos esperar tanta matemática dos mesmos. A proposta então desse questionamento, é fazer com que eles venham à construir um significado à cerca da transcedência desses números. Sendo assim, seria bastante coerente, dentro deste contexto, esperar que os alunos dissessem que, esses números são transcendentes pelo fato de serem obtidos por alguma forma de iteração. Neste contexto, será abordado logo abaixo, uma sugestão de trabalho para com o número π.

Sugestão de como trabalhar o surgimento do número π:

É bastante interessante fazer com que, os conceitos matemáticos, de uma forma geral, sejam absorvidos. Para tanto, uma maneira de construirmos uma aprendizagem significativa no que diz respeito ao número π, é promover uma interação entre os alunos durante a execução das atividades. No primeiro momento, divide-se a sala em grupos, de modo à colocar os alunos para construir circunferências e poligonos regulares inscritos nas mesmas, para que assim, algumas comparações sejam estabelecidas. Em seguida, serão realizadas algumas medições do comprimento C da circunferência e o diâmetro D utilizando objetos circulares, régua, barbante, tesoura e esquadro.

Dando continuidade, é importante colocar os grupos para socializarem e organizarem os dados obtidos em uma tabela contendo os valores de C, D e o quociente $\frac{C}{D}$. O objetivo desta etapa é levar os estudantes a compreenderem o conceito do número π como uma constante que surge naturalmente na divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

No segundo momento, o professor deve apresentar um breve histórico relatando o aparecimento do valor dessa divisão em diferentes épocas e povos. Sendo assim, ele pode citar o seu aparecimento na Bíblia, bem como, nos estudos dos egípcios ou em outra aplicações. É interessante também apresentar o método de Arquimedes (conhecido como método da exaustão), ou outras possíveis formas de se chegar ao número π. Se possível, apresentar recursos que permitam aos alunos, encontrar a sequência de números da casa decimal dele.

Já no terceiro momento, é necessário a utilização de um recurso computacional que neste caso irá trabalhar com um programa de geometria dinâmica, o GeoGebra. Ele será utilizado para reproduzir o método da exaustão e obter o comprimento de uma circunferência a partir de aproximações sucessivas obtidas pelo cálculo do perímetro de polígonos inscritos e circunscritos à circunferência. Sendo assim, os alunos devem observar e anotar o perímetro do polígono inscrito e do polígono circunscrito para polígonos de 3, 6, 12, 24, 48 e 96 lados, bem como, calcular o erro e fazer hipóteses quanto ao comprimento estimado da circunferência. O objetivo desta etapa é obter aproximações do valor de π tão precisas quanto se deseje, a partir do momento em que aumente continuamente o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, e com isso, fazer conexão destas descobertas com as descobertas obtidas na primeira etapa. Tal proposta pode ser observada em [6].

Por fim, para verificar se da fato houve um aprendizado mediante a sequência didática proposta, apresenta-se um questionário com as seguintes questões: Você conhece o número π? Quem inventou o π? Qual o valor de π? Você considera importante conhecer este número? Quais os profissionais que utilizam este número? Qual a importância do π?

Alguém – não se sabe quem ou quando – deve ter notado o fato curioso de que se um capital P é composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa de juros r e se permitirmos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula $S = P(1 + r/n)^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite para $P = 1$, $r = 1$ e $t = 1$, é aproximadamente 2,718. (...) Assim, as origens do número e (...) pode muito bem estar ligado a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo (MAOR, 2008, p. 13).

Questão 6 - Nesta perspectiva, para uma abordagem inicial do número de Euler, nos reportamos a uma narrativa. Um agiota empresta 1 dinar a juros de 100 % ao ano a uma pessoa. Ao final de um ano, a pessoa encontra o agiota, devolvendo 1 + 1 = 2 dinares. O agiota, achando injusta tal situação, argumenta que tal valor é incorreto. Como o agiota justifica essa situação?

Solução da questão 6

Se dividirmos o ano em dois semestres, a pessoa deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de 1 dinar + 50 % de 1 dinar = $1\,\frac{1}{2}$ dinar. Em mais um semestre, os juros se comporiam em: $1\,\frac{1}{2}$ dinar + 50 % de $1\,\frac{1}{2}$ dinar = 2,25 dinares. Porém, o agiota continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, teríamos que a pessoa deveria, ao final de cada trimestre pagar um outro valor. E se a correção fosse mensal, também mudaria o valor. Esses valores podem ser conferidos conforme as tabelas abaixo.

Período	Montante
1º trimestre	1 dinar + 25% de dinar= 1,25 dinares.
2º trimestre	1,25 dinares + 25% de 1,25 dinares= 1,25.1,25= $1,25^2$ = 1,5625 dinares.
3º trimestre	1,5625 dinares + 25% de 1,5625 dinares= 1,5625.1,25 = $1,25^3$ = 1,953125 dinares.
4º trimestre	1,953125 dinares + 25% de 1,953125 dinares= $1,25^4$ = 2,4414063 dinares.
Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% ao ano, supondo a correção trimestral dos juros.	

Período	Montante
1º mês	1 dinar + 8,33% de dinar= 1,083 dinares.
2º mês	1,083 dinares + 8,33% de 1,083 dinares= 1,083. 1,083 = 1,17289 dinares.
3º mês	1,172889 dinares + 8,33% de 1,172889 dinares= $1,083^2$.1,083 = $1,083^3$= 1,27024 dinares.
$\vdots$	$\vdots$
12º mês	$1,083^{12}$ = 2,6034 dinares.
Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% ao ano, supondo a correção mensal dos juros.	

Assim, a uma taxa de $100/360 = 0,278\%$ ao dia, o devedor teria que pagar $1,00278^{360}$, ou seja, 2,7166825 dinares. Deste modo, a $\frac{100}{360 \cdot 24} = 0,011574\%$ a hora, teríamos que a pessoa, ao final de um ano, deveria pagar: $1,00011574^{360 \cdot 24} = 1,00011574^{8640} = 2,7181236$ dinares. Cada vez que a divisão de tempo aumenta e o intervalo de tempo se torna mais diminuto, ou seja, quando o tempo de composição dos juros tende a zero, o resultado da dívida parece convergir para certo número, que neste caso é o número de Euler.

Questão 7- Cite uma das aplicações dos Números de Liouville.

Comentário da Questão 7 -

O número é um objeto da matemática que, têm por objetivo estabelecer algum tipo de relação, seja de quantidade, ordem ou medida. Números inteiros, racionais, irracionais, são facilmente encontrados. No caso dos Números de Liouville, é de extrema importância deixar claro que a sua existência, não está vinculada à alguma aplicação "concreta". Mas sim, como fruto de uma criação, que veio à ser uma ferramenta extremamente eficaz para mostrar a existência dos Números Transcendentes.

Questão 8 - Mostre que $\log_{10}^{2}$ é um número irracional.

Solução da questão 8 -

Suponhamos que log_{10}^{2} seja um número racional. Assim, existem $p, q \in \mathbb{Z}^*$, primos entre si, tais que

$$log_{10}^{2} = \frac{p}{q}.$$

Temos que

$$log_{10}^{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 10^{\frac{p}{q}} = 2 \Leftrightarrow 10^{p} = 2^{q} \Leftrightarrow 2^{p}.5^{p} = 2^{q} \Leftrightarrow 5^{p} = 2^{q-p},$$

o que fica claro a ultima igualdade é um absurdo, visto que $p, q \neq 0$. Portanto, log_{10}^{2} é um número irracional.

3.2 Orientações Pedagógicas

A matemática sempre foi vista por muitos alunos, como um bicho de sete cabeças. O fato de muitos não se identificarem com a disciplina, ou até mesmo, a forma como o professor ministrava as suas aulas, servem de justificativas para que esta impressão negativa na matemática, tenha sido criada. Um aspecto muito importante que deve ser levado em consideração, é o preparo do docente. Sendo assim, seguem algumas orientações para o professor no que diz respeito ao tema estudado.

- Ao falar sobre números sejam eles, inteiros, racionais e irracionais, nos exemplos que forem citados, é importante contextualizar os mesmos de tal forma que, os conceitos sejam construidos não só no âmbito matemático, mas à partir de uma determinada situação.
- Antes de definir o que é um número algébrico, é importante saber se o aluno carrega consigo algum conhecimento prévio. Caso ele já possua, fica mais fácil a construção da definição. Caso não, será necessário o professor perguntar se eles já ouviram falar em números algébricos, e a partir daí falar em Polinômios.
- O professor deve apresentar vários polinômios, e destacar àqueles que geram os números algébricos. Sendo assim, algumas intervenções devem ser feitas pelo professor de modo que os alunos consigam identificar inteiros algébricos, racionais algébricos, irracionais algébricos.
- Deve-se deixar bem claro a diferença entre números algébricos e transcendentes.
- Para criar uma motivação nesta temática, é interessante que o professor utilize exemplos contextualizados, ou até mesmo, que remetam à situações problemas (seja qual for o conteudo trabalhado) durante as aulas.

Uma vez analisado as seguintes orientações, a aula pode ser encerrada mediante a verificação de aprendizagem dos alunos que pode ser através de um diálogo realizado com algumas intervenções, ou até mesmo, uma avaliação mediante um questionário.

3.3 Conclusão

Durante toda a minha jornada seja como estudante e até mesmo como professor, sempre me acostumei em ouvir, ou até mesmo, falar que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ era formado pela união dos números irracionais e racionais. Sendo assim,à medida em que, introduzimos o conteúdo referente aos conjuntos numéricos, procuramos sempre exemplos que sejam de fácil absorção para os alunos. Portanto, é comum quando falamos em números irracionais, utilizarmos como exemplo o número π e o e.

A partir do momento em que me envolvi com esta pesquisa, fiquei bastante motivado, pelo fato de passar à conhecer outras definições que pudessem ser encaixadas no ensino médio. A medida em que dialogava com alguns colegas, pude perceber que, muitos deles (até mesmo do mestrado) não sabiam o que são números algébricos, muito menos números transcendentes. Este aspecto foi um dos fatores importantes que levei em consideração ao desenvolvimento da proposta didática do trabalho, uma vez que, estaria de certa forma, contribuindo para o ganho intelectual de muitos.

É comum nós quanto alunos, levantarmos questionamentos do tipo: professor, eu vou aplicar isto onde na minha vida? Sendo assim, um outro aspecto que considero muito importante que pude perceber ao escrever este trabalho, se deve ao fato de ter estudado classes de números transcendentes que não têm aplicação alguma para um problema prático ou cotidiano. Que neste caso são os números de Liouville. Exemplos como este, servem de base, tanto para mencionarmos em sala de aula, sob um aspecto quantitativo em termos de conteúdo matemático, bem como, mais um exemplo de casos em que, nem sempre iremos ver aplicações práticas.

Posso dizer dessa forma que, fui feliz ao trabalhar com o tema, uma vez que, o novo, trouxe para mim, uma bagagem matemática enorme, me fazendo pensar, em como abordar alguns conteúdos no que diz respeito à temática estudada. Um outro aspecto que faço questão de destacar, é a maturidade que adquir ao longo desta pesquisa, uma vez que, proporcionando assim, confiança suficiente para responder questionamentos que, por ventura, algum aluno viesse à fazer.

Isaac Newton, certa vez disse: *"Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes!"* Talvez, esses ombros que mencionou, ele pode ter se referido aos matemáticos que o antecederam, ou até mesmo, ao livros que o mesmo tenha utilizado durante sua jornada científica. O importante neste comentário, é a reflexão de que nós quanto professores, devemos ser (ou procurarmos ser) ombros de gigantes para os nossos alunos, seja como um referencial em conhecimento matemático, ou como um fator motivacional na busca em querer conhecer a matemática.

Bibliografia

[1] ERDOS, P. *Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers*, Michigan Math. J. 9, 59-60 (1962).

[2] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[3] HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[4] JÚNIOR, J. C. de S., CARDOSO A. e DIAS M. M. A. *Desconbrindo o número π com geometria dinâmica*. 2012. 12f. , Universidade Federal de Alfenas, Alfenas.

[5] MAOR, Eli. *e: A História de um Número*. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

[6] MARCHIORI, R. M. *Números Transcendentes e de Liouville*. 2013. 36f. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Rio Claro.

[7] OlIVEIRA, D. e HOYOS, M. G. C. *Números Transcendentes: Números de Liouville e a Constante de Chapernowne*. 2015. 16f., Universidade Federal de São João del Rei, Alto Paraopeba.

[8] SILVA, E. C. S. *Alguns resultados relacionados aos números de Liouville*. 2015. 84f. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília - UnB, Brasília.