
Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

A Geometria do Origami como
ferramenta para o ensino da Geometria
Euclidiana na Educação Básica

por

Carlos Alberto Barreto

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

Abril de 2013

Carlos Alberto Barreto

A Geometria do Origami como
ferramenta para o ensino da Geometria
Euclidiana na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Pro-
grama de Pós-Graduação em Ma-
temática da Universidade Federal
de Sergipe, para a obtenção de
Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Almir
Rogério Silva Santos

**São Cristóvão
2013**

BARRETO, Carlos Alberto

A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica

85 páginas

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Sergipe. Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT.

1. Origami
2. Geometria Euclidiana
3. Axiomas de Huzita-Hatori

I. Universidade Federal de Sergipe. Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT.

Barreto, Carlos Alberto
B273g A geometria do origami como ferramenta para o ensino da geometria euclidiana na educação básica / Carlos Alberto Barreto; orientador Almir Rogério Silva Santos. – São Cristóvão, 2013. 85 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Geometria euclidiana. 2. Origami. 3. Axiomas. I. Santos, Almir Rogério Silva, orient. II. Título

CDU 514.12



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

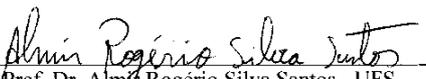
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

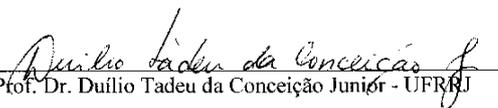
**A Geometria do Origami como Ferramenta para o Ensino da
Geometria Euclidiana na Educação Básica**

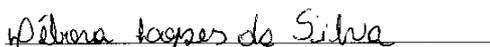
por

Carlos Alberto Barreto

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos - UFS
Orientador


Prof. Dr. Duílio Tadeu da Conceição Júnior - UFRN
Primeiro Examinador


Prof.ª. Dra. Débora Lopes da Silva - UFS
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 12 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedicatória

A toda minha família.

Agradecimentos

“Eis que Deus é o meu ajudador, o Senhor é que me sustenta a vida” (Salmo 54:4). Em nome desse Deus, único e redentor, é que deposito essa minha vitória e é por isso que digo e acredito que o Poderoso fez e faz em mim maravilhas e Santo é o seu Nome.

“Tome como modelo os ensinamentos verdadeiros que eu lhe dei e fique firme na fé e no amor que temos por estarmos juntos com Cristo Jesus” (2Timóteo 1:13). Aos meus pais Maria José (Teté) e Dernival (Devá), o meu agradecimento por todo esforço que fizeram para que eu estudasse. Pelos bons conselhos e por acreditarem e sentirem orgulho de mim.

“Toda boa dádiva e todo dom perfeito são lá do alto” (Tiago 1:17). Agradeço a Deus pela dádiva de ter a minha amável esposa Simone, pelo amor, companheirismo e confiança e o meu precioso filho Vinícius. Esta conquista também é de vocês.

“Oh! Como é bom e agradável viverem unidos os irmãos” (Salmo 133:1). Sou feliz e agradeço a Deus por ter cada um de meus irmãos: Marcelo, Jonas, Mariana, Bruno e todos os irmãos equipistas em Cristo Jesus. Obrigado por vocês existirem em minha vida.

“Porque a sabedoria serve de defesa, como de defesa serve o dinheiro; mas a excelência do conhecimento é que a sabedoria dá vida ao seu possuidor” (Eclesiastes 7:12). Agradeço, então, ao professor Dr. Almir Rogério Silva Santos, por sua orientação; por ter dado a mim a oportunidade de compartilhar do seu conhecimento.

“Mas eras tu, homem meu igual, meu guia e meu íntimo amigo” (Salmo 55:13). Agradeço aos grandes amigos de Mestrado (Elisabete Santana de Ávila e Silva, Lúcia Pereira dos Santos, Marcele Rodrigues Moreno Santos, Evani Machado de Mello, Jimmy Cavalcanti Alves, Isaac Pinheiro Mota, Edvaldo Araújo dos Reis, Elton Jones da Silva Magalhães, Elson Nascimento Lima, César Augusto Vieira Lima, Ávido Sadote de Barros Neto, Luis Anselmo dos S. Vasconcelos, Gilvan Andrade Santos, Davi Dantas Lima, André Bispo Calderato, Márcio Monte Alegre de Souza, Sérgio Ricardo dos Santos, José Hélio Barbosa e Welington Batista Luz.), pelos momentos de muito estudo, pelas conversas tão descontraídas e importantes que tivemos. Mas, não posso deixar de agradecer de forma especial a Elson e Eva por todas as ajudas que sempre vieram nos momentos em que eu mais necessitei.

“E todos os que o ouviam admiravam a sua inteligência e respostas” (Lucas 2:47). Aos admiráveis professores, Dr. Almir Rogério Silva Santos, Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo, Dr. Danilo Felizardo Barbosa, Dr. Eder Mateus de Souza e Dr. Evilson de Souza Vieira pelos seus ensinamentos, a minha gratidão. Também ao Professor Dr. Fábio dos Santos, chefe do polo do PROFMAT na Universidade Federal de Sergipe e aos professores, Dr. Duílio Tadeu da Conceição Junior (UFRRJ), Dra. Débora Lopes da Silva (UFS) e Dr. José Anderson Valença Cardoso (UFS), por comporem a banca examinadora.

“Tudo posso naquele que me fortalece” (Filipenses 4:13). Agradeço a minha família materna em nome de minha tia Lourdinha e meu tio Adriano; à minha família paterna em nome de tia Nalva, padrinho Walter, tia Gilda e tio Tonho; à família que recebi fruto do meu casamento em nome de Adriana, e a todos os meus amigos em nome de Reinaldo Sousa e Pe. Jadilson. Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Carlos Alberto Barreto

12 de abril de 2013.

Resumo

O objetivo desta monografia é fazer o estudo da Geometria do Origami e de suas aplicações na Geometria Euclidiana como instrumento que contribua para o ensino da Geometria na Educação Básica. Fornecemos um pequeno histórico do Origami e de sua chegada ao Brasil e na sequência apresentamos os axiomas que definem os movimentos simples que podem ser realizados utilizando pontos e retas num plano. Estudamos também os problemas clássicos da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo, mostrando que são possíveis de ser resolvidos por meio da Geometria do Origami. Mostramos, então, aplicações do Origami para estudos de Geometria Euclidiana plana e espacial, dando ênfase ao estudo dos poliedros de Platão. Encerramos o trabalho, mostrando como foi desenvolvido o “Projeto Origami - Matemática e Arte” no Colégio Estadual “João XXIII”. **Palavras-chave:** Origami, Geometria Euclidiana, Axiomas de Huzita-Hatori.

Abstract

The purpose of this monograph is to study the geometry of origami and its applications in Euclidean Geometry as a tool that contributes to the teaching of Geometry in Basic Education. Provide a brief history of origami and its arrival in Brazil and as a result we present the axioms that define the simple movements that can be performed using points and straight lines in a plane. We also study the classic problems of doubling the cube and the trisection of the angle, showing that they are possible to be solved through the Geometry of Origami. We show then the Origami applications for studies of flat Euclidean space, emphasizing the study of Plato polyhedra. We finished the job by showing how we developed the “Origami Project - Mathematics and Art” in the State College “John XXIII”.

Keywords: Origami, Euclidean Geometry, Huzita-Hatori Axioms.

Sumário

Dedicatória	6
Agradecimentos	7
Resumo	9
Abstract	10
Introdução	14
1 História do Origami	16
1.1 Breve Histórico	16
1.2 O Origami no Brasil	19
2 Justificativa Teórica	21
3 Axiomas do Origami	24
3.1 Os Axiomas de Huzita-Hatori	24
3.2 Estudo do Ponto e da Reta por meio de vetores	27
3.3 Demonstração da completude dos Axiomas de Huzita-Hatori	28
4 A Geometria Euclidiana e a Geometria do Origami	31
4.1 Trissecção do ângulo	33
4.2 Duplicação do cubo	36

5	Aplicações dos Origamis na Geometria Euclidiana Plana	39
5.1	Construção de um retângulo e de um quadrado	39
5.2	Construção de um triângulo equilátero	40
5.3	Construção de um retângulo com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$	41
5.4	Construção de um retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36°	43
5.5	Construção do retângulo áureo	45
5.6	Construção de um Pentágono Regular	51
5.7	Soma dos ângulos internos de um triângulo	54
5.8	Trisseção do lado de um quadrado	55
5.9	Teorema de Pitágoras	57
5.10	Teorema de Haga	58
5.10.1	Demonstração do Teorema de Haga	59
6	Aplicações dos Origamis na Geometria Euclidiana Espacial	60
6.1	Confecção e montagem dos Poliedros de Platão de faces triangulares e regulares	60
6.1.1	Tetraedro	64
6.1.2	Octaedro	64
6.1.3	Icosaedro	65
6.1.4	Esqueleto do icosaedro	66
6.2	Hexaedro regular (Cubo)	67
6.3	Dodecaedro	70

<i>SUMÁRIO</i>	13
7 Aplicação do Projeto Origami - Geometria e Arte	74
7.1 Origami de avião	75
7.2 Origami de barco	77
7.3 Origami de cisne	79
7.4 Origami de pavão	80
7.5 Origami de coração	82
Bibliografia	86

Introdução

Esta monografia tem por objetivo principal mostrar as aplicações da Geometria do Origami como ferramenta para o estudo da Geometria Euclidiana com foco direcionado para o ensino na Educação Básica.

Dividimos a monografia em sete capítulos.

No primeiro capítulo, mostramos um pequeno histórico do Origami e de que forma ele chegou ao nosso país.

No segundo capítulo trouxemos um referencial teórico que mostra alguns motivos de termos um ensino de Geometria Euclidiana na Educação Básica tão defasado e, apresentamos a Geometria do Origami como um instrumento capaz de ajudar na superação deste problema.

No terceiro capítulo apresentamos as operações básicas para definir um único vinco capaz de alinhar várias combinações de pontos e retas já existentes. Estas operações são em número de sete e são chamadas de Axiomas de Huzita-Hatori. Também é demonstrado neste capítulo a completude destas operações.

No quarto capítulo temos a demonstração através da Geometria do Origami de que é possível determinarmos a aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro de um outro cubo dado, e também de que é possível dividir um ângulo dado em três partes congruentes.

Nos dois capítulos seguintes trazemos algumas construções geométricas que podem auxiliar no ensino da Geometria Euclidiana plana e espacial como: cons-

trução de quadrados e retângulos, construção de triângulos equiláteros, construção de pentágono regular e confecção e montagem dos Poliedros de Platão. Demonstramos também o Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Haga.

No último capítulo mostramos como foi desenvolvido o “Projeto Origami - Matemática e Arte” no Colégio Estadual “João XXIII”.

Capítulo 1

História do Origami

1.1 Breve Histórico

Origami é uma palavra japonesa composta do verbo dobrar (ori), derivado do desenho de uma mão e, do substantivo papel (kami) com o símbolo representando o desenho de seda. É, portanto, a arte de produzir figuras dobrando papéis. Os registros sobre a origem do Origami não são claros, mas a ideia de que teria surgido na China junto com a invenção do papel não encontra fundamentos fortes, pois as evidências sugerem que lá ele era utilizado apenas para escrever. Este pensamento encontra respaldo no fato de que os chineses, desde o início do século II realizavam pesquisas e experiências bem sucedidas misturando cascas de árvores, panos e redes de pesca com o objetivo de encontrar um produto mais apropriado para escrever do que a seda, não registrando nenhum outro interesse para com este produto. T'Sai Lun foi o precursor destas pesquisas que foram mantidas em segredo até o século VI, quando monges budistas chineses levaram a técnica de fabricação do papel para o Japão. No século seguinte os árabes descobriram esta técnica, que só chegou à Europa no século XII, necessitando de mais dois séculos para chegar a todos os reinos cristãos.

De posse desse conhecimento, os japoneses logo adaptaram e aprimoraram a técnica de fabricação de papel, utilizando fibras vegetais extraídas de plantas nativas. Eles começaram a fabricar papéis com qualidade e resistência variadas. O kozo era um tipo de papel de maior resistência, o gampi era de maior qualidade e o mitsumata, mais delicado. Foi, no entanto, o papel classificado por washi que

se tornou mais popular, sendo o mais utilizado para escrever e o mais adequado à prática do Origami.

Do século VII ao XII o Origami caracterizou-se por ser um divertimento daqueles que tinham o privilégio de ter o papel. Alguns modelos de Origami foram introduzidos em cerimônias religiosas e ficaram conhecidos por “Shinto”, visto que o Xintoísmo é a religião oficial no Japão. Os guerreiros Samurai utilizavam Origamis em formato de leque, sustentados com faixas de carne seca para serem utilizados como enfeites nas trocas de presentes entre eles. Diplomas também eram dobrados utilizando técnicas de Origami como uma forma de autenticação do documento. Os diplomas, após abertos, somente voltariam à forma original se o recebedor conhecesse também o procedimento. Essa espécie de certificação ou garantia é chamada de “Origami Tsuki”.

Um exemplo atual de “Origami Tsuki” é a forma como os arquitetos e engenheiros dobram a folha utilizada na prática do seu ofício. Ela possui dobraduras que somente eles são capazes de identificá-las ao abrir a folha e, apenas estes profissionais são conhecedores de como devem proceder para dobrá-la novamente de forma adequada. Em refeições requintadas, a forma como se dobra o guardanapo também é um tipo de código que determina uma característica particular àquela refeição.

A partir do final do século XIII, o papel começou a se tornar um artigo mais popular. Desta forma, as pessoas de classe social mais privilegiada passaram a utilizar adornos confeccionados com o uso do Origami para distingui-los das pessoas de classe inferior.

É, no entanto, no período compreendido entre os séculos XVII e XIX que o Origami se tornou realmente popular. Esse fenômeno ocorreu graças ao fato de que o papel se tornou mais abundante, os Origamis inspirados na fauna e na flora que conhecemos atualmente se tornaram populares e duas obras contendo orientações para a execução de Origamis foram publicadas: “Hidem Sembazuru Orikata” por Akisato Rito (1797) e “Kayaragusa” por Adachi Kazuyuki (1845). Foi graças a essas obras que o Origami passou a ser uma matéria regular nas escolas japonesas a partir do ano de 1876. Foi também nesse período que o grou-japonês ou tsuru, uma ave considerada tradicionalmente sagrada, transformou-se no símbolo do Origami.

No Japão, inclusive, todos os anos no dia 06 de agosto, desde 1958, milhares de tsurus são depositados no mausoléu erguido em homenagem aos que morreram

na tragédia atômica de Hiroshima, durante a segunda guerra mundial, para que isso nunca volte a acontecer. E tudo isso teve o seu início em função do desejo de paz e da vontade de viver da garota Sadako Sasaki, uma sobrevivente desta guerra. Aos que desejarem conhecer esta comovente história podem acessar o site que consta na bibliografia em [14].

Mas, não se dobrou papel apenas no Japão. Os mouros, de origem muçulmana, que já conheciam a produção de papel eram exímios dobradores e influenciaram fortemente a cultura espanhola. Adeptos do Islamismo não faziam Origamis que representassem a fauna e a flora por ferir princípios religiosos, dedicando-se às dobraduras de figuras geométricas para estudos matemáticos e astronômicos. Essas dobraduras fascinaram o filósofo Miguel de Unamuno, reitor da Universidade de Salamanca na Espanha. Ele conheceu o Origami durante uma viagem que fez à França para participar da inauguração da Torre Eiffel, em 1889. Na Espanha, a arte de dobrar papel passou a ser chamada de papiroflexia e a pajarita, uma ave popular na Espanha, transformou-se no símbolo da papiroflexia. Entretanto, Koshiro Hatori acredita que as regras básicas de dobraduras japonesa e moura são muito distintas e, podem ter surgido de forma independente nas duas culturas.

Até a década de 1950 a técnica e os modelos de Origamis eram transmitidos de uma geração para outra sem as devidas preocupações com padrões de movimentos e de construções. Foi nesta década que Uchiyama Koko tornou-se o primeiro a patentear as suas criações. Foi, no entanto, o mestre e pai do Origami moderno, Akira Yoshisawa, que padronizou regras para a representação gráfica das dobraduras do Origami, sistematizou um conjunto de dobras que servem de base para vários Origamis (Sistema Yoshisawa-Randlett, 1956) e quebrou paradigmas tradicionais introduzindo a técnica do *wet folding*, ou seja, dobrar com o papel molhado. Este sistema passou a ser a contribuição mais importante para o Origami desde a invenção do papel, permitindo a difusão internacional de várias criações. Para Akira Yoshisawa o Origami é uma filosofia de vida. É um diálogo entre o artista e o papel.

O reconhecimento dos trabalhos realizados por Akira Yoshisawa no estudo das dobraduras proporcionou a difusão e valorização internacional do Origami; inclusive, nos Estados Unidos, Lilian Oppenheimer, uma grande entusiasta do Origami fundou no ano de 1958 o *The Origami Center New York* e podemos dizer que duas vertentes de origamistas surgiram: a da escola oriental mais voltada para o exercício artístico e a escola ocidental, praticada por matemáticos, arquitetos e engenheiros que usam o Origami como uma ferramenta de trabalho acadêmico.

Esses origamistas perseguem a exatidão anatômica da forma e das proporções recorrendo a processos matemáticos, técnicas geométricas de desenho e recursos computacionais. Os origamistas geométricos descobriram que no ato de dobrar o papel além da atividade artesanal, criativa e artística está ocorrendo um fenômeno de precisão matemática.

1.2 O Origami no Brasil

A arte do Origami chegou ao Brasil por intermédio do nosso país vizinho, a Argentina, que possui muita influência da cultura espanhola e, através dos imigrantes vindos do Japão, que começaram a chegar ao nosso país em 1908 e trouxeram com eles vários costumes, entre eles o da prática do Origami.

Na Argentina, uma das heranças culturais trazidas pelos espanhóis foi a tradição de dobrar papel, que na época foi influenciada pelos artigos escritos pelo filósofo espanhol Miguel Unamuno, que era reitor da Universidade de Salamanca. Mais tarde dois europeus emigraram para a Argentina: Dr. Vicente Solórzano Sagredo e Giordano Lareo que publicaram livros no final da década de 1930 sobre o assunto. Estes conhecimentos acabaram se espalhando por alguns países da América do Sul.

Na década de 1960, a Professora Yachiyo Koda, começou a ensinar Origami oficialmente pela Aliança Cultural Brasil-Japão e, com o apoio do Consulado Geral do Japão em São Paulo, levou a arte do Origami a várias cidades do Brasil. Realizou também algumas exposições e participou de programas de TV.

Em 1992, foi criado o GEO (Grupo de Estudos de Origami) formado por ex-alunos do curso de Origami da ACBJ (Aliança Cultural Brasil-Japão). Inicialmente divulgava o Origami através de boletins com artigos diversos e mais tarde com exposições. Uma delas chamada “A História da Imigração Japonesa no Brasil” foi vista por milhares de pessoas em várias cidades do nosso país e em 2001, foi exposta na Embaixada Brasileira em Tókyo.

Em 2002, em função de ser o ano em que ocorreria a Copa do Mundo de Futebol Japão-Coreia do Sul, foi organizada pelo Consulado Geral do Japão em São Paulo uma exposição chamada “A Copa do Mundo do Origami”, onde o público brasileiro teve a oportunidade de conhecer ainda mais os trabalhos de

artistas de vários países. Esta exposição foi programada para durar uma semana, mas, devido ao interesse demonstrado pelo público foi prorrogada por um mês.

Todos nós já dobramos uma folha de papel, no entanto, nem todos dobram intencionalmente com o objetivo de estudar ideias matemáticas implícitas. A arte de dobrar papel ajuda os alunos a aprender e a comunicar Matemática. As atividades geométricas são um excelente meio para desenvolver a comunicação Matemática. Dobrando e desdobrando papéis podemos observar por meio dos vincos formados: retas, ângulos, simetrias e figuras geométricas. Podemos reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, utilizar a visualização e o raciocínio espacial. Explorar os conceitos de tamanho, forma e medida, incentivar a escrita Matemática e motivar os alunos para a disciplina. Além disso, permitem o desenvolvimento da criatividade, da concentração e persistência, capacidades fundamentais para ser matematicamente competente.

Capítulo 2

Justificativa Teórica

De acordo com o Referencial Curricular da rede estadual de ensino do Estado de Sergipe proposto pela Secretaria Estadual de Educação em 28 de março de 2011 e que se encontra no site indicado na bibliografia em [20], deve existir um Currículo mínimo de referência que através de ações conjuntas seja capaz de melhorar a qualidade de ensino na Educação Básica, e está baseado na matriz de referência do ENEM que define as competências e habilidades que o aluno deve ter desenvolvido ao final de sua trajetória escolar na Educação Básica e, principalmente, orienta-se pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Neles encontramos o seguinte:

...A atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. (...). O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem (PCN, Matemática, 1997, p. 19).

É nesse sentido que desejamos estruturar o uso da Geometria do Origami. Como recurso didático-metodológico que possibilite a melhoria da qualidade na aprendizagem de Geometria Euclidiana durante a Educação Básica, propiciando

aos discentes uma forma de construir e fixar os conhecimentos geométricos fundamentais. Segundo (PONTE, 2005), “este fazer ativo e investigativo vem de encontro ao modo de aprendizagem dos alunos, especialmente dos adolescentes, que se sentem extremamente satisfeitos diante da possibilidade de buscar alternativas para os desafios propostos e, também, valorizados e confiantes diante do produto final de suas explorações”.

Relatórios de avaliação do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) apontam que a Geometria deve ser considerada como um tema central para estudos durante todo o Ensino Fundamental (Consulte [6]). Segundo os PCNs, neste período do ensino, os alunos devem ter a oportunidade de estudar a Geometria Plana e a Geometria Espacial, valorizando a inteligência prática dos educandos. No entanto, vemos um número muito grande de alunos que iniciam o Ensino Médio sem que estejam com o pensamento geométrico desenvolvido. Citamos alguns motivos para este fracasso:

- nesse período é dado mais ênfase aos aspectos numéricos e algébricos;
- separação entre Geometria e Matemática;
- a Geometria é apresentada de forma técnica sem a devida preocupação com o despertar da percepção geométrica;
- uso exclusivo do livro didático;
- ensino muito superficial de Geometria Espacial.

Sabemos, porém, que um recurso didático não resolverá os problemas estruturais que interferem para o devido aprendizado de Geometria Euclidiana na Educação Básica, mas é uma ferramenta que auxiliará na melhoria da qualidade de ensino. O Origami, nessa perspectiva, é um instrumento muito eficaz, pois desenvolve nos alunos o conhecimento matemático (especialmente o geométrico) e artístico, melhora a coordenação motora e a capacidade de concentração, instiga a criatividade entre outros.

De acordo com Rêgo, Rêgo e Gaudêncio (2003, p. 18):

O origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual, os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte.

Capítulo 3

Axiomas do Origami

Na década de 1970 muitos matemáticos se dedicaram a verificar as possíveis dobragens em Origami e a estudar combinações entre elas. Dentre eles estava o matemático ítalo-japonês Humioki Huzita, nascido no Japão, mas que viveu grande parte de sua vida na Itália. Descreveu seis operações básicas para definir um único vinco capaz de alinhar várias combinações de pontos e retas já existentes. A estas operações damos o nome de Axiomas de Huzita e se tornou a primeira descrição formal do tipo de construções geométricas possíveis com Origami. Em 2002 Koshiro Hatori apresentou uma sétima operação e, o conjunto delas passou a ser denominado de Axiomas de Huzita-Hatori. No ano seguinte, o físico americano Robert Lang publica um artigo intitulado *Origami and Origamic Constructions* em que demonstra a completude dos mesmos. Esta demonstração é parcialmente baseada na contagem do número de graus de liberdade num sistema de operações.

Dentro da teoria Matemática das construções geométricas do Origami, os sete axiomas de Huzita-Hatori chegam para definir o que é possível construir com dobragens simples.

3.1 Os Axiomas de Huzita-Hatori

Axioma 3.1.1. *Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 , existe apenas uma dobragem que passa por ambos.*

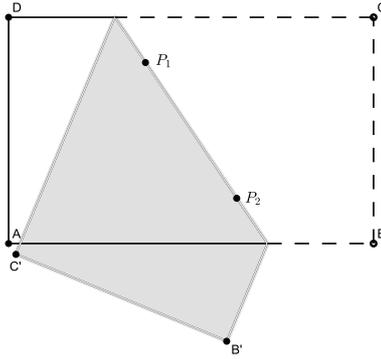


Figura 3.1: Axioma 1.

Axioma 3.1.2. *Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 , existe apenas uma dobragem que os tornam coincidentes.*

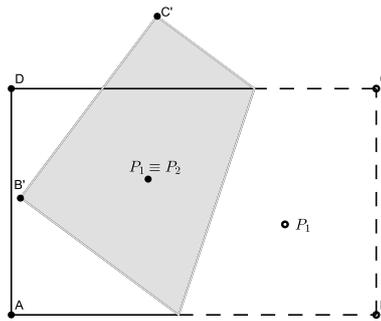


Figura 3.2: Axioma 2.

Axioma 3.1.3. *Dadas as retas r_1 e r_2 , existe uma dobragem que as tornam coincidentes.*

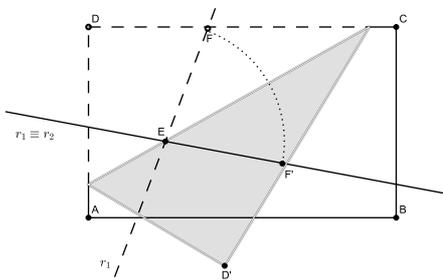


Figura 3.3: Axioma 3 (Retas concorrentes).

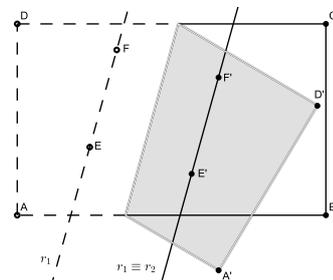


Figura 3.4: Axioma 3 (Retas paralelas).

Axioma 3.1.4. *Dados um ponto P e uma reta r , existe somente uma dobragem que é perpendicular à reta r e que passa pelo ponto P .*

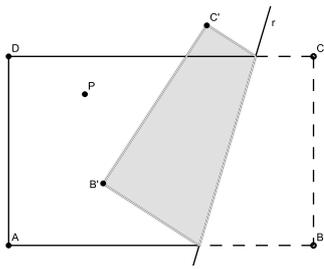


Figura 3.5: Construção da reta r .

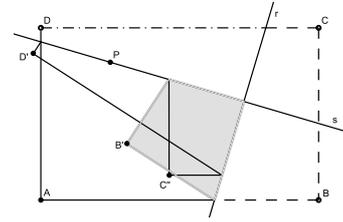


Figura 3.6: Axioma 4.

Axioma 3.1.5. *Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r_1 , se a distância de P_1 a P_2 for igual ou superior à distância de P_2 a r_1 , há uma dobragem que faz incidir P_1 em r_1 e que passa por P_2 .*

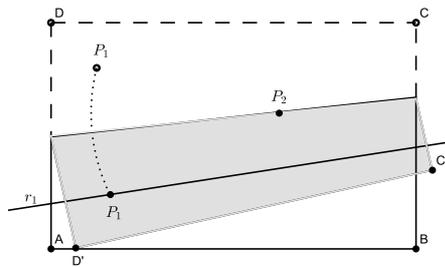


Figura 3.7: Axioma 5.

Axioma 3.1.6. *Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2 , se as retas forem concorrentes ou, se forem paralelas e a distância entre elas não for superior à distância entre os pontos, há uma dobragem que faz incidir P_1 em r_1 e P_2 em r_2 .*

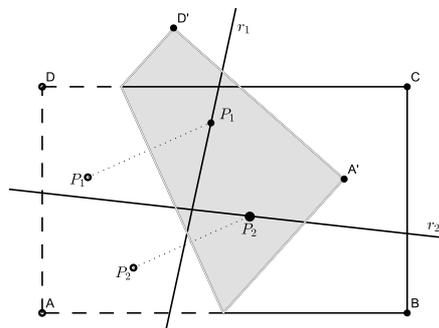


Figura 3.8: Axioma 6.

Axioma 3.1.7. *Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2 , se as retas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir P em r_1 e é perpendicular a r_2 .*

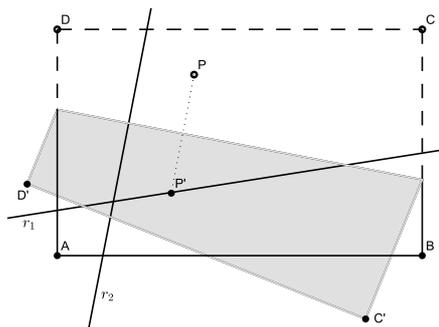


Figura 3.9: Axioma 7.

3.2 Estudo do Ponto e da Reta por meio de vetores

Comecemos por definir um vetor unitário por $U(\alpha) := (\cos \alpha, \sin \alpha)$ com inclinação $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$. Neste sentido, uma reta define-se como sendo o conjunto de todos os pontos P que satisfazem a equação $(P - dU(\alpha)) \cdot U(\alpha) = 0$ onde $d \in \mathbb{R}$ e a operação \cdot representa o produto interno. Deste modo, uma reta é uma função $s(d, \alpha)$, que depende dos parâmetros d e α . Baseado nesta definição verificamos que as retas possuem dois graus de liberdade uma vez que dependem de dois parâmetros que podem variar independentemente.

Esta definição de reta pode ser apresentada de uma outra forma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (P - dU(\alpha)) \cdot U(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P \cdot U(\alpha) - dU(\alpha) \cdot U(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P \cdot U(\alpha) - d = 0. \end{aligned}$$

Se $P = (x, y)$ é um vetor, então $P^\perp = (y, -x)$ é um vetor perpendicular a $P = (x, y)$ e podemos também definir uma reta como o conjunto de pontos P tais que $P = dU(\alpha) + tU^\perp(\alpha)$ com $t \in \mathbb{R}$, pois neste caso é fácil verificar que $(P - dU(\alpha)) \cdot U(\alpha) = 0$.

Já um ponto é um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que também possui dois graus de liberdade, pois as duas coordenadas podem variar independentemente.

3.3 Demonstração da completude dos Axiomas de Huzita-Hatori

A prova da completude da lista de axiomas de Huzita-Hatori foi efetuada por Robert Lang no seu artigo *Origami and Origami Constructions* (Ver em [16]). A demonstração baseia-se na contagem do número de graus de liberdade num sistema de operações. Acompanhemos esta demonstração.

Sejam dados os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e as retas $t_1(d_1, \alpha_1)$ e $t_2(d_2, \alpha_2)$. Seja também dada a reta $t_d(d_d, \alpha_d)$ gerada de uma dobragem qualquer.

Quando realizamos uma dobragem, podemos realizar três tipos de alinhamentos básicos com os elementos ponto e reta:

- fazer coincidir dois pontos;
- fazer um ponto incidir numa reta;
- fazer coincidir duas retas.

A dobragem que faz P_1 coincidir com P_2 (Axioma 2) obriga que, após a reflexão na reta de dobragem $t_d(d_d, \alpha_d)$ tenhamos $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Estamos, portanto, exigindo que sejam satisfeitas duas equações, pois, a operação de fazer coincidir dois pontos exige dois graus de liberdade.

Consideremos agora o alinhamento que faz o ponto P_1 incidir na reta t_1 . Neste caso, é necessário satisfazer uma única equação, já que se exige apenas um grau de liberdade.

Com relação ao alinhamento que faz coincidir t_1 com t_2 temos que todos os pontos de t_1 devem coincidir com pontos de t_2 e vice-versa. Consideremos, sem perda de generalidade, a definição da reta t_1 como o conjunto de todos os pontos P_1 que satisfazem a equação $P_1 = d_1U(\alpha_1) + kU^\perp(\alpha_1)$ para certos valores d_1 e k , e, a definição da reta t_2 como o conjunto de todos os pontos P_2 que satisfazem a equação $P_2.U(\alpha_2) - d_2 = 0$. Visto que os pontos de t_1 pertencem a t_2 quando as retas se tornam coincidentes, temos que

$$P_2.U(\alpha_2) - d_2 = 0$$

$$P_1.U(\alpha_2) - d_2 = 0$$

$$[d_1U(\alpha_1) + kU^\perp(\alpha_1)].U(\alpha_2) - d_2 = 0$$

$$d_1U(\alpha_1).U(\alpha_2) + kU^\perp(\alpha_1).U(\alpha_2) - d_2 = 0$$

$$[d_1U(\alpha_1).U(\alpha_2) - d_2] + k[U^\perp(\alpha_1).U(\alpha_2)] = 0.$$

Como a equação anterior é linear para todo $k \in \mathbb{R}$, obtemos

$$d_1U(\alpha_1).U(\alpha_2) - d_2 = 0$$

$$U^\perp(\alpha_1).U(\alpha_2) = 0.$$

Deste modo, é necessário satisfazer duas equações para tornar duas retas coincidentes, por serem exigidos dois graus de liberdade.

Vamos agora enumerar detalhadamente todas as operações que podem ser efetuadas com uma única dobragem, onde r é a reflexão referida.

- $r(P_1) \leftrightarrow (P_2)$, ou seja, fazer coincidir dois pontos P_1 e P_2 , que exige a resolução de duas equações;
- $r(P_1) \leftrightarrow (t_1)$, ou seja, fazer um ponto P_1 incidir numa reta t_1 , que exige a resolução de uma única equação;
- $r(t_1) \leftrightarrow (P_1)$, ou seja, fazer uma reta t_1 passar num ponto P_1 , que exige a resolução de uma única equação;
- $r(t_1) \leftrightarrow (t_2)$, ou seja, fazer coincidir duas retas t_1 e t_2 , que exige a resolução de duas equações;
- $r(t_1) \leftrightarrow (t_1)$, ou seja, fazer uma reta t_1 coincidir com ela própria, que exige a resolução de uma única equação;

- $r(P_1) \leftrightarrow(t_d)$, ou seja, fazer um ponto P_1 incidir na reta de dobragem $t_d(d_d, \alpha_d)$, que exige a resolução de uma única equação;
- $r(t_1) \leftrightarrow(t_d)$, ou seja, fazer coincidir uma reta t_1 com a reta de dobragem $t_d(d_d, \alpha_d)$, que é um caso trivial, pois, basta fazer a dobragem por uma reta já existente e não cria novos elementos.

Depois de sabermos os alinhamentos que são possíveis com uma única dobragem, vamos então utilizá-los para determinar univocamente a posição da reta de dobragem $t_d(d_d, \alpha_d)$. Pretendemos, desta forma, para cada caso, determinar os valores dos dois parâmetros d_d e α_d , pelo que vamos precisar de, pelo menos, duas equações.

Pelo que vimos anteriormente, há dois tipos de alinhamentos que necessitam da resolução de duas equações: $r(P_1) \leftrightarrow(P_2)$ e $r(t_1) \leftrightarrow(t_2)$. Estes alinhamentos, que correspondem aos axiomas 2 e 3 de Huzita-Hatori, respectivamente, são individualmente suficientes para definir uma reta de dobragem.

Vamos, por isso, analisar os quatro alinhamentos restantes, que exigem apenas uma única equação. Para que tenhamos duas equações que possibilitem a determinação da reta de dobragem, vamos agrupar estes alinhamentos dois a dois, conforme esquematizado na tabela 3.1.

	$r(P_2) \leftrightarrow(t_2)$	$r(t_2) \leftrightarrow(P_2)$	$r(t_2) \leftrightarrow(t_2)$	$r(P_2) \leftrightarrow(t_d)$
$r(P_1) \leftrightarrow(t_1)$	Axioma 6			
$r(t_1) \leftrightarrow(P_1)$	Axioma 6	Axioma 6		
$r(t_1) \leftrightarrow(t_1)$	Axioma 7	Axioma 7	*	
$r(P_1) \leftrightarrow(t_d)$	Axioma 5	Axioma 5	Axioma 4	Axioma 1

Tabela 3.1: Demonstração da completude dos axiomas de Huzita-Hatori.

A combinação apresentada em * não tem solução se as retas t_1 e t_2 não forem paralelas e tem infinitas soluções se estas forem paralelas.

Todas as restantes combinações correspondem a um dos Axiomas de Huzita-Hatori, que se encontra indicado na tabela 3.1 para cada caso.

Uma vez que os alinhamentos apresentados representam todos os alinhamentos possíveis com dois graus de liberdade, concluímos que a lista de axiomas de Huzita-Hatori é completa e que, de fato, o sétimo axioma é necessário para sua completude.

Capítulo 4

A Geometria Euclidiana e a Geometria do Origami

Euclides de Alexandria (360*a.C.* – 295*a.C.*) foi o precursor da Geometria Euclidiana. Na sua obra *Os Elementos*, dividida em 13 livros, conseguiu escrever todos os conhecimentos de Geometria que eram conhecidos na sua época.

Esta obra é um tratado matemático e geométrico que contempla definições matemáticas, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições. Euclides conseguiu reunir numa coletânea de 13 livros, três grandes descobertas da época: a teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares (sólidos de Platão).

Esta obra de Euclides foi estruturada da seguinte maneira:

- Os livros do I ao VI são de Geometria Plana. É no livro V que é apresentada a teoria das proporções de Eudoxo;
- Os livros do VII ao IX versam sobre Teoria dos Números. São nestes livros, por exemplo, que encontramos a prova de que o número $\sqrt{2}$ é irracional e, que o conjunto dos números primos é infinito;
- O livro X, traz a classificação geométrica de irracionais quadráticos e as suas raízes quadráticas;

- Os livros do XI ao XIII tratam da Geometria Espacial com ênfase aos poliedros de Platão e a prova de que somente estes cinco poliedros (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) são regulares.

Existem, no entanto, dois problemas clássicos que por meio da Geometria Euclidiana é impossível solucionar com régua não graduada e compasso e, que são solúveis por meio da Geometria do Origami. São eles:

- a trissecção do ângulo (dividir um ângulo em três partes iguais);
- a duplicação do cubo (construir a aresta de um cubo com volume igual ao dobro da de um cubo dado).

Estes dois problemas e o da Quadratura do Círculo despertaram por durante dois milênios a atenção de alguns matemáticos herdeiros da tradição grega. Mas, como existiam números que os gregos não foram capazes na época de representar, eles não conseguiram provar que estas construções eram impossíveis na Geometria Euclidiana. Apenas em 1837 é que Pierr Lourent Wantzel apresentou a primeira demonstração da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo e, em 1882, o matemático Ferdinand Von Lindman demonstrou que o número π é transcendente, pondo fim ao problema da quadratura do círculo.

Uma das versões sobre a origem do problema da Duplicação do Cubo é a de que Eratosthenes, em seu trabalho intitulado *Platonicus* relata que, quando o Deus disse para os Delianos através de um oráculo que, para livrar-se de uma praga, eles deveriam construir um altar igual ao dobro daquele já existente, os artesãos ficaram altamente perplexos com suas tentativas para descobrir como um sólido poderia ser o dobro de um sólido similar. Eles então foram perguntar a Platão sobre a solução, e ele respondeu que o oráculo queria dizer que o Deus não desejava um altar com o dobro da medida, mas que ele gostaria de, estabelecendo esta tarefa, envergonhar os gregos por não darem a devida atenção à Matemática e pelo seu desprezo por Geometria.

Já o problema da trissecção do ângulo não tem uma versão consistente para a sua origem e difere dos outros dois problemas clássicos por existirem ângulos que podem ser trissectados com régua não graduada e compasso, o que não é possível em hipótese alguma para a Duplicação do Cubo e a Quadratura do Círculo com estes materiais.

Iremos, então, demonstrar por meio da Geometria do Origami, utilizando os Axiomas de Huzita-Hatori que é possível realizar a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Inclusive, foi demonstrado que com a Geometria do Origami é possível efetuar todas as construções da Geometria Euclidiana utilizando apenas os axiomas 1, 2 e 5 de Huzita-Hatori. A prova para este teorema pode ser encontrada em [3], capítulo 6, página 133.

4.1 Trissecção do ângulo

A construção que será utilizada a seguir para a trissecção do ângulo é baseada na de Hisashi Abe publicada em 1980 no Japão (Ver em [11]).

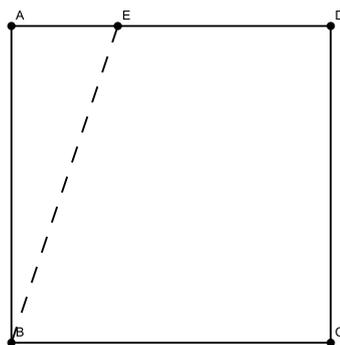


Figura 4.1: Trissecção do ângulo.

Seja $ABCD$ um papel quadrado. Marque um ponto E no lado AD deste quadrado. Trace o segmento BE (Axioma 1) e, considere agora o ângulo agudo $\angle EBC > 45^\circ$ (figura 4.1).

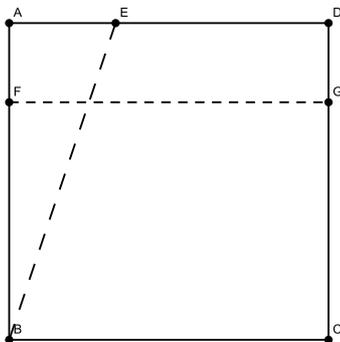


Figura 4.2: Trissecção do ângulo.

Trace uma paralela qualquer FG a AD e BC (figura 4.2), de forma conveniente para que todos os pontos utilizados durante o procedimento fiquem sobre o quadrado $ABCD$ (Axioma 4).

Trace agora a paralela HI a FG , onde H e I são os pontos médios dos segmentos BF e CG , respectivamente (Axioma 3) (figura 4.3). Realize então uma dobragem levando o ponto F ao segmento BE e o ponto B ao segmento HI (Axioma 6).

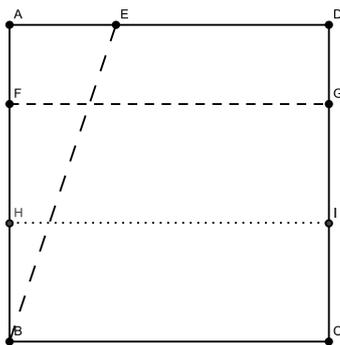


Figura 4.3: Trissecção do ângulo.

Após esta dobragem marquemos os pontos B' , F' e H' que são as respectivas transposições dos pontos B , F e H sobre o papel (figura 4.4). Trace, em seguida, o segmento $B'F'$ (Axioma 1).

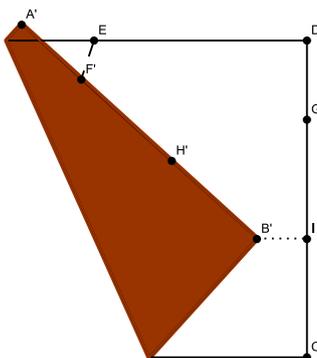


Figura 4.4: Trissecção do ângulo.

Desfaça a dobragem e trace BB' e BH' (Axioma 1). Agora trace uma perpendicular a BC por B' (Axioma 4). Chamemos de N o ponto de intersecção desta perpendicular com BC (figura 4.5).

Temos que os triângulos retângulos $\triangle BB'N$, $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes, pois os triângulos $\triangle BB'N$ e $\triangle BB'H'$ têm a hipotenusa BB' em comum

e os catetos opostos aos ângulos no vértice B possuem a mesma medida, já que $\overline{NB'} = \overline{BH} = \overline{H'B'}$.

Já os triângulos $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes porque têm um cateto BH' em comum e os catetos opostos aos ângulos no vértice B possuem a mesma medida, já que $\overline{H'B'} = \overline{HB} = \overline{HF} = \overline{H'F'}$.

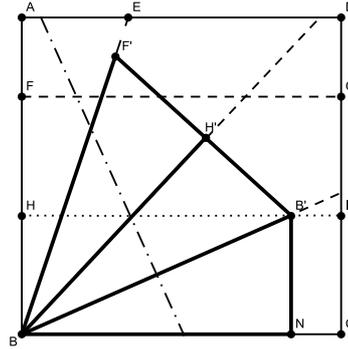


Figura 4.5: Trissecção do ângulo.

Logo, os ângulos $\angle F'BH'$, $\angle B'BH'$ e $\angle B'BN$ são congruentes e, desta forma o ângulo agudo $\angle EBC = 3\alpha$ está dividido em três partes iguais (figura 4.6).

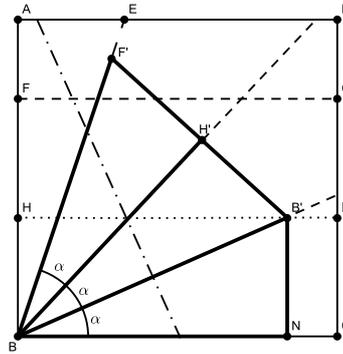


Figura 4.6: Trissecção do ângulo.

Observação: Se o ângulo for reto, o ponto E coincide com A e se o ângulo for de 45° o ponto E coincidirá com D . Já em ângulos agudos menores que 45° devemos colocar o ponto E no lado CD . Para casos de ângulos obtusos, basta aplicar a trissecção no ângulo reto e depois no ângulo excedente a 90° e na sequência somá-los. Neste caso, utilizaremos um retângulo com as dimensões na razão $\frac{1}{2}$.

4.2 Duplicação do cubo

Para a resolução deste outro problema clássico iremos utilizar como referência um método desenvolvido por Peter Messer (Ver em [18]).

Seja $BFIJ$ um papel quadrado. Divida os lados paralelos deste quadrado em três partes iguais (Ver 5.8 - Trisseção do lado de um quadrado).

Utilizando a nomenclatura da figura 4.7 vamos fazer incidir F em BJ e G em DH simultaneamente (Axioma 6). Chamemos essas transposições de F em BJ e G em DH de pontos A e E , respectivamente. O nosso objetivo é mostrar que a razão entre os segmentos $\overline{JA} = x$ e $\overline{AB} = y$ mostrados na figura 4.8 é igual a $\sqrt[3]{2}$.

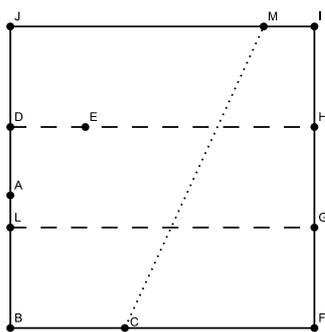


Figura 4.7: Duplicação do cubo.

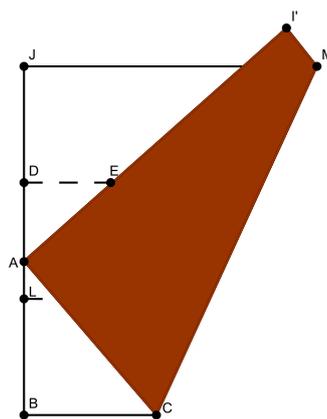


Figura 4.8: Duplicação do cubo.

Sem perda de generalidade vamos considerar que $y = 1$. Assim, o lado do quadrado medirá $(1 + x)$. Basta, desta forma, mostrar que $x = \sqrt[3]{2}$.

Aplicamos, então, o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle ABC$ para determinarmos a medida de $\overline{BC} = z$.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$(x + 1 - z)^2 = 1^2 + z^2$$

$$x^2 + 1 + z^2 + 2x - 2xz - 2z = 1 + z^2$$

$$-2xz - 2z = -x^2 - 2x$$

$$2xz + 2z = x^2 + 2x$$

$$z(2x + 2) = x^2 + 2x$$

$$\overline{BC} = z = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}.$$

Já sabemos, porém, que $\overline{AD} = x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{3}$.

Podemos também constatar que os triângulos retângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EDA$ são semelhantes, pois vejam o seguinte:

$$\angle BAC + \angle DAE = 90^\circ$$

e

$$\angle DAE + \angle DEA = 90^\circ.$$

Daí, concluímos que $\angle BAC = \angle DEA$. Logo esses triângulos são semelhantes.

Deste modo,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{x+1 - \frac{x^2+2x}{2x+2}} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}}$$

$$(x^2 + 2x)(x + 1) = [(x + 1)(2x + 2) - (x^2 + 2x)](2x - 1)$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

$$-x^3 = -2$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

Logo, $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1} = \sqrt[3]{2}$ como queríamos mostrar.

Capítulo 5

Aplicações dos Origamis na Geometria Euclidiana Plana

5.1 Construção de um retângulo e de um quadrado

A maioria dos origamis tem como referência inicial de construção uma folha de papel em formato de retângulo ou de quadrado. Iremos, então, construí-los a partir de um pedaço de papel qualquer por meio dos seguintes procedimentos:

- Dobre o pedaço de papel qualquer sobre ele próprio, próximo de um dos bordos (figura 5.1), obtendo o segmento LG (Axioma 1);
- Dobre novamente o papel, sobrepondo o segmento LG sobre ele mesmo com o objetivo de obter um novo segmento NI perpendicular à LG (Axioma 4). A intersecção dos segmentos LG e NI é o ponto A (figura 5.1);
- Repetindo o procedimento anterior obtemos o retângulo $ABCD$ (figura 5.1), visto que, por construção, todos os ângulos deste quadrilátero são retos;
- Para obtermos um quadrado continuemos a partir da figura 5.2 sobrepondo BC a CD , fixando C (Axioma 3). O ponto E é a transposição do ponto B em CD e CF é o segmento gerado por esta dobragem.

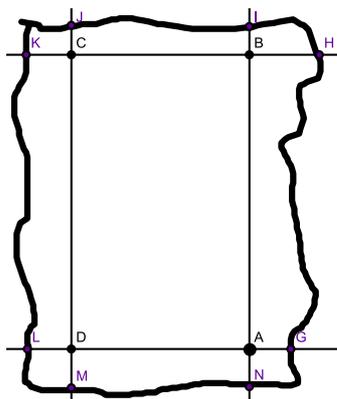


Figura 5.1: Construção do retângulo.

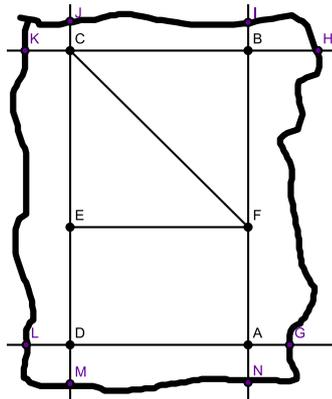


Figura 5.2: Construção do quadrado.

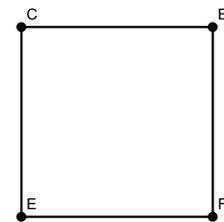


Figura 5.3: Quadrado.

Como $\overline{CE} = \overline{BC}$ e o segmento de reta CF é a bissetriz do ângulo $\angle BCE$, então o triângulo retângulo $\triangle BCF$ é isósceles com $\overline{BF} = \overline{BC}$.

- Dobre BA sobre ele mesmo passando por F (Axioma 4) (figura 5.2).

Esta perpendicular a BA é, por consequência paralela a BC . Assim, o ponto E pertence a esta perpendicular, pois $\overline{CE} = \overline{BF}$. Logo, $\overline{EF} = \overline{BC}$ e o quadrilátero $BCEF$ é um quadrado (figura 5.3).

5.2 Construção de um triângulo equilátero

Iremos utilizar um pedaço de papel quadrado $ABCD$ que, sem perda de generalidade, podemos supor que o lado possui uma unidade de comprimento.

- Dobre o papel fazendo coincidir os pontos A e D (Axioma 2). A reta de dobragem \overrightarrow{FT} é a mediatriz de AD , pois para qualquer ponto E pertencente a esta reta de dobragem temos que $\overline{AE} = \overline{DE}$ (figura 5.4);
- Transponha o ponto A à reta de dobragem \overrightarrow{FT} , fixando D (Axioma 5). O ponto fruto desta transposição será denotado por P (figura 5.5);
- Construa o segmento de reta DP (Axioma 1) e desdobre (figura 5.6).
- Construa o segmento de reta AP (Axioma 1) e desdobre. Temos, então, o triângulo equilátero $\triangle APD$ (figura 5.6).

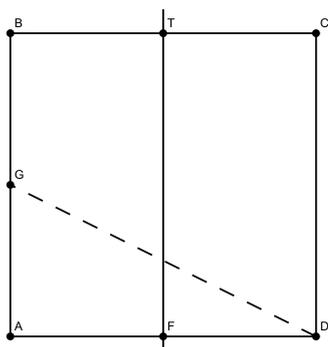


Figura 5.4: Construção do triângulo equilátero.

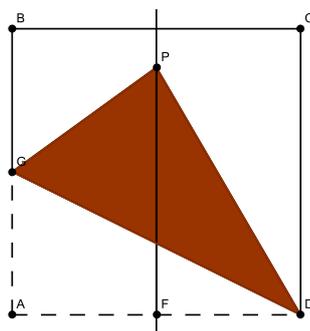


Figura 5.5: Construção do triângulo equilátero.

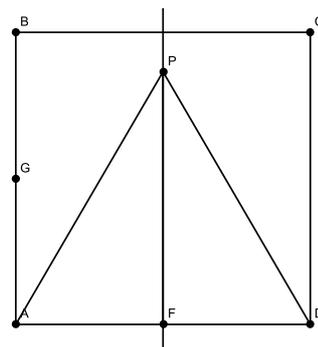


Figura 5.6: Construção do triângulo equilátero.

Para garantirmos que realmente o triângulo obtido é equilátero acompanhemos a seguinte demonstração.

Sabemos que o pedaço de papel quadrado $ABCD$ tem cada lado medindo uma unidade de comprimento, ou seja, $\overline{AD} = 1$. A reta \overleftrightarrow{FT} é a mediatriz do segmento AD e o ponto P é a transposição do ponto A , fixando D . Logo, $\overline{DP} = \overline{AP} = \overline{AD} = 1$ e o triângulo $\triangle APD$ é um triângulo equilátero com cada lado medindo uma unidade de comprimento.

5.3 Construção de um retângulo com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Seja $ABCD$ um pedaço de papel quadrado, que sem perda de generalidade vamos supor cada lado medindo uma unidade de comprimento.

- Dobre fazendo coincidir os segmentos de reta AB e DC (Axioma 3) e desdobre. Os pontos E e F são os pontos médios de AD e BC , respectivamente (figura 5.7);
- Dobre levando o ponto C sobre o segmento EF , fixando B (Axioma 5). Denote-o por J (figura 5.8);
- Dobre a perpendicular HI a EF passando por J (Axioma 4), onde $H \in AB$ e $I \in CD$ (figura 5.8).

Como o triângulo $\triangle BHJ$ é retângulo em H , temos pelo Teorema de Pitágoras que

$$\overline{BJ}^2 = \overline{JH}^2 + \overline{HB}^2$$

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{HB}^2$$

$$\overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sabendo que $HI \perp EF$ e $EF \perp BC$, podemos afirmar que $HI \parallel BC$ e, desta forma, $\overline{IC} = \overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Corte por HI e EF . Obteremos os retângulos $BHJF$ e $FJIC$ ambos com dimensões proporcionais a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (figura 5.9), pois

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{IC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

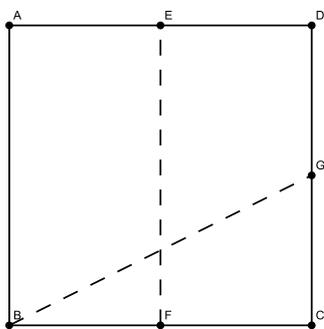


Figura 5.7: Construção de um retângulo com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

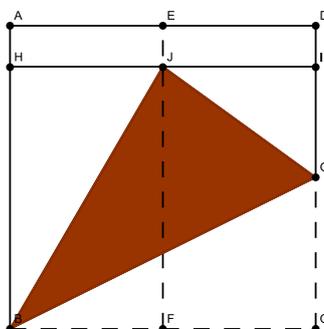


Figura 5.8: Construção de um retângulo com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

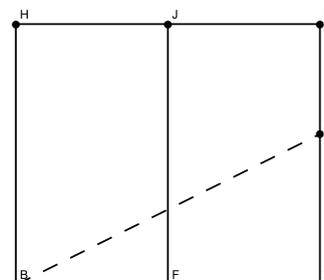


Figura 5.9: Retângulos com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Para a construção de um retângulo com dimensões na razão $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ seguimos os mesmos passos utilizados no retângulo anterior e somente o corte final é diferente, ocorrendo apenas por HI e obtendo o retângulo $BHIC$ (figura 5.10), onde

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BH}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

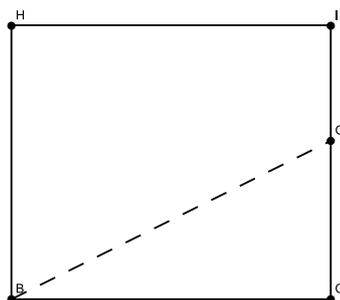


Figura 5.10: Retângulo com dimensões na razão $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5.4 Construção de um retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36°

Para a construção desse retângulo utilizaremos um pedaço de papel retangular com dimensões na razão $\frac{3}{2}$.

Para obtermos este retângulo utilizemos um pedaço de papel retangular com dimensões x e y ($x < y$). Dividamos o lado de menor medida ao meio e levemos este comprimento de $\frac{x}{2}$ para o lado de maior medida, fixando-se um dos vértices. Com esta medida de $\frac{x}{2}$ é possível fazer a trisseção do lado y .

Caso $\frac{3x}{2} > y$ devemos diminuir a dimensão x deste retângulo de forma conveniente e repetir o procedimento. Se $\frac{3x}{2} = y$ teremos o nosso retângulo desejado dividido em seis quadrados congruentes. Ocorrendo $\frac{3x}{2} < y$, basta recortar o excesso do lado y .

Sem perda de generalidade utilizaremos um retângulo com as dimensões de 6 e 4 unidades de comprimentos dividido em seis quadrados congruentes (figura 5.11) e seguiremos as instruções seguintes:

- Dobre levando cada lado de maior medida do pedaço de papel retangular (lados BC e AD) a coincidir com a reta de dobragem EH paralela a eles (Axioma 3) e desdobre. Passamos a ter 12 retângulos congruentes com uma dimensão sendo o dobro da outra (figura 5.12);
- Marque uma diagonal para cada retângulo formado, mantendo-as contínuas (Axioma 1) (figura 5.12).

Temos agora 24 triângulos retângulos congruentes com as medidas dos catetos iguais a 2 e 1. Aplicando o Teorema de Pitágoras num destes triângulos (utilizaremos o triângulo $\triangle JSI$) e chamando a hipotenusa de x , temos que:

$$\overline{JS}^2 = \overline{SI}^2 + \overline{JI}^2$$

$$x^2 = 1^2 + 2^2$$

$$x = \sqrt{5}.$$

- Dobre o segmento da diagonal $\overline{JS} = \sqrt{5}$ do retângulo $JTSI$ sobre o lado AD do retângulo original, fixando J e obtendo o ponto U . Temos que, $\overline{AU} = (2 + \sqrt{5})$ (Axioma 5) (figura 5.12).

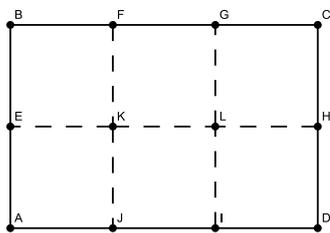


Figura 5.11: Construção do retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° .

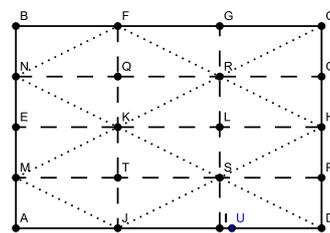


Figura 5.12: Construção do retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° .

- Dobre levando o ponto M ao lado AD , fixando A . Este ponto está representado por X (Axioma 5) (figura 5.13). Na sequência, dobre o lado AD sobre ele mesmo sobrepondo o ponto X em U . O ponto V será, desta forma, a transposição de A em AD e $\overline{AV} = (3 + \sqrt{5})$ (Axioma 2);
- Dobre uma perpendicular ao lado AD por U (Axioma 4) e determine nesta o ponto W que equidista a $(3 + \sqrt{5})$ unidades de comprimento do vértice A (Axioma 3) (figura 5.14).

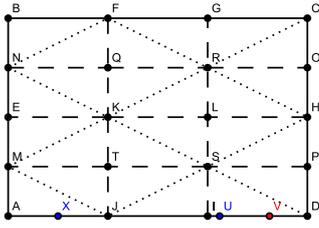


Figura 5.13: Construção do retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° .

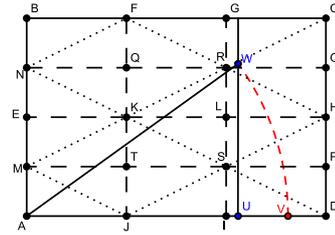


Figura 5.14: Construção do retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° .

- Dobre levando o segmento UW a coincidir com AB (Axioma 3). O ponto Y é a transposição do ponto W em AB (figura 5.15).

Está pronto o retângulo $AUWY$ cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° (figura 5.15), pois

$$\cos 36^\circ = \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}.$$

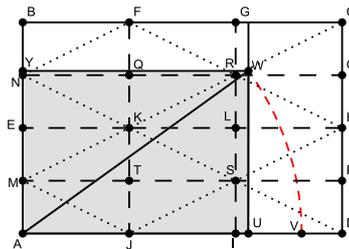


Figura 5.15: Retângulo cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° .

5.5 Construção do retângulo áureo

O retângulo cuja razão entre o lado de maior e o de menor medida, respectivamente, é igual ao número áureo é chamado de retângulo áureo. O número áureo é um número irracional especial na Matemática. Simbolizado pela letra grega ϕ (em homenagem ao escultor Phidias, que a teria utilizado para conceber

o Parthenon), o número 1,618034... é resultado de uma divisão considerada a mais harmônica a partir de um segmento.

Definindo algebricamente, temos que um retângulo cujas dimensões x e y ($x < y$) é áureo quando $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x} = \frac{y+x}{y} = \phi$.

Na construção do retângulo áureo passaremos por uma etapa em que teremos um pentágono regular. Sigamos então as orientações que seguem para obtermos este pentágono regular e na sequência o retângulo áureo. Começemos com um pedaço de papel quadrado $ABCD$ que, sem perda de generalidade, podemos supor que possui duas unidades de comprimento. Façamos, então, o seguinte:

- Dobre fazendo o segmento de reta BC coincidir com o AD (Axioma 3). O segmento EF é tal que E e F são, respectivamente, os pontos médios de AB e DC (figura 5.16);
- Marque uma diagonal no retângulo $BEFC$ (Axioma 1). Escolheremos a diagonal BF (figura 5.17).

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle BEF$, temos que

$$\overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2$$

$$\overline{BF}^2 = 1^2 + 2^2$$

$$\overline{BF} = \sqrt{5}.$$

- Dobre por BF levando o ponto C (figura 5.18), que está sobreposto ao D (Axioma 1). Esta transposição gera o ponto C'' ;
- Dobre levando o ponto C'' ao segmento de reta BF , fixando o ponto F (Axioma 5). Este ponto será denominado C' (figura 5.19).

Como $\overline{C'F} = 1$ e $\overline{BF} = \sqrt{5}$, então $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$.

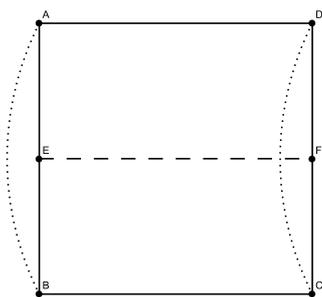


Figura 5.16: Construção do retângulo áureo.

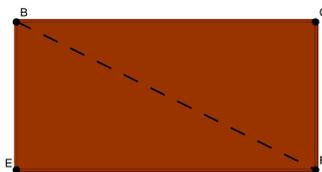


Figura 5.17: Construção do retângulo áureo.

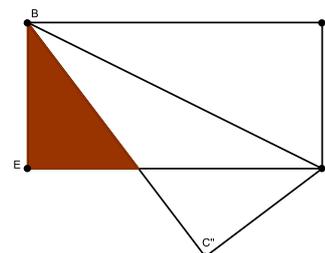


Figura 5.18: Construção do retângulo áureo.

- Desdobre voltando para o quadrado inicial $ABCD$, mas, mantendo o triângulo $\triangle GC'F$ (figura 5.20);
- Dobre levando o ponto A ao segmento de reta BF , fixando o ponto B (Axioma 5). Chame este ponto de A' e, de H o ponto de intersecção desta reta de dobragem com AD (figura 5.21);
- Dobre fazendo o ponto A' incidir em C' para identificarmos o ponto médio O do segmento de reta $A'C'$ (Axioma 2) e desdobre (figura 5.21).

Visto que $\overline{BA} = 2$ e $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$ temos que, $\overline{C'A'} = [2 - (\sqrt{5} - 1)] = 3 - \sqrt{5}$ e $\overline{OA'} = \overline{OC'} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

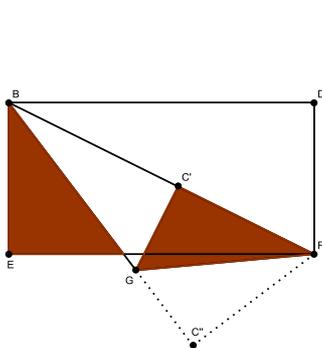


Figura 5.19: Construção do retângulo áureo.

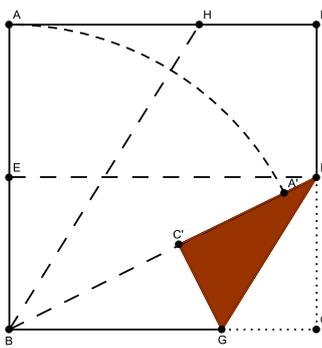


Figura 5.20: Construção do retângulo áureo.

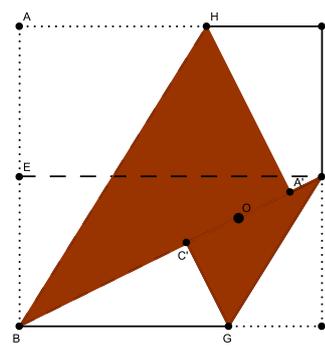


Figura 5.21: Construção do retângulo áureo.

- Transponha o ponto O para o lado AB do quadrado, identificando este ponto por O_1 e desfaça as dobragens que formaram os triângulos $\triangle HAB$ e $\triangle GC'F$. Agora dobre o ponto B sobre o ponto A para identificarmos o ponto O' que coincide com O_1 em BE (Axioma 2) (figura 5.22) e desdobre (figura 5.23).

Como $\overline{O_1A} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, então, $\overline{O_1O'} = 2 - 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5} - 1$. Iremos considerar O_1O' como o comprimento do lado de um pentágono regular.

- Dobre levando o ponto O' ao segmento de reta AD , fixando O_1 (Axioma 5). Denomine-o ponto P (figura 5.24) e desdobre. Para determinar o ponto Q leve o ponto O_1 sobre o segmento de reta BC , fixando O' .

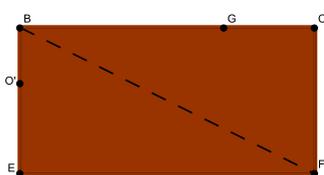


Figura 5.22: Construção do retângulo áureo.

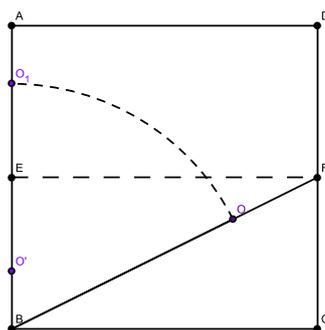


Figura 5.23: Construção do retângulo áureo.

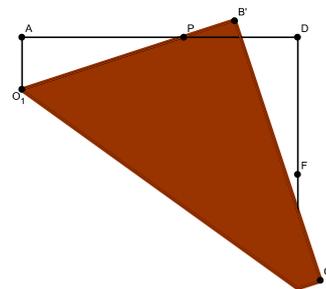


Figura 5.24: Construção do retângulo áureo.

- Dobre por O_1P e $O'Q$ (Axioma 1) (figura 5.25);
- Dobre levando o ponto O_1 ao segmento de reta EF , fixando P (Axioma 5). Chamemos de ponto V . Repitamos o procedimento levando O' ao segmento de reta EF , fixando Q , que coincidirá também com o ponto V (figura 5.26);
- Dobre por PV e QV (Axioma 1) e chegamos assim ao pentágono regular $O_1O'QVP$ (figura 5.28).

Fazendo um estudo mais detalhado para esta última afirmação, vemos que os triângulos retângulos $\triangle O_1AP$ e $\triangle O'BQ$ são por construção, congruentes. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle O_1AP$, temos que

$$\overline{O_1P}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{AP}^2$$

$$(\sqrt{5} - 1)^2 = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \overline{AP}^2$$

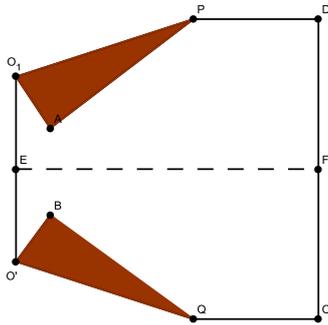


Figura 5.25: Construção do retângulo áureo.

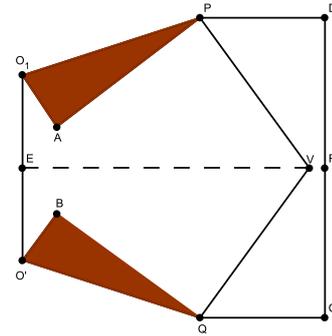


Figura 5.26: Construção do retângulo áureo.

$$\overline{AP}^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle O'AP$ teremos

$$\overline{O'P}^2 = \overline{AO'}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{O'P}^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^2 + \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{O'P} = 2.$$

Desta forma, temos que o triângulo $\triangle O'PQ$ é isósceles (figura 5.27). Por isso, se R é o ponto médio de $O'Q$, então $PR \perp O'Q$. A reflexão do quadrilátero O_1PRO' em torno de PR , leva O' em Q e O_1 em V . Logo, o pentágono possui todos os lados congruentes.

Com relação aos ângulos, vemos do triângulo retângulo $\triangle O_1AP$ que

$$\cos \widehat{AO_1P} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$$

$$\angle AO_1P = 72^\circ.$$

Desta forma, $\angle PO_1O' = \angle QO'O_1 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Chamando de S o ponto médio de PQ , temos do triângulo $\triangle PSV$ que

$$\cos \widehat{VPS} = \frac{1}{\sqrt{5} - 1}$$

$$\angle VPS = 36^\circ.$$

Assim, $\angle O_1PV = \angle O'QV = 90^\circ - 18^\circ + 36^\circ = 108^\circ$ e $\angle PVQ = 54^\circ + 54^\circ = 108^\circ$. Logo, o pentágono $O_1O'QVP$ é regular (figura 5.28).

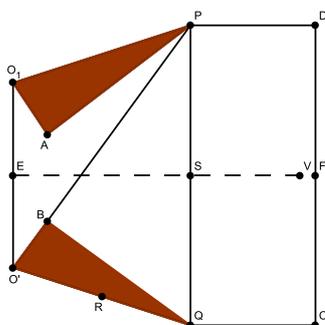


Figura 5.27: Construção do retângulo áureo.

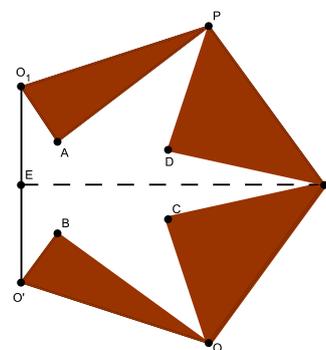


Figura 5.28: Construção do retângulo áureo.

Dando prosseguimento vamos obter o retângulo áureo a partir deste pentágono regular com os lados medindo $(\sqrt{5} - 1)$ unidades de comprimento construído de um quadrado de lado 2.

- Desfaça todas as dobragens, com exceção da que gerou o triângulo $\triangle FC'G$ (figura 5.29). Agora dobre levando o ponto A ao segmento BF , fixando B (Axioma 5). Chame de J o ponto do segmento de reta BA que coincide com C' em BF (Axioma 2);
- Por J trace uma perpendicular ao lado AB (Axioma 4). Chamemos de D' o ponto de intersecção desta perpendicular com DF (figura 5.30).

O retângulo $JBCD'$ (figura 5.31) é áureo, porque todos os retângulos de lados x e y ($x < y$) tais que $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$ são áureos. E, como $\overline{JB} = \sqrt{5} - 1$ e $\overline{BC} = 2$, temos que

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2-(\sqrt{5}-1)}$$

$$(\sqrt{5}-1)^2 = 2(3-\sqrt{5})$$

$$6-2\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}.$$

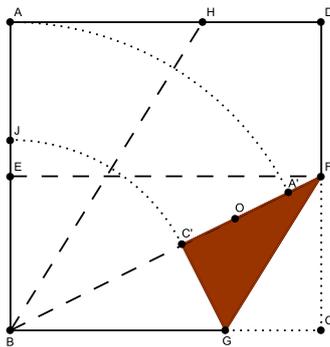


Figura 5.29: Construção do retângulo áureo.

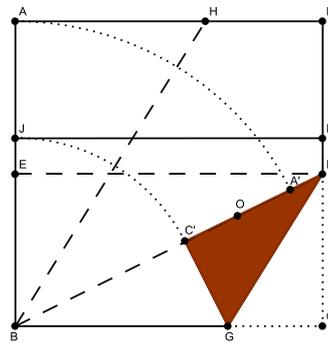


Figura 5.30: Construção do retângulo áureo.

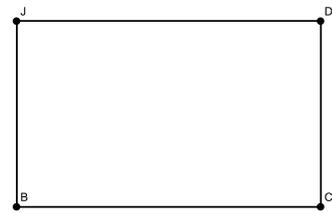


Figura 5.31: Retângulo áureo.

5.6 Construção de um Pentágono Regular

Quando construímos o retângulo áureo na seção anterior acabamos por construir um pentágono regular. Iremos agora mostrar uma outra técnica de construção deste mesmo polígono regular. Sigamos o passo a passo e acompanhemos a demonstração.

- Dobre o pedaço de papel quadrado $KLMN$ fazendo incidir os lados LK e MN , determinando os pontos B em LM e H em KN na reta de dobragem (Axioma 3). Dobre agora KN sobre LM , obtendo os pontos G em KL e Q em NM na reta de dobragem (Axioma 3). Estas dobragens dividem o quadrado em quatro quadrados congruentes e a intersecção das mesmas é o ponto C (figura 5.32);
- Dobre fazendo incidir MN em BH , identificando os pontos S em BM , A em CQ e T em HN (Axioma 3) (figura 5.33).

Como $\overline{EC} = \overline{CB}$ e $\overline{CB} = \overline{GC}$, então $\overline{GC} = \overline{EC}$. Com relação ao ângulo $\angle ECG$, sabemos que $\cos \widehat{ECG} = \cos \widehat{ECF} = \frac{\overline{FC}}{\overline{CE}}$. Suponhamos sem perda de generalidade que $\overline{CE} = \overline{GC} = 1$.

Temos também que $\overline{DA} = \overline{AB}$, pois D foi obtido por meio de uma reflexão que manteve fixo o ponto A e transpôs B até o ponto D . Utilizando, então, o triângulo retângulo $\triangle ABC$, temos que

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$$

$$\overline{AB}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Desta forma,

$$\overline{DA} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\overline{DC} = \overline{DA} - \overline{CA} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\overline{FC} = \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\text{Portanto, } \cos \widehat{ECG} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Como $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, concluímos que $\angle ECG = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$. Logo \overline{EG} é a medida do comprimento do lado deste pentágono regular.

Para terminarmos a construção deste polígono é só reproduzir os outros três vértices. Todos eles estarão sobre a circunferência de centro C e raio \overline{BC} . Procedamos do seguinte modo.

- Dobre o pedaço de papel quadrado por GQ fazendo refletir o ponto E . Chamemos este novo ponto de R que é um novo vértice do pentágono regular e também pertence à mediatriz de DC (figura 5.36);
- Fazendo coincidir G e E , fixando C , temos que a nova posição de R , leva-nos ao ponto I , outro vértice deste pentágono regular (figura 5.36);
- Para determinarmos o último vértice é só fazer coincidir G sobre I , fixando C . A nova posição de R , leva-nos ao ponto J , chegando ao pentágono regular $EGRJI$ (figura 5.36).

$\angle EAD = \angle EDA$ e $\angle DCF = \angle FDC$. Logo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , pois

$$\angle ADC = 180^\circ$$

$$\angle EDF + \angle ADE + \angle FDC = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180^\circ.$$

5.8 Trissecção do lado de um quadrado

Seja $ABCD$ um quadrado que, sem perda de generalidade, podemos supor os lados medindo uma unidade de comprimento (figura 5.39). Para dividirmos o lado do quadrado em três partes iguais, procedamos da seguinte maneira.

Façamos o segmento de reta DC coincidir com o AB (Axioma 3) (figura 5.40) e desdobre. Chamemos de E e F os pontos médios de AD e BC , respectivamente (figura 5.41). Dobremos levando o ponto D até o F (Axioma 2) e chamemos de A' e D' as transposições de A e D geradas por esta última dobragem e de G o ponto de intersecção de $A'D'$ com AB (figura 5.42).

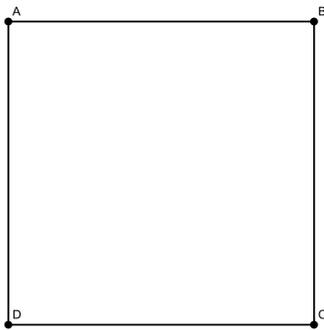


Figura 5.39: Trissecção do lado de um quadrado.



Figura 5.40: Trissecção do lado de um quadrado.

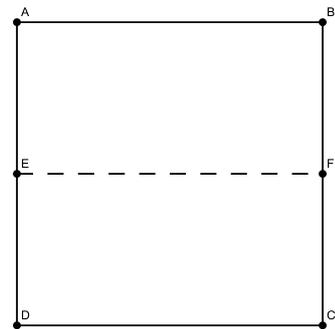


Figura 5.41: Trissecção do lado de um quadrado.

Afirmção: $\overline{AG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

Inicialmente vejam que os triângulos retângulos $\triangle FGB$ e $\triangle PFC$ são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes iguais (figura 5.42). (A demonstração desta afirmação está em 5.10 - Teorema de Haga). Portanto,

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CF}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{CP}}{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{GB} \cdot \overline{CP} = \frac{1}{4}.(I)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle PFC$, temos que

$$\overline{PF}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{FC}^2$$

$$(1 - \overline{CP})^2 = \overline{CP}^2 + \overline{FC}^2$$

$$1 - 2\overline{CP} + \overline{CP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{FC}^2$$

$$1 - 2\overline{CP} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{CP} = \frac{3}{8}.(II)$$

Substituindo (II) em (I) obtemos $\overline{GB} = \frac{2}{3}$. E, como $\overline{AG} = 1 - \overline{GB}$, então, $\overline{AG} = \frac{1}{3}$.

Para concluirmos a trisseção do lado AB do quadrado $ABCD$ basta levar o ponto B até o G (Axioma 2) e denotarmos por H o ponto médio de BG , que teremos $\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{HB} = \frac{1}{3}$ (figura 5.43).

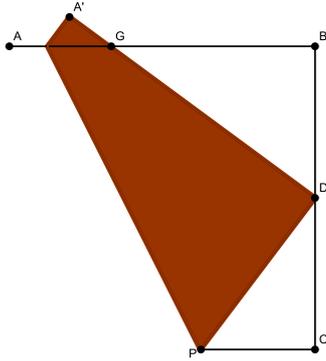


Figura 5.42: Trisseção do lado de um quadrado.

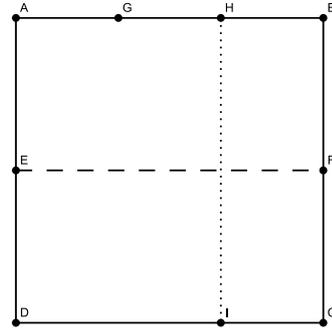


Figura 5.43: Trisseção do lado de um quadrado.

5.9 Teorema de Pitágoras

Iremos mostrar por meio de Origami que em todo triângulo retângulo a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Para isso, utilizemos um pedaço de papel quadrado que denotaremos por $KLMN$. Este quadrado terá cada lado dividido em três partes iguais e, desta forma, ficará formado por nove quadrados menores e congruentes (figura 5.44).

A partir daí façamos uma dobragem que passe por X e W , outra por X e Y , outra por Y e Z e a última passando por Z e W , obtendo-se o quadrado $WXYZ$ inscrito no quadrado $KLMN$ (figura 5.45).

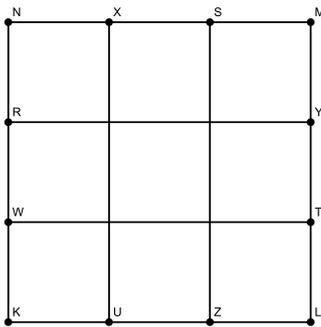


Figura 5.44: Teorema de Pitágoras.

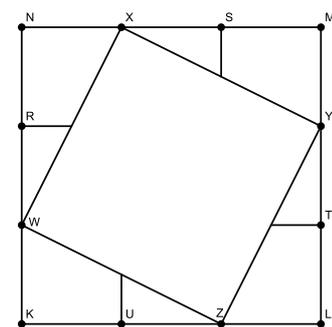


Figura 5.45: Teorema de Pitágoras.

Temos, então que:

- A área do quadrado $KLMN$ é igual a $\overline{NK}^2 = (\overline{NW} + \overline{WK})^2 = (\overline{NW} +$

$$\overline{NX})^2;$$

- A área do quadrado $WXYZ$ é igual a \overline{WX}^2 ;
- A área do triângulo retângulo $\triangle WXN$ é igual a $\frac{\overline{NX} \cdot \overline{NW}}{2}$.

Como a área do quadrado $KL MN$ é igual a soma da área do quadrado $WXYZ$ com quatro vezes a área do triângulo $\triangle WXN$, então

$$(\overline{NW} + \overline{NX})^2 = \overline{WX}^2 + 4 \cdot \frac{\overline{NX} \cdot \overline{NW}}{2}$$

$$\overline{NW}^2 + 2 \cdot \overline{NW} \cdot \overline{NX} + \overline{NX}^2 = \overline{WX}^2 + 2 \cdot \overline{NW} \cdot \overline{NX}$$

$$\overline{NW}^2 + \overline{NX}^2 = \overline{WX}^2.$$

Provamos desta forma a nossa afirmação inicial.

5.10 Teorema de Haga

Teorema 5.10.1. *Seja $KL MN$ um pedaço de papel quadrado e um ponto P em NM , exclusive (figura 5.46). Ao dobrar-se o papel levando um dos vértices do lado paralelo à NM (K ou L) a coincidir com o ponto P , teremos três triângulos semelhantes entre si, denotados na figura 5.47 por $\triangle PMD$, $\triangle ANP$ e $\triangle ABC$.*

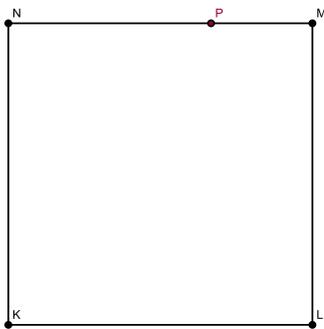


Figura 5.46: Teorema de Haga.

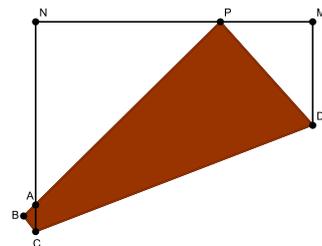


Figura 5.47: Teorema de Haga.

5.10.1 Demonstração do Teorema de Haga

Para facilitar a demonstração iremos usar a nomenclatura da figura 5.48.

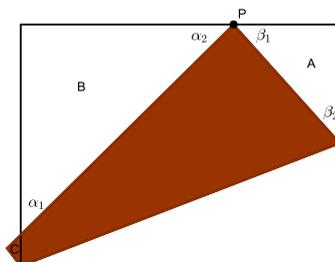


Figura 5.48: Teorema de Haga.

Vemos que $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$, $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$ e $\alpha_2 + \beta_1 = 90^\circ$. Desta forma, $\alpha_1 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \beta_2$. Então, os triângulos A e B são semelhantes por possuírem os ângulos correspondentes congruentes.

Observe agora que no triângulo C um dos ângulos é oposto pelo vértice com α_1 . Sendo assim, os triângulos B e C são triângulos semelhantes.

Logo, os triângulos A, B e C são semelhantes entre si.

Capítulo 6

Aplicações dos Origamis na Geometria Euclidiana Espacial

6.1 Confeção e montagem dos Poliedros de Platão de faces triangulares e regulares

Para confeccionar o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, poliedros de Platão formados por faces triangulares e regulares, precisaremos obter triângulos equiláteros congruentes entre si. Vamos obtê-los utilizando um pedaço de papel retangular $ABCD$ com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ que, sem perda de generalidade, iremos supor que medem 1 e $\sqrt{3}$ unidades de comprimento (Ver 5.3 - Construção de um retângulo com dimensões na razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$) (figura 6.1)).

- Inicialmente faça coincidir os vértices B e D , levando o primeiro ao segundo (Axioma 2). Desta dobragem surge EF , mediatriz de BD (figura 6.2).

Antes de continuarmos vamos mostrar que os triângulos $\triangle EFD$ e $\triangle EFB$ são equiláteros de lado medindo $\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Para isso, apliquemos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle BAD$.

$$\overline{BD}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2$$

$$\overline{BD}^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$\overline{BD} = 2.$$

Como $\overline{ED} = \overline{FD}$, temos um triângulo isósceles $\triangle EFD$ de altura relativa à base \overline{EF} igual a 1.

Porém, do triângulo retângulo $\triangle DCB$ que é congruente ao triângulo $\triangle BAD$, sabemos que $\angle BDC = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, visto que $\cos \widehat{BDC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo o $\angle EBF = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, visto que em BD está a altura deste triângulo com relação à base EF , que por ser isósceles também é a bissetriz do mesmo e, portanto o triângulo $\triangle EFD$ é equilátero de lado $l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

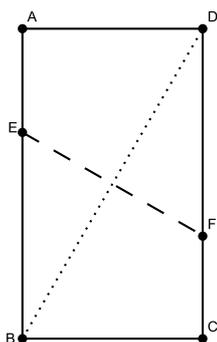


Figura 6.1: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

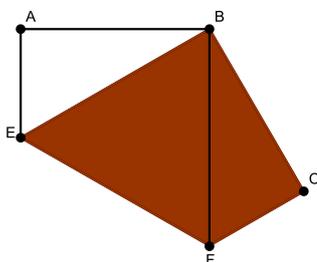


Figura 6.2: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

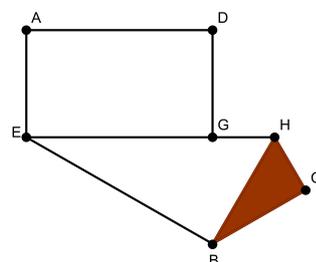


Figura 6.3: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

Sabemos também que $\overline{CD} = \overline{CF} + \overline{FD}$. Logo,

$$\overline{CF} = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como os triângulos retângulos $\triangle C'DF$ e $\triangle DAE$ são congruentes, então $\overline{AE} = \overline{C'F} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e, portanto, $\overline{BE} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

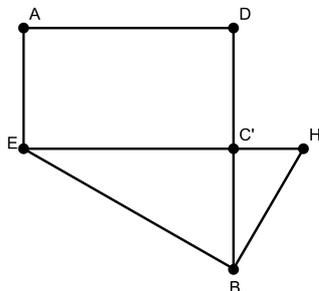


Figura 6.4: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

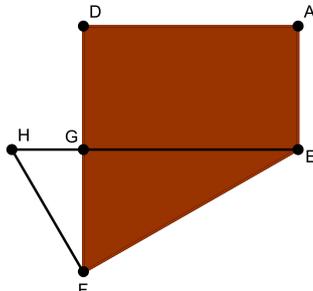


Figura 6.5: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

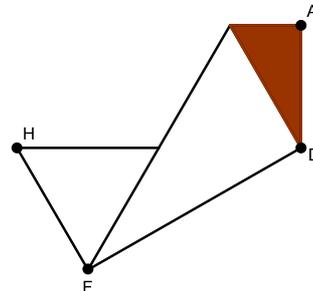


Figura 6.6: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

- Dobre fazendo coincidir os pontos B e F (figura 6.3), levando o primeiro ao segundo (Axioma 2).

A reta de dobragem é a mediatriz de DF . Logo, E pertence a essa mediatriz. Chamando de G e H os pontos de intersecção dessa mediatriz com DF e $C'D$, temos do triângulo retângulo $\triangle GDH$ que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\overline{DH}}$$

$$\overline{DH} = \frac{2}{3}$$

e

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\overline{GH}}{\frac{2}{3}}$$

$$\overline{GH} = \frac{1}{3}.$$

- Dobre, levando o ponto C' sobre DF , fixando B (Axioma 5) (figura 6.4). Na sequência vire a figura (figura 6.5);

- Dobre fazendo coincidir os pontos D e E , levando o primeiro ao segundo (Axioma 2) (figura 6.6);
- Mova o vértice A dobrando segundo o eixo do ponto E (figura 6.7);
- Desfaça a dobragem pelo eixo EF (figura 6.8) e vire a figura (figura 6.9).

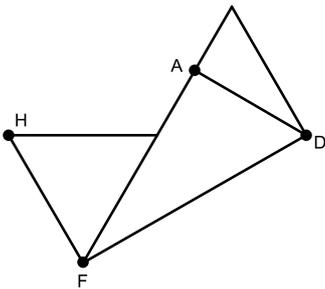


Figura 6.7: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

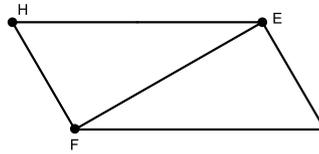


Figura 6.8: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

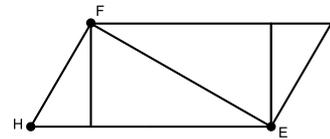


Figura 6.9: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

- Dobre levando os vértices cujos ângulos são agudos até o lado oposto, fixando os vértices de ângulos obtusos mais próximos (Axioma 5) (figura 6.10), obtendo um losango onde os lados e a diagonal menor medem $\frac{2}{3}$ (figura 6.11). Abra-o e obtenha o paralelogramo seccionado em quatro triângulos equiláteros congruentes com os lados medindo $\frac{2}{3}$ o qual chamaremos de base 1 (figura 6.12).

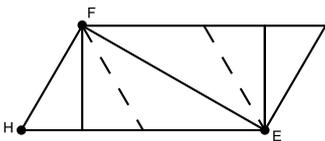


Figura 6.10: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

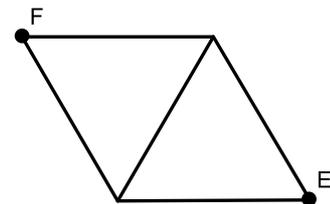


Figura 6.11: Construção da peça de montagem dos poliedros de Platão de faces triangulares.

Para confeccionar a base 2 basta seguir os mesmos procedimentos utilizados para a base 1, mudando apenas o lado de início da dobragem que foi levando o ponto B ao D na base 1 e será do C ao A para a base 2, que após pronta ficará como mostrada na figura 6.13.

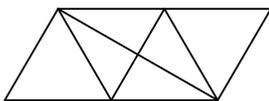


Figura 6.12: Base 1.

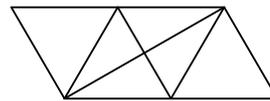


Figura 6.13: Base 2.

6.1.1 Tetraedro

A montagem do tetraedro necessita de duas peças: uma base 1 e uma base 2. Devemos encaixar uma base na outra por meio dos cortes que formam aberturas para encaixe dos triângulos das extremidades e ficarão do lado externo do poliedro (figura 6.14) e, para finalizar ir dobrando e encaixando todas as pontas dando forma ao tetraedro (figura 6.15).



Figura 6.14: Montagem do tetraedro.



Figura 6.15: Tetraedro.

6.1.2 Octaedro

Para a montagem do octaedro utilizaremos quatro bases, tendo as seguintes opções:

- quatro bases 1;
- quatro bases 2;

- duas bases 1 e duas bases 2.

De início utilizemos duas bases 1 ou duas bases 2, encaixemos uma na outra e repetamos o processo com as outras duas bases que sobraram (duas bases 1 ou duas bases 2) (figura 6.16). Na sequência, formemos duas pirâmides de base quadrada, cada uma com duas abas triangulares em duas arestas opostas da base (figuras 6.17 e 6.18). Unindo as duas pirâmides (figura 6.19) teremos o octaedro (figura 6.20).

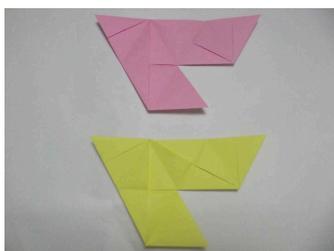


Figura 6.16: Montagem do octaedro.

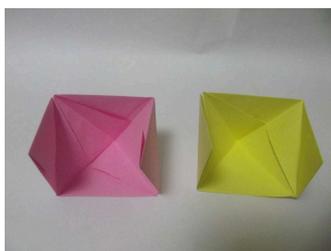


Figura 6.17: Montagem do octaedro.



Figura 6.18: Montagem do octaedro.



Figura 6.19: Montagem do octaedro.



Figura 6.20: Octaedro.

6.1.3 Icosaedro

Montaremos agora o icosaedro utilizando cinco bases de cada tipo, ou seja, cinco bases 1 e cinco bases 2. Encaixemos as dez bases de maneira intercalada (figuras 6.21 e 6.22), começando pela base 1, sendo que a última base, no caso uma base 2, deve ser encaixada na primeira (figura 6.23).

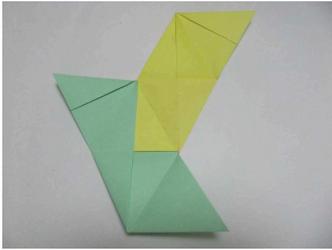


Figura 6.21: Montagem do icosaedro.



Figura 6.22: Montagem do icosaedro.

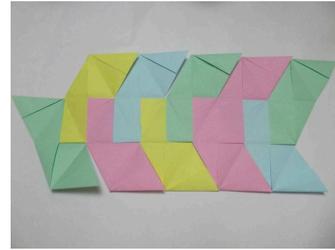


Figura 6.23: Montagem do icosaedro.

Na sequência devemos encaixar um triângulo em outro adjacente (figura 6.24), até fechar o lado com cinco faces (figura 6.25). Repita o procedimento no outro lado finalizando o icosaedro (figura 6.26).

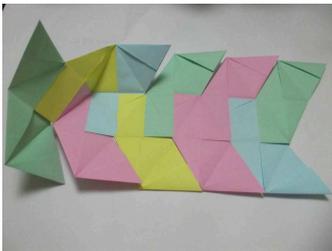


Figura 6.24: Montagem do icosaedro.



Figura 6.25: Montagem do icosaedro.



Figura 6.26: Icosaedro.

6.1.4 Esqueleto do icosaedro

O esqueleto do icosaedro é formado por três retângulos áureos encaixantes, visto que cada cinco faces triangulares com um vértice em comum do icosaedro determina um pentágono regular, cuja diagonal é o lado maior do retângulo áureo. O outro lado deste retângulo tem a medida de uma aresta do icosaedro.

Como já fizemos a construção do retângulo áureo iremos proceder à construção deste esqueleto supondo este retângulo $ABCD$ (figura 6.27) já confeccionado da seguinte maneira:

- Dobre fazendo coincidir os pontos A e B (Axioma 2). Identifique por E o ponto médio de AB (figura 6.27);

- Dobre de modo que os segmentos de reta AB e DC coincidam (Axioma 3). Chamemos de F o ponto de intersecção entre estas duas retas de dobragem (figura 6.27);
- Leve o ponto E até a última reta de dobragem, fixando o ponto F (Axioma 5). Este é o ponto G (figura 6.27);
- Recorte por EF e FG e está pronto o retângulo áureo encaixante. Construa outros dois e monte o esqueleto do icosaedro (figura 6.28). Na figura 6.29 temos a visualização das arestas do icosaedro que estão nos vértices dos retângulos áureos encaixantes.

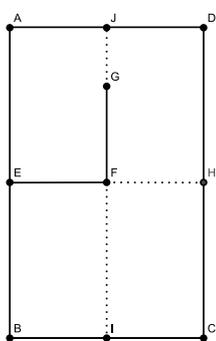


Figura 6.27: Construção do retângulo áureo encaixante.

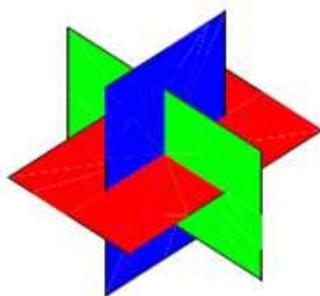


Figura 6.28: Esqueleto do icosaedro.

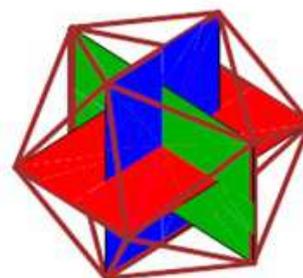


Figura 6.29: Esqueleto do icosaedro.

6.2 Hexaedro regular (Cubo)

Para confeccionar o cubo, poliedro de Platão formado por faces quadradas, iremos utilizar um pedaço de papel quadrado $ABCD$ (figura 6.30) cujos lados medem x unidades de comprimento.

- Começemos fazendo o segmento de reta BC coincidir com o AD (Axioma 3). Essa dobragem gera o segmento de reta que chamaremos de EF (figura 6.31).

Vemos que $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DF} = \frac{x}{2}$.

- Dobre de modo que o segmento de reta BC coincida com EF (Axioma 3) e, na sequência gire 180° (figura 6.32).

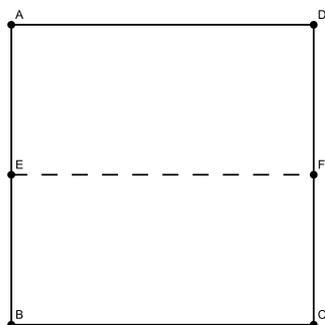


Figura 6.30: Construção da peça de montagem do cubo.



Figura 6.31: Construção da peça de montagem do cubo.

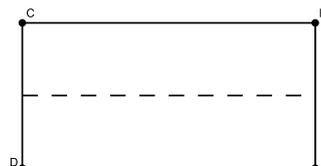


Figura 6.32: Construção da peça de montagem do cubo.

- Vire o papel e dobre fazendo AD coincidir com EF (Axioma 3) e desdobre (figura 6.33). Esta dobragem utiliza o segmento de reta que denominaremos de GH (figura 6.34);
- Leve todos os vértices sobre GH , fixando G e H (Axioma 5), obtendo os pontos I' , I , L' , L , J e K , que geram os segmentos de reta IL em EF , $I'L'$ em BC e JK em AD (figura 6.34). Observe também que temos três trapézios isósceles e congruentes: $GILH$, $GI'L'H$ e o $GJKH$ e um quadrado $IJKL$ (figura 6.35).

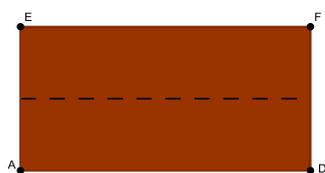


Figura 6.33: Construção da peça de montagem do cubo.

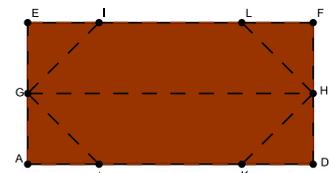


Figura 6.34: Construção da peça de montagem do cubo.

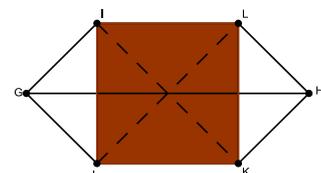


Figura 6.35: Construção da peça de montagem do cubo.

Estas afirmações são facilmente provadas pois sabemos que $\overline{AG} = \overline{DH} = \overline{EG} = \overline{FH} = \overline{GB} = \overline{HC} = \overline{EI} = \overline{BI'} = \overline{FL} = \overline{CL'} = \overline{AJ} = \overline{DK} = \frac{x}{4}$. Logo o quadrilátero $IJKL$ é um quadrado de lados medindo $\frac{x}{2}$ unidades de comprimento cujas diagonais \overline{IK} e \overline{JL} medem $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento. Já os trapézios

são isósceles e congruentes entre si, porque possuem as bases medindo x e $\frac{x}{2}$ e os lados não paralelos destes com as mesmas medidas.

- Dobre as diagonais e os lados IJ e KL do quadrado $IJKL$ (Axioma 1) (figura 6.36);
- Dobre fazendo coincidir JK com IL (Axioma 3) sobrepondo os três trapézios congruentes. Abra-o, então, pelo centro da base maior formando uma peça (figura 6.37).

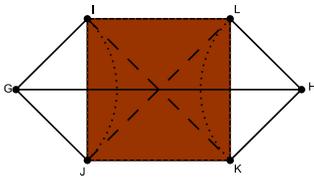


Figura 6.36: Construção da peça de montagem do cubo.

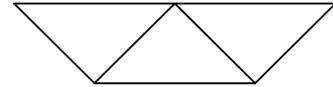


Figura 6.37: Peça de montagem do cubo.

São necessárias apenas duas peças para a montagem do cubo, desde que tenhamos um esqueleto conveniente, neste caso, o esqueleto do icosaedro mencionado anteriormente. Por isso, é bom observar que no modelo de construção citado anteriormente onde utilizamos um pedaço de papel quadrado de lado x unidades de comprimento teremos um cubo de aresta a medindo $\frac{x\sqrt{2}}{4}$ unidades de comprimento, visto que o quadrado formado na peça tem como diagonal a medida do lado quadrado $IJKL$. Logo,

$$\frac{x}{2} = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{x\sqrt{2}}{4}.$$

Caso não queiramos utilizar o esqueleto do icosaedro, necessitaremos de quatro peças para uma montagem adequada do cubo como mostram as figuras 6.38, 6.39 e 6.40.

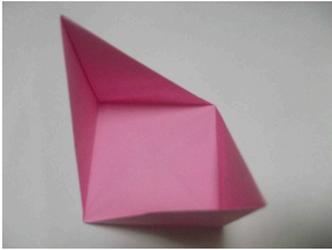


Figura 6.38: Peça de montagem do cubo.



Figura 6.39: Montagem do cubo.



Figura 6.40: Cubo.

6.3 Dodecaedro

Para confeccionar o dodecaedro, poliedro de Platão formado por faces pentagonais, iremos utilizar um pedaço de papel retangular desde que o triângulo retângulo formado pelas duas dimensões e a diagonal do mesmo tenham os dois ângulos agudos iguais a 36° e 54° . Obtido este retângulo que denominaremos de $ABCD$ (figura 6.41) deveremos proceder da seguinte maneira para obtermos o molde de montagem do dodecaedro:

- Dobre a diagonal BD (Axioma 1) (figura 6.41);
- Utilizando BD como reta de dobragem, determine E (figura 6.42), o ponto de intersecção entre AD e BC' (Axioma 1).

Como sabemos que $\angle ABD = \angle CDB = 54^\circ$ e $\angle ADB = \angle CBD = 36^\circ$, temos após essa dobragem os seguintes ângulos formados:

$$\angle C'DE = \angle C'DB - \angle ADB = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ;$$

$$\angle C'ED = 90^\circ - \angle C'DE = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ;$$

$$\angle BED = 180^\circ - \angle C'ED = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ;$$

$$\angle AEB = \angle C'ED = 72^\circ;$$

$$\angle ABE = 90^\circ - \angle AEB = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ.$$

- Utilizando BE e DE como retas de dobragem, dobre para formar o triângulo isósceles $\triangle BED$ (Axioma 2) (figura 6.43).

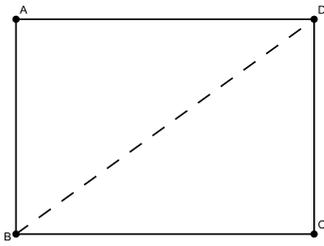


Figura 6.41: Construção da peça de montagem do dodecaedro.

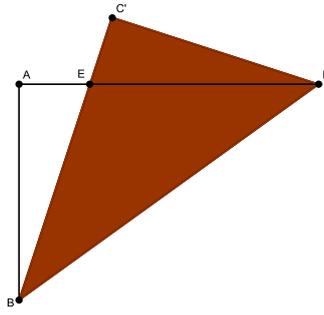


Figura 6.42: Construção da peça de montagem do dodecaedro.

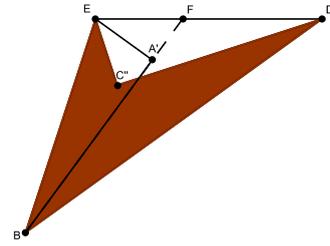


Figura 6.43: Construção da peça de montagem do dodecaedro.

Neste triângulo isósceles os ângulos são:

$$\angle BED = 108^\circ;$$

$$\angle EBD = \angle EDB = 36^\circ.$$

- Dobre para determinar a bissetriz do ângulo $\angle EBD$ (Axioma 3). Identifique por F o ponto de intersecção desta bissetriz com ED (figura 6.43);
- Dobre para identificar a mediatriz de BF (figura 6.44), que é o segmento de reta GH (Axioma 2);
- Repetindo-se os procedimentos que levaram o ponto B ao F , leve D a G , obtendo-se o segmento de reta FI (figura 6.45) e chegando ao pentágono regular $EFIHG$ (figura 6.46).

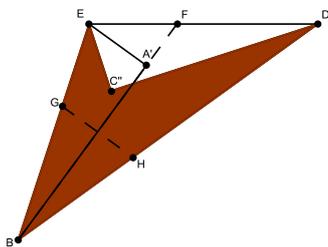


Figura 6.44: Construção da peça de montagem do dodecaedro.

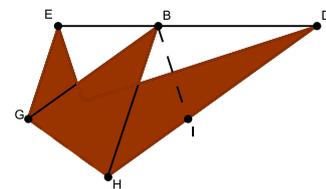


Figura 6.45: Construção da peça de montagem do dodecaedro.

Vejam que os triângulos isósceles $\triangle GHB$, $\triangle GHF$ e $\triangle FID$ são congruentes por construção, o mesmo ocorrendo entre os triângulos $\triangle FGE$ e $\triangle FHI$. Logo,

$\overline{EF} = \overline{FI} = \overline{IH} = \overline{HG} = \overline{GE}$, ou seja, os lados do pentágono $EFIHG$ possuem a mesma medida.

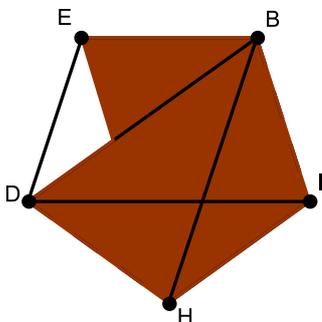


Figura 6.46: Construção da peça de montagem do dodecaedro.

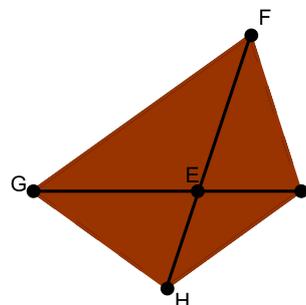


Figura 6.47: Construção da peça de montagem do dodecaedro.

Com relação aos ângulos deste pentágono temos que

$$\angle FEG = 108^\circ;$$

$$\angle EGH = \angle EGF + \angle FGH = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ;$$

$$\angle GHI = \angle GHF + \angle FHI = 72^\circ + 36^\circ = 108^\circ;$$

$$\angle HIF = \angle FEG = 108^\circ;$$

$$\angle IFE = \angle IFH + \angle HFG + \angle GFE = 36^\circ + 36^\circ + 36^\circ = 108^\circ.$$

Logo, o pentágono $EFIHG$ é regular.

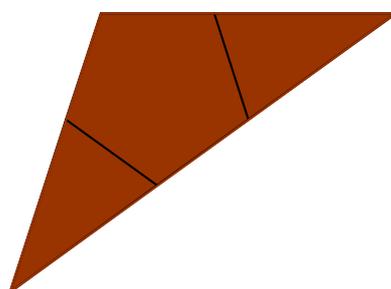


Figura 6.48: Peça de montagem do dodecaedro.

- Dobre o vértice E utilizando GF como reta de dobragem (Axioma 2) (figura 6.47);

- Desdobre de tal forma que cheguemos à figura 6.48 formada por um pentágono regular ao centro e dois triângulos isósceles nas extremidades;



Figura 6.49: Peça de montagem do dodecaedro.

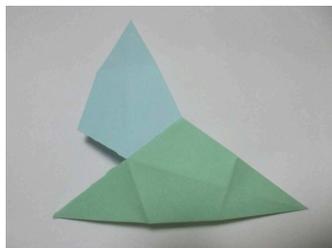


Figura 6.50: Montagem do dodecaedro.



Figura 6.51: Montagem do dodecaedro.

Para a montagem do dodecaedro precisaremos de 12 peças desta que terminamos de construir (figura 6.49) e o encaixe deve levar os triângulos isósceles das peças a um dos lados do pentágono regular de outra peça, conforme mostram as figuras 6.50 e 6.51. Repitamos o processo com as outras peças, de modo a termos quatro bases no formato da 6.51.

Encaixadas todas as bases, de forma conveniente, temos a conclusão da montagem do dodecaedro (figura 6.52).



Figura 6.52: Dodecaedro.

Capítulo 7

Aplicação do Projeto Origami - Geometria e Arte

O Projeto Origami - Geometria e Arte foi aplicado no Colégio Estadual “João XXIII”, situado no município de Ribeirópolis - SE na Avenida Dr. Carlos Firpo, 269. Ele tinha dois objetivos principais:

- Mostrar que através da arte do Origami é possível aprender Matemática;
- Utilizar o Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana.

Este projeto foi dividido em três etapas:

Na primeira etapa do projeto os alunos do 3º ano B do ensino médio foram divididos em 5 grupos e fizeram uma pesquisa sobre Origami (história e construções básicas). Em sala de aula disponibilizamos um tempo de 25 minutos para cada grupo apresentar o resumo de seu trabalho, sendo necessário três aulas para a apresentação de todos os grupos. Nas três aulas seguintes definimos uma construção em Origami para cada grupo e montamos um esquema de apresentação que mostrasse como construir por meio de dobraduras um avião (Grupo 1), um barco (Grupo 2), um cisne (Grupo 3), um pavão (Grupo 4) e um coração (Grupo 5), mas que valorizasse, especialmente, a Matemática envolvida no processo. Estas aulas ocorreram no período de 03 à 14 de dezembro de 2012.

Na segunda etapa, ocorrida no dia 20 de dezembro de 2012, os alunos do 3º ano B apresentaram o seu trabalho para os alunos do Ensino Fundamental do 6º

ao 9^o ano do turno vespertino. Foram quatro apresentações de 30 minutos para cada grupo realizadas nas salas de aula das turmas do 6^o ano B, 7^o ano B, 8^o ano B e 9^o ano B.

Na última etapa, os alunos do 3^o ano B apresentaram o seu trabalho para os alunos do Ensino Fundamental do 6^o ao 9^o ano do turno matutino. Foram também quatro apresentações de 30 minutos para cada grupo realizadas nas salas de aula das turmas do 6^o ano A, 7^o ano A, 8^o ano A e 9^o ano A. Elas ocorreram no dia 10 de janeiro de 2013.

Os alunos 3^o ano B utilizaram o site que consta em [9] para escolher as construções que seriam feitas. Por isso, as figuras utilizadas nas seções 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 e 7.5 foram todas extraídas deste site. Colocaremos, então, na sequência um resumo de cada apresentação, mantendo a escrita original que foi preparada para cada grupo.

7.1 Origami de avião

Boa tarde (Bom dia). Nós iremos estudar Matemática com vocês por meio da construção do Origami de avião e, para isso, utilizaremos inicialmente uma folha de formato retangular. O retângulo é um polígono de 4 lados da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos (90°). Por esse motivo os lados paralelos do retângulo sempre têm as mesmas medidas, ou seja, são congruentes. Gostaríamos de ressaltar que um paralelogramo é todo quadrilátero que possui os ângulos internos opostos congruentes e os lados paralelos também congruentes.

Dobre a folha retangular de tal forma que os lados paralelos de maior medida coincidam.

Formamos dois retângulos congruentes, isto é, com as mesmas dimensões (comprimento e largura). Representando cada retângulo em forma de fração podemos dizer que cada um representa $\frac{1}{2}$ (lê-se: um meio) de toda a folha, ou seja, metade.

Antes de continuar gostaríamos de dizer para vocês que um retângulo possui 4 vértices (ponto em que dois lados consecutivos do polígono se intersectam).

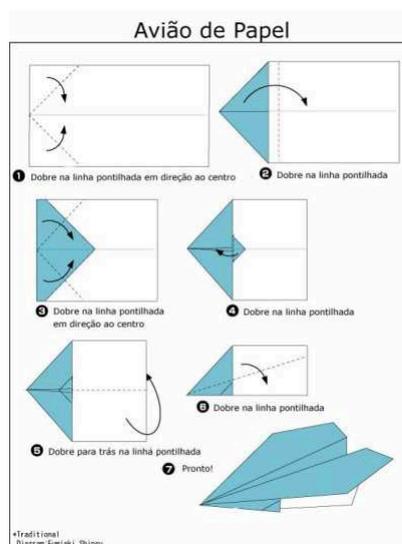


Figura 7.1: Montagem do Origami de avião.

Dobre a folha em direção ao centro tendo como referência um vértice qualquer do retângulo. Repita a operação utilizando um vértice consecutivo ao anterior, sendo que estes formem um dos lados menores da folha de formato retangular.

Um triângulo que tem todos os lados com a mesma medida é chamado de triângulo equilátero. Quando tem dois lados com a mesma medida é chamado de triângulo isósceles. Se todos os lados são de medidas diferentes o triângulo é chamado de triângulo escaleno. Neste caso, nós formamos dois triângulos isósceles e observe que eles são congruentes. É bom também que observemos que a união dos dois triângulos gera um novo triângulo isósceles com o dobro da área (espaço ocupado na superfície por este triângulo). Não poderíamos deixar de mostrar que estes triângulos mencionados, com relação aos ângulos podem ser chamados de triângulo retângulo (todo triângulo que tem um ângulo reto).

Dobre o vértice do triângulo retângulo onde se encontra o ângulo reto em direção ao centro fazendo com que o segmento paralelo ao lado maior deste triângulo fique a aproximadamente 1 cm de distância entre si.

À respeito de lado maior de um triângulo retângulo é bom saber que ele é chamado de hipotenusa e, encontra-se sempre do lado oposto ao ângulo reto. Já os outros dois lados do triângulo retângulo que formam o ângulo de 90° são chamados de catetos. Observe que formamos agora um polígono de 5 lados denominado pentágono.

Dobre a folha em direção ao centro tendo como referência um dos vértices

que forma o lado que está paralelo ao lado menor da folha retangular original. Veja que temos novamente triângulos isósceles e retângulos e queremos destacar que na parte interna dos triângulos formou-se um quadrado (polígono de 4 lados também da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos e os quatro lados congruentes, ou seja, com as mesmas medidas).

Dobre o triângulo retângulo menor em direção ao maior e em seguida dobre o pentágono formado ao meio e para trás. Chegamos agora a um polígono de 4 lados que tem uma base maior e uma base menor paralelas entre si. Esse polígono é conhecido por trapézio.

Pronto. O nosso avião está montado. Ao final da última apresentação todos estão convidados para ir até a quadra da escola para fazermos uma competição com o avião que vocês construíram.

7.2 Origami de barco

Boa tarde (Bom dia). Nós iremos estudar Matemática com vocês por meio da construção do Origami de barco e, para isso, utilizaremos inicialmente uma folha de formato retangular. O retângulo é um polígono de 4 lados da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos (90°). Por esse motivo os lados paralelos do retângulo sempre têm as mesmas medidas, ou seja, são congruentes. Gostaríamos de ressaltar que um paralelogramo é todo quadrilátero que possui os ângulos internos opostos congruentes e os lados paralelos também congruentes.

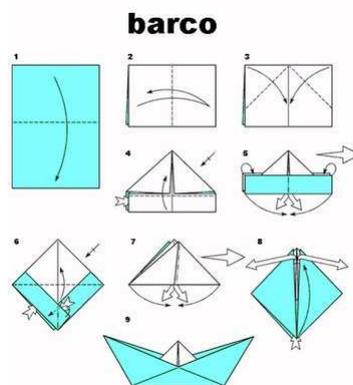


Figura 7.2: Montagem do Origami de barco.

Dobre a folha retangular de tal forma que os lados paralelos de maior medida coincidam. Logo, em seguida, desdobre. Formamos dois retângulos congruentes, isto é, com as mesmas dimensões (comprimento e largura). Representando cada retângulo em forma de fração podemos dizer que cada um representa $\frac{1}{2}$ (lê-se: um meio) de toda a folha, ou seja, metade.

Agora, dobre a folha de modo que os lados paralelos de menor medida coincidam. Passamos, então, a ter 4 retângulos congruentes. Podemos dizer que cada retângulo representa $\frac{1}{4}$ (um quarto) de toda a folha, ou seja, a quarta parte.

Antes de continuar gostaríamos de dizer para vocês que um retângulo possui 4 vértices (ponto em que dois lados consecutivos do polígono se intersectam).

Forme dois triângulos, ambos partindo dos vértices de um lado de maior medida da folha retangular em direção ao segmento de reta que passa pelo centro da folha e é paralelo aos lados menores da mesma.

Um triângulo que tem todos os lados com a mesma medida é chamado de triângulo equilátero. Quando tem dois lados com a mesma medida é chamado de triângulo isósceles. Se todos os lados são de medidas diferentes o triângulo é chamado de triângulo escaleno. Neste caso, nós formamos dois triângulos isósceles e observe que eles são congruentes. É bom também que observemos que a união dos dois triângulos gera um novo triângulo isósceles com o dobro da área (espaço ocupado na superfície por este triângulo). Não poderíamos deixar de mostrar que estes triângulos mencionados, com relação aos ângulos podem ser chamados de triângulo retângulo (todo triângulo que tem um ângulo reto).

Dobre os dois retângulos congruentes em direção aos triângulos e em sentidos opostos. Vejam que forma um pequeno chapéu. Dobre os cantinhos da figura de modo que fiquemos com um triângulo isósceles, que por sinal como já mencionamos é um triângulo retângulo também.

Abra a figura até que se obtenha um quadrado. O quadrado é um polígono de 4 lados da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos (90°) e os quatro lados congruentes (com as mesmas medidas).

Dobre os vértices independentes dos quadrados formados em sentidos distintos até o vértice oposto. Verifiquem que temos 3 triângulos congruentes, ou seja, cada triângulo representa $\frac{1}{3}$ (um terço), isto é, a terça parte da quantidade de triângulos.

Abra a figura novamente até que se obtenha um novo quadrado. Puxe a parte flexível de um dos vértices do quadrado e arrume o barco.

Pronto. Concluimos o origami do barco.

7.3 Origami de cisne

Boa tarde (Bom dia). Nós iremos estudar Matemática com vocês por meio da construção do Origami de cisne e, para isso, utilizaremos inicialmente uma folha de formato quadrado. O quadrado é um polígono de 4 lados da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos (90°) e os quatro lados congruentes (com as mesmas medidas). Gostaríamos de ressaltar que um paralelogramo é todo quadrilátero que possui os ângulos internos opostos congruentes e os lados paralelos também congruentes.

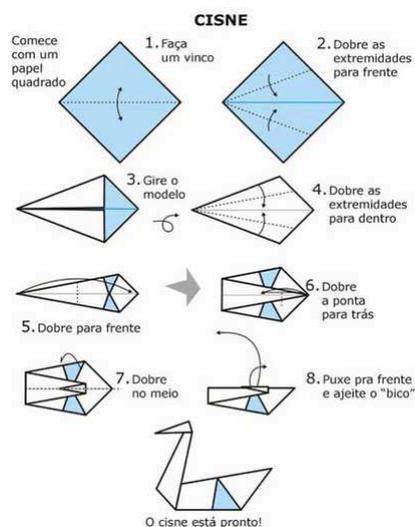


Figura 7.3: Montagem do Origami de cisne.

Antes de continuar gostaríamos de dizer para vocês que um quadrado possui 4 vértices (ponto em que dois lados consecutivos do polígono se intersectam).

Dobre o quadrado ao meio unindo dois vértices não consecutivos.

Um triângulo que tem todos os lados com a mesma medida é chamado de triângulo equilátero. Quando tem dois lados com a mesma medida é chamado de triângulo isósceles. Se todos os lados são de medidas diferentes o triângulo é chamado de triângulo escaleno. Neste caso, nós formamos dois triângulos isósceles

e observe que eles são congruentes. Representando cada triângulo em forma de fração podemos dizer que cada um representa $\frac{1}{2}$ (lê-se: um meio) de toda a folha, ou seja, metade. Não poderíamos deixar de mostrar que estes triângulos mencionados, com relação aos ângulos podem ser chamados de triângulo retângulo (todo triângulo que tem um ângulo reto).

Verifique que se encontra no quadrado um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Esse segmento de reta é chamado de diagonal. Todos os quadriláteros possuem duas diagonais.

Dobre de tal forma que um lado qualquer do quadrado coincida com a diagonal do mesmo. Repita o processo com o outro lado que tem um vértice em comum com a diagonal citada. Vejam que cada triângulo que formamos com essas dobras são triângulos escalenos. Observem que eles também podem ser chamados de triângulo retângulo, pois possuem um ângulo reto. Agora, se unirmos os dois triângulos teremos um triângulo isósceles.

Analisando a figura como um todo, vemos um quadrilátero (polígono de 4 lados). Gire este quadrilátero e, na sequência, dobre o quadrilátero levando o lado a coincidir com a diagonal. Repita o procedimento para o outro lado. Verifiquem que temos um novo quadrilátero. Dobre unindo os vértices da diagonal já marcada. Temos agora um triângulo isósceles, que representará o pescoço e a cabeça do cisne. Já na outra parte, que representará o corpo do cisne, temos um polígono de 5 lados. O nome deste polígono é pentágono.

Dobre a ponta do triângulo isósceles para trás, formando o bico do cisne. Nós temos agora um polígono de 4 lados com uma base maior e uma base menor paralelas entre si. Esse polígono é conhecido por trapézio.

Dobre ao meio tendo como referência a diagonal já marcada. Puxe para frente e arrume o bico e o cisne está pronto.

7.4 Origami de pavão

Boa tarde (Bom dia). Nós iremos estudar Matemática com vocês por meio da construção do Origami de pavão e, para isso, utilizaremos inicialmente uma folha de formato quadrado. O quadrado é um polígono de 4 lados da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos (90°) e os quatro lados

congruentes (com as mesmas medidas). Gostaríamos de ressaltar que um paralelogramo é todo quadrilátero que possui os ângulos internos opostos congruentes e os lados paralelos também congruentes.

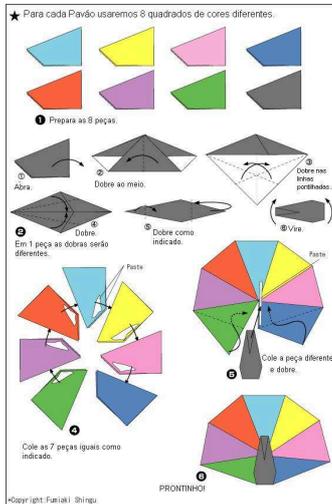


Figura 7.4: Montagem do Origami de pavão.

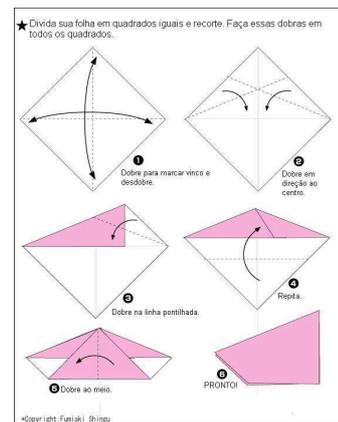


Figura 7.5: Montagem do Origami de pavão.

Antes de continuar gostaríamos de dizer para vocês que um quadrado possui 4 vértices (ponto em que dois lados consecutivos do polígono se intersectam).

Dobre o quadrado ao meio unindo dois vértices não consecutivos.

Um triângulo que tem todos os lados com a mesma medida é chamado de triângulo equilátero. Quando tem dois lados com a mesma medida é chamado de triângulo isósceles. Se todos os lados são de medidas diferentes o triângulo é chamado de triângulo escaleno. Neste caso, nós formamos dois triângulos isósceles e observe que eles são congruentes. Representando cada triângulo em forma de fração podemos dizer que cada um representa $\frac{1}{2}$ (lê-se: um meio) de toda a folha, ou seja, metade. Não poderíamos deixar de mostrar que estes triângulos mencionados, com relação aos ângulos podem ser chamados de triângulo retângulo (todo triângulo que tem um ângulo reto).

Verifique que se encontra no quadrado um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Esse segmento de reta é chamado de diagonal. Todos os quadriláteros possuem duas diagonais. Vamos então marcar a outra diagonal do quadrado. Em todo quadrado as diagonais se intersectam no centro do quadrado, possuem a mesma medida e formam entre si um ângulo reto (90°).

Observe que o quadrado está repartido em 4 triângulos retângulos congruentes,

que também podem ser chamados de triângulos isósceles, pois possuem dois lados com a mesma medida. Podemos então dizer que cada triângulo desses representa $\frac{1}{4}$ (um quarto) de toda a folha quadrada, ou seja, a quarta parte.

Dobre em direção ao centro de tal forma que um lado qualquer do quadrado coincida com uma das diagonais. Repita o procedimento com o outro lado consecutivo ao anterior desde que este possua o outro vértice que formou a diagonal citada anteriormente. Vejam que temos dois exemplos de triângulo isósceles.

Dobre fazendo coincidir os vértices não comuns dos dois triângulos isósceles. Após esta etapa temos um polígono de 5 lados. O nome deste polígono é pentágono. Dobre este pentágono ao meio formando um quadrilátero. Quadrilátero é todo polígono de 4 lados.

Concluimos, então a 1ª etapa da construção do pavão. Na 2ª etapa iremos construir o corpo do pavão. Para isso precisaremos de 7 quadriláteros. E na 3ª etapa iremos montar o pescoço com a cabeça do pavão e iremos utilizar 1 quadrilátero.

Para iniciar a 2ª etapa peguem os 7 quadriláteros e coloquem todos na mesma posição para iniciarmos a colagem. Para a 3ª etapa peguem o outro quadrilátero restante e faça o seguinte:

- Desdobre, voltando para o pentágono;
- Desdobre o triângulo;
- Repita em baixo o que já está feito em cima, formando um losango.

O losango é um polígono de 4 lados também da família dos paralelogramos que tem 4 lados com a mesma medida. É bom observar que diferentemente do quadrado, o losango não necessita ter os 4 ângulos retos.

Dobre uma parte até o vértice atingir a menor diagonal e no outro vértice dobre para formar a cabeça do pavão. Cole à peça anterior e pronto.

7.5 Origami de coração

Boa tarde (Bom dia). Nós iremos estudar Matemática com vocês por meio da construção do Origami de coração e, para isso, utilizaremos inicialmente uma

folha de formato retangular. O retângulo é um polígono de 4 lados da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos (90°). Por esse motivo os lados paralelos do retângulo sempre têm as mesmas medidas, ou seja, são congruentes. Gostaríamos de ressaltar que um paralelogramo é todo quadrilátero que possui os ângulos internos opostos congruentes e os lados paralelos também congruentes.

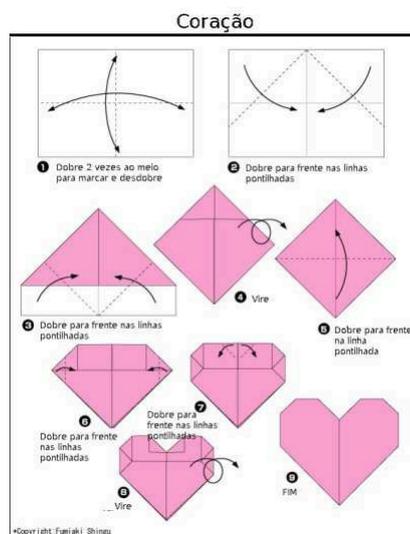


Figura 7.6: Montagem do Origami de coração.

Dobre a folha retangular de tal forma que os lados paralelos de maior medida coincidam. Logo, em seguida, desdobre. Formamos dois retângulos congruentes, isto é, com as mesmas dimensões (comprimento e largura). Representando cada retângulo em forma de fração podemos dizer que cada um representa $\frac{1}{2}$ (lê-se: um meio) de toda a folha, ou seja, metade.

Agora, dobre a folha de modo que os lados paralelos de menor medida coincidam. Desdobre novamente. Passamos, então, a ter 4 retângulos congruentes. Podemos dizer que cada retângulo representa $\frac{1}{4}$ (um quarto) de toda a folha, ou seja, a quarta parte.

Antes de continuar gostaríamos de dizer para vocês que um retângulo possui 4 vértices (ponto em que dois lados consecutivos do polígono se intersectam).

Forme dois triângulos, ambos partindo dos vértices de um lado de maior medida da folha retangular em direção ao segmento de reta que passa pelo centro da folha e é paralelo aos lados menores da mesma.

Um triângulo que tem todos os lados com a mesma medida é chamado de

triângulo equilátero. Quando tem dois lados com a mesma medida é chamado de triângulo isósceles. Se todos os lados são de medidas diferentes o triângulo é chamado de triângulo escaleno. Neste caso, nós formamos dois triângulos isósceles e observe que eles são congruentes. É bom também que observemos que a união dos dois triângulos gera um novo triângulo isósceles com o dobro da área (espaço ocupado na superfície por este triângulo). Não poderíamos deixar de mostrar que estes triângulos mencionados, com relação aos ângulos podem ser chamados de triângulo retângulo (todo triângulo que tem um ângulo reto).

Partindo dos vértices do outro lado de maior medida da folha retangular em direção ao segmento de reta que passa pelo centro da folha e é paralelo aos lados menores da mesma, formaremos um quadrado. O quadrado é um polígono de 4 lados da família dos paralelogramos que possui os 4 ângulos internos retos (90°) e os quatro lados congruentes (com as mesmas medidas).

Vire a figura e veja que os dois segmentos de reta marcados no quadrado que unem dois vértices não consecutivos são as diagonais do quadrado. Em todo quadrado as diagonais se intersectam no centro do mesmo, possuem a mesma medida e formam entre si um ângulo reto (90°).

Dobre para frente unindo o vértice inferior com o vértice superior do quadrado. Temos agora dois triângulos isósceles. E, como este triângulo possui um ângulo reto (90°) é também um triângulo retângulo. Unindo estes triângulos temos dois quadriláteros que podem ser desdobrados formando também um quadrilátero. Este tipo de quadrilátero é chamado de trapézio, pois possui uma base maior e uma base menor, paralelas entre si.

Dobre os cantinhos das laterais até os vértices que formam o ângulo de 90° dos triângulos retângulos. Agora dobre para frente dois triângulos retângulos partindo dos vértices dos lados dos trapézios que coincidem até aproximadamente o ponto médio desses lados. Vire e está pronto o coração.

Para encerrarmos as nossas atividades pedimos a vocês que escrevam algo no coração e nos entregue. Todos eles serão expostos num mural e, as três melhores frases serão premiadas.

Observação: Aos que desejarem ver as fotos tiradas durante o projeto é só acessar o site que consta em [12] .

Referências Bibliográficas

- [1] *Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática/ Secretaria de Educação Fundamental.-Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.*
- [2] EDUARDO, CAVACAMI e YOLANDA, KIOKO SAITO FURUYA. *Explorando Geometria Euclidiana com Origami. Oficina apresentada na IV Bienal da SBM, em Maringá-PR, 2008.*
- [3] MATTOS, F.R.P.. *Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões, Dissertação(Mestrado em Matemática Aplicada), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Novembro 2001, 295p.*
- [4] MITCHELL, DAVID. *Origami Matemáticos. Dobragens de papel para fazer figuras geométricas. Editora Replicação, 64p, Lisboa, 2008.*
- [5] PONTE, J. P.; BROCARD, J e OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.*
- [6] portal.mec.gov.br/dmdocuments/saebmatriz2.pdf. Acesso em: 01-mar-2013.
- [7] portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 20-fev-2013.
- [8] RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho; GAUDÊNCIO, Severino Júnior. *A Geometria do Origami. João Pessoa: Editora Universitária/ UFPB, 2003.*
- [9] www.comofazerorigami.com.br. Acesso em: 01-dez-2012.
- [10] www.comofazerorigami.com.br/historia/. Acesso em: 01-dez-2012.
- [11] www.dm.ufscar.br/yolanda/origami/origami.pdf. Acesso em: 08-jan-2013.
- [12] www.facebook.com/media/set/?set=a.402119409868598.99240.100002116274683type=3. Acesso em: 23-dez-2012.

- [13] www.ferrazorigami.com.br/?p=70. Acesso em: 04-jan-2013.
- [14] www.japaoemfoco.com/historia-e-significado-do-monumento-da-paz-das-criancas/. Acesso em: 20-fev-2013.
- [15] www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm. Acesso em: 08-jan-2013.
- [16] www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php. Acesso em: 08-jan-2013.
- [17] www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/origami/origami.php. Acesso em: 04-jan-2013.
- [18] www.repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1309/1/19575_ulfc091371_tm_Origami_Historia_de_uma_geometria_Axiomatica.pdf. Acesso em: 08-jan-2013.
- [19] www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-1.04.pdf. Acesso em: 05-jan-2013.
- [20] www.seed.se.gov.br/referencial_curricular.asp Acesso em: 01-mar-2013.
- [21] www.yasalde.no.sapo.pt/Historia.htm. Acesso em: 05-jan-2013.
- [22] www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm. Acesso em: 04-jan-2013.