



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Transformações Ortogonais Aplicada à Cinemática de Robôs

Leonardo Coimbra Mesquita

Teresina - 2016

Leonardo Coimbra Mesquita

Dissertação de Mestrado:

Transformações ortogonais aplicada à cinemática de robôs

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

Teresina - 2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Transformações ortogonais aplicada à cinemática de robôs**, defendida por **Leonardo Coimbra Mesquista** em 28/07/2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Presidente da Banca Examinadora

Jefferson Luiz dos Santos Leite

Examinador

Edivan Alano Luz

Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

M583t Mesquita, Leonardo Coimbra.
Transformações ortogonais aplicada à cinemática de robôs / Leonardo Coimbra Mesquita. – Teresina, 2016.
62f. il. color

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.

“Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa”.

1. Álgebra Linear. 2. Cinemática de Robôs. 3. Transformação Ortogonal. I. Título

CDD 512.5

Dedico esse trabalho aos meus pais José Ubiratan e Hila
Maria.

Agradecimentos

Nesse grande momento da minha vida quero agradecer a Deus por me conceder sabedoria e força para concluir mais essa jornada em minha vida acadêmica.

Agradeço também aos meus pais José Ubiratan e Hila Maria por todos esses anos de cuidado, amor e dedicação na minha formação como ser humano.

Quero agradecer a minha esposa e parceira Liz por ser uma companheira presente e sempre preocupada com o meu bem estar nas horas mais turbulentas dessa jornada. A minha filha amada Vitória por ter me mostrado o significado do amor puro e incondicional, que tantas vezes me deram força pra continuar apesar das dificuldades.

Agradeço aos meus irmãos Laylson, Larissa e Lucas por serem esses irmãos maravilhosos e companheiros, que sempre torceram e me apoiaram durante toda caminhada. Não posso esquecer de agradecer aos meus colegas de graduação e pós graduação pelos momentos de estudo e descontração.

Agradeço ao meu Orientador, Prof. Dr. Paulo Alexandre, que foi peça fundamental desde a escolha do tema até a conclusão do trabalho, pela paciência e amizade.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram direta ou indiretamente para meu enriquecimento pessoal e profissional.

Agradeço a SBM por implantar o PROFMAT possibilitando a realização desse sonho.

Por fim quero agradecer a todos que contribuíram direta ou indiretamente para conclusão desse mestrado, a todos o meu muito obrigado.

“Tente mover o mundo. O primeiro passo
será mover a si mesmo.”.

Platão.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo da cinemática de robôs. Para isso iremos definir transformação linear e provar diversos resultados de álgebra linear, daremos importância as transformações ortogonais, mais precisamente as rotações. Provaremos que mover um sólido no espaço é equivalente a mover um robô. Será feito esquemas ilustrados dos robôs a serem estudados tais como seus referenciais. Dedicaremos uma seção para o estudo de mudança de base, que será de grande utilidade no cálculo dos referenciais de um robô. Iremos definir o que é um referencial e deduzir uma forma de localizar pontos em referenciais diversos. Ao final, iremos descrever as rotações responsáveis pela movimentação dos robôs desse trabalho e calcular a posição final dos robôs em função do referencial base.

Palavras-chaves: Cinemática de robôs, Rotação, Transformação ortogonal, Referencial.

Abstract

This work aims to study the robot cinematic. For this we will define linear transformation and prove several results of linear algebra, give importance orthogonal transformation, more precisely the rotations. We prove that a solid move in space is equivalent to moving a robot. Will be illustrated diagrams of robots to be studied such as their reference. We will dedicate a section for the study of basic change, which will be useful in the calculation of the reference points of a robot. We will define what is a benchmark and deduce a way to locate points in several benchmarks. At the end, we will describe the rotations responsible for the movement of robots that work and calculate the final position of the robots due to the base frame.

Keywords: Robot cinematic, rotation, Orthogonal transformation, Referential.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Um pouco sobre robôs	3
1.1 O que é um robô?	3
1.2 Breve cronologia	4
1.3 Robôs na ficção	9
2 Noções preliminares	12
2.1 Transformação linear	12
2.2 Matriz de uma transformação linear	15
3 Transformações ortogonais	19
3.1 Propriedades das matrizes ortogonais	22
3.2 Mudança de base	33
4 Movimento de robôs	36
4.1 Esquema de um braço robótico	36
4.2 Cálculo de referenciais para um robô	39
4.3 Braço robótico Canadarm	44
5 Considerações finais	49
Referências Bibliográficas	51

Introdução

Escrever sobre a cinemática de robôs surgiu da necessidade de ilustrar aplicações práticas da matemática, mais precisamente da álgebra linear de modo que os professores tanto de graduação quanto da educação básica possam pensar em aulas mais significativas buscando relacionar conceitos até então teóricos da álgebra linear (transformações lineares, diagonalização de matrizes e mudança de base) ao estudo da cinemática de robôs.

Iniciaremos esse trabalho com o conceito de robô, em seguida será feito um resumo cronológico da robótica mostrando a sua evolução ao longo dos anos. Desde os autômatos egípcios aos atuais robôs de manipulação, que são utilizados em diversos segmentos da sociedade realizando tarefas de maneira rápida e precisa. Na seção 1.3 abordaremos de maneira resumida a influência da robótica no imaginário humano e vice e versa, já que a vida imita a arte.

No capítulo 2 abordaremos os conceitos básicos de transformação linear e de matriz de uma transformação linear, ilustrando através de exemplos sua funcionalidade e aplicação. Em seguida iremos definir o que é uma transformação ortogonal e suas propriedades, tais transformações são responsáveis por realizar movimentos que preservam ângulo e distância no espaço e no plano. Através de diversos resultados demonstrados no capítulo 3, chegaremos a demonstração do Teorema 7 que diz: *"Se A é uma matriz ortogonal 3×3 com $\det A = 1$, A é a matriz de rotação T por algum ângulo θ ao redor de algum eixo. Se A não é matriz identidade, o eixo de rotação corresponde ao eixo de rotação associado ao autovetor $+1$ "* [1]. Usaremos essas rotações para movimentar as juntas do robô. Outro resultado também de extrema importância no estudo da cinemática de robôs é o Teorema 9 que diz: *"Todo movimento de um sólido no espaço é a composição de uma translação e uma rotação ao redor de algum eixo"* [1]. Esse resultado é de grande importância, pois mover um robô é equivalente a mover um sólido no espaço. A diagonalização de matrizes também possui um espaço nesse texto mesmo que de forma breve, já que a matriz diagonalizada determina de uma maneira

mais simples a transformação ortogonal.

Na seção 3.2 iremos expor os principais resultados no que diz respeito a mudança de base com foco na matriz de mudança de base, também chamada de matriz de passagem.

O objetivo deste trabalho será tratado no capítulo 4, onde iremos descrever um robô manipulador genérico com seis graus de liberdade juntamente com os seus referenciais. Após descrever o robô iremos calcular as rotações que o colocarão em uma determinada posição, posição essa que vamos calcular em seguida através dos seus diversos referenciais, obtendo uma fórmula que calcula o final da garra do braço robótico em função do referencial base. O mesmo iremos fazer com o robô espacial Canadarm que possui também seis graus de liberdade porém os seus referenciais são colocados de maneira diferente.

Encerraremos com as considerações finais e um breve comentário sobre a cinemática inversa.

Capítulo 1

Um pouco sobre robôs

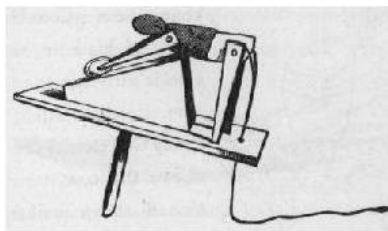
1.1 O que é um robô?

Vivemos em um mundo rodeado de robôs. Podemos identificá-los na realidade que nos rodeia; automóveis, guindastes, elevadores, portas giratórias, cadeiras giratórias,...e pessoas. Todos constituem exemplos de robôs. Veja que em cada um deles identificamos sem dificuldades capacidades de locomoção ou manipulação, ou seja, capacidade para interagir com o ambiente que o rodeia. Numa linguagem livre, um robô pode ser definido como qualquer dispositivo relativamente ao qual é possível identificar um conjunto de posições e velocidades. Cada elemento deste conjunto constitui um *grau de liberdade* do robô e podemos descrever o seu movimento num sistema de coordenadas adequado.

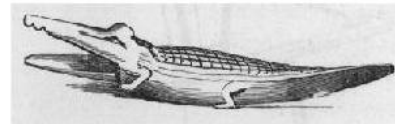
Os robôs são comumente utilizados na realização de tarefas em locais mal iluminados, ou na realização de tarefas sujas ou perigosas para os seres humanos. Os robôs industriais utilizados nas linhas de produção são a forma mais comum de robôs, uma situação que está mudando recentemente com a popularização dos robôs comerciais limpadores de pisos e cortadores de gramas. Outras aplicações são: tratamento de lixo tóxico, exploração subaquática e espacial, cirurgias, mineração, busca e resgate, e localização de minas terrestres. Os robôs também aparecem nas áreas do entretenimento e tarefas caseiras. O termo *robô* tem origem na palavra tcheca *robota*, que significa *trabalho forçado*. O robô presente no imaginário mundial teve origem numa peça do dramaturgo Karel Capek, na qual existia um autômato com forma humana, capaz de fazer tudo no lugar do homem.

1.2 Breve cronologia

Desde tempos mais remotos podemos identificar a presença de robôs. Mesmo que o termo robô seja relativamente recente, um conceito antecessor, e em certo sentido equivalente, é o de autômato. A noção atual de robô, como mecanismo ao qual é possível imprimir movimento complexo, confunde-se com a de autômato, como mecanismo capaz de executar movimentos repetitivos de alguma complexidade. Podemos considerar antes dos autômatos veículos construídos desde as civilizações antigas. No Egito antigo existiam autômatos. A figura 1.1 mostra duas ilustrações, de autor anônimo[8], representando autômatos com finalidades lúdica.



O polidor de pedra



*Esboço sem título
(A boca do crocodilo é operada através de uma corda)*

Figura 1.1 Ilustração do século XIX de autômatos do Egito Antigo.

Por volta de 200 a.C, Heron de Alexandria escreve o tratado *Spiritualia seu Pneumatica* onde compilou descrições de vários mecânicos. A figura 1.2 mostra um esboço da máquina de Heron, da autoria de J.G. Greenwood, feito a partir das indicações no manuscrito de Heron. A esfera α , suspensa através dos apoios $C - E - F - G - L - M$ (estando os pontos G e L em posições diametralmente opostas), contém água. Por aquecimento da esfera esta água transforma-se em vapor que é expulso pelas condutas de escape H e K . A disposição particular destas condutas gera um binário ao longo do eixo GL que faz a esfera rodar [9].

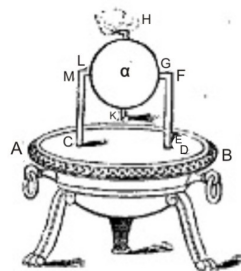


Figura 1.2 O motor de reação de Heron (aproximadamente 200 a.C).

O primeiro projeto documentado de um autômato humanoide foi feito por Leonardo da Vinci por volta do ano de 1495. As notas de Da Vinci, redescobertas nos anos 50, continham desenhos detalhados de um cavaleiro mecânico que era aparentemente capaz de sentar-se, mexer seus braços, mover sua cabeça e o maxilar. O projeto foi baseado em sua pesquisa anatômica documentada no Homem Vitruviano. Não é conhecido se ele tentou ou não construir o mecanismo. No ocidente os mestres artesões franceses e suíços produziram esplêndidos autómatos. Nomes como Vaucanson, Jaquet-Droz, o Abade Mical, Barão Von Kempelen, Robert-Houdin e Bontemps, entre outros são referências incontornáveis nesta arte cujo período áureo se situou entre 1850 e terminando com o início da I Grande Guerra, em 1914. No período 1738-1739 Jacques de Vaucanson construiu, entre outros, um tocador de flauta e um pato mecânico. O pato, ilustrado na figura 1.3, conseguia mover as asas, comer e simular a digestão de sementes[10].

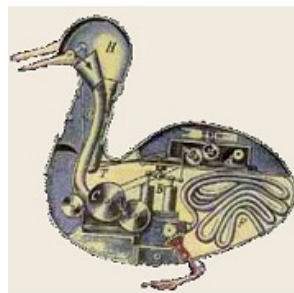
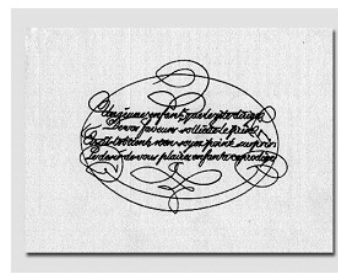


Figura 1.3 O Pato de Vaucanson.

A figura 1.4 ilustra um autômato famoso: o escritor/desenhador de Millardet[11], capaz de escrever poemas e desenhar, construído por volta de 1800.



Vista geral do autômato



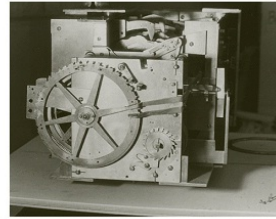
Exemplar da escrita produzida pelo autômato

Figura 1.4 O escritor e desenhador de Millardet.

O autômato de Maillardet possui uma das maiores memórias mecânicas conhecidas, guardada sob a forma de discos excêntricos atuados por um motor de relógio (figura1.5).



Memória do autômato



O motor de relógio, fonte de energia mecânica

Figura 1.5 Memória e motor do escritor de Millardet.

O desenvolvimento dos autômatos no oriente se deu pelas mãos dos mestres artesões japoneses. A criação de bonecos automatizados (*Karakuri Ningyou* no original japonês), eram vistos como objetos de arte. A figura 1.6 mostra dois exemplares do século XVIII, segunda metade do período Edo (1603-1868). Suas peças e juntas eram feitas de madeira. A energia provinha de molas feitas a partir de barbas de baleia.



Figura 1.6 Bonecos *Karakuri Ningyou* para servir chá.

A máquina a vapor (figura 1.7), inventada por Denis Papin por volta de 1690 para bombear água, está na base da revolução industrial dos séculos XVIII e XIX. Foram os melhoramentos introduzidos por James Watt (a primeira patente de Watt data de 1769) que estabeleceram em definitivo a máquina a vapor como a principal fonte de energia mecânica.

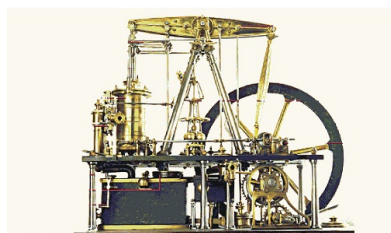


Figura 1.7 A máquina a vapor.

As principais inovações de Watt foram a introdução da lubrificação por óleo e o regulador centrífugo (1788), para regular automaticamente a velocidade de rotação. O regulador de Watt funciona utilizando segundo o princípio do *servo-mecanismo* em que a saída do sistema é *realimentada* sobre a entrada. A *realimentação* está na base da moderna Teoria do Controle, fundamental na construção dos modernos automatismos. No início do século XX, a massificação dos sistemas de produção, na indústria de automóveis com a generalização das linhas de montagem (figura 1.8), faz entrar a automação no cotidiano das fábricas, com enorme impacto social.



Figura 1.8 Linha de montagem de automóveis.

Na década de 1950, **George Devol** projetou o *Unimate* (figura 1.9), um dispositivo de braço robótico que automatizava tarefas em uma fábrica da General Motors em Nova Jersey, que começou a trabalhar em 1961.



Figura 1.9 Unimate o primeiro robô moderno.

A exploração espacial proporcionou a oportunidade para o desenvolvimento da Robótica. Desde os veículos automáticos russos concebidos para a exploração lunar (figura 1.10) aos recentes *Sojourner*, *Spirit* e *Opportunity* (figura 1.11) e aos manipuladores como o *Canadarm*,

em uso no vaivém espacial e o *Flight Telerobotic Servicer*, proposto para uso na estação espacial internacional (figura 1.12). Exemplos adicionais podem ser facilmente consultados nos diversos sites da NASA.



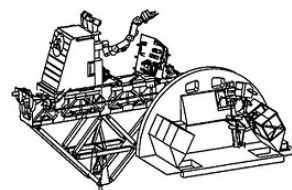
Figura 1.10 Robôs espaciais da antiga União Soviética.



Figura 1.11 Robôs da NASA para exploração de Marte.



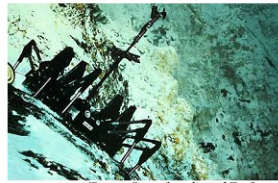
O Canadarm, montado no Space Shuttle



Vista conceptual do FTS montado no exterior da ISS

Figura 1.12 Robôs manipuladores no espaço.

Os robôs também são amplamente usados na exploração terrestre. As missões Dante I, para inspeção do vulcão do monte Erebus na Antártica, e Dante II, para inspeção do monte Spur no Alaska, constituem exemplos típicos de aplicações da Robótica na exploração do nosso planeta (figura 1.13). Pelo ar também é possível realizar explorações terrestres. A figura 1.14 mostra um exemplo de uma aeronave UAV (Unmanned Aerial Vehicle), amplamente usada em missões de vigilância.



Dante I on the rim of Erebus.

Dante I no monte Erebus, Antártica



Photo by Bill Ingalls/NASA

Dante 2 no monte Spur, Alaska

Figura 1.13 Robôs de exploração terrestre (Dante I e Dante II).

1.3 Robôs na ficção

Os robôs ao longo desses últimos dois séculos vem sendo protagonistas de inúmeras obras literárias, um exemplo disso é a peça de teatro *R.U.R* (Rossum's Universal Robots, cujo livro foi lançado no Brasil pela editora Hedra com o título *A Fábrica de Robôs*) do escritor checo *Karel Capek* encenada em 1921. O termo robô foi usado pela primeira vez nessa peça. Em 1941 o lendário escritor de ficção científica *Isaac Asimov* escreve o *Mentiroso*, um conto no qual ele descreve as Três Leis da Robótica em uma tentativa literária de controlar a competição entre robôs e humanos, estas leis são:

Lei 1: Um robô não pode ferir um ser humano, ou, por omissão, permitir que um ser humano seja ferido.

Lei 2: Um robô deve obedecer as ordens recebidas pelos seres humanos, a não ser no caso de estas ordens entrarem em conflito com a Primeira Lei.

Lei 3: Um robô pode proteger a sua própria existência, contanto que tal proteção não entre em conflito com a Primeira ou Segunda Lei.

Suas histórias serviram de inspiração para o livro *Eu Robô* [7], em 1950, mais tarde reproduzido como um filme estrelado por Will Smith (figura 1.14). No entanto as Leis de Asimov não permitiriam que um robô sacrificasse uma vida humana para salvar milhões. Em 1950 uma quarta lei foi criada, habitualmente chamada de lei 0, que diz:

Lei 0: Um robô não pode deliberadamente ou por omissão fazer mal à humanidade.



Figura 1.14 Eu robô, filme estrelado por Will Smith.

A interação entre homens e robôs que está na base do aparecimento das Leis da Robótica, é atualmente uma área em forte expansão. Alguns estudos apontam que essa interação entre homem e robô é facilitada quando o robô é do tipo *antropomórfico*, ou seja, as suas características físicas são semelhantes às características humanas.

A ficção científica tem explorado exhaustivamente o uso de robôs e criado marcos que influenciaram em parte a Robótica. Filmes como *Star Wars* (Guerra nas Estrelas), (figura 1.16) colocaram definitivamente os robôs no imaginário popular, por vezes contribuindo, de forma quase paradoxal, para o aparecimento de expectativas irrealistas e para o estudo de novas aplicações.



Figura 1.15 C3PO e RDD2, robôs do filme STAR WARS.

Os robôs humanóides (figuras 1.16 e 1.17) são exemplos desse quase paradoxo entre ficção e realidade no campo da Robótica.



Honda P1



Honda P3

Figura 1.16 Robôs humanoides da Honda.



Honda Asimo



Sony QRIO

Figura 1.17 Robôs humanoides da SONY.

Capítulo 2

Noções preliminares

Nesse capítulo iremos abordar alguns conceitos de transformação linear, com o objetivo de definir transformações ortogonais e expor os resultados mais relevantes, tais transformações possuem uma propriedade bastante útil no estudo da cinemática de robôs, pois preservam distâncias e ângulos. Uma rotação ao redor de um eixo passando pela origem é um tipo de transformação ortogonal. A teoria abordada neste capítulo pode ser encontrada em [1], [2], [3], [4] e [5].

2.1 Transformação linear

Definição 1. *Sejam X e Y espaços vetoriais. Uma transformação linear de X em Y é uma função $T : X \rightarrow Y$ que possui as seguintes propriedades.*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in X$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall u \in X \quad e \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Podemos resumir as propriedades (1) e (2) na seguinte propriedade:

$$T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v), \forall v \in X \quad e \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1. *Verifique que a função $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$ é uma transformação linear.*

Solução: Temos que verificar as propriedades (1) e (2) da definição dada anteriormente. Sejam $v_1 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Vamos verificar a proprie-

dade (1).

$$\begin{aligned}T(v_1 + v_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\&= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2) \\&= (x_1 - y_1, y_1 - z_1) + (x_2 + y_2, y_2 - z_2) \\&= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \\&= T(v_1) + T(v_2).\end{aligned}$$

Verificando a propriedade (2) temos,

$$\begin{aligned}T(\alpha v_1) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (\alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha y_1 - \alpha z_1) \\&= (\alpha(x_1 - y_1), \alpha(y_1 - z_1)) \\&= \alpha(x_1 - y_1, y_1 - z_1) \\&= \alpha T(x_1, y_1, z_1) \\&= \alpha T(v_1).\end{aligned}$$

logo T é uma transformação linear.

Exemplo 2. A função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x^2, y)$ não é uma transformação linear. Com efeito, se tomarmos $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0)$, então

$$T(v_1 + v_2) = (0, 0) \neq (2, 0) = T(v_1) + T(v_2).$$

Teorema 1. Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial X . Sejam $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ vetores de um espaço vetorial Y . Então existe uma única transformação linear $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(v_j) = w_j$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Demonstração. Tomemos $v \in X$. Como β é uma base de X , v se escreve de modo único como uma combinação linear dos vetores de β , digamos

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n. \quad (2.1)$$

Defina $T : X \rightarrow Y$ por

$$T(v) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n. \quad (2.2)$$

A função T está bem definida, pois os números reais a_1, a_2, \dots, a_n são unicamente determinados a partir de v . Além disso T é uma transformação linear. De fato, tomemos

$a \in \mathbb{R}$ e $w \in V$. Suponhamos que $w = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n$. Como

$$v + aw = (a_1 + ab_1)v_1 + (a_2 + ab_2)v_2 + \dots + (a_n + ab_n)v_n,$$

segue que

$$\begin{aligned} T(v + aw) &= ((a_1 + ab_1)w_1 + (a_2 + ab_2)w_2 + \dots + (a_n + ab_n)w_n) \\ &= (a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_nw_n) + a(b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_nw_n) \\ &= T(v) + aT(w). \end{aligned}$$

Para mostrar que $T(v_j) = w_j$, fixe j , onde $1 \leq j \leq n$. Como

$$v_j = 0v_1 + \dots + 1v_j + \dots + 0v_n,$$

segue de (2.2) que

$$T(v_j) = 0w_1 + \dots + 1w_j + \dots + 0w_n = w_j.$$

Vejamos agora que T é a única função com as propriedades desejadas. Para isto, suponhamos que $S : X \rightarrow Y$ seja uma transformação linear tal que $S(v_j) = w_j$ para todo j , com $1 \leq j \leq n$. Tomemos $v \in X$. Por (2.1) e pela linearidade de S , temos que

$$S(v) = a_1S(v_1) + a_2S(v_2) + \dots + a_nS(v_n).$$

como $S(v_j) = w_j$ para todo $1 \leq j \leq n$, obtemos

$$S(v) = a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_nw_n = T(v).$$

Como $v \in X$ foi tomado de modo arbitrário, segue que $S = T$. □

Exemplo 3. Para determinarmos a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, 1, 1)$ e $T(1, 1) = (1, -1, 0)$ devemos, pelo Teorema 1, verificar que $\beta = \{(1, 2), (1, 1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 , calcular as coordenadas de um vetor de \mathbb{R}^2 na base α . Ora como β é linearmente independente e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, temos que β é uma base de \mathbb{R}^2 . Além disso, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então

$$(x, y) = \beta_1(1, 2) + \beta_2(1, 1)$$

se, e somente se, $\beta_1 = y - x$ e $\beta_2 = 2x - y$. Portanto

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (y - x)T(1, 2) + (2x - y)T(1, 1) \\ &= (y - x)(3, 1, 1) + (2x - y)(1, -1, 0) \\ &= (3y - 3x, y - x, y - x) + (2x - y, -2x + y, 0) \\ &= (2y - x, 2y - 3x, y - x). \end{aligned}$$

2.2 Matriz de uma transformação linear

Dado um vetor v usaremos a notação $[v]$ ou $[v]_C$ para representar a matriz coluna das coordenadas de v na base canônica $C = \{e_1, \dots, e_n\}$, de \mathbb{R}^n , onde

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots \quad e_n = (0, \dots, 0, 1). \quad (2.3)$$

Uma transformação linear $T : X \rightarrow Y$ pode ser representada por uma matriz. Dados X e Y espaços vetoriais de modo que $\dim X = n$ e $\dim Y = m$, temos a transformação linear $T : X \rightarrow Y$. Sejam $\alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\beta = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ bases de X e Y respectivamente. Como β é base de Y podemos obter de modo único números reais a_{ij} , com $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, tais que

$$T(x_j) = a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m.$$

Tomemos agora $x \in X$, temos que $x = k_1x_1 + \dots + k_nx_n$ em que $k_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$. Pela linearidade de T , temos

$$\begin{aligned} T(x) &= k_1T(x_1) + \dots + k_nT(x_n) \\ &= k_1(a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m) + \dots + k_n(a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m) \\ &= y_1(a_{11}k_1 + \dots + a_{1n}k_n) + \dots + y_m(a_{m1}k_1 + \dots + a_{mn}k_n). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [T(v)]_\beta &= \begin{bmatrix} a_{11}k_1 + \dots + a_{1n}k_n \\ \vdots \\ a_{m1}k_1 + \dots + a_{mn}k_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = [T]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha \end{aligned}$$

onde definimos

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$, que representa T em relação às bases α e β , é chamada a matriz de T nas bases α e β .

Observemos que $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é uma matriz de ordem $m \times n$.

Exemplo 4. Sejam $\alpha = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente. Calculemos $[T]_{\beta}^{\alpha}$, onde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$.

Solução: A matriz da transformação linear T será uma matriz 3×2 ,

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Temos que,

$$T(1, 1) = (2, 0, 2) = a_{11}(1, 0, 1) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(1, 2, 0);$$

$$T(0, 2) = (0, -2, 4) = a_{12}(1, 0, 1) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(1, 2, 0).$$

Dai temos os sistemas,

$$\begin{cases} a_{11} + a_{31} = 2 \\ a_{21} + 2a_{31} = 0 \\ a_{11} = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_{12} + a_{32} = 0 \\ a_{22} + 2a_{32} = -2 \\ a_{12} = 4 \end{cases}.$$

Resolvendo os sistemas lineares acima, obtemos

$$a_{11} = 2, \quad a_{21} = 0, \quad a_{12} = 4, \quad a_{22} = 6 \quad \text{e} \quad a_{32} = -4.$$

Donde concluímos que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Veja que a matriz de uma transformação linear em relação a determinadas bases se escreve de modo único.

Agora iremos apresentar algumas definições e resultados que serão usados posteriormente.

Definição 2. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. A inversa de A é a matriz A^{-1} , tal que $AA^{-1} = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$.

Definição 3. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. A transposta de A é a matriz $A^t = (b_{ij})$, em que $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 5. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ temos que $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Definição 4. O produto interno de dois vetores $v = (x_1, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, \dots, y_n)$ é

$$\langle v, w \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Definição 5. Seja V um espaço com produto interno. Definimos a norma do vetor $v \in V$, ou comprimento de v , denotado por $\|v\|$, como o número real

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Se $\|v\| = 1$ dizemos que v é um vetor unitário.

Proposição 1. Se A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times p$, temos

$$(AB)^t = B^tA^t.$$

Demonstração. Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$. Então $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ com $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq p$. Analogamente $B^tA^t = [d_{ij}]_{p \times m}$ com $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$, para todo $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq m$. Como $(AB)^t = [e_{ij}]_{p \times m}$ onde, para todo $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq m$, $e_{ij} = c_{ji}$ segue que,

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} = d_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq m$. Portanto $(AB)^t = B^tA^t$. □

Proposição 2. O produto interno de dois vetores v e w pode ser calculado por $\langle v, w \rangle = [v]^t[w]$.

Demonstração. Dados os vetores $v = (x_1, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, \dots, y_n)$ escrevendo-os em sua forma matricial, teremos

$$[v] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad [w] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Então } [v]^t[w] = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = (x_1y_1 + \dots + x_ny_n) = \langle v, w \rangle \quad \square$$

Capítulo 3

Transformações ortogonais

Neste capítulo iremos considerar as transformações lineares que preservam distâncias e ângulos, estas são precisamente as transformações cujas matrizes são ortogonais, e são chamadas de **transformações ortogonais**.

Definição 6. Uma matriz A é ortogonal se sua inversa é igual à sua transposta, em outras palavras, se $A^t = A^{-1}$ ou, equivalentemente,

$$AA^t = A^tA = I,$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Definição 7. Uma transformação linear é ortogonal se sua matriz é ortogonal.

Teorema 2. Uma matriz é ortogonal se e somente se suas colunas formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Demonstração. Seja $A = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem n cujas colunas são dadas por $X_i = A[e_i]$, $i = 1, \dots, n$, onde os X_i são matrizes $n \times 1$. Escrevemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad e \quad X_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad X_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

as colunas de A , portanto

$$A = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n].$$

Temos que as transpostas $X_1^t, X_2^t, \dots, X_n^t$ são matrizes linha $1 \times n$. Se representarmos a matriz A^t por suas linhas, então ela tem a forma

$$A^t = \begin{bmatrix} X_1^t \\ X_2^t \\ \vdots \\ X_n^t \end{bmatrix}.$$

Calculamos o produto $A^t A$ usando esta notação:

$$A^t A = \begin{bmatrix} X_1^t \\ X_2^t \\ \vdots \\ X_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^t X_1 & X_1^t X_2 & \dots & X_1^t X_n \\ X_2^t X_1 & X_2^t X_2 & \dots & X_2^t X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^t X_1 & X_n^t X_2 & \dots & X_n^t X_n \end{bmatrix}$$

Seja T a transformação linear com matriz A . Temos

$$X_i^t X_j = (A[e_i])^t A[e_j] = [T(e_i)]^t [T(e_j)] = \langle T(e_i), T(e_j) \rangle.$$

A matriz A é ortogonal se e somente se a matriz $A^t A$ é igual à matriz identidade. Dizer que as entradas da diagonal são iguais a 1 equivale a dizer que o produto interno de cada vetor $T(e_i)$ consigo mesmo é igual a 1. Como $\langle T(e_i), T(e_i) \rangle = \|T(e_i)\|^2$, isto equivale a dizer que eles têm comprimento 1. Todas as entradas fora da diagonal são nulas se e somente se $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = 0$ quando $i \neq j$. Logo, a matriz A é ortogonal se, e somente se, os vetores $T(e_1), \dots, T(e_n)$ são ortogonais e têm comprimento 1, formando, assim, uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . \square

Exemplo 6. A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ é ortogonal, pois os vetores coluna $v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $v_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ e $v_3 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ da matriz A formam uma base ortonormal.

Teorema 3. Uma transformação linear preserva distância e ângulos se e somente se sua matriz é ortogonal.

Demonstração. Seja T uma transformação linear com matriz ortogonal A . De acordo com o **Teorema 2** os vetores coluna da matriz A formam uma base ortonormal. Portanto, seus comprimentos são preservados, assim como os ângulos entre eles. Uma transformação preserva distância e ângulos se, e somente se, preserva produto interno, ou seja,

se $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle u, w \rangle$ para todo u, w . Sejam v, w dois vetores. Observe que seu produto interno é preservado se A é ortogonal:

$$\begin{aligned}
 \langle T(v), T(w) \rangle &= (A[v])^t(A[w]) \\
 &= ([v]^t A^t)(A[w]) \\
 &= [v]^t(A^t A)[w] \\
 &= [v]^t I[w] \\
 &= [v]^t[w] \\
 &= \langle v, w \rangle.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, se T preserva distância e ângulos. Suponha que $A^t A = (b_{ij})$. Seja $v = e_i$ e $w = e_j$. Temos que $[T(v)] = A[v]$ e $[T(w)] = A[w]$. Então

$$\langle T(v), T(w) \rangle = ([v]^t(A^t A))[w] = (b_{i1}, \dots, b_{in})[w] = b_{ij}.$$

Mais ainda $[v]^t[w] = \delta_{ij}$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Logo, $A^t A = I$. □

Teorema 4. *Os movimentos que preservam distâncias e ângulos em \mathbb{R}^n são composições de translações e transformações ortogonais. (Tais movimentos são chamados de isometrias de \mathbb{R}^n .)*

Demonstração. Considere um movimento $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias e ângulos. Seja $F(0) = Q$ e seja T a translação $T(V) = v - Q$. Então, $T(Q) = 0$ e, portanto, $T \circ F(0) = 0$. Seja $G = T \circ F$. Esta é uma transformação que preserva distâncias e ângulos e que tem um ponto fixo na origem. Se G preserva distâncias e ângulos, ela deve ser linear, e pelo **Teorema 3** ela deve ser uma transformação ortogonal. Também temos que $F = T^{-1} \circ G$. Como T^{-1} é também uma translação, está mostrado que F é a composição de uma transformação ortogonal e de uma translação. □

3.1 Propriedades das matrizes ortogonais

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação cuja matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Olhando para a matriz, é difícil visualizar a ação de T em \mathbb{R}^3 . Sabemos apenas que é ortogonal e que, portanto, preserva ângulos e distâncias. Uma ferramenta extremamente útil para explorar o comportamento de T é a técnica da *diagonalização*.

Quando diagonalizamos uma matriz, estamos na verdade mudando o sistema de coordenadas da transformação linear. Nós nos posicionamos em um sistema de coordenadas para qual os coeficientes da transformação linear são extremamente simples e o comportamento da transformação é facilmente entendido.

Definição 8. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear com matriz A . Um número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T se existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $T(v) = \lambda v$. Qualquer vetor v com esta propriedade é chamado de autovetor do autovalor λ .*

Observações:

1. No contexto de transformações ortogonais é essencial olhar para autovalores complexos. De fato, quando temos um autovetor real v de um autovalor real não nulo λ , o conjunto E dos múltiplos de v forma um subespaço de dimensão 1 (uma reta) de \mathbb{R}^n que é invariante por T , portanto, satisfazendo $T(E) = E$. Consideremos uma rotação em \mathbb{R}^2 , existirá uma linha invariante, se a rotação for de $k\pi$. Logo, os autovalores associados são complexos.
2. Como calcular $T(v)$ se $v \in \mathbb{C}^n$? A base canônica (2.3) é também uma base de \mathbb{C}^n . De forma que a definição $[T(v)] = A[v]$ faz sentido, dando que $T(v)$ é um vetor de \mathbb{C}^n cujas coordenadas na base canônica são dadas por $A[v]$.
3. Considere em \mathbb{R}^3 uma rotação ao redor de um eixo: é uma transformação ortogonal cujo eixo de rotação é uma reta invariante. Assim, encontraremos este eixo quando diagonalizarmos a transformação.

Teorema 5. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear com matriz A .*

1. O conjunto de autovetores do autovalor λ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n , chamado autoespaço do autovalor λ .
2. Os autovalores são as raízes do polinômio

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

de grau n . O polinômio $P(\lambda)$ é chamado de polinômio característico de T (ou de A).

3. Seja $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Então v é um autovetor de λ se, e somente se, $[v]$ é uma solução do sistema linear homogêneo:

$$(A - \lambda I)[v] = 0.$$

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto dos autovetores do autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Dados $u, v \in E$, então $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \lambda v$. Para que E seja um subespaço iremos verificar as seguintes propriedades.

- i) $0 \in E$. De fato, pois $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, tal que $T(0) = \lambda 0$.
- ii) Se $u, v \in E$ então $u, v \in E$ então $u + v \in E$. Com efeito temos,

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v).$$

iii) Se $u \in E$, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u \in E$, verificamos isso facilmente como segue abaixo:

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \lambda u = \lambda \alpha u.$$

Da **definição 8**, temos

$$T(v) = A[v] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0,$$

vemos que a matriz do lado direito é igual a $A - \lambda I$. De fato

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim o sistema $(A - \lambda I)[v] = 0$. Sabemos que é necessário que $\det(A - \lambda I) = 0$ para que o sistema tenha solução não $v \neq 0$. Calculando-se o determinante vamos obter uma equação polinomial em λ :

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n.$$

Concluimos assim que λ é uma raiz do polinômio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

As raízes (reais ou complexas) da equação $P(\lambda) = 0$ são os autovalores de A . Para obtermos os autovalores de uma matriz A calculamos seu polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e em seguida encontramos suas raízes. As raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ do polinômio característico são os autovalores da matriz A . Para obter os autovetores da matriz A resolvemos em seguida os sistemas homogêneos,

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0, \quad (A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0, \quad \dots, \quad (A - \lambda_n I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Temos no máximo n sistemas para resolver já que pode ocorrer de termos autovalores de multiplicidade maior do que 1.

□

Exemplo 7. Seja T uma transformação ortogonal com matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Para diagonalizar A começamos calculando seu polinômio característico

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix}.$$

Temos

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

Portanto, a matriz tem dois autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

Autovetores de +1: Para encontrá-los, precisamos resolver o sistema $(A - I)[v] = 0$

$$\text{com } [v] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Dai teremos o sistema,

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \implies x_1 = 2x_3 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Todas as soluções são múltiplos do autovetor $v_1 = (2, 1, 1)$.

Autovetores de -1: Estes são soluções do sistema $(A + I)[v] = 0$ com $[v] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

isto é,

$$(A + I)[v] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \implies 2x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Assim o conjunto solução descreve um plano, gerado pelos vetores $v_2 = (1, -2, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -2)$.

Para termos uma base ortonormal, substituiremos v_3 por um vetor $v_4 = (x, y, z)$ que é perpendicular a v_2 mas ainda está no plano gerado pelos dois vetores. Portanto, este

deve satisfazer $2x + y + z = 0$ para ser um autovetor de -1 , e precisa ser perpendicular a v_2 , ou seja, $\langle v_2, v_4 \rangle = \langle (1, -2, 0), (x, y, z) \rangle = 0 \implies x - 2y = 0$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y \end{cases}, \text{ obtemos } v_4 = (-2, -1, 5).$$

Para obtermos uma base ortonormal, normalizamos cada vetor dividindo-o por seu comprimento. Isto nos leva à base ortonormal

$$B = \left\{ w_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), w_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}.$$

Nesta base a matriz da transformação T é dada por

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, temos que $T(w_1) = w_1$, $T(w_2) = -w_2$ e $T(w_3) = -w_3$. Vemos que esta transformação consiste numa reflexão pelo eixo w_1 ; equivalentemente, ela pode ser vista como uma rotação de ângulo π ao redor do eixo w_1 . Vemos agora como a diagonalização permite-nos "entender" a transformação.

O próximo exemplo nos mostra que os autovalores de uma transformação ortogonal não são necessariamente reais.

Exemplo 8. Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz da transformação ortogonal T . Ela representa a rotação $\frac{\pi}{2}$ ao redor do eixo z ; isto pode ser verificado olhando-se para as imagens dos três vetores da base canônica:

$$T(e_1) = B[e_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(e_2) = B[e_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(e_3) = B[e_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que o vetor e_3 permanece fixo, enquanto que os dois vetores e_1 e e_2 são, ambos, rotacionados pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$ no plano (x, y) . O polinômio característico de B é

$$\det(\lambda I - B) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)$$

que tem raízes $1, i$ e $-i$. Os dois autovalores complexos i e $-i$ são conjugados entre si e ambos têm módulo 1.

Proposição 3. O determinante de uma matriz $n \times n$ é o produto de seus autovalores.

Proposição 4. Seja A uma matriz $n \times n$. Temos que $\det A^t = \det A$.

Proposição 5. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$. Então, $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Teorema 6. Uma matriz ortogonal sempre tem determinante $+1$ ou -1 .

Demonstração. Pelas proposições anteriores temos

$$\det AA^t = \det A \cdot \det A^t = (\det A)^2.$$

Assim, $AA^t = I$ implica $(\det A)^2 = 1$, donde obtemos $\det A = \pm 1$. □

De acordo com o Teorema 6, temos dois casos para uma matriz ortogonal:

det = 1: Nesse caso transformação ortogonal corresponde ao movimento de um sólido com um ponto fixo.

det = -1: Aqui, a transformação "inverte a orientação". Um exemplo deste tipo de transformação é a reflexão por um plano.

Antes do próximo resultado iremos revisar alguns conceitos sobre números complexos.

1. O conjugado de um número complexo $z = a + ib$ é o número complexo $\bar{z} = a - ib$.

Além disso, é fácil verificar que se z_1 e z_2 são números complexos,

$$\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \end{cases}$$

2. z é real se e somente se $z = \bar{z}$

3. O módulo de um número complexo $z = a + ib$ é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Proposição 6. *Se A é uma matriz real e se $\lambda = a + ib$ com $b \neq 0$ é um autovalor complexo de A com autovetor v , $\bar{\lambda} = a - ib$ é também um autovalor de A com autovetor \bar{v} .*

Demonstração. Seja v um autovetor de um autovalor complexo λ . Temos que $A[v] = \lambda[v]$. Tomando o conjugado esta expressão, obtemos $\overline{A[v]} = \bar{\lambda}[\bar{v}]$. Como A é real, temos que $\bar{A} = A$. Isto implica

$$A[v] = \bar{\lambda}[\bar{v}],$$

o que implica mostrar que $\bar{\lambda}$ é um autovalor de A com autovetor \bar{v} . □

O principal resultado que queremos obter é que qualquer matriz A ortogonal 3×3 com $\det A = 1$ corresponde a uma rotação por algum ângulo em torno de algum eixo. Logo abaixo iremos enunciar e provar esse resultado para as matrizes 2×2 . Em seguida desenvolver a teoria necessária para construir esse mesmo resultado para matrizes 3×3 .

Proposição 7. *Se A é uma matriz ortogonal 2×2 com $\det A = 1$, temos que A é a matriz rotação por um ângulo θ ,*

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi]$. Os autovalores são $\lambda_1 = a - ib$, com $a = \cos \theta$ e $b = \text{sen} \theta$. São ambos reais se e somente se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. No caso em que $\theta = 0$, obtemos $a = 1$, $b = 0$, e A é a matriz de rotação pelo ângulo π (também chamada de reflexão pela origem).

Demonstração. Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Como cada vetor coluna tem comprimento 1, temos que $a^2 + b^2 = 1$, o que nos permite ter $a = \cos \theta$ e $b = \text{sen} \theta$. Como os dois vetores são ortogonais, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle (a, b), (c, d) \rangle = 0 &\Leftrightarrow a.c + b.d = 0 \\ &\Leftrightarrow c \cos \theta + d \text{sen} \theta = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} c = -C \text{sen} \theta \\ d = C \cos \theta \end{cases}$$

para algum $C \in \mathbb{R}$. Como a segunda coluna é um vetor de comprimento 1, então $c^2 + d^2 = 1$, o que implica $C^2 = 1$ ou $C = \pm 1$. Finalmente, como $\det A = C$, devemos ter $C = 1$. O polinômio característico desta matriz é $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2a\lambda + 1$, o qual tem raízes $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Segue o resultado, já que

$$\pm\sqrt{a^2 - 1} = \pm\sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \pm\sqrt{-(1 - \cos^2 \theta)} = \pm i \operatorname{sen} \theta.$$

□

Lema 1. *Todos os autovalores reais de uma matriz ortogonal A são iguais a ± 1 .*

Demonstração. Seja λ um autovalor real e seja v um autovetor correspondente. Seja T a transformação ortogonal com matriz A . Logo $\langle T(v), T(v) \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$. Assim, $\lambda^2 = 1$. □

Proposição 8. *Se A é uma matriz ortogonal 3×3 com $\det A = 1$, temos que 1 é sempre um autovalor de A . Além disso, todos os autovalores complexos $\lambda = a + ib$ têm módulo 1.*

Demonstração. O polinômio característico de A , $\det(\lambda I - A)$, tem grau 3. Portanto, tem sempre uma raiz real λ_1 que só pode ser 1 ou -1 pela Lema 1. Os outros dois autovalores λ_2 e λ_3 são ou ambos reais ou complexos conjugados. O determinante de A é o produto dos seus autovalores, de forma que $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Se λ_2 e λ_3 são reais, temos que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{-1, 1\}$. Para seu produto ser 1, devemos ter ou todos os três iguais a 1, ou dois deles serem -1, e o outro 1. Assim pelo menos um autovalor é igual a 1. Se λ_2 e λ_3 são complexos conjugados, temos que $\lambda_2 = a + ib$ e $\lambda_3 = a - ib$, temos que $\lambda_2 \lambda_3 = |\lambda_2|^2 = a^2 + b^2$. Como $1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$, $\lambda_1 = 1$ e $a^2 + b^2 = 1$. □

Teorema 7. *Se A é uma matriz ortogonal 3×3 com $\det A = 1$, A é a matriz de rotação T por algum ângulo θ ao redor de algum eixo. Se A não é matriz identidade, o eixo de rotação corresponde ao eixo de rotação associado ao autovetor +1.*

Demonstração. Seja v_1 um autovetor unitário do autovalor 1. Considere o espaço ortogonal a v_1 :

$$E = \{W \in \mathbb{R}^3 / \langle v_1, w \rangle = 0\}$$

o qual é um subespaço de dimensão 2. Seja T uma transformação ortogonal com matriz A . Como T preserva produtos escalares e $T(v_1) = v_1$, se $w \in E$, $T(w) \in E$, dado que

$$\langle T(w), T(v_1) \rangle = \langle T(w), v_1 \rangle = \langle w, v_1 \rangle = 0.$$

Considere a restrição T_E de T a E . Seja $\alpha = \{v_2, v_3\}$ uma base ortonormal de E e considere a matriz B de T_E na base α . Se

$$B = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

isto significa que

$$\begin{cases} T(v_2) = b_{22}v_2 + b_{32}v_3 \\ T(v_3) = b_{23}v_2 + b_{33}v_3 \end{cases}.$$

Como T_E preserva produtos escalares, temos que B é necessariamente uma matriz ortogonal. Agora, considere a matriz $[T]_\alpha$ da transformação T expressa na base $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & \\ 0 & & \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz é igual a $\det B$. Logo, $\det B = \det A = 1$. Pela Proposição 8 temos que B é uma matriz de rotação, então temos

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Esta matriz nos diz que todos os vetores no plano E sofrem uma rotação pelo ângulo θ . Se decomposmos o vetor v como $v = Cv_1 + w$ com $w \in E$, então $T(v) = Cv_1 + T_E(w)$, onde T_E corresponde à rotação pelo θ no plano E . Isto corresponde à rotação pelo ângulo θ ao redor do eixo descrito por v_1 . \square

Seja A uma matriz ortogonal 3×3 com $\det A = 1$ e com três autovalores reais. Então, ou A é a matriz identidade com autovalores 1 ou A tem três autovalores 1, -1 , -1 . Neste último caso, A corresponde à reflexão pelo eixo gerado pelo autovetor associado com o autovalor $+1$. Esta rotação pode ser visualizada também como uma rotação pelo ângulo π ao redor do mesmo eixo.

Na tabela a seguir, apresentamos as rotações em \mathbb{R}^3 cujos eixos de rotação são os eixos coordenados.

Operador	Matriz $[T]_\alpha$
Rotação anti-horária em torno do eixo Ox por um ângulo θ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo Oy por um ângulo θ	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo Oz por um ângulo θ	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Uma matriz ortogonal A com $\det A = 1$ é uma matriz de rotação. Como podemos calcular o ângulo de rotação? Para isto iremos definir o traço de uma matriz.

Definição 9. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. O traço de A é a soma dos elementos ao longo de sua diagonal principal*

$$\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

Exemplo 9. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que o $\text{tr}(A) = 1 + 2 + 2 = 5$.*

Teorema 8. *O traço de uma matriz é igual a soma de seus autovetores.*

Proposição 9. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação com matriz A . O ângulo de rotação θ é tal que*

$$\cos \theta = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2}.$$

Definição 10. O produto vetorial de dois vetores $v = (x_1, y_1, z_1)$ e $w = (x_2, y_2, z_2)$ é o vetor $v \wedge w$ dado por

$$v \wedge w = \left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \end{array} \right)$$

Com os resultados e definições já vistas até agora podemos fazer uma análise das *Transformações ortogonais* em \mathbb{R}^3 a nossa principal ferramenta no estudo da cinemática de robôs.

Seja T uma transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 e A a matriz da transformação T . Se $\det A = 1$, temos que 1 é um dos autovalores de A e que a transformação é uma rotação. Se $\det A = -1$, temos que -1 é um autovalor e que a transformação pode ser descrita como a composição de uma reflexão por um plano passando pela origem com uma rotação ao redor da reta passando pela origem e perpendicular ao plano. Uma transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 com determinante -1 não pode ser um movimento de um sólido no espaço. Para determinar o eixo de rotação, encontramos o autovetor v_1 associado com o autovalor 1.

Calculamos o ângulo de rotação usando a Proposição 9. Há duas soluções possíveis, já que $\cos \theta = \cos(-\theta)$. Não podemos decidir entre os dois sem fazer um teste. Para isto escolhemos um vetor w ortogonal a v_1 e calculamos $T(w)$. Então, calculamos $w \wedge T(w) = Cv_1$, onde $|C| = |\sin \theta|$. O ângulo θ é o que satisfaz $C = \sin \theta$.

Temos agora todos os elementos necessários para definir e descrever os possíveis movimentos de um sólido no espaço.

Definição 11. Uma transformação F é um movimento de um sólido no espaço, se F preserva distâncias e ângulos, e se, para todos os conjuntos de vetores, com a mesma origem P , que formam uma base ortonormal v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}^3 com $v_3 = v_1 \wedge v_2$, tivermos que $F(v_1), F(v_2), F(v_3)$ também é base ortonormal de \mathbb{R}^3 com origem em $F(P)$, tal que $F(v_3) = F(v_1) \wedge F(v_2)$, ou seja, preserva orientação [1].

Teorema 9. Todo movimento de um sólido no espaço é a composição de uma translação e uma rotação ao redor de algum eixo.

Demonstração. Seja F uma transformação em \mathbb{R}^3 que descreve o movimento de um sólido. Ela preserva ângulos e distâncias. Considere um ponto do sólido na posição inicial $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e uma posição final $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ após a transformação. Seja $v = \overrightarrow{P_0 P_1}$ e seja G a operação de translação por v . Seja $T = F \circ G^{-1}$. Então, $T(P_1) = F(P_1 - v) =$

$F(P_0) = P_1$. Logo, P_1 é um ponto fixo de T . Como T preserva distâncias e ângulos e tem um ponto fixo, é linear. Consequentemente, uma transformação ortogonal com matriz A . Mas vimos que se $\det A = -1$, A não poderia ser uma transformação de um sólido. Portanto, $\det A = 1$, e desta forma T é uma rotação. \square

3.2 Mudança de base

Utilizar diversas bases para um espaço vetorial nos dar a possibilidade de olhar para um problema de forma mais simples.

Anteriormente vimos como diagonalização permite-nos entender a estrutura de uma transformação linear.

Como a noção de base é a generalização para espaços vetoriais arbitrários da noção de sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , mudar de base é análogo a mudar de eixos coordenados em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . A teoria dessa seção pode ser encontrada em [1], [4] e [2].

Dado um espaço vetorial V arbitrário de dimensão finita e duas bases α e β de V , podemos obter uma relação entre as matrizes $[v]_\alpha$ e $[v]_\beta$ de um vetor $v \in V$, usando para isto, a matriz de mudança de base P , onde

$$[v]_\alpha = P[v]_\beta.$$

As colunas de P são as coordenadas dos vetores de α escritos na base β . No caso em que as duas bases são ortonormais, temos que P é ortogonal.

Se Q é a matriz mudança de base de β para α , segue que $Q = P^{-1}$. As colunas de Q são as coordenadas dos vetores de β escritos na base α . No caso em que as duas bases são ortonormais, temos que, $Q = P^t$ e, portanto as colunas de Q são as linhas de P .

Seja A uma matriz descrevendo a transformação T na base β , denotada por $A = [T]_\beta$. As coordenadas de $T(v)$ na base β são determinadas por

$$[T(v)]_\beta = A[v]_\beta = [T]_\beta[v]_\beta.$$

Como no caso de base canônica, as colunas de A são dadas pelos vetores coordenadas na base β das imagens dos vetores em β sob a transformação T .

Teorema 10. *Seja T uma transformação linear e seja α e β duas bases de \mathbb{R}^3 . Seja P a matriz mudança de base de α para β . Então,*

$$[T]_{\beta} = P[T]_{\alpha}P^{-1}.$$

Demonstração. Seja v um vetor. Temos que

$$[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}[v]_{\beta}.$$

Também temos que

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\beta} &= P[T(v)]_{\alpha} \\ &= P([T]_{\alpha}[v]_{\alpha}) \\ &= P[T]_{\alpha}(P^{-1}[v]_{\beta}) \\ &= (P[T]_{\alpha}P^{-1})[v]_{\beta} \end{aligned}$$

Então

$$[T]_{\beta} \cdot [v]_{\beta} = P[T]_{\alpha}P^{-1} \cdot [v]_{\beta} \implies [T]_{\beta} = P[T]_{\alpha}P^{-1}.$$

□

Exemplo 10. *Considerando a base canônica α de \mathbb{R}^2 e a outra base $\beta = \{(1, 1), (1, 2)\}$, temos que*

$$[P]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

onde a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} (1, 0) = a_1(1, 1) + a_2(1, 2) \\ (0, 1) = b_1(1, 1) + b_2(1, 2) \end{cases}.$$

Resolvendo as equações acima, obtemos $a_1 = 2, a_2 = -1, b_1 = -1$ e $b_2 = 1$. Portanto,

$$[P]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja agora $v = (x, y)$ em \mathbb{R}^2 , se

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

o que garante que

$$x' = 2x - y \quad e \quad y' = -x + y$$

são as coordenadas de v na base β . Ou seja,

$$(x, y) = (2x - y)(1, 1) + (-x + y)(1, 2).$$

A Figura 3.1 ilustra como a determinação do par $(2, 3)$ em \mathbb{R}^2 depende da base com a qual estamos trabalhando.

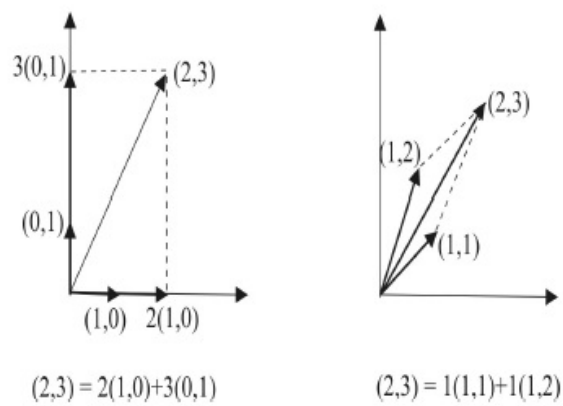


Figura 3.1

Capítulo 4

Movimento de robôs

Neste capítulo iremos traçar o esquema de um braço robótico e os referenciais necessários para calcular a posição do final do seu punho. No referencial apropriado, iremos descrever os seis movimentos de rotação correspondente aos seis graus de liberdade do braço robótico. Na **Seção 4.3** iremos resolver a questão 16 localizada no capítulo 3 do livro "**Matemática e Atualidades**" [1].

4.1 Esquema de um braço robótico

Considere o robô tridimensional na figura 4.1. Ele consiste em três juntas articuladas e uma garra. Na figura temos indicadas seis rotações que o robô pode efetuar, numeradas de 1 a 6. O robô está preso a uma parede, com o primeiro segmento perpendicular a ela. Este segmento não é fixo, podendo rotacionar, no entanto, ao redor de seu eixo central, como mostrado pelo movimento 1. No final do primeiro segmento, existe um segundo segmento. A junta entre os dois segmentos é similar a um joelho, por seu movimento estar restrito a um plano (como mostrado para o movimento 2). Se combinarmos esta rotação permitida com aquela do movimento 1, vemos que o plano rotacional de 2 gira em torno do primeiro segmento. Assim, a composição destas duas rotações permite-nos posicionar o segundo segmento em qualquer direção possível. Agora, considere o terceiro segmento. A rotação 3 permite o segmento direcionar-se num plano (como a rotação 2), enquanto que a rotação 4 permite ao segmento rotacionar em torno de seu eixo. Este segmento pode ser comparado a um ombro, podemos levantar nosso braço (equivalente à rotação 3) e podemos girar nosso braço em torno de seu eixo (equivalente a rotação 4). (Na realidade, um ombro não está restrito a levantar nosso

braço ao longo de um único plano, tendo assim outro grau de liberdade comparado a este segmento, já que conseguimos girá-lo ao redor de nosso corpo mantendo ângulo fixo com a vertical). Finalmente, há um garra ligada ao final do terceiro segmento. A garra tem duas rotações associadas: a rotação 5 atua num plano e varia o ângulo entre o terceiro segmento e a garra, e a rotação 6 permite à garra girar ao redor de seu eixo [1].

Para um operador usar o robô a fim de agarrar um objeto, posicionar precisamente a garra é de extrema importância que este operador especifique:

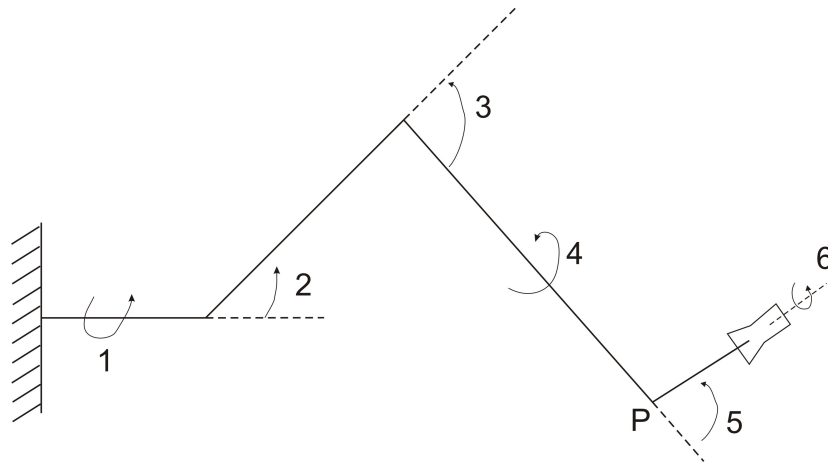


Figura 4.1: Um robô tridimensional com seis graus de liberdade.

1. a posição de P que é identificada pelas três coordenadas (x, y, z) de P no espaço.
2. a direção do eixo da garra. Uma direção pode ser especificada por um vetor, assim parece que três números seriam necessários. No entanto, existe um infinito números de vetores que apontam na mesma direção. Portanto, uma maneira mais eficiente de fornecer uma direção seria imaginar um vetor unitário na superfície da esfera. O raio partindo de P passando por Q especifica uma única direção. Se tomarmos uma direção, isto é, um raio emanado de P , isto intersectará a esfera em exatamente um ponto. Especificar um ponto na esfera é, portanto, suficiente para identificar unicamente uma direção. Isto pode ser feito de forma mais eficiente com coordenadas esféricas.

Os pontos na esfera de raio 1 são

$$(a, b, c) = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi),$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Desta forma, os dois números θ e ϕ são suficientes para descrever as direções da garra. (Figura 4.2)

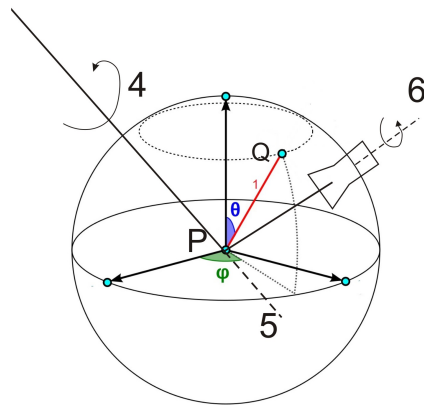


Figura 4.2: Coordenadas esféricas.

3. A garra pode posicionar-se ao redor do seu eixo por uma rotação, o ângulo é especificado com um único parâmetro α .

No total são requeridos seis números $(x, y, z, \theta, \phi, \alpha)$ para se especificar a posição e a orientação da garra. Dizemos que o robô possui seis graus de liberdade. As rotações 1, 2 e 3 são usadas para posicionar P na posição desejada (x, y, z) . As rotações 4 e 5 são usadas para orientar corretamente o eixo da garra, e a rotação 6 gira a garra no ângulo desejado ao redor de seu eixo. Estes seis movimentos correspondem aos seis graus de liberdade.

A garra é um exemplo do que é chamado um sólido em \mathbb{R}^3 , e já vimos que sempre são requeridos seis números para especificar a posição de um sólido no espaço.

Seis graus de liberdade, ou seja, seis movimentos independentes são necessários para que o robô alcance qualquer posição possível com qualquer orientação possível. Portanto seis graus de liberdade são também requeridos para o sistema de controle que manipula o robô.

Podemos construir um robô com mais de seis graus de liberdade acrescentando segmentos adicionais e até instalá-lo num trilho. Isto irá possivelmente aumentar o tamanho e alterar o formato da região que pode ser alcançada, mas não mudará sua dimensão. Isso lhe dará mais flexibilidade permitindo que desvie de obstáculos.

Por outro lado, poderíamos pensar em construir um robô com apenas cinco graus de liberdade. Haverá somente um pequeno conjunto de posições alcançáveis se comparado com uma maioria devastadora de posições não alcançáveis.

O robô da Figura 4.1 usa apenas rotações para se mover. Podemos ao construir um robô usar movimentos de translações por um trilho ou braços telescópicos (segmentos cujos comprimentos podem ser alterados).

Descrever os movimentos de um robô é o mesmo que descrever a movimentação de um sólido em \mathbb{R}^3 . Já vimos que tais movimentos são composições de rotações e translações. Em geral, rotações distintas terão eixos rotacionais distintos.

Se escolhermos um sistema de coordenadas cuja origem está sobre um eixo de rotação então a rotação é uma transformação linear. Sua matriz é mais simples se o eixo de rotação é um dos eixos coordenados.

Como os eixos rotacionais são distintos, devemos considerar mudanças de sistemas de coordenadas, tais aplicações nos permite calcular as coordenadas do mesmo ponto em um novo sistema de coordenadas. Considerando nosso robô da Figura 4.1, estas transformações irão nos permitir calcular a posição final da garra após aplicar as rotações $R_i(\theta_i)$ pelos ângulos θ_i , para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ [1].

4.2 Cálculo de referenciais para um robô

Para calcular a posição de um corpo rígido no espaço tridimensional, associamos a ele um referencial fixado nele. Em um robô esses referenciais serão fixados nas suas juntas. Qualquer ponto do corpo rígido possuirá coordenadas invariantes no seu referencial associado.

Definição 12. *Um referencial no espaço consiste em um ponto $P \in \mathbb{R}^3$, chamado de origem, e uma base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 .*

Para calcular um referencial devemos definir um sistema de coordenadas centrado no ponto P cujos eixos são orientados de acordo com a base B . As unidades do sistema de coordenadas usuais são escolhidas de forma que os vetores v_i sejam os vetores unitários $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ quando expressos neste sistema de coordenadas.

Considere o robô da figura 4.1, que reproduzimos esquematicamente na figura 4.3 a seguir, e após rotações na figura 4.4. Especificamos sete referenciais R_0, \dots, R_6 , centrados em P_0, \dots, P_6 respectivamente. Cada referencial está associado com um conjunto de eixos x_i, y_i e z_i para $i = 0, \dots, 6$, as direções dadas pelas bases B_0, \dots, B_6 . O referencial R_i é centrado em P_i (figuras 4.3 e 4.4). Quando o robô está recolhido na sua posição base, todos os referenciais têm eixos paralelos (figura 4.3). Os próprios referenciais irão se mover quando o robô se move. De fato, como o mover de uma junta afeta todas as próximas juntas ao longo do braço, o referencial R_i depende de qualquer movimento das juntas $1, \dots, i$ e independe daqueles aplicados nas juntas $i + 1, \dots, 6$.

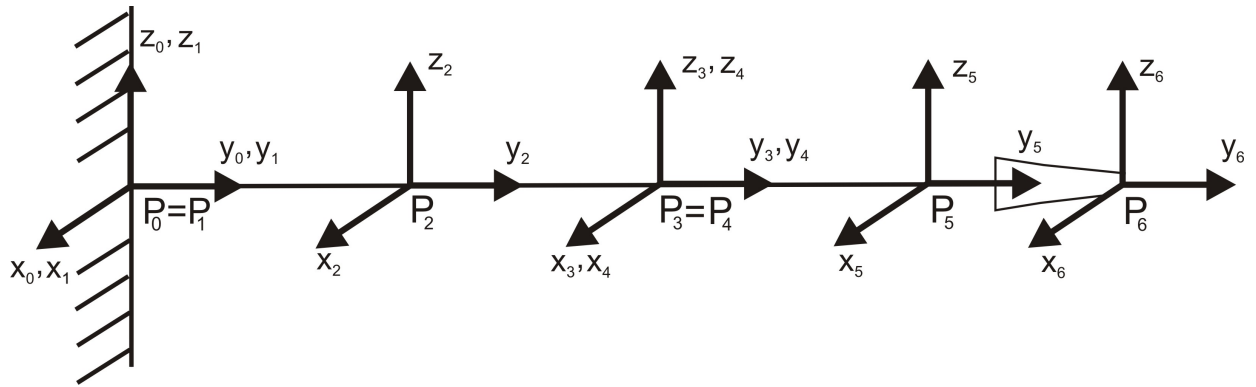


Figura 4.3: Os referenciais distintos do robô da Figura 4.1.

Descreveremos a sequência de movimentos aplicados ao robô que o colocará na posição da Figura 4.4.

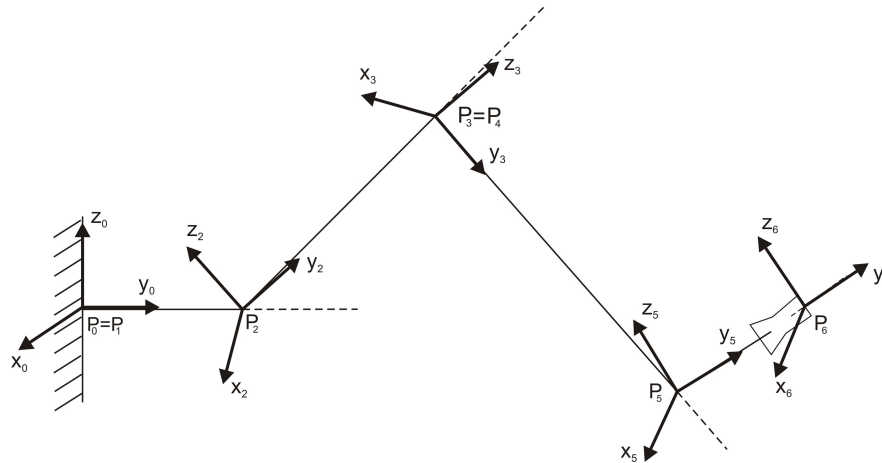


Figura 4.4: Os referenciais após as rotações das juntas 2, 3, 5 e 6.

1. O primeiro movimento consiste na rotação T_1 de ângulo θ_1 ao redor do eixo y_0 . No referencial R_0 , isto é uma transformação linear, pela origem permanecer fixa. Na base B_0 ela é descrita pela matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\text{sen } \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}.$$

O segundo referencial R_1 é alterado por este movimento, obtido ao se aplicar T_1 em R_0 . A base B_0 é dada pela imagem de B_0 por T_1 .

2. O segundo movimento é uma rotação T_2 de ângulo θ_2 ao redor do eixo x_2 , descrita pela matriz

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 \\ 0 & \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

3. O terceiro movimento é por exemplo, uma rotação T_3 de ângulo θ_3 ao redor do eixo x_3 , descrita pela matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\text{sen } \theta_3 \\ 0 & \text{sen } \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}.$$

Dependendo da rotação aplicada na rotação T_1 , o terceiro movimento será uma rotação aplicada ao redor de x_3 ou z_3 .

4. O quarto movimento é uma rotação T_4 de ângulo θ_4 ao redor do eixo y_4 dada pela matriz

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\text{sen } \theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 \end{bmatrix}.$$

5. O quinto movimento consiste na rotação T_5 por um ângulo θ_5 ao redor do eixo x_5 , descrita pela matriz

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_5 & -\text{sen } \theta_5 \\ 0 & \text{sen } \theta_5 & \cos \theta_5 \end{bmatrix}.$$

6. O sexto movimento é uma rotação T_6 de ângulo θ_6 ao redor do eixo y_6 , dada pela matriz

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & 0 & -\text{sen } \theta_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta_6 & 0 & \cos \theta_6 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular a posição de um ponto do braço robótico com respeito aos vários referenciais. Para isto, iremos começar a calcular como os vários eixos são modificados quando passamos de um referencial para o outro. Isto nos permitirá encontrar a "operação" da base B_{i+k} na base B_i . As colunas da matriz A_i dão as coordenadas dos vetores da base B_{i+k} expressos na base B_i . Isto é uma mudança de base de B_{i+k} para B_i , e a denotaremos M_i^{i+1} . Iremos utilizar sem provar que $M_i^{i+k} = M_i^{i+1} M_{i+1}^{i+2} \dots M_{i+k-1}^{i+k}$.

Seja Q um ponto no espaço. Encontrar sua posição no referencial R_i significa encontrar o vetor $\overrightarrow{P_i Q}$ na base B_i ou seja, $[\overrightarrow{P_i Q}]_{B_i}$. Sua posição no referencial R_{i-1} é dada por

$$[\overrightarrow{P_{i-1} Q}]_{B_{i-1}} = [\overrightarrow{P_{i-1} P_i}]_{B_{i-1}} + [\overrightarrow{P_i Q}]_{B_{i-1}} = [\overrightarrow{P_{i-1} P_i}]_{B_{i-1}} + M_{i-1}^i [\overrightarrow{P_i Q}]_{B_i} [1].$$

Esta abordagem será utilizada para calcular o movimento de cada uma das juntas $i = 1, \dots, 6$.

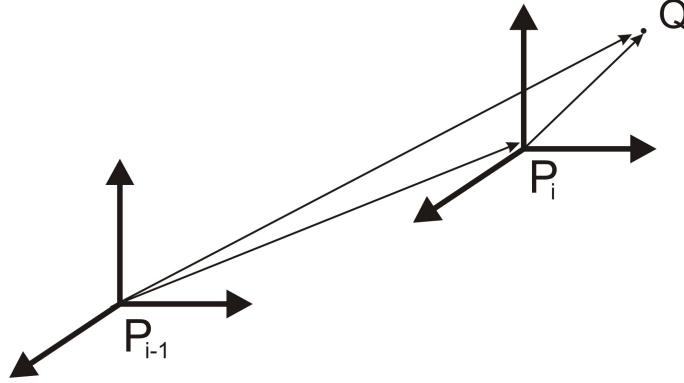


Figura 4.5

Determinaremos a posição e orientação da extremidade do braço na base B_0 , levando em conta as rotações das juntas $\theta_1, \dots, \theta_6$, respectivamente. Suponha que saibamos a posição Q no referencial R_6 , denotado por $[\overrightarrow{P_6 Q}]_{B_6}$.

(a) Seja l_5 o comprimento da garra. Então,

$$[\overrightarrow{P_5 Q}]_{B_5} = [\overrightarrow{P_5 P_6}]_{B_5} + [\overrightarrow{P_6 Q}]_{B_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_5^6 [\overrightarrow{P_6 Q}]_{B_6}.$$

(b) Seja l_4 o tamanho do terceiro segmento do robô. Temos

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_4 Q}]_{B_4} &= [\overrightarrow{P_4 P_5}]_{B_4} + [\overrightarrow{P_5 Q}]_{B_4} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + M_4^5 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_5^6 [\overrightarrow{P_6 Q}]_{B_6} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + M_4^5 \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_4^6 [\overrightarrow{P_6 Q}]_{B_6}. \end{aligned}$$

(c) O referencial R_3 tem a mesma origem de R_4 : $P_3 = P_4$. Portanto, o mesmo referencial R_3 ,

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_3Q}]_{B_3} &= M_3^4 [\overrightarrow{P_4Q}]_{B_3} = M_3^4 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + M_4^5 \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_4^6 [\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6} \right) \\ &= M_3^4 \begin{bmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + M_3^5 \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_3^6 [\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6}. \end{aligned}$$

(d) Seja l_2 o segundo segmento do robô. Então,

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_2Q}]_{B_2} &= [\overrightarrow{P_2P_3}]_{B_2} + [\overrightarrow{P_3Q}]_{B_2} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} + M_2^4 \begin{bmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + M_2^5 \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_2^6 [\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6}. \end{aligned}$$

(e) Seja l_1 o comprimento do primeiro segmento do robô. Temos

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_1Q}]_{B_1} &= [\overrightarrow{P_1P_2}]_{B_1} + [\overrightarrow{P_2Q}]_{B_1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} + M_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} + M_1^4 \begin{bmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + M_1^5 \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_1^6 [\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6}. \end{aligned}$$

(f) E por fim como $P_0 = P_1$, temos

$$[\overrightarrow{P_0Q}]_{B_0} = M_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} + M_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} + M_0^4 \begin{bmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + M_0^5 \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} + M_0^6 [\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6}. \quad (4.1)$$

Pondo $l_3 = 0$, podemos rescrever a equação (4.1) como

$$[\overrightarrow{P_0Q}]_{B_0} = \sum_{i=1}^5 M_0^i \begin{bmatrix} 0 \\ l_i \\ 0 \end{bmatrix} + M_0^6 [\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6}.$$

Disso, temos

$$[\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6} = M_6^0 [\overrightarrow{P_0Q}]_{B_0} - \sum_{i=1}^5 M_6^i \begin{bmatrix} 0 \\ l_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde M_6^i é a matriz mudança de base de B_i para B_6 . Temos que $M_6^i = (M_i^6)^{-1} = (M_i^6)^t$. Se necessário, podemos calcular $[\overrightarrow{P_i Q}]_{B_i}$ em função de $[\overrightarrow{P_0 Q}]_{B_0}$.

4.3 Braço robótico Canadarm

O Canadarm (Sistema Manipulador Remoto Espacial) é um braço robótico anexado à Estação Espacial Internacional. Inicialmente estava fixado na estação. Passou a ser montado em trilhos, permitindo que se movesse ao longo da estação. Isto facilitava o trabalho dos astronautas ao montarem novos módulos da estação espacial ou efetuar reparos. Foi com o auxílio do Canadarm que a NASA conseguiu reparar no espaço o telescópio espacial Hubble em 1993, vê **figura 4.6** [6].

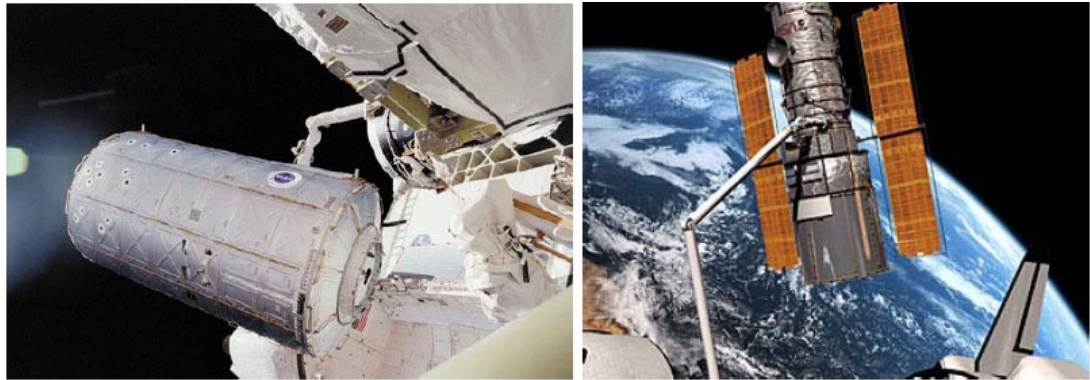


Figura 4.6 Canadarm colocando um satélite em órbita (à esquerda) ou reparando o telescópio Hubble (à direita).

O Canadarm é um robô com seis graus de liberdade. Semelhante ao braço humano, consiste em dois segmentos, no final do qual encontra-se um tipo de punho (**figura 4.7**).

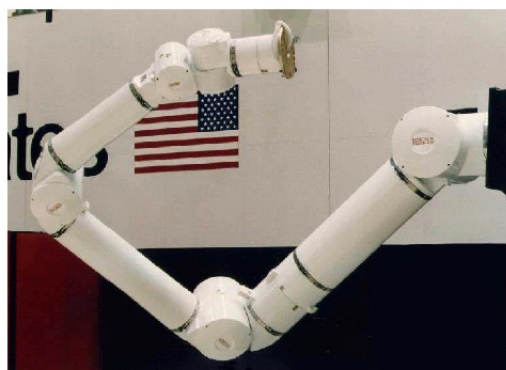


Figura 4.7 Braço manipulador robótico também chamado de Canadarm, que tem 6 graus de liberdade.

O primeiro segmento está anexado na estação, e pode fazer um ângulo arbitrário com o suporte, possibilitando tanto movimentos de inclinação (acima e abaixo) quanto de guinada (de um lado ao outro). A junta entre os dois segmentos tem somente um grau de liberdade, permitindo somente um movimento para cima e para baixo, semelhante a um cotovelo. A junta semelhante a um punho tem três graus de liberdade, permitindo inclinação, guinada e rolamento (rotação em torno de seu eixo). O comprimento do primeiro segmento é l_2 e do segundo é l_3 , o comprimento da garra é igual a l_5 vê **figura 4.8**.

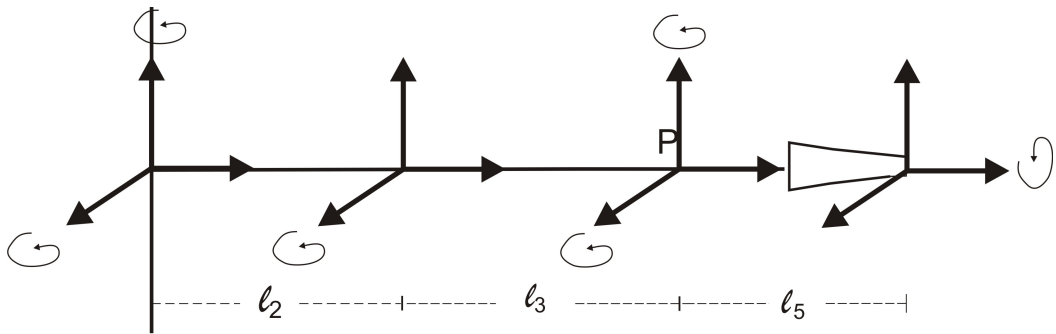


Figura 4.8 Esquema do braço manipulador Canadarm.

Na **figura 4.9** podemos visualizar os referenciais R_0, R_1, \dots, R_6 do Canadarm centrados nos pontos P_0, P_1, \dots, P_6 , respectivamente, cujos eixos coordenados são x_i, y_i e z_i com $i = 0, 1, \dots, 6$ e as bases B_0, B_1, \dots, B_6 , respectivamente, informam a direção dos eixos. O referencial base R_0 de centro $P_0 = (0, 0, 0)$ é fixo.

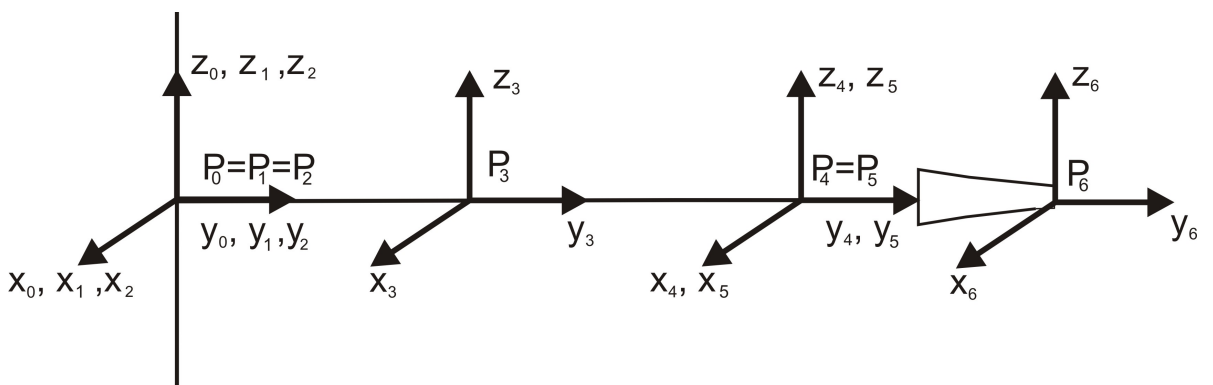


Figura 4.9 Os referenciais do manipulador Canadarm.

A seguir iremos descrever os seis movimentos que colocarão o robô da **figura 4.8** na posição da **figura 4.10**.

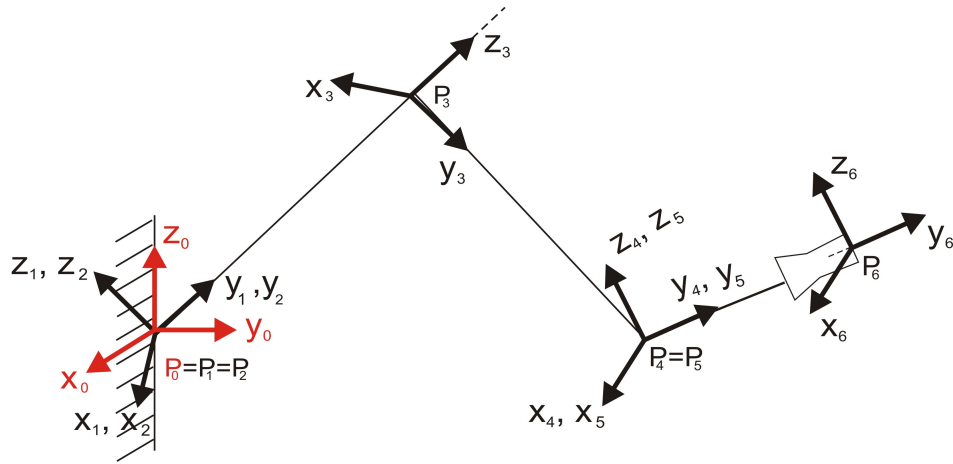


Figura 4.10: Os referenciais após as rotações das juntas.

O primeiro movimento é a transformação T_1 de ângulo θ_1 ao redor do eixo z_1 . No referencial R_1 , isto é uma transformação linear, que desloca lateralmente o braço. Na base B_1 , ela é descrita pela matriz ortogonal

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \text{sen} \theta_1 & 0 \\ \text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A rotação T_1 altera o referencial R_2 . A base B_2 é dada pela imagem de B_1 por T_1 .

O segundo movimento é a rotação T_2 de ângulo θ_2 ao redor do eixo x_2 que desloca o braço verticalmente. Na base B_2 ela é descrita pela matriz

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\text{sen} \theta_2 \\ 0 & \text{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}.$$

O terceiro movimento é a rotação T_3 de ângulo θ_3 ao redor do eixo x_3 descrita pela matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\text{sen} \theta_3 \\ 0 & \text{sen} \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}.$$

O quarto movimento é uma rotação T_4 de ângulo θ_4 ao redor do eixo z_4

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\text{sen } \theta_4 & 0 \\ \text{sen } \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O quinto movimento é uma rotação T_5 de ângulo θ_5 ao redor do eixo x_5 , descrita pela matriz

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_5 & -\text{sen } \theta_5 \\ 0 & \text{sen } \theta_5 & \cos \theta_5 \end{bmatrix}.$$

O sexto movimento é uma rotação T_6 de ângulo θ_6 ao redor do eixo y_6 descrita pela matriz

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & 0 & -\text{sen } \theta_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta_6 & 0 & \cos \theta_6 \end{bmatrix}.$$

Iremos calcular a posição do final da garra com respeito aos vários referenciais. Partindo do mesmo princípio do robô anterior, usaremos o resultado da **Seção 4.2** para determinar a posição e orientação da extremidade do robô na base em função do referencial base, levando em conta as rotações das várias juntas nos ângulos $\theta_1, \dots, \theta_6$.

Seja $[\overrightarrow{P_0Q}]_{B_0}$ a posição da extremidade da garra no referencial base R_0 . Fazendo $l_1 = l_4 = 0$, então

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_6Q}]_{B_6} &= M_6^0 [\overrightarrow{P_0Q}]_{B_0} - \sum_{i=1}^5 M_6^i \begin{bmatrix} 0 \\ l_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= M_6^0 [\overrightarrow{P_0Q}]_{B_0} - M_6^2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} - M_6^3 \begin{bmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{bmatrix} - M_6^5 \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (M_0^6)^t [\overrightarrow{P_0Q}]_{B_0} - (M_2^6)^t \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} - (M_3^6)^t \begin{bmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{bmatrix} - (M_5^6)^t \begin{bmatrix} 0 \\ l_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$M_0^6 = M_0^1 M_1^2 M_2^3 M_3^4 M_4^5 M_5^6 = A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5,$$

$$M_2^6 = M_2^3 M_3^4 M_4^5 M_5^6 = A_2 A_3 A_4 A_5,$$

$$M_3^6 = M_3^4 M_4^5 M_5^6 = A_3 A_4 A_5,$$

$$M_5^6 = A_5.$$

A rotação A_6 determina a rotação da garra em torno do seu próprio eixo, portanto não é responsável pela posição final da garra. Com isso podemos calcular a posição do final da garra em função do referencial base após as rotações de ângulo $\theta_1, \dots, \theta_6$.

Assim como no **Exemplo 7** onde diagonalizamos a matriz da transformação ortogonal com o objetivo de visualizar de uma maneira mais simples o comportamento da transformação. Nesse caso podemos diagonalizar as matrizes A_1, \dots, A_6 para facilitar as contas.

Capítulo 5

Considerações finais

Durante este trabalho estudamos uma importante aplicação da álgebra linear para o mundo moderno, onde a automação vem sendo cada vez mais presente nas indústrias. Tal aplicação possibilita tanto ao aluno de graduação como o de ensino médio, perceber o sentido e a importância dessa área da matemática.

Foram revisados durante o texto a definição de transformação linear bem como as suas propriedades mais relevantes para o estudo da cinemática de robôs. Com ênfase nas transformações ortogonais, já que elas preservam distância, ângulo e orientação que por sua vez é peça fundamental no estudo da cinemática direta, pois a matriz de rotação se trata de uma matriz de uma transformação ortogonal como vimos no texto.

Com os robôs das Seção 4.2 e 4.3 resolvemos apenas o problema da cinemática direta, que consiste em determinar a localização da garra a partir ds rotações e translações estabelecidas. O problema da cinemática direta pode ser resolvido para qualquer robô manipulador utilizando transformações ortogonais, que relacionam a localização de um referencial em relação ao referencial anterior na cadeia cinemática. A solução do problema da cinemática direta é única. Esta solução pode ser obtida em forma analítica fechada ou em forma numérica através de um procedimento sistemático. Nesse trabalho nos restringimos apenas a solução analítica.

Não podemos deixar de ressaltar que resolvemos apenas um dos problemas relacionados a cinemática de robôs. Outro problema a se considerar é o da cinemática inversa, que diz: dada uma posição final da garra, determinar a sequência de movimentos que a levarão a esta posição. Resolver esse problema envolve geralmente solucionar sistemas

de equações não lineares. Para mais informações sobre cinemática inversa veja [13].

Com empenho e dedicação podemos tornar nossas aulas mais significativas para nossos alunos, mostrando que conteúdos como matrizes e determinantes possuem aplicações no mundo moderno.

Referências Bibliográficas

- [1] ROUSSEAU, Christiane; SAINT-AUBIN, Yan. - *Matemática e Atualidades*, Volume 1. 1ª ed., Rio de Janeiro, RJ, SBM, 2015.
- [2] HEFEZ, Abramo; FERNANDES, Cecília de Souza - *Introdução à Álgebra linear*. 2ª ed., Rio de Janeiro, RJ, SBM, 2016.
- [3] HEFEZ, Abramo; FERNANDES, Cecília de Souza - *Exercícios resolvidos de álgebra linear*. 1ª ed., Rio de Janeiro, RJ, SBM, 2016.
- [4] LIMA, Elon Lages - *Algebra Linear*. 9ª ed., Rio de Janeiro, RJ, IMPA, 2007.
- [5] GÔMEZ, Jorge Joaquín Delgado; FRENSEL, Katia Rosensvald; CRISSAFF, Lhaylla dos Santos - *Geometria Analítica*. 1ª ed., Rio de Janeiro, RJ, SBM, 2013.
- [6] J. A. M. Felipe de Souza - *Robótica*. Disponível em: < [http : //webx.ubi.pt/ ~ felippe/main_pgs/mat_didp.htm](http://webx.ubi.pt/~felippe/main_pgs/mat_didp.htm) > . Acesso em: 9 de jun de 2016. Robôs no espaço, cap 6.
- [7] ASIMOV, Isaac - *Eu robô*. 1ª ed., Editora Aleph, 2014.
- [8] ANÔNIMO - *Ancient Egypt*. Dodd, Mead Company, New York, 2002. Disponível em: < [www.marcdatabase.com/lemur/dm – ancient – automata.html](http://www.marcdatabase.com/lemur/dm-ancient-automata.html) >. Acesso em: 10 de fev de 2016.
- [9] THURSTON, Robert H. - *A history of the growth of the steam-engine*. Disponível em: < www.history.rochester.edu/steam/thurston/1887/index.html >. Acesso em: 10 de fev de 2016.

- [10] DUCK, Vaucanson's, 2001. Disponível em :
< www.rennard.org/alife/english/alimggb.html. >. Acesso em 10 de fev
de 2016.
- [11] THE FRANKLIN INSTITUTE SCIENCE MUSEUM - *The Maillardet automation*,
2002. Disponível em: < www.sln.org/pieces/knox/automaton >. Acesso em 12
de fev de 2016.
- [12] WALTER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira; DO CARMO, Man-
fredo Perdigão- *Trigonometria e Números Complexos*. 3ª ed., Rio de Janeiro, RJ,
SBM, 2005.
- [13] SEQUEIRA, João Silva - *Introdução à Robótica*. Disponível em :
< [http : //users.isr.ist.utl.pt/ jseq/caps1 – 6.pdf](http://users.isr.ist.utl.pt/jseq/caps1-6.pdf) >. Acesso em 18 de fev
de 2016.